УНИВЕРСИТЕТСКАЯ СЕРИЯ

Основана в 1998 г. издательством "Научная книга" (ИДМИ)

Учебники и учебные пособия по теоретической математике. Авторы — известные ученые и лекторы ведущих университетов мира. Оригиналы и переводы на русский язык. Избранные тома серии Graduate Studies in Mathematics (Американское математическое общество)

12. **Годунов С. К.** Лекции по линейной алгебре, 2002.
11. **Буттацо Дж., Джаквинта М., Гильдебрандт С.** Одномерные вариационные задачи. Введение, 2002. *Пер. с англ.*
10. **Кириллов А. А..** Лекции по методу орбит, 2002.
9. **Эванс Л. К.** Методы слабой сходимости в нелинейных уравнениях с частными производными, 2002. *Пер. с англ.*
8. **Эванс Л. К.** Уравнения с частными производными, 2002. *Пер. с англ.*
7. **Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.** Теория меры и тонкие свойства функций, 2002. *Пер. с англ.*
6. **Януш А. Дж.** Алгебраические числовые поля, 2001. *Пер. с англ.*
5. **Фурсиков А. В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения, 1999.
4. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения, 1998.
3. **Годунов С. К., Михайлова Т.Ю.** Представления группы вращений и сферические функции, 1998
2. **Крылов Н.В.** Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера, 1998. *Пер. с англ.* (GSM–12)
1. **Либ Э., Лосс М.** Анализ, 1998. *Пер. с англ.* (GSM–14)

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ СЕРИЯ Том 10

Основана в 1998 г. издательством "Научная книга" (ИДМИ)

ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДУ ОРБИТ

А. А. Кириллов

Университет Пенсильвании (США)
Институт проблем передачи информации РАН (Россия)

Новосибирск • Научная книга • 2002

К431

Кириллов А. А.

К431 Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. — xiv+290 с. — (Университетская серия. Т. 10).

ISBN 5-88119-036-X

Книга следует курсу лекций, прочитанных автором (и основателем метода орбит) в Московском госуниверситете (Россия), а также в университетах Парижа (Франция), Марселя (Франция), Кембриджа (Англия) Гамбурга (Германия), Мэриленда (США), Пенсильвании (США) и др. Первая часть (лекции 1–6) содержит традиционный материал из теории представлений и основные положения метода орбит. Во второй части (лекции 7–11) демонстрируется применение метода орбит, обсуждаются сильные и слабые стороны этого метода и формулируются нерешенные проблемы. Приводится большое количество примеров и упражнений. Изложение адаптировано для неспециалистов в области теории представлений и молодых математиков с целью познакомить с успешно работающим в математике и физике методом орбит и привлечь внимание к нерешенным проблемам, для исследования которых метод орбит мог бы быть полезным. Полностью или частично книга может служить справочником по теории представлений в объеме университетского курса. Книга содержит также материал, представляющий интерес для специалистов, непосредственно работающих с теорией представлений.

Для математиков и физиков — специалистов и неспециалистов по теории представлений, аспирантов и студентов математических и физических факультетов университетов.

Издание осуществлено при финансовой поддержке "Научной книги" (ИДМИ) и Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 99-01-14099

ISBN 5-88119-036-X

Памяти моих родителей

Анны Алексеевны Смирновой

Александра Ивановича Кириллова

Содержание

Лекция 1. Гладкие многообразия 1

1. Определение гладкого многообразия 1
   - 1.1. Аналитическое определение 1
   - 1.2. Геометрическое определение 7
   - 1.3. Алгебраическое определение 9
   - 1.4.* Подход, основанный на понятии категории 12
2. Геометрия на многообразиях 15
   - 2.1. Векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях 15
   - 2.2. Геометрические объекты на многообразиях 18
   - 2.3. Интегрирование на многообразиях 19
   - 2.4. Линейные расслоения со связностями 20

3*. Некоммутативная геометрия 22
   - 3.1. Супермногообразия 23
   - 3.2. Квантовые группы 26
   - 3.3. Геометрические объекты на супермногообразиях 28

Лекция 2. Инвариантные операции на геометрических объектах 31

1. Внешнее дифференцирование как пример инвариантной операции 31
2. Геометрические объекты 33
3. Представления $GL_+(n, \mathbb{R})$ 35
4. Геометрические объекты высшего дифференциального порядка 37
5. Общие свойства инвариантных операций 37
   - 5.1. Операции на тензорных плотностях 37
   - 5.2. Общие сведения об инвариантных операциях 39
   - 5.3. Действие симметрической группы 40
6. Линейные (унарные) инвариантные операции 40
7. Билинейные инвариантные операции 42
8. Инвариантные операции на супермногообразиях 47

Лекция 3. Группы Ли и алгебры Ли 49

1. Группы Ли 49
   - 1.1. Определение и примеры групп Ли 49
   - 1.2. Инволютивные группы Ли 54
   - 1.3. Комплексные группы Ли 60
2. Алгебры Ли 60
   - 2.1. Определение и мотивировка 60
   - 2.2. Источники алгебр Ли 62
   - 2.3. Матричные алгебры Ли 64
   - 2.4. Структурные константы и многообразие A_n 65
   - 2.5. Типы алгебр Ли 69

2.6. Комплексные алгебры Ли и их вещественные формы 70
2.7*. Супералгебры Ли 71
3. Полупростые алгебры Ли 72
3.1. Комплексные полупростые алгебры Ли 72
3.2. Простые алгебры Ли 75
4. Связь между алгебрами Ли и группами Ли 77
4.1. Пять конструкций $\mathrm{Lie}(G)$ 77
4.2. Экспоненциальное отображение 82
4.3*. Супергруппы Ли 83

Лекция 4. Действия групп Ли и алгебр Ли 85
1. Действия групп и однородные пространства 85
1.1. Определение и примеры действий групп 85
1.2. Однородные G-пространства 87
1.3. Представления G-множеств 89
1.4. Двойственность Фробениуса для множеств 91
1.5. Двойственность Фробениуса для векторных пространств 92
2. Действия групп Ли и алгебр Ли на многообразиях 94
2.1. Однородные многообразия 94
2.2. Векторные поля 97
2.3. Действия группы Ли и действия алгебры Ли 99
2.4. Инварианты 100
2.5.* Действия супергрупп Ли 104
3. Геометрические гильбертовы пространства 108
3.1.Инвариантное интегрирование и естественные гильбертовы пространства . 108
3.2. Полуформы 110
3.3.* Пространства когомологий 111
4. Представления однородных многообразий 112

Лекция 5. Гармонический анализ на однородных многообразиях 116
1. Модель: конечные группы и однородные пространства 116
1.1. Краткое напоминание о представлениях конечных групп 116
1.2. Сплетающие операторы 119
1.3. Индуцированные представления 120
1.4. Пример практического гармонического анализа: группа S_4 124
1.5*. Еще один пример: группа $GL(2,\mathbb{F}_q)$ 128
1.6. Оператор Лапласа и геометрия S^2 131
2. Векторные функциональные пространства и линейные операторы ... 134
2.1. Пространства гладких функций на многообразии 134
2.2. Гладко индуцированные представления группы Ли 137
2.3. Теорема о ядре и сплетающие операторы 138
2.4. Унитарно индуцированные представления группы Ли 138
3. Представления $SL(2,\mathbb{R})$ и $SL(2,\mathbb{C})$ 139
3.1. Основное аффинное пространство и представления основной серии 139
3.2. Плоскость Лобачевского и дискретная серия для $SL(2,\mathbb{R})$ 143

Лекция 6. Теория характеров для групп Ли 144
1. Обобщенные характеры 144
1.1. Операторы в гильбертовом пространстве 144
1.2. Определение обобщенных характеров 149
1.3. Два примера 151

2. Инфинитезимальные характеры . . . 154
2.1. Универсальная обертывающая алгебра и ее центр . . . 154
2.2. Отображение симметризации . . . 156
2.3. Центр обертывающей алгебры . . . 158
2.4. Определение инфинитезимальных характеров . . . 159
2.5. Пример . . . 161

Лекция 7. Геометрия коприсоединенных орбит . . . 162
1. Коприсоединенное представление . . . 162
2. Симплектическая структура . . . 164
2.1. Первый подход . . . 164
2.2. Второй подход . . . 167
3. Инвариантные функции на $\mathfrak{g}^*$ . . . 169
4. Отображение моментов . . . 170
4.1. Универсальное свойство коприсоединенных орбит . . . 170
4.2. Некоторые частные случаи . . . 173
5. Поляризации . . . 175
5.1. Элементы симплектической геометрии . . . 175
5.2. Инвариантные поляризации на симплектических многообразиях . . . 177

Лекция 8. Метод орбит для нильпотентных групп Ли . . . 181
1. Руководство для пользователя . . . 181
2. Примеры . . . 183
2.1. Двойственный объект $\widehat{G}$ . . . 183
2.2. Построение унитарных неприводимых представлений . . . 185
2.3. Функтор ограничения . . . 187
2.4. Функтор индукции . . . 189
2.5. Тензорное произведение . . . 190
2.6. Обобщенные характеры . . . 191
2.7. Инфинитезимальные характеры . . . 192
2.8. Мера Планшереля . . . 193
2.9. Другие примеры . . . 193
3. Доказательства . . . 194
3.1. Нильпотентные группы с одномерным центром . . . 194
3.2. Основная процедура индукции . . . 197
3.3. Существование обобщенных характеров . . . 201
3.4. Гомеоморфизм $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ . . . 203

Лекция 9. Разрешимые группы Ли . . . 206
1. Экспоненциальные группы Ли . . . 206
1.1. Условие Пуканского . . . 206
1.2. Обобщенные характеры . . . 208
1.3. Инфинитезимальные характеры . . . 211
2. Общие разрешимые группы Ли . . . 211
2.1. Ручные и дикие группы Ли . . . 211
2.2. Ручные разрешимые группы Ли . . . 215
3. Пример. Бубновая алгебра Ли . . . 218
3.1. Присоединенные орбиты бубновой алгебры Ли . . . 218
3.2. Представления, соответствующие общим орбитам . . . 219
3.3. Представления, соответствующие цилиндрическим орбитам . . . 222
4. Поправки к другим правилам . . . 223

4.1. Правила 3–5 223
4.2. Правила 6, 7 и 10 223

Лекция 10. Компактные группы Ли 225
Введение 225
1. Структура полупростых компактных групп Ли 226
1.1. Абстрактные корневые системы 226
1.2. Компактные и комплексные полупростые группы 232
1.3. Классические и особые группы 237
2. Коприсоединенные орбиты компактной группы Ли 241
2.1. Геометрия коприсоединенных орбит 241
2.2. Топология коприсоединенных орбит 246
3. Орбиты и представления 251
3.1. Обзор 251
3.2. Веса унитарных неприводимых представлений 255
3.3. Теорема Бореля — Вейля — Ботта 261
3.4. Интегральная формула для характеров 264
3.5. Инфинитезимальные характеры 265
3.6. Сплетающие операторы 267

Лекция 11. Разное 268
1. Почему работает метод орбит? 268
1.1. Математический аргумент 268
1.2. Физический аргумент 270
2. Отображение момента 271
2.1. Определение и геометрические свойства 271
2.2. Симплектическая редукция 271
3. Метод орбит и интегрируемые системы 272
3.1. Интегрируемые системы 272
3.2. Связь с методом орбит 273
4. Некоторые открытые вопросы и темы для размышлений 274
4.1. Функциональная размерность 274
4.2. Инфинитезимальные характеры 276
4.3. Кратности и геометрия 276
4.4. Дополнительные серии 277
4.5. Конечные группы 277
4.6. Бесконечномерные группы 277

Литература 279

Предметный указатель 284

Лекция 1

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Определение гладкого многообразия 1
1.1. Аналитическое определение 1
1.2. Геометрическое определение 7
1.3. Алгебраическое определение 9
1.4.* Подход, основанный на понятии категории 12
2. Геометрия на многообразиях 15
2.1. Векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях 15
2.2. Геометрические объекты на многообразиях 18
2.3. Интегрирование на многообразиях 19
2.4. Линейные расслоения со связностями 20
3*. Некоммутативная геометрия 22
3.1. Супермногообразия 23
3.2. Квантовые группы 26
3.3. Геометрические объекты на супермногообразиях 28

1. Определение гладкого многообразия

1.1. Аналитическое определение. В курсе математического анализа изучаются гладкие функции, определенные в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ или открытой области $D \subset \mathbb{R}^n$. Важную роль играет система координат, благодаря которой функцию f в области D можно рассматривать как функцию n вещественных переменных. Для многих, даже довольно сложных множеств можно ввести систему координат, по крайней мере, локально.

Пример 1. Для единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

нельзя ввести единую систему координат ввиду простого факта, указанного в следующем упражнении.

Упражнение 1. Показать, что не существует непрерывной вещественной функции на S^1, принимающей различные значения в различных точках.

Предисловие

Основная идея метода орбит заключается в объединении гармонического анализа и симплектической геометрии. С более общей точки зрения, этот метод может рассматриваться как вклад в реализацию неувядающей идеи наладить взаимопонимание между математикой и физикой.

На самом деле такое понимание значения и роли метода орбит появилось *post factum*. Первоначально метод орбит был предложен автором [Ki1] для описания двойственного объекта (т. е. множества классов эквивалентных унитарных неприводимых представлений) нильпотентных групп Ли. Но как оказалось, ответы в терминах коприсоединенных орбит естественно получаются не только для упомянутой задачи, но и для всех других принципиальных вопросов теории представлений таких, как

- классификация унитарных неприводимых представлений
- построение унитарных неприводимых представлений
- топологическая структура множества $\widehat{G}$
- явное описание функтора ограничения и функтора индукции
- формула для обобщенных и инфинитезимальных характеров
- мера Планшереля на $\widehat{G}$

и т. п.

Еще более важно то, что ответы имеют смысл для произвольных групп Ли и даже для некоторых других более общих объектов. Действительно, методу орбит требуется лишь понятие коприсоединенной орбиты, а это понятие можно определить для очень широкого класса групп. Этот класс содержит, например, алгебраические группы над произвольным полем, бесконечномерные группы Ли и квантовые группы (которые на самом деле вообще не являются группами; см. лекцию 1).

Конечно, это не означает, что все правильные ответы для простейшего случая нильпотентных групп буквально переносятся на общий случай. Для общих групп требуется некоторая коррекция, которая иногда очевидна, но иногда — непредсказуема.

Эта программа реализуется уже многие годы, но до сих пор далека от завершения несмотря на усилия многих авторов. Я затрудняюсь перечислить всех, кто внес вклад в развитие метода орбит. На сегодняшний день в каталоге Американского математического общества указаны около 700 статей, в которых упоминаются коприсоединенные орбиты, и более 3000 статей, посвященных геометрическому квантованию — физическому двойнику метода орбит. Однако я не могу не назвать сыгравших главные роли в развитии этой области Бертрама Костанта и Мишеля Дюфло с математической стороны и Жан-Мари Сурьо — с физической стороны.

Недостатки являются продолжением достоинств, и метод орбит не стал исключением в этом отношении. Перечислим наиболее важные достоинства и вытекающие из них недостатки метода орбит.

Merits versus demerits †

1. **Универсальность**. Метод применим для групп Ли любого типа над любым полем.	1. Рецепты не всегда аккуратно и точно сформулированы.
2. Правила наглядны, легко запоминаются и иллюстрируются картинками.	2. Иногда правила требуют коррекции и модификации.
3. Метод дает объяснение некоторым фактам, которые кажутся мистикой.	3. Весьма непросто дать строгую формулировку этим объяснениям.
4. Метод приводит к огромному количеству симплектических многообразий и пуассоново коммутирующих семейств функций.	4. Большинство вполне интегрируемых динамических систем были открыты ранее другими методами.
5. Метод вводит новые фундаментальные понятия: коприсоединенная орбита и отображение момента.	5. Описание коприсоединенных орбит и их структур иногда оказывается весьма нелегкой задачей.

Цель этой книги — изложить суть метода орбит для неспециалистов в этой области и привлечь внимание молодого поколения математиков к старым, но до сих пор нерешенным задачам теории представлений, применение метода орбит к которым, по моему глубокому убеждению, приведет к успеху.

Уровень изложения неравномерен, так что и специалисты, и начинающие смогут найти здесь нечто интересное и полезное для себя.

Кто-то сказал, что стать ученым — это все равно, что запрыгнуть в поезд на полном ходу. Действительно, пока Вы изучаете давно уже известные факты и теории, свершаются новые важные открытия — и Вы опять отброшены от передней линии фронта. Есть только один выход — "прыжок", т. е. учить быстро и тщательно прорабатывать относительно малую область, тогда как по поводу всего другого — воспринимать лишь общие идеи. Так что я преднамеренно опускаю многие подробности, совершенно излишние для понимания главных фактов и идей. Настойчивый читатель может восстановить детали, прибегнув к другим источникам, но вместе с тем я надеюсь, что изложение окажется замкнутым для большинства читателей.

Наиболее трудные разделы, которые можно пропустить при первом чтении, отмечены звездочкой. Большинство понятий, терминов и кон-

† Достоинства против недостатков. — *Пер. с лат.*

струкций, не определяемых в тексте, интересующийся читатель может найти в моей книге [Ki4] или в обзоре [Ki9].

В заключение мне хотелось бы выразить надежду, что метод орбит станет для моих читателей таким же источником раздумий и вдохновения, каким он был для меня в течение всей моей жизни в математике.

Александр А. Кириллов
Университет Пенсильвании
США

Август, 2001

4.1. Правила 3–5 223
4.2. Правила 6, 7 и 10 223

Лекция 10. Компактные группы Ли 225
Введение 225
1. Структура полупростых компактных групп Ли 226
1.1. Абстрактные корневые системы 226
1.2. Компактные и комплексные полупростые группы 232
1.3. Классические и особые группы 237
2. Коприсоединенные орбиты компактной группы Ли 241
2.1. Геометрия коприсоединенных орбит 241
2.2. Топология коприсоединенных орбит 246
3. Орбиты и представления 251
3.1. Обзор 251
3.2. Веса унитарных неприводимых представлений 255
3.3. Теорема Бореля — Вейля — Ботта 261
3.4. Интегральная формула для характеров 264
3.5. Инфинитезимальные характеры 265
3.6. Сплетающие операторы 267

Лекция 11. Разное 268
1. Почему работает метод орбит? 268
1.1. Математический аргумент 268
1.2. Физический аргумент 270
2. Отображение момента 271
2.1. Определение и геометрические свойства 271
2.2. Симплектическая редукция 271
3. Метод орбит и интегрируемые системы 272
3.1. Интегрируемые системы 272
3.2. Связь с методом орбит 273
4. Некоторые открытые вопросы и темы для размышлений 274
4.1. Функциональная размерность 274
4.2. Инфинитезимальные характеры 276
4.3. Кратности и геометрия 276
4.4. Дополнительные серии 277
4.5. Конечные группы 277
4.6. Бесконечномерные группы 277

Литература 279

Предметный указатель 284

Лекция 1

ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Определение гладкого многообразия 1
   1.1. Аналитическое определение 1
   1.2. Геометрическое определение 7
   1.3. Алгебраическое определение 9
   1.4.* Подход, основанный на понятии категории 12
2. Геометрия на многообразиях 15
   2.1. Векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях 15
   2.2. Геометрические объекты на многообразиях 18
   2.3. Интегрирование на многообразиях 19
   2.4. Линейные расслоения со связностями 20
3*. Некоммутативная геометрия 22
   3.1. Супермногообразия 23
   3.2. Квантовые группы 26
   3.3. Геометрические объекты на супермногообразиях 28

1. Определение гладкого многообразия

1.1. Аналитическое определение. В курсе математического анализа изучаются гладкие функции, определенные в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ или открытой области $D \subset \mathbb{R}^n$. Важную роль играет система координат, благодаря которой функцию f в области D можно рассматривать как функцию n вещественных переменных. Для многих, даже довольно сложных множеств можно ввести систему координат, по крайней мере, локально.

Пример 1. Для единичной окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

нельзя ввести единую систему координат ввиду простого факта, указанного в следующем упражнении.

Упражнение 1. Показать, что не существует непрерывной вещественной функции на S^1, принимающей различные значения в различных точках.

Указание. Применить теорему о среднем значении для обеих дуг, соединяющих две точки, в которых функция принимает максимальное и минимальное значения.

С другой стороны, S^1 можно покрыть открытыми частями, на каждой из которых можно ввести свою систему координат, и существует много различных способов сделать это. Мы приведем три из них.

1. На двух частях $U_\pm$ окружности S^1, определенных условием $\pm y > 0$, в качестве координаты берется x; на двух частях $\widetilde{U}_\pm$, определенных условием $\pm x > 0$, координатой служит y. Тогда мы получаем четыре карты. Пересечения $U_+ \cap U_-$ и $\widetilde{U}_+ \cap \widetilde{U}_-$ пусты, а на пересечениях $U_\pm \cap \widetilde{U}_\pm$ локальные системы координат связаны уравнением (1).

2. Положим $t_\pm = \dfrac{x}{1 \pm y}$. Каждая локальная координата $t_\pm$ пробегает все вещественные значения: $-\infty < t_\pm < \infty$. Соответствующая карта покрывает всю окружность S^1 за исключением единственной точки $P_\mp = (0, \mp 1)$. Соотношение между двумя координатами имеет вид $t_+ \cdot t_- = 1$.

3. Рассмотрим отображение $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ из $\mathbb{R}^1$ на S^1. Образы двух интервалов $0 < \theta_1 < 2\pi$ и $-\pi < \theta_2 < \pi$ дают две системы координат, покрывающие окружность S^1. Пересечение состоит из двух связных частей, и локальные координаты связаны равенством $\theta_1 = \theta_2$ на одной части и равенством $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi$ — на другой.

Вдохновленные примером 1, мы сделаем первую попытку дать определение гладкого многообразия.

Определение 1. **k-Гладким n-мерным многообразием** называется топологическое пространство[1] M, допускающее покрытие открытыми множествами U_α, $\alpha \in A$, и снабженное взаимно однозначными непрерывными отображениями $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ такими, что каждое отображение $\varphi_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ является k-гладким (т. е. имеет непрерывные частные производные порядка $\leqslant k$) в своей области определения.

Замечание 1. По техническим причинам обычно ставят два дополнительных условия. Пространство M предполагается **хаусдорфовым** (т. е. любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями) и **сепарабельным** (т. е. содержит всюду плотное счетное множество или, что эквивалентно, может быть покрыто счетной системой карт). Примеры экзотических многообразий, не удовлетворяющих этим условиям, можно найти, например, в [Ki4]. В наших лекциях оба условия считаются выполненными.

Множества U_α называются **картами**, функции $x^i_\alpha = x^i \circ \varphi_\alpha$ — **локальными координатами**,[2] функции $\varphi_{\alpha,\beta}$ — **функциями перехода**, а набор $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — **атласом** на M. Число k может быть любым положительным целым числом или ∞. Мы будем говорить просто "гладкое многообразие" вместо "∞-гладкое многообразие".

[1] См. ниже.

[2] Здесь $\{x^i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$.

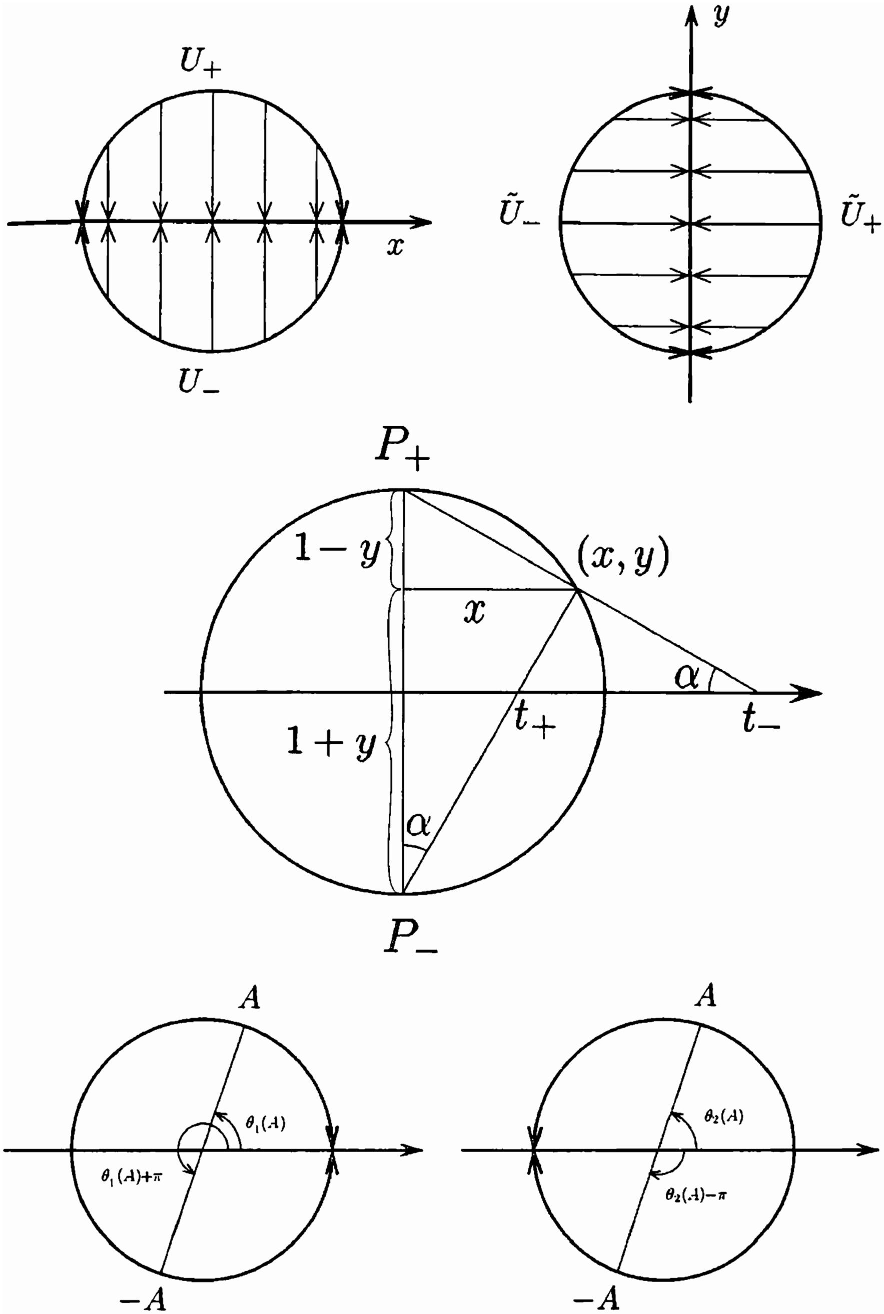

Рис. 1. Различные атласы для S^1

Топология

Понятие топологического пространства полезно, но не обязательно для понимания последующего материала. Поэтому мы дадим лишь краткие сведения.

Грубо говоря, **топологическое пространство** — это множество X, для которого определено понятие **окрестности** точки. (В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ роль окрестностей играют открытые шары.) Используя понятие "окрестность", можно определить все основные понятия математического анализа:

- **внутренняя точка** множества $S \subset X$ (принадлежит S вместе с некоторой окрестностью),
- **внешняя точка** множества $S \subset X$ (является внутренней точкой дополнения $\bar{S} = X \setminus S$),
- **граничная точка** множества $S \subset X$ (не является ни внутренней, ни внешней для S),
- **открытое множество** (все точки множества внутренние),
- **замкнутое множество** (содержит все свои граничные точки),
- **связное множество** (не допускает представления в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств),
- **предел последовательности** $\{x_n\}$ (точка a, любая окрестность которой содержит все элементы последовательности, исключая, быть может, конечное число),
- **непрерывное отображение** f (коммутирующее с пределами: $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f x_n$)

и т. д.

В абстрактной топологии понятие открытого множества первично, а окрестность точки $a \in X$ определяется как некоторое открытое подмножество O, содержащее a.

Совокупность открытых множеств выбирается произвольно, но с учетом трех очень простых аксиом.

1. Объединение любого семейства открытых множеств открыто.
2. Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто.
3. Пустое множество $\varnothing$ и все пространство X открыты.

В случае гладких многообразий можно *определить* открытые множества как множества, пересечение которых с каждой картой открыто (открытые подмножества $O \subset U_\alpha$ определены условием, что $\varphi_\alpha(O)$ — открытое подмножество $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$). Хаусдорфовость и сепарабельность пространства в этом случае становятся дополнительными условиями на рассматриваемый атлас. ■

Определение 1 имеет существенный недостаток: три атласа из примера 1 определяют различные многообразия, хотя естественно считать их эквивалентными определениями одного и того же многообразия S^1. В связи с этим замечанием введем

Определение 2. Два атласа $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{U'_\beta\}_{\beta\in B}$ называются **эквивалентными**, если функции перехода из какой-либо карты одного атласа в любую карту другого атласа k-гладкие на своей области определения.

Мы не различаем гладкие многообразия, заданные эквивалентными атласами. Поэтому следует изменить определение 1 гладкого многообразия, заменив слово "атлас" словами "класс эквивалентности атласов". Однако, следуя общепринятому стандарту, мы будем всегда иметь дело только с одним, подходящим для рассматриваемой ситуации атласом, но при этом иметь в виду, что этот атлас можно заменить эквивалентным.

Упражнение 2. (a) Показать, что все три атласа на S^1, построенные выше, эквивалентны.

(b) Построить аналоги первого и второго атласов в случае n-мерной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданной уравнением $\sum_{k=0}^{n}(x^k)^2 = 1$.

(c) Построить аналоги третьего атласа для n-мерного тора $T^n \subset \mathbb{C}^n$, заданного системой уравнений $|z^i| = 1, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Замечание 2. При практических вычислениях обычно предпочитают рассматривать минимальные атласы. Интересной геометрической характеристикой многообразия является мощность минимального атласа с простейшими картами U_α, при которых V_α – открытые шары. (Известно, что для S^n мощность такого атласа равна 2, а для T^n — $n+1$.)

В теоретических вопросах полезны максимальные атласы. Например, в каждом классе эквивалентности существует ровно один максимальный атлас. Он состоит из всех карт, переходные функции из которых во все карты любого атласа данного класса эквивалентности гладкие.

Для любого k-гладкого многообразия M_1 имеет смысл говорить о m-гладких вещественных функциях при любом $m \leqslant k$. Более общо, если M_1, M_2 — k-гладкие многообразия, естественно ввести понятие m-гладкого отображения $f : M_1 \to M_2$ для любого $m \leqslant k$. Именно, f называется **m-гладким**, если для любых точки $x_0 \in M_1$ и карт $U \ni x_0$, $V \ni f(x_0)$ локальные координаты $f(x)$ в V являются m-гладкими функциями локальных координат x в U.

Напомним, что топологическое пространство X называется **связным**, если оно не может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подмножеств.

Для гладких многообразий это общее понятие эквивалентно более наглядному понятию **линейно связного** многообразия. Определим **путь** в многообразии M как непрерывное отображение $p : [0,1] \to M$. Путь p называется **кусочно гладким**, если существует конечное число точек $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1$ таких, что p — гладкая функция на каждом открытом интервале (a_{i-1}, a_i), $1 \leqslant i \leqslant k$. Будем говорить, что путь p **соединяет** точки x и y, если $p(0) = x$ и $p(1) = y$.

Определение 3. Многообразие M называется **линейно связным**, если любые две точки M можно соединить кусочно гладким путем.

Введем понятие **ориентации**. Будем говорить, что карты с координатами $\{x^i\}$ и $\{y^j\}$ **положительно связаны**, если

$$\det \left| \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right| > 0 \quad \text{в области определения,} \tag{2}$$

и **отрицательно связаны**, если имеет место противоположное неравенство.

Определение 4. Многообразие M называется **ориентируемым**, если оно допускает атлас с положительно связанными картами.[3] Такой атлас, как и многообразие с таким атласом, называется **ориентируемым**, а выбранный ориентированный атлас задает **ориентацию многообразия** M.

? Упражнение 3. Показать, что любое связное ориентируемое многообразие положительной размерности допускает ровно два (с точностью до эквивалентности) ориентированных атласа (и, следовательно, две различных ориентации).

Указание. Показать, что для любого ориентированного атласа $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ существует атлас $\{U'_\beta\}_{\beta\in B}$, карты которого отрицательно связаны с картами атласа $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Затем показать, что любой ориентированный атлас эквивалентен одному из этих двух.

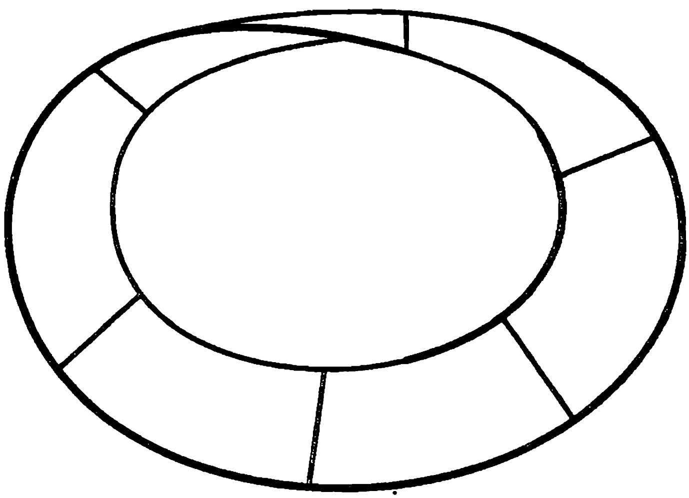

Рис. 2. Лист Мёбиуса

Пример 2 (лист Мёбиуса). Рассмотрим n копий[4] прямоугольника $0 < x < 3$, $0 < y < 1$ и склеим их следующим образом. Пусть x_k, y_k — координаты в k-м прямоугольнике. Отождествим часть $2 < x_k < 3$ k-го прямоугольника с частью $0 < x_{k+1} < 1$ $(k+1)$-го прямоугольника согласно функциям перехода $x_{k+1} = x_k - 2$, $y_{k+1} = y_k$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Отождествим

[3] Две карты с пустым пересечением считаются положительно связанными. *Предупреждение*: две карты могут быть одновременно положительно связанными и отрицательно связанными (если их пересечение пусто) или ни положительно, ни отрицательно связанными (см. пример 2 для $n = 2$).

[4] Построения имеют смысл для $n \geqslant 2$. В случае $n = 1$ их следует слегка изменить. Мы оставляем детали читателю.

часть $2 < x_n < 3$ n-го прямоугольника с частью $0 < x_1 < 1$ первого прямоугольника согласно функциям перехода $x_1 = x_n - 2$, $y_1 = -y_n$. Полученное двумерное многообразие (его легко можно построить из n листов бумаги) является простейшим примером **неориентируемого** многообразия: оно не имеет атласа с положительно связанными картами.

Упражнение 4*. Показать, что все одномерные гладкие многообразия ориентируемы и эквивалентны (т. е. допускают гладкую биекцию) либо вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, либо единичной окружности S^1.

Предупреждение. Это утверждение неверно для нехаусдорфовых или несепарабельных многообразий (см. рис. 3).

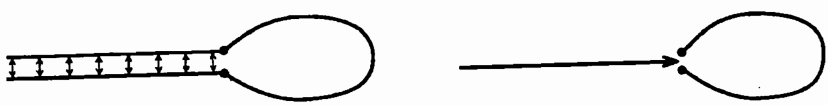

Рис. 3. Неориентируемое одномерное многообразие

1.2. Геометрическое определение. В п. 1.1 определены абстрактные многообразия, склеенные из открытых частей пространства $\mathbb{R}^n$. Наиболее важными примерами абстрактных многообразий являются **подмногообразия** $M \subset \mathbb{R}^N$, аналогичные гладким поверхностям в $\mathbb{R}^3$ и определяемые как множество всех решений системы уравнений

$$F_i(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{3}$$

где F_i — гладкие функции на $\mathbb{R}^N$.

Замечание 3. На самом деле этот вид многообразий наиболее общий: знаменитая теорема Уитни утверждает, что для любого гладкого n-мерного многообразия M существует биективное отображение M в подмногообразие $\mathbb{R}^{2n}$.

Не все системы вида (3) определяют многообразия. Наиболее наглядный контрпример — это уравнение $xy = 0$. (Подумайте, почему это не многообразие!) Простое достаточное условие указывает следующее

Предложение 1. *Пусть F_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, — k-гладкие функции ($k \geqslant 1$) на $\mathbb{R}^N$, множество M определено системой* (3) *и выполнено следующее условие*:

$$\text{ранг } m \times N\text{-матрицы } \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \right\| \text{ равен константе } r = N - n \text{ на } M. \tag{4}$$

Тогда можно ввести структуру k-гладкого n-мерного многообразия на M с помощью проекций M на подходящие n-мерные координатные подпространства $\mathbb{R}^N$.

Схема доказательства. По теореме об обратной функции для любой точки $x \in M$ можно выбрать окрестность $U(x) \subset M$, обладающую взаимно однозначной проекцией на соответствующее n-мерное координатное подпространство. Таким образом, мы получаем атлас на M (см. пример 1). Остается проверить, что эти карты связаны k-гладко. □

Другой геометрический способ определения многообразия использует фактор-множество относительно некоторого отношения эквивалентности.[5]

Пример 3. n-Мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ определяется как фактор-пространство $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ по отношению эквивалентности: $v_1 \sim v_2$, если $v_1 = c \cdot v_2$ для некоторого вещественного числа c.

Обычно точка $x \in \mathbb{P}^n$ задается своими **однородными координатами** $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$, где двоеточия указывают, что имеют значение только отношения координат.

Многообразие $\mathbb{P}^n$ можно покрыть $n+1$ картами $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n | \ x_i \neq 0\}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. На U_i вводятся локальные координаты $\{u_i^j = x_j/x_i, 0 \leqslant j \leqslant n, j \neq i\}$. Функции перехода $\varphi_{i,k}$ являются рациональными функциями с ненулевыми знаменателями: $u_i^j = u_k^j(u_k^i)^{-1}$.

Упражнение 5. Показать, что отображение

$$x \mapsto \left\{ \frac{x_i x_j}{\sum\limits_{k=0}^{n} x_k^2} \right\}_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$$

является вложением $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^{[(n+1)(n+2)]/2}$. Полезно подробно исследовать, что означает это утверждение в случае $n = 1$.

Упражнение 6. Для каких n многообразие $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ориентируемо?
Ответ. Для $n = 0$ и всех нечетных n.

Комплексные многообразия

Как аналитическое, так и геометрическое определение гладкого вещественного многообразия легко обобщить на случай **комплексного многообразия**. Рассмотрим карты с комплексными координатами $z_1, \ldots, z_n$ и потребуем, чтобы функции перехода $\varphi_{\alpha,\beta}$ были по крайней мере 1-гладкими в комплексном смысле. Существеное отличие от вещественного случая заключается в том, что в силу этого условия функции перехода являются аналитическими функциями. ■

Пример 4. Комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ определяется в точности так же, как и $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, но с комплексными однородными координатами $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$.

Разумеется, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, как любое n-мерное комплексное многообразие, можно рассматривать как вещественное $2n$-мерное многообразие. Однако обратное утверждение далеко от истины (например, четномерная сфера S^{2n} допускает комплексную структуру только для $n = 1$).

[5] Часто условие эквивалентности определяется через действие группы: две точки **эквивалентны**, если они принадлежат одной групповой орбите.

Упражнение 7. Показать, что существует бесконечно много одномерных комплексных многообразий, эквивалентных двумерному вещественному многообразию T^2.

Указание. Пусть $\mathbb{C}/L_\tau$ — фактор-многообразие, где $L_\tau = \mathbb{Z} + \tau \cdot \mathbb{Z}$ — решетка (дискретная подгруппа) в $\mathbb{C}$, порожденная 1 и $\tau \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Показать, что $\mathbb{C}/L_{\tau_1}$ и $\mathbb{C}/L_{\tau_2}$ всегда эквивалентны как вещественные многообразия, но как комплексные многообразия они эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau_2 = \dfrac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$. В частности, если τ_1 и τ_2 чисто мнимые, то соответствующие комплексные многообразия эквивалентны тогда и только тогда, когда $\tau_1 = \pm\tau_2$ или $\tau_1 = \pm(\tau_2)^{-1}$.

Оставляем читателю сформулировать и доказать комплексный аналог предложения 1.

Отметим, что аналог теоремы Уитни не справедлив в комплексном случае. Например, комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ не может быть реализовано как подмногообразие $\mathbb{C}^N$ ни при каком N.

Укажем еще один полезный общий факт: любое комплексное подмногообразие $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ обязательно будет алгебраическим, т. е. определяется системой однородных полиномиальных уравнений в однородных координатах (теорема Чжоу).

Вернемся к вещественным многообразиям.

Сочетая понятия подмногообразия и фактор-многообразия, можно ввести структуру многообразия на многих множествах геометрического происхождения. (Вот почему этот подход называется геометрическим.)

Пример 5. Рассмотрим множество L_n всех прямых в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Каждая прямая $l \in L_n$ может быть задана системой линейных уравнений $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, а A — вещественная матрица ранга $n-1$, имеющая $n-1$ строк и n столбцов. Множество всех пар (A, b) является открытым подмножеством $\mathbb{R}^{n^2-1}$. Две пары (A_1, b_1) и (A_2, b_2) определяют одну прямую $l \in L_n$ тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица $C \in \mathrm{Mat}_{n-1}(\mathbb{R})$ такая, что $A_2 = C \cdot A_1$ и $b_2 = C \cdot b_2$. В простейшем нетривиальном случае $n = 2$ читателю предлагается выполнить следующее

Упражнение 8. (a) Ввести на L_2 структуру гладкого 2-мерного многообразия.

(b) Показать, что L_2 диффеоморфно $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ с выколотой точкой.

(c) Показать, что L_2 диффеоморфно листу Мёбиуса.

1.3. Алгебраическое определение гладкого многообразия M наиболее приспособлено для компактных многообразий. Поэтому мы начнем с этого случая. Пусть M — гладкое компактное многообразие. Рассмотрим множество $\mathcal{A}(M) = C^\infty(M)$ всех гладких вещественных функций на M. С алгебраической точки зрения $\mathcal{A}(M)$ является вещественной ассоциативной коммутативной алгеброй с единицей.

Замечательный факт заключается в том, что многообразие M полностью определено алгебраической структурой $\mathcal{A}(M)$. Этот факт вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть M и N — гладкие компактные многообразия. Существует взаимно однозначное соответствие между гладкими отображениями $\varphi\colon N \to M$ и гомоморфизмами $\Phi\colon \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(N)$ по формуле $\Phi(f) = f \circ \varphi$.*

(Здесь **гомоморфизм** понимается как отображение, сохраняющее все алгебраические структуры, т. е. линейное мультипликативное отображение, переводящее единицу в единицу.)

Мы отложим на некоторое время доказательство теоремы, а начнем с обсуждения формулировки. Рассмотрим 0-мерное многообразие X, состоящее из одной точки x. Алгебра $\mathcal{A}(X)$ — это просто поле $\mathbb{R}$. Все отображения $\varphi : X \to M$ гладкие и соответствуют точкам $m \in M$. Таким образом, в этом частном случае теорема 1 означает, что любой гомоморфизм $\chi : \mathcal{A}(M) \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\chi = \chi_m : f \mapsto f(m) \text{ для некоторой точки } m \in M. \tag{5}$$

Мы видим, что множество M может быть восстановлено из $\mathcal{A}(M)$ как множество всех гомоморфизмов $\chi : \mathcal{A}(M) \to \mathbb{R}$.

Кроме того, можно также восстановить структуру гладкого многообразия на M, поскольку мы знаем, какие отображения M в любое другое многообразие будут гладкими.

Рассмотрим теперь некомпактное многообразие M. К сожалению, в этом случае нет такого простого результата, как теорема 1, и мы должны ввести некоторые определения и сделать дополнительные предположения.

Пусть M — любое гладкое многообразие и $f \in C^\infty(M)$. **Носитель** f, обозначаемый $\operatorname{supp} f$, — это замыкание множества $\{m \in M \mid f(m) \neq 0\}$.[6]

Обозначим через $\mathcal{A}(M)$ (используется также обозначение $C_c^\infty(M)$) алгебру всех гладких вещественных функций с компактным носителем в M. В частности, если M компактно, то $\mathcal{A}(M)$ — алгебра всех гладких функций на M. В случае некомпактного многообразия M алгебра $\mathcal{A}(M)$ не имеет единицы.

Оказывается, что многообразие M, как и выше, полностью определяется алгеброй $\mathcal{A}(M)$, но соответствующая теорема имеет более сложную формулировку.

Пусть A и B — две коммутативные алгебры. Гомоморфизм $\Phi : A \to B$ называется **существенным**, если его образ $\Phi(A)$ не содержится ни в каком собственном идеале алгебры B (т. е. идеале, который не совпадает со всей алгеброй B).

Нам потребуется еще одно определение. Гладкое отображение $\varphi : N \to M$ называется **собственным**, если прообраз любого компактного множества компактен (в частности, любое отображение из компактного многообра-

[6] Более наглядно определение дополнения $\operatorname{supp} f$, а именно: $x \notin \operatorname{supp} f$, если существует окрестность $U(x)$ такая, что $f|_{U(x)} \equiv 0$. Другими словами, наблюдатель, находящийся в точке x, с малым радиусом обзора вообще не заметит f.

зия является собственным; не существует собственного отображения из некомпактного многообразия в компактное многообразие).

Теорема 1′. *Пусть M и N — произвольные гладкие многообразия. Существует взаимно однозначное соответствие между собственными гладкими отображениями $\varphi : N \to M$ и существенными гомоморфизмами $\Phi : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(N)$ согласно формуле $\Phi(f) = f \circ \varphi$.*

В частности, эта теорема означает, что существует взаимно однозначное соответствие между точками многообразия M и ненулевыми гомоморфизмами из $\mathcal{A}(M)$ в $\mathbb{R}$.

В доказательствах теорем 1 и 1′ используется следующая

Лемма 1. *Пусть I — собственный идеал в $\mathcal{A}(M)$. Тогда существует точка $m \in M$ такая, что все функции из I равны нулю в точке m.*

Доказательство. Допустим, что таких точек нет. Тогда для любой точки $m \in M$ найдется функция $f_m \in I$ такая, что $f_m(m) \neq 0$. Тогда f_m также не обращается в нуль в некоторой окрестности U_m точки m. Пусть $g \in \mathcal{A}(M)$ — произвольная функция. Так как $S = \operatorname{supp} g$ компактно, можно выбрать конечное число точек $m_1, \ldots, m_N$ так, что соответствующие окрестности U_{m_i}, $1 \leqslant i \leqslant N$, покрывают все множество S. Тогда функция $F(x) := \sum\limits_i f^2_{m_i}(x)$ принадлежит I и положительна всюду на S. Поэтому можно определить функцию $g/F \in \mathcal{A}(M)$ по формуле

$$\frac{g}{F}(x) = \begin{cases} g(x)/F(x), & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

Теперь мы имеем $g = F \cdot \dfrac{g}{F} \in I$, что противоречит условию $I \neq \mathcal{A}(M)$. □

Следствие. *Пусть $\chi : \mathcal{A}(M) \to \mathbb{R}$ — ненулевой гомоморфизм. Тогда он имеет вид* (5).

Доказательство. Пусть I_χ — ядро χ. Так как оно является собственным идеалом $\mathcal{A}(M)$, существует точка $m \in M$ такая, что $f(m) = 0$ для всех $f \in I_\chi$.

Пусть g — функция такая, что $\chi(g) \neq 0$. Можно считать, что $\chi(g) = 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{A}(M)$ имеем $\chi(f - \chi(f)g) = 0$. Поэтому $f(m) = \chi(f)g(m)$ в силу условия на m.

Так как χ — ненулевой гомоморфизм, $g(m) \neq 0$ и χ пропорционально χ_m. Однако два пропорциональных гомоморфизма должны совпадать (ввиду свойства мультипликативности гомоморфизмов). Следовательно, $\chi = \chi_m$. □

Пусть $\varphi : N \to M$ — гладкое собственное отображение. Тогда отображение $\Phi : f \mapsto f \circ \varphi$ является гомоморфизмом из $\mathcal{A}(M)$ в $\mathcal{A}(N)$. Требуется показать, что этот гомоморфизм существенный. Действительно, в ином случае все функции из образа Φ должны обращаться в нуль в некоторой точке $n \in N$, что означает, что все функции из $\mathcal{A}(M)$ равны нулю в точке $m = \varphi(n)$. Мы получили противоречие.[7]

Обратно, если $\Phi : \mathcal{A}(N) \to \mathcal{A}(M)$ — гомоморфизм, то для $m \in M$ отображение $\chi_m \circ \Phi$ есть гомоморфизм из $\mathcal{A}(N)$ в $\mathbb{R}$. Если Φ существенный, то $\chi_m \circ \Phi$ не обращается в нуль и, следовательно, имеет вид χ_n для некоторого $n \in N$. Полагая $\varphi(m) = n$, получаем отображение $\varphi : M \to N$. Оставляем читателю проверить, что соответствие $\varphi \longleftrightarrow \Phi$ взаимно однозначно.

Приведем пример несущественного гомоморфизма. Пусть $A = \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $B = \mathcal{A}(S^1)$. Положим $\Phi(f)(x) = f(t_+(x))$. Тогда $\Phi(A)$ состоит из функций, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности P_-. Гомоморфизм Φ не соответствует никакому отображению $S^1 \to \mathbb{R}$: образ P_- не определен.

1.4*. Подход, основанный на понятии категории. С начала XX-го века все математические теории строились на теоретико-множественном фундаменте, т. е. любой изучаемый объект определялся как множество X с некоторыми дополнительными структурами, которые допускали интерпретацию в виде точки некоторого вспомогательного множества, построенного из X. Например, группа — это множество G со специальной точкой в $G^{G\times G} \times G^G$, определяющей закон умножения и обратное отображение, а топологическое пространство — это множество X со специальной точкой в 2^{2^X}, определяющей совокупность открытых подмножеств X, и т. д.

Однако существует совсем иной подход социологической[8] природы. Идея заключается в том, чтобы рассматривать математические объекты как члены некоторого сообщества и характеризовать их отношениями с другими объектами той же природы. Основным понятием при таком подходе является понятие категории.

Для определения **категории** C надо

(a) указать семейство (не обязательно множество!) $\mathrm{Ob}\, C$ **объектов** C,

(b) для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\, C$ определить множество $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ **морфизмов** из X в Y,

(c) для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\, C$ определить отображение, называемое **композицией** морфизмов

$$\mathrm{Mor}_C(X,Y) \times \mathrm{Mor}_C(Y,Z) \to \mathrm{Mor}_C(X,Z) : (f,g) \mapsto g \circ f.$$

При этом предполагается, что

1) закон композиции ассоциативен, т. е. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,

2) для каждого объекта X существует единственный морфизм $1_X \in \mathrm{Mor}_C(X, X)$, играющий роль левой и правой единицы:

$$f \circ 1_X = 1_Y \circ f = f \quad \text{для любых } f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y).$$

Для многих важных категорий объектами являются множества (с дополнительной структурой), морфизмами — отображения (сохраняющие дополнительную структуру), композицией — обыкновенная композиция ото-

[7] В действительности мы использовали здесь неочевидный факт, что для любой точки $m \in M$ найдется функция $f \in \mathcal{A}(M)$, которая не обращается в нуль в m. Такая функция может быть выписана явно в локальных координатах.

[8] Этот термин предложил Ю. И. Манин.

бражений и 1_X — тождественное отображение Id. Например, это верно для следующих категорий.

• Sets; *объекты* — множества, *морфизмы* — отображения.

• Vect_K; *объекты* — векторные пространства над данным полем K, *морфизмы* — K-линейные операторы.

• Gr; *объекты* — группы, *морфизмы* — групповые гомоморфизмы.

• Man; *объекты* — гладкие многообразия, *морфизмы* — гладкие отображения.

• LG; *объекты* — группы Ли, *морфизмы* — гладкие гомоморфизмы.

Но при этом существуют категории другого типа. Прежде всего, семейство всех категорий тоже образует категорию[9]

• Cat; *объекты* — категории, *морфизмы* — так называемые функторы (см. ниже).

Чтобы определить **функтор** F из категории $\mathcal{C}_1$ в другую категорию $\mathcal{C}_2$, следует указать:

(a) объект $F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$ для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$,

(b) морфизм $F(\varphi) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_2}(F(X), F(Y))$ для каждого $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_1}(X, Y)$ такой, что $F(1_X) = 1_{F(X)}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$, когда композиция имеет смысл.

Для категории $\mathcal{C}$ **двойственная категория** $\mathcal{C}^\circ$ имеет те же объекты, что и категория $\mathcal{C}$, а морфизм из A в B категории $\mathcal{C}^\circ$ есть, по определению, морфизм из B в A категории $\mathcal{C}$. Композиция $f \circ g$ в $\mathcal{C}^\circ$ определяется как композиция $g \circ f$ в $\mathcal{C}$.

Пример 6. **Естественный функтор** $^* : \mathrm{Vect}_K \to (\mathrm{Vect}_K)^\circ$ отображает пространство V в двойственное пространство $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$, а линейный оператор $A : V \to W$ — в сопряженный оператор $A^* : W^* \to V^*$.

Часто категории изображают графически: объекты обозначаются точками (или маленькими кружочками), а морфизмы — стрелками. Переход к двойственной категории просто означает "обращение стрелок".

Диаграмма, построенная из объектов и морфизмов, называется **коммутативной**, если композиция стрелок вдоль пути, соединяющего объекты X и Y, не зависит от выбора пути.

Подход, основанный на понятии категории, позволяет унифицировать многие определения и конструкции, используемые независимо в различных областях математики. Например, эквивалентность множеств, гомеоморфизм топологических пространств, изоморфизм групп или алгебр, диффеоморфизм гладких многообразий — все это частные случая общего понятия изоморфизма объектов категории.

Определение 5. Два объекта $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ называются **изоморфными**, если существуют морфизмы $f \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(X, Y), g \in \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(Y, X)$ такие, что $f \circ g = 1_Y$ и $g \circ f = 1_X$.

[9]Точнее, здесь мы должны ограничиться так называемыми "малыми категориями", для которых объекты образуют множество.

Другое полезное понятие теории категорий — универсальный объект. Объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ называется **универсальным**, если для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ множество $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ содержит в точности один элемент. (Графически: есть только одна стрелка из точки X в любую другую точку Y.)

Упражнение 9. Показать, что любые два универсальных объекта в данной категории канонически[10] изоморфны.

Указание. Использовать определения введенных понятий.

В качестве иллюстрации определим прямую сумму и прямое произведение двух объектов X_1 и X_2 категории $\mathcal{C}$. Для этого построим вспомогательную категорию $\mathcal{C}(X_1,X_2)$. Объекты $\mathcal{C}(X_1,X_2)$ суть тройки (a_1,a_2,Y), где Y — любой объект категории $\mathcal{C}$ и $(a_1,a_2) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_1,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_2,Y)$. Морфизм из объекта (a_1,a_2,Y) в объект (b_1,b_2,Z) определяется как морфизм φ из Y в Z такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "\phi"'] & X_2 \arrow[l, "a_2"'] \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r, "b_1"'] & Z & X_2 \arrow[l, "b_2"]
\end{tikzcd}$$

Если категория $\mathcal{C}(X_1,X_2)$ имеет универсальный объект (i_1,i_2,X) (а все такие объекты изоморфны согласно упражнению 9), то X называется **прямой суммой** X_1 и X_2 в $\mathcal{C}$, а морфизмы i_1, i_2 называются **каноническими вложениями** слагаемых в сумму.

Упражнение 10. Показать, что прямая сумма существует для любой пары объектов следующих категорий и описать их:

(a) Sets, (b) Vect_K, (c) Gr, (d) Man.

Ответ. (a) и (d) дизъюнктное объединение, (b) прямая сумма векторных пространств, (c) свободное произведение групп.

Определение **прямого произведения** в $\mathcal{C}$ получается из определения прямой суммы “обращением стрелок” (т. е. прямое произведение является прямой суммой в двойственной категории $\mathcal{C}^{\circ}$).

Упражнение 11. Описать операцию прямого произведения для категорий из упражнения 10.

Ответ. (a) и (d) прямое (декартово) произведение, (b) прямая сумма векторных пространств, (c) прямое произведение групп.

Замечание 4. Пусть $\mathcal{C}$ — категория и X — объект категории $\mathcal{C}$. Соответствие $A \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X)$ может быть продолжено до функтора $F_X : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$. Именно, для $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ определим $F_X(\varphi) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,X) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,X)$ по формуле $F_X(\alpha) = \varphi \circ \alpha$.

Часто объект X можно восстановить по функтору F_X.[11] Будем говорить, что функтор $F_X : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ вида $F = F_X$ **представи́м** объектом X.

[10] “Канонически” — это означает, что фиксирован изоморфизм.

[11] В обыденной жизни аналогом этого утверждения служит известный принцип: “скажи мне, кто твой друг — и я скажу тебе, кто ты”.

Однако даже непредставимые функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}ets$ удобно рассматривать как "обобщенные объекты" категории $\mathcal{C}$.

На этом мы остановимся. Интересующийся читатель может обратиться к [Gr], [MacL], где дано более подробное введение в категорную идеологию.

После столь длинного отступления вернемся к гладким многообразиям. Алгебраическое определение из п. 1.3 можно сформулировать на языке категорий следующим образом. Пусть $\mathrm{CAlg}(K)$ — категория, объекты которой суть коммутативные ассоциативные алгебры над полем K, а морфизмы — гомоморфизмы K-алгебр. Тогда Man — подкатегория категории $\mathrm{CAlg}(\mathbb{R})^{\circ}$.

Представляется заманчивым рассмотреть объекты $\mathrm{CAlg}(K)^{\circ}$ как обобщенные многообразия. Другими словами, утверждается следующий принцип: *Любая коммутативная ассоциативная алгебра является алгеброй функций на некотором "многообразии"*. Такая точка зрения является основной в современной алгебраической геометрии со времен Гротендика. В последнее время в этом контексте изучаются также некоммутативные алгебры (некоммутативная алгебраическая геометрия). Два частных случая имеют особое значение: супермногообразия и квантовые группы. Мы кратко рассмотрим их в п. 3.1 и 3.2.

2. Геометрия на многообразиях

2.1. Векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях. Мы предполагаем, что читатель знаком с элементами дифференциальной геометрии и лишь напомним некоторые понятия и факты в удобной для дальнейшего форме.

Касательный вектор ξ к многообразию M в точке $m \in M$ может быть определен тремя различными способами.[12]

(a) *Геометрически* — как класс эквивалентности гладких параметризованных кривых в M, проходящих через m. (Две кривые $x(t)$ и $y(t)$ **эквивалентны**, если $x(0) = y(0) = m$ и $\|x(t) - y(t)\| = o(t)$ в любой локальной карте, покрывающей m.)

(b) *Аналитически* — как выражение $\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ в локальной системе координат с началом в точке m.

(c) *Алгебраически* — как линейный функционал на $\mathcal{A}(M)$, удовлетворяющий условию

$$\xi(fg) = \xi(f)g(m) + f(m)\xi(g). \tag{6}$$

Упражнение 12. Найти явное соответствие между $\mathbb{R}^n$ и касательными векторами к M в точке m во всех трех определениях.

Ответ. Вектор $\{a^i\} \in \mathbb{R}^n$ соответствует

[12]Читателю предлагается сравнить эти математические определения с физическим определением касательного вектора как **скорости** движения точки вдоль заданной поверхности.

(a) классу эквивалентности кривых $x(t)$ таких, что $\dfrac{dx^i}{dt}(0) = a^i$,

(b) выражению $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$,

(c) линейному функционалу $f \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} a^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(m)$.

Множество TM всех касательных векторов образует многообразие специального вида: расслоение. Напомним, что многообразие X называется **расслоением** (**расслоенным пространством**) над **базой** B со **слоем** F, если задано гладкое сюръективное отображение $p : X \to B$ такое, что локально X представимо как прямое произведение (части) базы и слоя. Более точно, любая точка $x \in B$ имеет окрестность U_x такую, что $p^{-1}(U_x)$ можно отождествить с $U_x \times F$ с помощью гладкого отображения α_x так, что следующая диаграмма (p_1 — проекция на первый сомножитель) коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U_x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "p"'] & U_x \times F \arrow[d, "p_1"] \\
U_x \arrow[r, equal] & U_x
\end{tikzcd}$$

Следовательно, все множества $F_x := p^{-1}(x)$ суть гладкие подмногообразия, диффеоморфные F. Они называются **слоями**. Отображение $s : B \to X$ называется **сечением** расслоения, если $p \circ s = \mathrm{Id}$.

Заметим, что прямое произведение $X = B \times F$ есть частный случай расслоения: можно положить $U = X$ и $\alpha = \mathrm{Id}$. В этом случае сечения суть просто отображения $s : B \to F$. Иногда расслоения называют **косыми** или **скрещенными** произведениями B и F. Они образуют категорию $\mathcal{C}(B, F)$, у которой морфизмы из (X_1, p_1) в (X_2, p_2) суть гладкие отображения $\varphi : X_1 \to X_2$ такие, что $p_2 \circ \varphi = p_1$.

Упражнение 13. (a) Показать, что лист Мёбиуса является расслоением с базой S^1 и слоем $\mathbb{R}^1$.

(b) Проверить, что он является единственным (с точностью до эквивалентности) объектом категории $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{R}^1)$, который не эквивалентен прямому произведению $S^1 \times \mathbb{R}^1$.

Расслоение (X, B, F, p) называется **векторным**, если F и все F_x — векторные (вещественные или комплексные) пространства и отображения α_x, $x \in X$, линейны на каждом слое.

Таким образом, TM является вещественным векторным расслоением со слоем $T_m(M)$ над точкой $m \in M$. (Гладкие) сечения этого расслоения называются (гладкими) **векторными полями** на M. Они допускают несколько интерпретаций.

(a) *Образующие потоков* — т. е. однопараметрических групп диффеоморфизмов M (здесь следует считать многообразие M компактным или ограничить действие векторного поля на бесконечности).

(b) *Выражения* $\sum a^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ в каждой локальной системе координат на многообразии M с естественным правилом перехода при замене координат.

Именно, векторное поле $\sum a^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ в другой карте с локальными координатами $\{y^j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ имеет вид $\sum\limits_{i,j} a_i(x(y))\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i}\dfrac{\partial}{\partial y^j}$.

(c) *Линейные операторы* (дифференцирования) v на $\mathcal{A}(M)$, удовлетворяющие условию

$$v(fg) = v(f)\cdot g + f\cdot v(g). \tag{7}$$

Пространство всех гладких векторных полей на M обозначается $\mathrm{Vect}(M)$. Очевидно, что это модуль над $\mathcal{A}(M)$. (Другими словами, можно умножать гладкие векторные поля на гладкие функции.)

Дифференциальная 1-форма или **ковекторное поле** на M определяется как

(a) *выражение* $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)dx^i$ в каждой локальной системе координат на M с естественным правилом перехода при замене координат (в других локальных координатах $\{y^j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ наша 1-форма имеет вид $\sum\limits_{i,j} b_i(x(y))\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j$),

(b) $\mathcal{A}(M)$-*линейное отображение* из $\mathrm{Vect}(M)$ в $\mathcal{A}(M)$ (любое такое отображение имеет вид $\sum\limits_i a^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i} \mapsto \sum\limits_i a^i(x)b_i(x)$ и, следовательно, соответствует форме $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x)dx^i$).

Пространство всех гладких ковекторных полей на M обозначим $\Omega^1(M)$. Это пространство является модулем над $\mathcal{A}(M)$, двойственным $\mathrm{Vect}(M)$. В любой системе локальных координат x^i, $1 \leqslant j \leqslant n$, величины

$$\left\{\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}, \quad \{dx^i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$$

образуют двойственные базисы в $\mathcal{A}(M)$-модулях $\mathrm{Vect}(M)$ и $\Omega^1(M)$.

Пространство $\Omega^k(M)$ гладких **дифференциальных k-форм** на M может быть определено как k-я внешняя степень $\mathcal{A}(M)$-модуля $\Omega^1(M)$. В локальных координат k-форма ω имеет вид

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}, \tag{8}$$

где i_s, $1 \leqslant s \leqslant k$, пробегают значения от 1 до n, а произведение $\wedge$ билинейно, ассоциативно и антисимметрично.

Введем пространство $\mathrm{Vect}^k(M)$ гладких **поливекторных полей** на M как k-ю внешнюю степень $\mathcal{A}(M)$-модуля $\mathrm{Vect}(M)$. Локально k-векторное поле c можно задать выражением вида

$$\sum_{i_1,\dots,i_k} c^{i_1,\dots,i_k}(x)\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_k}. \tag{9}$$

Замечание 5. Следуя **правилу Эйнштейна**, мы опускаем знак суммирования в выражениях типа (8) или (9), где буква появляется дважды —

как нижний и верхний индекс. Например, мы записываем векторное поле v как $v^i\partial_i$, а дифференциальную 1-форму ω — как $\omega_i dx^i$. Это правило не только экономит место и бумагу, но часто подсказывает правильные формулировки и препятствует ошибочным утверждениям. Мы подтвердим это следующим поучительным примером. Первый закон Ньютона в механике утверждает, что

$$F = m \cdot a, \tag{N1}$$

где F — сила, m — масса, a — ускорение. Заметим, что с геометрической точки зрения сила есть ковекторное поле $F = F_i dx^i$. Действительно, интегрируя ее вдоль некоторого пути (см. п. 2.3 ниже), можно вычислить соответствующую работу. С другой стороны, ускорение есть производная по времени скорости и, следовательно, является векторным полем. Но тогда (N1) имеет смысл только, если m — не скаляр, а тензор с двумя нижними индексами. Таким образом, корректная запись (N1) будет следующей:

$$F_i = m_{ij} \cdot a^j.$$

Это наводит на мысль, что существует связь между физическим понятием массы и геометрическим понятием метрики. Хорошо известно, что такая связь действительно существует и является краеугольным камнем общей теории относительности.

2.2. Геометрические объекты на многообразиях. Все введенные выше объекты являются так называемыми **естественными геометрическими объектами**. Это означает, что каноническое действие группы $\mathrm{Diff}(M)$ всех **диффеоморфизмов** (т. е. гладких обратимых преобразований) многообразия M определено на этих объектах или, проще, существует канонический способ замены переменных в локальном выражении данного геометрического объекта. Фактически, это действие однозначно определено естественным действием $\mathrm{Diff}(M)$ на алгебре $\mathcal{A}(M)$: диффеоморфизму $\varphi \in \mathrm{Diff}$ соответствует автоморфизм $\Phi \in \mathcal{A}(M)$ по правилу

$$f \mapsto \Phi(f) := f \circ \varphi. \tag{10}$$

Все другие геометрические объекты можно определить в терминах $\mathcal{A}(M)$. Действительно, $\mathrm{Vect}(M)$ определено как множество всех дифференцирований $\mathcal{A}(M)$ (с канонической структурой $\mathcal{A}(M)$-модуля), $\Omega^1(M)$ — как двойственный $\mathcal{A}(M)$-модулю $\mathrm{Vect}(M)$, $\Omega^k(M)$ и $\mathrm{Vect}^k(M)$ — как соответствующие внешние степени. Поэтому любой автоморфизм $\mathcal{A}(M)$ автоматически определяет автоморфизмы всех этих объектов.

Существуют более общие геометрические объекты — так называемые **тензорные поля**. Под общим **тензорным полем типа** (k,l) на M понимается объект T, который локально задан коэффициентами $t^{j_1\ldots j_l}_{i_1\ldots i_k}(x)$ с таким же, как и выше, правилом преобразования при замене локальных координат. С алгебраической точки зрения, множество $T^{(k,l)}(M)$ всех тензорных полей типа (k,l) на M можно определить как $\mathcal{A}(M)$-модуль

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(M)}(\underbrace{\mathrm{Vect}(M)\times\ldots\times\mathrm{Vect}(M)}_{k\text{ раз}}\times\underbrace{\Omega^1(M)\times\ldots\times\Omega^1(M)}_{l\text{ раз}},\mathcal{A}(M))$$

всех мультилинейных (над $\mathcal{A}(M)$) отображений. Заметим, что k-векторные поля и дифференциальные k-формы являются частными случаями тензорных полей (антисимметричные тензорные поля типа $(0,k)$ и $(k,0)$ соответственно).

Тензорные поля и более общие геометрические объекты будут рассмотрены в лекции 2.

2.3. Интегрирование на многообразиях. Обозначение $\int_a^b f(x)dx$ интеграла (введенное Лейбницем) чрезвычайно примечательно. Во-первых, оно указывает,что интегрируемый объект *является дифференциальной* 1*-формой, а не функцией.* Как я неоднократно наблюдал в моей педагогической практике, студенты часто “упрощают” это выражение и пишут $\int_a^b f(x)$, считая при этом, что никакой информации не потеряно. Но такое выражение совершенно лишено смысла! Действительно, допустим, что задан геометрический сегмент без какой-либо параметризации. Как понимать тогда интеграл по этому сегменту от функции, равной 1 во всех его точках? Очевидный ответ “длина сегмента” провоцирует следующий вопрос: В каких единицах измерять эту длину? Роль dx именно в том и состоит, чтобы фиксировать шкалу.

Во-вторых, роли верхнего и нижнего пределов несимметричны: при их перестановке интеграл меняет знак. Это означает, что интеграл берется по *ориентированному сегменту* и меняет знак при смене ориентации. Конечно, можно поставить условие $a \leqslant b$ и рассматривать сегмент как множество. Тщательный анализ такого подхода приводит к выводу, что возможны два различных вида интегрирования:

— *интегрирование дифференциальной n-формы по ориентированному n-мерному многообразию,*

— *интегрирование плотности степени* 1 *по любому многообразию.*

Обе концепции интегрирования имеют свои преимущества. Интегрирование второго типа легко обобщается до абстрактной теории меры. Интегрирование первого типа требует введения дополнительной структуры, но, с другой стороны, допускает замечательную формулу Стокса, которая связывает геометрическое понятие границы ∂M многообразия M с аналитическим понятием внешнего дифференциала d дифференциальных форм:

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega. \tag{11}$$

Мы не будем останавливаться на теории интегрирования. Приведем лишь для интересующегося читателя замечательный пример Гаусса.

Так называемый **коэффициент зацепления** двух замкнутых кривых $L_1 = x(t)$ и $L_2 = y(s)$ в $\mathbb{R}^3$ определяется формулой

$$l(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{(dx, dy, x-y)}{|x-y|^3}.$$

2.4. Линейные расслоения со связностями. Рассмотрим более подробно геометрию **комплексных линейных расслоений** над гладкими многообразиями. Напомним (см. п. 1.2), что комплексное линейное расслоение L над гладким многообразием M можно задать следующим образом.

Выбрать покрытие M открытыми множествами U_α, $\alpha \in A$, такими, что L допускает ненулевое сечение s_α на U_α. На пересечениях $U_{\alpha,\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$ сечения s_α и s_β связаны функциями перехода $s_\alpha = c_{\alpha,\beta} \cdot s_\beta$. Совокупность функций перехода $c_{\alpha,\beta} \in C^\infty_\mathbb{C}(U_{\alpha,\beta})^\times$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &(a)\ c_{\alpha,\alpha} \equiv 1 \text{ на } U_\alpha,\\ &(b)\ c_{\alpha,\beta} \cdot c_{\beta,\alpha} \equiv 1 \text{ на } U_{\alpha,\beta} = U_\alpha \cap U_\beta,\\ &(c)\ c_{\alpha,\beta} \cdot c_{\beta,\gamma} \cdot c_{\gamma,\alpha} \equiv 1 \text{ на } U_{\alpha,\beta,\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \end{aligned} \tag{12}$$

Для произвольного сечения s сужение на U_α имеет вид $f_\alpha \cdot s_\alpha$. Таким образом, существует биекция между гладкими сечениями s расслоения L и совокупностью $\{f_\alpha \in C^\infty_\mathbb{C}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ такая, что выполнены условия совместности

$$c_{\alpha,\beta} \cdot f_\alpha = f_\beta \quad \text{на } U_{\alpha,\beta}. \tag{13}$$

Заметим, что в частном случае тривиального расслоения, когда $c_{\alpha,\beta}$ имеет вид $\frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta}$, можно отождествить сечение $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ с обычной функцией f такой, что $f|_{U_\alpha} = f_\alpha \cdot \rho_\alpha$. Таким образом, пространство $\Gamma(L, M)$ всех гладких сечений расслоения L над M является естественным обобщением пространства функций $C^\infty_\mathbb{C}(M)$. С алгебраической точки зрения, это пространство есть модуль над $C^\infty_\mathbb{C}(M)$, который локально (т. е. над некоторой окрестностью любой точки) свободен и одно-порожденный.

В сравнении с функциями, сечения линейных расслоений имеют один существенный дефект: мы не можем дифференцировать их по данному векторному полю. Чтобы преодолеть это препятствие, потребуется ввести новый геометрический объект: связность. Этот объект можно определить различными способами, но мы предпочтем пользоваться следующим определением, которое хорошо работает.

Определение 6. **Связность** ∇ на линейном расслоении L — это отображение $X \mapsto \nabla_X$ из $\operatorname{Vect} M$ в множество линейных операторов на $\Gamma(L, M)$ такое, что

$$\begin{aligned} &(a)\quad \nabla_X(f \cdot s) = Xf \cdot s + f \cdot \nabla_X s \quad \text{для любых } f \in C^\infty_\mathbb{C}(M), s \in \Gamma(L, M),\\ &(b)\quad \nabla_{\varphi X} = \varphi \nabla_X \quad \text{для любой } \varphi \in C^\infty_\mathbb{C}(M). \end{aligned} \tag{14}$$

Оператор ∇_X называется **ковариантной производной** вдоль векторного поля X.

Лемма 2. (a) *Локально ∇_X можно записать в виде $X + \theta_\alpha(X)$. Другими словами, ∇_X преобразует сечение, заданное набором $\{f_\alpha \in C^\infty_{\mathbb{C}}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, в сечение, заданное набором $\{(X + \theta_\alpha(X))f_\alpha \in C^\infty_{\mathbb{C}}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.*

(b) *Семейство 1-форм $\{\theta_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ определяет связность на L тогда и только тогда, когда выполнено условие совместности*

$$\theta_\alpha - \theta_\beta = d\log c_{\alpha,\beta}. \tag{15}$$

Доказательство. (a) Пусть задана связность ∇. Определив форму θ_α равенством $\nabla_X s_\alpha = \theta_\alpha(X)\cdot s_\alpha$, получим локальное выражение.

(b) Проверим, что при выполнении условия совместности (15) оператор ∇_X корректно определен локальным выражением, приведенным выше. Таким образом, требуется проверить равенство $c_{\alpha,\beta}\cdot(X + \theta_\alpha(X))f_\alpha = (X + \theta_\beta(X))(c_{\alpha,\beta}\cdot f_\alpha)$, что можно выполнить прямыми вычислениями. □

Заметим, что из условия (15) вытекает, в частности, что все формы $d\theta_\alpha$, $\alpha \in A$, являются сужениями одной замкнутой 2-формы $\theta \in \Omega^2(M)$. Форма θ называется **формой кривизны** связности ∇ и обозначается через $\mathrm{curv}(\nabla)$.

Упражнение 14. Доказать формулу ?

$$\mathrm{curv}(\nabla)(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

Указание. Использовать локальное выражение для ∇_X и формулу $d\theta(X,Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X,Y])$.

Понятие ковариантной производной тесно связано с так называемым параллельным переносом на L вдоль кусочно гладкого пути $\gamma : [0,1] \to M$. Будем говорить, что сечение $s : \gamma([0,1]) \to M$ **ковариантно постоянно** вдоль γ, если $\nabla_{\dot\gamma(t)}s = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а элемент $s(\gamma(1))$ получен из $s(\gamma(0))$ **параллельным переносом** вдоль пути γ. Вообще говоря, параллельный перенос зависит от выбора пути, соединяющего две точки многообразия M. Иначе говоря, параллельный перенос вдоль петли γ может быть нетривиальным преобразованием соответствующего слоя расслоения L. Так как слой одномерный, это преобразование есть просто умножение на комплексное число $\chi(\gamma)$. Хорошо известен следующий результат (см. любой учебник по дифференциальной геометрии).

Предложение 2. *Если петля γ является границей двумерной пленки $D \subset M$, то при подходящем выборе ориентации γ и D*

$$\chi(\gamma) = \exp\left(\int_D \mathrm{curv}(\nabla)\right). \tag{16}$$

Возникает естественный вопрос: Какие замкнутые 2-формы на M могут быть формами кривизны линейного расслоения L со связностью ∇? Ответ дает следующее

Предложение 3. *Пусть $\sigma \in \Omega^2(M)$ — замкнутая форма. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *класс* $[\sigma]$ *принадлежит* $H^2(M,\mathbb{Z}) \subset H^2(M,\mathbb{C})$ *(другими словами, интегралы* $\int_D \sigma$ *являются целыми числами для всех геометрических 2-циклов* D *в* M*),*

(ii) *существует линейное расслоение над* Ω *с эрмитовой связностью* ∇ *такое, что*

$$\operatorname{curv}(\nabla) = 2\pi i\sigma. \tag{17}$$

Схема доказательства. (ii)$\Rightarrow$(i) Если $\sigma = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{curv}\nabla$, то согласно предложению 2 для любой двумерной поверхности $D \subset \Omega$ имеем

$$\exp\left(2\pi i\int_D \sigma\right) = \chi(\partial D).$$

Правая часть этого равенства равна 1, если $\partial D = \varnothing$, т. е. D — 2-цикл. Поэтому интеграл в левой части должен быть целым числом.

(i)$\Rightarrow$(ii) Предположим, что $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — так называемое **покрытие Лере**, т. е. все области U_α, $U_{\alpha,\beta}$, $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ и т. д. стягиваемы. Известно, что для таких покрытий когомологии Чеха совпадают с когомологиями Де Рама.[13]

Так как σ замкнута, сужение на U_α также замкнуто и, следовательно, точно. Поэтому можно предположить, что $\sigma\big|_{U_\alpha} = \frac{1}{2\pi i}d\theta_\alpha$, где θ_α — 1-форма на U_α, определенная по модулю дифференциала функции f_α на U_α. На $U_{\alpha,\beta}$ имеем $d(\theta_\alpha - \theta_\beta) = 0$. Поэтому существует $B_{\alpha,\beta} \in C^\infty_{\mathbb{C}}(U_{\alpha,\beta})$ такая, что $\theta_\alpha - \theta_\beta = dB_{\alpha,\beta}$. Функции $B_{\alpha,\beta}$ определены по модулю слагаемого формы $f_\alpha - f_\beta$. Кроме того, можно выбрать $B_{\alpha,\beta}$ так, что $B_{\alpha,\alpha} = 0, B_{\alpha,\beta} = -B_{\beta,\alpha}$. Эти функции определены по модулю постоянных слагаемых $b_{\alpha,\beta}$.

Теперь рассмотрим функции $A_{\alpha,\beta,\gamma} = B_{\alpha,\beta} + B_{\beta,\gamma} + B_{\gamma,\alpha}$ на $U_{\alpha,\beta,\gamma}$. Они определены по модулю постоянных слагаемых $b_{\alpha,\beta} + b_{\beta,\gamma} + b_{\gamma,\alpha}$ и подчинены условию $dA_{\alpha,\beta,\gamma} = (\theta_\alpha - \theta_\beta) + (\theta_\beta - \theta_\gamma) + (\theta_\gamma - \theta_\alpha) = 0$. Таким образом, они являются константами, которые будут обозначаться $a_{\alpha,\beta,\gamma}$. Мы получили так называемый комплекснозначный **2-коцикл Чеха** на M. Этот коцикл соответствует коциклу $[\sigma] \in H^2(M,\mathbb{Z})$. Поэтому можно считать, что все числа $a_{\alpha,\beta,\gamma}$ целые.

Однако в этом случае $c_{\alpha,\beta} = \exp(2\pi i B_{\alpha,\beta})$ можно рассматривать как функции перехода линейного расслоения L над M. Действительно, первые два условия в (12) выполняются благодаря выбору $B_{\alpha,\beta}$, а последнее условие справедливо, так как $a_{\alpha,\beta,\gamma}$ целые. □

3*. Некоммутативная геометрия

Главная идея концепции некоммутативной геометрии заключается в том, что некоммутативные алгебры выступают в роли алгебры функций.

[13] Определения используемых здесь без пояснений терминов можно найти в любом учебнике по алгебраической топологии. При этом я надеюсь, что изложение лекций достаточно замкнуто и дает читателю правильное представление об общих идеях теорий.

В этом параграфе мы рассмотрим два важных частных случая: супермногообразия и квантовые группы.

3.1. Супермногообразия. За последние два десятилетия выяснилось, что многие фундаментальные понятия математики (такие, как векторные пространства, тензорные произведения, след и детерминант линейного оператора, дифференциальное и интегральное исчисление, многообразия, группы Ли и т. д.) имеют так называемые **супераналоги**. Подход с такой новой точки зрения получил неофициальное название "суперматематика". Грубо говоря, идея суперматематики заключается в том, что знаки "плюс" и "минус" становятся равноправными. Согласно этой идеологии каждому обычному или четному объекту соответствует нечетный аналог, который вместе с четной частью образует суперобъект.

Чтобы определить (построить) супераналог какого-либо обычного объекта или некоторой теории, нужно следовать трем принципам, краткая формулировка которых и обсуждение приводятся ниже.

1. Формулировать все на языке категорий (в частности, учесть замечание 4 выше).

2. В линейном случае любой суперобъект представлять в виде суммы однородных компонент: четной и нечетной.

3. Всякий раз, когда в обыкновенной формуле произведение двух однородных объектов ab появляется также в обратном порядке ba, вставлять знак $(-1)^{\deg a \cdot \deg b}$. Здесь степень принимает значения в группе $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ и равна по определению $\overline{0}$ для четных элементов и $\overline{1}$ для нечетных элементов.

Начнем с простейшего примера. Супераналог вещественного векторного пространства V — это $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство $\mathcal{V}$, т. е. прямая сумма двух подпространств, градуированных элементами группы $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$: $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$. Элементы $\mathcal{V}_0$ называются **четными**, а элементы $\mathcal{V}_1$ — **нечетными**. Размерность $\mathcal{V}$ — это пара (d_0, d_1), где $d_\alpha = \dim \mathcal{V}_\alpha$. Через $\mathbb{R}^{n/m}$ обозначается стандартное суперпространство размерности (n, m).

Упражнение 15. Определить супераналоги следующих понятий:

(a) двойственное векторное пространство V^*,

(b) пространство $\mathrm{Hom}(V, W)$ линейных операторов из V в W,

(c) тензорное произведение $V \otimes W$.

Указание. Определить категорию $\mathrm{SVect}(\mathbb{R})$ вещественных супервекторных пространств. Заметим, что для этой категории должен существовать функтор Π, называемый **сменой четности**, такой, что $(\Pi\mathcal{V})_\alpha = \mathcal{V}_{1+\alpha}$.

Обобщим понятие коммутативности. Пусть A — $\mathbb{Z}_2$-градуированная ассоциативная алгебра. Это означает, что

— как векторное пространство A является прямой суммой двух подпространств: $A = A_0 \oplus A_1$

— умножение в A совместимо с градуировкой: $A_\alpha \cdot A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$.

Определение 7. $\mathbb{Z}_2$-градуированная ассоциативная алгебра A называется **суперкоммутативной**, если для любых однородных элементов a и b

выполнено коммутационное соотношение

$$ab = (-1)^{\deg a \cdot \deg b} ba. \qquad \text{[суперкоммутативность]}. \tag{18}$$

Как более сложный пример, мы опишем здесь супераналог симметрической алгебры $S(V)$ для вещественного векторного пространства V.

Прежде всего заменим обыкновенное векторное пространство V $\mathbb{Z}_2$-градуированным суперпространством $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$. Затем примем во внимание, что $S(V)$, вместе с каноническим вложением $V \hookrightarrow S(V)$, можно определить как универсальный объект категории, объектами которой являются отображения из V в некоторую ассоциативную коммутативную алгебру A, а морфизм из $(\varphi : V \to A)$ в $(\psi : V \to B)$ — это гомоморфизм алгебр $\gamma : A \to B$ такой, что следующая диаграмма коммутативна (оставляем читателю проверку этого утверждения):

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ V & \xrightarrow{\psi} & B \end{array}$$

Теперь надо лишь заменить в этом определении слово "коммутативный" словом "суперкоммутативный" и рассмотреть категорию четных (т. е. сохраняющих градуировку) отображений $(\varphi : \mathcal{V} \to A)$. В результате мы получим так называемую **суперсимметрическую алгебру** $S(\mathcal{V})$, которая является тензорным произведением обыкновенной симметрической алгебры $S(\mathcal{V}_0) \simeq \mathbb{R}[x_1, \dots x_p]$ и **грассмановой** или **внешней** алгебры $\mathrm{Gr}(\mathcal{V}_1) \simeq \mathbb{R}\langle\theta_1, \dots, \theta_q\rangle$ с **антикоммутационными соотношениями**

$$\theta^i\theta^j + \theta^j\theta^i = 0 \quad \text{для всех } i, j. \tag{19}$$

Здесь $x_1, \dots x_p$ и $\theta_1, \dots, \theta_q$ — базисы в $\mathcal{V}_0$ и $\mathcal{V}_1$ соответственно. Заметим, что алгебра $\mathrm{Gr}(\mathcal{V}_1)$ имеет конечную размерность 2^q.

Мы подошли к к понятию **супермногообразия**. Оно появилось впервые в середине 70-х в физических работах, где была сделана попытка объединить теории бозонных и фермионных частиц. Язык супермногообразий оказался адекватным новому феномену, открытому в физике: так называемой **суперсимметрии**. Обычная симметрия может быть сформулирована в терминах группового действия. В случае суперсимметрии следует использовать супергруппы (групповые объекты в категории супермногообразий; см. п. 3.3).

Математическая составляющая теории зародилась в работах Ф. А. Березина (см. [Be2], [BK]) в 70-е годы и к настоящему времени хорошо развита в работах Е. Виттена (см., например, [W]).

Для определения супермногообразия можно использовать аналитический подход, аналогичный описанному в п. 1.1. Различие состоит лишь в том, что в качестве локальных карт следует использовать так называемые суперобласти.

По определению **суперобласть** $\mathcal{D}$ состоит из

(a) области $D \subset \mathbb{R}^n$ с координатами $\{x^1, \dots, x^n\}$,

(b) алгебры Грассмана $\mathbb{R}\langle\theta^1,\dots,\theta^m\rangle$.

Тензорное произведение $C^\infty(D)\otimes\mathbb{R}\langle\theta_1,\dots,\theta_m\rangle$ обозначается через $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ и рассматривается как алгебра гладких функций на $\mathcal{D}$. Удобно рассматривать элемент $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ как гладкую функцию на D со значениями в алгебре Грассмана $\mathbb{R}\langle\theta^1,\dots,\theta^m\rangle$. В качестве размерности суперобласти принимается пара (n,m).

В частном случае $D=\mathbb{R}^n$ получаем суперобласть $\mathcal{R}^{n|m}$. Заметим, что $\mathcal{R}^{n|m}$ отлична от $\mathbb{R}^{n|m}$: первая из них — это суперобласть, а вторая — градуированное пространство. Поэтому они принадлежат различным категориям и допускают различные морфизмы.

Гладкое отображение из одной суперобласти $\mathcal{D}_1$ с координатами (x,θ) в другую суперобласть $\mathcal{D}_2$ с координатами (y,ξ) определяется как четный непрерывный гомоморфизм из $\mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$ в $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$. На самом деле этот гомоморфизм определяется образами координат (y,ξ):

$$y^i=\varphi^i(x^1,\dots,x^{n_1};\theta^1,\dots,\theta^{m_1}),\quad 1\leqslant i\leqslant n_2,$$
$$\xi^j=\psi^j(x^1,\dots,x^{n_1};\theta^1,\dots,\theta^{m_1}),\quad 1\leqslant j\leqslant m_2,$$

где φ^i и ψ^j — четные и нечетные элементы $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1)$ (т. е. гладкие функции на D_1 со значениями в четной или нечетной компоненте алгебры Грассмана $\mathbb{R}\langle\theta^1,\dots,\theta^{m_1}\rangle$).

В общем случае **супермногообразие** M — это объект, полученный склеиванием суперобластей, так же как обычные многообразия получаются склеиванием локальных координатных карт.

Важно помнить, что супермногообразие M *не является множеством*! Однако для любой $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры A можно определить множество $M(A)$ A-точек M как множество всех гомоморфизмов $\varphi:\mathcal{A}(M)\to A$. В частности, гомоморфизмы $\varphi:\mathcal{A}(M)\to\mathbb{R}$ называются "точками" (или "вещественными точками") супермногообразия M. В отличие от случая обыкновенных многообразий, супермногообразие не определяется своими точками.

По определению "гладкое отображение" из одного супермногообразия $\mathcal{M}$ в другое супермногообразие $\mathcal{N}$ — это четный гомоморфизм из $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ в $\mathcal{A}(\mathcal{M})$.

Замечание 6. Эта точка зрения широко принята в современной алгебраической геометрии. Вспомним, что в классической алгебраической геометрии **аффинное алгебраическое многообразие** X определяется как множество, заданное системой полиномиальных уравнений от n переменных с коэффициентами в некотором поле (или кольце) k. В современном понимании X рассматривается как функтор, сопоставляющий каждой коммутативной ассоциативной k-алгебре A множество $X(A)$ всех решений данной системы уравнений со значениями в A.

Упражнение 16. Показать, что множество всех точек $\mathcal{R}^{n|m}$ совпадает с $\mathbb{R}^n$. ?

Указание. Показать, что нечетные элементы принадлежат ядру любого гомоморфизма $\chi:\mathcal{A}(\mathcal{R}^{n|m})\to\mathcal{R}$.

Упражнение 17. Описать множество всех отображений $\mathcal{R}^{1|1}$ в $\mathcal{R}^{n|m}$. ?

Ответ. Множество пар (f, g) где f — параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$ и g — параметризованная кривая в $\mathbb{R}^m$. В терминах естественных координат на $\mathcal{R}^{1|1}$ и $\mathcal{R}^{n|m}$ отображение задается формулой $x^i = f^i(x)$, $\tau^j = g^j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

3.2. Квантовые группы — это групповые объекты категории $\mathrm{Alg}(\mathbb{C})^\circ$, двойственной категории $\mathrm{Alg}(\mathbb{C})$ всех (не обязательно коммутативных) комплексных ассоциативных алгебр.[14] Таким образом, квантовая группа G — это *не группа*. И даже не множество!

Говоря о квантовых группах, удобно использовать как теоретико-множественную, так и теоретико-групповую терминологию. Но при этом следует помнить, что все утверждения имеют смысл, только если они сформулированы категориально, т. е. не в терминах точек, но в терминах функций на G.

Начнем с обычного группового закона на множестве G, т. е. отображения $m : G \times G \to G$, подчиненного аксиомам (ассоциативность, существование единицы и обратного отображения). Пусть G — комплексная алгебраическая группа и $\mathcal{A}(G)$ — алгебра регулярных (полиномиальных) функций на G. Отображение умножения m определяет двойственное отображение

$$\Delta : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G) \otimes \mathcal{A}(G), \tag{20}$$

которое называется **коумножением**. Это отображение переводит $f \in \mathcal{A}(G)$ в элемент Δf тензорного произведения $\mathcal{A}(G) \otimes \mathcal{A}(G) \cong \mathcal{A}(G \times G)$ по формуле $\Delta f(x, y) := f(xy)$.

В случае квантовой группы мы уже не имеем множества G, тогда как "алгебра функций" $\mathcal{A}(G)$ на G по-прежнему имеет смысл. Таким образом, отображение (20) можно принять в качестве определения группового закона на G.[15]

Единица $e \in G$ со свойством $eg = ge = g$ для всех $g \in G$ заменяется гомоморфизмом $ev_e : \mathcal{A}(G) \to \mathbb{C}$ таким, что

$$(1 \otimes ev_e) \circ \Delta = (ev_e \otimes 1) \circ \Delta = \mathrm{Id}. \tag{21}$$

Для обычных групп $ev_e(f) := f(e)$, так что $((1 \otimes ev_e) \circ \Delta)(f)(g) = \Delta(f)(g, e) = f(ge)$. Поэтому второе равенство в (21) эквивалентно равенству $f(ge) = f(g)$ для всех $f \in \mathcal{A}(G)$, которое, в свою очередь, эквивалентно равенству $ge = g$.

Закон ассоциативности заменяется неуклюжей коммутативной диаграммой и называется **законом коассоциативности**. (Читатель может нарисовать такую диаграмму самостоятельно или посмотреть в любой книге по квантовым группам.) Линейное представление квантовой группы в векторном пространстве определяется как отображение $\pi : V \to \mathcal{A} \otimes V$ такое,

[14] Определенные таким образом квантовые группы суть некоммутативные аналоги комплексных алгебраических групп Ли. Существуют также некоммутативные аналоги вещественных алгебраических групп, локально компактных топологических групп, компактных групп и т. д. (см., например, [ShSt] и библиографию там).

[15] В случае групп Ли, когда $\mathcal{A}(G) = C_c^\infty(G)$, следует заменить $\mathcal{A}(G) \otimes \mathcal{A}(G)$ пополненным тензорным произведением $\mathcal{A}(G) \hat{\otimes} \mathcal{A}(G) \cong \mathcal{A}(G \times G)$.

что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\otimes V \arrow[r, "1\otimes\pi"] \arrow[d, equal] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes V \arrow[d, equal] \\ \mathcal{A}\otimes V \arrow[r, "\Delta\otimes 1"] & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes V \end{tikzcd}$$

и т. п.

Замечание 7. В случае конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ закон коассоциативности для коумножения Δ эквивалентен гораздо более понятному (и наглядному) свойству: двойственное отображение $\Delta^* : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ является ассоциативным умножением на $\mathcal{A}^*$. К сожалению, наиболее интересные примеры квантовых групп соответствуют бесконечномерным алгебрам $\mathcal{A}$. Тем не менее, это замечание по-прежнему имеет смысл. Дело в том, что $\mathcal{A}$ часто допускает градуировку $\mathcal{A} = \oplus_{n\geqslant 0}\mathcal{A}^n$ с конечномерными однородными компонентами $\mathcal{A}^n$. Тогда можно определить **градуированное двойственное пространство** $\mathcal{A}^*_{\mathrm{gr}}$ как $\oplus_{n\geqslant 0}(\mathcal{A}^n)^*$ (со свойством $(\mathcal{A}^*_{\mathrm{gr}})^*_{\mathrm{gr}} \cong \mathcal{A}$) и опять рассмотреть Δ^* как закон умножения в $\mathcal{A}^*_{\mathrm{gr}}$.

Замечательный факт заключается в том, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*_{\mathrm{gr}}$ играют симметричные роли: все аксиомы инвариантны при замене $\mathcal{A} \longleftrightarrow \mathcal{A}^*_{\mathrm{gr}}$, $\Delta \longleftrightarrow \Delta^*$.

Итак, квантовые группы возникают парами. Когда один член соответствует обыкновенной конечной группе G (т. е. $\mathcal{A}(G)$ — алгебра $\mathbb{C}[G]$ комплекснозначных функций на G с обыкновенным умножением), двойственная алгебра $\mathcal{A}^*(G)$ тоже отождествляется с $\mathbb{C}[G]$, но с конволютивным умножением. В частности, если G абелева, двойственность квантовых групп совпадает с двойственностью Понтрягина для абелевых групп.

Пример 7. Важный частный случай появляется при рассмотрении обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в роли $\mathcal{A}^*_{\mathrm{gr}}(G)$. Коумножение определяется формулой

$$\Delta X = X\otimes 1 + 1\otimes X, \qquad X\in\mathfrak{g}. \tag{22}$$

Двойственная алгебра $\mathcal{A}(G)$ в этом случае состоит из ростков функций на G в e с обыкновенным умножением и коумножением согласно формуле (20). Оно коммутативно, но иногда допускает интересную некоммутативную деформацию.

Преимущество нового подхода состоит в том, что такие жесткие объекты, как компактные или полупростые группы Ли, допускают нетривиальные деформации в более широкой категории квантовых групп. Мы вернемся к этому примеру позже.

Историческое замечание

Квантовые группы в описанной выше форме появились в 50-е годы под названием "кольцевые группы" в статьях киевского математика Г. И. Каца. Он определил кольцевые группы, пытаясь построить теорию, в которой некоммутативные группы и их двойственные объекты играют равноправные роли. Современная история теории квантовых групп началась в 80-е годы, когда в математической физике были открыты и использованы интересные примеры. Введение в эту теорию изложено в [D]. ■

3.3. Геометрические объекты на супермногообразиях. Геометрию супермногообразий можно строить таким же образом, как в описанном выше случае обыкновенных многообразий. Например, можно определить векторные поля на супермногообразии $\mathcal{M}$ как супердифференцирования[16] алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Полезное упражнение: выписать выражение для векторного поля в терминах локальных координат. Располагая $\mathcal{A}(\mathcal{M})$-модулем $\mathrm{Vect}(\mathcal{M})$, можно определить поливекторные поля, дифференциальные формы и общие тензорные поля так же, как и в п. 2.2. Однако имеется существенное отличие. Роль группы $\mathrm{Diff}\, M \cong \mathrm{Aut}\, \mathcal{A}(M)$ в данном случае играет так называемая **супергруппа**. Как уже было отмечено, это не группа, а лишь групповой объект категории SMan супермногообразий. (Естественно, у него есть базисная группа вещественных точек, однако сам объект уже не восстанавливается из этой группы.)

Для иллюстрации рассмотрим супермногообразия, которые являются одномерными суперрасширениями обыкновенной окружности S^1. Существуют два таких супермногообразия, которые мы обозначим $S^{1|1}_{\pm}$. По определению алгебра $\mathcal{A}(S^{1|1}_{\pm})$ состоит из функций $f(t,\tau)$ одной вещественной переменной t и одной грассмановой переменной τ вида

$$f(t,\tau) = f_0(t) + \tau \cdot f_1(t), \qquad f_i(t+2\pi) = \pm f_i(t).$$

Более точно, f_0 и f_1 2π-периодичны в случае $S^{1|1}_{+}$, а в случае $S^{1|1}_{-}$ — f_0 2π-периодична и f_1 2π-антипериодична: $f_1(t+2\pi) = -f_1(t)$.

Удобно использовать следующие координаты на $S^{1|1}_{+}$: четная координата $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и нечетная координата τ. Первая координата отображает $S^{1|1}_{+}$ на S^1, а вторая — на супермногообразие $\mathcal{R}^{0|1}$. Фактически, $S^{1|1}_{+} \cong S^1 \times \mathbb{R}^{0|1}$ (произведение в категории SMan).

Заметим, что $S^{1|1}_{-}$ вложено в $S^1 \times \mathcal{R}^{0|2}$ с координатами $s \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, θ_1, θ_2 согласно формулам $s = t$, $\theta_1 = \tau \cdot \cos t$, $\theta_2 = \tau \cdot \sin t$.

Упражнение 18. Показать, что многообразие всех $\mathbb{R}\langle\theta\rangle$-точек $S^{1|1}_{+}$ диффеоморфно цилиндру, а в случае $S^{1|1}_{-}$ — листу Мёбиуса.

Указание. Гомоморфизм из $\mathcal{A}(S^{1|1}_{\pm})$ в $\mathbb{R}\langle\theta\rangle$ определяется характером χ алгебры $\mathcal{A}(S^{1|1})_{\bar{0}}$ и линейным функционалом φ на пространстве $\mathcal{A}(S^{1|1}_{\pm})_{\bar{1}}$, связанным с χ формулой $\varphi(fg) = \chi(f)\psi(g)$.

Определим пространство $\mathrm{Vect}\, S^{1|1}_{\pm}$ как множество градуированных дифференцирований $\mathcal{A}(S^{1|1}_{\pm})$.

[16]Напомним, что **супердифференцирование** (также называемое **градуированным дифференцированием**) степени $\delta \in \mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры A — это линейное отображение $D : A \to A$, удовлетворяющее градуированному правилу Лейбница $D(ab) = D(a) \cdot b + (-1)^{\delta\alpha} a \cdot D(b)$, где $\alpha = \deg a$.

В терминах координат (t,τ) общее векторное поле на $S_{\pm}^{1|1}$ может быть записано в виде[17]

$$\xi = \xi_{00}(t)\partial_t + \xi_{01}(t)\partial_\tau + \xi_{10}(t)\tau\partial_t + \xi_{11}(t)\tau\partial_\tau, \tag{23}$$

где гладкие функции ξ_{ij} удовлетворяют условию $\xi_{ij}(t+2\pi) = \xi_{ij}(t)$ в случае $S_{+}^{1|1}$ и $\xi_{ij}(t+2\pi) = (-1)^{i+j}\xi_{ij}(t)$ в случае $S_{-}^{1|1}$.

Скобка Ли двух векторных полей определяется формулой

$$[\xi_1,\xi_2] = \xi_1\xi_2 - (-1)^{\deg\xi_1\deg\xi_2}\xi_2\xi_1.$$

Громоздким, но простым вычислением получаем

$$\begin{aligned}
[\xi,\eta]_{00} &= \xi_{00}\eta'_{00} - \eta_{00}\xi'_{00} + \xi_{01}\eta_{10} + \eta_{01}\xi_{10},\\
[\xi,\eta]_{01} &= \xi_{00}\eta'_{01} - \eta_{00}\xi'_{01} + \xi_{01}\eta_{11} - \eta_{01}\xi_{11},\\
[\xi,\eta]_{10} &= \xi_{00}\eta'_{10} - \eta_{00}\xi'_{10} + \xi_{11}\eta_{10} - \eta_{11}\xi_{10} + \xi_{10}\eta'_{00} - \eta_{10}\xi'_{00},\\
[\xi,\eta]_{11} &= \xi_{00}\eta'_{11} - \eta_{00}\xi'_{11} + \xi_{10}\eta_{01} + \eta_{10}\xi_{01}.
\end{aligned}$$

Замечание 8. Отметим, что $[\xi,\xi] = a^2(t)\partial_t$. В частности, существует квадратный корень векторного поля ∂_t. Это простое наблюдение приводит к важным философским выводам. Дело в том, что все детерминистские процессы обычно описываются эволюционным уравнением, которое содержит производную по времени ∂_t. Если последняя допускает извлечение квадратного корня, то должно существовать более фундаментальное уравнение, использующее этот квадратный корень. И так действительно бывает в некоторых современных физических теориях.

Супермногобразия $S_{\pm}^{1|1}$ обладают замечательной **контактной структурой**, заданной нечетной 1-формой $\theta = d\tau + \tau dt$. Эта форма определяет неинтегрируемое нечетное распределение P, порожденное векторным полем вида

$$\xi = a(t)(\partial_\tau + \tau\partial_t), \tag{24}$$

где $a(t)$ — периодическая или антипериодическая функция.

Упражнение 19. Описать супералгебру векторных полей на $S_{\pm}^{1|1}$, сохраняющих распределение P (или, эквивалентно, сохраняющих θ с точностью до умножения на функцию).

Ответ. Искомая супералгебра состоит из полей вида

$$\xi = a(t)\partial_t - \frac{1}{2}a'(t)\tau\partial_\tau + b(t)(\partial_\tau - \tau\partial_t).$$

В заключение кратко остановимся на интегрировании по супермногообразиям. Эта часть теории чрезвычайно важна в современной теории математической физики, однако до сих пор не имеет окончательного математического обоснования.[18] Здесь мы рассмотрим лишь простейший случай: интегрирование по чисто нечетному плоскому супермногообразию $\mathcal{R}^{0|n}$ с антикоммутирующими координатами $\theta^1,\ldots,\theta^n$ (см. п. 3.1). Напомним,

[17] Мы доверяем читателю определить дифференциальный оператор ∂_τ на $\mathcal{A}(S_{\pm}^{1|1})$.

[18] Относительно современного состояния см. обзор [Le].

что функция на $\mathcal{R}^{0|n}$ является элементом алгебры Грассмана и может быть записана в виде

$$f(\theta) = \sum_{I \subset [1,\dots,n]} a_I \theta^I,$$

где $\theta^I = \theta^{i_1} \dots \theta^{i_k}$, если $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ и a_I — числовые коэффициенты, комплексные или вещественные.

Оказывается, что правильное определение интеграла от f над $\mathcal{R}^{0|n}$ – это старший коэффициент $a_{[1,\dots,n]}$. В первых работах на эту тему (см., например, [Bel]) этот факт формулировался с помощью символических правил

$$\int 1 d\theta = 0, \quad \int \theta d\theta = 1. \tag{25}$$

Позднее оказалось, что объект, который допускает интегрирование по супермногообразию, является не дифференциальной формой, а некоторым новым объектом, получившим название **интегральная форма.** При этом правила (25) остаются верными.

Для иллюстрации чисто математического результата, вытекающего из этих правил интегрирования, мы приведем только один пример. Известно, что для положительно определенной квадратичной формы Q в $\mathbb{R}^n$ справедлива формула

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi Q(x)} d^n x = (\det Q)^{-1/2}. \tag{26}$$

Каков суперaналог этой формулы? Очевидно, что роль квадратичной формы должна играть антисимметрическая матрица A.

Согласно общей идеологии теории супермногообразий ответ должен быть пропорционален $(\det A)^{1/2}$. И это действительно так! Напомним, что для антисимметричной $n \times n$-матрицы A определитель равен 0 в случае нечетного n и равен квадрату некоторого полинома, называемого **пфаффианом** матрицы A, если n четно. Формула

$$\int_{\mathcal{R}^{0|n}} e^{\frac{1}{2} A_{ij} \theta^i \theta^j} d^n \theta = (\det A)^{1/2} = Pf(A) \tag{26'}$$

тогда вытекает из правил (25), так как искомый показатель является, фактически, полиномиальной функцией.

Лекция 2

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

1. Внешнее дифференцирование как пример инвариантной операции 31
2. Геометрические объекты 33
3. Представления $GL_+(n, \mathbb{R})$ 35
4. Геометрические объекты высшего дифференциального порядка 37
5. Общие свойства инвариантных операций 37
   5.1. Операции на тензорных плотностях 37
   5.2. Общие сведения об инвариантных операциях 39
   5.3. Действие симметрической группы 40
6. Линейные (унарные) инвариантные операции 40
7. Билинейные инвариантные операции 42
8. Инвариантные операции на супермногообразиях 47

Эта лекция содержит материал, не связанный непосредственно с методом орбит. Однако собранные здесь факты будут полезны многим читателям. Изложение следует обзорной статье [Ki6]. Более систематическое изложение содержится в недавно опубликованной книге [KMS].

1. Внешнее дифференцирование как пример инвариантной операции

Рассмотрим отображение d, которое преобразует гладкую функцию f на многообразии M в ее дифференциал $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$. Согласно хорошо известному **цепному правилу** имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad \text{(суммирование по } i\text{)}.$$

Сравним это уравнение с правилом преобразования дифференциальных 1-форм (см. лекцию 1, п. 2.1). Мы видим, что отображение d, преобразующее гладкую функцию $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ в ее дифференциал $df \in \Omega^1(M)$, не зависит от выбора локальных координат $\{x^i\}$.

Приведем другие формулировки этого свойства.

1. Дифференциал d **инвариантен** относительно действия группы $\mathrm{Diff}(M)$.

2. Отображение d $\mathrm{Diff}(M)$-**эквивариантно**, что выражается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) \\ {\scriptstyle \varphi^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} \\ \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) \end{array}$$

где φ^* — каноническое действие $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ на $\Omega(M)$.

Замечание 1. Соответствие $\varphi \mapsto \varphi^*$ является **антипредставлением** группы $\mathrm{Diff}(M)$ на пространстве $\Omega(M)$, т. е. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*$. Другими словами, мы определили **правое** действие $\mathrm{Diff}(M)$ на $\Omega(M)$. Конечно, его можно конвертировать в **левое** действие стандартным образом, положив $\varphi_* = (\varphi^{-1})^*$. Но φ_* имеет смысл только для обратимых отображений φ, тогда как φ^* определено для всех гладких отображений.

На языке теории категорий это означает, что соответствие $M \rightsquigarrow \Omega(M)$ продолжается до функтора из Man° в категорию SCAlg суперкоммутативных алгебр (см. лекцию 1, п. 1.3).

Отметим замечательный факт: операция d может быть продолжена на дифференциальные формы любой степени.

Теорема 1. *Существует единственное линейное отображение* $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$, *которое отображает* $\Omega^k(M)$ *в* $\Omega^{k+1}(M)$ *и имеет свойства*

(i) d *эквивариантно относительно группы* $\mathrm{Diff}(M)$,

(ii) d *является антисимметричным дифференцированием относительно* $\wedge$*-произведения*: $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge d\theta$,

(iii) d *совпадает при* $k = 0$ *с обычным дифференциалом функции,*

(iv) $d \circ d = 0$.

Читатель может найти доказательство в любом учебнике по математическому анализу или провести доказательство самостоятельно, используя формулу (1) ниже.

Из свойств (i)–(iii) отображения d вытекает следующая явная формула для d в локальных координатах:

$$d(\omega_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) = d\omega_{i_1,\dots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{1}$$

Еще один замечательный факт — это то, что d является единственной **естественной** (т. е. эквивариантной относительно группы $\mathrm{Diff}(M)$) линейной операцией дифференциального порядка 1 на тензорных полях. Для формулировки точного утверждения нам понадобятся некоторые предварительные сведения.

2. Геометрические объекты

Понятие геометрического объекта естественно возникает в физике: векторы — в механике, тензоры — в теории упругости, 2-формы — в электродинамике, связности — в теории поля и т. п. Это понятие интенсивно используется также в теории представлений групп Ли. Многие важные примеры представлений групп Ли (в частности, большинство неприводимых представлений) могут быть реализованы в пространствах геометрических объектов.

Строгое определение этого понятия стало возможным после Эрлангенской программы Клейна (1872 г.) и работ Софуса Ли (1890 г.) о непрерывных группах преобразований. В первых учебниках по этому предмету, написанных столетие назад, приводилось следующее довольно неуклюжее, но рабочее определение:

Определение 1. Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерная область. Предположим, что для любых $m \in \mathcal{D}$ и локальной системы координат $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ в окрестности m определен элемент $f_{m,X}$ некоторого вспомогательного пространства V. Предположим, что для любой другой системы координат $Y = \{y^1, \dots, y^n\}$ координаты $f_{m,Y}$ можно выразить через координаты $f_{m,X}$ и значения $y^i(m)$, $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}(m)$, $\dfrac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^l}(m), \dots$. Тогда мы говорим, что в точке m задан **геометрический объект с компонентами** $f_{m,X}$ в данной локальной системе координат X. Если объект задан в каждой точке $\mathcal{D}$, мы говорим, что задано **поле** объектов на $\mathcal{D}$.

Теперь переведем это определение на современный математический язык.

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, которое мы предполагаем связным и ориентированным.[1] Пусть E — гладкое расслоение над M с l-мерным слоем V. Обозначим через $\operatorname{Diff} M$ группу всех гладких обратимых отображений (называемых **диффеоморфизмами**) из M в M, и пусть $\operatorname{Diff}_0 M \subset \operatorname{Diff} M$ — связная компонента единицы в $\operatorname{Diff} M$.

Предположим, что действие группы $\operatorname{Diff}_0 M$ на M можно поднять до действия на E, которое коммутирует с проекцией $p: E \to M$. Это предположение эквивалентно требованию, что задано действие алгебры Ли $\operatorname{Vect}(M)$ на E, согласованное с проекцией $p: E \to M$.

Определение 1′. Если выполняется приведенное выше условие, то будем говорить, что E — **естественное расслоение** над M. **Поле геометрического объекта** — это сечение естественного расслоения.

Теперь мы используем теоретико-групповой подход. Для краткости обозначим группу $\operatorname{Diff}_0 M$ через G. Пусть $H \subset G$ — **стационарная подгруппа** (или **стабилизатор**) точки $m \in M$ в G. Известно, что действие G транзитивно на M, поэтому мы можем рассматривать M как фактор-пространство G/H.

[1] Эти условия упрощают большинство теорем. Оставляем читателю обобщить приводимые ниже результаты на общий случай.

Для определения G-расслоения E над однородным пространством G/H со слоем V достаточно определить действие подгруппы H на V. Именно, E является **расслоенным произведением**

$$G \times_H V := \{\text{множество } H\text{-орбит в } G \times V\},$$

где H действует на G правыми сдвигами. Таким образом, точка E есть класс эквивалентности $[g, v]$ пар $(g, v) \in G \times V$ относительно отношения эквивалентности

$$(g_1, v_1) \sim (g_2, v_2) \Leftrightarrow \exists h \in H : g_1 = g_2 h^{-1}, v_1 = h v_2, \tag{2}$$

G-действие на E дается формулой $g_1 \cdot [g, v] = [g_1 g, v]$ и проекция $p : E \to G/H$ имеет вид $p([g, v]) = gH$.

В приложениях часто встречаются так называемые **линейные геометрические объекты.** В этом случае V — векторное пространство, E — векторное расслоенное пространство и действие G линейно на слоях. Для определения таких объектов требуется задать линейное представление ρ группы H в пространстве V.

Замечание 2. Представление G в пространстве $\Gamma(M, E)$ сечений E есть не что иное, как **индуцированное представление**, обычно обозначаемое $\mathrm{Ind}_H^G \rho$.

Известно (см., например, [PT]), что каждое естественное расслоенное пространство имеет конечный **дифференциальный порядок** k. Это означает, что действие диффеоморфизма φ на объекте в точке m зависит только от k-струи φ в m (или, проще говоря, только от значений φ и ее частных производных порядка $\leqslant k$ в точке $m \in M$). Минимальное число k, для которого это верно, называется **дифференциальным порядком** данного геометрического объекта.

Пусть $J_k(H)$ — группа k-струй в точке m диффеоморфизмов $\varphi \in H$. В частности, для малых значений k имеем

$$J_0(H) = \{e\}, \quad J_1(H) \cong GL_+(n, \mathbb{R}), \quad J_2(H) \cong GL_+(n, \mathbb{R}) \ltimes S^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n.$$

Линейные естественные геометрические объекты дифференциального порядка k соответствуют линейным представлениям H, которые факторизуются через группу $J_k(H)$. Эти представления, вообще говоря, приводимы, но не вполне приводимы (не полупросты в другой терминологии). Тем не менее, естественно начать изучение с неприводимых представлений. Соответствующие геометрические объекты называются также **неприводимыми**.

Пример 1. Естественные линейные геометрические объекты порядка 0 соответствуют тривиальным представлениям H. Таким образом, неприводимые объекты порядка 0 суть скалярные функции на M.

В лекции 1 мы ввели тензорные плотности как наиболее общие линейные геометрические объекты первого порядка. Теперь мы можем уточнить (и несколько скорректировать) это утверждение. Естественные геометрические объекты порядка 1 находятся во взаимно однозначном соответствии с теми линейными представлениями H, которые факторизуются через $J_1(H) \cong GL_+(n, \mathbb{R})$ посредством отображения

$$H \to GL_+(n, \mathbb{R}) : \varphi \mapsto \varphi_*(m) = \left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(m) \right\|. \tag{3}$$

Таким образом, неприводимые объекты соответствуют неприводимым представлениям $GL_+(n, \mathbb{R})$.

Замечание 3. В п. 1 мы использовали обозначение φ для отображения, которое выражает старые координаты в терминах новых: $x^i = \varphi^i(y^1, \ldots, y^n)$. Теперь мы используем это отображение в противоположном направлении: $y = \varphi(x)$. Таким образом, φ в (3) соответствует φ^{-1} в п. 1.

3. Представления $GL_+(n, R)$

Хорошо известно, что конечномерное представление $SL(n, \mathbb{R})$ есть сумма неприводимых подпредставлений. Для $GL_+(n, \mathbb{R})$ это уже не так. Однако и в этом случае неприводимые представления $GL_+(n, \mathbb{R})$ играют важную роль. Напомним, что каждое такое представление эквивалентно $\pi_\rho \otimes \det^\lambda$, где π_ρ — неприводимое представление, действующее на пространстве контравариантных тензоров[2] данного типа симметрии $\rho \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольный параметр.

Удобно объединить обозначения ρ и λ и использовать один символ $\mu = (m_1, \ldots, m_n)$, где m_i — комплексные числа такие, что $m_i - m_{i-1} = \rho_i \in \mathbb{Z}_+$ при $1 < i \leqslant n$ и $m_n = \lambda$.

Ниже π_μ обозначает $\pi_\rho \otimes \det^\lambda$ и V_μ — соответствующее пространство представления.

С точки зрения теории представлений смысл параметра μ можно пояснить следующим образом. Рассмотрим подгруппу $D \in GL_+(n, \mathbb{R})$, которая состоит из диагональных матриц d с положительными элементами $\delta_1, \ldots, \delta_n$ на главной диагонали. Известно, что существует базис в V_μ, состоящий из общих собственных векторов всех операторов $\pi_\mu(d), d \in D$. Для такого собственного вектора v имеем $\pi_\mu(d)v = \delta_1^{\lambda_1} \ldots \delta_n^{\lambda_n} \cdot v$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ называется **весом** собственного вектора v.

Определение 2. **Частичный порядок** на $\mathbb{C}^n$ определяется следующим образом: будем говорить, что λ **старше** ν, если

(i) $\lambda_i - \nu_i \in \mathbb{Z}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$,

(ii) первая ненулевая разность $\lambda_i - \nu_i$ положительна.

Оказывается, что все веса базисных векторов в V_μ сравнимы (т. е. удовлетворяют условию (i)) и имеется единственный старший вес, который равен в точности μ.

Замечание 4. Скалярная матрица $c \cdot 1 \in GL_+(n, \mathbb{R})$ принадлежит центру группы. Таким образом, ее образ при неприводимом представлении π_μ является скалярным оператором (поскольку он коммутирует со всеми операторами представления). Точное значение этого скаляра равно $c^{|\mu|}$, где

[2] т. е. тензоров только с верхними индексами.

$|\mu| := m_1+\cdots+m_n$, в чем нетрудно убедиться, применив $\pi_\mu(c\cdot 1)$ к старшему весовому вектору.[3]

Мы не будем вдаваться в детали явного построения π_μ, а рассмотрим несколько примеров.

• **Тавтологическое представление** $GL_+(n,\mathbb{R})$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ вектор-столбцов соответствует действию H в касательном пространстве $T_m(M)$ (поскольку элементы вектор-столбцов соответствуют координатам в $T_m(M)$, которые традиционно имеют верхние индексы). Веса этого представления суть стандартные образующие $e_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0)$ для $\mathbb{Z}_+^n$ и старший вес равен $e_1 = (1,0,\dots,0)$. Соответствующие геометрические объекты — это векторные поля на M.

• **Фундаментальные представления** $GL_+(n,\mathbb{R})$ в $\Lambda^k(\mathbb{R}^n), k = 1,2,\dots,n$, имеют старшие веса

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{k} e_i = (\underbrace{1,\dots,1}_{k},0,\dots,0). \tag{4}$$

Соответствующие геометрические объекты — это k-векторные поля на M. В частности, когда $k = n$, мы получаем одномерное представление $g \mapsto \det g$, которое соответствует n-векторным полям на n-мерном многообразии.

Ковекторные поля или 1-формы на M соответствуют представлению $GL_+(n,\mathbb{R})$ в пространстве вектор-строк: матрица g преобразует вектор-строку ξ в ξg^{-1}. Другими словами, это представление преобразует g в $(g^{-1})^t$, где верхний индекс ^{t} означает транспонирование. Веса этого представления получаются умножением на -1 весов тавтологического представления. Итак, старший вес равен $-e_n = (0,0,\dots,0,-1)$.

В общем случае дифференциальные k-формы на M соответствуют старшим весам

$$\mu_k^* = -\sum_{i=n-k+1}^{n} e_i = (0,\dots,0,\underbrace{-1,\dots,-1}_{k}). \tag{5}$$

В частности, при $k = n$ получаем одномерное представление $g \mapsto \det g^{-1}$, которое соответствует формам объема на M.

Наконец, плотности степени λ имеют тип $(-\lambda,\dots,-\lambda)$.

В заключение заметим, что данное неприводимое представление π_μ неоднократно встречается в тензорной алгебре. Поэтому оно может соответствовать многим различным типам тензорных полей. Например, тривиальное представление соответствует скалярным функциям (тензорные поля ранга 0) и также тензорам типа (1, 1) вида $f(x)\cdot\delta_i^j$. Полное описание всех возможных реализаций данного представления можно получить из теоремы Вейля (см. п. 6 ниже).

[3] Из этого также следует, что $|\lambda|$ одно и то же для всех весов λ данного неприводимого представления.

4. Геометрические объекты высшего дифференциального порядка

Здесь мы ограничимся примерами объектов порядка больше 1.

Первый пример — **связность в касательном расслоении**, заданная символом Кристоффеля Γ^k_{ij}. Этот объект имеет порядок 2. Закон преобразования имеет вид

$$\Gamma^k_{ij}(y) = \Gamma^{k'}_{i'j'}(y(x))\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial y^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^{k'}} + \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j},$$

где участвуют производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j}$. Более того, объект не линейный: он подвергается аффинному преобразованию при замене координат.

Другой пример — **дифференциальный оператор D порядка k** в пространстве гладких функций на многообразии M. Он имеет дифференциальный порядок k и принадлежит тензорному типу только при $k \leqslant 1$. (Хорошо известно, что дифференциальный оператор порядка 1 есть сумма функции и векторного поля.)

Более общо, дифференциальный оператор порядка k в пространстве гладких сечений естественного векторного расслоения порядка l над M является геометрическим объектом дифференциального порядка $k + l$.

Наконец, для любого геометрического объекта порядка k мы можем рассмотреть его l-струю, которая сама является геометрическим объектом порядка $k + l$.

5. Общие свойства инвариантных операций

Главный предмет этой лекции — понятие **инвариантной операции** на геометрических объектах. Грубо говоря, это правило построения нового геометрического объекта из одного или нескольких заданных объектов. Это правило обычно формулируется в терминах локальных координат, но результат не зависит от выбора системы координат. Многие физические законы и математические теоремы формулируются в терминах инвариантных операций.

5.1. Операции на тензорных плотностях. В этой лекции мы рассмотрим только **полилинейные операции на тензорных плотностях**. Их можно классифицировать по числу аргументов и типу симметрии. Пусть $\Gamma^\mu(M)$ обозначает пространство всех гладких тензорных плоскостей типа μ на многообразии M.

Определение 3. **Дифференциальным оператором типа** $(\mu_1, \ldots, \mu_m; \mu)$ на M называется полилинейное отображение

$$L : \Gamma^{\mu_1}(M) \times \cdots \times \Gamma^{\mu_m}(M) \to \Gamma^\mu(M), \tag{6}$$

которое в локальной системе координат имеет вид

$$L(f_1, \ldots, f_m)^p(x) = \sum c^p_{p_1,\ldots,p_m;K_1,\ldots,K_m}(x)\partial^{K_1} f_1^{p_1} \ldots \partial^{K_m} f_m^{p_m}(x), \qquad (7)$$

где $f_i \in \Gamma^{\mu_i}(M), L(f_1, \ldots, f_m) \in \Gamma^{\mu}(M), f_i^{p_i}(x)$ обозначает p_i-ю координату $f_i(x) \in V_{\mu_i}$, $K_i = (k_{i_1}, \ldots, k_{i_m})$, $\partial^{K_i} = \partial_1^{k_{i_1}} \ldots \partial_m^{k_{i_m}}$ и суммирование проводится по всем повторяющимся индексам.

Можно показать, что дифференциальные операторы L типа $(\mu_1, \ldots, \mu_m; \mu)$ характеризуются следующим образом (в бескоординатной форме): — это полилинейные отображения вида (6), непрерывные в C^∞-топологии[4] и **локальные** в следующем смысле:

$$\operatorname{supp} L(f_1, \ldots, f_m) \subset \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{supp} f_i. \qquad (8)$$

Множество всех таких операторов обозначим $\mathcal{L}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m; \mu)$.

Оператор L называется **естественным** или **инвариантным**, если он коммутирует со всеми диффеоморфизмами M (т. е. не зависит от выбора локальных координат).

Свойство инвариантности можно сформулировать в инфинитезимальной форме. Пусть $v = v^i\partial_i$ — гладкое векторное поле на M. Тогда v действует на тензорную плотность f типа μ по формуле

$$(v \cdot f)(x) = v^i(x)\partial_i f(x) + \partial_j v^i(x) \cdot (\pi_\mu)_*(e_i^j) f(x). \qquad (9)$$

Здесь представление $(\pi_\mu)_*$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ в пространстве V_μ является производной представления π_μ группы $GL(n, \mathbb{R})$ в единичном элементе и e_i^j — стандартный базис в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Пример 2. Рассмотрим 1-форму $\omega = \omega_i dx^i$ на M. В этом случае $(\pi_\mu)_*(e_i^j) = e_i^j$ и формула (9) принимает вид

$$(v \cdot \omega)_k = v^i \frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\omega_i.$$

Условие инвариантности можно выразить равенством

$$v \cdot L(f_1, \ldots, f_m) = \sum_{s=1}^{m} L(f_1, \ldots; v \cdot f_s, \ldots, f_m). \qquad (10)$$

Таким образом, описание всех инвариантных полилинейных операций L данного типа $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m; \mu)$ сводится к решению системы линейных уравнений (10) для всех $v \in \mathrm{Vect}\, M$, где неизвестными функциями являются коэффициенты $c^p_{p_1,\ldots,p_m;K_1,\ldots,K_m}(x)$ оператора L в выражении (7). Эти уравнения довольно громоздки и вряд ли разрешимы в явном виде. Соответственно и проблема классификации естественных операций решена только в частных случаях.

[4] т. е. топологии равномерной сходимости на любом компактном множестве $C \subset M$ функций (или полей) и всех их производных.

5.2. Общие сведения об инвариантных операциях. Мы приведем несколько простых результатов об естественных операциях. Сначала покажем, что в любой локальной системе координат любая естественная операция задается полидифференциальным оператором с постоянными коэффициентами.

Лемма 1. *Все коэффициенты* $c^{p}_{p_1,\ldots,p_m;K_1,\ldots,K_m}(x)$ *инвариантного оператора* L *в выражении* (7) *суть константы.*

Доказательство. Уравнение (10) для общего векторного поля v содержит коэффициенты v^i от v и частных производных $\partial^K v^i$. Согласно теореме Бореля все эти величины могут принимать произвольные значения в данной точке x. Таким образом, можно приравнять коэффициенты при этих величинах. В частности, приравнивая коэффициенты при v^i, получим $\partial_i c^{p}_{p_1,\ldots,p_m;K_1,\ldots,K_m}(x) = 0$. □

Следующее наблюдение состоит в том, что тип инвариантного оператора определяет его дифференциальный порядок.

Лемма 2. *Для любого инвариантного оператора* L *типа* $(\mu_1,\ldots,\mu_m;\mu)$ *все ненулевые члены в* (7) *обладают свойством*

$$\sum_{i=0}^{m} |K_i| = |\mu| - \sum_{i=o}^{m} |\mu_i|,$$

где $|K_i| := k_{i_1} + \cdots + k_{i_m}$ *и* $|\mu| := m_1 + \ldots + m_n$.

Доказательство. Пусть $(x^1,\ldots,x^n)$ — локальная система координат с центром в x_0 и $e = x^s\partial_s$ — эйлерово поле (генератор полугруппы расширений). Согласно (9) и замечанию 2 e действует на объект f типа $\mu = (m_1,\ldots,m_n)$ следующим образом: $(e\cdot f)^p(x) = x^s\partial_s f^p_i(x) + |\mu| f^p(x)$. Поэтому $\partial^{K_i}(x^s\partial_s f^{p_i}_i + |\mu_i| f^{p_i}_i)(x_0) = (|K_i| + |\mu_i|) f^{p_i}_i(x_0)$ в точке x_0. Подставляя это выражение в (10), приходим к равенству

$$|\mu| \cdot c^{p}_{p_1,\ldots,p_m;K_1,\ldots,K_m} = c^{p}_{p_1,\ldots,p_m;K_1,\ldots,K_m} \sum_{i=1}^{m} (|K_i| + |\mu_i|). \qquad \square$$

Теперь сформулируем главный результат этого раздела.

Теорема 2 (конечность). *Пространство* $\mathcal{L}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m;\mu)^{\mathrm{Diff}(M)}$ *всех инвариантных полидифференциальных операторов типа* $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m;\mu)$ *конечномерно. Более того, при заданных* $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$ *имеется лишь конечное число весов* μ, *для которых* $\mathcal{L}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m;\mu)^{\mathrm{Diff}(M)}$ *отлично от нуля.*

Схема доказательства. Первое утверждение следует из леммы 2, так как порядок оператора $L \in \mathcal{L}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m;\mu)^{\mathrm{Diff}(M)}$ равен $|\mu| - \sum_{i=o}^{m} |\mu_i|$ и пространство всех операторов (не обязательно инвариантных) данного типа и порядка конечномерно.

Второе утверждение более сложное. Мы поясним идею для некоторых частных случаев ниже.

5.3. Действие симметрической группы. Отметим одно полезное обстоятельство. Пусть Γ_0^μ — подпространство элементов Γ^μ с компактным носителем. Тогда любой инвариантной полилинейной операции типа $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m; \mu)$ можно сопоставить G-инвариантный полилинейный функционал

$$\Gamma_0^{\mu_1} \times \dots \times \Gamma_0^{\mu_m} \times \Gamma_0^{\tilde{\mu}} \to \mathbb{R}, \tag{11}$$

где $\tilde{\mu} = (1 - m_n, \dots, 1 - m_1)$ для $\mu = (m_1, \dots, m_n)$.

Именно, имеется каноническое G-ковариантное билинейное отображение $V_\mu \times V_{\tilde{\mu}} \to \mathbb{R}_{\det}$: $(v, \widetilde{v}) \mapsto \langle v, \widetilde{v} \rangle$, где $\mathbb{R}_{\det}$ — стандартное одномерное пространство $\mathbb{R}$, на котором группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует умножением на $\det g$. Поэтому отображение

$$(v_1, \dots, v_m; v) \mapsto \langle L(v_1, \dots, v_m)(x), v(x) \rangle dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

преобразует $\Gamma_0^{\mu_1} \times \dots \times \Gamma_0^{\mu_m} \times \Gamma_0^{\tilde{\mu}}$ в пространство форм объема с компактным носителем в M. Интеграл от этой формы по M и есть искомый функционал.

Легко показать, что справедливо также обратное утверждение.

Лемма 3. *Любой G-инвариантный $(m+1)$-линейный функционал (11) получается из инвариантной полилинейной операции типа $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m; \mu)$ описанной выше процедурой.*

Следствие 1. *Существует каноническое действие симметричной группы S_{m+1} на пространстве m-линейных естественных операций.*

Действительно, такое действие существует на пространстве $(m+1)$-линейных G-инвариантных функционалов: оно определяется перестановкой аргументов. Действие подгруппы $S_m \subset S_{m+1}$ очевидно и сводится к перестановке аргументов, тогда как действие других элементов менее очевидно. В частности, транспозиция $(1, m+1)$ превращает операцию типа $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m; \mu)$ в операцию типа $(\tilde{\mu}, \mu_2, \dots, \mu_m; \widetilde{\mu_1})$, которая может иметь совсем иной вид (см. пример 3 в п. 7).

6. Линейные (унарные) инвариантные операции

Сначала рассмотрим линейные операции дифференциального порядка 0 на тензорных полях, которые суть в точности морфизмы $C^\infty(M)$-модулей $T^{k,l}(M)$. Такой морфизм естественный тогда и только тогда, когда он коммутирует с действием G. Ввиду общего результата об индуцированных представлениях существует биекция

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G \pi_1, \mathrm{Ind}_H^G \pi_2) \cong \mathrm{Hom}_H(\pi_1, \pi_2). \tag{12}$$

В частности, морфизмы между неприводимыми объектами могут быть только лишь нулевыми (для объектов, которые соответствуют неэквивалентным представлениям) или кратными изоморфизму (для таких, которые соответствуют эквивалентным).

Теперь рассмотрим общие тензорные поля на n-мерном многообразии M. В силу (12) имеет место взаимно однозначное соответствие между инвариантными линейными операторами $L : T^{k,l}(M) \to T^{k',l'}(M)$ дифференциального порядка 0 и линейными операторами из $(\mathbb{R}^n)^{\otimes l} \otimes (\mathbb{R}^n)^{*\otimes k}$ в $(\mathbb{R}^n)^{\otimes l'} \otimes (\mathbb{R}^n)^{*\otimes k'}$, которые коммутируют с действием $GL(n, \mathbb{R})$.

В силу известного результата Вейля множество всех таких операций порождается

- перестановками индексов (по отдельности — верхними и нижними, так что они не смешиваются),
- свертками (т. е. суммированием по одному верхнему и одному нижнему индексу, как в правиле Эйнштейна),
- умножением на тензор Кронекера δ_i^j.

Замечание 5. Используя эти естественные операции, можно представить любую тензорную плотность как сумму неприводимых геометрических объектов, которые соответствуют неприводимым представлениям $GL_+(n, \mathbb{R})$. Например, пространство $T^{1,1}(M)$ распадается на две компоненты, соответствующие неприводимым объектам: одна состоит из так называемых **тензоров с нулевым следом** таких, что $T_i^i(x) \equiv 0$, а другая — из **скалярных** тензоров $T_i^j(x) = f(x) \cdot \delta_j^i$. Укажем явный вид разложения:

$$T_i^j(x) = \left(T_i^j(x) - \frac{1}{n} T_k^k(x) \cdot \delta_j^i\right) + \frac{1}{n} T_k^k(x) \cdot \delta_j^i.$$

Теперь перейдем к естественным линейным операциям высшего порядка и сформулируем результат, упомянутый в конце п. 1.

Теорема 3. (i) *Ненулевой оператор дифференциального порядка* 1 *между неприводимыми геометрическими объектами типа* μ_1 *и* μ_2 *существует только тогда, когда* $\mu_1 = (0, \ldots, 0, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{k})$, $\mu_2 = (0, \ldots, 0, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{k+1})$, *и в этом случае является скалярным кратным внешнего дифференциала* d.

(ii) *Не существует инвариантных линейных операций дифференциального порядка* $\geqslant 2$.

Эта теорема, по-видимому, была впервые сформулирована в книге [Sch] и доказана различными авторами в нескольких различных вариантах. Наиболее общие результаты получены в [R] для многообразий с дополнительной структурой (заданной симплектической контактной формой или формой объема) и в [BL] для супермногообразий.

Замечание 6. Свойство $d^2 = 0$ следует из утверждения (i) (в противном случае мы имели бы ненулевую инвариантную операцию порядка 2).

Имеется несколько вычислительных доказательств утверждения (ii) теоремы 3 (см., например, [Ki3] или [R]). В [T] дано более элегантное доказательство, которое мы здесь приведем. Будем называть тензорное поле T **аффинным**, если в некоторой локальной системе координат $T_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}(x)$ являются аффинными функциями (т. е. полиномами степени $\leqslant 1$).

Лемма 4. *Любое тензорное поле является конечной линейной комбинацией аффинных полей.*

Мы не приводим доказательство полностью, а проиллюстрируем его некоторыми примерами. Например, любое векторное поле, которое не обращается в нуль в точке $m \in M$, в подходящей системе координат имеет вид ∂_1 и, следовательно, является аффинным полем. Так как любое векторное поле есть сумма двух ненулевых полей, все векторные поля аффинные.

Теперь вернемся к утверждению (ii) теоремы 3. Пусть L — инвариантный дифференциальный оператор порядка $\geqslant 2$. Тогда $Lf = 0$ для любого аффинного поля (поскольку это верно в подходящей системе координат) и, следовательно, для любого поля.

Замечание 7. Мы уже видели, что любое векторное поле является суммой двух полей, которые не только аффинны, но и постоянны в соответствующей системе координат. Поэтому в этом случае можно сказать больше: любой инвариантный дифференциальный оператор L порядка $\geqslant 1$ на векторных полях равен нулю.

С другой стороны, существование нетривиальной инвариантной операции d на дифференциальных формах препятствует представлению общей дифференциальной формы в виде суммы постоянных форм. Как хорошо известно, общая дифференциальная 1-форма может быть сведена к каноническому виду $x^1dx^2 + x^3dx^4 + \ldots$ и, следовательно, она аффинна, но не постоянна.

Для завершения доказательства теоремы 2 нам надо классифицировать инвариантные операторы порядка 1 и типа $(\mu;\nu)$. Как показано в [Ki6], приравняв коэффициенты при $v^i, \partial_i v^k$ и $\partial_i\partial_j v^k$ в (10), можно вычислить инфинитезимальные характеры представлений π_μ и π_ν. Соответственно находим $\mu = \mu_k$ и $\nu = \mu_{k+1}$ для некоторого k. Искомый оператор имеет постоянные коэффициенты и потому является скалярным кратным внешней производной d.

Упражнение 1. Проверить, что действие нетривиального элемента группы S_2 (см. п. 5.3) на множестве линейных инвариантных операций преобразует операцию $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ в операцию $d : \Omega^{n-k-1}(M) \to \Omega^{n-k}(M)$.

7. Билинейные инвариантные операции

В отличие от линейных операций классификация **естественных билинейных** операций намного богаче. Для описания этого случая, как и раньше, обозначим через $\mathcal{L}(\mu_1,\mu_2;\mu)^{\mathrm{Diff}(M)}$ множество всех билинейных инвариантных операций, которые каждой паре неприводимых геометрических объектов типа μ_1, μ_2 сопоставляют объект типа μ. Относительно действия группы S_3 это множество распадается на 5 частично перекрывающихся классов.

Класс I содержит так называемую **производную Ли** вдоль векторного поля. Это операция типа $(\tau,\mu;\mu)$, определенная следующим образом.[5] Пусть $\xi \in \mathrm{Vect}(M)$ — векторное поле, касательное к однопараметрическо-

[5]Мы обозначаем через τ тавтологическое представление $GL(n,\mathbb{R})$, соответствующее векторным полям на M.

му семейству преобразований $\Phi_t \in \mathrm{Diff}(M)$. (Это означает, что $\xi(m)$ — скорость точки $m(t) = \Phi_t(m)$ в момент $t = 0$.) Если A — произвольный геометрический объект, то действие $\Phi_t(m)$ на A определено и, если объект A линейный, мы полагаем

$$L_\xi A = \frac{d}{dt}\Phi_t(A)\Big|_{t=0}. \tag{13}$$

Например, когда $A = f$ — функция на M, действие Φ_t — это композиция $f \mapsto f\circ\Phi_t$ и производная Ли $L_\xi f$ совпадает с обычной производной f вдоль ξ. Если $A = \eta \in \mathrm{Vect}(M)$, то производная Ли $L_\xi\eta$ совпадает со **скобкой Ли**. Если мы интерпретируем векторные поля как операторы на $C^\infty(M)$, то скобка Ли приобретает простой вид

$$[\xi,\eta] = \xi\eta - \eta\xi. \tag{14}$$

Для любого тензорного объекта T типа μ объект $L_\xi T$ принадлежит тому же типу. Таким образом, определена инвариантная билинейная операция типа $(\tau,\mu;\mu)$.

Из шести операций, возникающих из одной под действием S_3, четыре операции имеют ту же природу, что и исходная, а две остальных — имеют тип $(\mu,\widetilde{\mu};\widetilde{\tau})$. Последняя операция была названа в в [N] **конкомитантом Схоутена — Лагранжа**.

Класс II — это наиболее обширный класс, содержащий естественные билинейные операции типа $(\Lambda^k\tau\otimes\Delta^\varkappa, \Lambda^l\tau\otimes\Delta^\lambda; \Lambda^m\tau\otimes\Delta^\mu)$, где Δ — одномерное представление, соответствующее формам объема на M, k, l, m — неотрицательные целые числа $\leqslant n$ и $\varkappa$, λ, μ — комплексные числа. Частный случай этой операции — **скобка Схоутена**, которая является отображением из $\mathrm{Vect}^k(M)\times\mathrm{Vect}^l(M)$ в $\mathrm{Vect}^{k+l-1}(M)$. Для разложимых поливекторных полей скобка Схоутена определяется формулой

$$\begin{aligned}&[v_1\wedge\ldots\wedge v_k, w_1\wedge\ldots\wedge w_l]\\ &= \sum_{i,j}(-1)^{i+j+k-1}[v_i,w_j]\wedge v_1\ldots\wedge\widehat{v_i}\wedge\ldots\wedge v_k\wedge w_1\ldots\wedge\widehat{w_j}\wedge\ldots\wedge w_l.\end{aligned} \tag{15}$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. не зависит от способа разложения поливекторного поля в $\wedge$-произведение векторных полей. Для этого можно использовать альтернативное определение скобки Схоутена:

$$[v,w] = \delta(v\wedge w) - \delta(v)\wedge w - (-1)^k v\wedge\delta(w), \quad v\in\mathrm{Vect}^k(M). \tag{16}$$

Здесь отображение $\delta : \mathrm{Vect}^k(M)\to\mathrm{Vect}^{k-1}(M)$ зависит от выбора формы объема vol и в специальной локальной системе координат, в которой $\mathrm{vol} = dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, задается в виде

$$\delta(v^{i_1\ldots i_k}\partial_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_k}) = \partial_{i_1}v^{i_1\ldots i_k}\partial_{i_2}\wedge\ldots\wedge\partial_{i_k}.$$

Упражнение 2. Показать, что определения (15) и (16) совпадают.

Так как первое определение эквивариантно относительно $\mathrm{Diff}(M)$, а второе не зависит от представления поливектора в виде $\wedge$-произведения, наша скобка имеет оба свойства.

В общем случае построение операции распадается на два случая.

Случай 1: $k+l>n+1$. Операция существует, если $m=k+l-n-1$, $\mu=\varkappa+\lambda-1$. Запишем первый аргумент в виде $\omega_1\cdot v^{\varkappa-1}$, а второй — в виде $\omega_2\cdot v^{\lambda-1}$, где ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы степеней $n-k$ и $n-l$ соответственно, а v — фиксированная форма объема (здесь используются изоморфизмы $\Lambda^k\tau\otimes\Delta^\varkappa\cong\Lambda^{n-k}\tau^*\otimes\Delta^{\varkappa-1}$ и $\Lambda^l\tau\otimes\Delta^\lambda\cong\Lambda^{n-l}\tau^*\otimes\Delta^{\lambda-1}$). Положим

$$L(\omega_1\cdot v^{\varkappa-1},\omega_2\cdot v^{\lambda-1})=(c_1d\omega_1\wedge\omega_2+c_2\omega_1\wedge d\omega_2)\cdot v^{\mu-1},\tag{17}$$

где c_1,c_2 — произвольные константы.

Упражнение 3. Показать, что операция (17) определена корректно (т. е. не зависит от формы объема v) тогда и только тогда, когда

$$(\varkappa-1)c_1+(-1)^k(\lambda-1)c_2=0.\tag{18}$$

Инвариантность L следует из инвариантности операций d и $\wedge$.

Случай 2: $k+l\leqslant n+1$. Операция существует, если $m=k+l-1$ и $\mu=\varkappa+\lambda$. Запишем первый аргумент в виде $a\cdot v^\varkappa$, $a\in\mathrm{Vect}^k(M)$, а второй — в виде $b\cdot v^\lambda$, $b\in\mathrm{Vect}^l(M)$. Положим

$$L(a\cdot v^\varkappa,b\cdot v^\lambda)=(c_1\delta a\wedge b+c_2a\wedge\delta b+c_3\delta(a\wedge b))\cdot v^\mu.\tag{19}$$

Упражнение 4. Показать, что операция (19) корректно определена и инвариантна тогда и только тогда, когда

$$(\varkappa-1)c_1=(\lambda-1)c_2=(1-\mu)c_3.\tag{20}$$

Для $\varkappa$, λ, μ условия (18) и (20) обычно определяют константы c_1, c_2, c_3 с точностью до постоянного множителя. Следовательно существует единственная (с точностью до константы) операция требуемого типа. Единственным исключением является случай $\varkappa=\lambda=1$, когда мы получаем две независимые операции (см. тип V ниже).

Действие группы S_3 на операции класса II приводит к другой операции того же класса (но другого типа).

Класс III содержит так называемые **симметрические конкомитанты Схоутена** типа $(S^k\tau,S^l\tau;S^{k+l-1}\tau)$. Для определения этой операции заметим, что эти объекты типа $S^k\tau$ могут рассматриваться как гладкие функции на кокасательном расслоенном пространстве $T^*(M)$, которые являются однородными полиномами степени k на каждом слое. Так как $T^*(M)$ имеет каноническую симплектическую структуру, получаем естественную операцию (**скобки Пуассона**) в $C^\infty(T^*(M))$. Это и есть наша операция.

Действие S_3 на симплектический конкомитант Схоутена приводит к операции типа $(S^k\tau,S^l\tau^*\otimes\Delta;S^{l-k+1}\tau^*\otimes\Delta)$. По-видимому, она ранее не рассматривалась (за исключением случаев $k=1$, когда она является производной Ли, и $k=l$, когда возникает конкомитант Схоутена — Лагранжа).

Класс IV ввел Нейенхейс [N]. **Скобка Нейенхейса** определяется для так называемых **векторных дифференциальных форм** и имеет тип $(\tau\otimes\Lambda^k\tau^*,\tau\otimes\Lambda^l\tau^*;\tau\otimes\Lambda^{k+l}\tau^*)$, где $k+l\leqslant n$ и τ^* — представление, двойственное τ.

Объяснение существования этой операции заложено в алгебраической структуре $\Omega(M)$, рассматриваемой как ассоциативная суперкоммутативная дифференциальная алгебра.

Напомним (см. лекцию 1, п. 3.1), что $\mathbb{Z}$-градуированная ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ называется **суперкоммутативной**, если для однородных элементов $a, b \in \mathcal{A}$ имеем $ab = (-1)^{\alpha\beta} ba$, где $\alpha = \deg a$ и $\beta = \deg b$.

Дифференцированием порядка k коммутативной супералгебры $\mathcal{A}$ называется линейное отображение $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ которое отображает $\mathcal{A}^m$ в $\mathcal{A}^{k+m}$ и удовлетворяет **суперправилу Лейбница**

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{k\alpha} aD(b), \qquad \alpha = \deg a.$$

Вернемся к дифференциальным формам. Положим $\mathcal{A} = \Omega(M)$ и заметим, что это дифференцируемая супералгебра с дифференциалом d порядка 1. Рассмотрим те дифференцирования D алгебры $\Omega(M)$, которые суперкоммутируют с d, т. е. $D(d\omega) = (-1)^{\deg D} d(D\omega)$. Из этого свойства и правила Лейбница вытекает, что D полностью определяется своим сужением на $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Образ этого сужения лежит в $\Omega^{\deg D}(M)$. Более того, из правила Лейбница для произведения двух функций получаем

$$Df = \omega^i \partial_i f, \qquad \omega^i \in \Omega^{\deg D}(M), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{21}$$

Можно проверить, что любое семейство k-форм $\{\omega^i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ дает производную порядка k, сужение которой на $\Omega^0(M)$ определено в (21). Таким образом, эти производные можно отождествить с геометрическим объектами типа $\tau \otimes \Lambda^k \tau^* : D \longleftrightarrow \partial_i \otimes \omega^i$.

Далее, дифференцирования градуированной супералгебры сами образуют алгебру относительно **суперкоммутатора**

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{\deg D_1 \cdot \deg D_2} D_2 \circ D_1. \tag{22}$$

Упражнение 5. Проверить, что суперкоммутатор (22) является дифференциалом порядка $\deg D_1 + \deg D_2$ и удовлетворяет **супертождеству Якоби**

$$[D_1, [D_2, D_3]] = [[D_1, D_2], D_3] + (-1)^{\deg D_1 \deg D_2} [D_2, [D_1, D_3]]. \tag{23}$$

В рассматриваемом случае суперкоммутатор — это в точности скобка Нейенхейса. При $k = 0$ или $l = 0$ он сводится к производной Ли. Простейшая новая операция возникает при $k = l = 1$. Соответствующие геометрические объекты типа $\tau \otimes \tau^*$ — это поля операторов в касательных (или кокасательных) пространствах. Операция симметрична, и ее значениями будут векторные 2-формы. Она определяется соответствующими унарными квадратичными операторами $A \mapsto [A, A]$, допускающими простую запись в виде

$$[A, A](\xi, \eta) = [A\xi, A\eta] - A[\xi, A\eta] - A[A\xi, \eta] + A^2[\xi, \eta], \tag{24}$$

где A рассматривается как линейный оператор на $\mathrm{Vect}(M)$ и $[A, A]$ — как антисимметричный билинейный оператор из $\mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M)$ в $\mathrm{Vect}(M)$.

Упражнение 6. Проверить, что правая часть (24) билинейна по ξ и η не только над $\mathbb{R}$, но также и над $C^\infty(M)$.

Замечание 8. Во многих важных геометрических теоремах используется скобка Нейенхейса. Например, так называемое **условие интегрируемости** для почти комплексных структур и структур почти произведения можно сформулировать как обращение в нуль квадрата Нейенхейса соответствующего тензорного поля. Напомним, что почти комплексная структура на M определяется тензорным полем $J \in T^{1,1}$ таким, что $J^i_j J^j_k = -\delta^i_k$ или просто $J^2 = -1$. Этот оператор определяет комплексную структуру во всех касательных пространствах $T_m M$: умножение на $i = \sqrt{-1}$ задано J.

Почти комплексная структура называется **интегрируемой**, если существует структура комплексного многообразия на M (т. е. атлас, состоящий из комплексных карт), которая определяет такую же комплексную структуру на касательных векторных пространствах.

Аналогично структура почти произведения задается тензорным полем $P \in T^{1,1}$ таким, что $P^i_j P^j_k = P^i_k$ или просто $P^2 = P$. Такой оператор определяет расщепление каждого касательного пространства $T_m M$ в прямую сумму подпространств $T'_m M = P(T_m M)$ и $T''_m M = (1 - P)(T_m M)$. Структура почти произведения называется **интегрируемой**, если M можно локально представить как прямое произведение двух многообразий M' и M'' так, что оно порождает такое же расщепление касательных пространств.

Следует отметить, что объекты, для которых определяется скобка Нейенхейса, приводимы: представление $\tau \otimes \Lambda^k \tau^*$ расщепляется на две неприводимые компоненты (одна из которых эквивалентна $\Lambda^{k-1}\tau$). Поэтому возникают восемь различных операций на неприводимых объектах. Насколько мне известно, полный анализ этой ситуации еще не проводился.

Класс V состоит из операций, полученных комбинацией унарных операций (т. е. внешнего дифференцирования и операций порядка нуль) и тензорного умножения. Он содержит много частных случаев из классов I–IV, например, две линейно независимые операции из $\Omega^k(M) \times \Omega^l(M)$ в $\Omega^{k+l}(M)$: $d\omega_1 \wedge \omega_2$ и $\omega_1 \wedge d\omega_2$.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 4 [Grz]. (i) *Все инвариантные билинейные операции порядка* 1 *принадлежат одному из описанных выше классов* I–V.

(ii) *Все операции порядка* 2 *или* 3 *суть суперпозиции операций порядка* $\leqslant 1$ *с единственным исключением, описанным ниже* (*см. пример* 3).

(iii) *Не существует операций порядка* > 3.

Из этого результата вытекает следующая

Проблема 1. Описать все **примитивные** инвариантные полилинейные операции на тензорных полях (т. е. такие, которые не могут быть сведены к суперпозициям операций меньшего порядка или меньшего числа переменных).

Эта проблема не решена даже для одномерного многообразия.

Пример 3 [FF]. Следующая билинейная операция дифференциального порядка 3 действует на тензорные плотности степени $-2/3$ на вещественной прямой и является примитивной:

$$L(f\cdot(dx)^{-2/3}, g\cdot(dx)^{-2/3}) = \left(2\cdot\begin{vmatrix} f & g \\ f''' & g''' \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}\right)(dx)^{5/3}.$$

По-видимому, множество примитивных операций довольно велико. По моему мнению, примитивными являются следующие операции на 1-формах на прямой:

$$L_m(f_1dx,\dots,f_mdx) = \det\begin{vmatrix} f_1 & & f_m \\ f_1' & & f_m' \\ & & \\ f_1^{(m-1)} & & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}\cdot(dx)^{m(m+1)/2}.$$

8. Инвариантные операции на супермногообразиях

Проблема классификации инвариантных операций на геометрических объектах может быть сформулирована для супермногообразий[6] в точности так же, как для обычных многообразий. Решение этой проблемы, хотя бы в той же общности, как мы описали выше для обычных многообразий, было бы очень полезно.

Ситуация отличается от классической в первую очередь следующим фактом. *Представление супергруппы $GL_+(m|n;\mathbb{R})$ в пространстве тензоров в $\mathbb{R}^{m|n}$ не является полупростым.* Следовательно, неприводимые геометрические объекты дифференциального порядка 1 не могут, вообще говоря, реализоваться как тензоры. Наиболее важный объект такого сорта — это так называемый **березиниан**, который заменяет в случае супермногообразия понятие формы объема.

Пример 4. Рассмотрим суперпространство $V = \mathbb{R}^{1|1}$ и действие супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1|1;\mathbb{R})$ на $V^*\otimes V$. Выберем систему координат x, ξ в V, двойственную базису $\{\partial_x, \partial_\xi\}\subset V$. Положим

$$w_1 = x\otimes\partial_x + \xi\otimes\partial_\xi,\quad w_2 = x\otimes\partial_\xi,\quad w_2' = \xi\otimes\partial_x,$$
$$W_1 = \mathbb{R}w_1,\quad W_2 = \mathbb{R}w_1\oplus\mathbb{R}w_2,\quad W_2' = \mathbb{R}w_1\oplus\mathbb{R}w_2',\quad W_3 = \mathbb{R}w_1\oplus\mathbb{R}w_2\oplus\mathbb{R}w_2'.$$

Заметим, что 4-мерный модуль $V^*\otimes V$ имеет решетку подмодулей

$$\begin{array}{ccccc} & & \subset W_2 \subset & & \\ \{0\} = W_0 \subset W_1 & & & & W_3\subset W_4 = V^*\otimes V, \\ & & \subset W_2' \subset & & \end{array}\tag{25}$$

где нижний индекс указывает размерность пространства.

Березиниан или форма суперобъема на V соответствует неприводимому одномерному подфактору W_2/W_1. Соответствующее одномерное пред-

[6] Относительно введения в теорию супермногообразий см. [Le], [Ko2] или [Mn2], а также лекции Бернштейна по суперсимметрии в книге [QFS].

ставление супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1|1;\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a - d.$$

Упражнение 7*. Найти все одномерные $GL(p|q;\mathbb{R})$-инвариантные подфакторы в тензорной алгебре над $\mathbb{R}^{p|q}$.

Ответ. Они образуют абелеву полугруппу (относительно тензорного умножения) с двумя порождающими элементами $\mathrm{Ber}(\mathbb{R}^{p|q})$ и $\mathrm{Ber}(\mathbb{R}^{p|q})^* \cong \mathrm{Ber}(\Pi\mathbb{R}^{p|q})$, где Π — функтор смены четности.

Лекция 3

ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

1. Группы Ли ... 49
1.1. Определение и примеры групп Ли ... 49
1.2. Инволютивные группы Ли ... 54
1.3. Комплексные группы Ли ... 60
2. Алгебры Ли ... 60
2.1. Определение и мотивировка ... 60
2.2. Источники алгебр Ли ... 62
2.3. Матричные алгебры Ли ... 64
2.4. Структурные константы и многообразие A_n ... 65
2.5. Типы алгебр Ли ... 69
2.6. Комплексные алгебры Ли и их вещественные формы ... 70
2.7*. Супералгебры Ли ... 71
3. Полупростые алгебры Ли ... 72
3.1. Комплексные полупростые алгебры Ли ... 72
3.2. Простые алгебры Ли ... 75
4. Связь между алгебрами Ли и группами Ли ... 77
4.1. Пять конструкций $\mathrm{Lie}(G)$ ... 77
4.2. Экспоненциальное отображение ... 82
4.3*. Супергруппы Ли ... 83

1. Группы Ли

1.1. Определение и примеры групп Ли. Понятие группы Ли основное в нашей книге. Оно получается объединением двух структур, которые играют центральную роль в алгебре и математическом анализе.

Определение 1. **Группой Ли** называется множество G, которое одновременно является группой и гладким многообразием, причем эти две структуры согласованы следующим образом.

(LIE) Умножение в группе $m : G \times G \to G : (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ и обратное отображение $i : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ являются гладкими отображениями.

ставление супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1|1;\mathbb{R})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a - d.$$

Упражнение 7*. Найти все одномерные $GL(p|q;\mathbb{R})$-инвариантные подфакторы в тензорной алгебре над $\mathbb{R}^{p|q}$.

Ответ. Они образуют абелеву полугруппу (относительно тензорного умножения) с двумя порождающими элементами $\mathrm{Ber}(\mathbb{R}^{p|q})$ и $\mathrm{Ber}(\mathbb{R}^{p|q})^* \cong \mathrm{Ber}(\Pi\mathbb{R}^{p|q})$, где Π — функтор смены четности.

Лекция 3

ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

1. Группы Ли 49
   1.1. Определение и примеры групп Ли 49
   1.2. Инволютивные группы Ли 54
   1.3. Комплексные группы Ли 60
2. Алгебры Ли 60
   2.1. Определение и мотивировка 60
   2.2. Источники алгебр Ли 62
   2.3. Матричные алгебры Ли 64
   2.4. Структурные константы и многообразие A_n 65
   2.5. Типы алгебр Ли 69
   2.6. Комплексные алгебры Ли и их вещественные формы 70
   2.7*. Супералгебры Ли 71
3. Полупростые алгебры Ли 72
   3.1. Комплексные полупростые алгебры Ли 72
   3.2. Простые алгебры Ли 75
4. Связь между алгебрами Ли и группами Ли 77
   4.1. Пять конструкций $\mathrm{Lie}(G)$ 77
   4.2. Экспоненциальное отображение 82
   4.3*. Супергруппы Ли 83

1. Группы Ли

1.1. Определение и примеры групп Ли. Понятие группы Ли основное в нашей книге. Оно получается объединением двух структур, которые играют центральную роль в алгебре и математическом анализе.

Определение 1. **Группой Ли** называется множество G, которое одновременно является группой и гладким многообразием, причем эти две структуры согласованы следующим образом.

(LIE) Умножение в группе $m : G \times G \to G : (g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ и обратное отображение $i : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ являются гладкими отображениями.

Это условие эквивалентно следующему (более короткому, но более трудному для проверки).

(LIE′) Отображение $m' : G \times G \to G : (g_1, g_2) \mapsto g_1\, g_2^{-1}$ гладкое.

Исторически, абстрактные группы возникли из групп преобразований, которые использовались в математике с давних времен. Группа преобразований G состоит из биекций (т. е. взаимно однозначных обратимых отображений) множества X, сохраняющих одну или несколько дополнительных структур на X. Например, множество всех преобразований конечного множества мощности n (без каких-либо дополнительных структур) образует так называемую **симметрическую группу** S_n.

Если X — гладкое многообразие (возможно, с дополнительными структурами), то группу автоморфизмов G также можно снабдить структурой гладкого многообразия (иногда бесконечной размерности). Таким образом, группы Ли естественно возникают во всех разделах математики и приложений.

Довольно трудно описать кратко все многообразие групп Ли: их геометрические и алгебраические свойства весьма различны.

Предпринималось много попыток классифицировать группы Ли или, по крайней мере, какую-то их часть: группы малой размерности, группы данного алгебраического типа, матричные группы, группы, действующие на данном типе многообразий, и т. п. Для некоторых задач получен полный ответ, но другие задачи до сих пор считаются безнадежными.

Знакомиться с царством групп Ли мы начнем с хорошо известных фактов. Большинство из них приводятся без доказательств (интересующийся читатель найдет доказательства приводимых утверждений в любом учебнике по теории Ли) и формулируются в наиболее удобном виде для дальнейшего использования во второй части. В порядке исключения для некоторых утверждений мы приводим короткие доказательства — когда это способствует лучшему пониманию.

Теорема 1. *Любая замкнутая подгруппа H группы Ли G является группой Ли. Фактор-пространство $M = G/H$ допускает единственную структуру гладкого многообразия такую, что действие G на M гладкое.*

Неформально теорема 1 утверждает, что практически все естественно возникающие группы является группами Ли. Однако этот результат не стоит переоценивать. Например, все дискретные группы суть 0-мерные группы Ли, что не дает нам никакой полезной информации.

Являясь гладким многообразием, любая группа Ли G представима в виде дизъюнктного объединения связных компонент.[1] Обозначим через G_0 компоненту, содержащую единицу e.

Предложение 1. *G_0 — нормальная подгруппа Ли группы G, и фактор-группа $\pi_0(G) := G/G_0$ дискретна в фактор-топологии.*

[1]Напомним, что для гладкого многообразия M связная компонента может быть определена как класс эквивалентности относительно следующего отношения: две точки x и y называются **эквивалентными**, если они могут быть соединены кусочно гладким путем (см. лекцию 1).

Доказательство. Прежде всего покажем, что G_0 — подгруппа G. Действительно, если g_1 и g_2 — два элемента G_0, то существуют кусочно гладкие пути $p_1(t)$ и $p_2(t)$ такие, что $p_1(0) = p_2(0) = e$, $p_1(1) = g_1$, $p_2(1) = g_2$. Тогда путь

$$p(t) = \begin{cases} p_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g_1 p_2(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

соединяет e и $g_1 g_2$. Следовательно, $g_1 g_2 \in G_0$.

Аналогично получаем $g^{-1} \in G_0$. Таким образом, G_0 — подгруппа G. Подгруппа G_0 нормальна, так как для любого элемента $g \in G$ подгруппа gG_0g^{-1} является связной компонентой G, содержащей e. Следовательно, $gG_0g^{-1} = G_0$. Подгруппа G_0 открыта в G. Поэтому она также замкнута как дополнение объединения всех смежных классов gG_0, где $g \notin G_0$. Следовательно, G_0 является подгруппой Ли в силу теоремы 1.

Так как все смежные классы gG_0, $g \in G$, одновременно открыты и замкнуты в G, таким же свойством обладают все точки $\pi_0(G)$ по определению фактор-топологии. □

Таким образом, изучение общих групп Ли сводится к изучению связных групп Ли, дискретных групп (которые являются 0-мерными группами Ли) и расширений вида $1 \to G_0 \to G \to \Gamma_0 \to 1$, где G_0 — связная группа Ли и Γ_0 — дискретная группа (изоморфная $\pi_0(G)$).

Мы не будем обсуждать дискретные группы и расширения, а сосредоточимся на связных группах Ли.

Теорема 2. *Пусть G — связная группа Ли и $\pi_1(G)$ — ее фундаментальная группа. Существуют связная односвязная группа Ли $\widetilde{G}$ и эпиморфизм $p : \widetilde{G} \to G$ с дискретным ядром $\Gamma_1 \subset G$, изоморфным $\pi_1(G)$.*

Обычно $\widetilde{G}$ называют **универсальным накрытием** G. Отметим, что $\widetilde{G}$ — группа Ли той же размерности. Более того, G и $\widetilde{G}$ **локально изоморфны**. Это означает, что существует диффеоморфизм φ между окрестностью единицы в G и окрестностью единицы в $\widetilde{G}$ такой, что $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ всюду, где определены обе части равенства. Стандартный пример — абелева группа $\mathbb{R}^n$, которая является универсальным накрытием n-мерного тора $\mathbb{T}^n$. Более сложные примеры будут рассмотрены ниже.

Следующее утверждение указывает на связь топологических и алгебраических свойств группы Ли.

Предложение 2. *Пусть G — связная группа Ли и Γ — ее дискретная нормальная подгруппа. Тогда Γ содержится в центре C группы G.*

Упражнение 1. Доказать предложение 2.

Указание. Для произвольного элемента $\gamma \in \Gamma$ рассмотреть отображение $p_\gamma : G \to \Gamma : g \mapsto g\gamma g^{-1}$. Используя топологические свойства G и Γ, показать, что p_γ — постоянное отображение.

Итак, изучение общих связных групп Ли сводится к изучению односвязных групп Ли и центральных дискретных подгрупп.

Теорема 3. (a) *Любая связная одномерная группа Ли коммутативна и изоморфна либо вещественной прямой $\mathbb{R}$ со сложением в качестве групповой операции, либо единичной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с умножением в качестве групповой операции.*

(b) *Любая связная коммутативная группа Ли G является прямым произведением связных одномерных групп Ли G_i, $1 \leqslant i \leqslant n = \dim G$.*

? Упражнение 2. Проверить что $\mathbb{R}$ и S^1 являются группами Ли.

Указание. Проверить выполнение условий (LIE) и (LIE′).

Теперь мы рассмотрим один из наиболее важных примеров некоммутативных групп Ли. На самом деле это серия примеров, зависящих от натурального числа n.

Пример 1. Пусть $GL(n, \mathbb{R})$ — множество всех обратимых $n \times n$-матриц с вещественными коэффициентами. Это множество — группа, в которой умножение понимается как умножение матриц.[2] Группа $GL(n, \mathbb{R})$ может быть реализована как группа преобразований обычного n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Элементы $\mathbb{R}^n$ часто записываются как вектор-столбцы с n вещественными элементами. Группа $GL(n, \mathbb{R})$ действует на вектор-столбцы левым умножением.

Рассмотрим структуру многообразия. Пусть $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных $n \times n$-матриц. Множество $GL(n, \mathbb{R})$ является открытым множеством n^2-мерного векторного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Действительно, оно определяется условием $\det g \neq 0$.[3] Итак, $GL(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием с естественной глобальной системой координат: множеством матричных элементов $\{g_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

Известно, что это многообразие распадается на две связные компоненты $GL_{\pm}(n, \mathbb{R})$, различающиеся знаком $\det g$. В принятых выше обозначениях $G = GL(n, \mathbb{R})$, $G_0 = GL_{+}(n, \mathbb{R})$, $\Gamma_0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $G = \Gamma_0 \ltimes G_0$ (полупрямое произведение).

Условие (LIE) выполняется, так как покоординатное умножение определяется полиномиальными функциями $(AB)_{ij} = \sum\limits_k a_{ik} b_{kj}$, а обратное отображение — рациональными функциями с отличным от нуля знаменателем $(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \dfrac{\Delta_{ij}}{\det A}$, где Δ_{ij} — детерминант матрицы, полученной из A выбрасыванием j-й строки и i-го столбца.

Роль единицы e играет единичная матрица порядка n, которую мы обозначаем 1_n или просто 1.

Пусть V — n-мерное вещественное векторное пространство. Обозначим через $\mathrm{Aut}\, V$ или $GL(V)$ группу автоморфизмов V (т. е. линейных обратимых операторов в V). Выбирая базис в V, отождествляем пространство V с $\mathbb{R}^n$ и группу $GL(V)$ — с $GL(n, \mathbb{R})$.

---

[2] На самом деле матричное умножение было определено для имитации композиции линейных операторов.

[3] Напомним общий топологический принцип: неравенства определяют открытые множества, а равенства — замкнутые множества. Оставляем читателю дать строгую формулировку и доказательство этого принципа.

Этот пример имеет важное значение по многим причинам. Например, известно, что почти все группы Ли могут быть реализованы как подгруппы Ли (т. е. подгруппы, являющиеся гладкими подмногообразиями) группы $GL(n, \mathbb{R})$. Ниже мы рассмотрим несколько частных случаев.

Упражнение 3. Построить матричные реализации $\mathbb{R}$ и S^1.

Указание. Рассмотреть $GL(1, \mathbb{R})$ и одномерные подгруппы в $GL(2, \mathbb{R})$.

Пример 2. Простейший пример некоммутативной группы Ли имеет жаргонное название "$ax + b$-группа" и состоит из всех **аффинных преобразований вещественной прямой**: $x \mapsto ax + b$. Более подходящее обозначение этой группы: $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$. Эта группа имеет матричную реализацию 2×2-матрицами вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \neq 0$ и b — вещественные числа. В самом деле, ввиду равенства $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b \\ 1 \end{pmatrix}$ ясно, как надо реализовать аффинные преобразования $\mathbb{R}^1$ линейными преобразованиями $\mathbb{R}^2$ (ограниченными на подходящее подмножество). Группа $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{R})$ допускает глобальную систему координат (a, b) и имеет две связные компоненты, отличающиеся знаком числа a.

Упражнение 4. Записать покоординатно операцию умножения и обратное отображение.

Ответ. $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$ и $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1} b)$.

Этот пример часто будет предшествовать рассмотрению более сложных примеров.

Пример 3. Группа $GL(n, \mathbb{C})$ **комплексных обратимых $n \times n$-матриц** изоморфна группе автоморфизмов любого n-мерного комплексного векторного пространства W. Она вкладывается в $GL(2n, \mathbb{R})$ как подгруппа матриц, коммутирующих с матрицей $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$. Действительно, комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с дополнительной структурой: умножение на $i = \sqrt{-1}$, определяемое матрицей J_{2n}. Легко проверить, что общий элемент $g \in GL(n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$ имеет вид $g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, где $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такие, что $\det g \neq 0$.

Пример 4. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ **всех вещественных матриц g таких, что**

$$\det g = 1. \tag{1}$$

Это группа автоморфизмов n-мерного вещественного векторного пространства V, сохраняющих форму объема $d^n x$ на V. (Напомним, что $d^n(gx) = \det g \cdot d^n x$.)

Упражнение 5. Показать, что $SL(n, \mathbb{R})$ является гладким подмногообразием коразмерности 1 в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Указание. Использовать предложение 1 из лекции 1 и тождество

$$\frac{\partial \det g}{\partial g_{ij}} = (g^{-1})_{ji} \det g.$$

1.2. Инволютивные группы Ли. Сначала мы на примерах продемонстрируем частные случаи общей конструкции, которая будет рассмотрена ниже.

Пример 5. Группа $O(n, \mathbb{R})$ **всех ортогональных матриц** g, т. е. матриц g, удовлетворяющих условию

$$g^t \cdot g = 1_n, \tag{2}$$

где g^t обозначает **транспонированную** матрицу: $(g^t)_{ij} = g_{ji}$. Это группа автоморфизмов векторного пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих обычное скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_i x_i y_i$. Более общо, она изоморфна $\mathrm{Aut}(V, B)$, где V — произвольное n-мерное вещественное векторное пространство и B — симметрическая билинейная форма на V такая, что соответствующая квадратичная форма $Q(x) = B(x, x)$ положительно определенная. При отказе от требования положительной определенности возникает серия групп $O(p, q, \mathbb{R})$. По определению $O(p, q, \mathbb{R})$ состоит из **псевдоортогональных матриц** g т. е. матриц g, удовлетворяющих условию

$$g^t \cdot I_{p,q} \cdot g = I_{p,q}, \tag{2'}$$

где $I_{p,q} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$.

? Упражнение 6. Сколько связных компонент у многообразия $O(p, q, \mathbb{R})$?
Ответ. Четыре при $pq > 0$, две при $pq = 0$, $p + q > 0$.

Если элемент группы $O(p, q, \mathbb{R})$ записывается в виде $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A, B, C, D — матрицы соответствующих размеров (например, $A \in \mathrm{Mat}_p(\mathbb{R})$ и $D \in \mathrm{Mat}_q(\mathbb{R})$ — квадратные матрицы), то связные компоненты определяются знаками $\det A$ и $\det D$, которые никогда не обращаются в нуль для $g \in O(p, q, \mathbb{R})$.

Укажем один важный частный случай. Группа $O(1, 3, \mathbb{R})$ (известная как **общая группа Лоренца** L) играет чрезвычайно важную роль в специальной теории относительности. Это группа автоморфизмов **пространства Минковского** $M^{1,3}$ с координатами (t, x, y, z), снабженная квадратичной формой $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Физики отождествляют точки $M^{1,3}$ с **событиями** или точками **пространства-времени**, где t — временная, а x, y, z — пространственные координаты. Удобно рассматривать математическую реализацию пространства $M^{1,3}$ в виде пространства эрмитовых 2×2-матриц $h = \begin{pmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{pmatrix}$. В этой реализации приведенная выше квадратичная форма есть просто $\det h$.

Группа L имеет четыре связные компоненты (см. упражнение 6). Связная компонента, содержащая единицу L_0, не односвязна, и универсальное накрытие изоморфно $SL(2,\mathbb{C})$. Чтобы убедиться в этом, рекомендуется выполнить следующее

Упражнение 7. Пусть $g \in SL(2,\mathbb{C})$. Обозначим через L_g преобразование $h \mapsto g^t hg$.

(a) Проверить, что $L_g \in L$.

(b) Показать, что множество $\{L_g | g \in SL(2,\mathbb{C})\}$ является связной компонентой, содержащей единицу группы L (иногда называемой **собственной группой Лоренца**).

Указание. Утверждение (a) следует из равенства $\det(g^t hg) = \det h \cdot (\det g)^2$. Для доказательства (b) надо показать, что группа $SL(2,\mathbb{C})$ связна и что образ в L открыт (достаточно проверить, что он имеет ту же размерность).

Пример 6. Группа $U(n)$ — это подгруппа $GL(n,\mathbb{C})$, состоящая из **всех унитарных матриц** u, т. е. матриц u, удовлетворяющих условию

$$u \cdot u^* = 1_n, \tag{3}$$

где u^* — **эрмитово сопряженная матрица**: $(u^*)_{ij} = \overline{u_{ji}}$. Эта группа изоморфна группе автоморфизмов любого n-мерного комплексного векторного пространства W, сохраняющих положительное эрмитово скалярное произведение. Действительно, любое такое пространство W изоморфно $\mathbb{C}^n$ с обычным эрмитовым скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_i x_i\overline{y_i}$.

Пример 6 допускает обобщение на случай индефинитных эрмитовых форм. Именно, группа $U(p,q)$ состоит из **псевдоунитарных** матриц u, т. е. матриц u, удовлетворяющих условию

$$u^* \cdot I_{p,q} \cdot u = I_{p,q}. \tag{3$'$}$$

Пример 7. Так называемая **симплектическая группа** определяется как $\mathrm{Aut}(V,B)$, где V — $2n$-мерное вещественное векторное пространство и B — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на V. Любое такое пространство отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной кососимметрической билинейной формой

$$B(x,y) = (J_{2n}x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

При таком отождествлении $\mathrm{Aut}(V,B)$ становится группой $Sp(2n,\mathbb{R})$ всех вещественных матриц $g \in GL(2n,\mathbb{R})$ таких, что

$$g^t \cdot J_{2n} \cdot g = J_{2n}. \tag{4}$$

Теперь перейдем к общей конструкции. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра над $\mathbb{R}$ с единицей. Обозначим через G группу обратимых элементов $\mathcal{A}$. Это открытое плотное подмножество $\mathcal{A}$.[4] Следовательно, эта группа является группой Ли (см. пример 1 выше).

Антиинволюцией алгебры $\mathcal{A}$ называется линейное отображение $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что

(i) $\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a)$ (т. е. σ — **антигомоморфизм**),

(ii) $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

Если σ — антиинволюция группы $\mathcal{A}$, то отображение $\tau(g) = \sigma(g^{-1})$ будет **инволюцией** группы G (т. е. автоморфизмом G таким, что $\tau^2 = \mathrm{Id}$).

Рассмотрим множество H неподвижных точек отображения τ в G (т. е. $H = \{g \in G | \tau(g) = g\}$). Это подгруппа группы G, называемая **инволютивной подгруппой.**

Теперь мы применим общую конструкцию к матричным алгебрам $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{H})$ (последние две рассматриваются как вещественные алгебры размерности $2n^2$ и $4n^2$ соответственно). Начнем с описания всех антиинволюций этих алгебр.

Предложение 3. (a) *Любая антиинволюция* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ *имеет вид*

$$\sigma_A : X \to AX^tA^{-1}, \tag{5}$$

где A — симметрическая или антисимметрическая обратимая матрица.

(b) *Имеется $n/2 + 2^{(-1)^n}$ различных классов антиинволюций* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ *по модулю внутренних автоморфизмов этой алгебры.*

Доказательство. Если σ — антиинволюция $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, то $A \mapsto \sigma(A^t)$ — автоморфизм $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Далее нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 4. *Любой автоморфизм* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ **внутренний**, *т. е. имеет вид*

$$i_C : A \mapsto CAC^{-1}, \quad C \in GL(n, \mathbb{R}). \tag{6}$$

Схема доказательства. Пусть E_{ij} — стандартные матричные единицы $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Тогда $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. Если φ — автоморфизм, то $\widetilde{E}_{ij} := \varphi(E_{ij})$ удовлетворяют такому же соотношению. Следовательно, операторы $P_i := \widetilde{E}_{ii}$ обладают следующими свойствами: $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$ и $\sum\limits_i P_i = 1$. С геометрической точки зрения это означает, что P_i — проекторы на некоторые подпространства $V_i \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $\mathbb{R}^n = \oplus_i V_i$. Далее, из соотношений $P_i\widetilde{E}_{kl}P_j = \delta_{ik}\delta_{lj}\widetilde{E}_{kl}$ и $\widetilde{E}_{ij}\widetilde{E}_{ji} = P_i$ следует, что $\widetilde{E}_{kl}$ — биекция из V_l в V_k. Это возможно лишь когда все подпространства V_i одномерны. Пусть C — оператор, преобразующий V_i в i-ю координатную ось. Тогда композиция φ с внутренним автоморфизмом (6) сохраняет все матричные единицы с точностью до скалярного множителя: $C\widetilde{E}_{ij}C^{-1} = c_{ij}E_{ij}$.

Из алгебраических соотношений для $\widetilde{E}_{ij}$ следует, что c_{ij} удовлетворяют уравнениям $c_{ii} = 1$, $c_{ij}c_{ji} = 1$, $c_{ij}c_{jk}c_{ki} = 1$. Читателю предлагается доказать, что существуют ненулевые вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$

[4] Во всех трех указанных ниже случаях это утверждение легко проверяется. Доказательство в общем случае можно считать упражнением по теории банаховых алгебр.

Указание. Ввести норму в $\mathcal{A}$ такую, что $|ab| \leqslant |a| \cdot |b|$, и показать, что $1 + a$ обратим, если $|a| < 1$.

такие, что $c_{ij} = a_i/a_j$. Следовательно, $C\widetilde{E}_{ji}C^{-1} = A\widetilde{E}_{ji}A^{-1}$, где $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ — диагональная матрица с элементами a_i на главной диагонали. Поэтому $\varphi = i_{A^{-1}C}$. □

Доказательство предложения 3 (продолжение). В силу предложения 4 любой антиавтоморфизм σ алгебры $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ имеет вид (5). Остается показать, что при $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ матрица A симметрическая или антисимметрическая. Непосредственное вычисление дает $\sigma^2 = i_B$, где $B = A(A^t)^{-1}$. Заметим, что $i_{A_1} = i_{A_2}$ тогда и только тогда, когда A_1 и A_2 пропорциональны. Поэтому B — скалярная матрица и $A = cA^t$. Применяя транспонирование, получаем $A^t = cA$. Следовательно, $c = c^{-1}$, что и требовалось доказать. Теперь посмотрим, как изменяется σ под действием внутреннего автоморфизма (6). Находим $i_C \circ \sigma_A \circ i_C^{-1} = \sigma_{\widetilde{A}}$, где $\widetilde{A} = CAC^t$. Таким образом, классифицировать антиинволюции $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ по модулю внутренних автоморфизмов — это то же самое, что классифицировать симметрические и антисимметрические невырожденные линейные формы в $\mathbb{R}^n$ с точностью до линейных преобразований и умножения на скаляр. Решение последней задачи известно: существуют $[n/2] + 1$ неэквивалентных симметрических форм, соответствующих симметрическим матрицам $I_{p,q}$, $p \geqslant q$ (заметим, что $I_{p,q}$ подобна $-I_{q,p}$) и (для четного n) один класс антисимметрических форм, соответствующих матрице J_n. □

В примерах 5 и 7 приведены, на самом деле, все инволютивные подгруппы $GL(n, \mathbb{R})$.

Теперь рассмотрим алгебру $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ и сформулируем соответствующий результат.

Предложение 4′. *Все автоморфизмы алгебры* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ (*которая рассматривается как вещественная алгебра*) *являются либо внутренними автоморфизмами, либо композициями внутреннего автоморфизма и комплексного сопряжения.*

Рассуждая так же, как и выше, из предложения 4′ получаем

Предложение 3′. (a) *Все антиинволюции алгебры* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ (*как вещественной алгебры*) *имеют вид либо* (5), *либо*

$$\overline{\sigma}_A : X \to AX^*A^{-1}, \tag{5′}$$

где A — эрмитова обратимая матрица.[5]

(b) *Существуют* $n/2+1+2^{(-1)^n}$ *различных классов антиинволюций алгебры* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ *по модулю внутренних автоморфизмов этой алгебры. Более точно, для четного n существуют два класса антиинволюций вида* (5), *соответствующих $A = 1$ и $A = J_n$, и $n/2 + 1$ классов антиинволюций вида* (5′), *соответствующих $A = I_{p,q}$, $p \geqslant q$, $p+q = n$. Для нечетного n имеется один класс типа* (5), *соответствующий $A = 1$, и $(n+1)/2$ классов типа* (5′), *соответствующих $A = I_{p,q}$, $p \geqslant q$, $p+q = n$.*

Перечислим инволютивные подгруппы $GL(n, \mathbb{C})$, соответствующие антиинволюциям из предложения 3′: $O(n, \mathbb{C})$, $Sp(2n, \mathbb{C})$, $U(p, q)$.

[5] В этой ситуации нет необходимости рассматривать антиэрмитовы матрицы A, так как они имеют вид iB, где B эрмитова и $i_A = i_B$.

Алгебры с делением над $\mathbb{R}$

Алгебра A называется **алгеброй с делением**, если любой ненулевой элемент A обратим. Ассоциативные алгебры с делением также называются **телами**.

Теорема Фробениуса. *Существуют только три (с точностью до изоморфизма) ассоциативных алгебры с делением над* $\mathbb{R}$: *вещественное поле* $\mathbb{R}$, *комплексное поле* $\mathbb{C}$ *и некоммутативное тело* **кватернионов** $\mathbb{H}$.

Замечательная алгебра — тело кватернионов — была открыта Гамильтоном в 1843 г. после многолетних безуспешных попыток обобщить комплексные числа и определить ассоциативное умножение в $\mathbb{R}^3$. Ключевая идея, обеспечившая успех, заключалась в том, чтобы перейти от $\mathbb{R}^3$ к $\mathbb{R}^4$ (и пожертвовать коммутативностью). Гамильтон записывал кватернион в виде $\mathbf{q} = x_0 + \mathbf{x}$, где x_0 — обычное вещественное число, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор в $\mathbb{R}^3$. Он назвал их **скалярной** и **векторной** составляющими $\mathbf{q}$. Произведение двух скаляров и умножение вектора на скаляр определялись обычным образом. Так что требовалось лишь определить произведение двух векторов. Это произведение распадается на скалярную и векторную части, которые Гамильтон назвал **скалярным произведением** и **векторным произведением** (термины используются до наших дней). Явные формулы имеют вид

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot 1 + \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$
$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}, \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — стандартные базисные векторы в $\mathbb{R}^3$.

Алгебру $\mathbb{H}$ удобно реализовать как подалгебру алгебры $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ по формуле

$$\mathbf{q} = x_0 + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 + i x_3 & x_1 + i x_2 \\ -x_1 + i x_2 & x_0 - i x_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Она также может быть определена как алгебра, натянутая на одну вещественную единицу и три мнимые единицы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, удовлетворяющие соотношениям[6]

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = -1.$$

Оставим заинтересовавшемуся читателю исследование антиинволюций кватернионной матричной алгебры $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{H})$ (как вещественной алгебры размерности $4n^2$) и приведем результаты без доказательств. ■

Предложение 3″. (a) *Каждая антиинволюция алгебры* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{H})$ *имеет вид* $\sigma_A : X \mapsto AX^* A^{-1}$, *где* A — *обратимая эрмитова или антиэрмитова кватернионная матрица.*

(b) *По модулю внутренних автоморфизмов существуют* $[n/2] + 1$ *различных антиинволюций, связанных с эрмитовыми матрицами* $I_{p,q}$, $p \geqslant q$, $p + q = n$, *и (для четных* n*) одной антиинволюцией, связанной с антиэрмитовой матрицей* J_n.

[6] Существует легенда, что эти соотношения Гамильтон вырезал на перилах моста, по которому он обычно проходил во время своих математических прогулок.

Соответствующие инволютивные подгруппы группы $GL(n,\mathbb{H})$ обозначаются через $Sp(p,q)$ (или $U(p,q,\mathbb{H})$) и $SO^*(2n)$ (или $U^*(n)$).

Теперь сформулируем общий факт.

Теорема 4. (a) *Инволютивная подгруппа $H \subset \mathcal{A}$ является группой Ли.*

(b) *Касательное пространство $\mathfrak{h}$ к H в точке e определяется по формуле*

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathcal{A} | \sigma(x) = -x\}. \tag{9}$$

Метод доказательства основан на так называемом **преобразовании Кэли** на $\mathcal{A}$ с центром x_0, которое по определению является рациональным отображением

$$C_{x_0}: \ x \mapsto (x - x_0)(x + x_0)^{-1} \tag{10}$$

на открытом плотном подмножестве $\mathcal{D}_{x_0} = \{x \in \mathcal{A} \mid (x + x_0) \text{ обратим}\}$ и биективно отображает эту область на $\mathcal{D}_1$. Обратное отображение также рационально:

$$C_{x_0}^{-1}: \ y \mapsto x_0(1 - y)(1 + y)^{-1}. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть H — инволютивная подгруппа $\mathcal{A}$. Тогда для любого $h \in H$ преобразование Кэли C_h отображает открытую плотную область в H на открытую плотную область в $\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что (10) и (11) — взаимно обратные отображения. Используя равенство $\sigma(h) = h^{-1}$ для $h \in H$, получаем

$$\begin{aligned}\sigma((h - h_0)(h + h_0)^{-1}) &= \sigma((hh_0^{-1} - 1)(hh_0^{-1} + 1)^{-1}) = (h_0h^{-1} + 1)^{-1}(h_0h^{-1} - 1)\\ &= (h_0h^{-1} - 1)(h_0h^{-1} + 1)^{-1} = -(h - h_0)(h + h_0)^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, образ C_{h_0} преобразования Кэли подгруппы H принадлежит $\mathfrak{h}$. Аналогично вычисляется, что $C_{h_0}^{-1}(\mathfrak{h}) \subset H$. □

Доказательство теоремы 4. Отображение C_h определено в точке $h \in H$ и определяет карту, покрывающую эту точку. Две различные карты связаны обратимым рациональным отображением. Таким образом, на H имеется структура гладкого многообразия размерности $\dim \mathfrak{h}$.

Для доказательства (b) рассмотрим гладкую кривую $t \mapsto g(t)$ в H, выходящую из e. По определению H имеем $\sigma(g(t)) = g(t)^{-1}$. Следовательно, $\sigma(\dot{g}(0)) = -\dot{g}(0)$. Поэтому касательное пространство T_eH содержится в $\mathfrak{h}$. Так как эти два векторных пространства имеют одинаковую размерность, они совпадают. □

Упражнение 8. Описать пространство $\mathfrak{h}$ в случаях ?

(a) $H = O(n,\mathbb{R})$, (b) $H = U(n)$, (c) $H = Sp(2n,\mathbb{R})$

и найти размерности этих групп.

Ответ. (a) $\dim H = (n(n-1))/2$ и $\mathfrak{h}$ состоит из кососимметрических матриц, (b) $\dim H = n^2$ и $\mathfrak{h}$ состоит из косоэрмитовых матриц, (c) $\dim H = (n(n+1))/2$ и $J_n \cdot \mathfrak{h}$ состоит из симметрических матриц.

1.3. Комплексные группы Ли G — это комплексные (аналитические) многообразия с групповой операцией, заданной голоморфными функциями. Наиболее важным примером является группа $GL(n,\mathbb{C})$ (см. пример 3). Как открытое подмножество комплексного n^2-мерного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ она имеет глобальную координатную систему. Другими примерами могут служить группа $SL(n,\mathbb{C})$ и ее инволютивные подгруппы $SO(n,\mathbb{C})$ и $Sp(n,\mathbb{C})$. Конечно, любая комплексная группа Ли является одновременно обычной (вещественной) группой Ли. Обратное утверждение неверно. Например, компактная группа Ли допускает структуру комплексной группы Ли только тогда, когда она является **комплексным тором** $\mathbb{C}^n/L$, где L — некоторая $2n$-мерная решетка.

Заметим, что компактные комплексные группы Ли не обладают матричной реализацией в силу принципа максимума: любая голоморфная функция на такой группе должна быть константой.

Можно показать, что наиболее общая комплексная группа Ли является полупрямым произведением комплексного тора и **линейной подгруппы** (т. е. максимальной подгруппой, допускающей матричную реализацию).

2. Алгебры Ли

2.1. Определение и мотивировка. В математике большей частью возникают ассоциативные алгебры. Однако часто рассматриваются и неассоциативные алгебры специального вида — алгебры Ли. Хотя название указывает на их происхождение из теории групп Ли, в настоящее время они живут своей собственной жизнью и имеют свою собственную теорию и своих специалистов.

Определение 2. **Алгеброй Ли** над полем K называется K-векторное пространство $\mathfrak{g}$ с билинейной операцией $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, обычно обозначаемой квадратными скобками [,], которая обладает следующими свойствами:

(i) *антисимметричность*[7]: $[x,y]=-[y,x]$ для всех $x,y\in\mathfrak{g}$,

(ii) *тождество Якоби*: $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0\ \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

Определение алгебры Ли выглядит довольно громоздким и сложным. Однако в действительности оно вполне обосновано. Основная причина введения этого понятия и его смысл будут объясняться в п. 2.2. Мы покажем, что понятие алгебры Ли столь же естественно, как и понятие ассоциативной коммутативной алгебры.

Предложение 5. *Пусть A — вещественная алгебра с невырожденной операцией умножения $*$ в следующем смысле: произведение четырех элементов не равно тождественно нулю. Предположим, что в A выполняются нетривиальные билинейное и трилинейное тождества:*

$$\alpha\cdot a*b+\beta\cdot b*a\equiv 0,\qquad \lambda\cdot a*(b*c)+\mu\cdot b*(c*a)+\nu\cdot c*(a*b)\equiv 0,$$

[7]Для поля характеристики 2 это условие следует заменить более сильным условием $[x,x]=0$ для всех $x\in\mathfrak{g}$.

где α, β, λ, μ, ν — фиксированные вещественные числа, а a, b, c — произвольные элементы алгебры A. Тогда A — либо ассоциативная коммутативная алгебра, либо алгебра Ли.

Доказательство. Меняя a и b местами в первом соотношении, получаем систему линейных уравнений

$$\alpha \cdot a * b + \beta \cdot b * a \equiv 0,$$
$$\beta \cdot a * b + \alpha \cdot b * a \equiv 0.$$

Поскольку умножение невырожденное, определитель системы должен обращаться в нуль. Тогда $\alpha = \pm\beta$. Поэтому умножение либо коммутативно, либо антикоммутативно.

Для второго тождества рассуждения аналогичны. Именно, рассмотрим систему

$$\lambda \cdot a * (b * c) + \mu \cdot b * (c * a) + \nu \cdot c * (a * b) = 0,$$
$$\nu \cdot a * (b * c) + \lambda \cdot b * (c * a) + \mu \cdot c * (a * b) = 0,$$
$$\mu \cdot a * (b * c) + \nu \cdot b * (c * a) + \lambda \cdot c * (a * b) = 0.$$

Определитель имеет вид $\lambda^3 + \mu^3 + \nu^3 - 3\lambda\mu\nu = (\lambda + \mu + \nu)(\lambda + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\nu)(\lambda + \varepsilon^2\mu + \varepsilon\nu)$, где $\varepsilon = e^{(2\pi i)/3}$ — кубический корень единицы. Так как $a * b * c$ не равно нулю тождественно, определитель должен обращаться в нуль. Заметим, что два последних множителя детерминанта комплексно сопряженные. Поэтому мы приходим к альтернативе: либо $\lambda = \mu = \nu$, либо второе соотношение выполняется для любых λ, μ, ν с нулевой суммой.[8]

В коммутативном случае первая возможность означает, что $a*b*c \equiv 0$, тогда как вторая приводит к ассоциативному закону.

В антикоммутативном случае первая возможность приводит к тождеству Якоби, а вторая означает, что тройное произведение $a * (b * c)$ вполне антисимметрично и четверное произведение $a * (b * (c * d))$ тождественно равно нулю. □

Приведем другую интерпретацию тождества Якоби. Для $X \in \mathfrak{g}$ рассмотрим линейный оператор $\operatorname{ad} X : Y \mapsto [X, Y]$ в $\mathfrak{g}$. Легко проверить, что тождество Якоби можно переписать в виде

$$\operatorname{ad}[X, Y] = \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y - \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X. \tag{12}$$

Как мы увидим в п. 2.2, это тождество означает, что отображение $X \mapsto \operatorname{ad} X$ есть линейное представление $\mathfrak{g}$ (т. е. гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\operatorname{End} \mathfrak{g}$).

Закончим этот пункт примером, который хронологически был первым примером алгебры Ли.

Пример 8. Рассмотрим трехмерное евклидово векторное пространство $\mathbb{R}^3$ с ортонормальным базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, снабженное так называемым **вектор-**

---

[8]Это связано со следующим фактом теории представлений: при действии группы перестановок S_3 пространство $\mathbb{R}^3$ распадается на два неприводимых подпространства: одномерное пространство $L_1 = \{(x, x, x)\}$ и двумерное пространство $L_2 = L_1^{\perp}$.

ным умножением (см. п. 1.2):

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \det\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 9. (a) Проверить, что операция векторного умножения удовлетворяет всем аксиомам алгебр Ли.

(b)* Показать, что из тождества Якоби вытекает следующий хорошо известный факт евклидовой геометрии: для любого треугольника ABC все три высоты пересекаются в одной точке.[9]

Указание. Выразить точки и прямые на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ в однородных координатах на $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: точка $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ соответствует $(1:x:y)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, прямая $ax+by+c=0$ — $(c:a:b)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Заметим, что точка $l_\infty=(1:0:0)$ не соответствует никакой прямой в $\mathbb{R}^2$; она соотносится с "бесконечной прямой" $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\backslash\mathbb{R}^2$. Решение (b) следует из следующих утверждений:

(i) точка $x=(x_0:x_1:x_2)$ лежит на прямой $a=(a_0:a_1:a_2)$ тогда и только тогда, когда $(a,x):=\sum\limits_{i=1}^{3}a_ix_i=0$,

(ii) прямая a, проходящая через точки x и y, определяется равенством $a=x\times y$,

(iii) точка пересечения x двух прямых a и b определяется равенством $x=a\times b$,

(iv) прямая p, проходящая через точку x и перпендикулярная прямой a, определяется равенством $p=x\times\widetilde{a}$, где $\widetilde{a}=a-l_\infty\cdot\dfrac{(a,l_\infty)}{(l_\infty,l_\infty)}$,

(v) три прямые a, b, c пересекаются тогда и только тогда, когда **смешанное произведение**

$$(a,b,c):=(a\times b,c)=\det\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

обращается в нуль (иначе говоря, векторы a, b, c линейно зависимы),

(vi) $\circlearrowleft_{x,y,z}(x,y,a)(z,b,c)=(x,y,z)(a,b,c)$, где знак $\circlearrowleft_{x,y,z}$ означает, что сумма берется по циклическим перестановкам трех векторов x, y, z.

2.2. Источники алгебр Ли. Основным источником вещественных алгебр Ли служит теория групп Ли (см. п. 4). Однако можно назвать по крайней мере еще два источника чисто алгебраического характера.

Лемма 2. (a) *Пусть A — произвольная (не обязательно ассоциативная) алгебра и* $\operatorname{Der}A$ *— пространство всех дифференцирований A, т. е. линей-*

[9]Этот факт упоминается в недавно вышедшей статье [A], которая представляет также самостоятельный интерес. Следует заметить, что приведенное ниже доказательство выглядит проще в случае сферической геометрии: прямая, проходящая через точку x перпендикулярно прямой a определяется выражением $x\times a$ (см. (iv) ниже).

ных операторов $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, удовлетворяющих правилу Лейбница

$$D(ab) = D(a)b + aD(b). \tag{13}$$

Тогда $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ *— алгебра Ли относительно коммутатора*

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1. \tag{14}$$

(b) *Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра. Введем новую операцию (коммутатор) в $\mathcal{A}$ по формуле*

$$[a, b] = ab - ba. \tag{15}$$

Тогда пространство $\mathcal{A}$ с этой операцией является алгеброй Ли.

Для доказательства надо просто проверить справедливость тождества Якоби. В обоих случаях вычисления одинаковы.

Более концептуальное доказательство можно получить на основе того, что алгебры Ли из леммы 2 связаны с группами Ли, которые иногда бесконечномерны.

Два частных случая заслуживают более подробного обсуждения.

1. Пусть M — гладкое многообразие. Положим $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$ в лемме 2 (a). Как было показано в лекции 1, дифференцирования $\mathcal{A}(M)$ соответствуют векторным полям на M. Таким образом, мы получаем структуру алгебры Ли на бесконечномерном пространстве $\operatorname{Vect} M$. Коммутатор в этом случае называют **скобкой Ли** векторных полей. В терминах локальных координат эта операция записывается в виде

$$[v, w]^i = v^j \partial_j w^i - w^j \partial_j v^i.$$

Один из самых главных результатов изначальной теории Софуса Ли может быть сформулирован на современном языке следующим образом.

Теорема Софуса Ли. *Любая n-мерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть реализована как подалгебра* $\operatorname{Vect} M$ *для некоторого многообразия M размерности n.*

Таким образом, приведенный пример универсален.

2. Положим $\mathcal{A} = \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ в лемме 2 (b). Полученная алгебра Ли обозначается через $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Как векторное пространство оно совпадает с $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, но в качестве основной операции берется коммутатор (15), а не матричное умножение в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$. Этот пример также универсален в следующем смысле.

Теорема Адо. *Любая конечномерная вещественная алгебра Ли изоморфна подалгебре $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ для подходящего n.*

Прежде, чем двигаться дальше, введем некоторые термины.

Множество всех алгебр Ли над данным полем K образует **категорию** $\mathcal{LA}(K)$, где морфизмы — это **гомоморфизмы алгебр Ли**, т. е. линейные отображения, сохраняющие скобки:

$$[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]). \tag{16}$$

Гомоморфизмы из вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (соответственно $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$) называются также вещественными (соответственно комплексными) **линейными представлениями** алгебры $\mathfrak{g}$ (ср. (12)).

Конечно, можно отождествить $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) с любым вещественным (соответственно комплексным) векторным пространством V. В этом случае будем использовать обозначение $\mathfrak{gl}(V)$ и говорить о представлениях $\mathfrak{g}$ в пространстве V, которое называется **пространством представления** или **$\mathfrak{g}$-модулем**.

Множество всех $\mathfrak{g}$-модулей образует категорию $\mathfrak{g}$-Mod, морфизмы которой суть линейные отображения, коммутирующие с $\mathfrak{g}$-действием. Они называются **сплетающими операторами**.

В этой книге мы будем рассматривать не только конечномерные, но также и бесконечномерные представления алгебр Ли.

2.3. Матричные алгебры Ли. Приведем комплексный аналог теоремы Адо.

Теорема 5. (a) *Любая конечномерная комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна подалгебре $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ при некотором n.*

(b) *Матричная реализация $\mathfrak{g}$ может быть выбрана так, что образ максимального разрешимого идеала*[10] $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{g}$ *содержится в подалгебре верхних треугольных матриц.*

Опираясь на эту теорему, часто удается доказать общие результаты об алгебрах Ли, используя теорию матриц.

Для алгебр Ли с тривиальным центром теорема Адо вытекает из существования так называемого **присоединенного представления** $X\mapsto \operatorname{ad} X$ (см. (12); очевидно, что ядро этого представления совпадает с центром $\mathfrak{g}$). Для общих алгебр Ли доказательство намного сложнее и не так широко используется в практике, поэтому мы опускаем его. Тем не менее матричное представление конкретной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может оказаться полезным при изучении алгебраической структуры $\mathfrak{g}$ и построении соответствующей группы Ли. Для получения практических навыков читателю рекомендуется выполнить следующее

?	Упражнение 10. Найти матричные реализации алгебр Ли, заданных коммутационными соотношениями

(a) $[X,Y]=Y$,

(b) $[X,Y_1]=\alpha Y_1+\beta Y_2$, $[X,Y_2]=\gamma Y_1+\delta Y_2$, $[Y_1,Y_2]=0$,

(c) $[X_i,X_j]=\varepsilon_{ijk}X_k$, $i,j,k=1,2,3$, где[11]

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0, & \text{если некоторые из } i,\ j,\ k \text{ равны},\\ 1, & \text{если } i,\ j,\ k \text{ образуют четную перестановку } 1,\ 2,\ 3,\\ -1, & \text{если } i,\ j,\ k \text{ образуют нечетную перестановку } 1,\ 2,\ 3,\end{cases}$$

(d) $$[X_i,X_j]=\begin{cases}(j-i)X_{i+j}, & |i+j|\leqslant 1,\\ 0 & \text{в остальных случаях},\end{cases}\qquad i,j\in\{0,\pm1\},$$

[10]Определение разрешимых идеалов дано в п. 2.5.

[11]Здесь мы отступаем от общего правила и используем суммирование по повторяющемуся нижнему индексу. Возможность так поступать объясняется наличием инвариантного скалярного произведения на этой алгебре Ли.

(e) $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$.

Ответ. (a) $aX + bY \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $aX + b^iY_i \mapsto \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b^1 \\ a\gamma & a\delta & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $a^iX_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ -a^1 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$, (d) $a^iX_i \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a^0 & a^1 \\ -a^{-1} & -\frac{1}{2}a^0 \end{pmatrix}$,

(e) $a^iX_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a^1 & a^3 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Имеются и другие реализации, но мы выбрали наиболее простые.)

2.4. Структурные константы и многообразие A_n. В этом разделе мы рассмотрим совокупность всех алгебр Ли с точностью до изоморфизма.

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли конечной размерности n. Выберем базис $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ в $\mathfrak{g}$ и запишем коммутатор двух произвольных базисных векторов как линейную комбинацию базисных векторов

$$[X_i, X_j] = c_{i,j}^k X_k \tag{17}$$

(здесь применяется правило суммирования по повторяющемуся индексу k). Мы получаем совокупность $c_{i,j}^k$ из n^3 вещественных чисел, которые называются **структурными константами** алгебры $\mathfrak{g}$ (относительно данного базиса).

Ввиду антисимметричности коммутатора и тождества Якоби структурные константы должны удовлетворять n^3 линейным и n^4 квадратным уравнениям:

$$\begin{aligned} &c_{i,j}^k = -c_{j,i}^k \quad \text{для всех } i, j, k, \\ &c_{i,j}^s c_{s,k}^l + c_{j,k}^s c_{s,i}^l + c_{k,i}^s c_{s,j}^l = 0 \quad \text{для всех } i, j, k, l. \end{aligned} \tag{18}$$

При замене базиса структурные константы изменяются согласно стандартному действию $GL(n, \mathbb{R})$ на тензорах типа (2,1).

Таким образом, для описания всех вещественных алгебр Ли размерности n с точностью до изоморфизма надо изучить алгебраическое многообразие A_n, определяемое системой (17), а затем разбить множество $A_n(\mathbb{R})$ вещественных точек на $GL(n, \mathbb{R})$-орбиты.

Используя первую (линейную) часть в (18), можно упростить систему и свести ее к системе $\dfrac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$ квадратных уравнений с $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$ неизвестными. Однако при больших n полное описание всех решений весьма затруднительно. Полная классификация алгебр Ли получена к настоящему времени только для $n \leqslant 8$ (на основе совершенного иного подхода).

С другой стороны, нетрудно решить систему (18) при малых n и затем описать все алгебры Ли малых размерностей. Мы рассмотрим случай $n \leqslant 3$.

Упражнение 11. Показать, что

(a) существует только одна одномерная вещественная алгебра Ли: вещественная прямая $\mathbb{R}$ с нулевым коммутатором.

(b) существуют в точности две различные двумерные алгебры Ли: $\mathbb{R}^2$ с нулевым коммутатором и алгебра Ли из упражнения 10 (a).

Указание. При $n \leqslant 2$ квадратные уравнения выполняются автоматически.

Рассмотрим теперь трехмерные вещественные алгебры Ли. С технической точки зрения удобно исключить абелеву алгебру Ли $\mathbb{R}^3$ и рассматривать структурные константы c_{ij}^k, $i < j$, как однородные координаты в $\mathbb{P}^8(\mathbb{R})$. Тогда мы получаем проективное алгебраическое многообразие $P(A_3) \subset \mathbb{P}^8$ и действие проективной линейной группы $PGL(3)$ на нем.

При $n = 3$ система (18) допускает простой геометрический подход. Заменим тензор c_{ij}^k типа (2,1) тензорной плотностью $b^{kl} := c_{ij}^k \varepsilon^{ijl}$, где ε^{ijl} — стандартный тензор ранга 3 в $\mathbb{R}^3$ (сопряженный тензор ε_{ijk} определен в упражнении 10 (c)). Тогда b^{kl} распадается на симметрическую и антисимметрическую части $b^{kl} = s^{kl} + a^{kl}$, $s^{kl} = s^{lk}$, $a^{kl} = -a^{lk}$, которые преобразуются независимо под действием $GL(n, \mathbb{R})$. Заменим антисимметрический тензор a^{kl} ковектором $v_i := a^{kl}\varepsilon_{ikl}$. Используя тождества $\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{jkl} = 2\delta_k^l$ и $\varepsilon_{ijs}\varepsilon^{skl} = \delta_i^k\delta_j^l - \delta_i^l\delta_j^k$, можно восстановить исходный тензор c_{ij}^k из s^{kl} и v_i по формулам

$$c_{ij}^k = \frac{1}{2}s^{kl}\varepsilon_{ijl} + \frac{1}{4}(\delta_j^k v_i - \delta_i^k v_j).$$

Система (18) в новых обозначениях принимает простой вид

$$s^{kl}v_l = 0. \tag{18'}$$

Из (18′) видно, что алгебраическое многообразие A_3 распадается на две неприводимые компоненты:

— линейная компонента, определенная условием $v = 0$ (в исходных обозначениях $c_{ik}^k = 0$),

— нелинейная компонента, определенная условием $\{\det s = 0, v \in \ker s\}$.

Обе компоненты 5-мерны, и их пересечение имеет размерность 4.

Действие $g \in GL(3, \mathbb{R})$ на $A_3(\mathbb{R})$ записывается в новых координатах (v, s) следующим образом: $v \mapsto v(g^t)^{-1}$, $s \mapsto gsg^t \cdot \det g^{-1}$. Другими словами, v преобразуется как ковектор (вектор-строка) и s — как произведение квадратичной формы на $(\mathbb{R}^3)^*$ и формы объема на $\mathbb{R}^3$. Используя стандартные факты линейной алгебры, мы приходим к следующему заключению.

Первая компонента состоит из квадратичных форм $s = s^{ij}$ на $\mathbb{R}^3$, на которые группа $GL(3, \mathbb{R})$ действует согласно второй части (11). Единственным инвариантом этого действия является сигнатура (n_+, n_0, n_-),[12] рассматриваемая с точностью до эквивалентности $(a, b, c) \sim (c, b, a)$.

Таким образом, мы получаем следующий список:

[12]Здесь числа n_+, n_0, n_- означают соответственно количество положительных, нулевых и отрицательных коэффициентов в каноническом виде $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$.

алгебра Ли	сигнатура	размерность орбиты
$su(2) \cong so(3)$	$(3,0,0) \sim (0,0,3)$	6
$ssl(2) \cong so(2,1)$	$(2,0,1) \sim (1,0,2)$	6
$so(2) \ltimes \mathbb{R}^2$	$(2,1,0) \sim (0,1,2)$	5
$so(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$	$(1,1,1)$	5
алгебра Гейзенберга $\mathfrak{h}$	$(1,2,0) \sim (0,2,1)$	4
тривиальная алгебра Ли $\mathbb{R}^3$	$(0,3,0)$	0

Мы видим, что первая компонента $L_3(\mathbb{R})$ состоит из 6 точек, две из которых открыты. Они соответствуют жестким алгебрам Ли $su(2) \cong so(3)$ и $ssl(2) \cong so(1,1)$.

Рассмотрим теперь алгебры Ли, входящие во вторую компоненту. В этом случае существует ненулевой вектор $v = \{v_m\}$ такой, что $s^{km}v_m = 0$. Кроме того, $a^{km}v_m = \frac{1}{2}\varepsilon^{kmp}v_pv_m = 0$. Поэтому $b^{km}v_m = 0$ и $c^k_{ij}v_k = 0$.

Это значит, что $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset v^{\perp}$. Таким образом, наши алгебры Ли содержат двумерный идеал. Оказывается, что все эти алгебры Ли имеют вид $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$. В подходящем базисе коммутационные соотношения выглядят так:

$$[X,Y] = \alpha Y + \beta Z, \quad [X,Z] = \gamma Y + \delta Z, \quad [X,Y] = 0.$$

Матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $A' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ определяют изоморфные алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ тогда и только тогда, когда

$$A' = c \cdot BAB^{-1} \quad \text{для некоторых} \quad c \neq 0, \quad B \in GL(2,\mathbb{R}). \tag{$*$}$$

Пусть λ и μ — собственные значения A. Тогда A' имеет собственные значения $(c\lambda, c\mu)$. Кроме того, мы не различаем (λ,μ) и (μ,λ). Таким образом, величина

$$f(A) = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{\det A}$$

является простейшим инвариантом преобразования ($*$). Это рациональная функция матричных коэффициентов α, β, γ, δ, которая корректно определена, когда $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ (т. е. вне множества $\operatorname{tr} A = \det A = 0$).

Чтобы выразить $f(A)$ через структурные константы, рассмотрим билинейные формы s и a, определенные тензорами a^{kl} и s^{kl} на $\mathfrak{g}$. В общей точке они имеют одномерное ядро, порожденное вектором v. Формы, индуцированные на фактор-пространстве $\mathfrak{g}/\mathbb{R}v$, не вырождены и отношение их дискриминантов равно

$$r(A) = -\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right)^2 = \frac{2+f(A)}{2-f(A)}.$$

Поскольку вторая компонента допускает нетривиальную $GL(3,\mathbb{R})$-инвариантную рациональную функцию $f(A)$, она распадается на 1-параметрическое семейство 5-мерных множеств уровня $f(A) = c$ и особое 4-мерное множество $\lambda = \mu = 0$, где $f(A)$ не определена. Большинство множеств уровня являются отдельными $GL(3,\mathbb{R})$-орбитами. Уровни $f(A) = \pm 2$ и особое множество распадаются на две орбиты.

Мы соберем полученную информацию в таблицу

значение $c = f(A)$	число орбит	собственные значения X
$-\infty < c < -2$	1	вещественные, разных знаков
$c = -2$	2	$\lambda = -\mu \neq 0$, вещественные или чисто мнимые
$-2 < c < 2$	1	комплексно сопряженные
$c = 2$	2	вещественные, равные, ненулевые
$c > 2$	1	вещественные, разные, одного знака
$c = \infty$	1	одно нулевое собственное значение
не определена	2	два нулевых собственных значения

Заметим, что пересечение двух компонент непусто. Оно содержит уровень $f(A) = -2$ и особое множество. Мы видим, что алгебра Гейзенберга действительно расположена в самом центре $L_3(\mathbb{R})$.

Окончательная структура $A_3(\mathbb{R})/GL(3,\mathbb{R})$ показана на рис. 1 (Этот рисунок предложен В. Дергачевым. Другой, более художественный образ придумала Наташа Рожковская — см. обложку.)

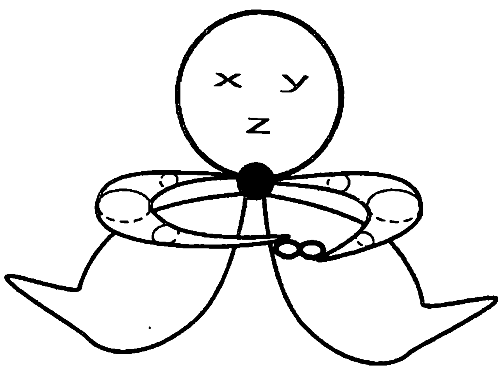

Рис. 1

В заключение рассмотрим поведение A_n при больших n. Известно, что $\dim A_n$ асимптотически равна $\frac{2}{27}n^3$. Число неприводимых компонент A_n также растет довольно быстро (по меньшей мере, как число $p(n)$ разбиений n, которое асимптотически равно $\exp\{\sqrt{(2n)/3}\}$).

Любая $GL(n)$-орбита в A_n представляет класс изоморфизма n-мерных алгебр Ли. Как однородное пространство, она имеет вид $GL(n)/\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, где $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ заданного класса.

Если орбита O открыта в A_n, мы говорим, что соответствующая алгебра Ли **жесткая**. Это означает, что при малых возмущениях структурных констант мы получаем изоморфную алгебру Ли. Например, алгебры Ли из упражнения 10 (a), (c) и (d) жесткие.

Если орбита O имеет непустую границу, то эта граница есть объединение меньших орбит. Алгебра Ли, соответствующая этим орбитам, называется **сжатием** исходной алгебры Ли. В частности, абелева алгебра Ли $\mathbb{R}^n$ является сжатием любой n-мерной алгебры Ли.

Укажем менее тривиальный пример: алгебра Ли из упражнения 10 (e), которая, фактически, является частным случаем упражнения 10 (b), есть сжатие алгебр Ли из упражнения 10 (c) и (d).

2.5. Типы алгебр Ли. Прямое исследование системы (18) непросто даже при $n = 4, 5$. Например, как известно [KiN], $\mathcal{A}_4$ состоит из четырех компонент размерности 12, а $\mathcal{A}_5$ — из пяти компонент размерности 20, одной компоненты размерности 21 и одной компоненты размерности 19. Однако есть иной подход к проблеме классификации алгебр Ли, основанный на изучении их внутренней структуры. Для удобства читателя мы напомним некоторые определения.

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется **расширением** алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ с помощью алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$, если существует **точная последовательность**

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{g} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{g}_1 \longrightarrow 0, \tag{19}$$

где все отображения — это гомоморфизмы алгебр Ли и точность означает, что образ каждой стрелки совпадает с ядром следующей стрелки. Иначе говоря, (19) означает, что $\mathfrak{g}$ содержит идеал, изоморфный $\mathfrak{g}_2$, и фактор-алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_2$ изоморфна $\mathfrak{g}_1$.

Расширение называется **центральным**, если $\mathfrak{g}_2$ содержится в центре $\mathfrak{g}$, и **тривиальным**, если отображение β в (19) допускает сечение, т. е. существует гомоморфизм $\gamma : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}$ такой, что $\beta\circ\gamma = \mathrm{Id}$. В этом случае будем говорить, что $\mathfrak{g}$ — **полупрямое произведение** $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, и использовать обозначение $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$.

Теперь можно определить несколько важных типов алгебр Ли.

- **Коммутативные** или **абелевы** алгебры Ли — это алгебры с нулевым коммутатором.
- Класс **разрешимых** алгебр Ли — минимальная совокупность алгебр Ли, которая содержит все абелевы алгебры Ли и замкнута относительно расширений.
- Класс **нильпотентных** алгебр Ли — минимальная совокупность алгебр Ли, которая содержит все абелевы алгебры Ли и замкнута относительно центральных расширений.

• Класс **полупростых** алгебр Ли — минимальная совокупность алгебр Ли, которая содержит все неабелевы простые [13] алгебр Ли и замкнута относительно расширений.

Для полноты изложения сформулируем несколько утверждений из теории вещественных алгебр Ли.

Теорема Леви. *Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет единственный максимальный разрешимый идеал $\mathfrak{r}$. Соответствующая фактор-алгебра Ли $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста и $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$.*

Теорема Картана. *Любая полупростая алгебра Ли (изоморфна) прямой сумме неабелевых простых алгебр Ли.*

Итак, классификация всех алгебр Ли сводится к трем проблемам:

Проблема A. Описать все простые алгебры Ли.

Проблема B. Описать все разрешимые алгебры Ли.

Проблема C. Описать все полупростые произведения $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_1$ полупроста и $\mathfrak{g}_2$ разрешима.

В настоящее время только проблема A полностью решена (см. п. 3.2.), тогда как проблемы B и C считаются безнадежными.

2.6. Комплексные алгебры Ли и их вещественные формы. Для любой вещественной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ определим ее **комплексификацию** $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}), [\cdot,\cdot]_{\mathbb{C}})$ как комплексное векторное пространство $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ с билинейной операцией $[\cdot,\cdot]_{\mathbb{C}}$, продолженной из $[\cdot,\cdot]$ по комплексной линейности. Проще говоря, переход от $\mathfrak{g}$ к $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ означает, что структурные константы сохраняются, но допускаются комплексные линейные комбинации базисных векторов.

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли. Мы говорим, что вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ является **вещественной формой** $\mathfrak{g}$, если $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ как комплексная алгебра Ли.

Замечание 1. Заданная комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может вообще не иметь вещественной формы или иметь несколько разных вещественных форм (неизоморфных как вещественные алгебры Ли).

Пусть $O \subset A_n(\mathbb{C})$ — $GL(n,\mathbb{C})$-орбита, соответствующая $\mathfrak{g}$ (см. 2.4). Существование вещественной формы означает, что O имеет непустое пересечение с $A_n(\mathbb{R})$. (Иначе говоря, при подходящем выборе базиса все структурные константы вещественные.) Согласно общей теории вещественных алгебраических групп $O \bigcap A_n(\mathbb{R})$ распадается на конечное число $GL(n,\mathbb{R})$-орбит. Это означает, что для любой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует конечное число вещественных форм (с точностью до изоморфизма).

Пример 9. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ — трехмерная комплексная алгебра Ли 2×2-матриц с нулевым следом. Эта алгебра имеет два замечательных базиса с вещественными структурными константами:

Первый канонический базис:

---

[13]Алгебра Ли называется **простой**, если она не имеет собственных идеалов, т. е. отличных от $\{0\}$ и всей алгебры.

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

с коммутационными соотношениями $[X,Y] = Z$, $[Y,Z] = X$, $[Z,X] = Y$.

Второй канонический базис:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

с коммутационными соотношениями $[E,F] = H$, $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$.

Мы видим, что $\mathfrak{g}$ имеет две различные вещественные формы, одна из которых изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а другая — $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Других вещественных форм в этом случае не существует.

2.7*. Супералгебры Ли. Обе конструкции алгебр Ли из леммы 2 имеют естественные супераналоги. Для определения их надо предположить, что $\mathcal{A}$ является $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй, рассмотреть градуированные дифференцирования и подкорректировать определение коммутатора согласно общему правилу знаков. (см. лекцию 1, п. 3.1). Тогда уравнения (12), (13), (14), (15) принимают вид

$$\operatorname{ad}[X,Y] = \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y - (-1)^{\deg X \cdot \deg Y} \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} X, \tag{12'}$$

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{\deg D \cdot \deg a} a D(b), \tag{13'}$$

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - (-1)^{\deg D_1 \cdot \deg D_2} D_2 D_1, \tag{14'}$$

$$[a,b] = ab - (-1)^{\deg a \cdot \deg b} ba. \tag{15'}$$

Возникает новый объект — так называемая супералгебра Ли. Многие алгебры Ли можно рассматривать как четные части супералгебр. Такой подход очень полезен в теории представлений и приложениях.

Для читателей, не желающих перегружать себя супертерминологией, ниже дается описание супералгебр Ли в терминах обыкновенных алгебр Ли и их модулей. Итак, **супералгебра Ли** — это совокупность

(a) обыкновенной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$,

(b) $\mathfrak{g}_0$-модуля $\mathfrak{g}_1$,

(c) симметрического спаривания $[\cdot,\cdot]$ $\mathfrak{g}_0$-модулей: $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$.

При этом должно выполняться условие

$$X^3 := [X,X] \cdot X = 0 \quad \text{для любого } X \in \mathfrak{g}_1. \tag{20}$$

На самом деле составляющие (a)–(c) и условие (20) соответствуют четырем различным вариантам супертождества Якоби, которое может включать 0, 1, 2 или 3 нечетных элемента.

Пример 10. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{2n}$. Действием $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{g}_1$ является обычное умножение матрицы на вектор-столбец. В качестве спаривания берется отображение $[x,y] = (xy^t + yx^t)J_{2n}$. Условие (20) выполняется, так как $[x,x]x = 2xx^tJ_2x = 0$. Эта супералгебра Ли, обозначаемая $\mathfrak{osp}(1|2n,\mathbb{R})$, является простейшей супералгеброй из серии $\mathfrak{osp}(k|2n,\mathbb{R})$, четная часть которой есть произведение $\mathfrak{so}(k,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$.

3. Полупростые алгебры Ли

Класс полупростых алгебр Ли наиболее интересен для многих приложений и наиболее основательно изучен. Он связан с замечательным геометрическим объектом — системой корней. Мы рассмотрим здесь лишь основные понятия, необходимые для понимания главных идей. Тем не менее, читатель сможет не только получить некоторое впечатление об этой теории, но и применять основные ее результаты в своей работе. Доказательства и более подробные сведения можно найти, например, в [B].

3.1. Комплексные полупростые алгебры Ли. Начнем с формулировки основных фактов и главных структурных теорем для полупростых алгебр Ли. В следующем разделе мы проиллюстрируем введенные понятия примерами.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли.*

(a) *существует так называемое* **каноническое разложение** *$\mathfrak{g}$ в прямую сумму трех подпространств (подалгебр, но не идеалов $\mathfrak{g}$):*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \tag{21}$$

такое, что для любого конечномерного представления (π, V) алгебры $\mathfrak{g}$ после соответствующего выбора базиса в V элементы этих подпространств переходят соответственно в нижние треугольные, диагональные и верхние треугольные матрицы в $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}), m = \dim V$.

(b) *Разложение* (21) *единственно с точностью до изоморфизма $\mathfrak{g}$.*

(c) *Подалгебра $\mathfrak{h}$, называемая* **подалгеброй Картана**, *характеризуется следующим свойством: это максимальная абелева подалгебра, состоящая из* ad*-полупростых элементов.*[14]

В частности, из предложения 6, примененного к сопряженному представлению $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$, получаем, что $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} \mathfrak{g}_\alpha$, где A — конечное подмножество $\mathfrak{h}^*$ и $\mathfrak{g}_\alpha$ состоит из элементов $X \in \mathfrak{g}$ таких, что

$$[H, X] = \alpha(H) \cdot X \quad \text{для всех } H \in \mathfrak{h}. \tag{22}$$

Очевидно, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, так как $\mathfrak{h}$ — максимальная абелева подалгебра.

Множество ненулевых элементов A называется **системой корней**, соответствующей паре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, и обычно обозначается R. Элементы $\alpha \in R$ называются **корнями**.

? Упражнение 12. Показать, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ для $\alpha + \beta \in R$,[15] $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$ для $0 \neq \alpha + \beta \notin R$ и $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Указание. Использовать соотношение (26) и тождество Якоби.

Разложение (21) определяет дополнительную структуру на системе корней: разбиение R на два непересекающихся подмножества R_+ и $R_- =$

---

[14] Элемент X называется **ad-полупростым**, если оператор $\mathrm{ad}\, X$ можно представить в подходящем базисе в виде диагональной матрицы.

[15] На самом деле в этом случае справедливо более сильное утверждение: $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

$-R_+$, определяемые соотношениями

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_\alpha, \qquad \mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Корни из R_+ (R_-) называются **положительными** (**отрицательными**).

Обозначим через r размерность $\mathfrak{n}_\pm$ (т. е. мощность $R_\pm$) и через $l = \operatorname{rk}\mathfrak{g}$ — размерность $\mathfrak{h}$. Эти числа связаны равенством $2r + l = \dim \mathfrak{g}$.

Корень $\alpha \in R_+$ называется **разложимым**, если он может быть записан в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где оба слагаемых принадлежат R_+. В ином случае α называется **простым корнем**. Очевидно, что любой положительный корень есть линейная комбинация простых корней с неотрицательными целыми коэффициентами.

Ниже мы покажем, что простые корни линейно независимы. Таким образом, существует ровно $l = \operatorname{rk} G$ простых корней, обозначаемых $\alpha_1, \dots, \alpha_l$.

Обозначим через Π множество простых корней и введем так называемую **корневую решетку** $Q = \mathbb{Z} \cdot \alpha_1 + \dots + \mathbb{Z} \cdot \alpha_l$.

Предложение 7. (a) *Для любого точного линейного представления (π, V) полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ билинейная форма $(X, Y)_\pi := \operatorname{tr}(\pi(X)\pi(Y))$ невырождена и* Ad*-инвариантна на $\mathfrak{g}$.*

(b) *Пусть $(\cdot, \cdot)$ — произвольная невырожденная* Ad*-инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}^*$. Тогда величины*

$$A_{\alpha,\beta} := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \tag{23}$$

целые и не зависят от выбора Ad*-инвариантной формы на $\mathfrak{g}^*$.*

С этого момента мы фиксируем Ad-инвариантную форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}^*$, двойственную форме $(X, Y)_{\mathrm{ad}}$ на $\mathfrak{g}$.

Матрица $A \in \operatorname{Mat}_l(\mathbb{Z})$ с элементами $A_{i,j} = \dfrac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ называется **матрицей Картана** для $(\mathfrak{g}, \Pi)$. Оказывается, что эта матрица не зависит от выбора разложения (21) (и, следовательно, от выбора Π) и содержит всю информацию об исходной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Удобно представить информацию, закодированную в A, графическим способом. Рассмотрим граф Дынкина Γ_A, вершины которого отмечены простыми корнями или просто числами $1, 2, \dots, l$. Две различные вершины i и j соединяются $n_{i,j} = A_{i,j} \cdot A_{j,i}$ ребрами. Если $A_{i,j} > A_{j,i}$, то мы добавим стрелку, направленную из i в j. Ввиду следующих свойств матрицу Картана A можно восстановить по графу Γ_A.

Предложение 8. (a) *Все диагональные элементы A равны 2.*

(b) *Внедиагональные элементы A неположительны и удовлетворяют следующему условию: $A_{i,j} = 0$ тогда и только тогда, когда $A_{j,i} = 0$.*

(c) *Все главные миноры A положительны. В частности, $n_{i,j} = A_{i,j} \cdot A_{j,i}$ может принимать только четыре значения: 0, 1, 2 и 3.*

Заметим, что линейная независимость простых корней следует из предложения 8.

Перечислим все 2×2-матрицы Картана и соответствующие графы:

$$A: \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_A :$ 

Определим элементы $H_i \in \mathfrak{h}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, такие, что

$$\alpha_j(H_i) = A_{i,j} \quad \text{для всех } j = 1, \ldots, l. \tag{24}$$

Предложение 9. (a) *Для любого $\alpha \in R$ подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерно и, следовательно, порождается одним элементом X_α, который называется* **корневым вектором**.

(b) *Корневые векторы X_α можно нормализовать так, что будут выполняться следующие коммутационные соотношения:*

(i) $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha$ *для* $H \in \mathfrak{h}$,

$$\text{(ii)} \quad [X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}, & 0 \neq \alpha + \beta \in R, \\ 0, & 0 \neq \alpha + \beta \notin R, \\ H_\alpha, & \alpha + \beta = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $N_{\alpha,\beta}$ — ненулевые целые числа, удовлетворяющие условиям $N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\alpha}$.

Приведем несколько важных следствий этого предложения.

Следствие 1. *Для любого корня α элементы $(X_\alpha, X_{-\alpha}, H_\alpha)$ порождают подалгебру $\mathfrak{g}_\alpha$, которая канонически изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с базисом (E, F, H) (второй канонический базис из примера 9).*

Следствие 2. *Вещественная оболочка элементов X_α, $X_{-\alpha}$, H_α для всех $\alpha \in R$ является вещественной формой $\mathfrak{g}$.*

Вещественная форма в следствии 2 называется **нормальной** или **расщепимой** и обозначается $\mathfrak{g}_n$.

Следствие 3. *Вещественная оболочка элементов*

$$\frac{X_\alpha - X_{-\alpha}}{2}, \quad \frac{iH_\alpha}{2}, \quad \frac{X_\alpha + X_{-\alpha}}{2i}$$

для всех $\alpha \in R$ является вещественной формой $\mathfrak{g}$. Она называется **компактной** *вещественной формой и обозначается $\mathfrak{g}_c$.*

Неформально говоря, эти следствия утверждают, что любая комплексная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ "построена" в некотором смысле из r копий $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, тогда как ее нормальная (компактная) вещественная форма построена из r копий $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ($\mathfrak{su}(2)$). Поэтому подробное исследование этих трех алгебр Ли очень важно для всей теории.

3.2. Простые алгебры Ли. Теперь мы в состоянии сформулировать теорему о классификации простых алгебр Ли. Как обычно, мы начнем с комплексного случая.

Теорема 6. *Существуют четыре бесконечные серии комплексных простых алгебр Ли, называемых* **классическими простыми алгебрами Ли**:

$\mathbf{A}_n \cong \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}), \quad n \geqslant 1, \qquad \mathbf{B}_n \cong \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}), \quad n \geqslant 2,$

$\mathbf{C}_n \cong \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}), \quad n \geqslant 3, \qquad \mathbf{D}_n \cong \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}), \quad n \geqslant 4,$

и пять отдельных примеров: $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_n$, $n = 6, 7, 8$, *называемых* **исключительными (особыми)** *алгебрами Ли.*

Здесь индекс n обозначает ранг $\mathfrak{g}$, который был определен ранее как размерность подалгебры Картана $\mathfrak{h}$. Он также равен коразмерности общей присоединенной орбиты [16]

Все классические простые алгебры Ли допускают явное матричное представление:

$\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ состоит из всех комплексных матриц с нулевым следом порядка $n+1$,

$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ состоит из всех комплексных матриц X порядка $2n$, удовлетворяющих уравнению $X^t J_{2n} + J_{2n} X = 0$ (эквивалентное условие: $S := J_{2n} X$ симметрическая),

$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ состоит из всех комплексных антисимметрических матриц X порядка n.

Замечание 2. Классические алгебры Ли $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_n$ определены для всех натуральных чисел n. Ограничения на n в теореме были сделаны лишь с целью избежать появления непростых или изоморфных алгебр Ли.

Упражнение 13. Установить следующие изоморфизмы:
(a) $\mathbf{B}_1 \simeq \mathbf{C}_1 \simeq \mathbf{A}_1$, (b) $\mathbf{C}_2 \simeq \mathbf{B}_2$, (c) $\mathbf{D}_1 \simeq \mathbb{R}^1$,
(d) $\mathbf{D}_2 \simeq \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$, (e) $\mathbf{D}_3 \simeq \mathbf{A}_3$.
Проверить, что соответствующие графы Дынкина изоморфны.

Мы не будем останавливаться на явном описании исключительных алгебр Ли. Заметим только, что все из них могут быть построены как $\mathbb{Z}_2$-градуированные или $\mathbb{Z}_3$-градуированные алгебры Ли с классической алгеброй Ли в роли $\mathfrak{g}_0$.

Пример 11. Исключительная комплексная алгебра Ли $\mathbf{G}_2$ может быть определена как $\mathbb{Z}_3$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_1 = V$, $\mathfrak{g}_{-1} = V^*$, где V — обычный трехмерный $\mathfrak{g}_0$-модуль, который мы реализуем как пространство вектор-столбцов и V^* — двойственный модуль вектор-строк.

Коммутатор однородных элементов $X \in \mathfrak{g}_i$ и $Y \in \mathfrak{g}_j$ определяется следующим образом. Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, $v, v' \in V$, $f, f' \in V^*$. Тогда

$$[X, Y] = XY - YX, \quad [X, v] = Xv, \quad [f, X] = fX,$$

[16] Заменив "присоединенной" словом "коприсоединенной", мы получим определение ранга произвольной алгебры Ли (см. подробности в лекции 7).

$$[v,f]=vf-\frac{1}{3}fv\cdot 1,\quad [v_1,v_2]=f(v_1,v_2),\quad [f_1,f_2]=v(f_1,f_2).$$

Здесь $f(v_1,v_2)\in V^*$ и $v(f_1,f_2)\in V$ определены соотношениями

$$\langle f(v_1,v_2),v_3\rangle = a\cdot\det\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix},\quad \langle f_3, v(f_1,f_2)\rangle = b\cdot\det\begin{vmatrix} f_1\\ f_2\\ f_3\end{vmatrix},$$

где a и b — некоторые константы.

В силу тождества Якоби $2ab=1$, и мы получаем матричное представление G_2 с помощью комплексных 7×7-матриц вида

$$\mathcal{X}=\begin{pmatrix} X & v & A(\check f)\\ f & 0 & -\check v\\ A(v) & -\check f & -\check X\end{pmatrix}, \tag{26}$$

где A — линейное отображение из V в $so(3,\mathbb{C})$, определенное формулой

$$A(v)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} v^2 & -v^1 & 0\\ -v^3 & 0 & v^1\\ 0 & v^3 & -v^2\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix} v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix}.$$

В заключение описания G_2 отметим, что 7-мерное представление (26) отождествляет эту алгебру Ли с алгеброй дифференцирований так называемой **комплексной октонионной** алгебры $\mathbb{O}_\mathbb{C}$, ограниченных на подпространство чисто мнимых элементов. Суть дела в том, что для любой матрицы $\mathcal{X}$ вида (26) линейное преобразование, заданное $\exp\mathcal{X}$, сохраняет некоторую трилинейную форму $\{a,b,c\}$ в $\mathbb{C}^7$. Так как оно сохраняет также билинейную форму $(a,b)=\check ab$, можно определить неассоциативную билинейную операцию в $\mathbb{C}^8$ следующим образом: $(\alpha,a)*(\beta,b)=(\gamma,c)$, где $\gamma=\alpha\beta-(a,b)$ и $(c,c')=\{a,b,c'\}$. Это будет в точности комплексная октонионная алгебра. Она имеет вещественную форму $\mathbb{O}$, которая является алгеброй с делением и алгебра Ли $\mathrm{Der}(\mathbb{O})$ является компактной вещественной формой G_2.

Опишем вещественные простые алгебры Ли. Они образуют несколько бесконечных серий и 23 отдельных примера. Мы используем следующие стандартные обозначения:

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ — множество всех вещественных матриц порядка n с нулевым следом,

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$ — множество всех кватернионных матриц X порядка n, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,X=0$,

$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ — множество всех вещественных матриц X порядка $2n$, удовлетворяющих уравнению $X^tJ_{2n}+J_{2n}X=0$ (эквивалентное условие: $S:=J_{2n}X$ симметрическая),

$so^*(2n)$ — множество всех кватернионных матриц X порядка $2n$, удовлетворяющих уравнению $X^*J_{2n}+J_{2n}X=0$ (эквивалентное условие: $S:=J_{2n}X$ эрмитова),

$so(p,q,\mathbb{R})$ — множество всех вещественных матриц X порядка $n=p+q$, удовлетворяющих уравнению $X^tI_{p,q}+I_{p,q}X=0$,

$\mathfrak{su}(p,q,\mathbb{C})$ — множество всех комплексных матриц X порядка $n=p+q$ с нулевым следом, удовлетворяющих уравнению $X^*I_{p,q}+I_{p,q}X=0$,

$\mathfrak{su}(p,q,\mathbb{H})$ (используется также обозначение $\mathfrak{sp}(p,q)$) — множество всех кватернионных матриц X порядка $n=p+q$, удовлетворяющих уравнениям $X^*I_{p,q}+I_{p,q}X=0$, $\operatorname{Re}\operatorname{tr}X=0$.

Для последних трех множеств в случае $p=n$, $q=0$ используется более короткое обозначение $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$.

Описание вещественных простых алгебр Ли вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7. (a) *Каждая комплексная простая алгебра Ли остается простой при рассмотрении ее как вещественной алгебры Ли.*

(b) *Каждая комплексная простая алгебра Ли имеет конечное число* ($\geqslant 2$) *вещественных форм, которые являются простыми вещественными алгебрами Ли.*

(c) *Каждая вещественная простая алгебра Ли получается из комплексной простой алгеброй Ли процедурой, описанной в* (a) *или* (b).

Перечислим вещественные формы классических простых комплексных алгебр Ли.

$\mathbf{A}_n$: $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(p,q,\mathbb{C})$, $p\leqslant q$, $p+q=n+1$, $\mathfrak{sl}((n+1)/2,\mathbb{H})$ для нечетных n.

$\mathbf{B}_n$: $\mathfrak{so}(p,q,\mathbb{R})$, $p\leqslant q$, $p+q=2n+1$.

$\mathbf{C}_n$: $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(p,q)\simeq\mathfrak{su}(p,q,\mathbb{H})$, $p\leqslant q$, $p+q=n$.

$\mathbf{D}_n$: $\mathfrak{so}(p,q,\mathbb{R})$, $p\leqslant q$, $p+q=2n$, $\mathfrak{so}^*(2n)$.

Две вещественные формы данной комплексной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представляют особый интерес (см. п. 2.6). Первая называется **компактной формой** $\mathfrak{g}_c$ и характеризуется следующими эквивалентными свойствами:

(a) форма допускает матричную реализацию как подалгебра $\mathfrak{su}(m)$,

(b) квадратичная форма $Q(X)=-\operatorname{tr}(\operatorname{ad}X)^2$ отрицательно определена.

Вторая называется **нормальной формой** $\mathfrak{g}_n$ и характеризуется следующими эквивалентными свойствами:

(a) форма допускает матричную реализацию как подалгебра $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{sl}(m,\mathbb{R})$ такая, что

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+, \tag{21'}$$

где три подпространства являются пересечениями $\mathfrak{g}$ с нижней треугольной, диагональной и верхней треугольной подалгебрами $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{R})$,

(b) квадратичная форма $Q(X)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}X)^2$ имеет сигнатуру $((N-n)/2,(N+n)/2)$, где $N=\dim\mathfrak{g}$, $n=\operatorname{rk}\mathfrak{g}$.

Упражнение 14. Указать компактную и нормальную формы в приведенном выше списке вещественных форм.

Указание. Вычислить сигнатуру квадратичной формы $Q(X)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}X)^2$.

Изучение полупростых алгебр будет продолжено в лекции 10.

4. Связь между алгебрами Ли и группами Ли

4.1. Пять конструкций $\operatorname{Lie}(G)$. Рассмотрим важный и исторически первый источник алгебр Ли, основанный на их связи с группами Ли. Оказывается, что с любой группой Ли G можно канонически связать вещественную алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. На языке категорий это означает, что существует функтор Lie из категории $\mathcal{LG}$ в категорию $\mathcal{LA}$. Далее мы обозначаем через $\mathfrak{g}$ или $\mathrm{Lie}\,(G)$ алгебру Ли, соответствующую группе Ли G.

Возможно, читатель уже заметил, что мы придерживаемся следующего принципа в обозначениях: группы Ли обозначаются прописными буквами, а их алгебры Ли — соответствующими строчными буквами готическим шрифтом.

Построить $\mathrm{Lie}(G)$ из G можно различными способами. Мы рассмотрим здесь пять способов. Сначала дадим пять определений коммутатора, а затем покажем, что они удовлетворяют тождеству Якоби и определяют одну и ту же (с точностью до изоморфизма) алгебру Ли.

1. Запишем групповой закон умножения в координатах при помощи n функций $2n$ переменных, выражающих координаты $\{z^k\}$ произведения в терминах координат $\{x^i\}$, $\{y^j\}$ сомножителей: $z^k = f^k(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n)$. Предположим, что единица — начало локальной системы координат. Тогда $f^k(x^1, \ldots, x^n; 0, \ldots, 0) = x^k, f^k(0, \ldots, 0; y^1, \ldots, y^n) = y^k$. Поэтому разложение Тейлора функции f^k имеет вид

$$f^k(x^1, \ldots, x^n; y^1, \ldots, y^n) = x^k + y^k + b^k_{ij} x^i y^j + \text{члены высшего порядка}. \qquad (27)$$

В качестве структурных констант искомой алгебры Ли мы полагаем

$$c^k_{ij} := b^k_{ij} - b^k_{ji}. \qquad (28)$$

2. Пусть X и Y — два касательных вектора к G в точке e. Определим их коммутатор $[X, Y]$ следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — две гладкие кривые в G такие, что $\varphi'(0) = X, \psi'(0) = Y$. Тогда кривая $\xi(t) = \varphi(\sqrt{t})\psi(\sqrt{t})\varphi(\sqrt{t})^{-1}\psi(\sqrt{t})^{-1}$ — 1-гладкая при $t \geqslant 0$. Положим $[X, Y] = \xi'(0)$.

3. Для $x \in G$ рассмотрим отображение $A(x) : G \to G : g \mapsto xgx^{-1}$ — так называемый внутренний автоморфизм G. При этом отображении сохраняется закон умножения и единица e — неподвижная точка. Положим $\mathrm{Ad}\, x := A(x)'(e)$. Это линейное преобразование пространства $\mathfrak{g} = T_e(G)$ — производная $A(x)$ в точке e. Рассмотрим отображение $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$: $x \mapsto \mathrm{Ad}\, x$. Это отображение имеет производную в e, которую обозначим через $\mathrm{ad}\, X := \mathrm{Ad}'(e)(X) \in \mathrm{End}\, \mathfrak{g}$. Полагаем $[X, Y] = \mathrm{ad}\, X(Y)$.

4. Опять положим $\mathfrak{g} = T_e(G)$. Каждому вектору $X \in \mathfrak{g}$ соответствует единственное левоинвариантное векторное поле $\widetilde{X} \in \mathrm{Vect}\, G$, которое принимает значение X в e. Обычная скобка Ли двух левоинвариантных полей левоинвариантна, так как скобка Ли — это естественная операция, коммутирующая со всеми диффеоморфизмами и, в частности, с групповыми сдвигами. Таким образом, $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ имеет вид $\widetilde{Z}$ для некоторого $Z \in \mathfrak{g}$. Мы определяем $[X, Y]$ равным Z.

Предупреждение. Используя правоинвариантные векторные поля $\widehat{X} \in \mathrm{Vect}\, G$ вместо левоинвариантных, мы получим другое определение коммутатора (с противоположным знаком). Чтобы получить ту же структуру алгебры Ли, надо ассоциировать $X \in \mathfrak{g}$ с правоинвариантным полем $-\widehat{X}$.

5. Рассмотрим произвольную матричную (или операторную) реализацию π группы G. Тогда $\pi(G)$ — подмногообразие $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Пусть $\mathfrak{g}$ — касательное векторное пространство[17] к $\pi(G)$ в точке 1_n. Определим коммутатор в $\mathfrak{g}$ формулой $[X, Y] = XY - YX$.

Теперь мы обсудим эти определения. Первое и пятое определения наиболее удобны для практических вычислений (см. примеры ниже). Второе определение более геометрического характера и выражает связь между групповым коммутатором и коммутатором алгебры Ли: коммутатор алгебры Ли есть предел группового коммутатора. Третье определение наиболее концептуально и тем самым более подходит для теоретических вопросов. Четвертое определение вводит полезное понятие левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей на G, которые являются частными случаями левоинвариантных (правоинвариантных) дифференциальных операторов на G, играющих важную роль в гармоническом анализе на группах Ли.

С другой стороны, первое определение имеет серьезный недостаток: зависимость от выбора локальной системы координат. Изучим эту зависимость более подробно. Заметим, что при линейном преобразовании локальной системы координат величина b_{ij}^k ведет себя как тензор типа (2,1). Однако при нелинейном преобразовании $x^k \mapsto x^k + a_{ij}^k x^i x^j + \ldots$ величина b_{ij}^k изменяется более сложным аффинным образом, а именно, $b_{ij}^k \mapsto b_{ij}^k - 2a_{ij}^k x^i y^j$.

Отметим замечательный факт: c_{ij}^k по-прежнему ведет себя как тензор (в частности, c_{ij}^k вообще не меняется при указанном выше преобразовании). Поэтому билинейная операция $[x, y]^k = c_{ij}^k x^i y^j$ корректно определена на касательном пространстве T_eG к группе G в единице e.

Есть еще одно преимущество c_{ij}^k в сравнении с b_{ij}^k. Будем называть локальную систему координат $\{x^1, \ldots, x^n\}$ **симметрической**, если $x^k(g^{-1}) = -x^k(g)$. Следующая лемма утверждает существование симметрических систем координат и описывает их полезные свойства.

Лемма 3. *Пусть $\{x^1, \ldots, x^n\}$ — локальная система координат с началом в e. Введем новую систему координат $\widetilde{x}^k(g) := \dfrac{x^k(g) - x^k(g^{-1})}{2}$. Тогда*

(a) *система координат $\{\widetilde{x}^k\}$ симметрическая,*

(b) *матрица Якоби $\left\| \dfrac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^j} \right\|$ равна 1_n в начале координат,*

(c) *в любой симметрической локальной системе координат величина b_{ij}^k антисимметрична относительно i, j и поэтому совпадает с $c_{ij}^k/2$,*

(d) *групповой закон в симметрической локальной системе координат имеет вид*

$$f(x; y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + T_1(x, x, y) + T_2(x, y, y) + \text{ члены порядка } \geqslant 4, \quad (29)$$

[17] Не путать $\mathfrak{g}$ с геометрическим касательным пространством, которое является аффинным многообразием $1_n + \mathfrak{g}$.

где $[x,y]^k = c^k_{ij}x^ix^j$ *и* $T_i, i = 1,2,$ *— трилинейные векторнозначные формы такие, что*

(i) $T_1(x,y,z) = T_1(y,x,z)$, $T_2(x,y,z) = T_2(x,z,y)$,

(ii) $T_1(x,x,x) = T_2(x,x,x)$.

Доказательство. Утверждения (a) и (b) очевидны. Для доказательства (c) заметим, что начало симметрической локальной системы координат находится в e, поэтому выполняется уравнение (27). Подставляя $y = -x$ и используя свойство $f(x;-x) = 0$, заключаем, что $b^k_{ij}x^ix^j \equiv 0$. Следовательно, b^k_{ij} антисимметрична.

Для доказательства (d) рассмотрим член третьего порядка в разложении Тейлора $f(x;y)$. Он может быть записан в виде $\sum\limits_{i=0}^{3} T_i$ где $\deg_y T_i = i$. Поскольку $f(x;0) = f(0;x) = x$, имеем $T_0 = T_3 = 0$. Следовательно, (29) и условие (i) выполнены. Опять используя свойство $f(x;-x) = 0$, получаем $T_1(x,x,-x) + T_2(x,-x,-x) = 0$, откуда следует (ii).

Проверим тождество Якоби. Это легко сделать, пользуясь последним определением, и несколько сложнее для других. Проведем проверку для первого определения. Главный аргумент — свойство ассоциативности группового закона, который в координатной форме записывается в виде $f(f(x;y);z) = f(x;f(y;z))$. Допустим, что система координат симметрична и сравним трилинейные члены в разложениях Тейлора левой и правой частей. Имеем

$$\frac{1}{4}[[x,y],z] + 2T_1(x,y,z) = \frac{1}{4}[x,[y,z]] + 2T_2(x,y,z).$$

Перенесем коммутаторы в одну часть равенства, трилинейные формы T_1 и T_2 — в другую и просуммируем по циклическим перестановкам x, y, z (обозначение $\circlearrowleft$). Тогда $\circlearrowleft [[x,y],z] = 2 \circlearrowleft T_1(x,y,z) - 2 \circlearrowleft T_2(x,y,z)$. Учитывая условие (ii), получаем тождество Якоби. □

Следующая задача — проверить эквивалентность всех пяти приведенных выше определений. Наиболее простой путь — сравнить определения 2–5 с определением 1, используя подходящую локальную систему координат. Мы оставляем читателю провести соответствующие рассмотрения в качестве упражнения.

Теперь рассмотрим обратную задачу. Существует ли для заданной вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группа Ли G такая, что $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$? Иначе говоря, будет ли функтор Ли $\mathcal{LG} \to \mathcal{LA}$ сюръективным? Ответ: "да". Более того, справедлива следующая

Теорема 8. *Среди всех связных групп Ли* G *таких, что* $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, *существует ровно одна (с точностью до изоморфизма) односвязная группа* G_0. *Пусть* C *— центр* G_0. *Тогда любая связная группа Ли* G *такая, что* $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, *изоморфна* G_0/Γ, *где* $\Gamma \subset C$ *— дискретная подгруппа.*

Мы опускаем доказательство (которое является одним из основных моментов теории Ли) и лишь заметим, что последнее утверждение вытекает из предложения 2, п. 1.1.

Аналога теоремы Адо для вещественных групп Ли не существует: не все такие группы могут быть реализованы как подгруппы $GL(n,\mathbb{R})$. Приведем простейший контрпример.

Пример 12. Рассмотрим группу дробно-линейных (или мёбиусовых) преобразований $x \mapsto \dfrac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}$ проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, которая обычно обозначается $PSL(2,\mathbb{R})$ и является фактор-группой $SL(2,\mathbb{R})$ по своему центру $\{\pm 1\}$. В некоторых случаях удобно рассматривать единичную окружность $S^1 \subset \mathbb{C}$ вместо $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Группа $PSU(1,1,\mathbb{C}) \simeq SU(1,1,\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ действует нв S^1 преобразованиями $z \mapsto \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$. Эти две группы изоморфны не только, как абстрактные группы, но и как группы преобразований, в чем можно убедиться, отождествляя $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ и S^1 с помощью $z = \dfrac{x+i}{x-i}$. Обозначим через G универсальное (т. е. односвязное) накрытие $PSU(1,1,\mathbb{C})$. Оно действует на универсальное накрытие S^1, совпадающее с $\mathbb{R}$. Эта группа преобразований порождается тремя потоками, соответствующими трем векторным полям на $\mathbb{R}$:

$$X_0 = \frac{d}{dt}, \quad X_1 = \cos t\frac{d}{dt}, \quad X_2 = \sin t\frac{d}{dt}. \tag{30}$$

Центр C группы G состоит из переносов $c_n(t) = t + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ввиду теоремы 8 все связные группы Ли с алгеброй Ли G имеют вид G/Γ, где Γ — дискретная подгруппа C. В нашем случае C сама является дискретной группой и подгруппы C можно пронумеровать индексом $m \in \mathbb{Z}_+$. Эти подгруппы имеют вид $C_m \subset C := \{c_{mn}, n \in \mathbb{Z}\}$. Пусть $G_m := G/C_m$. Тогда, в частности, $G_0 = G$, $G_1 \simeq PSL(2,\mathbb{R}) \simeq PSU(1,1,\mathbb{C}) \simeq SO(1,2,\mathbb{R})$, $G_2 \simeq SL(2,\mathbb{R})$.

Известно, что все линейные конечномерные представления G факторизуются через $SL(2,\mathbb{R})$. Другими словами, они тривиальны на дискретной подгруппе C_2.

Упражнение 15. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, порожденная векторными полями (30). ?

(a) Проверить, что отображение

$$X_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

определяет гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Найти ядро соответствующего гомоморфизма $\Phi_2 : G \to SL(2,\mathbb{R})$.

(b) Показать, что присоединенное представление $\mathfrak{g}$ имеет вид

$$X_0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и отображает $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{so}(2,1,\mathbb{R})$. Найти ядро соответствующего гомоморфизма $\Phi_1 : G \to SO(2,1,\mathbb{R})$.

Дальнейшее обобщение компенсирует отсутствие аналога теоремы Адо. А именно, все вещественные группы Ли допускают точное бесконечномерное линейное представление, поэтому они реализуются бесконечными матрицами.

4.2. Экспоненциальное отображение. В п. 1 мы построили рациональное отображение (преобразование Кэли) между специального вида группами Ли и их алгебрами Ли. Для групп Ли общего вида такого отображения нет. Однако вместо него можно использовать трансцендентное отображение из $\mathfrak{g}$ в G. Для матричной группы Ли оно являются обычным экспоненциальным отображением $\exp X = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{X^n}{n!}$, где ряд сходится равномерно в любой ограниченной области пространства матриц.

Для общих вещественных групп Ли экспоненциальное отображение можно определить на основе следующей теоремы.

Теорема 9. *Для любого $X \in \mathfrak{g}$ существует единственная однопараметрическая подгруппа $\varphi_X(t)$ группы G такая, что*

(i) $\varphi_X(t+s) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_X(s)$,

(ii) $\varphi_X'(0) = X$.

Доказательство. Пусть $\widehat{X}$ — правоинвариантное векторное поле на G, которое принимает значение X в точке e. Определим кривую $\varphi_X : \mathbb{R} \to G$ как решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi_X'(t) = \widehat{X}(\varphi_X(t)) \tag{31}$$

с начальным условием $\varphi_X(0) = e$. Хорошо известно, что при малых значениях параметра t решение существует и единственно. Покажем, что оно удовлетворяет уравнению (i) в своей области определения. Действительно, зафиксируем достаточно малое s так, чтобы две кривые на G были определены на некотором интервале $|t| < \varepsilon$: $A_s(t) = \varphi_X(t+s)$ и $B_s(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_X(s)$. Проверим, что обе кривые удовлетворяют уравнению (31). Для упрощения доказательства будем использовать следующее удобное обозначение (по аналогии с матричной группой). Для касательного вектора ξ к G в точке $g_0 \in G$ будем обозначать через $g\cdot\xi$ и $\xi\cdot g$ левый и правый сдвиги на $g \in G$ (более полные обозначения: $(L_g)_*(g_0)(\xi)$ и $(R_g)_*(g_0)(\xi)$, где L_g и R_g — левый и правый сдвиги на g). В частности, в этих обозначениях правоинвариантное векторное поле $\widehat{X}$ принимает вид $\widehat{X}(g) = X\cdot g$. Имеем

$$A_s'(t) = \varphi_X'(t+s) = \widehat{X}(\varphi_X(t+s)) = \widehat{X}(A_s(t)),$$
$$B_s'(t) = \varphi_X'(t)\cdot\varphi_X(s) = \widehat{X}(\varphi_X(t))\cdot\varphi_X(s) = \widehat{X}(\varphi_X(t)\cdot\varphi_X(s)) = \widehat{X}(B_s(t)).$$

Более того, обе кривые удовлетворяют одному и тому же начальному условию $A(0) = B(0) = \varphi_X(t)$. Следовательно, они совпадают, и мы получаем (i) при $|t| + |s| < \varepsilon$.

Далее, можно определить кривую $\varphi_X(t)$ для всех значений параметра t по формуле $\varphi_X(t) = (\varphi_X(t/N))^N$, где N выбрано настолько большим, что $|t/N| < \varepsilon$. Мы опускаем проверку (i) для всех значений t и s. □

Теперь мы можем определить экспоненциальное отображение для произвольной группы Ли. Полагаем $\exp X = \varphi_X(1)$. Для матричной группы $\varphi_X(t) = e^{tX}$, т. е. определения совпадают.

Упражнение 16. Найти явный вид $\exp X$ в следующих случаях:

(a) $X = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ (клетка Жордана),

(b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$,

(c) $X = \begin{pmatrix} it & z \\ -\bar{z} & -it \end{pmatrix}$,

(d) $X = \begin{pmatrix} \lambda & x & z \\ 0 & \mu & y \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

Экспоненциальное отображение имеет очень важное свойство функториальности.

Теорема 10. *Пусть $\Phi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групп Ли. Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\Phi} & G_2 \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\Phi_*(e)} & \mathfrak{g}_2 \end{array} \tag{32}$$

Еще более важен следующий результат.

Теорема о монодромии. *Пусть G_1 — связная и односвязная группа Ли, G_2 — любая связная группа Ли, $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — их алгебры Ли и $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ — гомоморфизм алгебр Ли. Тогда существует единственный гомоморфизм групп Ли $\Phi : G_1 \to G_2$ такой, что $\Phi'(e) = \varphi$ и справедливо* (32).

На языке категорий это означает, что существует функтор $\mathrm{Exp} : \mathcal{LA} \to \mathcal{LG}$, который ставит в соответствие любой вещественной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ односвязную группу Ли G и устанавливает эквивалентность $\mathcal{LA}$ с подкатегорией $\mathcal{LG}$.

4.3*. Супергруппы Ли. Напомним, что супергруппы *не являются группами*, так как супермногообразие не является многообразием (и даже не множеством). Однако для любой коммутативной ассоциативной супералгебры A можно определить группу G_A A-точек для супергруппы G. Наиболее интересные и важные примеры супергрупп — это группы симметрий естественных суперобъектов.

Пример 13. Рассмотрим стандартное вещественное линейное суперпространство $\mathbb{R}^{m|n}$. Для любой суперкоммутативной ассоциативной алгебры A группа A-точек $GL(m|n)$ состоит из всех обратимых матриц вида $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a \in \mathrm{Mat}_m(A_0)$, $d \in \mathrm{Mat}_n(A_0)$ и c, d — $m \times n$- и $n \times m$-матрицы с элементами из A_1. В частности, группа Ли $\mathbb{R}$-точек $GL(m|n)$ изоморфна $GL(m, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$.

Лекция 4

ДЕЙСТВИЯ ГРУПП ЛИ И АЛГЕБР ЛИ

1. Действия групп и однородные пространства 85
   1.1. Определение и примеры действий групп 85
   1.2. Однородные G-пространства 87
   1.3. Представления G-множеств 89
   1.4. Двойственность Фробениуса для множеств 91
   1.5. Двойственность Фробениуса для векторных пространств 92
2. Действия групп Ли и алгебр Ли на многообразиях 94
   2.1. Однородные многообразия 94
   2.2. Векторные поля 97
   2.3. Действия группы Ли и действия алгебры Ли 99
   2.4. Инварианты 100
   2.5.* Действия супергрупп Ли 104
3. Геометрические гильбертовы пространства 108
   3.1. Инвариантное интегрирование и естественные гильбертовы пространства 108
   3.2. Полуформы 110
   3.3.* Пространства когомологий 111
4. Представления однородных многообразий 112

1. Действия групп и однородные пространства

Напомним некоторые известные факты, в основном для того, чтобы ввести удобную терминологию, которая будет далее использоваться.

1.1. Определение и примеры действий групп. Рассмотрим группу G. Множество X называется **левым G-пространством**, если задано отображение $G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ такое, что

$$g_1(g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x, \quad e \cdot x = x, \tag{1}$$

т. е. групповой гомоморфизм $G \to \operatorname{Aut} X$, который сопоставляет каждому $g \in G$ преобразование $x \mapsto g \cdot x$. Будем говорить в таком случае, что G **действует на X слева**. Если этот гомоморфизм **точный** (т. е. имеет тривиальное ядро: никакой элемент, исключая e, не действует как единица), будем говорить, что действие **эффективно**.

Иногда используют также понятие **правого G-пространства или правого действия**. Это отображение $X \times G \to X : (x,g) \mapsto x \cdot g$ такое, что

$$(x \cdot g_1)g_2 = x \cdot (g_1 g_2), \quad x \cdot e = x. \tag{1'}$$

Это означает, что отображение $G \to \operatorname{Aut} X$, которое сопоставляет каждому $g \in G$ преобразование $x \mapsto x \cdot g$, является **антигомоморфизмом** (т. е. меняет порядок множителей).

Рассматриваемые множества часто обладают дополнительной структурой, которая сохраняется при действии группы. Например, векторные пространства и гладкие многообразия. В этом случае, будем называть их **G-пространствами** и **G-многообразиями**.

Совокупность всех левых (правых) G-пространств образует категорию[1], объектами которой служат G-пространства, а морфизмами — так называемые **G-эквивариантные отображения** $\varphi : X \to Y$, которые для каждого $g \in G$ порождают коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \tag{2}$$

Замечание 1. На самом деле несложно перейти от левого действия к правому (и обратно), используя антиизоморфизм $g \mapsto g^{-1}$. Именно, на любом левом G-пространстве X можно канонически определить правое действие согласно правилу

$$x \cdot g := g^{-1} \cdot x. \tag{3}$$

Поэтому категории левых G-пространств и правых G-пространств эквивалентны.

Пример 1. С помощью обычного умножения матриц определяется левое действие группы $GL(n,\mathbb{R})$ на множестве $\mathbb{R}^n$ вектор-столбцов и правое действие той же группы на множестве $(\mathbb{R}^n)^*$ вектор-строк. А именно, матрица $A \in$: $GL(n,\mathbb{R})$ действует как $v \mapsto Av$, $f \mapsto fA$, $v \in \mathbb{R}^n$, $f \in (\mathbb{R}^n)^*$.

? Упражнение 1. Пусть $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ — левое $GL(n,\mathbb{R})$ -пространство, которое канонически ассоциируется с правым G-пространством $(\mathbb{R}^n)^*$. Будут ли $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ и $\mathbb{R}^n$ изоморфны в категории

(a) $GL(n,\mathbb{R})$-векторных пространств?

(b) $GL(n,\mathbb{R})$-топологических пространств?

(c) $GL(n,\mathbb{R})$-множеств?

Ответ. (a) и (b) “нет” для всех n, (c) “да” при $n = 1$ и “нет” при $n > 1$.

---

[1]См. Лекцию 1, п. 1.4.

Пример 2*. Для любой категории K множество $\mathrm{Mor}_K(A, B)$ является левым G-пространством для $G = \mathrm{Aut}\,A$ и правым G-пространством для $G = \mathrm{Aut}\,B$.

Далее мы будем опускать слова "левый" и "правый" и говорить просто о G-пространствах, подразумевая что каждое из них можно рассматривать как тем, так и другим способом с помощью (3).

Введем (или напомним) некоторые понятия.

(i) Естественно определяется операция **прямого произведения** в категории G-множеств: это обычное прямое произведение множеств, снабженное диагональным действием G: $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$.

(ii) Для любого G-пространства X обозначим через X_G множество G-орбит в X и через X^G — множество **неподвижных точек** G (т. е. $x \in X$ таких, что $g \cdot x = x$ для всех $g \in G$).

(iii) Для любых двух G-множеств X и Y определим **произведение** над G (обозначение: $X \underset{G}{\times} Y$) как $(X \times Y)_G$. Удобно считать, что X — правое G-множество, а Y — левое G-множество. При этом $X \underset{G}{\times} Y$ есть фактор-пространство $X \times Y$ по отношению эквивалентности $(x \cdot g, y) \sim (x, g \cdot y)$. Обозначим класс (x, y) через $x \underset{G}{\times} y$. Тогда эквивалентность принимает вид закона ассоциативности $(x \cdot g) \underset{G}{\times} y = x \underset{G}{\times} (g \cdot y)$.

Заметим, что в общем случае не существует естественного действия группы G на $X \underset{G}{\times} Y$. Но, если X или Y снабжены действием другой группы H, которое коммутирует с G-действием, то существует естественное H-действие на $X \underset{G}{\times} Y$. В частности, так будет в случае, когда G абелева и любое G-множество можно рассматривать как $G \times G$-множество.

Упражнение 2. Пусть K — поле и $L_K(X)$ — векторное пространство всех K-значных функций на множестве X.

(a) Показать, что соответствие $X \rightsquigarrow L_K(X)$ может быть продолжено до функтора L_K из Set° в $\mathrm{Vect}(K)$ (или из Set в $\mathrm{Vect}(K)^\circ$).

(b) Проверить, что $L_K(X_G) = L_K(X)^G$.

1.2. Однородные G-пространства. G-пространство X называется **однородным**, если для любых двух точек x_1, x_2 пространства X найдется элемент $g \in G$, отображающий x_1 в x_2, или, эквивалентно, X_G является одноточечным множеством. В этом случае говорим, что G действует **транзитивно** на X.

Следующие простые факты часто оказываются полезными.

Лемма 1. *Имеется естественное взаимно однозначное соответствие*

(a) *между однородными G-пространствами с отмеченной точкой и подгруппами $H \subset G$,*

(b) *между однородными G-пространствами и классами сопряженности подгрупп $H \subset G$.*

Доказательство. (a) С данным однородным G-пространством X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ можно ассоциировать подгруппу $H = \mathrm{Stab}(x_0) \subset G$, которая называется **стабилизатором** точки x_0 и состоит из всех $g \in G$, оставляющих точку x_0 неподвижной. Обратно, для любой подгруппы $H \subset G$ можно определить пространство $X = G/H$ левых классов смежности по H в G с отмеченной точкой $x_0 = H$. (Напомним, что **левые классы смежности** по H — это в точности H-орбиты в G, если группа G рассматривается как правое H-пространство, так что $X = G/H$ совпадает с G_H.) Оставляем читателю проверить, что соответствия $(X, x_0) \rightsquigarrow \mathrm{Stab}(x_0)$ и $H \rightsquigarrow (G/H, H)$ взаимно обратны.

(b) Если X — однородное G-пространство без отмеченных точек, то подгруппы $\mathrm{Stab}(x)$, $x \in X$, образуют класс сопряженности, который мы обозначим C. Это утверждение вытекает из соотношения $\mathrm{Stab}(g \cdot x) = g\,\mathrm{Stab}(x)g^{-1}$. Обратно, если задан класс сопряженности C подгрупп группы G, то можно выбрать представителя $H \in C$ и определить однородное множество $X = G/H$. Остается проверить два утверждения:

1) при различных выборах $H \in C$ мы получаем изоморфные однородные множества,

2) построенные выше соответствия $X \rightsquigarrow C$ и $C \rightsquigarrow X$ взаимно обратны. Оставляем проверку читателю. □

? Упражнение 3. Пусть $X = G/H$ — однородное G-пространство. Определим **нормализатор** H в G по формуле $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Показать, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ всех автоморфизмов X (как объекта категории G-пространств) изоморфна $N_G(H)/H$.

Указание. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$. Тогда $\varphi(x_0) = g \cdot x_0$ для некоторого $g \in G$. Показать, что

1) $g \in N_G(H)$,

2) φ полностью определяется элементом g,

3) g_1 и g_2 определяют один и тот же автоморфизм тогда и только тогда, когда $g_1 g_2^{-1} \in H$.

Пример 3.* Пусть K — компактная связная группа Ли и $T \subset K$ — ее максимальная коммутативная подгруппа (часто называемая **максимальным тором**). Однородное пространство $\mathcal{F} := K/T$ называется **флаговым многообразием**.

Это один из самых замечательных примеров однородных многообразий, используемых в теории представлений полупростых групп. Поэтому мы рассмотрим некоторые его свойства.

Группа $W = \mathrm{Aut}\,\mathcal{F}$ играет важную роль. Она называется **группой Вейля**, ассоциированной с K. Так как T совпадает со своим централизатором в K, группа Вейля W может рассматриваться как подгруппа группы $\mathrm{Aut}(T)$ или группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{Lie}(T))$. В последнем случае это будет линейная группа, порожденная отражениями.

Оказывается, что многообразие $\mathcal{F}$ имеет очень богатую геометрическую структуру. Например, оно допускает несколько K-инвариантных комплексных структур таких, что группа голоморфных преобразований $\mathcal{F}$ есть комплексная группа Ли G, для которой K — максимальная компактная подгруппа.

Стабилизатор точки $F \in \mathcal{F}$ в G является максимальной разрешимой подгруппой $B \subset G$. Многообразие $\mathcal{F}$ допускает также кэлерову структуру и часто используется как основной пример во многих геометрических теориях.

Опишем более подробно простейший случай для иллюстрации общей ситуации. Пусть $K = SU(2)$ и $T \cong U(1)$ — диагональная подгруппа. Удобно отождествить K с группой кватернионов единичной нормы и T — с подгруппой комплексных чисел, равных 1 по модулю.

Группа K действует на пространство $\mathbb{R}^3$ чисто векторных кватернионов v сопряжением: $v \mapsto qvq^{-1}$. Так как норма v сохраняется, образ K содержится в $O(3,\mathbb{R})$. С другой стороны, этот образ связный и, следовательно, содержится в $SO(3,\mathbb{R})$. На самом деле он совпадает с $SO(3,\mathbb{R})$, так как имеет такую же размерность 3.

Итак, $K = SU(2)$ действует на $\mathbb{R}^3$ обычными вращениями. Поэтому пространство $X = G/T$ с отмеченной точкой T можно отождествить с двумерной сферой $\|v\| = 1$ с отмеченной точкой i: класс смежности qT переходит в единичный вектор $v = q \cdot i \cdot q^{-1}$.

Нормализатор $N_K(T)$ состоит из двух связных компонент: множества T диагональных матриц и множества $j \cdot T \subset SU(2)$ матриц с нулевой главной диагональю. (Проверить, что $j \cdot T \cdot j^{-1} = T$.) Поэтому группа W состоит из двух элементов и неединичный элемент действует как $qT \mapsto qjT \in K/T$. При векторной реализации она действует как $v = q \cdot i \cdot q^{-1} \mapsto qj \cdot i \cdot (qj)^{-1} = q \cdot jij^{-1} \cdot q^{-1} = q \cdot (-i) \cdot q^{-1} = -v$. Таким образом, это антиподальное отображение сферы.

Можно отождествить двумерную сферу X с $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Группа $G = SL(2,\mathbb{C})$ действует на X дробно-линейными преобразованиями. Заметим, что X как комплексное однородное пространство не имеет нетривиальных автоморфизмов. Антиподальное отображение не сохраняет комплексную структуру.

Мы рекомендуем читателю дать явное описание флагового многообразия для случая $K = SU(3)$. Здесь $\mathcal{F}$ — расслоение с четырехмерной базой $SU(3)/U(2)$ и двумерным слоем S^2.

1.3. Представления G-множеств. Пусть X — конечное множество. Обозначим через $L_{\mathbb{C}}(X)$ пространство всех комплекснозначных функций на X. Это комплексная ассоциативная коммутативная алгебра с единицей.

Для комплексного векторного пространства V определим **представление множества** X в пространстве V как гомоморфизм $\Pi : L_{\mathbb{C}}(X) \to \operatorname{End} V$ алгебр с единицей. Это означает, что отображение Π обладает следующими свойствами:

(i) $\Pi(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\Pi(\varphi_1) + c_2\Pi(\varphi_2)$,

(ii) $\Pi(\varphi_1\varphi_2) = \Pi(\varphi_1)\Pi(\varphi_2)$,

(iii) $\Pi(1) = 1$.

(В последнем равенстве “1” в левой части обозначает функцию на X, которая принимает значение 1 во всех точках, тогда как в правой части “1” обозначает единичный оператор 1_V в V.)

Будем называть Π **$*$-представлением множества** X, если V снабжено скалярным произведением и Π обладает дополнительным свойством

(iv) $\Pi(\overline{\varphi}) = \Pi(\varphi)^*$

(т. е. комплексно сопряженные функции переходят в эрмитово сопряженные операторы).

Предложение 1. *Любое представление* Π *множества* X *эквивалентно следующей стандартной модели.*

(a) *Для любого* $x \in X$ *фиксируем комплексное векторное пространство* V_x *и положим* $V := \bigoplus_{x \in X} V_x$. *Отождествим* V *с пространством всех вектор-функций* $f : X \to V$ *таких, что* $f(x) \in V_x \subset V$ *для всех* $x \in X$. *Определим* Π *по формуле*

$$(\Pi(\varphi)f)(x) = \varphi(x) \cdot f(x). \tag{4}$$

(b) *В случае $*$-представления* Π *множества* X *утверждение остается верным при дополнительном предположении, что все пространства* V_x, $x \in X$, *снабжены скалярным произведением и* V *есть прямая сумма пространств* V_x *в категории гильбертовых пространств.*

Доказательство. (a) Пусть (Π, V) — представление X. Обозначим через δ_x функцию на X, которая принимает значение 1 в точке $x \in X$ и 0 в других точках. Так как $\delta_x^2 = \delta_x$, оператор $\Pi_x := \Pi(\delta_x)$ является идемпотентом: $\Pi_x^2 = \Pi_x$. С геометрической точки зрения это означает, что Π_x — проектор на подпространство пространства V, которое мы обозначим V_x.

Из равенств $\sum_{x \in X} \delta_x = 1$ и $\delta_x \cdot \delta_y = 0$ при $x \neq y$ получаем, что $V = \bigoplus_{x \in X} V_x$. Действительно, поскольку $\sum_{x \in X} \Pi_x = 1_V$, для любого вектора $v \in V$ имеем

$$v = 1_V \cdot v = \sum_{x \in X} \Pi_x v = \sum_{x \in X} v_x, \quad v_x \in V_x. \tag{5}$$

Итак, V — сумма подпространств V_x, $x \in X$. Эта сумма прямая, так как для любого другого разложения $v = \sum_{x \in X} v'_x$, $v'_x \in V_x$, того же вектора v, применив Π_y и используя равенство $\Pi_x \Pi_y = 0$ при $x \neq y$, получаем $v'_y = v_y$.

(b) В случае $*$-представления оператор Π_x самосопряжен. Геометрически это означает, что Π_x — ортопроектор в V и, следовательно, V_x ортогонально V_y при $x \neq y$. □

Теперь предположим, что X — G-множество для некоторой конечной группы G. Допустим, что заданы представление Π множества X и представление π группы G в одном и том же пространстве V. Будем говорить, что (Π, V) и (π, V) **согласованы**, если

$$\pi(g) \circ \Pi(\varphi) \circ \pi(g)^{-1} = \Pi(\varphi^g), \quad \text{где } \varphi^g(x) = \varphi(x \cdot g). \tag{6}$$

Наиболее интересный случай возникает для однородного X.

Предложение 2. (a) *Предположим, что* X — *однородное* G-*множество. Любая пара согласованных представлений* (Π, V) *множества* X *и* (π, V) *группы* G *в одном и том же пространстве* V *эквивалентна следующей стандартной модели.*

Фиксируем комплексное векторное пространство W и обозначим через $V = L(X, W)$ множество всех W-значных функций на X. Определим Π и π по формуле

$$(\Pi(\varphi)f)(x) = \varphi(x)\cdot f(x), \quad (\pi(g)f)(x) = A(x,g)f(x\cdot g), \tag{7}$$

где $A : X \times G \to \operatorname{Aut} W$ — операторнозначная функция, удовлетворяющая **уравнению коцикла**:

$$A(x, g_1)A(x\cdot g_1, g_2) = A(x, g_1g_2). \tag{8}$$

(b) *Если, кроме того, π унитарно и Π — $*$-представление, то W и V снабжены скалярными произведениями такими, что $\|f\|_V^2 = \sum\limits_{x\in X} \|f(x)\|_W^2$ и значениями A являются унитарные операторы в W.*

Доказательство. (a) Пусть $V = \oplus_{x\in X} V_x$ — разложение из предложения 1. Условие согласованности (6) имеет простой геометрический смысл: оператор $\pi(g)$ переводит V_x в $V_{x\cdot g}$. Действительно, при $\varphi = \delta_x$ из равенства (6) получаем требуемое соотношение $\pi(g)\circ\Pi_x = \Pi_{x\cdot g}\circ\pi(g)$. Следовательно, все векторные пространства V_x, $x\in X$, изоморфны некоторому фиксированному пространству W и действие G имеет вид (7).

Наконец, уравнение коцикла непосредственно вытекает из соотношения $\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_1g_2)$ (фактически, они эквивалентны).

(b) Мы уже видели, что V является гильбертовой суммой пространств V_x, $x\in X$, и все слагаемые изоморфны некоторому пространству W. Таким образом, V изоморфно $L(X, W)$ относительно введенного выше скалярного произведения. Так как операторы сдвига $(T(g)f)(x) = f(x\cdot g)$ унитарны в V, оператор $A(x, g)$ должен быть унитарным в W. □

Доказательство закончено, но это еще не конец истории. Оказывается, что уравнение коцикла (8) может быть решено в более-менее явном виде. Мы вернемся к этому вопросу в лекции 5.

1.4. Двойственность Фробениуса для множеств. Этот пункт посвящен простому, но очень полезному принципу двойственности, который открыл Фробениус сто лет назад. Конечно, для изложения идей Фробениуса мы будем использовать современную терминологию.

До конца этого раздела мы фиксируем группу G и подгруппу H. Сначала рассмотрим соотношение между категориями $\mathcal{G}\,\mathrm{Sets}$ G-множеств и $\mathcal{H}\,\mathrm{Sets}$ H-множеств. Существуют два естественных функтора.

- **Функтор ограничения** res_H^G из $\mathcal{G}\,\mathrm{Sets}$ to $\mathcal{H}\,\mathrm{Sets}$. Если X — G-множество, то $\mathrm{res}_H^G X$ — то же самое множество, но рассматриваемое как H-множество. Если $\varphi : X_1 \to X_2$ — морфизм G-множеств (т. е. G-эквивариантное отображение), то $\mathrm{res}_H^G \varphi$ — то же самое отображение, но рассматриваемое как H-эквивариантное отображение.
- **Функтор индуцирования** ind_H^G из $\mathcal{H}\,\mathrm{Sets}$ в $\mathcal{G}\,\mathrm{Sets}$ не столь очевиден. Если Y — H-множество, то полагаем

$$\mathrm{ind}_H^G Y := G \underset{H}{\times} Y, \tag{9}$$

где G рассматривается как левое G-множество и правое H-множество. Таким образом, произведение является G-множеством. Если $\psi : Y_1 \to Y_2$ — H-эквивариантное отображение, то определим $\mathrm{ind}_H^G \psi$ как отображение, которое переводит $g \underset{H}{\times} y$ в $g \underset{H}{\times} \psi(y)$.

Настоятельно рекомендуем читателю проверить, что ind_H^G действительно является функтором. Наиболее важно — сформулировать "попросту", что именно следует проверять.

Принцип двойственности Фробениуса. *Для любых* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{GS})$ *и* $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{HS})$ *существует естественная биекция*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{GS}}(\mathrm{ind}_H^G Y, X) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{HS}}(Y, \mathrm{res}_H^G X). \tag{F}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{HS}}(Y, \mathrm{res}_H^G X)$. Это означает, что φ является отображением из Y в X, которое H-эквивариантно: $\varphi(h \cdot y) = h \cdot \varphi(y)$.

С другой стороны, элемент $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{GS}}(\mathrm{ind}_H^G Y, X)$ является G-эквивариантным отображением из $G \underset{H}{\times} Y$ в X, т. е. $\Phi(g_1 g \underset{H}{\times} y) = g_1 \cdot \Psi(g \underset{H}{\times} y)$. Мы оставляем читателю проверить, что формулы $\varphi(y) := \Phi(e \underset{H}{\times} y)$ и $\Phi(g \underset{H}{\times} y) = g \cdot \varphi(y)$ устанавливают требуемую биекцию $\varphi \leftrightsquigarrow \Phi$.

Замечание 2. Иногда ind_H^G называется **левым сопряженным функтором** res_H^G, поскольку равенство (F) напоминает хорошо известную формулу $(A^* x, y) = (x, Ay)$ для сопряженного оператора в пространстве со скалярным произведением. В нашем случае роль скалярного произведения в категории $\mathcal{C}$, значениями которого являются множества, выполняет бифунктор $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set} : X, Y \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

? Упражнение 4. Описать G-множества $\mathrm{ind}_H^G X$ для H-множеств X, где
(a) X — группа H, действующая на себе правыми сдвигами,
(b) X — одноточечное множество с тривиальным действием H.
Ответ. (a) группа G, действующая на себе левыми сдвигами, (b) однородное множество $X = G/H$.

1.5. Двойственность Фробениуса для векторных пространств. То, что нам действительно необходимо (и что открыл Фробениус), так это аналогичная конструкция и принцип двойственности для категории векторных пространств.

Обозначим через $\mathcal{G}\,\mathrm{Vec}(K)$ категорию, объекты которой — векторные пространства V над K с линейным G-действием, а морфизмы — G-эквивариантные линейные операторы (см. лекцию 5, п. 1.2). Мы часто будем опускать аргумент K в тех случаях, когда это не существенно для изложения.

Пусть $\mathcal{H}\,\mathrm{Vec}$ — соответствующая категория для подгруппы H.

Замечание 3. Категория $\mathcal{G}\,\mathrm{Vec}$ является, в некотором смысле, двойственной категории $\mathcal{GS}$ G-множеств. По крайней мере, существует естественный функтор $L_K : \mathcal{GS} \to \mathcal{G}\,\mathrm{Vec}(K)^\circ$, который ставит в соответствие множеству X векторное пространство $L_K(X)$ всех K-значных функций на X.

Действительно, как известно, каждому отображению множеств $\varphi : X \to Y$ соответствует отображение $L_K(\varphi)$ функций в противоположном направлении, обычно обозначаемое $\varphi^* : L_K(Y) \to L_K(X)$. Это отображение переводит $f \in L_K(Y)$ в $\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in L_K(X)$.

Ниже мы увидим, как это отражает природу двойственности Фробениуса для векторных пространств. Функтор ограничения $\mathrm{Res}_H^G : \mathcal{G}\,\mathrm{Vec} \to \mathcal{H}\,\mathrm{Vec}$ существует и определяется так же, как и функтор res_H^G для категории множеств. Мы используем прописную букву "R" в обозначении этого нового функтора, чтобы отличить его от res_H^G.

Различие между res_H^G и Res_H^G не только в том, что они действуют на различных категориях. Оказывается, что Res_H^G допускает не левый, а **правый сопряженный функтор** $\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{H}\,\mathrm{Vec} \to \mathcal{G}\,\mathrm{Vec}$. А именно,

$$\mathrm{Ind}_H^G V := (L_K(G) \otimes V)^H, \tag{10}$$

где верхний индекс H, как обычно, указывает подпространство H-инвариантных элементов.

Сформулируем главное свойство этого **функтора индуцирования**.

Линейный принцип двойственности Фробениуса. *Для любых H-векторного пространства W и G-векторного пространства V существует естественная линейная биекция*

$$\mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{Ind}_H^G V) \cong \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G W, V). \tag{LF}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим подробнее исходные данные. Удобно рассматривать $L_K(G)$ как левое G-векторное пространство и в то же время правое H-векторное пространство[2] $(g \cdot f \cdot h)(g_1) = f(hg_1g)$. Пусть $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H}\,\mathrm{Vec})$ — H-векторное пространство. Это означает, что мы имеем линейное представление (обозначаемое ρ) H в V. Пространство $V \otimes L_K(G)$ — это просто пространство V-значных функций на G. Правое действие H на этом пространстве имеет вид $(F \cdot h)(g) = \rho(h^{-1})F(hg)$. Следовательно, G-векторное пространство $\mathrm{Ind}_H^G V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G}\,\mathrm{Vec})$ состоит из V-значных функций F на G таких, что

$$F(hg) = \rho(h)F(g) \quad \text{для всех } h \in H,\ g \in G. \tag{11}$$

Левое действие (т. е. представление) $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ группы G в этом пространстве определяется правыми сдвигами: $(\mathrm{Ind}_H^G \rho(g)F)(g_1) = F(g_1g)$.

Теперь рассмотрим сплетающий оператор $a \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G W, V)$, т. е. $a(h \cdot w) = \rho(h)a(w)$. Можно определить отображение $A \in \mathrm{Hom}_G(W, \mathrm{Ind}_H^G V)$ следующим образом. Определим Aw как V-значную функцию F_w на G по формуле $F_w(g) = a(g \cdot w)$. Тогда $F_w(hg) = a(hg \cdot w) = \rho(h)a(g \cdot w) = \rho(h)F_w(g)$, откуда следует, что F_w принадлежит $\mathrm{Ind}_H^G V$. Далее, $F_{g\cdot w}(g_1) = a(g_1 \cdot g \cdot w) = F_w(g_1g) = (g \cdot F_w)(g_1)$, откуда следует, что $A(g \cdot w) = g \cdot Aw$, т. е. оператор $A : w \mapsto F_w$ сплетающий. □

[2] Напомним, что формула $(g \cdot f)(x) = f(x \cdot g)$ определяет левое действие группы G на пространство функций.

Замечание 4. В терминах чисел сплетения: $i(A, B) = \dim \mathrm{Hom}(A, B)$ (LF) эквивалентно равенству $i(W, \mathrm{Ind}_H^G V) = i(\mathrm{Res}_H^G W, V)$, которое опять же выглядит так же, как равенство в замечании 2. Но теперь Ind_H^G действует на правый сомножитель и поэтому называется **правым сопряженным функтором**.

2. Действия групп Ли и алгебр Ли на многообразиях

В этом разделе мы рассматриваем действия групп Ли на многообразиях и связь с действиями алгебр Ли.

2.1. Однородные многообразия. С этого момента мы считаем, что все рассматриваемые группы G — группы Ли и все G-множества — гладкие многообразия с гладким G-действием. Другими словами, мы рассматриваем гладкие гомоморфизмы группы Ли G в бесконечномерную группу $\mathrm{Diff}\, M$ всех диффеоморфизмов гладкого многообразия M.[3]

В основном мы интересуемся транзитивными действиями или однородными многообразиями. Оказывается, что все утверждения леммы 1 из п. 1.2 остаются справедливы, если мы ограничимся рассмотрением только замкнутых подгрупп $H \subset G$. Более точно, имеет место следующая

Лемма 2. *Существует взаимно однозначное соответствие*

(a) *между однородными G-многообразиями с отмеченной точкой и замкнутыми подгруппами $H \subset G$,*

(b) *между однородными G-многообразиями и классами сопряженности замкнутой подгруппы $H \subset G$.*

Доказательство. Рассуждения такие же, как в лемме 1, но надо учесть теорему 1 из лекции 3, п. 1.1. □

В силу леммы 2 существует столько же однородных G-многообразий, сколько классов сопряженности замкнутых подгрупп группы G. В частности, можно перечислить все однородные многообразия, если известны все группы Ли и все их замкнутые подгруппы. Ниже мы покажем, как провести соответствующие рассуждения при малых размерностях, используя технику алгебр Ли.

Пример 4. Пусть $G = SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = 1 \right\}$. Имеется конечное число классов сопряженности замкнутых подгрупп группы G, и мы их все перечислим.

Согласно теореме 1 все эти подгруппы являются гладкими подмногообразиями G. Поэтому можно классифицировать их по размерности. Сначала рассмотрим связные подгруппы. Они соответствуют подалгебрам из

[3] Эта формулировка имеет смысл, лишь когда $\mathrm{Diff}\, M$ снабжена структурой бесконечномерного гладкого многообразия. Такую структуру действительно можно ввести, но мы не будем вдаваться в детали.

$\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Все двумерные подалгебры в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ сопряжены подалгебре $\mathfrak{b}$ верхних треугольных матриц. Следовательно, все двумерные связные подгруппы образуют единственный класс, представителем которого будет верхняя треугольная подгруппа $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a > 0 \right\}$.

Одномерная подалгебра порождается элементом $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, и пропорциональные элементы порождают ту же подалгебру. Относительно сопряженного действия G на $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ существуют три типа X: с вещественными различными собственными значениями $\pm t$, с одним двойным собственным значением 0 и с чисто мнимыми различными собственными значениями $\pm it$. Следовательно, семейство связных одномерных подгрупп группы G распадается на три класса сопряженности со следующими представителями:

1) $H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, a > 0 \right\}$ (класс всех диагонализируемых подгрупп),

2) $N = [B,B] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ (класс унипотентных подгрупп),

3) $T = SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \right\}$ (класс всех компактных подгрупп).

Подгруппы B и N допускают единственное несвязное расширение $\widetilde{B}$ и $\widetilde{N}$ с двумя связными компонентами. Эти расширения получаются присоединением нетривиального центрального элемента $\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Подгруппа T не имеет расширений. Максимальное расширение $\widetilde{H}$ — это нормализатор $N_G(H)$ подгруппы H группы G, который получается из H присоединением элемента $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Оно имеет подгруппу H_1 индекса 2, порожденную H и $\varepsilon = \tau^2$.

Опишем некоторые однородные пространства. Пространство $G/\widetilde{B}$ изоморфно вещественной проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, где G действует **дробно-линейными** преобразованиями (или преобразованиями Мёбиуса): $x \mapsto \dfrac{ax+c}{bx+d}$. Очевидно, что стабилизатор $x = 0$ определяется равенством $c = 0$ и, следовательно, совпадает с $\widetilde{B}$.

Некоторые двумерные однородные G-многообразия встречаются как G-орбиты в присоединенном представлении G. Введем координаты (x,y,t) в $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ такие, что общий элемент $A \in \mathfrak{g}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} x & y+t \\ y-t & -x \end{pmatrix}$. Образ G при присоединенном представлении сохраняет квадратичную форму $\det A = -x^2 - y^2 + t^2$. Следовательно, он содержится в группе $O(1,2)$ — группе изометрий псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,2}$ (пространства Минковского). Будучи связным, этот образ на самом деле содержится в группе $SO_+(1,2,\mathbb{R})$, связной компоненте, содержащей единицу. Эта группа состоит из линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму, ориентацию $\mathbb{R}^{1,2}$ и верхнюю часть светового конуса, определенную неравенством $t > \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$.

Однородное пространство G/T реализуется как одна полость двуполостного гиперболоида, определенного уравнением $t^2 = x^2 + y^2 + r^2$ (так как T является в точности стабилизатором точки $(0, 0, r)$).

Пространство G/H_1 реализуется как однополостный гиперболоид $x^2 + y^2 = t^2 + r^2$ (так как H_1 является стабилизатором $(r, 0, 0)$).

Пространство $G/\widetilde{N}$ реализуется как открытая пола конуса $x^2 + y^2 = t^2$, заданная условием $t > 0$ (так как $\widetilde{N}$ является стабилизатором $(0, r, r)$) (см. рис. 1).

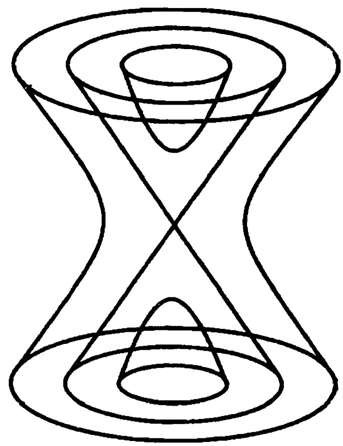

Рис. 1

Упражнение 5. Пусть G действует на $\mathbb{R}^2$ стандартным представлением.

(a) Показать, что $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ является однородным пространством G/N.

(b) Описать G-эквивариантное накрывающее отображение $p : G/N \to G/\widetilde{N} \subset \mathfrak{g}$.

Топология однородных многообразий

Многие топологические задачи в случае однородных многообразий можно свести к чисто алгебраическим вопросам. Здесь мы ограничимся одним примером: гомотопическими группами (и связанными с ними группами гомологий и когомологий).

Пусть $X = G/H$ — однородное многообразие. Тогда имеем точную последовательность гомотопических групп

$$\begin{aligned}&\cdots \to \pi_n(H) \to \pi_n(G) \to \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(H) \to \dots\\&\cdots \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \pi_1(X) \to \pi_0(H) \to \pi_0(G) \to \pi_0(X) \to \{1\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Ниже мы обычно предполагаем, что группа G связна и односвязна. Тогда $\pi_0(G) = \pi_1(G) = \{1\}$. Известно, что в этом случае также $\pi_2(G) = \{1\}$. Таким образом, из (12) получаем следующие изоморфизмы:

$$\pi_0(X) = \{1\}, \quad \pi_k(X) \cong \pi_{k-1}(H), \quad k = 1, 2. \tag{13}$$

Напомним, что некоторые группы гомологий и когомологий можно легко получить из гомотопических групп. Например, если X связно, то $H_1(X, \mathbb{Z})$ является **абелианизацией** $\pi_1(X, \mathbb{Z})$: $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X, \mathbb{Z})/[\pi_1(X, \mathbb{Z}), \pi_1(X, \mathbb{Z})]$. Для односвязного X имеем $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_2(X, \mathbb{Z})$ и, если $\pi_2(X)$ тривиально, то $H_3(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_3(X, \mathbb{Z})$.

Если группы гомологий не имеют кручений (например, изоморфны $\mathbb{Z}^k$ для некоторого k), то $H_i(X, \mathbb{R}) \cong H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ и $H^i(X, \mathbb{R}) \cong H_i(X, \mathbb{R})^*$. ■

Для дальнейшего мы сформулируем одно следствие этих результатов.

Предложение 3. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, действующая на некотором гладком многообразии M. G-орбита $\Omega \subset M$ односвязна тогда и только тогда, когда стабилизатор G_F точки $F \in \Omega$ связен. В этом случае имеем естественный изоморфизм: $H^2(\Omega, \mathbb{R}) \cong H^1(G_F, \mathbb{R})$.*

Схема доказательства (в терминах дифференциальных форм). Мы можем представить класс $c \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$ замкнутой дифференциальной формой σ. Пусть $p : G \to \Omega$ — канонический проектор: $p(g) = g \cdot F$. Тогда форма $p^*\sigma$ замкнута и, следовательно, точна (так как $H^2(G, \mathbb{R}) = 0$). Поэтому $p^*\sigma = d\theta$ для некоторой 1-формы θ на G. Сужение на G_F приводит к 1-форме $\theta_0 := \theta|_{G_F}$. Эта форма замкнута, поскольку $d\theta_0 = d\theta|_{G_F} = p^*\sigma|_{G_F} = p^*(\sigma|_{p(G_F)}) = 0$. Класс $[\theta_0]$ представляет образ c в $H^1(G_F, \mathbb{R})$. □

Пример 5. Пусть $G = SU(2)$, $H = U(1)$, $X = S^2$. Так как $SU(2) \cong S^3$ и $U(1) \cong S^1$ как гладкие многообразия, из (12) получаем $\pi_0(S^2) = \pi_1(S^2) = \{1\}$ и $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(H) \cong \mathbb{Z}$. В силу предложения 3 $H^2(S^2, \mathbb{R}) \cong H^1(S^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Упражнение 6. Показать, что

(a) $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $n \geqslant 3$,

(b) $\pi_1(SU(n)) = \pi_2(SU(n)) = 0$ при $n \geqslant 2$.

Указание. Использовать (12) и диффеоморфизмы $SO(n+1)/SO(n) \cong S^n$ и $SU(n+1)/SU(n) \cong S^{2n+1}$.

2.2. Векторные поля. Множество $\mathrm{Vect}\, M$ всех гладких векторных полей на гладком многообразии M образует алгебру Ли относительно **скобки Ли** $[v_1, v_2] = v_1v_2 - v_2v_1$. Здесь мы рассматриваем векторные поля как дифференциальные операторы на M или как дифференцирования алгебры $\mathcal{A}(M)$ (см. лекцию 1).

Эта алгебра Ли может рассматриваться как $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}\, M)$.[4] Поэтому естественно ввести следующее определение. Под **левым действием алгебры Ли** $\mathfrak{g}$ на многообразие M понимается гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}\, M$: $X \mapsto v_X$. Действие называется **эффективным** (или **точным**), если ядро этого гомоморфизма нулевое.

Пример 6. Матричная алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ имеет простую реализацию векторными полями на $\mathbb{R}^n$: $A = \|a_i^j\| \mapsto a_i^j x^i \partial_j$.

Ввиду теоремы Адо любая вещественная алгебра Ли может быть реализована линейными векторными полями на векторном пространстве.

Пример 7. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная n-мерная алгебра Ли с базисом $X_1, \ldots, X_n$, и пусть $\{c_{ij}^k\}$ — соответствующие структурные константы: $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$. Мы можем рассматривать $X_1, \ldots, X_n$ как координаты в двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Обозначим через ∂^j частную производную по X_j. Тогда формула

$$X_i \mapsto v_i := c_{ij}^k X_k \partial^j \tag{14}$$

определяет **коприсоединенное представление** $\mathfrak{g}$ векторными полями на $\mathfrak{g}^*$. Равенство $[v_i, v_j] = v_{[X_i,X_j]} = c_{ij}^k v_k$ следует из тождества Якоби (и эквивалентно ему).

Заметим, что центральные элементы $\mathfrak{g}$ переходят в нулевое векторное поле. Поэтому, вообще говоря, коприсоединенное действие не является эффективным.

Много интересных примеров конечномерных алгебр можно построить как **подфакторы**[5] некоторой бесконечномерной алгебры. Например, все матричные алгебры $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ являются подалгебрами $\mathfrak{gl}(\infty,\mathbb{R})$ и любая n-мерная алгебра Ли является фактором свободной алгебры Ли с n образующими.

Пример 8. Рассмотрим бесконечномерную алгебру Ли L голоморфных векторных полей на $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$, которая имеет вид $v = P(z)\dfrac{d}{dz}$, где $P \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ — полином Лорана от z. Эта алгебра имеет естественный базис $\{X_k = z^{k+1}\dfrac{d}{dz}, k \in \mathbb{Z}\}$ с коммутационными соотношениями

$$[X_k, X_l] = (l-k)X_{k+l}. \tag{15}$$

Эта алгебра Ли имеет несколько вещественных форм и много конечномерных подфакторов. Именно, пусть L_n обозначает линейную оболочку $\{X_k, k \geqslant n\}$. Тогда L_n является подалгеброй Ли алгебры L при $n \geqslant -1$ и L_m является идеалом в L_n при $m \geqslant n \geqslant 0$.

Таким образом, $L_{n,m} := L_n/L_m$ — алгебра Ли конечной размерности $m-n$, действующая линейно в m-мерном пространстве $z\mathbb{C}[z]/z^{m+1}\mathbb{C}[z]$.

[4] Читателю следует помнить, что теория бесконечномерных группы Ли более сложна, чем ее конечномерный вариант. Большинство прямых аналогов оказываются неверны и могут быть использованы лишь как эвристические соображения.

[5] **Подфактором** объекта категории называется фактор подобъекта (или подобъект фактор-объекта).

Выбирая базис $\{z^k, 1 \leqslant k \leqslant m\}$, получаем матричную реализацию $L_{0,m}$ $m \times m$-матрицами. В частности, общий элемент $L_{0,m}$ имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k X_k = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & & 0 \\ a_1 & 2a_0 & 0 & & 0 \\ a_2 & 2a_1 & 3a_0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m-1} & 2a_{m-2} & 3a_{m-3} & & ma_0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

2.3. Действия групп Ли и действия алгебр Ли. Пусть G – группа Ли и M — гладкое многообразие. Любому правому G-действию $M \times G \to M$ соответствует левое действие алгебры Ли $\mathfrak{g} \to \mathrm{Vect} M$. А именно, пусть $X \in \mathfrak{g}$, и пусть $g_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — произвольная гладкая кривая в G такая, что $g_X(0) = e$ и $\dot{g}_X(0) = X$. Определим векторное поле v_X на M формулой

$$v_X(m) = \frac{d}{dt}(m \cdot g_X(t)) \big|_{t=0} . \tag{17}$$

Проверим, что $X \mapsto v_X$ — левое действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на M. Рассмотрим операторы $T(g)$, $g \in G$, на $C^\infty(M)$, определенные формулой

$$(T(g)f)(m) = f(m \cdot g). \tag{18}$$

Они образуют линейное представление группы G в пространстве $C^\infty(M)$, т. е. $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$. Векторное поле v_X, рассматриваемое как дифференциальный оператор на M, может быть определен как $v_X = \frac{d}{dt}T(g_X(t)) \big|_{t=0}$. Пусть $g_Y(t)$ — кривая такая, что $g_Y(0) = e$ и $\dot{g}_Y(0) = Y$. Из равенств

$$T(g_X(t)) = 1 + t \cdot v_X + o(t), \quad T(g_Y(t)) = 1 + t \cdot v_Y + o(t)$$

следует, что

$$h(t) := g_X(\sqrt{t}) g_Y(\sqrt{t}) g_X^{-1}(\sqrt{t}) g_Y^{-1}(\sqrt{t}) = 1 + t(v_X v_Y - v_Y v_X) + o(t).$$

Из второго определения $\mathrm{Lie}(G)$ (см. лекцию 3) вытекает, что $\dot{h}(0) = [X, Y]$. Следовательно, $[v_X, v_Y] = v_{[X,Y]}$.

Рассмотрим теперь обратную задачу: задано действие $X \mapsto v_X$ группы $\mathfrak{g}$ на M и требуется определить действие G на M так, чтобы векторные поля v_X определялись формулой (17).

Оказывается, что такое действие, вообще говоря, не существует и может быть определено лишь при дополнительных условиях.

Предложение 4. *Предположим, что G односвязна и M компактно. Тогда любое действие $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ на M гладкими векторными полями поднимается до действия G диффеоморфизмами.*

Мы не приводим доказательства, однако заметим, что если хотя бы одно из условий не выполняется, то заключение неверно. Ниже мы приведем контрпримеры.

Пример 9. (a) Пусть $G = \mathbf{T}^1$ с параметром $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, и мы выберем $X = \frac{d}{dt}$ в качестве базисного элемента $\mathfrak{g}$. Выберем произвольно целое число $n > 1$ и положим $M = \mathbf{T}^1$ с параметром $x \in \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$. Полагаем $v_X = \dfrac{d}{dx}$.

(b) Пусть $G = \mathbb{R}$ с параметром t. Тогда $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ и мы опять выберем $X = \dfrac{d}{dt}$ в качестве базисного элемента $\mathfrak{g}$. Положим $M = \mathbb{R}$ с параметром x и определим $v_X = x^2 \dfrac{d}{dx}$.

В обоих случаях не существует действия G на M, которое порождалось бы данным действием $\mathfrak{g}$. Действительно, требуемое отображение $G \times M \to M : (x,t) \mapsto x(t)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\dot{x}(t) = v_X(x(t)) = \begin{cases} 1 & \text{в случае (a)}, \\ x^2(t) & \text{в случае (b)}, \end{cases} \qquad x(0) = x.$$

Единственное решение имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} x + t & \text{в случае (a)}, \\ x/(1 - tx) & \text{в случае (b)}. \end{cases}$$

Оно определяется локально (в окрестности любой точки $(g,m) \in G \times M$), но не глобально.

В первом случае глобальное определение невозможно, так как образ в $\operatorname{Diff} M$ замкнутой кривой в G может быть незамкнутым: $x(1) = x + 1 \not\equiv x \mod n$. Таким образом, мы получаем многозначное отображение $G \to \operatorname{Diff} M$.

Во втором случае кривая $x(t)$ существует только при t из некоторого интервала, ограниченного с одной стороны, и уходит в бесконечность при приближении t к граничной точке. (Эта ситуация может быть проиллюстрирована наглядным примером $M = (0,1)$, $v_X = \dfrac{d}{dx}$.) Иногда можно исправить ситуацию за счет увеличения G или M. Например, в случае (a) можно заменить G накрытием $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$, а в случае (b) — заменить M компактификацией $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$.

Замечание 5. Для эффективного действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$ соответствующее действие группы G может быть неэффективным: оно может иметь дискретное ядро. Например, дробно-линейное действие $G = SL(2,\mathbb{R})$ на $X = \mathbb{P}^1$ не будет эффективным, тогда как соответствующее действие $\mathfrak{g}$ эффективно.

2.4. Инварианты. В этом пункте мы рассмотрим классификацию групповых орбит. Первый шаг — найти все инварианты действия группы.

Для любого правого G-пространства X мы определили в п. 2.3 левое действие (см. (18)) G на пространстве $L(X)$ функций, заданных на X.

Функция F называется **G-инвариантной**, если

$$g \cdot F = F \quad \text{для всех } g \in G. \tag{19}$$

Очевидно, что такая функция постоянна на каждой G-орбите в X. Обратно, если F постоянна вдоль каждой G-орбиты, она G-инвариантна.

Большей частью, мы будем рассматривать случай, когда X — векторное пространство над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и G действует линейно на X. В этом случае естественно начать изучение с полиномиальных и рациональных инвариантов.

Пусть $K[V] := S(V^*)$ — алгебра K-значных полиномиальных функций на V и $K(V) := \operatorname{Fract} K[V]$ — поле частных. Обозначим через $K[V]^G$ ($K(V)^G$) подалгебру G-инвариантных полиномов (подполе G-инвариантных рациональных функций). Функциональные уравнения (19) могут быть довольно сложными. Для связных групп Ли следующее простое наблюдение иногда оказывается полезным, так как оно сводит задачу к решению системы линейных уравнений с частными производными.[6]

Теорема 1. *Для связной группы Ли G пространство инвариантов можно определить системой линейных дифференциальных уравнений*

$$v_X F = 0, \tag{20}$$

где X пробегает любую систему $\{X_1, \dots, X_k\}$ образующих $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Действительно, если F — G-инвариант, то для любой гладкой кривой $g(t)$ имеем $g(t) \cdot F = F$. Поэтому (20) выполняется для $X = \dot{g}(0)$, т. е. для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Докажем обратное утверждение. Если система (20) выполняется для X_1 и X_2, то она также выполняется для любой линейной комбинации $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, а также для $Z = [X_1, X_2]$, так как $v_Y = \lambda_1 v_{X_1} + \lambda_2 v_{X_2}$ и $v_Z = [v_{X_1}, v_{X_2}]$. Таким образом, поскольку $\{X_1, \dots, X_k\}$ порождает $\mathfrak{g}$, (20) справедливо для всех $X \in \mathfrak{g}$. Пусть $\mathcal{E} \subset G$ — окрестность e, которая накрывается экспоненциальным отображением. Для любого $g \in \mathcal{E}$ имеем $g = \exp X$ при некотором $X \in \mathfrak{g}$. Рассмотрим кривые $g_X(t) = \exp(tX) \subset G$ и $x(t) = x \cdot g_X(t) \subset X$. Последняя кривая имеет свойство $\dfrac{d}{dt} F(x(t)) = (v_X F)(x(t))$. Теперь из (20) вытекает, что $t \mapsto F(x(t))$ — постоянное отображение. Следовательно, для $g \in \mathcal{E}$ имеем $(T(g)F)(x) = F(x \cdot g) = F(x \cdot \exp X) = F(x)$.

Теперь используем следующий общий результат.

Лемма 3. *Пусть V — окрестность точки e в связной топологической группе G. Тогда G порождается V.*

Доказательство. Пусть G_0 — подгруппа, порожденная V. Она открыта в G (как объединение открытых множеств $V, V \cdot V, V \cdot V \cdot V, \dots$). С другой стороны, G_0 замкнута (как дополнение объединения всех G_0-классов смежности, отличных от самой G_0). Поскольку G связна, имеем $G_0 = G$. □

Доказательство теоремы 1 (продолжение). Применяя эту лемму к $V = \mathcal{E}$, получаем, что любое решение F системы (20) является G-инвариантом. Теорема доказана. □

[6] Отметим, однако, что часто простейший способ найти решения системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными состоит в использовании эквивалентности этой системы и равенства (19), когда описание G-орбит известно.

Очевидно, что для транзитивного действия G все инварианты постоянны. Следующий пример показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 10. Пусть $X = \mathbf{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор с координатами $(t_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ 1 \leqslant i \leqslant n)$. Определим действие группы $G = \mathbb{R}$ на X формулой

$$x \cdot (t_1, \dots, t_n) = (t_1 + \alpha_1 x, \dots, t_n + \alpha_n x),$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вещественные числа, линейно независимые над $\mathbb{Q}$. Тогда не существует непрерывных G-инвариантов на X, за исключением констант.

Действительно, если F — инвариант и $F(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi i (k,t)}$ — его ряд Фурье, то из (20) получаем, что $c_k = e^{2\pi i x (k,\alpha)} c_k$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $c_k = 0$, за исключением случая, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \alpha_i = 0$, что возможно лишь при $k = 0$.

Известно, что для алгебраических действий связных комплексных алгебраических групп на аффинных алгебраических многообразиях существует достаточно рациональных инвариантов, чтобы отделить орбиты в следующем смысле.

Теорема 2. *Общее множество уровня всех рациональных инвариантов состоит в точности из одной орбиты.*

Для вещественных алгебраических групп общие множества уровней инвариантов распадается на конечное число связных компонент, которые не отделяются рациональными инвариантами (ср. с геометрией квадратичных форм на вещественной аффинной плоскости; Две ветви гиперболы $xy = 1$ дают наиболее наглядный пример).

Теперь сравним рациональные и полиномиальные инварианты. Пусть $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ — гомоморфизм из G в мультипликативную группу комплексных чисел. Будем называть полином P на G-пространстве W **относительным инвариантом веса** λ, если $T(g)P = \lambda(g)P$ для всех $g \in G$. Очевидно, что для любых двух относительно инвариантных полиномов P и Q одного и того же веса их отношение $R = \dfrac{P}{Q}$ является рациональным инвариантом. Обратное утверждение также верно.

Теорема 3. *Любой рациональный инвариант R матричной группы Ли, действующей на векторном пространстве W, имеет вид $R = \dfrac{P}{Q}$ для некоторых относительно инвариантных полиномов P и Q одного и того же веса. Более того, в этом случае гомоморфизм λ является рациональной функцией матричных элементов $g \in G$.*

Набросок доказательства. Мы воспользуемся тем, что любой полином может быть записан как произведение **неприводимых** полиномов и эта факторизация единственна с точностью до порядка множителей и умножения на числа.

Пусть $R = \dfrac{P}{Q}$ — рациональный инвариант, и пусть $P = P_1 \dots P_k, Q = Q_1 \dots Q_l$ — разложения числителя и знаменателя на неприводимые множители. Можно считать, что ни один из P_i не пропорционален никакому Q_j. Так как из равенства $T(g) \cdot R = R$ следует

$$T(g)P_1 \dots T(g)P_k \cdot Q_1 \dots Q_l = P_1 \dots P_k \cdot T(g)Q_1 \dots T(g)Q_l,$$

получаем, что каждый $T(g)P_i$ пропорционален некоторому P_j и каждый $T(g)Q_m$ пропорционален некоторому Q_n. Следовательно, P и Q должны быть относительно инвариантными полиномами (одного и того же веса).

Рациональность соответствующего веса λ очевидна: $\lambda(g) = \dfrac{g \cdot P}{P}$. □

В частности, для полупростой группы, которая не имеет нетривиальных гомоморфизмов в $\mathbb{C}^\times$, все рациональные инварианты являются частными полиномиальных инвариантов.

Такое же утверждение справедливо для линейной унипотентной группы, которая не имеет нетривиальных рациональных гомоморфизмов в $\mathbb{C}^\times$.

Приведем полезную общую схему построения инвариантов группы G, действующей в пространстве X.

Предположим, что мы можем построить подмножество $S \subset X$, которое пересекает почти каждую орбиту в единственной точке.[7] Любая инвариантная функция на X определяет при помощи сужения функцию на S. Обратно, любая функция на S может быть канонически продолжена до G-инвариантной функции, определенной почти всюду на X. Если S гладкое (алгебраическое, рациональное и т. п.) многообразие, то мы получаем информацию о гладких (алгебраических, рациональных и т. п.) инвариантах.

Предупреждение. Ограничение (сужение) на S обычно сохраняет хорошие свойства инвариантов, тогда как процедура продолжения таким свойством не обладает. Например, продолжение полиномиальной функции может быть всего лишь рациональным (см. пример 12 ниже).

Пример 11. Пусть $G = GL(n, \mathbb{R})$ действует на $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ сопряжением. Пусть S — аффинное подмножество, состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & & c_1 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что S пересекает почти все классы сопряженности.[8] Более того, пересечение, если оно непусто, содержит ровно одну точку. Так

[7]Термин “почти каждую” можно понимать по-разному. В алгебраической геометрии этот термин означает, что объединение “хороших” орбит непусто и открыто в топологии Зариского. Другими словами, объединение “плохих” орбит содержится в алгебраическом подмногообразии меньшей размерности.

[8]С геометрической точки зрения это означает, что для почти всех операторов $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ существует **циклический вектор** ξ, т. е. векторы $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$.

что мы можем рассматривать координаты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ точки пересечения как функции исходной матрицы $A \in X$. Фактически, они являются полиномиальными функциями и совпадают с точностью до знака с коэффициентами характеристического полинома $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot 1)$.

Таким образом, $K[X]^G = K[c_1, c_2, \ldots, c_n]$. Действительно, ограничение любого полинома $P \in K[X]^G$ на S является полиномом $\widetilde{P}$ от $c_1, c_2, \ldots, c_n$. На S справедливо равенство $P(a_{ij}) = \widetilde{P}(c_1(a_{ij}), c_2(a_{ij}), \ldots, c_n(a_{ij}))$, которое в силу G-инвариантности обеих частей остается верным почти всюду. Поскольку обе части являются полиномами, они совпадают всюду.

Известно замечательное обобщение этого примера на случай всех полупростых алгебр Ли. Это обобщение предложено Б. Костантом [Ko3] (см. также [IS]).

Пример 12. Пусть N_+ (соответственно N_-) — подгруппа строго верхних (соответственно нижних) треугольных матриц из $GL(n, K)$. Группа $G = N_+ \times N_-$ действует на $X = \mathrm{Mat}_n(K)$ по формуле $g = (n_+, n_-) : A \mapsto n_+ \cdot A \cdot n_-^{-1}$. В качестве S рассмотрим подпространство диагональных матриц $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда почти все G-орбиты пересекают S в единственной точке. Но теперь полиномиальные функции на S продолжаются до рациональных инвариантных функций на X. Именно, пусть $\Delta_k(A)$ — главный минор порядка k матрицы A. Он является G-инвариантным полиномом на X. Ограничение его на S равно $\lambda_1 \ldots \lambda_k$. Следовательно, линейная функция λ_k на S продолжается как инвариантная рациональная функция $\Delta_k(A)/\Delta_{k-1}(A)$ на X.

В случае коприсоединенного действия полиномиальные и рациональные инварианты играют важную роль в теории представлений ввиду их связи с инфинитезимальными характерами (см. ниже).

2.5*. Действия супергрупп Ли. В этом разделе мы объясним, что такое действие супергруппы $\mathcal{G}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ — супералгебра Ли $\mathcal{G}$. Напомним, что $\mathcal{G}$ имеет базисную группу Ли $G = \mathcal{G}(\mathbb{R})$ с $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Точно так же, $\mathcal{M}$ имеет базисное гладкое многообразие $M = \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Действие $\mathcal{G}$ на $\mathcal{M}$ включает действие G на M, но содержит некоторые дополнительные данные.

Согласно общему принципу эти дополнительные данные можно представить таким образом.

(i) Для любой суперкоммутативной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ мы имеем группу Ли $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, многообразие $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ и действие первой на второе:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cdot_{\mathcal{A}}} \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \quad (g, m) \mapsto g \cdot_{\mathcal{A}} m.$$

(ii) Для любого четного гомоморфизма $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ имеем гомоморфизм групп Ли $\varphi_G : \mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}(\mathcal{B})$ и гладкое отображение $\varphi_M : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}(\mathcal{A}) \times \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\cdot_{\mathcal{A}}} & \mathcal{M}(\mathcal{A}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_G \times \varphi_M} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_M} \\
\mathcal{G}(\mathcal{B}) \times \mathcal{M}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\cdot_{\mathcal{B}}} & \mathcal{M}(\mathcal{B})
\end{array}$$

Здесь горизонтальные стрелки обозначают действия группы. Более того, если имеем гомоморфизм $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, то справедлива другая коммутативная диаграмма, которая отражает равенства $\psi_G \circ \varphi_G = (\psi \circ \varphi)_G$ и $\psi_M \circ \varphi_M = (\psi \circ \varphi)_M$.

Изложенное выше можно закодировать в следующих данных:

(a) действие базисной группы Ли G на заданном супермногообразии $\mathcal{M}$ (т. е. гомоморфизм из G в группу $\operatorname{Aut} C^\infty(\mathcal{M})$),

(b) действие супералгебры Ли $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(\mathcal{G})$ векторными полями на $\mathcal{M}$ (т. е. гомоморфизм из $\mathfrak{g}$ в $\operatorname{Der} C^\infty(\mathcal{M})$),

(c) условие согласованности этих двух действий, именно, действие четной части $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ из $\mathfrak{g}$ должно совпадать с действием $\operatorname{Lie}(G) \equiv \mathfrak{g}_{\bar{0}}$.

Пример 13. Здесь мы рассмотрим действие супергруппы Пуанкаре на суперпространстве-времени Минковского. Сначала напомним некоторые основные факты об обычном пространстве-времени Минковского $M = \mathbb{R}^{1,3}$. Это вещественное 4-мерное векторное пространство с координатами (t, x, y, z). В физической литературе обычно используется обозначение x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Часто координата "время" x^0 обозначается через t, а пространственные координаты — через x^i, $i = 1, 2, 3$. Это векторное пространство снабжено квадратичной формой

$$\eta = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

В соответствии со значением $\eta(x)$, которое может быть отрицательным, нулевым или положительным, элементы M называются **пространственно-подобными**, **световыми** или **временно-подобными** векторами.

Множество M имеет удобную реализацию как векторное пространство всех эрмитовых 2×2-матриц

$$h = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad \eta(h) = \det h.$$

Группа Ли P аффинных преобразований M, сохраняющих псевдориманову структуру $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, называется **группой Пуанкаре**. Это полупрямое произведение **группы Лоренца** $L \cong O(1,3)$ линейных преобразований и абелевой нормальной подгруппы $T \cong \mathbb{R}^{1,3}$ переносов.

Группа L состоит из четырех связных компонент, которые характеризуются сохранением пространственной и временной ориентации. Обозначим через L_0 связную компоненту, содержащую единицу, которая называется **собственной группой Лоренца**. В стандартном базисе элемент $g \in L$ записывается матрицей $\|g^\nu_\mu\|$ и четыре связные компоненты различаются знаками g^0_0 и $\det g$.

Связная группа Ли L_0 (также обозначаемая $SO_0(1,3)$) не односвязна. Она имеет двулистную односвязную накрывающую группу $\widetilde{L}_0$, изоморфную $SL(2, \mathbb{C})$. Обозначим через $\widetilde{P}_0$ полупрямое произведение $\widetilde{L}_0 \ltimes T$.

Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{p}$ имеет следующую 4×4-матричную реализацию (где a и t — 2×2-комплексные матрицы):

$$A = \begin{pmatrix} a & t \\ 0 & -a^* \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} a = 0, \quad t^* = t.$$

Тогда мы получаем матричную реализацию $\widetilde{P}_0$ комплексными 4×4-матрицами вида

$$p = \begin{pmatrix} g & gt \\ 0 & (g^*)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \det g = 1, \quad t^* = t.$$

Центр C реализации $\widetilde{P}_0$ состоит из двух элементов $\{g = \pm 1, t = 0\}$ и $P_0 = \widetilde{P}_0/C$.

Действие P_0 на M в этой реализации можно описать следующим образом. Рассмотрим множество $X = G_{4,2}(\mathbb{C})$ всех двумерных подпространств в $\mathbb{C}^4$.

?

Упражнение 7. Показать, что $X \cong \widetilde{X}_{GL(2,\mathbb{C})}$, где $\widetilde{X}$ — множество 4×2-матриц вида $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, где $\operatorname{rk} x = 2$, и действие $GL(2, \mathbb{C})$ на $\widetilde{X}$ определяется с помощью правого умножения.

Указание. Любому $x \in \widetilde{X}$ соответствует плоскость в $\mathbb{C}^4$, порожденная столбцами x.

4×4-Матричная группа $\widetilde{P}_0$ действует на $\widetilde{X}$ левым умножением, и это действие коммутирует с правыми умножениями. Следовательно, существует действие $\widetilde{P}_0$ на множестве X $GL(2, \mathbb{C})$-орбит, которое имеет открытое плотное подмножество X_0, изоморфное $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Действительно, для почти всех орбит можно выбрать представителя $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$. Действие $\widetilde{P}_0$ на X_0 имеет вид $p \cdot h = g(h+t)g^*$. Как уже упоминалось, множество эрмитовых матриц, инвариантное при этих преобразованиях, можно отождествить с M. Заметим, что это действие $\widetilde{P}_0$ на M не является точным и факторизуется через $P = \widetilde{P}_0/C$.

Теперь рассмотрим суперрасширения описанной выше картины. Оказывается, что существует серия супералгебр Ли $\mathfrak{p}^{(N)}$, которое содержит $\mathfrak{p}$ как четную часть. Эти супералгебры Ли зависят от положительного целочисленного параметра N и реализуются комплексными $(N+4) \times (N+4)$-матрицами с блоками размеров 2, N, 2:

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} a & \theta & h \\ 0 & 0 & \theta^* \\ 0 & 0 & -a^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}_{\bar{0}} = \begin{pmatrix} a & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^* \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}, \quad \mathcal{X}_{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая односвязная супергруппа обозначается через $\widetilde{P}_0^{(N)}$, и ее фактор по центру — через $P_0^{(N)}$.

Напомним, что обычное пространство Минковского является однородным многообразием $M = P_0/L_0$ и может быть отождествлено с нормальной подгруппой T переносов.

Таким образом, мы определяем N-е **суперпространство Минковского** $\mathcal{M}^{4|4N}$ как однородное суперпространство $\widetilde{P}_0^{(N)}/\widetilde{L}_0 \cong P^{(N)}/L_0$. Как супермногообразие, оно отождествляется с нормальной суперподгруппой $T^{(N)}$ суперпереносов. Существенное отличие от классического случая состоит в том, что супергруппа $T^{(N)}$ *некоммутативна*.

Пространство $\mathcal{M}^{4|4N}$ имеет четыре вещественные четные координаты (t, x, y, z) и $2N$ комплексные нечетные координаты θ^i_+, θ^i_-, $i = 1, 2, \ldots, N$. Для простоты считаем, что $N = 1$.

Удобно ввести следующие обозначения. Пусть индексы a, b и $\dot{a}$, $\dot{b}$ принимают значения 0 и 1. Вместо старых координат $(x^\mu, \theta_\pm, \overline{\theta}_\pm)$ будем использовать следующие:

$$\theta^0 = \theta_+, \quad \theta^1 = \theta_-, \quad \theta^{\dot{0}} = \overline{\theta}_+, \quad \theta^{\dot{1}} = \overline{\theta}_-,$$

$$y^{0\dot{0}} = \frac{x^0 + x^1}{2}, \quad y^{1\dot{1}} = \frac{x^0 - x^1}{2}, \quad y^{0\dot{1}} = \frac{x^2 + ix^3}{2}, \quad y^{1\dot{0}} = \frac{x^0 - ix^3}{2},$$

так что $\overline{\theta^a} = \theta^{\dot{a}}$ и $\overline{y^{a\dot{b}}} = y^{b\dot{a}}$.

Общая **суперфункция** на $\mathcal{M}^{4|4}$ имеет вид

$$F(x;\theta) = f(x) + \theta^a f_a(x) + \theta^{\dot{a}} f_{\dot{a}}(x) + \theta^a\theta^{\dot{b}} f_{a\dot{b}}(x) + \theta^0\theta^1 f_{01}(x) + \theta^{\dot{0}}\theta^{\dot{1}} f_{\dot{0}\dot{1}}(x),$$

где коэффициенты $f, f_a, f_{\dot{a}}, \ldots$ — гладкие комплекснозначные функции на M. Действие L_0 на нечетных координатах θ^a — это так называемое **спинорное представление** π группы L_0, которое корректно определено только на двулистном накрытии $\widetilde{L}_0 \cong SL(2, \mathbb{C})$. Комплексные сопряженные величины $\theta^{\dot{a}}$ преобразуются согласно дуальному (комплексно сопряженному) представлению π^*. Отметим замечательный факт: тензорное произведение $\pi \otimes \pi^*$ относится к вещественному типу и эквивалентно комплексификации векторного представления L в $\mathbb{R}^{1,3}$.

Таким образом, коэффициенты $f, f_{01}, f_{\dot{0}\dot{1}}$ являются скалярами.[9] Коэффициенты f_a и $f_{\dot{a}}$ образуют спинорное поле и двойственное спинорное поле. В соответствии с замечанием выше коэффициенты $f_{a\dot{b}}$ интерпретируются как векторные поля на M.

Заметим, что каждое векторное поле на $M^{\mathbb{C}}$ можно записать в виде квадратичного полинома от спинорных переменных. В частности, векторы из светового конуса могут быть записаны в виде

$$\vec{v} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = \left(\frac{\theta_+\overline{\theta}_+ + \theta_-\overline{\theta}_-}{2}, \mathrm{Re}(\theta_+\overline{\theta}_-), \mathrm{Im}(\theta_+\overline{\theta}_-), \frac{\theta_+\overline{\theta}_+ - \theta_-\overline{\theta}_-}{2}\right)$$

или, в спинорных обозначениях,

$$y^{a\dot{b}} = \theta^a\theta^{\dot{b}}.$$

Рассмотрим левое и правое действия $\mathcal{M}^{4|4}$ на себе. Четная часть коммутативна и действует обычными переносами в четных переменных $y^{a\dot{b}}$. Правое действие нечетной части задается левоинвариантными нечетными векторными полями $D_a = \partial_a - \theta^{\dot{b}}\partial_{a\dot{b}}$ и $D_{\dot{a}} = \partial_{\dot{a}} - \theta^b\partial_{b\dot{a}}$, где $\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial\theta^a}$, $\partial_{\dot{a}} = \dfrac{\partial}{\partial\theta^{\dot{a}}}$, $\partial_{a\dot{b}} = \dfrac{\partial}{\partial y^{a\dot{b}}}$. Эти поля удовлетворяют коммутационным соотно-

[9] По поводу собственной группы Лоренца L_0 заметим, что если мы рассматриваем действие полной группы Лоренца то f_{01} и $f_{\dot{0}\dot{1}}$ являются так называемыми **псевдоскалярами**, которые меняют знак при преобразованиях, обращающих временную или пространственную ориентацию.

шениям

$$[D_a, D_b] = [D_{\dot a}, D_{\dot b}] = 0, \quad [D_a, D_{\dot b}] = -2\partial_{a\dot b}.$$

Заметим, что это правое действие коммутирует с левым действием, которое задается правоинвариантными нечетными векторными полями $Q_a = \partial_a + \theta^{\dot b}\partial_{a\dot b}$ и $Q_{\dot a} = \partial_{\dot a} + \theta^b\partial_{b\dot a}$. Так как поля $Q_{\dot a}$ и $Q_{\dot b}$ коммутируют (так же, как Q_a и Q_b), мы можем наложить на суперфункции F на $\mathcal{M}^{4|4}$ **суперсимметрические ограничения**:

$$Q_{\dot 0}F = Q_{\dot 1}F = 0 \quad (\text{или} \quad Q_0F = Q_1F = 0).$$

Суперфункции, удовлетворяющие этим уравнениям, называются **киральными** (или **антикиральными**). Оказывается, что именно эти суперфункции входят в фундаментальные уравнения, описывающие элементарные частицы. Так что физический мир провозгласил новый тип симметрии: суперсимметрию.

Здесь мы остановимся и для интересующегося читателя опять укажем фундаментальную книгу [QFS] для дальнейшего ознакомления с этой захватывающей тематикой.

3. Геометрические гильбертовы пространства

3.1. Инвариантное интегрирование и естественные гильбертовы пространства. Гильбертовы пространства, используемые в теории представлений групп Ли, часто строят из геометрических объектов. Например, пусть M — гладкое G-многообразие. Предположим, что существует G-инвариантная дифференциальная форма ω старшей степени на M, которая не обращается в нуль. В этом случае M ориентируемо, и мы выбираем ориентацию так, чтобы коэффициент ω в любой локальной карте был положительным. Тогда G-инвариантное положительно определенное скалярное произведение на $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(M)$ определяется формулой

$$(f_1, f_2) = \int_M f_1\overline{f_2}\omega. \tag{21}$$

Будем рассматривать M как правое G-пространство. Операторы сдвига $\pi(g)$, определенные формулой

$$(\pi(g)f)(m) = f(m\cdot g), \tag{22}$$

действуют на $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(M)$ и сохраняют введенное выше скалярное произведение.

Обозначим через $\mathcal{H}$ пополнение $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(M)$ относительно нормы, определенной скалярным произведением (21): $\|f\| = (f,f)^{1/2}$. Тогда $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и та же формула (22) определяет унитарное представление π группы G в $\mathcal{H}$.

Замечание 6. Напомним, что элементы $\mathcal{H}$ могут быть реализованы как классы эквивалентности измеримых по Лебегу квадратично интегрируемых функций на M. На самом деле нам никогда не понадобится все пространство $\mathcal{H}$, за исключением доказательств общих теорем (таких, как спектральная теорема для унитарных и самосопряженных операторов). Наиболее интересные элементы $\mathcal{H}$ всегда принадлежат подпространству $\mathcal{H}^\infty$ гладких векторов или даже еще меньшему подпространству $\mathcal{H}^\omega$ аналитических векторов.

Естественно поставить вопрос: насколько общего характера эта конструкция и, в частности, когда можно определить инвариантное интегрирование? Ответ дает следующая

Теорема 4. *Пусть $M = G/H$ — однородное G-многообразие. Инвариантный элемент $\omega \in \Omega^n(M)$ существует тогда и только тогда, когда действие стационарной подгруппы H на касательное пространство $V = T_H(G/H)$ сохраняет форму объема. (Другими словами, образ H в $GL(V)$ содержится в $SL(V)$.)*

Доказательство вытекает из принципа Фробениуса. □

Таким образом, инвариантная форма объема, вообще говоря, не существует. Это препятствие можно преодолеть, если ввести новые геометрические объекты: так называемые **полуплотности** и **полуформы**.

Пространство полуплотностей на многообразии M ввел в теорию представлений Макки в 50-е годы под названием "естественное гильбертово пространство" $\mathcal{H}(M)$.

Пусть M — произвольное (не обязательно ориентируемое) гладкое многообразие. Введем комплексное линейное расслоение $|\mathrm{vol}|^{1/2}$ над M, сечения которого над локальной картой U_α, $\alpha \in A$, можно символически записать в виде

$$s\,\big|_{U_\alpha} = f_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\sqrt{|dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n|}.$$

Если для каждого $\alpha \in A$ выбрать $s_\alpha = \sqrt{|dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n|}$ как базисное сечение над U_α, то функции перехода принимают вид

$$c_{\alpha\beta} = \frac{s_\alpha}{s_\beta} := \left| \frac{D(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)}{D(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n)} \right|^{1/2}$$

Это выражение служит формальным определением линейного расслоения $|\mathrm{vol}|^{1/2}$.

Скалярное произведение (21) обобщается для полуплотностей следующим образом. Для любых двух гладких сечений s_1, s_2 расслоения $|\mathrm{vol}|^{1/2}$ можно определить плотность $\langle s_1, s_2\rangle$ степени 1 на M локальными выражениями

$$\langle s_1, s_2\rangle\,\big|_{U_\alpha} = (f_1)_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)\overline{(f_2)_\alpha(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)} \cdot |dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n|.$$

Введем скалярное произведение двух сечений

$$(s_1, s_2) = \int_M \langle s_1, s_2\rangle. \qquad (21')$$

Обычной процедурой пополнения получаем гильбертово пространство $\mathcal{H}(M)$, которое состоит из (классов эквивалентности) квадратично интегрируемых сечений $|\mathrm{vol}|^{1/2}$.

Заметим, что полуплотности образуют естественное расслоение: любому диффеоморфизму φ многообразия M соответствует линейный оператор φ^*, действующий на полуплотностях. В частности, для правого G-многообразия соответствующие представление G в $\mathcal{H}(M)$ можно символически записать в виде

$$\begin{aligned}\pi(g) : f(m)\sqrt{|d^n m|} &\mapsto f(m\cdot g)\sqrt{|d^n(m\cdot g)|}\\ &= \left(f(m\cdot g)\sqrt{\left|\frac{d^n(m\cdot g)}{d^n m}\right|}\right)\sqrt{|d^n m|}.\end{aligned} \tag{22'}$$

По определению это представление унитарно.

3.2. Полуформы. Предположим, что M — ориентируемое многообразие и существует комплексное линейное расслоение $\mathcal{L}$ над M с функциями перехода $\varphi_{\alpha\beta}$ такими, что $|\varphi_{\alpha\beta}|^2 = \dfrac{D(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)}{D(x^1_\beta, \ldots, x^n_\beta)}$. По крайней мере одно такое расслоение существует: это построенное выше расслоение $|\mathrm{vol}|^{1/2}$. Тогда как расслоение объема vol и расслоение $|\mathrm{vol}|^{1/2}$ полуплотностей тривиальны, общее расслоение $\mathcal{L}$ полуформ может оказаться нетривиальным.

Пример 14. Пусть M — единичная окружность S^1, отождествленная с $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с вещественной координатой $x \bmod 1$. Пусть $\mathcal{L}_0$ — нетривиальное вещественное линейное расслоение над S^1 с общим пространством, диффеоморфным ленте Мёбиуса. Сечение $\mathcal{L}_0$ может быть реализовано **антипериодическими** функциями на $\mathbb{R}$ такими, что $f(x+1) = -f(x)$.

В качестве $\mathcal{L}$ возьмем комплексификацию $\mathcal{L}_0 \otimes (\mathrm{vol})^{1/2}$. Сечениями этого расслоения будут выражения вида $f(x)(dx)^{1/2}$, где f — комплекснозначные антипериодические функции на $\mathbb{R}$. Любое гладкое преобразование S^1, сохраняющее ориентацию, можно записать в виде $x \mapsto \varphi(x)$, где $\varphi(x+1) = \varphi(x)+1$ и $\varphi'(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. При этом преобразовании сечение $f(x)(dx)^{1/2}$ переходит в $f(\varphi(x))(\varphi'(x)dx)^{1/2}$. Мы получаем унитарное проективное представление $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в пространстве сечений $\mathcal{L}$ со скалярным произведением

$$(f_1(x)(dx)^{1/2}, f_2(x)(dx)^{1/2}) = \int_0^1 f_1(x)\overline{f_2(x)}dx.$$

Это представление может рассматриваться как настоящее представление двулистной накрывающей группы.

Наиболее интересные приложения полуформ связаны с комплексным G-многообразием M с голоморфным линейным расслоением $\mathcal{L}$. В этом случае можно попробовать построить унитарное представление G в пространстве $\mathcal{H}$ некоторых голоморфных сечений $\mathcal{L}$. Для этого потребуются некоторые дополнительные структуры. А именно, следует сделать следующие предположения:

(1) для любых двух сечений s_1 и s_2 расслоение $\mathcal{L}$ над открытым множеством $U \subset M$ скалярное произведение $\langle s_1, s_2 \rangle$ является сечением расслоения vol над U.

Фиксируем тривиализацию vol (т. е. ненулевую форму объема ω). Тогда условие (1) означает, что $\mathcal{L}$ — **эрмитово расслоение**: на каждом слое определена эрмитова билинейная форма $(\cdot,\cdot)$ такая, что $\langle s_1, s_2 \rangle = (s_1, s_2)\omega$.

Заметим, что $\langle f_1 s_1, f_2 s_2 \rangle = f_1 \overline{f_2} \cdot \langle s_1, s_2 \rangle$ для любых голоморфных функций f_1, f_2 на U. Пространство $\mathcal{H}$ состоит из таких голоморфных сечений s, для которых

$$|s|^2_{\mathcal{H}} := \int_M \langle s, s \rangle < \infty.$$

Вообще говоря, нельзя гарантировать, что это пространство будет ненулевым. К счастью, так действительно оказывается во многих важных случаях.

(2) Существует связность ∇ на $\mathcal{L}$ такая, что $v \cdot (s_1, s_2) = (\nabla_v s_1, s_2) + (s_1, \nabla_v s_2)$ для любого голоморфного векторного поля v на M, откуда $L_v \langle s_1, s_2 \rangle = \operatorname{div} v \langle s_1, s_2 \rangle + \langle \nabla_v s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_v s_2 \rangle$. При этих условиях мы можем определить унитарное представление группы голоморфных преобразований M в $\mathcal{H}$ по формуле $T(\varphi)s = s \circ \varphi$, где правая часть означает параллельный перенос сечения s при преобразовании φ.

Замечательно то, что эта конструкция представления T может рассматриваться как некоторая вариация процедуры индуцирования. Обычно T называют **голоморфно индуцированным представлением**.

3.3*. Пространства когомологий. В этом разделе мы кратко обсудим дальнейшие обобщения процедуры индуцирования. Гомологическая алгебра учит нас, что функтор сечений, который ставит в соответствие векторному расслоению $\mathcal{L}$ векторное пространство $\Gamma(\mathcal{L})$ его гладких, аналитических или алгебраических сечений, имеет ряд **производных функторов**. В категории гладких многообразий эти производные функторы обычно обращаются в нуль, но в аналитических или алгебраических категориях они дают новый метод построения представлений. Один пример такого рода рассматривается в лекции 10 (теорема Бореля — Вейля — Ботта).

Для компактных групп Ли представления в пространствах когомологий выглядят красиво, но не дают никаких новых примеров: все унитарные неприводимые представления появляются уже в 0-мерных пространствах когомологий, т. е. в пространствах сечений.

Оказывается, что для некомпактных вещественных полупростых групп имеются серии представлений, которые появляются только в высших пространствах когомологий. Исторически, первый пример такого сорта был открыт Гельфандом и Граевым: они построили так называемую **странную серию** унитарных неприводимых представлений группы $SU(2,1)$. Общая концепция когомологической индукции была предложена Ленглендсом. Подробности читатель может найти в [BW], [Vog], [Soh] (см. также [Ki2]).

4. Представления однородных многообразий

В этом разделе мы распространим (частично) результаты из п. 1.2 на случай G-многообразий. Наиболее важные результаты связаны с однородными многообразиями.

Пусть M — гладкое многообразие с действием группы Ли G. Будем называть M **G-многообразием**.

Определение 1. **$*$-Представлением** Π гладкого многообразия M в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется гомоморфизм алгебр $\Pi : \mathcal{A}(M) \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ такой, что

(i) $\Pi(\overline{\varphi}) = \Pi(\varphi)^*$,

(ii) множество векторов вида $\Pi(\varphi)x$, $\varphi \in \mathcal{A}(M)$, $x \in \mathcal{H}$, плотно в $\mathcal{H}$.

Определение 2. Будем говорить, что $*$-представление Π гладкого G-многообразия M в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ **согласовано** с унитарным представлением $(\pi, \mathcal{H})$ группы G в том же пространстве, если

(iii) $\pi(g) \circ \Pi(\varphi) \circ \pi(g)^{-1} = \Pi(\varphi^g)$, где $\varphi^g(m) = \varphi(m \cdot g)$.

Обсудим эти определения и некоторых их следствия.

Во-первых, второе условие в определении 1 для компактных многообразий эквивалентно равенству $\Pi(1_M) = 1_{\mathcal{H}}$. Оно введено, главным образом, для того, чтобы исключить тривиальный пример $\Pi(\varphi) \equiv 0$.

Во-вторых, вместо оператора $\Pi(\varphi)$ можно определить **проекторнозначную меру** μ на M так, что

$$\Pi(\varphi) = \int_M \varphi(m) d\mu(m).$$

Для удобства читателя напомним основные факты о проекторнозначных мерах и соответствующих интегралах (см., например, [KiG] или любой учебник по спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах).

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через $\mathcal{B}(X)$ минимальное семейство множеств X, которое содержит все открытые подмножества и замкнуто относительно счетных объединений и дополнений. Элементы $\mathcal{B}(X)$ называются **борелевскими множествами**.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ множество всех **ортогональных проекторов** в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, т. е. операторов P таких, что $P^2 = P = P^*$.

По определению проекторнозначных мер мера μ на X является отображением $\mathcal{B}(X)$ в $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ таким, что

(1) $\mu(X) = 1_{\mathcal{H}}$,

(2) $\mu(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(S_i)$, где $\bigsqcup$ — объединение непересекающихся множеств.

Свойство (2) обычно называют **счетной аддитивностью.**

Для скалярной функции f на X можно определить интеграл от f относительно $\mathcal{P}(\mathcal{H})$-значной мере μ, который обозначим $A = \int\limits_X f(x) d\mu(x)$.

По определению это оператор в $\mathcal{H}$ такой, что для любых двух векторов

$v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ имеем

$$(Av_1, v_2) = \int\limits_X f(m) d\mu_{v_1, v_2}(x),$$

где комплексная мера μ_{v_1,v_2} определена равенством $\mu_{v_1,v_2}(S) = (\mu(S)v_1, v_2)$.

С любым $*$-представлением $(\Pi, \mathcal{H})$ гладкого многообразия M можно ассоциировать проекторнозначную меру μ на M следующим образом. Для открытого подмножества $O \in M$ можно определить $\mu(O)$ как ортогональный проектор на замкнутое подпространство $\mathcal{H}$, порожденное векторами вида $\Pi(\varphi)v$, $\varphi \in \mathcal{A}(O)$, $v \in \mathcal{H}$. Для борелевских множество более общего вида мера μ однозначно определяется с помощью счетной аддитивности.

В терминах меры μ свойство согласования (iii) принимает вид

$$\pi(g) \circ \mu(X) \circ \pi(g)^{-1} = \mu(X \cdot g^{-1}).$$

Попробуем описать все представления гладкого многообразия M. Сравнивая с п. 1.3, можно предложить следующую стандартную модель для П.

Пусть V — гильбертово пространство и ρ — любая мера на M, заданная гладкой плотностью. Определим новое гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(M, V, d\rho)$ как пространство квадратично интегрируемых V-значных измеримых функций на M со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{H}} = \int\limits_M (f_1(m), f_2(m))_V \, d\rho. \tag{23}$$

Определим оператор $\Pi(\varphi)$ в $\mathcal{H}$ по формуле

$$(\Pi(\varphi)f)(m) = \varphi(m)f(m). \tag{24}$$

Тогда проекторнозначная мера μ определяется формулой

$$(\mu(S)f)(m) = \begin{cases} f(m), & m \in S, \\ 0 & \text{в иных случаях}. \end{cases} \tag{25}$$

Другими словами, оператор $\mu(S)$ есть умножение на характеристическую функцию множества S.

Оказывается, что это не универсальная модель. Чтобы получить представление наиболее общего вида, надо, чтобы пространство V зависело от точки $m \in M$. Этого можно достичь, но при этом конструкция получается довольно громоздкой.

К счастью, приведенная выше модель оказывается действительно универсальной в случае представлений однородных многообразий, согласованных с данным представлением группы (см. п. 1.3). А именно, предположим, что $M = H \backslash G$ — однородное правое G-многообразие, и фиксируем некоторую ненулевую гладкую плотность ρ на M. Пусть V — гильбертово пространство. Определим проекторнозначную меру μ так же, как и выше, и представление π в $\mathcal{H} = L^2(M, V, dm)$ по формуле

$$(\pi(g)f)(m) = A(m, g) f(m \cdot g) \sqrt{\frac{d\rho(m \cdot g)}{d\rho(m)}}, \tag{26}$$

где $A : M \times G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ — унитарная операторнозначная функция, удовлетворяющая **уравнению коцикла**

$$A(m, g_1)A(m \cdot g_1, g_2) = A(m, g_1 g_2). \tag{27}$$

Теорема 5 (Г. Макки, 1952). (a) *Любое $*$-представление однородного G-многообразия, согласованное с унитарным представлением $(\pi, \mathcal{H})$ группы G, эквивалентно описанной выше стандартной модели.*

(b) *Любое решение уравнения коцикла* (27) *имеет вид*

$$A_{B,s,\rho}(m, g) = B(m)^{-1}\tau(h_s(m, g))B(m \cdot g), \tag{28}$$

где B — унитарная операторнозначная функция на M, τ — унитарное представление H в V, $s : M \to G$ — сечение проекции $p : G \to M : g \mapsto Hg$ и $h_s(m, g)$ — решение основного уравнения

$$s(m)g = h_s(m, g)s(m \cdot g). \tag{29}$$

На самом деле Макки доказал более общую теорему (вместо гладкого однородного многообразия он рассматривал произвольное однородное пространство локально компактной группы).

Доказательство теоремы для конечной группы приведено в лекции 5 (см. теорему 2). В случае групп Ли неизвестны доказательства, более простые, чем оригинальное доказательство Макки или доказательство Блаттнера (оба этих доказательства довольно длинные и трудные). Поэтому мы не будем приводить доказательств, но предлагаем читателю поразмыслить над этой проблемой.

Чрезвычайно важное следствие этого результата сформулировано в следующем критерии.

Критерий индуцируемости. *Унитарное представление $(\pi, \mathcal{H})$ группы Ли G имеет вид $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ для некоторой замкнутой подгруппы $H \subset G$ и унитарного представления ρ H тогда и только тогда, когда существует 8-представление Π многообразия $M = H\backslash G$ в пространстве $\mathcal{H}$, согласованное с π.*

Это следствие будет использовано во второй части книги при доказательстве того, что все унитарные неприводимые представления экспоненциальной группы Ли и многие унитарные неприводимые представления более общих групп Ли индуцируются представлениями меньших подгрупп. При этом потребуется дополнительная информация о $*$-представлениях однородных многообразий.

Пусть M — G-многообразие. Будем говорить, что разбиение M на G-орбиты **ручное**, если существует счетное семейство $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ G-инвариантных борелевских подмножеств M, которое **разделяет** орбиты. (Это означает, что для любых двух различных орбит мы можем найти индекс i такой, что X_i содержит только одну из этих орбит.) Для краткости будем называть M **ручным G-многообразием**.

Следующий результат играет центральную роль.

Теорема 6. *Предположим, что G — группа Ли, M — ручное G-многообразие, $(\Pi, \mathcal{H})$ — $*$-представление M, согласованное с унитарным неприводимым представлением $(\pi, \mathcal{H})$ группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Соответствующая проекторнозначная мера μ на M сосредоточена на единственной G-орбите $\Omega \in M$.*

(b) *Унитарное неприводимое представление π индуцируется унитарным неприводимым представлением τ стабилизатора H точки из Ω.*

Доказательство. (a) Для любого G-инвариантного подмножества $X \in M$ ортогональный проектор $\mu(X)$ коммутирует с $\pi(g)$, $g \in G$. Поэтому область его значений является G-инвариантным замкнутым подпространством $\mathcal{H}$. Однако π неприводимо. Поэтому таковыми подпространствами могут быть лишь $\{0\}$ и $\mathcal{H}$. Отсюда мы заключаем, что оператор $\mu(X)$ — либо тождественный, либо нулевой.

Теперь рассмотрим семейство $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ G-инвариантных борелевских подмножеств M, которое разделяет орбиты. Заменяя, если необходимо, X_i на $M \backslash X_i$, можно считать, что $\mu(X_i) = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(\bigcup_i X_i) = 0$. Пусть $\Omega = M \backslash \bigcup_i X_i$. Тогда Ω — единственная G-орбита и $\mu(\Omega) = 1$.

(b) Так как Ω — гладкое однородное G-многообразие, оно имеет вид $\Omega = G/H$, где H — стабилизатор точки из Ω. По критерию индуцируемости унитарное неприводимое представление π индуцировано некоторым (обязательно неприводимым) представлением τ подгруппы H. □

Лекция 5

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. Модель: конечные группы и однородные пространства 116
   1.1. Краткое напоминание о представлениях конечных групп 116
   1.2. Сплетающие операторы 119
   1.3. Индуцированные представления 120
   1.4. Пример практического гармонического анализа: группа S_4 124
   1.5*. Еще один пример: группа $GL(2, \mathbb{F}_q)$ 128
   1.6. Оператор Лапласа и геометрия S^2 131
2. Векторные функциональные пространства и линейные операторы 134
   2.1. Пространства гладких функций на многообразии 134
   2.2. Гладко индуцированные представления группы Ли 137
   2.3. Теорема о ядре и сплетающие операторы 138
   2.4. Унитарно индуцированные представления группы Ли 138
3. Представления $SL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{C})$ 139
   3.1. Основное аффинное пространство и представления основной серии 139
   3.2. Плоскость Лобачевского и дискретная серия для $SL(2, \mathbb{R})$ 143

1. Модель: конечные группы и однородные пространства

1.1. Краткое напоминание о представлениях конечных групп. Мы напомним основные определения и результаты теории конечномерных представлений конечных групп.

Определение 1. **Линейным представлением** группы G в векторном пространстве V над полем K называется гомоморфизм $\pi : G \to GL(V)$. Когда $K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$, мы говорим о **вещественном** или **комплексном** представлении. Обычно представление обозначается (π, V), но иногда для краткости мы пишем просто π или V. Мы также опускаем слово "линейное", так как всегда это будет подразумеваться.

Понятие представления возникло одновременно с естественным понятием отношения эквивалентности, что можно пояснить двумя способами.

1. Поскольку имеется изоморфизм между $GL(V)$ и $GL(n, K)$, $n = \dim V$, представление π можно считать матричной функцией на G, которая **мультипликативна**, т. е. $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$, и удовлетворяет условию $\pi(e) = 1$. Однако этот изоморфизм зависит от выбора базиса в пространстве V. Другой выбор приведет нас к иной матричной функции $\widetilde{\pi}(g) = A\pi(g)A^{-1}$ (где A — обратимая матрица, связывающая базисы). Естественно рассматривать π и $\widetilde{\pi}$ как эквивалентные представления.

2. Если π_1 и π_2 — два представления в пространствах V_1 и V_2 соответственно и $A : V_1 \to V_2$ — изоморфизм такой, что для всех $g \in G$ справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\pi_1(g)} & V_1 \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V_2 & \xrightarrow{\pi_2(g)} & V_2 \end{array} \tag{1}$$

то естественно считать π_1 и $\pi_2 = A\pi_1 A^{-1}$ эквивалентными.

К счастью, оба подхода определяют одно и то же отношение эквивалентности (предлагаем читателю сформулировать и доказать соответствующее утверждение). В дальнейшем мы не различаем эквивалентные представления и под "представлением" понимаем "класс эквивалентных представлений".

Для любых двух представлений (π_1, V_1), (π_2, V_2) над одним и тем же полем определим **прямую сумму** $(\pi_1 \oplus \pi_2, V_1 \oplus V_2)$ формулой

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g) = \pi_1(g) \oplus \pi_2(g) \tag{2}$$

и **тензорное произведение** $(\pi_1 \otimes \pi_2, V_1 \otimes V_2)$ формулой

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g) = \pi_1(g) \otimes \pi_2(g). \tag{3}$$

Очевидно, что эти операции имеют также смысл для классов эквивалентных представлений.

Определение 2. Представление (π, V) называется **приводимым**, если V имеет собственное ненулевое подпространство W, инвариантное относительно операторов $\pi(g)$, $g \in G$. В противном случае представление (π, V) называется **неприводимым**.

Определение 3. Представление (π, V) называется **унитарным**, если V — комплексное векторное пространство, снабженное эрмитовой формой $(\ )$, инвариантной относительно операторов $\pi(g)$, $g \in G$. (Другими словами, в подходящем базисе операторы $\pi(g)$ описываются унитарными матрицами.) Вещественный аналог унитарного представления — **ортогональное** представление в вещественном евклидовом пространстве.

Основные свойства конечномерных представлений конечной группы G перечислены в следующей теореме.

Теорема 1. (a) *Любое комплексное (вещественное) представление π эквивалентно унитарному (ортогональному) представлению.*

(b) *Любое представление эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений.*

(c) *Множество $\widehat{G}$ классов эквивалентных унитарных неприводимых представлений конечно. Мощность его равна числу классов сопряженных элементов G.*

(d) *Пусть d_λ — размерности унитарных неприводимых представлений π_λ (т. е. $\dim V_\lambda$). Тогда каждое число d_λ делит порядок G и справедливо* **тождество Бернсайда**

$$\sum_{\lambda\in\widehat{G}} d_\lambda^2 = \#G.$$

Схема доказательства. (a) Требуемое G-инвариантное скалярное произведение в V строится стандартной **процедурой усреднения**. Рассмотрим произвольную эрмитову (евклидову) положительно определенную форму $(\ ,\ )_0$ на V и определим форму

$$(v_1, v_2) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\pi(g)v_1, \pi(g)v_2)_0.$$

Очевидно, что новая форма G-инвариантна и положительно определена.

(b) Утверждение следует из (a), так как для унитарного или ортогонального представления любое инвариантное подпространство $V_1 \subset V$ имеет инвариантное ортогональное дополнение $V_2 = V_1^{\perp}$. Следовательно, любое приводимое представление разлагается в прямую сумму.

Для доказательства (c) и (d) используем **групповую алгебру** $\mathbb{C}[G]$ и **преобразование Фурье**. Напомним, что $\mathbb{C}[G]$ — это множество формальных линейных комбинаций элементов группы с комплексными коэффициентами. Закон умножения продолжается с G на $\mathbb{C}[G]$ по линейности:

$$\Big(\sum_{g\in G} a_g\cdot g\Big) * \Big(\sum_{h\in G} b_h\cdot h\Big) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h\cdot gh. \tag{4}$$

Элементы групповой алгебры могут рассматриваться как комплекснозначные функции на G. При такой интерпретации закон умножения записывается в виде

$$(a*b)(g) = \sum_{h\in G} a(h)b(h^{-1}g) = \sum_{g_1g_2=g} a(g_1)b(g_2). \tag{4$'$}$$

Для определения преобразования Фурье выберем представителя (π_λ, V_λ) для каждого $\lambda\in\widehat{G}$. Затем для $f\in\mathbb{C}[G]$ положим

$$\widetilde{f}(\lambda) = \sum_G f(g)\pi_\lambda(g), \quad \lambda\in\widehat{G}. \tag{5}$$

Преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между $\mathbb{C}[G]$ и прямой суммой матричных алгебр $\oplus_{\lambda\in\widehat{G}}\mathrm{Mat}_{d_\lambda}(\mathbb{C})$, которую мы обозначим $\mathbb{C}[\widehat{G}]$.

Обратное отображение имеет вид

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda \cdot \mathrm{tr}(\widetilde{f}(\lambda)\pi_\lambda(g^{-1})). \tag{6}$$

При этом изоморфизме центральные элементы $\mathbb{C}[G]$ (т. е. центральные функции на G, являющиеся константами на классах сопряженных элементов) переходят в скалярные матрицы. Отсюда следует утверждение (c).

Тождество Бернсайда можно получить, сравнив размерности $\mathbb{C}[G]$ и $\mathbb{C}[\widehat{G}]$. Доказательство свойств делимости для d_λ можно найти в любом учебнике по теории представлений (см., например, [KR] или [Se]). □

1.2. Сплетающие операторы. Опишем упоминавшиеся в лекции 4 сплетающие операторы на языке теории представлений. Совокупность всех конечномерных комплексных представлений данной группы G образует категорию $\mathrm{Rep}(G)$.[1] Морфизмы этой категории называются **сплетающими операторами** (**сплетениями** для краткости) или **G-эквивариантными** операторами. По определению $A : V_1 \to V_2$ — сплетение (или G-эквивариантный оператор), если $A \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ A$, что можно выразить коммутативной диаграммой (1).

Множество всех сплетений для объектов $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2)$ обозначается $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Rep}(G)}(\pi_1, \pi_2)$, или $I(\pi_1, \pi_2)$, или $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Это комплексное векторное пространство, и его размерность называется **числом сплетения** и обозначается $i(\pi_1, \pi_2)$.

Теорема 2. *Пусть π_1 и π_2 — два унитарных неприводимых представления. Тогда*

$$i(\pi_1, \pi_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi_1 \text{ эквивалентно } \pi_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В доказательстве теоремы используется знаменитая

Лемма Шура. *Если A — сплетение для двух неприводимых представлений, то A либо равно нулю, либо обратимо.*

Доказательство этой леммы оставляем читателю. (*Указание.* Рассмотреть ядро и образ A.)

Доказательство теоремы 2. Если $i(\pi_1, \pi_2) \neq 0$, то существует ненулевое сплетение, которое обратимо по лемме Шура. Поэтому π_1 и π_2 эквивалентны.

Поскольку число сплетения зависит только от классов эквивалентности,[2] можно считать, что $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ и $V_1 = V_2 = V$. Тогда единичный оператор 1 будет сплетением. Если A — другой сплетающий оператор, рассмотрим оператор $A - \lambda \cdot 1$. Он является сплетением при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. С другой стороны, для некоторого λ этот оператор необратим, так как $\det(A - \lambda \cdot 1)$ — полином, который имеет комплексный корень λ_0. По лем-

[1] В лекции 4 эта же категория обозначалась $\mathcal{G}\,\mathrm{Vec}$.

[2] *Контрольные вопросы:* a) Это очевидно для Вас? b) Можете ли Вы доказать это утверждение? Если ответ "нет", надо вернуться и прочитать определения.

ме Шура $A - \lambda_0 \cdot 1 = 0$. Мы доказали, что $I(\pi, \pi)$ состоит из скалярных операторов. Следовательно, $i(\pi, \pi) = 1$. □

Полезна следующая аналогия:

классы эквивалентных представлений	$\Leftrightarrow$	векторы в евклидовом пространстве
число сплетения	$\Leftrightarrow$	скалярное произведение
множество (классов) унитарных неприводимых представлений	$\Leftrightarrow$	ортонормированный базис

Мы можем сделать эту аналогию точной, если введем формальные линейные комбинации представлений (отождествляя $\pi_1 + \pi_2$ с $\pi_1 \oplus \pi_2$) и продолжим число сплетения по линейности.

Практическое применение теории представлений существенно основано на том, что многие важные операторы являются сплетениями. Поэтому число независимых сплетений и их явное описание имеют большое значение. Используя приведенную аналогию, сформулируем следующее

Предложение 1. *Если* $\pi_k \simeq \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} n_k(\lambda) \cdot \pi_\lambda$, $k = 1, 2$, *то*

$$i(\pi_1, \pi_2) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} n_1(\lambda) n_2(\lambda). \tag{7}$$

1.3. Индуцированные представления. Одним из замечательных приложений аналогии из п. 1.2 является определение индуцированного представления через двойственность Фробениуса.

Начнем с простого замечания: для любой подгруппы H конечной группы G существует естественный **функтор ограничения**

$$\operatorname{Res}_H^G : \operatorname{Rep}(G) \to \operatorname{Rep}(H). \tag{8}$$

Если мы рассматриваем представление как операторнозначную функцию $\pi : G \to GL(V)$, то $\operatorname{Res}_H^G \pi$ означает ту же функцию, но ограниченную на подгруппу H.

Оказывается, что функтор (8), как аналог линейного оператора, имеет сопряженный. Именно, существует **функтор индукции**

$$\operatorname{Ind}_H^G : \operatorname{Rep}(H) \to \operatorname{Rep}(G), \tag{9}$$

удовлетворяющий условию

$$i(\operatorname{Res}_H^G \pi, \rho) = i(\pi, \operatorname{Ind}_H^G \rho) \tag{10}$$

для любых представлений π группы G и ρ группы H.

Приведем явный вид функтора индукции. Пусть (ρ, V) — представление H. Рассмотрим пространство $L(G, H, \rho, V)$ всех V-значных функций F на G, удовлетворяющих условию

$$F(hg) = \rho(h) F(g) \tag{11}$$

для всех $h \in H$ и $g \in G$. Это пространство инвариантно относительно правых сдвигов на G, и мы определим индуцированное представление $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ в $L(G, H, \rho, V)$ формулой

$$(\mathrm{Ind}_H^G \rho(g)F)(g') = F(g'g). \tag{12}$$

Мы установим свойство (10) для функтора Ind_H^G, определенного формулой (12) ниже. На самом деле свойство (10) вытекает из изоморфизма (см. лекцию 4)

$$I(\mathrm{Res}_H^G \pi, \rho) \simeq I(\pi, \mathrm{Ind}_H^G \rho). \tag{LF}$$

Теперь опишем другой подход к определению индуцированного представления.

Наиболее простые примеры линейных представлений возникают следующим образом. Пусть X — G-пространство и $L_K(X)$ — K-векторное пространство K-значных функций на X. Тогда линейное представление T группы G в $L_K(X)$ задается формулой

$$(T(g)f)(x) = f(x \cdot g). \tag{13}$$

Иногда такие представления называются **перестановочными**, так как операторы $T(g)$ переставляют элементы естественного базиса $L_K(X)$ (т. е. функции, которые имеют значение 1 в одной точке и 0 в остальных).

Модифицируя формулу (13), можно получить более общие представления. Во-первых, вместо $L_K(X)$ можно рассмотреть пространство $L_K(X, V)$ вектор-функций на X со значениями в K-векторном пространстве V. Во-вторых, в правую часть можно вставить дополнительный множитель — операторнозначную функцию $A : X \times G \to \mathrm{Aut}\, V$. Тогда формула (13) примет вид

$$(T(g)f)(x) = A(x, g)f(x \cdot g). \tag{14}$$

Конечно, для того, чтобы формула (14) определяла представление, функция $A(x, g)$ должна удовлетворять некоторым условиям (см. формулы (8) и (27) в лекции 4 и формулу (17) ниже).

Оказывается, что когда $X = G/H$ однородно, все возможные функции $A(x, g)$ (с точностью до естественной эквивалентности) могут быть явно описаны и параметризованы представлениями (классами эквивалентных представлений) H в V. Таким образом, мы опять приходим к понятию индуцированного представления.

Для дальнейших рассмотрений введем обозначения. Выберем точку $x_0 \in X$ и рассмотрим **стабилизатор** $H = \mathrm{Stab}(x_0)$ точки x_0 в G, т. е. множество элементов $h \in G$ таких, что $x_0 \cdot h = x_0$. Пусть $p : G \to X$ — естественная проекция: $g \mapsto x_0 \cdot g$. Отображение $s : X \to G$ называется **сечением** проекции p, если $p \circ s = \mathrm{Id}$. Другими словами, $s(x)$ — элемент группы, который преобразует x_0 в x.

Очевидно,[3] что любой элемент G единственным образом записывается в виде

$$g = hs(x), \quad h \in H, \quad x \in X. \tag{15}$$

Итак, множество G отождествляется с прямым произведением $H \times X$.

Применив разложение (15) к элементу $s(x)g$, получим уравнение, которое в теории индуцированных представлений называется **основным уравнением**[4]

$$s(x)g = h(x,g)s(x \cdot g). \tag{16}$$

Это уравнение определяет функцию $h : X \times G \to H$, удовлетворяющую **уравнению коцикла**

$$h(x, g_1 g_2) = h(x, g_1) h(x \cdot g_1, g_2). \tag{17}$$

Теорема 3. (a) *Формула* (14) *определяет представление G в $L_K(X,V)$ тогда и только тогда, когда функция A удовлетворяет* **уравнению коцикла**

$$A(x, g_1 g_2) = A(x, g_1) A(x \cdot g_1, g_2). \tag{17'}$$

(b) *Общее решение уравнения* (17′) *имеет вид*

$$A(x,g) = B(x)^{-1} \rho(h(x,g)) B(x \cdot g), \tag{18}$$

где ρ — представление подгруппы $H = \mathrm{Stab}(x_0)$, $B : X \to \mathrm{Aut}\, V$ — операторнозначная функция на X и функция $h : G \times X \to H$ определена в (16).

(c) *Представление* (14), *где A определяется формулой* (18), *эквивалентно* $\mathrm{Ind}_H^G \rho$.

Замечание 1. На языке теории когомологий можно сказать, что уравнение (17) определяет 1-коцикл на G со значениями в $\mathrm{Map}(X, \mathrm{Aut}\, V)$. Два таких коцикла A_1 и A_2 **эквивалентны** или **когомологичны**, если они связаны соотношением

$$A_2(x,g) = B(x)^{-1} A_1(x,g) B(x \cdot g). \tag{19}$$

Таким образом, (18) означает, что A эквивалентна коциклу $A_\rho(x,g) := \rho(h(x,g))$.

Смысл (19) очень просто объяснить с точки зрения теории представлений: если T_i — представление, заданное формулой (14) с операторнозначными функциям A_i, $i = 1, 2$, связанными соотношением (19), то справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_K(X,V) & \xrightarrow{T_1(g)} & L_K(X,V) \\ {\scriptstyle B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B} \\ L_K(X,V) & \xrightarrow{T_2(g)} & L_K(X,V) \end{array}$$

[3] Действительно ли это очевидно для Вас?

[4] В англоязычной литературе используется термин “master equation”.

где B — оператор умножения на $B(x)$. Таким образом, T_1 и T_2 эквивалентны и B — соответствующее сплетение.

Мы видим, что все операторнозначные коциклы (17′) возникают из одного **универсального** H-значного коцикла (17) — это общий факт теории когомологий.

Доказательство теоремы 3. Заменив $x \mapsto x_0$, $g_1 \mapsto s(x)$, $g_2 \mapsto g$ в (17), получим

$$A(x,g) = A(x_0, s(x))^{-1} A(x_0, s(x)g). \tag{20}$$

Заменив $x \mapsto x_0$, $g_1 \mapsto h \in H$, $g_2 \mapsto g$ в (17) и обозначив $A(x_0, g)$ через $A(g)$, получим

$$A(hg) = A(h)A(g). \tag{21}$$

Положим $\rho(h) = A(h)$ и $B(x) = A(s(x))$. В силу (21) ρ — представление H. Из (20), (21) и основного уравнения (16) получаем (18).

(c) Заметим, что в силу (11) функция $F \in L(G, H, \rho, V)$ полностью определяется своим ограничением на образ сечения s. Поэтому каждой функции F можно сопоставить V-значную функцию f на X по формуле $f(x) := F(s(x))$. Оставляем читателю проверку того, что соответствие $F \mapsto f$ является сплетением для представлений (12) и (14), где $B \equiv 1$. □

Мы закончим этот раздел явным описанием сплетений для пары индуцированных представлений.[5]

Теорема 4. *Пусть G — конечная группа, H и K — две подгруппы группы G и $(\pi, V), (\rho, W)$ — представления этих подгрупп. Существует линейная биекция между пространством сплетений $I(\mathrm{Ind}_H^G \pi, \mathrm{Ind}_K^G \rho)$ и пространством всех $\mathrm{End}(V, W)$-значных функций f на G таких, что*

$$f(kgh) = \rho(k) \circ f(g) \circ \pi(h). \tag{22}$$

В частности, для тривиальных представлений π и ρ справедлива простая формула для числа сплетения для двух перестановочных представлений:

$$i(\mathrm{Ind}_H^G 1, \mathrm{Ind}_K^G 1) = \#(K \backslash G / H). \tag{23}$$

Доказательство. Здесь мы используем формулу (12) для индуцированных представлений. Любой линейный оператор A из $L(G, H, \pi, V)$ в $L(G, K, \rho, W)$ имеет вид

$$(A\varphi)(g_2) = \sum_{g_1 \in G} a(g_1, g_2) \varphi(g_1), \tag{24}$$

[5] Этот результат, по-видимому, известный Бернсайду и Фробениусу, был явно сформулирован в знаменитых чикагских лекциях Г. Макки по представлениям групп в 50-х годах. Лекции Макки, размноженные на мимеографе, активно использовались многими математиками, но опубликованы были лишь в 1976 г. издательством Чикагского университета.

где a — некоторая $\mathrm{End}(V, W)$-значная функция на $G \times G$. Дадим наиболее экономное доказательство этого факта:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(L(G,V), L(G,W)) &\simeq ((L(G,K)\otimes V)^* \otimes ((L(G,K)\otimes W)\\ &\simeq L(G,K)^* \otimes L(G,K)\otimes V^* \otimes W\\ &\simeq \mathrm{End}(L(G,K), L(G,K))\otimes \mathrm{End}(V,W)\\ &\simeq L(G\times G, K)\otimes \mathrm{End}(V,W)\\ &\simeq L(G\times G, \mathrm{End}(V,W)).\end{aligned}$$

Условие, что этот оператор является сплетением, выглядит следующим образом:

$$\sum_{g_1\in G} a(g_1, g_2 g)\varphi(g_1) = \sum_{g_1\in G} a(g_1, g_2)\varphi(g_1 g) \quad \text{для всех } g\in G,$$

что эквивалентно

$$a(g_1 g, g_2 g) = a(g_1, g_2) \quad \text{для всех } g \in G. \tag{25}$$

Нас интересуют те операторы, которые обращаются в нуль на подпространстве $L(G,H,\pi,V)^{\perp} \subset L(G,V)$ и принимают значения в подпространстве $L(G,K,\rho,W) \subset L(G,W)$. Предлагаем читателю проверить, что оператор (24) обладает такими свойствами только тогда, когда функция a обладает следующим свойством:

$$a(hg_1, kg_2) = \pi(h)\circ a(g_1,g_2)\circ \rho(k)^{-1}. \tag{26}$$

В силу (25) $a(g_1,g_2) = f(g_1 g_2^{-1})$, и поэтому свойство (26) функции a эквивалентно условию (22) на f. □

1.4. Пример практического гармонического анализа: группа S_4. На основе общей теории мы опишем все унитарные неприводимые представления группы S_4 и затем применим полученные результаты для решения модельных задач гармонического анализа. Согласно определению группа S_4 состоит из всех перестановок множества $X = \{1,2,3,4\}$. Оказывается, что группа S_4 изоморфна группе $PGL(2,\mathbb{F}_3)$. Следовательно, S_4 действует на "проективной прямой" $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ дробно-линейными преобразованиями $x \mapsto \dfrac{ax+c}{cx+d}$.

Заметим, что в геометрии группа S_4 появляется как группа вращений правильного октаэдра, гексаэдра (куба) или кубооктаэдра Кеплера в $\mathbb{R}^3$.

? Упражнение 1. Установить соответствие между указанными тремя реализациями. В частности, описать перестановочную реализацию подгрупп, возникающих как стабилизаторы точек в других реализациях.

Указание. Порядок стабилизаторов точек следующий:

(a) 4 для грани куба, квадратной грани кубооктаэдра или вершины октаэдра,

(b) 3 для вершины куба, грани тетраэдра или треугольной грани кубооктаэдра,

(c) 2 для ребра куба или тетраэдра или вершины кубооктаэдра,

(d) 6 для главной диагонали куба или точки проективной прямой над $\mathbb{F}_3$,

(e) 12 для правильного тетраэдра, вписанного в куб.

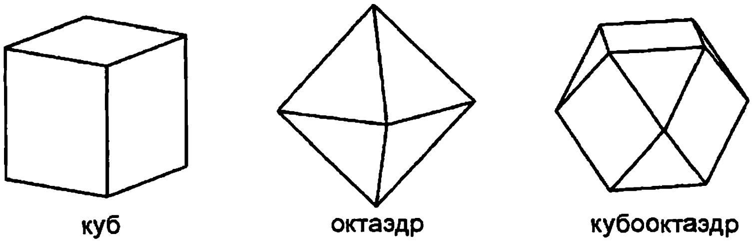

Рис. 1. **Некоторые многогранники с группой симметрий S_4**

С другой стороны, в качестве естественных "геометрических объектов" для группы перестановок S_4 можно взять множества $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, упорядоченных или неупорядоченных пар точек, неупорядоченных или циклически упорядоченных троек точек, циклических порядков на X_4 и т. д.

Упражнение 2. Показать, что G имеет пять классов сопряженных элементов и описать их для всех трех реализаций.

Ответ (для группы вращений куба). Представители пяти классов сопряженных элементов:

1) тождественное преобразование,
2) вращение на 120° вокруг вершины,
3) вращение на 180° вокруг центра ребра,
4) вращение на 90° вокруг центра грани,
5) вращение на 180° вокруг центра грани.

Рассмотрим наиболее наглядную геометрически "кубическую" реализацию. Имеются четыре нетривиальных однородных G-пространства X_8, X_6, X_{12}, X_2 (индекс указывает мощность), которые являются соответственно множествами вершин, граней, ребер и вписанных правильных тетраэдров. Добавим к ним тривиальное одноточечное G-пространство X_1 и рассмотрим соответствующие **перестановочные представления** π_i, возникающие в пространствах $L_i := L(X_i, \mathbb{C})$ комплексных функций на X_i.

Напомним, что согласно (12) число сплетений между, скажем, π_6 и π_8, равно числу классов эквивалентных пар (грань, вершина). Здесь две пары считаются эквивалентными, если они принадлежат одной и той же G-орбите. С геометрической точки зрения ясно, что есть в точности два класса эквивалентности, соответствующие двум возможностям: вершина принадлежит или не принадлежит грани. Эти простые рассуждения приводят к следующей таблице.

Таблица 1. Числа сплетения $i(\pi_m, \pi_n)$

	π_{12}	π_8	π_6	π_2	π_1
π_{12}	7	4	3	1	1
π_8	4	4	2	2	1
π_6	3	2	3	1	1
π_2	1	2	1	2	1
π_1	1	1	1	1	1

Покажем, как с помощью этой таблицы вычислять размерности всех унитарных неприводимых представлений и описывать разложение всех L_i на неприводимые части.

Начнем со средней строки таблицы. Число 3 на диагонали показывает, что π_6 является прямой суммой трех различных (т. е. неэквивалентных) неприводимых подпредставлений. Действительно, если ρ_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4,$ — все унитарные неприводимые представления G и $\pi_6 = \sum_{i=1}^{4} k_i\rho_i$, то $c(\pi_6, \pi_6) = \sum_{i=1}^{4} k_i^2$. Но имеется лишь одно разложение числа "3" в сумму квадратов: $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$. Мы можем занумеровать унитарные неприводимые представления так, что $\pi_6 = \rho_0 \oplus \rho_1 \oplus \rho_2$. Можно также считать, что ρ_0 — тривиальное представление (эквивалентное π_1), так как $i(\pi_6, \pi_1) = 1$.

Теперь заметим, что во всех L_i можно определить сплетение R, соответствующее центральной симметрии. Относительно R-действия любое L_i разлагается в прямую сумму двух собственных подпространств

$$L_i = L_i^+ \oplus L_i^- \quad \text{(разложение на нечетную и четную компоненты)}.$$

В частности, L_6 разлагается в сумму двух трехмерных подпространств. Одно из них состоит из четных функций и содержит инвариантное подпространство констант, а другое — из нечетных функций и должно быть неприводимым.

Итак, мы локализовали все неприводимые подпространства в L_6.

(a) Одномерное подпространство констант; сужение π_6 на это пространство обозначим ρ_0.

(b) Двумерное пространство четных функций с нулевым средним на X_6; сужение π_6 на это пространство обозначим ρ_1.

(c) Трехмерное подпространство нечетных функций; сужение π_6 на это пространство обозначим ρ_2.

Далее, рассмотрим представление π_2 в пространстве L_2. Это пространство двумерно и разлагается на две неприводимые компоненты. Одна из них состоит из констант (соответствующее представление мы уже обозначили ρ_0). Другая также одномерна и состоит из нечетных функций на X_2 (соответствующее представление обозначим π_4). При реализации $G \cong S_4$ — это **знаковое представление.**

Теперь рассмотрим вторую строку таблицы. Число "4" на диагонали означает, что π_8 либо есть сумма четырех различных унитарных неприводимых представлений, либо распадается на две эквивалентные неприводимые компоненты. В последнем случае число сплетения π_8 с любым другим представлением должно быть четным, что не так (см. последний элемент в строке). Поэтому π_8 является прямой суммой четырех унитарных неприводимых представлений. Чтобы их локализовать, заметим, что L_8^+ содержит подпространство констант и L_8^- содержит одномерное инвариантное подпространство, где действует ρ_4. (Число "2" в четвертой клетке показывает, что оба ρ_0 и ρ_4 входят в разложение π_8.)

Ясно, что π_8 и π_6 имеют два общих подпредставления, одним из которых является ρ_0. Для определения второго рассмотрим сплетения более подробно. Пространство всех сплетений между π_8 и π_6 двумерно и является линейной оболочкой

$$(A\varphi)(x) = \sum_{v \in x} \varphi(v), \quad (B\varphi)(x) = \sum_{v \notin x} \varphi(v),$$

где x — грань и v — вершина куба.

Упражнение 3. Показать, что

(a) $A + B$ переводит константы в константы и обращается в нуль на других неприводимых подпространствах L_8,

(b) $A - B$ обращается в нуль на L_8^+ и отображает L_8^- на L_6^-.

Следовательно, $\pi_8 = \rho_0 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3 \oplus \rho_4$.

Упражнение 4. Показать, что $\pi_{12} = \rho_0 \oplus \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus 2\rho_3$.

Теперь мы используем полученные результаты для решения модельного уравнения теплопроводности. Пусть X — одно из пространств X_i, $i = 6, 8$. Определим **конечно-разностный оператор Лапласа** Δ на $L(X_i)$:

$$(\Delta f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{x \leftrightarrow y} f(y) - f(x),$$

где $x \leftrightarrow y$ означает, что x и y — соседи, а N — число соседей у каждой точки (4 для X_6 и 3 для X_8).

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\dot{f} = \Delta f,$$

где точка означает производную по времени. Пусть $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — спектр Δ и $f_0, \ldots, f_n$ — соответствующие собственные функции. Мы увидим, что во всех случаях спектр имеет вид $0 = \lambda_0 > \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Следовательно, любое исходное тепловое распределение $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_k f_k$ по прошествии времени T можно записать в виде ряда $f(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} e^{\lambda_i T} c_k f_k$, который быстро сходится к равномерному распределению $f(\infty) = c_0 f_0 = \mathrm{const}$. Скорость сходимости определяется минимальным по модулю отрицательным собственным значением $\lambda_1 : |f(T) - f(\infty)| = O(e^{\lambda_1 T})$.

Упражнение 5. Вычислить спектр оператора Δ_i на L_i.

Указание. Выбрать наиболее простой представитель f каждой неприводимой компоненты L_i и найти соответствующие собственные значения по формуле $\lambda = \dfrac{(\Delta f)(x)}{f(x)}$.

Ответ. $\operatorname{Spec}\Delta_6 = \{0,-1,-1,-1,-3/2,-3/2\}$,
$\operatorname{Spec}\Delta_8 = \{0,-2/3,-2/3,-2/3,-1,-1,-1,-2\}$.

1.5*. Еще один пример: группа $GL(2,\mathbb{F}_q)$. По определению эта группа состоит из обратимых 2×2-матриц $g = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, элементы которых принадлежат конечному полю $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Она имеет $(q^2-1)(q^2-q)$ элементов (первая строка $g\in G$ может быть произвольным ненулевым вектором, что предоставляет (q^2-1) возможностей; вторая строка может быть произвольным вектором, не кратным первому, и это предоставляет (q^2-q) возможностей).

Классы сопряженных элементов G описываются хорошо известной теоремой из линейной алгебры. Мы перечислим их здесь.

Тип I. Матрицы с двумя различными собственными значениями из $\mathbb{F}_q$. Они могут быть приведены к диагональному виду над исходным полем $\mathbb{F}_q$. Представитель класса типа I: матрица $g = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$. Централизатор g — группа H диагональных матриц. Таким образом, мощность класса равна $\dfrac{\#G}{\#H} = q(q+1)$. Существуют $\dfrac{(q-1)(q-2)}{2}$ таких классов.

Тип II. Матрицы с двумя (обязательно различными) собственными значениями из квадратичного расширения $\mathbb{F}_{q^2}$ исходного поля $\mathbb{F}_q$. Они приводятся к диагональным матрицам $g = \begin{pmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & \overline{\Lambda}\end{pmatrix}$ над $\mathbb{F}_{q^2}$. Представитель класса типа II: матрица $g = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -c_2 & c_1\end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 такие, что уравнение $x^2 - c_1x + c_2 = 0$ не имеет решений в $\mathbb{F}_q$ (имеет пару $\Lambda,\overline{\Lambda}$ сопряженных решений в $\mathbb{F}_{q^2}$). Централизатор g изоморфен мультипликативной группе $\mathbb{F}_{q^2}$ и имеет q^2-1 элементов. Таким образом, мощность класса равна q^2-q. Число таких классов равно $\frac{1}{2}\#(\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q) = \dfrac{q^2-q}{2}$.

Тип III. Скалярные матрицы $g = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$. Централизатор — это вся группа G, и класс состоит из одного (центрального) элемента. Существуют $q-1$ таких классов.

Тип IV. Недиагонализируемые матрицы, которые приводятся к жордановой нормальной форме $g = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$. Централизатор g в G состоит из матриц вида $\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ и содержит $q(q-1)$ элементов. Значит, мы имеем

$q-1$ классов типа IV, каждый из них мощности q^2-1. Общее число классов (следовательно, мощность $\widehat{G}$) равно q^2-1.

Теперь мы построим представления группы G. Так называемая **основная серия** состоит из представлений, индуцированных одномерными представлениями подгруппы B верхних треугольных матриц. Общий элемент $b \in B$ имеет вид $b = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, и общее одномерное представление B можно записать в виде

$$\rho_{\theta_1,\theta_2} : \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mapsto \theta_1(\lambda)\theta_2(\mu),$$

где θ_i, $i = 1, 2$, — **мультипликативные характеры** $\mathbb{F}_q$, т. е. комплексные функции на $\mathbb{F}_q \backslash \{0\}$ такие, что $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$.

Определим $\pi_{\theta_1,\theta_2} = \mathrm{Ind}_B^G \rho_{\theta_1,\theta_2}$. Пространство $X = B\backslash G$ есть проективная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. Действительно, определим действие G на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ формулой

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : x \mapsto \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}. \tag{27}$$

Тогда стабилизатором точки $x_0 = 0$ будет B.

Выберем сечение $s : X \to G$ в виде

$$s(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, & x \neq \infty, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & x = \infty. \end{cases}$$

Если x и $y = x \cdot g$ отличны от ∞, то основное уравнение (16) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha x + \gamma & \beta x + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \nu y & \nu \\ \mu y & \mu \end{pmatrix}.$$

Это уравнение имеет решение

$$\mu = \beta x + \delta, \quad \nu = \beta, \quad y = \frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}, \quad \lambda = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta x + \delta}.$$

Таким образом, индуцированное представление имеет вид

$$\left(\pi_{\theta_1,\theta_2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(x) = \theta_1\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta x + \delta}\right)\theta_2(\beta x + \delta)\, f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right). \tag{28}$$

Упражнение 6. Найти формулу для π_{θ_1,θ_2} в исключительных случаях, когда x, или $y = x \cdot g$, или оба одновременно равны ∞.

Ответ.

$$\left(\pi_{\theta_1,\theta_2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} f\right)(\infty) = \theta_1\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta}\right)\theta_2(\beta) f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \quad \beta \neq 0,$$

$$\left(\pi_{\theta_1,\theta_2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} f\right)\left(-\frac{\delta}{\alpha}\right) = \theta_1(\beta)\theta_2\left(\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta}\right) f(\infty), \quad \beta \neq 0,$$

$$\left(\pi_{\theta_1,\theta_2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} f\right)(\infty) = \theta_1(\delta)\theta_2(\alpha) f(\infty), \quad \beta = 0.$$

Теперь рассмотрим сплетения между представлениями основных серий. Пространство $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)\times\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ имеет ровно две G-орбиты: диагональ $x=y$ и дополнение $x\neq y$. В силу теоремы 4 $i(\pi_{\theta_1,\theta_2},\pi_{\theta_1',\theta_2'})\leqslant 2$.

? Упражнение 7. (a) Показать, что сплетение, соответствующее диагонали, может быть ненулевым тогда и только тогда, когда $\theta_1=\theta_1', \theta_2=\theta_2'$. В этом случае оно является скалярным оператором.

(b) Показать, что сплетение, соответствующее дополнению диагонали, может быть ненулевым тогда и только тогда, когда $\theta_1=\theta_2', \theta_2=\theta_1'$. В этом случае оно имеет свойство

$$(Af)(\infty) = c\sum_{x\in\mathbb{F}_q\subset\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)} f(x).$$

(c) Из (a) и (b) вывести, что π_{θ_1,θ_2} неприводимо при $\theta_1\neq\theta_2$ и разлагается на две неприводимые части (одномерную и q-мерную) при $\theta_1=\theta_2$.

В целом, мы получили $(q^2+q)/2-1$ унитарных неприводимых представлений основной серии. Нам не хватает еще $(q^2-q)/2$ унитарных неприводимых представлений, которые образуют так называемую **дискретную серию**.[6]

Квадратичное расширение $\mathbb{F}_{q^2}$ может рассматриваться как двумерное пространство V над $\mathbb{F}_q$ (конечный аналог комплексной плоскости $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$). Оно является линейной оболочкой 1 и некоторого элемента $\tau\in\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$. Для нечетного q можно считать, что $\tau^2=\varepsilon$ для некоторого неквадратичного элемента $\varepsilon\in\mathbb{F}_q$. Умножение на $z=a+b\tau\in\mathbb{F}_{q^2}$ является линейным оператором в V. В базисе $\{1,\tau\}$ соответствующая матрица имеет вид

$$M_z = \begin{pmatrix} a & b\\ \varepsilon b & a\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем вложение $z\mapsto M_z$ поля $\mathbb{F}_{q^2}$ в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_q)$. Мультипликативная группа $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ переходит в подгруппу H группы G.

[6]Терминология пришла из теории вещественной группы Ли $SL(2,\mathbb{R})$, где унитарные неприводимые представления дискретной серии действительно зависят от дискретного множеств параметров в противоположность унитарным неприводимым представлениям основной серии, которая зависит от непрерывно меняющегося параметра (см. п. 3.2).

Теперь рассмотрим дробно-линейное действие G на $Y = \mathbb{F}_{q^2} \backslash \mathbb{F}_q$:

$$z \mapsto z \cdot g =: \frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}.$$

Лемма 1. *G-множество Y однородно, и стабилизатор точки $\tau \in Y$ совпадает с H.*

Доказательство. Если $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\tau = \tau \cdot g = \dfrac{\alpha\tau + \gamma}{\beta\tau + \delta}$, то $\beta\tau^2 + (\delta - \alpha)\tau - \gamma = 0$ и $\alpha = \delta$, $\gamma = \varepsilon\beta$. Поэтому $g = M_{\alpha+\tau\beta} \in H$.

Число точек в G-орбите τ равно $\#G/\#H = q^2 - q = \#Y$. Поэтому Y однородно. □

Пусть Θ — мультипликативный характер поля $\mathbb{F}_{q^2}$, т. е. одномерное представление H. Положим $\Pi_\Theta := \mathrm{Ind}_H^G \Pi_\Theta$.

Упражнение 8. Выписать основное уравнение для действия G на Y и вывести явную формулу для Π_Θ.

Ответ.

$$\left(\Pi_\Theta \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(z) = \Theta(\beta z + \delta) f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right).$$

Лемма 2. (a) *G-множество $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) \times Y$ однородно.*

(b) *H-множество Y состоит из двух одноточечных орбит τ и $-\tau$ и $q - 2$ орбит мощности $q + 1$.*

Следствие. (a) $i(\pi_{\theta_1,\theta_2}, \Pi_\Theta) \leqslant 1$. (b) $i(\Pi_{\Theta_1}, \Pi_{\Theta_2}) \leqslant q$.

Оставим читателю завершить изучение сплетений между построенными выше представлениями и локализовать унитарные неприводимые представления дискретной серии.

1.6. Оператор Лапласа и геометрия S^2. Рассмотренные выше результаты и методы для конечных групп часто оказываются применимы для компактных групп и однородных пространств. В этом разделе мы покажем, что теория представлений группы $G = SO(3, \mathbb{R})$ способна помочь решить некоторые геометрические и аналитические задачи на двумерной сфере S^2.

Хорошо известно, что $\widehat{G}$ является счетным множеством (классов эквивалентности) представлений ρ_k, $k = 0, 1, \ldots$, где $d_k = 2k + 1$ (см. любой учебник по теории представлений или лекцию 10).

Пусть σ — мера на S^2, инвариантная при вращениях и нормализованная равенством $\int_{S^2} \sigma = 1$. Эту меру локально можно записать в виде

$$\sigma = \frac{dx \wedge dy}{4\pi\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{dy \wedge dz}{4\pi\sqrt{1 - y^2 - z^2}} = \frac{dz \wedge dx}{4\pi\sqrt{1 - x^2 - z^2}}.$$

Нас интересует разложение естественного представления T группы G в $L^2(S^2, \sigma)$. Пусть $H \cong SO(2, \mathbb{R})$ — подгруппа вращений вокруг оси z. Это в точности стабилизатор точки в S^2. Поэтому T является унитарным представлением $\mathrm{UInd}_H^G 1$.

Согласно двойственности Фробениуса любые унитарные неприводимые представления (ρ_k, V_k) группы G входят в разложение T с кратностью, равной числу линейно независимых H-инвариантных векторов в V_k, которое в действительности равно 1 для всех k. Следовательно, как G-модуль,

$$L^2(S^2, \sigma) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k.$$

Более того, известно, что образ V_k в $L^2(S^2, \sigma)$ можно получить сужением на S^2 пространства $H^k(\mathbb{R}^3)$ однородных гармонических полиномов степени k от переменных x, y, z. В частности,

V_0 — пространство постоянных функций на S^2,

V_1 порождается тремя переменными x, y, z,

V_2 порождается пятью полиномами xy, yz, xz, $x^2 - y^2$, $y^2 - z^2$,

и т. д.

Каждое подпространство V_k содержит единственную (с точностью до скалярного множителя) H-инвариантную функцию. Она зависит только от z и совпадает с **полиномом Лежандра**

$$L_k(z) = \left(frac1k!\frac{d}{dz}\right)^k [(z^2-1)^k].$$

Укажем первые три полинома Лежандра: $L_0(z) \equiv 1$, $L_1(z) = \frac{1}{2}z$, $L_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$. Далее нам потребуются точные значения этих полиномов в точках $z = 1$ и $z = 0$.

Упражнение 9. Показать, что

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(0) = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{1}{2^{2k}} \dbinom{2k}{k}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Указание. Использовать равенства

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[\frac{(z-1)^n}{n!}\frac{(z+1)^n}{n!}\right] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(z-1)^i}{i!} \frac{(z+1)^{n-i}}{(n-i)!},$$

$$(z^2-1)^{2k} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2k}{i} (-z^2)^i.$$

Теперь мы применим полученные результаты к следующим задачам.

Задача Минковского. Показать, что выпуклое центрально-симметричное тело, все сечения которого имеют одинаковую площадь, является шаром.

Спектральная задача. Найти спектр оператора Лапласа — Бельтрами Δ на двумерной единичной сфере S^2.

В обоих случаях решение основано на свойствах сплетающих операторов. Чтобы решить первую задачу, мы рассмотрим оператор A на $C^\infty(S^2)$, определенный формулой

$$(Af)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_x} f(y)dy,$$

где C_x — большая окружность с эпицентром в точке $x \in S^2$. Можно проверить, что этот оператор непрерывен в L^2-норме и, следовательно, может быть продолжен до ограниченного оператора в $L^2(S^2,\sigma)$.

Это связано с геометрией выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$ следующим образом. Предположим, что тело B ограничено поверхностью, задаваемой в полярных координатах уравнением $r = r(x)$, $x \in S^2$. Тогда площадь сечения B плоскостью $x^\perp$ равна величине

$$\pi\int\limits_{C_x} r^2(y)dy = \pi(A\, r^2)(x).$$

Проверим, что сужение A на подпространство $\oplus_{k=0}^{\infty} V_{2k}$ четных функций имеет тривиальное ядро. Из этого факта можно получить решение задачи Минковского. Действительно, это означает, что четная функция f однозначно определяется своим образом Af. В частности, $Af \equiv \mathrm{const}$ влечет $f \equiv \mathrm{const}$.

Теперь мы воспользуемся тем, что A является сплетением для T. По лемме Шура он сводится к скаляру c_k на любом неприводимом подпространстве V_k. Для нахождения этого скаляра воспользуемся равенствами $AL_k = c_k L_k$ и $(AL_k)(1) = L_k(0)$. Ввиду упражнения 9

$$c_n = 0 \text{ при нечетном } n, \qquad c_{2k} = \frac{L_{2k}(0)}{L_{2k}(1)} = (-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k)} \neq 0.$$

Для решения спектральной задачи заметим, что оператор Лапласа — Бельтрами Δ также является сплетающим оператором для T. Действительно, $\Delta = X^2 + Y^2 + Z^2$, где X, Y, Z — образующие вращений вокруг координатных осей: $X = y\partial_z - z\partial_y$, $Y = z\partial_x - x\partial_z$, $Z = x\partial_y - y\partial_x$. Таким образом, вычисление собственного значения λ_k оператора Δ на V_k — это частный случай вычисления инфинитезимального характера (см. лекцию 6).

Удобно использовать следующее определение оператора Лапласа — Бельтрами на многообразии Римана. Пусть A_ε — оператор усреднения по сфере с радиусом ε и центром в данной точке. Тогда

$$f = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\varepsilon^2}(A_\varepsilon f - f).$$

Так как $(A_\varepsilon L_k)(1) = L_k(\cos\varepsilon)$, нетрудно видеть, что

$$(A_\varepsilon L_k)(1) \approx L_k(1) - \frac{\varepsilon^2}{2}L_k'(1), \qquad (\Delta L_k)(1) = -2L_k'(1).$$

Это дает ответ на спектральную задачу:

$$\lambda_k = \frac{\Delta L_k}{L_k}(1) = \frac{-2L_k'(1)}{L_k(1)} = -k(k+1).$$

Итак, Δ имеет ряд собственных значений $-k(k+1) = 1/4 - (k+1/2)^2$ с кратностями $2k+1, k = 0, 1, 2, \ldots$.

? Упражнение 10. Вычислить след оператора Δ^{-21} в пространстве функций с нулевым средним.

Ответ. 1.

2. Векторные функциональные пространства и линейные операторы

Далее мы будем, в основном, рассматривать бесконечномерные векторные пространства. Как правило, это будут пространства функций (или классов эквивалентных функций) на многообразии. Приведем некоторые сведения о таких пространствах и линейных операторах на них.

2.1. Пространства гладких функций на многообразии. Сначала рассмотрим пространство $\mathcal{A}(M)$ гладких функций с компактным носителем на гладком n-мерном многообразии M. Это топологическое пространство, и сходимость $f_k \to f$ определяется следующим образом:

(a) носители всех функций f_k и f содержатся в компактном множестве $K \subset M$,

(b) в любой локальной системе координат $(U, \{x^1, \ldots, x^n\})$ последовательность $\{f_k(x^1, \ldots, x^n)\}$ сходится к $f(x^1, \ldots, x^n)$ равномерно на $U \cap K$ вместе со всеми своими производными.

Обозначим через $\mathcal{A}^*(M)$ двойственное пространство, т. е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{A}(M)$. Обычно элементы $\mathcal{A}^*(M)$ называют **распределениями** на M. Элементы $\mathcal{A}(M)$ иногда называют **основными функциями**. Значение распределения F на основной функции f обозначается через $\langle F, f\rangle$ или $\int\limits_M Ff$.

Теперь мы рассмотрим другой путь обобщения понятия функции на гладком многообразии. Пусть $\mathcal{B}(M)$ — пространство гладких плотностей с компактным носителем в M. Элементы двойственного пространства $\mathcal{B}^*(M)$ называются **обобщенными функциями** на M.

Если M — ориентированное многообразие и фиксирована дифференциальная форма высшей степени vol, можно отождествить $\mathcal{A}(M)$ и $\mathcal{B}(M)$ с помощью $f \rightsquigarrow f \cdot \mathrm{vol}$. В этом случае можно отождествить обобщенные функции и распределения. Заметим, что результат отождествления зависит от выбора формы объема. Во многих случаях (как, например, для $\mathbb{R}^n$ или других однородных пространств с инвариантной мерой) существует естественная форма объема и практически нет различия между распределениями и обобщенными функциями. В более деликатных ситуациях важно различать эти понятия.

Любая обычная локально интегрируемая функция[7] g может рассматриваться как обобщенная функция. Если M ориентируемое и форма объема vol фиксирована, мы определяем распределение $\widetilde{g} := g \cdot \mathrm{vol}$ по формуле

$$\langle \widetilde{g}, f \rangle = \int\limits_M gf \cdot \mathrm{vol}.$$

Распределения такого вида называются **регулярными**.

Замечание 2. Конечно, не все распределения регулярны. Простейший пример нерегулярного распределения — это знаменитая δ-функция Дирака. Первоначальное физическое определение δ-функции, сосредоточенной в точке $m_0 \in M$, было следующим:

δ_{m_0} равна нулю вне точки m_0, принимает значение ∞ в точке m_0 и
$$\int\limits_M \delta_{m_0} = 1.$$

В течение четверти века физики использовали это определение, несмотря на настойчивые уверения математиков, что такой функции не существует. Лишь много позже была создана математическая теория распределений, и δ-функция получила следующее математическое определение:

δ_{m_0} — это распределение, определенное формулой $\langle \delta_{m_0}, f \rangle = f(m_0)$.

Пространство распределений является топологическим пространством: мы полагаем $\lim\limits_{k\to\infty} F_k = F$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \langle F_k, f \rangle = \langle F, f \rangle$ для любой основной функции f.

Оказывается, что отображение $\mathcal{A}(M) \hookrightarrow \mathcal{A}^*(M) : g \mapsto \widetilde{g}$ в действительности является непрерывным вложением в виде плотного подпространства, что позволяет рассматривать распределения как пределы обычных функций и продолжать "по непрерывности" основные операции для гладких функций на распределения. В связи с этим мы приведем три главных примера.

1. Умножение на гладкую функцию. Пусть $\varphi \in C^\infty(M)$ и M_φ — линейный оператор на $\mathcal{A}(M)$, заданный формулой $M_\varphi f = \varphi f$. Тогда для любой основной функции $f \in \mathcal{A}(M)$ имеем

$$\langle \widetilde{M_\varphi g}, f \rangle = \langle \widetilde{g}, M_\varphi f \rangle. \tag{29}$$

Теперь предположим, что g изменяется таким образом, что $\widetilde{g}$ приближается к распределению F. Тогда правая часть (29) имеет предел $\langle F, M_\varphi f \rangle$ и можно определить действие M_φ на F по непрерывности:

$$\langle M_\varphi F, f \rangle = \langle F, M_\varphi f \rangle. \tag{30}$$

[7] Под **локально интегрируемой функцией** мы подразумеваем здесь функцию, которая интегрируема по Лебегу в любой координатной карте с компактным замыканием.

2. Дифференцирование вдоль гладкого векторного поля. Рассмотрим $\xi \in \operatorname{Vect} M$ как дифференциальный оператор первого порядка на $\mathcal{A}(M)$ в локальных координатах $(\xi g)(x) = \xi^i(x)\partial_i g(x)$. Имеем

$$\langle\widetilde{\xi g}, f\rangle = \int\limits_M \xi g \cdot f\omega = -\int\limits_M g L_\xi(f\omega) = \left\langle \widetilde{g}, \left(-\xi f - f\frac{L_\xi \omega}{\omega}\right)\right\rangle,$$

что приводит нас к следующему определению ξF:

$$\langle \xi F, f\rangle = \langle F, -(\xi + \operatorname{div}_\omega \xi) f\rangle,$$

где $\operatorname{div}_\omega \xi = \dfrac{L_\xi \omega}{\omega}$ — дивергенция поля ξ относительно ω. В частности, если мы используем унимодулярную систему координат $\omega = d^n x := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, то $\operatorname{div}_\omega \xi = \sum_i \partial\xi^i/\partial x^i$.

Эти рассуждения приводят нас к следующему определению ξF:

$$\langle \xi F, f\rangle = \langle F, -(\xi + \operatorname{div}_{\mathrm{vol}} \xi) f\rangle. \tag{31}$$

3. Диффеоморфизм (или замена переменных). Рассмотрим диффеоморфизм $\Phi : M \to M$. Выберем системы координат $\{x^1, \ldots, x^n\}$ и $\{y^1, \ldots, y^n\}$ такие, что $x^i = \Phi^i(y)$. Тогда

$$\langle\widetilde{g \circ \Phi}, f\rangle = \int\limits_M (g \circ \Phi) \cdot f d^n x = \int\limits_M g \cdot (f \circ \Phi^{-1}) J(\Phi^{-1}) d^n y,$$

где $J(\Phi^{-1})$ — якобиан $\det \|\partial y^k/\partial x^j\|$. Эти рассуждения приводят к следующему определению замены переменных для распределений:

$$\langle F \circ \Phi, f\rangle = \langle F, f \circ \Phi^{-1} \cdot J(\Phi^{-1})\rangle. \tag{32}$$

? Упражнение 11. Проверить, что $a(x)\delta'(2x) = \frac{1}{4}a(0)\delta'(x) - \frac{1}{4}a'(0)\delta(x)$. *Указание.* Сделать подстановку $x = y/2$ в интеграле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(x)\delta'(2x) f(x) dx$$

и проинтегрировать по частям.

Закончим этот раздел теоремой Шварца.

Теорема 5. *Пусть A — непрерывный линейный оператор из $\mathcal{A}(M)$ в $\mathcal{A}^*(N)$. Тогда существует распределение $a \in \mathcal{A}^*(M \times N)$ такое, что для любых $f \in \mathcal{A}(M)$ и $g \in \mathcal{A}(N)$*

$$\langle Af, g\rangle = \langle a, f \times g\rangle.$$

Благодаря этой теореме можно рассматривать любой оператор в функциональных пространствах как интегральный оператор с обобщенным ядром:

формула

$$(Af)(y) = \int\limits_M a(x,y)f(x)dx$$

должна интерпретироваться как равенство распределений

$$\langle Af, g\rangle = \int\limits_M (Af)(y)g(y)dy = \iint\limits_{M\times M} a(x,y)f(x)g(y) := \langle a, f\times g\rangle.$$

Такой подход очень полезен при изучении сплетений между индуцированными представлениями.

2.2. Гладко индуцированные представления группы Ли. До сих пор мы использовали термин "индуцированное представление" только применительно к конечной группе G. Если мы захотим распространить это понятие на случай групп Ли, то основная трудность возникнет при нахождении правильного аналога пространства $L_{\mathbb{C}}(G)$. Мы не можем использовать пространство $L_{\mathbb{C}}(G)$ всех комплексных функций на G. Хотя пространство $\mathcal{A}(G)$ гладких финитных функций (см. лекцию 1) может показаться более удачным выбором, но это пространство имеет существенный недостаток: для некомпактных подгрупп H пространство $V = (W\otimes\mathcal{A}(G))^H$ тривиально (сводится к $\{0\}$)! В связи с этим мы введем пространство $\mathcal{A}_H(G) \subset C^\infty(G)$ гладких функций на G, носители которых **компактны по модулю H**. Это означает, что при естественной проекции $p: G \to X = H\backslash G$ носители этих функций переходят в компактные множества. Мы модифицируем определение из п. 1.3 следующим образом.

Определение 4. Пусть G — группа Ли, H — замкнутая подгруппа и (ρ, V) — конечномерное комплексное представление H. **Гладко индуцированное представление** $\operatorname{S}\operatorname{Ind}_H^G \rho$ действует в пространстве $W = (V\otimes\mathcal{A}_H(G))^H$ гладких V-значных функций F на G таких, что

$$\text{(a)}\quad F(hg) = \rho(h)F(g), \qquad \text{(b)}\quad p(\operatorname{supp} F)\ \text{компактно}. \tag{11'}$$

Представление действует согласно формуле

$$((\operatorname{S}\operatorname{Ind}_H^G \rho)(g)F)(g') = F(g'g). \tag{12'}$$

Для группы Ли, так же, как для конечной группы, процедура индуцирования приводит к наиболее интересным представлениям. Замечательно, что теорему 4 из п. 1.3 можно адаптировать к рассматриваемой ситуации, но сначала мы сделаем несколько замечаний общего характера.

Обсудим геометрическую природу пространства $W = (V\otimes\mathcal{A}(G))^H$, в котором действует индуцированное представление. Напомним, что в простейшем случае, когда (ρ, V) — тривиальное одномерное представление H, это пространство отождествляется с функциональным пространством $\mathcal{A}(M)$, $M = H\backslash G$.

Оказывается, что в общем случае это пространство состоит из гладких финитных сечений некоторого векторного расслоения над M. Изучение векторных расслоений над гладкими многообразиями — довольно трудная геометрическая и топологическая задача. Однако в случае G-векторных расслоений над однородными многообразиями эта задача сводится к чисто алгебраическим вопросам.

Теорема 6. *Пусть G — группа Ли, H — замкнутая подгруппа и $M = H\backslash G$ — правое однородное G-многообразие с начальной точкой $m_0 = \{H\} \in M$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Существует естественная биекция между G-векторными расслоениями E над M со слоем V над m_0 и линейными представлениями ρ группы H в V.*

(b) *Глобальное пространство E изоморфно $\operatorname{ind}_H^G V = G \underset{H}{\times} V$.*

(c) *Пространство гладких финитных сечений E, как G-векторного пространства, изоморфно $S\operatorname{Ind}_H^G V = (A_H(G) \times V)^H$.*

Доказательство. Данное утверждение есть "гладкий" вариант части принципа двойственности Фробениуса (см. п. 1.3). □

2.3. Теорема о ядре и сплетающие операторы. Теперь рассмотрим структуру сплетающих операторов между двумя гладко индуцированными представлениями. Пусть G — группа Ли, H и K — две замкнутые подгруппы G и $(\pi, V), (\rho, W)$ — конечномерные представления этих подгрупп.

На основе теореме о ядре и рассуждений из п. 1.3 можно показать, что любое G-эквивариантное отображение из $\mathrm{S}\operatorname{Ind}_H^G V$ в $\mathrm{S}\operatorname{Ind}_K^G W$ соответствует $\operatorname{End}(V, W)$-значному распределению a на G такому, что

$$a(kgh) = \rho(k) \circ f(g) \circ \pi(h). \tag{22'}$$

Обратно, если распределение a удовлетворяет (22′), можно определить оператор $A : \operatorname{Ind}_H^G V \to (\operatorname{Ind}_K^G W^*)^*$ по формуле $\langle AF, G\rangle = \langle a, F \times G\rangle$. В п. 1.3 мы неявно использовали канонический изоморфизм $(\operatorname{Ind}_K^G W^*)^* \simeq \operatorname{Ind}_K^G W$. В бесконечномерной ситуации мы можем лишь надеяться, что область значений оператора A лежит в $\operatorname{Ind}_K^G W \subset (\operatorname{Ind}_K^G W^*)^*$.

Итак, вместо равенства в теореме 4 мы имеем верхнюю оценку.

Теорема 7. *Число сплетения $i(\mathrm{S}\operatorname{Ind}_H^G V, \mathrm{S}\operatorname{Ind}_K^G W)$ не превышает числа линейно независимых $\operatorname{End}(V, W)$-значных распределений на G, удовлетворяющих условию (22′).*

Приложения этой теоремы к практическим вопросам часто связаны с интересными и нетривиальными проблемами теории распределений. Некоторые из таких задач приводятся ниже.

2.4. Унитарно индуцированные представления группы Ли. Поскольку мы интересуемся унитарными представлениями, нам потребуется распространить понятия функтора ограничения и функтора индуцирования на категории унитарных представлений группы Ли G и ее подгруппы Ли H. Определение Res_H^G очевидно. Что касается Ind_H^G, ситуация несколько сложнее.

Пусть (ρ, V) — унитарное представление подгруппы H. Гладко индуцированное представление $\mathrm{S}\operatorname{Ind}_H^G \rho$ действует в пространстве гладких финитных сечений некоторого векторного расслоения E над $M = H\backslash G$ и, как G-векторное пространство, изоморфно $(V \otimes \mathcal{A}_H(G))^H$. Это пространство априори не имеет G-инвариантного скалярного произведения. Отметим, однако, что существует естественная двойственность, которая каждой паре сечений s_1 и s_2 расслоения E ставит в соответствие функцию $\langle s_1, s_2\rangle \in \mathcal{A}(M)$ такую, что

$$\langle s_1, s_2\rangle(Hg) = (F_1(g), F_2(g))_V, \tag{33}$$

где F_1 и F_2 — элементы $(V \otimes \mathcal{A}_H(G))^H$, представляющие данные сечения, и $(\cdot,\cdot)_V$ — скалярное произведение в V.

Действительно, V-значные функции $F_i(g)$ удовлетворяют (11′), Следовательно, правая часть (33) есть скалярная функция, равная константе на правых классах смежности по модулю H. Таким образом, мы можем рассматривать ее как функцию на M. Кроме того, эта функция имеет компактный носитель ввиду второй части (11′), если плотность μ на M интеграла $\int\limits_M \langle s_1, s_2\rangle \cdot \mu$ имеет смысл. Это наблюдение приводит к следующей процедуре.

Пусть $|\operatorname{vol}|^{1/2}$ — линейное расслоение полуплотностей на M (см. лекцию 4). Положим $\widetilde{E} = E \otimes |\operatorname{vol}|^{1/2}$. Это G-расслоение с естественным G-инвариантным скалярным произведением финитных сечений. Согласно теореме 6 расслоение $\widetilde{E}$ соответствует некоторому представлению H. Несложно определить это представление. Напомним, что линейное расслоение $|\operatorname{vol}|^{1/2}$ полуплотностей на M соответствует одномерному представлению τ группы H, которое действует в одномерном пространстве $\mathbb{C}_\tau \cong \mathbb{C}$ по формуле $\tau(h) = (\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h))^{1/2}$. Итак, мы определяем **унитарно индуцированное представление** $\operatorname{U}\operatorname{Ind}_H^G \rho$ как унитарное представление, продолжающее $\operatorname{S}\operatorname{Ind}_H^G(\rho \otimes \tau)$ на гильбертово пополнение пространства $\operatorname{ind}_H^G(V \otimes \mathbb{C}_\tau)$.

3. Представления SL(2, R) и SL(2, C)

Исторически, эти группы были первыми примерами некомпактных полупростых групп Ли G, для которых множество $\widehat{G}$ было вычислено явно (см. [Ba] и [GN]).

3.1. Основное аффинное пространство и представления основной серии. Положим $G = SL(2, K)$, $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, и обозначим через B борелевскую подгруппу G верхних треугольных матриц $b = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}$, $t \in K^\times$, $s \in K$. (Как обычно, $K^\times$ обозначает мультипликативную группу ненулевых элементов K.)

Пусть θ — мультипликативный характер поля K, т. е. непрерывный гомоморфизм из $K^\times$ в $\mathbb{C}^\times$. Определим одномерное представление ρ_θ группы B по формуле $\rho_\theta(b) = \theta(t)$. Пусть $\pi_\theta = \operatorname{S}\operatorname{Ind}_B^G \rho_\theta$ — соответствующее ее гладко индуцированное представление.

Упражнение 12. Показать, что общий мультипликативный характер $K^\times$ имеет вид

? (a) для $K = \mathbb{R}$: $\theta_{\varepsilon,\lambda}(t) = (\operatorname{sgn} t)^\varepsilon \cdot |t|^\lambda$, где $\varepsilon = 0, 1$ и $\lambda \in \mathbb{C}$,

(b) для $K = \mathbb{C}$: $\theta_{n,\lambda}(t) = \left(\frac{t}{|t|}\right)^n \cdot |t|^\lambda$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Заметим, что в обоих случаях $|\theta(t)| = |t|^{\operatorname{Re}\lambda}$.

Указание. При $K = \mathbb{R}$ рассмотреть θ как обобщенную функцию и проверить, что она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $\theta' = c \cdot \theta$. При $K = \mathbb{C}$ использовать разложение $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$ и рассмотреть по отдельности ограничения θ на $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{T}$.

В силу основного уравнения, как в п. 1.3, получаем

$$\left(\pi_\theta \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(x) = \theta(\beta x + \delta) f\left(\frac{\alpha x + \gamma}{\beta x + \delta}\right). \tag{34}$$

Заметим, что π_θ действует в пространстве гладких сечений некоторого линейного расслоения над $\mathbb{P}^1(K)$ и формула (34) выражает это действие через (негладкое) сечение этого линейного расслоения над $K \subset \mathbb{P}^1(K)$.[8]

Представление π_θ допускает также геометрическую реализацию. Стандартное линейное действие группы $G = SL(2, K)$ на плоскости K^2 имеет две орбиты: начало координат $\{0\}$ и дополнение A к началу координат. Последнее дает пример так называемого **основного аффинного пространства**.[9] Действие G на A коммутирует с растяжениями $v \mapsto tv$, $t \in K^\times$. Фиксируем мультипликативный характер θ. Будем говорить, что функция $f \in C^\infty(A)$ **однородна типа** θ, если $f(tv) = \theta(t) f(v)$ при $t \in K^\times$.

Предложение 2. *Естественное представление π_θ группы G в пространстве гладких однородных функций типа θ эквивалентно гладко индуцированному представлению $S\operatorname{S Ind}_B^G \rho_\theta$.*

Идея доказательства. Однородные функции на A можно отождествлять с сечениями G-расслоения над $\mathbb{P}^1(K) = G/B$, определенного характером ρ_θ группы B. □

Выберем простейшую эрмитову форму

$$(f_1, f_2) = \int_K f_1(x) \overline{f_2(x)} |dx|,$$

где $|dx|$ — мера Хаара на K, и исследуем, когда эта форма инвариантна относительно G-действия. Имеем

[8] В теории унитарных представлений можно не учитывать исключительную точку $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$, так как в данном случае мы имеем дело с гильбертовым пространством, элементы которого суть не функции, а классы эквивалентных функций, определенных почти всюду.

[9] В теории представлений полупростых групп основное аффинное пространства определяется как G/N, где N — унипотентный радикал борелевской подгруппы $B \subset G$. Это квазиаффинное алгебраическое многообразие (открытая область в аффинном многообразии).

$$\left| \pi_\theta \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f \right|^2_{L^2(K,dx)} = \int\limits_K |\theta(\beta x+\delta)|^2 \left| f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right) \right|^2 |dx|$$
$$= \int\limits_K |-\beta y+\alpha|^{-2\mathrm{Re}\lambda-2d}|f(y)|^2|dy|.$$

Последнее равенство получено с помощью замены переменных $\dfrac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta} \mapsto y$. При этом

$$x \mapsto \frac{\delta y-\gamma}{-\beta y+\alpha}, \quad \beta x+\delta \mapsto \frac{1}{(-\beta y+\alpha)^2}, \quad |dx| \mapsto \frac{|dy|}{|-\beta y+\alpha|^{2d}},$$

где $d = \dim_{\mathbb{R}} K$ (т. е. $d=1$ при $K=\mathbb{R}$ и $d=2$ при $K=\mathbb{C}$). Представление π_θ унитарно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}\,\lambda = -d$. (Фактически, π_θ совпадает с $\mathrm{U\,Ind}_B^G\,\rho_{\theta/|\theta|}$.)

Положим $\lambda = -d+ir$ и определим **основную серию унитарных представлений** $SL(2,K)$ по формуле

$$\left(\pi_{n,r}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(z) = (\beta z+\delta)^n|\beta z+\delta|^{-2-n+ir} f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right), \quad K=\mathbb{C},$$
$$\left(\pi_{\varepsilon,r}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(x) = (\mathrm{sgn}\,(\beta x+\delta))^\varepsilon|\beta x+\delta|^{-1+ir} f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right), \quad K=\mathbb{R}. \tag{35}$$

Рассмотрим сплетения между построенными представлениями при $k=\mathbb{R}$.

Теорема 8. *Нетривиальные сплетения существуют только при выполнении следующих условий*:

(a) $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ и $r_1=r_2$ (*тогда любой скалярный оператор является сплетением*),

(b) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ и $r_1=-r_2=r$ (*тогда оператор*

$$(Sf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(y)\,\mathrm{sgn}(x-y)^\varepsilon}{|x-y|^{1-ir}}dy \tag{36}$$

является сплетением).

Доказательство следует общей схеме из п. 2.3. Мы поясним лишь детали, характерные для данного частного случая.

С помощью теоремы Шварца запишем сплетение между $\pi_{\theta'}$ и π_θ в виде

$$(Sf)(x) = \int\limits_K s(x,y)f(y)dy,$$

где $s(x,y)$ — обобщенное ядро на $K\times K$. Тогда условие $S\circ\pi_{\theta'}(g) = \pi_\theta(g)\circ S$ принимает вид

$$\int\limits_K s(x,y)\theta'(\beta y+\delta)f\left(\frac{\alpha y+\gamma}{\beta y+\delta}\right)dy = \theta(\beta x+\delta)\int\limits_K s\left(\frac{\alpha s+\gamma}{\beta x+\delta},y\right)f(y)dy.$$

После замены переменных $y \mapsto \dfrac{\alpha y+\gamma}{\beta y+\delta}$ в правой части в силу равенства

$$\left| d\left(\frac{\alpha y+\gamma}{\beta y+\delta}\right)\right| = \left|\frac{dy}{(\beta y+\delta)^{2d}}\right| = |dy|\cdot|\theta(\beta y+\delta)|^2$$

мы получаем соотношение

$$s(x,y) = s\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}, \frac{\alpha y+\gamma}{\beta y+\delta}\right)\theta(\beta x+\delta)\overline{\theta'(\beta y+\delta)}. \tag{37}$$

Строго говоря, чтобы найти $s(x,y)$, надо перейти от (37) к системе дифференциальных уравнений. Однако заметим, что наше обобщенное ядро определено на гладком компактном многообразии $\mathbb{P}^1(K)\times\mathbb{P}^1(K)$ и соотношение (37), записанное в локальных координатах, включает только гладкие функции. Следовательно, обобщенные решения этих уравнений являются обычными функциями. С учетом этого факта, для определения $s(x,y)$ можно использовать непосредственно (37). Сначала положим $\alpha=\delta=1$ и $\beta=0$. Тогда $s(x,y)=s(x+\gamma,y+\gamma)$ и, следовательно, $s(x,y)=\widetilde{s}(x-y)$. Далее положим $\beta=\gamma=0$ и $\delta=\alpha^{-1}$. Тогда $s(x,y)=s(\alpha^2x,\alpha^2y)\theta(\alpha)^{-1}\overline{\theta'(\alpha)^{-1}}$ и, следовательно, $\widetilde{s}(\alpha^2t)=\theta(\alpha)\overline{\theta'(\alpha)}\widetilde{s}(t)$. Наконец, при $\alpha=\delta=1$ и $\gamma=0$

$$\widetilde{s}(x-y)=\widetilde{s}\left(\frac{x-y}{(\beta x+1)(\beta y+1)}\right)\theta(\beta x+1)\overline{\theta'(\beta y+1)}.$$

Сравнивая последние два равенства, заключаем, что $\theta'=\overline{\theta}$ и, следовательно, $s(x,y)=\mathrm{const}\cdot\theta(x-y)$. □

Для дальнейшего мы вычислим **инфинитезимальный характер** представления $\pi_{\varepsilon,r}$.[10] Стандартный базис в $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ состоит из матриц

$$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

При представлении $\pi_{\varepsilon,r}$ эти элементы переходят в следующие:

$$\pi_{\varepsilon,r}(H)=2x\frac{d}{dx}-1+ir,\quad \pi_{\varepsilon,r}(E)=-x^2\frac{d}{dx}+(1-ir)x,\quad \pi_{\varepsilon,r}(F)=\frac{d}{dx}.$$

Центр $Z(\mathfrak{g})$ обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ порождается единственным элементом $C=H^2+2EF+2FE$.

Прямые вычисления показывают, что $\pi_{\varepsilon,r}(C)$ является скалярным оператором с собственным значением $-(1+r^2)$. Это собственное значение определяет инфинитезимальный характер $\pi_{\varepsilon,r}$ и зависит только от класса эквивалентности представления. Следовательно, представления основной серии π_{ε_1,r_1} и π_{ε_2,r_2} могут быть эквивалентными только при $r_1^2=r_2^2$. Заметим, что теорема 8 устанавливает более точный результат: эквивалентность $\pi_{\varepsilon_1,r_1}\sim\pi_{\varepsilon_2,r_2}$ влечет $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ и $r_1=\pm r_2$.

Замечание 3. Случай $r=0$ исключительный: соответствующие представления $\pi_{\varepsilon,0}$ допускают нескалярные сплетения с собой.

[10] Определение и свойства инфинитезимальных характеров приведены в лекции 6.

Можно проверить, что $\pi_{0,0}$ действует в пространстве полуплотностей на $\mathbb{P}^1$ и $\pi_{1,0}$ действует в пространстве нетривиальных полуформ на $\mathbb{P}^1$. На самом деле первое представление неприводимо, а второе распадается в сумму двух подпредставлений $\pi^{\pm}_{1,0}$.

3.2. Плоскость Лобачевского и дискретная серия для $SL(2,\mathbb{R})$. Оказывается, что при $K = \mathbb{C}$ представления основной серии образуют подмножество полной меры Планшереля (хотя они все еще не исчерпывают полностью $\widehat{G}$).

При $K = \mathbb{R}$, как и в случае конечных полей, это не так. Регулярное представление $G = SL(2,\mathbb{R})$ содержит ряд унитарных неприводимых представлений иного вида, который называется **дискретной серией.**

Для построение таких серий мы рассмотрим другое однородное G-многообразие. Пусть H — верхняя полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Группа G действует на H теми же дробно-линейными преобразованиями: $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : z \mapsto \dfrac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$. Легко проверить, что стабилизатор точки $i \in H$ совпадает с подгруппой $SO(2,\mathbb{R}) \subset SL(2,\mathbb{R})$. В данном случае действие G на H будет голоморфным. Поэтому можно рассмотреть **голоморфно индуцированные** представления, действующие в пространстве голоморфных функций на H. Более точно, мы рассматриваем гильбертово пространство $\mathcal{H}_n$ голоморфных функций на H с G-инвариантным скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_H f_1(z)\overline{f_2(z)} y^{n-2} dx dy. \tag{38}$$

Явная формула для представлений (полученная, как обычно, из основного уравнения) имеет вид

$$\left(\Pi_n \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(z) = f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)(\beta z + \delta)^{-n}, \quad n \geqslant 2. \tag{39}$$

Представления $\overline{\Pi}_n$, двойственные представлениями Π_n, образуют другую дискретную серию. Они действуют в пространстве $\overline{\mathcal{H}_n}$ антиголоморфных функций на H. Иногда эти серии называют **аналитическими** и **антианалитическими** сериями соответственно.

Ввиду условия $n \geqslant 2$ в (39) $\mathcal{H}_n$ — ненулевые пространства. Интеграл (38) сходится для подходящих голоморфных функций на H.[11]

Здесь мы закончим наше исследование. Интересующийся читатель может обратиться к книгам [Kn], [La], где подробно изложен гармонический анализ на G.

[11] При $n = 1$ интеграл (38) может быть "регуляризован". Соответствующие представления Π_1, $\overline{\Pi}_1$ эквивалентны неприводимым компонентам $\pi^{\pm}_{1,0}$ серий $\pi_{1,0}$ (см. замечание 3 выше).

Лекция 6

ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ ДЛЯ ГРУПП ЛИ

1. Обобщенные характеры ... 144
   1.1. Операторы в гильбертовом пространстве ... 144
   1.2. Определение обобщенных характеров ... 149
   1.3. Два примера ... 151
2. Инфинитезимальные характеры ... 154
   2.1. Универсальная обертывающая алгебра и ее центр ... 154
   2.2. Отображение симметризации ... 156
   2.3. Центр обертывающей алгебры ... 158
   2.4. Определение инфинитезимальных характеров ... 159
   2.5. Пример ... 161

Одним из наиболее мощных методов теории представлений конечных групп является теория характеров. Эту теорию нельзя применять непосредственно в бесконечномерной ситуации, поскольку унитарные операторы никогда не принадлежат классу операторов со следом. Однако имеется две модификации — обобщенные и инфинитезимальные характеры — которые в данном случае оказываются полезными. В этой лекции мы рассмотрим эти модифицированные понятия характера.

1. Обобщенные характеры

Большим продвижением, независимо сделанным И. М. Гельфандом и Хариш-Чандра в 50-е годы, явилось введение понятия **обобщенного характера**. Для определения обобщенного характера нам потребуются некоторые сведения из теории операторов в гильбертовом пространстве.

1.1. Операторы в гильбертовом пространстве. Пусть H — вещественное или комплексное гильбертово пространство. Обозначим (x, y) скалярное произведение в H. **Длина** вектора $x \in H$ обозначается $|x|$ и определяется равенством $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Множество $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ называется

• **ортонормированной системой** в H, если $(x_k, x_j) = \delta_{k,j}$,

• **ортонормированным базисом**, если, кроме того, выполнено следующее **условие полноты**: если $(x, x_k) = 0$ для всех k, то $x = 0$.

Хорошо известно, что любой вектор $x \in H$ можно однозначно записать как бесконечную линейную комбинацию[1] базисных векторов: $x = \sum\limits_k c_k x_k$, где $c_k = (x, x_k)$ — коэффициенты.

Пример 1. Пусть X — множество с мерой μ. Обозначим через $L^2(X, \mu)$ множество вещественных μ-измеримых функций на X со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_X f(x) g(x) d\mu(x).$$

Строго говоря, мы должны рассматривать не функции, а классы эквивалентных функций: две функции эквивалентны, если они совпадают **почти всюду**, т. е. множество точек, в которых они не совпадают, имеет меру нуль. Однако, следуя общей традиции, мы пренебрегаем этим замечанием и будем называть элементы $L^2(X, \mu)$ просто “функциями”.

Комплексным вариантом этого пространства является пространство $L^2_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ комплекснозначных μ-измеримых функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Во многих приложениях X — гладкое многообразие M и мера μ задана гладкой плотностью или дифференциальной формой старшей степени.

Существует много замечательных примеров ортонормированных базисов в гильбертовых пространствах типа $L^2(M, \mu)$ или $L^2_{\mathbb{C}}(M, \mu)$. Наиболее известен следующий

Пример 2. Система функций на $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

образует ортонормированный базис в $L^2_{\mathbb{C}}(S^1, dx)$.[2]

Пусть f — функция на S^1 (или периодическая функция с периодом 1 на прямой $\mathbb{R}$). Разложение f в линейную комбинацию $e_n(x)$ называется **рядом Фурье** функции f. Это разложение является главным примером и объектом изучения коммутативного гармонического анализа. Одна из

[1] Заметим, что бесконечная линейная комбинация — понятие не алгебраическое, а топологическое. Для его определения требуется ввести понятие предела:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k x_k.$$

[2] Отметим одно любопытное свойство этой системы: значительную часть математических результатов можно записать, используя лишь буквы из этого выражения $e^{2\pi i n x}$.

целей теории представлений и некоммутативного гармонического анализа состоит в обобщении этого примера на другие однородные многообразия.

Линейный оператор A на H непрерывен тогда и только тогда, когда конечна **норма**

$$\|A\| = \sup_{0\neq x\in H} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|. \tag{2}$$

В этом случае A называется **ограниченным** оператором.

Множество всех ограниченных операторов в H образует банахово пространство $\mathcal{L}(H)$ относительно нормы (2).

Определим некоторые важные классы ограниченных операторов.

• Множество $\mathcal{L}_0(H)$ всех **операторов конечного ранга** (т. е. операторов с конечномерным образом).

• Замыкание $\mathcal{L}_0(H)$ по норме. Этот класс обозначается $\mathcal{K}(H)$, и соответствующие операторы называются **компактными**.

• Класс $\mathcal{L}_2(H)$ операторов **Гильберта — Шмидта** определяется следующим условием: для некоторого ортонормированного базиса $\{x_i\}$

$$\|A\|^2_{HS} := \sum_i |Ax_i|^2 \leqslant \infty. \tag{3}$$

На самом деле для таких операторов ряд (3) сходится в любом базисе и сумма не зависит от выбора базиса. Класс $\mathcal{L}_2(H)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(A,B)_{HS} := \sum_i (Ax_i, Bx_i). \tag{4}$$

Опять же, сумма не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{x_i\}$.

• Множество $\mathcal{L}_1(H)$ операторов **со следом**. Это замыкание $\mathcal{L}_0(H)$ по **следовой норме**

$$\|A\|_{\mathrm{tr}} = \sup_{\|B\|\leqslant 1} |\mathrm{tr}(AB)|. \tag{5}$$

Известно, что пространство $\mathcal{L}_1(H)^*$, снабженное следовой нормой, двойственно пространству $\mathcal{K}(H)$, а двойственное ему пространство $\mathcal{L}_1(H)$ совпадает с пространством $\mathcal{L}(H)$, снабженным обычной нормой (2).

Основные свойства операторов со следом указаны в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть A — оператор со следом. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *A можно записать как произведение BC двух операторов Гильберта — Шмидта и, обратно, произведение BC любых двух операторов Гильберта — Шмидта является оператором со следом.*

(b) *Ряд $\sum_{i\in I} (Ax_i, x_i)$ сходится абсолютно. Сумма этого ряда, называемая* **следом** *A и обозначаемая $\mathrm{tr}\, A$, не зависит от выбора базиса.*

(c) *Множество $\mathcal{L}_1(H)$ операторов со следом образует двусторонний идеал алгебры $\mathcal{L}(H)$ всех ограниченных операторов на H, и справедлива* *оценка*

$$\|ABC\|_{tr} \leqslant \|A\|\|B\|_{tr}\|C\| \quad \textit{для всех} \quad B \in \mathcal{L}_1(H) \ \textit{и} \ A, C \in \mathcal{L}(H).$$

(d) *Если хотя бы один из операторов A или B имеет след, то* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Схема доказательства. Рассмотрим **полярное разложение** $A = RU$ оператора A в пространстве H, где R — неотрицательный самосопряженный оператор (т. е. $(Rx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H$) и U — **частичная изометрия** (т. е. U — изометрия замкнутого подпространства $H_1 \subset H$ на замкнутое подпространство $H_2 \subset H$, равная нулю на $H_1^{\perp}$). Полярное разложение существует для любого оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ и единственно при дополнительном требовании $\ker U = \ker A$.

Если $A \in \mathcal{L}_1(H)$, то тем же свойством обладает $R = AU^*$. Однако самосопряженный неотрицательный оператор R имеет след тогда и только тогда, когда R компактный и в подходящем ортонормированном базисе $\{x_i\}$ записывается в виде $Rx_i = \lambda_i x_i$, где λ_i — неотрицательные числа такие, что

$$\sum_i \lambda_i = \operatorname{tr} R = \|R\|_{tr} \leqslant \infty.$$

Определим оператор $\sqrt{R}$ по формуле $\sqrt{R}x_i = \sqrt{\lambda_i}x_i$ и положим $B = \sqrt{R}$, $C = \sqrt{R}U$. Тогда B и C — операторы Гильберта — Шмидта и $A = BC$. □

Точно так же доказывается следующая полезная

Лемма 1. *Любой оператор $A \in \mathcal{L}_1(H)$ можно записать в виде $A = \sum_i A_i$, где $\operatorname{rk} A_i = 1$ и ряд сходится в следовой норме.*

Все утверждения теоремы 1 можно легко вывести из этой леммы.

Предупреждение. Равенство $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$ может не выполняться, если A и B ограничены, но не имеют следов. Например, пусть H — стандартное l^2-пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Определим A и $B = A^*$ по формуле

$$(Ax)_k = x_{k+1}, \quad (Bx)_k = \begin{cases} x_{k-1}, & k > 1, \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

Тогда $AB - BA$ — это проектор P_1 на первую координатную ось. Таким образом, $\operatorname{tr}(AB - BA) = 1$.

К сожалению, нет простых выражений ни для $\|A\|$, ни для $\|A\|_{tr}$ в терминах матричных коэффициентов $a_{j,k} := (Ax_j, x_k)$. Лишь в некоторых частных случаях эти нормы можно явно вычислить.

Пример 3. Пусть A — оператор с диагональной матрицей $a_{j,k} = \delta_{j,k}a_k$. Тогда $\|A\|_{tr} = \sum_k |a_k|$, $\|A\|_{HS} = \sum_k |a_k|^2$, $\|A\| = \sup_k |a_k|$.

Этот пример указывает аналогию между $\mathcal{L}_1(H)$, $\mathcal{L}_2(H)$ и $\mathcal{L}(H)$, с одной стороны, и классическими пространствами последовательностей l_1, l_2 и

l_∞, с другой стороны. Возникает естественный вопрос: существует ли операторный аналог других пространств l_p при $1 < p < \infty$?

Ответ "да". Это пространство $\mathcal{L}_p(H)$ — так называемый p-й **идеал Шаттена** в $\mathcal{L}(H)$. Элементы этого пространства характеризуются свойством $\|A\|_p^p := \operatorname{tr}(AA^*)^{p/2} \leqslant \infty$.

Наиболее важные примеры операторов Гильберта — Шмидта и операторов со следом доставляют **интегральные операторы**, которые действуют на пространстве $L^2(M,\mu)$ по формуле

$$(Af)(x) = \int\limits_M a(x,y)f(y)d\mu(y), \tag{6}$$

где $a(x,y)$ — функция на $M \times M$, удовлетворяющая некоторым условиям, обеспечивающим существование интеграла. Эта функция часто называется **ядром** оператора A. (Не путать с алгебраическим ядром оператора A, т. е. с пространством решений уравнения $Af = 0$!)

Несложно сформулировать необходимое и достаточное условие, когда интегральный оператор A будет оператором Гильберта — Шмидта: ядро должно принадлежать $L^2(M \times M, \mu \times \mu)$. Более того, в этом случае

$$\|A\|_{HS}^2 = \int\limits_{M\times M} |a(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y).$$

Что касается класса операторов со следом, то здесь ситуация более тонкая. Мы сформулируем лишь некоторые достаточные условия.

Теорема 2. (a) *Пусть M — компактное многообразие, μ — гладкая мера и a — гладкая функция на $M \times M$. Тогда интегральный оператор A, заданный формулой* (6) *в $H = L^2(M,\mu)$, имеет след и справедливо равенство*

$$\operatorname{tr} A = \int\limits_M a(x,x)d\mu(x). \tag{7}$$

(b) *Пусть M — произвольное многообразие. Предположим, что интегральный оператор A, заданный формулой* (6), *положительный* (*т. е.* $(Af,f) \geqslant 0$ *для всех $f \in H$*) *и имеет непрерывное ядро $a(x,y)$. Тогда A имеет след и справедливо равенство*

$$\|A\|_{tr} = \operatorname{tr} A = \int\limits_M a(x,x)d\mu(x).$$

(c) *Пусть A — интегральный оператор на $L^2(\mathbb{R}^n, d^nx)$ с ядром $a(x,y)$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда оператор A имеет след и справедливо равенство* (7).

Схема доказательства. (a) С помощью разбиения единицы на $M \times M$ рассмотрение сводится к случаю интегрального оператора на $L^2(\mathbb{R}^n, d^nx)$ с ядром из $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2n})$. В свою очередь, этот случай вытекает из случая интегрального оператора на $L^2(\mathbb{T}^n, d^nt)$ с гладким ядром. Для такого оператора задачу можно легко решить, разложив ядро в ряд Фурье.

(b) Аппроксимируем a ядрами $a_n \in \mathcal{A}$ и используем равенство $\|A\|_{tr} = \operatorname{tr} A$ для положительных операторов.

(c) Рассмотрим оператор B_n на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, заданный формулой

$$B_n = |x|^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

В частности, при $n = 1$ имеем $B_1 = x^2 - \dfrac{d^2}{dx^2}$. Хорошо известно, что спектр этого оператора [3] состоит из нечетных целых чисел $\lambda_k = 2k+1, k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\varphi_k(x) = H_k(x)e^{-x^2/2}$ — соответствующие собственные функции, где $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \dfrac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$ — **полиномы Эрмита.** Следовательно, оператор B_1^2 имеет обратный оператор B_1^{-2}, который является положительным оператором с собственными значениями $\dfrac{1}{(2k+1)^2}$, $k \geqslant 0$. Так как $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{(2k+1)^2} < \infty$, оператор B_1^{-2} имеет след.

Аналогично рассуждая, заключаем, что B_n^N имеет обратный оператор B_n^{-N} со следом для любого $N > n$. Теперь перепишем интегральный оператор A в виде $A = B_n^{-N} B_n^N A$ и заметим, что первый множитель имеет след, а произведение $B_n^N A$ ограничено (как интегральный оператор с ядром из пространства Шварца).

Таким образом, $A \in \mathcal{L}_1(L^2(\mathbb{R}^n, dx^n))$ и отображение $a \mapsto A$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{L}_1(L^2(\mathbb{R}^n, dx^n))$ непрерывно, поскольку $\|A\|_{tr} \leqslant \|B_n^{-N}\|_{tr} \cdot \|B_n^N A\|$. Равенство (7) можно установить, аппроксимируя ядро $a(x, y)$ так называемыми **вырожденными ядрами** вида $a_M(x, y) = \sum\limits_{m=1}^{M} \varphi_m(x)\psi_m(y)$. □

Замечание 1. Метод доказательства (c) можно обобщить на случай произвольного многообразия, на котором существует дифференциальной оператор B, имеющий обратный оператор со следом. Если интегральный оператор A имеет ядро $a \in C^\infty(M \times M)$ и это ядро убывает достаточно быстро, так что оператор BA ограничен, можно заключить, что A имеет след.

1.2. Определение обобщенных характеров. Пусть G — группа Ли и π — бесконечномерное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Фиксируем пространство $\mathcal{F}$ основных функций на G. Например, $\mathcal{F} = \mathcal{A}(G)$ — пространство гладких финитных функций на G. Отметим, что в некоторых случаях мы должны использовать более узкое пространство, определенное некоторыми дополнительными ограничениями.

Для $\varphi \in \mathcal{F}$ определим оператор $\pi(\varphi)$ по формуле

$$(\pi(\varphi)x, y) = \int_G \varphi(g)(\pi(g)x, y)dg \quad \text{для любых } x, y \in H, \tag{8}$$

[3] См. подробности в лекции 8.

где dg— мера на G, определенная некоторой дифференциальной формой на G старшей степени. [4]

Определение 1. Предположим, что для любого $\varphi \in \mathcal{F}$ оператор $\pi(\varphi)$ имеет след. Тогда соответствие $\varphi \mapsto \operatorname{tr}\pi(\varphi)$ будет распределением на G, которое мы обозначим через χ_π и назовем **обобщенным характером** π.

Замечание 2. Если π — конечномерное представление с обыкновенным характером $\chi_\pi(g) = \operatorname{tr}\pi(g)$, то обобщенный характер π всегда существует и является регулярным распределением, заданным $\chi_\pi(g)dg$.

Для бесконечномерных распределений существование обобщенного характера не очевидно и, вообще говоря, не всегда имеет место.

В 60-е годы в теории представлений было сделано замечательное открытие: было установлено существование двух типов локально компактных топологических групп с абсолютно различным поведением в рамках теории представлений. К первому типу относятся **группы типа I** или **ручные группы**, а ко второму — **группы не типа I** или **дикие группы**. Точные определения можно найти в [Ki4], [Ki9] или [Di2]. Здесь мы лишь заметим, что все компактные группы, связные полупростые группы Ли, экспоненциальные группы Ли, алгебраические группы Ли над полем вещественных, комплексных или p-адических чисел являются группами типа I. С другой стороны, большинство дискретных групп дикие. Исключением являются лишь расширения конечных групп абелевыми группами.[5]

Среди разрешимых групп Ли имеются как ручные, так и дикие группы. Критерий, различающий эти случаи, будет дан ниже в терминах метода орбит.

Перечислим общие свойства обобщенных характеров.

Теорема 3. (a) *Пусть G — ручная группа и π — унитарное неприводимое представление группы G. Тогда 6π имеет обобщенный характер, определенный на подходящем классе основных функций.*

(b) *Если G — вещественная полупростая или нильпотентная группа Ли, то для любого $\pi \in \widehat{G}$ характер χ_π является линейным функционалом на $\mathcal{A}(G)$. Для полупростых групп G обобщенные характеры унитарных неприводимых представлений регулярны.*

(c) *Пусть группа G ручная и унимодулярная, и пусть dg — двусторонне инвариантная мера. Тогда все обобщенные характеры* Ad-*инвариантны.*

(d) *Для групп типа* I *два унитарных неприводимых представления эквивалентны тогда и только тогда, когда их обобщенные характеры совпадают.*

Замечание 3. На самом деле лучше определить характер бесконечномерного распределения π не как распределение (т. е. линейный функционал на пространстве основных функций), а как **обобщенную функцию** (т. е. линейный функционал на пространстве основных мер). Именно, для основной

[4] Обычно мы предполагаем, что dg инвариантна или, по крайней мере, левоинвариантна.

[5] Для таких групп все унитарные неприводимые представления конечномерны.

меры μ на G определим

$$\pi(\mu) = \int\limits_G \pi(g)d\mu(g)$$

и положим $\langle\chi_\pi, \mu\rangle = \operatorname{tr}\pi(\mu)$. Одно из преимуществ этого подхода заключается в том, что обобщенный характер не зависит от выбора меры и Ad-инвариантен для всех ручных групп Ли.

Из теоремы 3 ясно, что во многих аспектах обобщенные характеры могут успешно заменять обычные характеры.

1.3. Два примера. Первый пример — это группа Гейзенберга H. Мы рассмотрим матричную реализацию этой группы матрицами вида

$$g_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она имеет двусторонне инвариантную меру, заданную 3-формой $dg = da \wedge db \wedge dc$. Существует семейство унитарных неприводимых представлений $\pi_\hbar$ группы H, которые занумерованы вещественным ненулевым числом $\hbar$ и действуют на $L^2(\mathbb{R}, dx)$ по формуле (см. лекцию 8)

$$(\pi_\hbar(g_{a,b,c}f))(x) = e^{2\pi i\hbar(bx+c)}f(x+a). \tag{9}$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{A}(G)$ — основная функция. Тогда оператор $\pi_\hbar(\varphi)$ задается формулой

$$(\pi_\hbar(\varphi)f)(x) = \int\limits_G \varphi(g_{a,b,c})e^{2\pi i\hbar(bx+c)}f(x+a)da \wedge db \wedge dc. \tag{10}$$

Определим преобразование Фурье функции φ:

$$\widetilde{\varphi}(\lambda, \mu, \nu) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(g_{a,b,c})e^{2\pi i(\lambda a+\mu b+\nu c)}da \wedge db \wedge dc.$$

Так как $\mathcal{A}(G)$ содержится в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, функция $\widetilde{\varphi}$ также принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. В частности, верна следующая формула частичного обращения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(g_{a,b,c})e^{2\pi i(\mu b+\nu c)}db \wedge dc = \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\varphi}(\lambda, \mu, \nu)e^{-2\pi i\lambda a}d\lambda.$$

Сравнивая эту формулу с выражением (10) для $\pi_\hbar(\varphi)$, мы видим, что $\pi_\hbar(\varphi)$ является интегральным оператором в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ с ядром

$$K_\varphi(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{\varphi}(\lambda, \hbar x, \hbar c)e^{2\pi i(x-y)}d\lambda.$$

Так как это ядро является быстро убывающей гладкой функцией (фактически, оно принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$), соответствующий интегральный оператор имеет след ввиду утверждения (c) теоремы 2 и справедливы равенства

$$\operatorname{tr}\pi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} K_{\varphi}(x,x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\varphi}(\lambda, \hbar x, \hbar c)d\lambda \wedge dx.$$

Используя опять формулу обращения преобразования Фурье, мы заключаем, что обобщенный характер $\pi_\hbar$ определяется формулой

$$\chi_\hbar(a,b,c) = \frac{1}{\hbar}e^{2\pi i\hbar c}\delta(a)\delta(b). \tag{11}$$

Замечание 4. Результирующая формула (11) может быть получена непосредственно из (9), если мы формально применим (7) к вырожденному ядру $\pi_\hbar(g)$ и используем равенства

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\hbar bx}dx = \delta(\hbar b) = \frac{1}{\hbar}\delta(b).$$

А именно, ядро имеет вид $a_\hbar(x,y;g) = e^{2\pi i\hbar(bx+c)}\delta(x+a-y)$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}} a(x,x;g)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\hbar(bx+c)}\delta(a)dx = \frac{1}{\hbar}e^{2\pi i\hbar c}\delta(a)\delta(b).$$

В качестве второго примера мы рассмотрим основную серию представлений $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ группы $G = SL(2,\mathbb{R})$. По определению эти представления унитарно индуцированы одномерными унитарными неприводимыми представлениями треугольной подгруппы B:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mapsto (\operatorname{sgn}\lambda)^{\varepsilon}|\lambda|^{-1+ir}.$$

Однородное пространство $X = G/B$ — это вещественная проективная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. В лекции 5 мы применяли параметризацию X вещественной координатой x и получили реализацию $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ в $L^2(\mathbb{R},dx)$ (см. формулу (35) в лекции 5):

$$\left(\pi_{\varepsilon,r}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f\right)(x) = (\operatorname{sgn}\,(\beta x+\delta))^{\varepsilon}|\beta x+\delta|^{-1+ir} f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right).$$

Чтобы показать существование обобщенного характера в этом случае, мы используем компактность пространства $X \cong S^1$ и параметризуем его комплексными числами $z = e^{i\theta}$, равными 1 по модулю. Группа G фигурирует теперь как группа $SU(1,1,\mathbb{C})$ комплексных матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Она действует на S^1 дробно-линейным преобразованием $z \mapsto z \cdot g = \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$.
Итак, мы получили другую реализацию $\pi_{\varepsilon,r}$ в пространстве $L^2(S^1, d\theta)$:

$$\left(\pi_{\varepsilon,r}\begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a}\end{pmatrix} f\right)(z) = A(z,g) f\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right), \tag{12}$$

где $A(z,g)$ — некоторая гладкая функция на $X \times G$.

Чтобы связать эту реализацию с предыдущей, заметим, что преобразование Мёбиуса, соответствующее матрице $h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i\end{pmatrix}$, преобразует вещественную прямую $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ в S^1. Поэтому $SU(1,1,\mathbb{C}) = h \cdot SL(2,\mathbb{R}) \cdot h^{-1}$. В частности, стабилизатор $B \subset SU(1,1,\mathbb{C})$ точки $1 \in S^1$ состоит из матриц

$$g_{\pm}(\tau,\sigma) = \pm\begin{pmatrix} \cosh\tau + i\sigma & \sinh\tau + i\sigma \\ \sinh\tau - i\sigma & \cosh\tau - i\sigma\end{pmatrix} = \pm h\begin{pmatrix} e^{\tau} & 2\sigma \\ 0 & e^{-\tau}\end{pmatrix} h^{-1}, \quad \tau,\sigma \in \mathbb{R},$$

и индуцирующее одномерное представление имеет вид $g_{\pm}(\tau,\sigma) \mapsto (\pm 1)^{\varepsilon} e^{i\tau r}$.

Из (12) немедленно получаем, что при $\varphi \in \mathcal{A}(G)$ оператор $\pi_{\varepsilon,r}(\varphi)$ имеет гладкое ядро и, следовательно, имеет след. Более того, выполняется равенство (7), поэтому можно вычислить след, интегрируя ядро по диагонали.

На самом деле явное вычисление легче в оригинальной реализации.

Группа $G = SL(2,\mathbb{R})$ обладает двусторонне инвариантной мерой, заданной плотностью $dg = \left|\dfrac{d\alpha\wedge d\beta\wedge d\gamma}{\alpha}\right|$. Пусть $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ — основная функция на G. Тогда

$$(\pi_{\varepsilon,r}(\varphi)f)(x) = \int \varphi(\alpha,\beta,\gamma)\frac{(\operatorname{sgn}(\beta x+\delta))^{\varepsilon}|\beta x+\delta|^{ir}}{|\beta x+\delta|} f\left(\frac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}\right)\left|\frac{d\alpha\wedge d\beta\wedge d\gamma}{\alpha}\right|.$$

Мы хотим переписать это выражение в виде интегрального оператора. Напомним, что основное уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} & s \\ 0 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1\end{pmatrix},$$

откуда следует $t = \beta x + \delta$, $s = \beta$ и $y = \dfrac{\alpha x+\gamma}{\beta x+\delta}$. Учитывая этот факт и соотношение $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, запишем координаты α, β, γ через t, s, y следующим образом: $\alpha = sy + t^{-1}$, $\beta = s$, $\gamma = yt - sxy - t^{-1}x$.

Форма объема в новых координатах принимает вид $dg = |dt\wedge ds\wedge dy|$. Оператор $\pi_{\varepsilon,r}(\varphi)$ имеет вид интегрального оператора с ядром

$$a_{\varphi}(x,y) = \int \varphi(sy+t^{-1}, s, yt - sxy - t^{-1}x)(\operatorname{sgn} t)^{\varepsilon}|t|^{-1+ir}|dt\wedge ds|.$$

В силу (7) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\pi_{\varepsilon,r}(\varphi) &= \int a_{\varphi}(x,x)dx \\ &= \int \varphi(sx+t^{-1}, s, x(t-t^{-1}) - sx^2)(\operatorname{sgn} t)^{\varepsilon}|t|^{-1+ir}|dt\wedge ds\wedge dx|.\end{aligned}$$

Рассмотрим последний интеграл более подробно. Покажем, что область интегрирования D не покрывает всю группу. Более точно, D содержит только элементы гиперболического и параболического типа (т. е. с вещественными собственными значениями t и t^{-1}). Действительно, имеем

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t^{-1} & s \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{s}{t - t^{-1}}.$$

Сужение меры Хаара dg на D имеет вид $dg = |1-t^{-2}|\cdot|dx \wedge dz \wedge dt|$. Теперь заметим, что каждая точка g из D учитывается дважды параметризацией x, z, t, так как t и t^{-1} играют симметричные роли (они являются собственными значениями g). Окончательно мы получаем формулу для обобщенного характера:

$$\chi_{\varepsilon,r}(g) = \begin{cases} (\operatorname{sgn} t)^{\varepsilon} \dfrac{|t|^{ir} + |t|^{-ir}}{|t - t^{-1}|}, & \text{если } g \text{ имеет вещественные собственные значения } t,\ t^{-1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что этот обобщенный характер на самом деле является обычной локально суммируемой функцией на G. Итак, мы можем ввести понятие **регуляризованного следа** для унитарного оператора $\pi_{\varepsilon,r}(g)$.

2. Инфинитезимальные характеры

2.1. Универсальная обертывающая алгебра и ее центр. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над некоторым полем K. Тогда существует ассоциативная K-алгебра $U_K(\mathfrak{g})$ такая, что категории K-линейных представлений $\mathfrak{g}$ и $U(\mathfrak{g})$ естественно изоморфны. Мы приведем три определения $U(\mathfrak{g})$. Первое, в терминах категорий, более удобно в теоретических исследованиях. Второе, более простое, используется в практических вычислениях. Третье определение связывает это чисто алгебраическое понятие с математическим анализом (в случае $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и обеспечивает реализацию $U(\mathfrak{g})$ дифференциальными операторами.

1. Рассмотрим следующую категорию $\mathcal{G}$. Объектами $\mathcal{G}$ являются пары (φ, A), где A — некоторая ассоциативная K-алгебра с единицей (которая может быть различной для различных объектов) и φ — линейное отображение из $\mathfrak{g}$ в A такое, что

$$\varphi([X,Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X) \quad \text{для любых } X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{14}$$

Морфизмами $\mathcal{G}$ из (φ_1, A_1) в (φ_2, A_2) служат коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, equal] & A_1 \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_2"] & A_2 \end{tikzcd} \tag{15}$$

где $\psi : A_1 \to A_2$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр с единицей.

Теорема 4. (a) *Категория $\mathcal{G}$ имеет универсальный объект $(i, U(\mathfrak{g}))$, который называется* **универсальной обертывающей алгеброй** $\mathfrak{g}$.

(b) *Отображение $i : \mathfrak{g} \to U_K(\mathfrak{g})$ является вложением.*

Мы не будем вдаваться в детали доказательства. Читатель без труда проведет доказательство самостоятельно, используя альтернативные определения, данные ниже.

2. Пусть $\{X_1, \dots, X_n\}$ — базис K-векторного пространства $\mathfrak{g}$. Определим $U(\mathfrak{g})$ как ассоциативную алгебру с единицей над K, порожденную элементами X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, с отношениями

$$X_k X_j - X_j X_k = [X_k, X_j]. \tag{16}$$

Отображение $i\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ определяется по формуле $i(X_k) = X_k$. Не очевидно, что i является вложением. Однако это вытекает из следующей теоремы.

Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта. *Мономы $X^k := X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$, образуют базис в K-векторном пространстве $U(\mathfrak{g})$.*

3. Допустим, что $K = \mathbb{R}$. Пусть G — группа Ли такая, что $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Определим $U_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ как алгебру всех вещественных дифференциальных операторов на G, коммутирующих с левыми сдвигами. Вложение $i\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ дается формулой $i(X_k) = \widetilde{X}_k$ (см. четвертое определение $\mathrm{Lie}(\mathfrak{g})$ в лекции 3, п. 4.1)

Можно дать определение на основе правоинвариантных операторов. Тогда вложение имеет вид $i(X_k) = -\widehat{X}_k$. Диффеоморфизм $\sigma : g \mapsto g^{-1}$ устанавливает эквивалентность обоих вариантов этого определения.

Упражнение 1. Показать, что категории K-линейных представлений $\mathfrak{g}$ и $U(\mathfrak{g})$ канонически изоморфны.

Указание. Использовать универсальное свойство $U(\mathfrak{g})$.

Упражнение 2. Показать, что для абелевой алгебры Ли размерности n универсальная обертывающая алгебра изоморфна полиномиальной алгебре $K[X_1, \dots, X_n]$.

Замечание 5. В теории представлений групп Ли символ $U(\mathfrak{g})$, даже в случае вещественных алгебр Ли $\mathfrak{g}$, традиционно обозначает комплексную алгебру $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \cong U_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}$. Очевидно, что все три данные выше определения могут быть адаптированы для этого случая. В частности, последнее определение обеспечивает реализацию $U(g)$ как алгебры комплексных дифференциальных операторов на G. В наших лекциях также $U(\mathfrak{g})$ обозначает комплексную обертывающую алгебру.

Упражнение 3. Показать, что следующие категории естественно изоморфны:

(i) категории представлений $\mathfrak{g}$ и $U_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ в вещественных векторных пространствах,

(ii) категории представлений $\mathfrak{g}$ в комплексных векторных пространствах и категории комплексных представлений $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ или $U(\mathfrak{g})$.

Предупреждение. Категории различных типов не являются изоморфными, хотя имеются естественные функторы (i) $\to$ (ii) $\to$ (i).

Упражнение 4. Показать, что для вещественной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ изоморфна алгебре сверток $\mathcal{A}(G)_e^*$ всех распределений на G с носителем в единице $e \in G$.

Указание. Рассмотреть отображение $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}(G)_e^*$, которое преобразует $X \in \mathfrak{g}$ в распределение $\alpha(X) : \varphi \mapsto (X\varphi)(e)$. Заметим, что

$$\widetilde{X} f = f * \alpha(X), \quad \widehat{X} f = \alpha(X) * f. \tag{17}$$

Очевидно, что для неабелевой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ некоммутативна. Однако она все еще коммутативна "в первом приближении". Уточним это утверждение.

Рассмотрим **фильтрацию** $U(\mathfrak{g})$, т. е. возрастающее семейство подпространств, определенных по формуле

$$U_k(\mathfrak{g}) = K\text{-оболочка мономов } X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}, \quad 0 \leqslant i_l \leqslant n. \tag{18}$$

Эта фильтрация согласована с умножением в следующем смысле:

$$U_k(\mathfrak{g}) \cdot U_l(\mathfrak{g}) \subset U_{k+l}(\mathfrak{g}).$$

Поэтому мы можем определить ассоциированную градуированную алгебру

$$\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{gr}^k\, U(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{gr}^k\, U(\mathfrak{g}) = U_k(\mathfrak{g})/U_{k-1}(\mathfrak{g})$$

с умножением, которое определено следующим образом. Если $a \in U_k(\mathfrak{g})$, $b \in U_l(\mathfrak{g})$ и $[a]$, $[b]$ — их образы в $\mathrm{gr}^k\, U(\mathfrak{g})$, $\mathrm{gr}^l\, U(\mathfrak{g})$, то $[a] \cdot [b] := [ab] \in \mathrm{gr}^{k+l}\, U(\mathfrak{g})$.

Коммутативность $U(\mathfrak{g})$ "в первом приближении" означает, что ассоциированная градуированная алгебра $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})$ коммутативна и изоморфна полиномиальной алгебре $K[X_1, \ldots, X_n] \cong S(\mathfrak{g})$.

2.2. Отображение симметризации. В предшествующем разделе мы видели, что алгебры $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$ во многом похожи, хотя $S(\mathfrak{g})$ коммутативна, а $U(\mathfrak{g})$ — некоммутативна (для неабелёвой алгебры $\mathfrak{g}$).

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует дифференцированиями на обе алгебры $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$. Действительно, оператор $\operatorname{ad} X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ единственным образом продолжается на $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$ как дифференцирование. (Читателю рекомендуется вывести этот факт из универсальных свойств $U(\mathfrak{g})$ и $S(\mathfrak{g})$.)

Теорема 5. *Пусть K — поле характеристики 0 (например, $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Существует единственное линейное отображение* $\mathbf{sym} : S(\mathfrak{g}) :\to U(\mathfrak{g})$, *называемое* **симметризацией**, *обладающее свойством*

$$\mathbf{sym}(X^k) = (\mathbf{sym}(X))^k, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{19}$$

(b) *Отображение* $\mathbf{sym}$ *является изоморфизмом* $\mathfrak{g}$-*модулей.*

Доказательство. (a) Отображение единственно, так как любой моном $X_1 \dots X_k \in S(\mathfrak{g})$, $X_i \in \mathfrak{g}$, может рассматриваться как коэффициент при $c_1 \dots c_k$ в $\frac{1}{k!}(\sum_{i=1}^{k} c_i X_i)^k$. Для доказательства существования положим

$$\mathbf{sym}(X_1 \dots X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{s \in S_k} \mathrm{sgn}(s)\mathbf{sym}(X_{s(1)}) \dots \mathbf{sym}(X_{s(k)}). \tag{20}$$

Очевидно, что отображение (20) удовлетворяет (19). Более трудная задача — проверить, что это отображение корректно определено и линейно. Рассмотрим тензорную алгебру $T(\mathfrak{g})$, которая является свободной $\mathbb{Z}_+$-градуированной ассоциативной алгеброй с единицей, порожденной линейным пространством $\mathfrak{g}$. Имеем

$$T(\mathfrak{g}) = \oplus_{k \geqslant 0} T^k(\mathfrak{g}), \quad T^k(\mathfrak{g}) = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g}}_{\text{k раз}}, \quad k > 0, \quad T^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}.$$

Выбирая базис в $\mathfrak{g}$, можно записать элементы $T(\mathfrak{g})$ как некоммутативные полиномы от алгебраически независимых переменных $X_1 \dots X_n$. Это означает, что $T(\mathfrak{g})$ является линейной оболочкой мономов $X_{i_1} \dots X_{i_N}$, которые линейно независимы для различных "слов" $i_1 \dots i_N$.

Группа S_N действует на слова длины N, и мы обозначим через $T^N(\mathfrak{g})^{S_N}$ подпространство S_N-инвариантных элементов.

Теперь обе алгебры $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$ могут быть реализованы как факторалгебры $T(\mathfrak{g})$. Соответствующие двусторонние идеалы I_S и I_U порождаются $X_iX_j - X_jX_i$ в случае $S(\mathfrak{g})$ и $X_iX_j - X_jX_i - c_{ij}^k X_k$ в случае $U(\mathfrak{g})$.

Согласно варианту теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта проекции $p_S : T(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ и $p_U : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, ограниченные на $T^{\mathrm{Sym}}(\mathfrak{g}) := \oplus_{k \geqslant 0} T^k(\mathfrak{g})^{S_k}$, являются изоморфизмами векторных пространств.

Определим отображение $\mathbf{sym}_T : S(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ по той же формуле (20). Очевидно, что образ $\mathbf{sym}_T$ совпадает с $T^{\mathbf{sym}}(\mathfrak{g})$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T(\mathfrak{g}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_S"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[r, equal] & T(\mathfrak{g}) \arrow[d, "p_U"] \\
S(\mathfrak{g}) \arrow[r, equal] & S(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\mathbf{sym}_T"] \arrow[r, "\mathbf{sym}"'] & U(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда мы получаем все, что требуется: как $\mathbf{sym}_T$, так и $\mathbf{sym}$ корректно определены и линейны, $\mathbf{sym}$ является изоморфизмом векторных пространств.

(b) Покажем, что $\mathbf{sym}$ является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей. Пусть G — присоединенная группа Ли (т. е. группа, порожденная операторами $\exp(X)$, $X \in \mathfrak{g}$). Известно, что G — группа Ли и $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. G-ковариантность

$\mathbf{sym}$ следует из (14), так как для $g \in G, X \in \mathfrak{g}$ имеем $\mathbf{sym}(g \cdot X) = g \cdot \mathbf{sym}(X)$ и $g \cdot X^k = (g \cdot X)^k$. □

2.3. Центр обертывающей алгебры. Пусть $Z(\mathfrak{g})$ — центр $U(\mathfrak{g})$, т. е. подалгебра элементов $C \in U(\mathfrak{g})$, коммутирующих со всеми другими элементами.

При интерпретации $U(\mathfrak{g})$ левоинвариантными дифференциальными операторами на G элементы центра реализуются двусторонне инвариантными операторами. Иногда они называются **операторами Лапласа** или **операторами Казимира**. Эти операторы играют большую роль в математическом анализе: много важных фактов первоначально были замечены на этих примерах.

Простое описание $Z(\mathfrak{g})$ как векторного пространства было дано полвека назад независимо И. М. Гельфандом и Хариш-Чандра. Здесь мы приведем современную формулировку этого результата в терминах announceкоприсоединенных орбит.

Теорема 6. *Существует изоморфизм векторных пространств*

$$\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G \simeq S(\mathfrak{g})^G \xrightarrow{\mathbf{sym}} U(\mathfrak{g})^G \simeq Z(\mathfrak{g}).$$

Доказательство. Первое соотношение очевидно: для любого векторного пространства V алгебры $S(V)$ и $\mathrm{Pol}(V^*)$ канонически изоморфны: элементу $v \in V$ соответствует линейная функция на V^* такая, что $f \mapsto \langle f, v \rangle$. Второе соотношение следует из теоремы 5(b), а третье — есть следствие теоремы 1 из лекции 4 о соотношении между инвариантами группы Ли и алгебры Ли. □

Заметим, что G-эквивариантный изоморфизм $Z(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ не единствен. Для дальнейшего мы зафиксируем один из возможных выборов. А именно, элементу $A \in Z(\mathfrak{g})$ мы ставим в соответствие полином $P_A \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ следующим образом. Сначала мы выберем изоморфизм ассоциативных алгебр α между $S(\mathfrak{g})$ и $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$, ставящие в соответствие $X \in \mathfrak{g}$ линейную функцию $F \mapsto 2\pi i \langle F, X \rangle$ на $\mathfrak{g}^*$. Затем мы используем отображение симметризации $\mathbf{sym}$ для отождествления векторного пространства $S(\mathfrak{g})$ с $U(\mathfrak{g})$. Наконец, определим P_A формулой

$$P_A = \alpha \circ \mathbf{sym}^{-1}(A). \tag{21}$$

Несмотря на изящество и естественность этой формулы, она не обеспечивает легкое вычисление центра $Z(\mathfrak{g})$ при данной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Требуется решить две главные проблемы:

- явно описать инвариантные полиномы на $\mathfrak{g}^*$,
- явно описать соответствующие элементы $Z(\mathfrak{g})$.

Во многих важных частных случаях эти проблемы решаются с помощью специальных трюков, которые, однако, неприменимы в общей ситуации.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, K)$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.[6] Выберем стандартный базис $\{E_{ij}\}$ в $\mathfrak{g}$. Коммутационные соотношения будут следующими:

[6] На самом деле K может быть любым полем характеристики нуль.

$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$. Рассмотрим специальные элементы $E_{ij}^{(k)} \in U(\mathfrak{g})$:

$$E_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \delta_{ij}, & k = 0, \\ E_{ij}, & k = 1, \\ \sum\limits_{i_1,\dots,i_{k-1}} E_{ii_1}\dots E_{i_{k-1}j}, & k > 1. \end{cases}$$

Прямым вычислением убеждаемся, что эти элементы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_j E_{ij}^{(p)}E_{jk}^{(q)} = E_{ik}^{(p+q)}, \quad [E_{ij}, E_{kl}^{(p)}] = \delta_{jk}E_{il}^{(p)} - \delta_{li}E_{kj}^{(p)} \tag{22}$$

при $p \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, элементы $C_k := \sum\limits_i E_{ii}^{(k)}$ принадлежат $Z(\mathfrak{g})$. На самом деле элементы $C_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, свободно порождают алгебру $Z(\mathfrak{g})$, и мы оставляем читателю проверить этот факт, используя теорему 6. Заметим, что записать явно соответствующие полиномы P_{C_k} на $\mathfrak{g}^*$ при $k > 2$ это отнюдь не тривиальное упражнение.

2.4. Определение инфинитезимальных характеров. На основе описания $Z(\mathfrak{g})$ из п. 2.3 мы можем выяснить связь между теорией представления и коприсоединенными орбитами. Действительно, пространство $Z(\mathfrak{g})$ как центр $U(\mathfrak{g})$ играет важную роль в теории представлений, а изоморфное пространство $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ состоит из полиномов, которые суть константы вдоль коприсоединенных орбит.

Теперь объясним роль $Z(\mathfrak{g})$. Пусть G — группа Ли и (π, H) — унитарное представление G.

Определение 2. Вектор $v \in H$ называется **гладким**, если векторфункция $G \to H : g \mapsto \pi(g)v$ гладкая на G. (Это эквивалентно следующему условию: для любого $w \in H$ числовая функция $g \mapsto (\pi(g)v, w)$ гладкая на G.)

Обозначим через H^∞ пространство всех гладких векторов в H. Согласно хорошо известной теореме Гельфанда — Гординга H^∞ плотно в H. Поэтому H^∞ иногда называют **пространством Гельфанда — Гординга**.

Теорема 7. (a) *Существует комплексное представление π^∞ алгебры $U(\mathfrak{g})$ в H^∞, связанное с π формулой*

$$\pi^\infty(X)v = \frac{d}{dt}\pi(g(t))v\Big|_{t=0}, \quad X \in \mathfrak{g}, \ v \in H^\infty, \quad \dot g(0) = X. \tag{23}$$

(b) *Если π — топологически неприводимое представление,*[7] *то для $A \in Z_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ оператор $\pi^\infty(A)$ скалярный, т. е. имеет вид*

$$\pi^\infty(A) = I_\pi(A) \cdot 1_{H^\infty}.$$

(c) *Отображение $A \mapsto I_\pi(A)$ является гомоморфизмом алгебры $Z_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ в* $\mathbb{C}$.

[7] т. е. нет $\pi(G)$-инвариантных замкнутых подпространств H, исключая $\{0\}$ и H.

Схема доказательства. Для $X \in \mathfrak{g}$ можно определить $\pi^\infty(X)$ по формуле (23), так как выражение в правой части имеет смысл при $v \in H^\infty$. Используя второе определение $\mathrm{Lie}(G)$, можно проверить, что π^∞ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в H^∞. В силу универсального свойства $U(\mathfrak{g})$ оно продолжается до представления $U(\mathfrak{g})$. Последнее утверждение использует обобщенный вариант леммы Шура, который основан на спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах и может быть сформулирован следующим образом.

Предложение 1. *Если (π, H) — унитарное неприводимое представление группы G и A — существенно самосопряженный оператор в H^∞, коммутирующий со всеми операторами $\pi(g)$, $g \in G$, то A — скалярный оператор.*

Доказательство этого предложения и вывод из него утверждения (c) можно найти в [Ki4] или других учебниках.

Используя представление π^∞, снабдим H^∞ топологией, задаваемой системой полунорм $\|v\|_X = |\pi^\infty(X)v|$, $X \in U(\mathfrak{g})$. Полезно отметить, что эту громоздкую систему можно заменить эквивалентной счетной системой $\{\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{X_n}, n \geqslant 1\}$ соответственно базису векторного пространства $\{X_n, n \geqslant 1\} \in U(\mathfrak{g})$. Эта счетная систем норм эквивалентна, в свою очередь, единственной метрике

$$d(v_1, v_2) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\|v_1 - v_2\|_n}{2^n + \|v_1 - v_2\|_n},$$

относительно которой H^∞ является полным метрическим пространством.

Ниже мы увидим, что в конкретных примерах пространство H^∞ совпадает с некоторыми классическими пространствами гладких функций такими, как пространство $C^\infty(M)$ для компактного гладкого многообразия M или пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Теперь мы подошли к определению инфинитезимальных характеров.

Определение 3. Пусть G — группа Ли и (π, H) — унитарное неприводимое представление G. **Инфинитезимальным характером** (π, H) называется гомоморфизм $I_\pi : Z_\mathbb{C}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ из утверждения (c) теоремы 7.

Замечание 6. В отличие от обобщенных характеров, инфинитезимальные характеры определены лишь для неприводимых представлений и не имеют свойство аддитивности даже для конечномерных представлений.

Однако имеется связь между обобщенными (или обычными) характерами и инфинитезимальными характерами, основанная на следующем утверждении.

Предложение 2. *Пусть G — группа Ли, (π, H) — унитарное неприводимое представление G и A — элемент $Z_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$. Тогда для любого $f \in \mathcal{A}(G)$*

$$\pi(f)H \subset H^\infty, \quad \pi(Af) = \pi^\infty(A)\pi(f). \tag{24}$$

Следовательно, $\langle \chi_\pi, Af \rangle = I_\pi(A) \cdot \langle \chi_\pi, f \rangle$. Вспоминая определение действия дифференциальных операторов на распределения или обобщенные функции, мы перепишем последнее уравнение в виде дифференциального уравнения для обобщенного характера

$$A\chi_\pi = I_\pi(A)\chi_\pi. \tag{25}$$

Благодаря этому уравнению в некоторых случаях можно вычислить обобщенные характеры, если $Z(\mathfrak{g})$ известен, и, обратно, получить информацию о $Z(\mathfrak{g})$, если известны обобщенные характеры. Ниже мы обсудим эти вопросы более подробно.

2.5. Пример. Рассмотрим опять группу Гейзенберга H, которая реализуется матрицами $g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ состоит из матриц вида $X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и имеет естественный базис

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обертывающая алгебра $U(H)$ порождается элементами A, B, C с соотношениями $AB - BA = C$, $AC = CA$, $BC = CB$. Легко проверить, что $Z_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[C]$. Таким образом, обобщенные характеры удовлетворяют равенству $\dfrac{\partial}{\partial c}\chi = \lambda \cdot \chi$. С другой стороны, Ad-инвариантность обобщенных характеров приводит к уравнениям $b\dfrac{\partial}{\partial c}\chi = a\dfrac{\partial}{\partial c}\chi = 0$. Общее решение этих уравнений имеет вид $\chi = \mathrm{const} \cdot \delta(a)\delta(b)e^{i\lambda c}$. Мы уже видели, что эти распределения в действительности являются характерами некоторых унитарных неприводимых представлений группы H (при подходящем выборе константы).

Лекция 7

ГЕОМЕТРИЯ КОПРИСОЕДИНЕННЫХ ОРБИТ

1. Коприсоединенное представление 162
2. Симплектическая структура 164
   2.1. Первый подход 164
   2.2. Второй подход 167
3. Инвариантные функции на $\mathfrak{g}^*$ 169
4. Отображение моментов 170
   4.1. Универсальное свойство коприсоединенных орбит 170
   4.2. Некоторые частные случаи 173
5. Поляризации 175
   5.1. Элементы симплектической геометрии 175
   5.2. Инвариантные поляризации на симплектических многообразиях 177

1. Коприсоединенное представление

Мы начнем вторую часть книги с изучения коприсоединенных орбит. Этот новый математический объект появился впервые в связи с методом орбит. Под **коприсоединенной орбитой** мы понимаем орбиту группы Ли G в пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственном пространству $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Группа G действует на $\mathfrak{g}^*$ с помощью коприсоединенного представления (см. ниже).

В этой лекции мы рассмотрим геометрию коприсоединенных орбит и обсудим проблему их классификации.

Пусть G — группа Ли. Напомним (см. лекцию 3), что G — гладкое многообразие с умножением, которое является гладким отображением $G \times G \to G$ и удовлетворяет обычным групповым аксиомам. Полезно иметь в виду следующий пример: G — матричная группа, т. е. подгруппа и одновременно гладкое подмногообразие $GL(n, \mathbb{R})$.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ — касательное пространство $T_e(G)$ к G в единице e. Группа G действует на себе **внутренними автоморфизмами**: $A(g) : x \mapsto gxg^{-1}$. Точка e — неподвижная точка при этом действии, и мы можем взять производное отображение $A_*(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которое обычно обозначается $\mathrm{Ad}(g)$. Отображение $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ называется **присоединенным представ-**

леннем G. В случае матричной группы $\mathfrak{g}$ — подпространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и присоединенное представление есть просто матричное сопряжение:

$$\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g},\ g \in G. \tag{1}$$

Эта формула (в обозначениях из лекции 3, п. 3.2) справедлива и в общем случае.

Рассмотрим линейное пространство, двойственное к $\mathfrak{g}$. Обычно это пространство обозначается $\mathfrak{g}^*$. Напомним, что для любого линейного представления (π, V) группы G можно определить сопряженное представление (π^*, V^*) в двойственном пространстве следующим образом:

$$(\pi^*)(g) := \pi(g^{-1})^*,$$

где звездочка в правой части означает сопряженный оператор в V^*.

В частности, мы имеем представление группы Ли G в $\mathfrak{g}^*$, которое сопряжено присоединенному представлению в $\mathfrak{g}$. Это представление называется **коприсоединенным** и обозначается через $K(g)$. Итак, по определению

$$\langle K(g)F, X\rangle = \langle F, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle, \tag{2}$$

где $X \in \mathfrak{g}$, $F \in \mathfrak{g}^*$ и $\langle F, X\rangle$ — значение линейного функционала F на векторе X.

Для матричных групп мы можем использовать тот факт, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеет билинейную форму

$$(A, B) = \mathrm{tr}(AB), \tag{3}$$

инвариантную относительно сопряжения. Таким образом, пространство $\mathfrak{g}^*$, двойственное к подпространству $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, отождествляется с фактор-пространством $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})/\mathfrak{g}^\perp$, где символ $^\perp$ означает ортогональное дополнение относительно формы (,):

$$\mathfrak{g}^\perp = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid (A, B) = 0 \text{ для всех } B \in \mathfrak{g}\}.$$

На практике фактор-пространство часто отождествляют с каким-нибудь подпространством $V \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, которое трансверсально $\mathfrak{g}^\perp$ и имеет дополнительную размерность.

Пусть p — проекция $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ на V параллельно $\mathfrak{g}^\perp$. Тогда **коприсоединенное представление** K может быть записано в простой форме

$$K(g) : V \to V : F \mapsto p(gFg^{-1}). \tag{4}$$

Замечание 1. Если V инвариантно под действием $\mathrm{Ad}(G)$ (что имеет место для полупростой или редуктивной $\mathfrak{g}$), то мы можем опустить проекцию p в (4).

Пример 1. Пусть G — группа верхнетреугольных матриц в $GL(n, \mathbb{R})$ (т. е. $g_{ij} = 0$, при $i > j$). Тогда $\mathfrak{g}$ состоит из всех верхнетреугольных матриц из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и в качестве V можно взять пространство всех нижнетреугольных матриц. Проекция p в этом случае преобразует каждую матрицу в ее "нижнюю часть" (т. е. заменяет все элементы над главной диагональю нулями). Следовательно, коприсоединенное представление принимает вид

$$K(g) : F \mapsto (gFg^{-1})_{\text{нижн}}. \tag{4'}$$

Пример 2. Пусть $G = SO(n, \mathbb{R})$. Тогда $\mathfrak{g}$ состоит из всех кососимметрических матриц из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Здесь мы можем положить $V = \mathfrak{g}$ и опустить проекцию p в формуле (4) (см. замечание 1).

Приведем формулу для инфинитезимального варианта коприсоединенного действия, т. е. для соответствующего представления K_* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$:

$$\langle K_*(X)F,\ Y\rangle = \langle F,\ -\mathrm{ad}(X)\ Y\rangle = \langle F, [Y, X]\rangle. \tag{5}$$

Для матричных групп эта формула имеет вид

$$K_*(X)F = p([X, F]), \quad X \in \mathfrak{g},\ F \in V \simeq \mathfrak{g}^*. \tag{5'}$$

2. Симплектическая структура

Наиболее примечательным свойством коприсоединенного представления является тот факт, что все коприсоединенные орбиты обладают канонической G-инвариантной симплектической структурой. Это означает, что на каждой орбите $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ есть канонически определенная замкнутая невырожденная G-инвариантная дифференциальная 2-форма σ. Здесь мы объясним этот феномен и построим форму двумя способами.

2.1. Первый подход. Заметим сначала, что инвариантная форма на однородном многообразии определена однозначно своим значением в одной точке. Таким образом, чтобы определить σ, достаточно знать значение σ в некоторой точке $F \in \Omega$. Это значение $\sigma(F)$ (которое является антисимметрической билинейной формой на $T_F\Omega$) должно быть инвариантно относительно действия стабилизатора $\mathrm{Stab}(F)$ точки F, при этом никаких других условий не требуется.

Пусть $\mathrm{stab}(F)$ — алгебра Ли группы $\mathrm{Stab}(F)$. Рассмотрим группу G как расслоенное пространство над базой $\Omega \simeq G/\mathrm{Stab}(F)$ и проекцией $p_F : G \to \Omega : g \mapsto K(g)F$.

Очевидно, что слой над точкой F есть в точности $\mathrm{Stab}(F)$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{stab}(F) \hookrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{p_*} T_F(\Omega) \to 0,$$

которая получается из приведенной выше интерпретации G как расслоенного пространства. Можно отождествить касательное пространство $T_F(\Omega)$ с фактор-пространством $\mathfrak{g}/\mathrm{stab}(F)$.

Заметим теперь, что на $\mathfrak{g}$ существует естественная антисимметрическая билинейная форма с ядром $\mathrm{stab}(F)$. Именно,

$$B_F(X, Y) = \langle F\,[X, Y]\rangle. \tag{6}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\ker B_F &= \{X \in \mathfrak{g} \mid B_F(X,Y) = 0 \ \forall\ Y \in \mathfrak{g}\}\\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle K_*(X)F, Y\rangle = 0 \ \forall\ Y \in \mathfrak{g}\}\\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid K_*(X)F = 0\} = \mathrm{stab}(F).\end{aligned}$$

Определение 1. Значение $\sigma(F)$ в точке F определяется формулой

$$\sigma(F)(K_*(X)F, K_*(Y)F) = B_F(X,Y). \tag{7}$$

Невырожденность построенной формы σ следует из определения, так как $K_*(X)F = (p_F)_*(X)$. Проверим G-инвариантность. Как было отмечено выше, достаточно проверить, что значение σ в точке F инвариантно относительно $\mathrm{Stab}(F)$. Для $g \in \mathrm{Stab}(F)$ имеем

$$\begin{aligned}B_F(\mathrm{Ad}\,gX, \mathrm{Ad}\,gY) &= \langle F, [\mathrm{Ad}\,gX, \mathrm{Ad}\,gY]\rangle = \langle F, \mathrm{Ad}\,g[X,Y]\rangle\\ &= \langle K(g)^{-1}F, [X,Y]\rangle = \langle F, [X,Y]\rangle = B_F(X,Y).\end{aligned}$$

Для проверки замкнутости σ следует провести вычисления, в которых используется тождество Якоби (см., например, [Ki4]). Однако мы предпочтем опустить эти вычисления и дать другое доказательство, основанное на следующем полезном наблюдении.

Рассмотрим проекцию $p_F : G \to \Omega$ и введем форму $\Sigma_F := p_F^*(\sigma)$ на G. По построению Σ_F является левоинвариантной 2-формой на G с начальным значением $\Sigma_F(e) = B_F$. Оказывается, что эта форма не только замкнута, но и точна.

Чтобы установить этот факт, мы воспользуемся так называемой **формой Маурера — Картана** Θ. Это $\mathfrak{g}$-значная левоинвариантная 1-форма на G. Так как левое действие G на себе **просто транзитивно** (т. е. существует в точности один левый сдвиг преобразующий данную точку g_1 в другую данную точку g_2), для определения левоинвариантной формы достаточно указать лишь ее значение в одной точке. По определению полагаем $\Theta(e)(X) = X$. Тогда $\Theta(g)(X) = g^{-1} \cdot X$

Для матричных групп эта форма обычно обозначается через $g^{-1}dg$, так как $\Theta(g(t))(\dot g(t)) = g(t)^{-1}\dot g(t)$ для любой гладкой кривой $g(t)$.

Предложение 1. 2-*Форма* Σ_F *является внешней производной левоинвариантной вещественнозначной* 1-*формы* θ_F *на* G*, заданной формулой*

$$\theta_F = -\langle F, \Theta\rangle. \tag{8}$$

Доказательство. Мы воспользуемся хорошо известной формулой для внешней производной 1-формы (см. лекцию 1):

$$d\theta(\xi,\eta) = \xi\theta(\eta) - \eta\theta(\xi) - \theta([\xi,\eta]).$$

Полагая $\theta = \theta_F$, $\xi = \widetilde{X}$, $\eta = \widetilde{Y}$, получаем

$$d\theta_F(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \widetilde{X}\theta_F(\widetilde{Y}) - \widetilde{Y}\theta_F(\widetilde{X}) - \theta_F([\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = B_F(X,Y).$$

Здесь $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — левоинвариантные векторные поля на G (см. третье определение алгебры Ли в лекции 3). Поэтому первый и второй члены в среднем выражении обращаются в нуль, так как $\theta_F(\widetilde{X})$ и $\theta_F(\widetilde{Y})$ — постоянные функции. Последний член можно переписать в виде $-\theta_F(\widetilde{[X,Y]}) = \langle F, [X,Y] \rangle$.

Вернемся к форме σ. Поскольку p_F — сюръективное отображение, p_F^* инъективно (так как $(p_F)_*$ сюръективно). Однако $p_F^* d\sigma = dp_F^*(\sigma) = d^2\theta_F = 0$. Следовательно, σ замкнута. □

В общем случае θ_F не может быть записана в виде $p_F^*(\varphi)$ с некоторой 1-формой φ на Ω, поэтому мы не можем утверждать, что форма σ точна (и она действительно не точна в общем случае).

Напомним, что мы можем интегрировать дифференциальные k-формы на многообразии M по ориентированным гладким k-мерным подмногообразиям (более общо, по k-циклам).

Известно, что замкнутая 2-форма на гладком многообразии точна тогда и только тогда, когда интеграл от этой формы по любому 2-циклу обращается в нуль. В дальнейшем нам понадобится следующее

Определение 2. Коприсоединенная орбита Ω называется **целочисленной**, если каноническая форма σ обладает свойством

$$\int_C \sigma \in \mathbb{Z} \quad \text{для любого геометрического 2-цикла } C \text{ на } \Omega. \tag{9}$$

Под геометрическим **2-циклом** мы понимаем здесь целочисленную линейную комбинацию циклов, представленных гладкими ориентированными 2-мерными подмногообразиями.

Смысл условия интегрируемости выявляет следующее

Предложение 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ *целочисленна.*

(ii) *Существует одномерное расслоение над* Ω *с эрмитовой связностью* ∇ *такое, что*

$$\operatorname{curv}(\nabla) = 2\pi i\sigma. \tag{10}$$

(iii) *Для любого* $F \in \Omega$ *одномерное представление алгебры Ли* $\operatorname{stab}(F)$, *заданное действием*

$$X \mapsto 2\pi i \langle F, X \rangle, \tag{11}$$

соответствует унитарному 1*-мерному представлению группы Ли* $\operatorname{Stab}(F)$.

Доказательство. (ii)$\Longleftrightarrow$(i) Импликация следует из предложения 2 лекции 1, п. 2.4.

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) Так как $\operatorname{stab}(F) = \ker B_F$, представление (11) является фактически представлением абелевой алгебры $\mathfrak{a} = \operatorname{stab}(F)/[\operatorname{stab}(F), \operatorname{stab}(F)]$. Соответствующая абелева группа Ли $A = \operatorname{Stab}(F)/[\operatorname{Stab}(F), \operatorname{Stab}(F)]$ имеет вид $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^l$. Представление (11) соответствует унитарному одномерному представлению A тогда и только тогда, когда оно принимает целые значения на k-мерной решетке $\Lambda = \exp^{-1}(e)$. Пусть $X \in \Lambda$. Обозначим чрез γ петлю в $\operatorname{Stab}^\circ(F)$, которая является образом сегмента $[0, X] \subset \operatorname{stab}(F)$ при экспоненциальном отображении.

Так как G односвязна по предположению, петля γ является границей некоторой двумерной поверхности S в G, проекцию которой на Ω обозначим $p(S)$. Соответствие $[\gamma] \rightsquigarrow [D]$ устанавливает изоморфизм $\pi_1(\mathrm{Stab}(F) \simeq \pi_2(\Omega)$ (см. лекцию 1). Наконец, имеем

$$\langle F, X\rangle = \int\limits_{\gamma} \theta_F = \int\limits_{S} d\theta_F = \int\limits_{p(S)} \sigma.$$

Предложение доказано. □

2.2. Второй подход. Теперь мы обсудим другой способ введения канонической симплектической структуры на коприсоединенных орбитах. Он основан на понятии многообразия Пуассона.

Определение 3. Гладкое многообразие M называется **многообразием Пуассона**, если оно снабжено бивекторным полем $c = c^{ij}\partial_i\partial_j$ таким, что **скобки Пуассона**

$$\{f_1, f_2\} = c^{ij}\partial_i f_1 \partial_j f_2 \tag{12}$$

определяют на $C^\infty(M)$ структуру алгебры Ли.

Тождество Якоби для скобок Пуассона накладывает на c нелинейное дифференциальное условие $[c, c] = 0$, где $[\ ,\ ]$ обозначает так называемую скобку Схоутена на поливекторных полях (см. лекцию 2).

В этом частном случае скобка Схоутена $[c, c]$ является тривектором t^{ijk}, заданным соотношением

$$t^{ijk}\partial_i f_1 \partial_j f_2 \partial_k f_3 = \circlearrowleft \{f_1, \{f_2, f_3\}\},$$

где символ $\circlearrowleft$ означает суммирование по циклическим перестановкам f_1, f_2, f_3.

Любое симплектическое многообразие (M, σ) обладает канонической структурой Пуассона c такой, что в некоторой (следовательно, в каждой) локальной системе координат матрицы $\| c^{ij} \|$ и $\| \sigma_{ij} \|$ обратны. Для доказательства введем некоторые понятия и обозначения.

Определим **косой градиент** $\text{s-grad}\, f$ функции f на симплектическом многообразии (M, σ) по формуле

$$df = \sigma(\cdot, \text{s-grad} f). \tag{13}$$

Тогда для любого векторного поля η на M имеем $\eta f = \sigma(\eta, \text{s-grad} f)$, Следовательно,

$$(\text{s-grad} f_1) f_2 = \sigma(\text{s-grad} f_1, \text{s-grad} f_2). \tag{14}$$

Согласно теореме Дарбу любая симплектическая форма σ в подходящих локальных координатах $x^1, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_n$ записывается в виде $dx^i \wedge dy_i$. Поэтому $\text{s-grad}\, f = \partial^i f \partial_i - \partial_i f \partial^i$, где ∂_i и ∂^i обозначают соответственно $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ и $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$. Бивектор $c = \sigma^{-1}$ в той же самой системе координат принимает вид

$\partial_i \wedge \partial^i$. Отсюда легко получить равенства

$$\{f_1, f_2\} = \sigma(\text{s-grad} f_1, \text{s-grad} f_2), \tag{15}$$

$$\text{s-grad}\{f_1, f_2\} = [\text{s-grad} f_1, \text{s-grad} f_2]. \tag{16}$$

Эти равенства записаны в бескоординатной форме и поэтому справедливы в любой системе координат. Отсается лишь заметить, что из (15) и (16) вытекает тождество Якоби. Действительно,

$$\text{s-grad}(\circlearrowleft \{f_1, \{f_2, f_3\}\}) = \circlearrowleft [\text{s-grad} f_1, [\text{s-grad} f_2, \text{s-grad} f_3]] = 0.$$

Следовательно, $\circlearrowleft \{f_1, \{f_2, f_3\}\} = \text{const}$. Однако не существует естественной операции, посредством которой можно было бы получить константу из трех функций и бивектора (см. лекцию 2). Поэтому эта константа должна быть равной нулю.

Вернемся к общим многообразиям Пуассона. Приведем главную структурную теорему о многообразиях Пуассона (см., например, [Ki5])

Теорема 1. *Любое многообразие Пуассона (M, c) расслаивается на* **симплектические листы**, *т. е. может быть представлено единственным образом как дизъюнктное объединение подмногообразий $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таких, что бивектор c имеет невырожденное сужение c_α на каждое M_α и $(M_\alpha, c_\alpha^{-1})$ — симплектическое многообразие для каждого $\alpha \in A$.*

Другими словами, значение $\{f_1, f_2\}$ в точке $m \in M_\alpha$ равно

$$\{f_1|_{M_\alpha}, f_2|_{M_\alpha}\}_\alpha(m),$$

где $\{\cdot, \cdot\}_\alpha$ — скобка Пуассона на M_α относительно симплектической структуры $\sigma_\alpha = c_\alpha^{-1}$ на этом подмногообразии.

Пример 3. Определим структуру Пуассона $c = \varepsilon^{ijk} x_i \partial_j \wedge \partial_k$ на $\mathbb{R}^3$. Соответствующая структура алгебры Ли на $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ определяется формулой

$$\{f, g\} = \det \begin{vmatrix} x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix}.$$

Здесь симплектическими листами являются двумерные сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$, и начало координат.

Пример 3 — это частный случай следующей общей конструкции. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ и структурными константами c_{ij}^k. На пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственном к $\mathfrak{g}$, с координатами, определенными базисными векторами в $\mathfrak{g}$, зададим бивектор

$$c = c_{ij}^k X_k \partial^i \partial^j. \tag{17}$$

Теорема 2 [С. Ли (1890), Ф. А. Березин (1967)]. *Бивектор* (17) *определяет структуру Пуассона на $\mathfrak{g}^*$.*

Доказательство. Действительно, для проверки тождества Якоби достаточно рассмотреть скобки Пуассона линейных функций на $\mathfrak{g}^*$. В силу

(17) очевидно, что $\{X_i, X_j\} = c_{ij}^k X_k$, т. е. линейные функции образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{g}$. □

Замечание 2. Приведенная теорема была сформулирована Софусом Ли примерно в 1890 г., как недавно отметил А. Вейнстейн. По-видимому, Ли никак не использовал этот результат. Ф. А. Березин переоткрыл эту теорему в 1968 г. при исследовании универсальных обертывающих алгебр [Be1].

Геометрическое значение этого результата впервые было отмечено, по-видимому, в [Ki5]. Именно, справедлива следующая

Теорема 3 [А. А. Кириллов (1962)]. *Симплектические листы многообразия Пуассона* $(\mathfrak{g}^*, c)$ *суть в точности коприсоединенные орбиты.*

Доказательство теоремы дано в [Ki5]. Рекомендуем читателю провести доказательство самостоятельно.

Теорема 3 дает альтернативный подход к построению канонической симплектической структуры на коприсоединеннных орбитах.

3. Инвариантные функции на $\mathfrak{g}^*$

Первый шаг в классификации коприсоединенных орбит — описание $K(G)$-инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$. В первую очередь нас интересуют полиномиальные и рациональные инварианты. Общие сведения об инвариантах линейных групп приведены в лекции 4 (см. п. 4.2).

В случае коприсоединенного действия полиномиальные и рациональные инварианты играют в теории представлений важную роль ввиду связи с инфинитезимальными характерами (см. лекцию 6). Здесь мы лишь отметим, что гладкие $K(G)$-инварианты на $\mathfrak{g}^*$ образуют центр алгебры Ли $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ относительно скобок Пуассона. Действительно, этот центр состоит из функций f таких, что $c_{ij}^k X_k \partial^i f = 0$ для всех $j \in [1, n]$. Но это в точности означает, что f аннулируется всеми векторными полями Ли $K_*(X_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и поэтому f будет $K(G)$-инвариантной.

Приведем два примера, когда можно явно вычислить алгебру $I(\mathfrak{g}) = \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$, состоящую из $K(G)$-инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*)^G$.

Пример 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и G — связная группа Ли, для которой $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Тогда на $\mathfrak{g}$ есть невырожденная $\mathrm{Ad}\,G$-инвариантная билинейная форма. Поэтому коприсоединенное действие G эквивалентно присоединенному и мы можем заменить $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{g}$. Далее, полиномиальные функции на $\mathfrak{g}$ однозначно продолжаются на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. При этом G-инвариантные полиномы вполне определяются своим ограничением на картановскую подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Известная теорема Шевалле утверждает, что эти ограничения образуют алгебру $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h})^W$ всех полиномов на $\mathfrak{h}$, инвариантных относительно группы Вейля W. Известно также, что последняя алгебра изоморфна алгебре многочленов от $l = \mathrm{rk}\,G$ независимых инвариантов степеней $d_1, \ldots, d_l$, где $d_i = e_i + 1$, а $e_1, \ldots, e_l$ — так называемые **экспоненты алгебры Ли** $\mathfrak{g}$.

Например, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$ экспоненты суть $\{1, 2, \ldots, n\}$, а базисные инварианты имеют вид

$$I_k(X) = \operatorname{tr}(X^k), \quad 2 \leqslant k \leqslant n+1.$$

Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ или $\mathfrak{so}(2n+1)$ экспоненты суть $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, а базисные инварианты имеют вид

$$I_k(X) = \operatorname{tr}(X^{2k}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Наконец, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ экспоненты суть $\{1, 3, \ldots, 2n-3, n-1\}$, а базисные инварианты имеют вид

$$I_k(X) = \operatorname{tr}(X^{2k}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad I_n(X) = \operatorname{Pf}(X) = \sqrt{\det X}.$$

Пример 5. Пусть теперь G — группа Ли верхнетреугольных матриц вида

$$g = \|g_{ij}\|, \quad g_{ii} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad \text{для } i > j.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из всех матриц $X = \|X_{ij}\|$, удовлетворяющих условию $X_{ij} = 0$ для $i \geqslant j$.

Пространство $\mathfrak{g}^*$ удобно отождествлять с множеством нижнетреугольных матриц $F = \|F_{ij}\|$, удовлетворяющих условию $F_{ij} = 0$ для $i \leqslant j$. Коприсоединенное действие имеет вид

$$K(g)F = (gFg^{-1})_{\text{нижн}}.$$

В этом случае алгебра $I(\mathfrak{g})$ также порождается независимыми инвариантами $I_1, \ldots, I_k$, $k = [n/2]$. А именно, в качестве $I_m(F)$ можно взять левый нижний минор порядка m матрицы F.

Можно показать, что совместные множества уровня $I_1 = c_1, \ldots, I_k = c_k$ являются $K(G)$-орбитами, если все $c_i \neq 0$[1] Если же, например, $c_1 = 0$, то возникает так называемый вторичный инвариант $I' = \operatorname{tr}(F^2)$ и множество уровня разбивается на орбиты меньших размерностей.

4. Отображение моментов

4.1. Универсальное свойство коприсоединенных орбит. Как мы выяснили ранее, любая коприсоединенная орбита является однородным симплектическим многообразием. Обратное "почти верно": с точностью до некоторых алгебраических и топологических оговорок (см. уточнения ниже) любое однородное симплектическое многообразие является коприсоединенной орбитой. Это утверждение выглядит наиболее естественно в контексте пуассоновых многообразий. В дальнейшем мы предполагаем, что G — связная односвязная группа Ли.

Определим **G-многообразие Пуассона** как пару $(M, f^M_{(\cdot)})$, где M — многообразие Пуассона с действием G и $f^M_{(\cdot)} : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : X \mapsto f^M_X$ — гомо-

[1] Для четного n это верно и в случае $c_{n/2} = 0$.

морфизм алгебр Ли такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "L_{(\cdot)}"] \arrow[dr, "f^M_{(\cdot)}"'] & \mathrm{Vect}(M) \\ & C^\infty(M) \arrow[u, "\text{s-grad}"'] \end{tikzcd} \tag{18}$$

где L_X — поле Ли на M, ассоциированное с $X \in \mathfrak{g}$, а s-grad(f) обозначает **косой градиент** функции f, т. е. векторное поле на M такое, что s-grad$(f)g = \{f, g\}$ для всех $g \in C^\infty(M)$.

Для данной группы Ли G совокупность всех G-многообразий Пуассона образует категорию $\mathcal{P}(G)$ в которой морфизм $\alpha : (M, f^M_{(\cdot)}) \to (N, f^N_{(\cdot)})$ — это гладкое отображение из M в N, сохраняющее скобки Пуассона

$$\{\alpha^*(\varphi), \alpha^*(\psi)\} = \alpha^*(\{\varphi, \psi\})$$

и обеспечивающее коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} C^\infty(N) \arrow[r, "\alpha^*"] & C^\infty(M) \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "f^N_{(\cdot)}"] \arrow[r, "id"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "f^M_{(\cdot)}"'] \end{tikzcd}$$

Заметим, что из последнего условия следует, что α коммутирует с G-действием.

Важным примером G-многообразия Пуассона является рассмотренное в п. 1.3 пространство $(\mathfrak{g}^*, c)$ с отображением $\mathfrak{g} \to C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, определенным по формуле $f^{\mathfrak{g}^*}_X(F) = \langle F, X\rangle$.

Теорема 4. *G-многообразие Пуассона $(\mathfrak{g}^*, c)$ является универсальным притягивающим объектом в категории $\mathcal{P}(G)$.*

Это означает, что для любого объекта $(M, f^M_{(\cdot)})$ существует единственный морфизм $\mu : (M, f^M_{(\cdot)}) \to (\mathfrak{g}^*, f^{\mathfrak{g}^*}_{(\cdot)})$, а именно, так называемое **отображение моментов**, определенное равенством

$$\langle \mu(m), X\rangle = f^M_X(m). \tag{19}$$

Доказательство теоремы 4. Утверждение теоремы — прямое следствие определения морфизма категории $\mathcal{P}(G)$. □

Заметим, что образ однородного G-многообразия Пуассона под действием отображения моментов необходимо является коприсоединенной орбитой. Более того, из транзитивности G-действия вытекает, что локально μ является диффеоморфизмом. Таким образом, любое однородное G-многообразие Пуассона является накрытием коприсоединенной орбиты.

Этот факт я называю **универсальным свойством** коприсоединенных орбит.

Полезно обсудить здесь отношение между однородными G-многообразиями Пуассона и однородными симплектическими G-многообразиями. Любое симплектическое многообразие (M, σ) имеет каноническую структуру Пуассона c (см. п. 2.2). Однако, то, что группа Ли G действует на M и сохраняет σ, не означает, что (M, c) является G-многообразием Пуассона. Действительно, возникают два препятствия.

1. Топологическое препятствие:

Поле Ли $L_X, X \in \mathfrak{g}$ локально является косым градиентом некоторой функции f_X, но эта функция не обязательно определена глобально.

Для преодоления этого препятствия мы можем рассмотреть подходящее накрытие $\widetilde{M}$ многообразия M, где все f_X, $X \in \mathfrak{g}$, однозначны. Может случиться, что G не действует на $\widetilde{M}$ и должна быть заменена некоторой накрывающей группой $\widetilde{G}$. Односвязных накрытий M и G всегда достаточно.

2. Алгебраическое препятствие:

Отображение $X \mapsto f_X$ из $\mathfrak{g}$ в $C^\infty(M)$ всегда можно выбрать линейным. Действительно, пусть $\{X_i\}$ — базис в $\mathfrak{g}$. Выберем функции f_i так, что $L_{X_i} = \text{s-grad} f_i$ и положим $f_X = \sum_i c_i f_i$ для $X = \sum_i c_i X_i$. Но в общем случае это не будет гомоморфизмом алгебр Ли: $f_{[X,Y]}$ и $\{f_X, f_Y\}$ могут отличаться на константу $c(X, Y)$.

Упражнение 1. (a) Показать, что отображение $c : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto c(X, Y)$ является 2-коциклом на $\mathfrak{g}$, т. е. удовлетворяет уравнению коцикла

$$\circlearrowleft c([X, Y], Z) = 0 \quad \text{для всех } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

(b) Проверить, что свобода выбора f_X не имеет значения для когомологического класса c. Другими словами, коциклы, соответствующие различным выборам f_X, отличаются от исходного на тривиальный коцикл (или кограницу 1-цикла b): $db(X, Y) = \langle b, [X, Y] \rangle$, где $b \in \mathfrak{g}^*$ — линейный функционал на $\mathfrak{g}$.

Чтобы преодолеть алгебраическое препятствие, надо перейти от исходной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ к центральному расширению $\widetilde{\mathfrak{g}}$, заданному коциклом c. По определению $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ как векторное пространство. Коммутатор в $\widetilde{\mathfrak{g}}$ определяется формулой

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y], c(X, Y)). \tag{20}$$

Определим действие $\widetilde{\mathfrak{g}}$ на M формулой $L_{(X,a)} = L_X$. (Фактически, это действие $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}}/\mathbb{R}$.) Это действие пуассоновское. Положим $f_{(X,a)} = f_X + a$ и оставим читателю проверку равенства $f_{[(X,a),(Y,b)]} = \{f_{(X,a)}, f_{(Y,b)}\}$.

Окончательно получаем следующее

Предложение 3. *Любое симплектическое действие группы Ли G на симплектическом многообразии (M, σ) может быть преобразовано в пуассоновское действие центрального расширения $\widetilde{G}$ группы G на некотором накрытии $\widetilde{M}$ многообразия M так, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} \times \widetilde{M} & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times M & \longrightarrow & M \end{array} \tag{21}$$

Здесь горизонтальные стрелки обозначают действия, а вертикальные — естественные проекции.

4.2. Некоторые частные случаи. Для наиболее "классических" (или "естественных") групп классификация коприсоединенных орбит эквивалентна той или иной уже известной проблеме. В некоторых случаях, особенно для бесконечномерных групп, возникают новые геометрические и аналитические проблемы. Здесь мы рассмотрим только три примера. Ниже появятся и некоторые другие случаи.

Пример 6. Пусть $G = GL(n,\mathbb{R})$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обладает $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантной билинейной формой (см. п. 1.1) $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$. Поэтому коприсоединенное представление эквивалентно присоединенному. Таким образом, классификация коприсоединенных орбит — это проблема классификации матриц с точностью до подобия.

Пример 7. Пусть M — гладкое компактное односвязное 3-мерное многообразие с заданной формой объема vol. Пусть $G = \mathrm{Diff}(M, \mathrm{vol})$ — группа диффеоморфизмов M, сохраняющих форму объема. Пространство $\mathrm{Vect}(M, \mathrm{vol})$ всех бездивергентных векторных полей на M играет роль алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Напомним, что дивергенция векторного поля ξ относительно формы объема vol — это функция $\mathrm{div}\,\xi$ на M, удовлетворяющая условию $L_\xi(\mathrm{vol}) = \mathrm{div}\,\xi \cdot \mathrm{vol}$, где L_ξ — **производная Ли** вдоль поля ξ. Используя известное равенство $L_\xi = d \circ i_\xi + i_\xi \circ d$, получим $i_\xi \mathrm{vol} = d\theta_\xi$, где θ_ξ — 1-форма на M, определенная по модулю точных форм (дифференциалов функций). Любое гладкое отображение $K : S^1 \to M$ определяет линейный функционал F_K на $\mathfrak{g}^*$:

$$F_K(\xi) = \int_{S^1} K^*(\theta_\xi). \tag{22}$$

(Ясно, что добавление к θ_ξ дифференциала функции не меняет значение интеграла.) Более того, функционал F_K не изменяется и при замене параметризации S^1, сохраняющей ориентацию. Другими словами, F_K зависит только от ориентированной кривой $K(S^1)$.

Таким образом, классификация коприсоединенных орбит в данном примере содержит в качестве частного случая классификацию ориентированных узлов на M с точностью до сохраняющей объем изотопии.

Пример 8. Обозначим через $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ группу сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности. Пусть G — ее единственное нетривиальное центральное расширение (так называемая **группа Вирасоро – Ботта**).

Этот пример будет рассмотрен в п. 5.3.2. Здесь мы только отметим, что классификация коприсоединенных орбит этой группы эквивалентна каждой из следующих (по виду весьма различных) проблем:

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ly \equiv c\frac{d^2}{dx^2}y + p(x)y = 0. \tag{23}$$

Выполнив замену независимой переменной $x \mapsto \varphi(t)$ и одновременно неизвестной функции $y \mapsto y \circ \varphi \cdot (\varphi')^{-1/2}$, вместо $Ly = 0$ получим уравнение $\widetilde{L}\widetilde{y} = 0$ того же вида, но с другим коэффициентом

$$\widetilde{p} = p \circ \varphi \cdot (\varphi')^2 + cS(\varphi), \quad S(\varphi) = \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2. \tag{24}$$

Предположим, что коэффициент $p(x)$ 2π-периодичен, а функция $\varphi(t)$ обладает свойством $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)+2\pi$. Требуется классифицировать уравнения (23) относительно преобразований (24).

2. Пусть G — односвязное накрытие группы $SL(2,\mathbb{R})$ и A — группа всех автоморфизмов G. Требуется классифицировать элементы G с точностью до действия A.

3. **Локально проективная структура** на ориентированной окружности S^1 определяется покрытием S^1 картами $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ с локальным параметром t_α на U_α так, что функции перехода $\varphi_{\alpha\beta}$ дробно-линейные и сохраняют ориентацию. (Это означает, что $t_\alpha = \dfrac{at_\beta + b}{ct_\beta + d}$, $ad - bc > 0$.) Требуется классифицировать локально проективные структуры на S^1 с точностью до действия $\mathrm{Diff}_+(S^1)$.

Чтобы пояснить связь между коприсоединенными орбитами для группы Вирасоро — Ботта и задачей 1, сделаем общее замечание относительно связи между коприсоединенными орбитами группы G и ее центрального расширения $\widetilde{G}$ одномерной нормальной подгруппой A.

Пусть $\mathfrak{g}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}$ – алгебры Ли групп G и $\widetilde{G}$. Как векторное пространство, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ отождествляется с $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ так, что коммутатор имеет вид

$$[(X,a),(Y,b)] = ([X,Y], c(X,Y)), \tag{25}$$

где $c(X,Y)$ — коцикл, определяющий центральное расширение. Это антисимметричное билинейное отображение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее **уравнению коцикла**

$$\circlearrowleft c([X,Y],Z) = 0, \tag{26}$$

где, как обычно, символ $\circlearrowleft$ обозначает сумму по циклическим перестановкам трех переменных.

Отождествим $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ с $\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ и обозначим общий элемент через (F,α). Коприсоединенное действие $\widetilde{G}$ сводится к действию G, так как центральная подгруппа A действует тривиально.

Лемма 1. *Коприсоединенное действие G на $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ и на $\mathfrak{g}^*$ связаны формулой*

$$\widetilde{K}(g)(F,\alpha) = (K(g)F + \alpha \cdot S(g), \alpha), \tag{27}$$

где S — 1-коцикл на группе G со значениями в $\mathfrak{g}^*$, т. е. решение уравнения коцикла

$$S(g_1g_2) = S(g_1) + K(g_1)S(g_2). \tag{28}$$

Доказательство. Действие G на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ линейно и переходит в обычное коприсоединенное действие G на $\mathfrak{g}^*$ при естественной проекции $p : \tilde{\mathfrak{g}}^* \to \mathfrak{g}^*$. Следовательно, оно имеет вид (27) для некоторого отображения $S : G \to \mathfrak{g}^*$. Свойство (28) следует из мультипликативности отображения $\tilde{K}$. □

Упражнение 2. Показать, что для любой связной группы Ли G отображение S в (27) может быть восстановлено из коцикла $c(X,Y)$ из (25) следующим образом. Для любого $g \in G$ коциклы $c(X,Y)$ и $c'(X,Y) = c(\operatorname{Ad} gX, \operatorname{Ad} gY)$ эквивалентны.[2] Таким образом, можно записать

$$c(\operatorname{Ad} gX, \operatorname{Ad} gY) = c(X,Y) + \langle \Phi(g), [X,Y] \rangle. \tag{29}$$

Отсюда выводим $\widetilde{\operatorname{Ad}} g(X,a) = (\operatorname{Ad} gX, a + \langle \Phi(g), X \rangle)$ и, следовательно, получаем (27) с $S(g) = \Phi(g^{-1})$.

Таким образом, коприсоединенное действие $\tilde{K}$ сохраняет гиперплоскости $\alpha = \text{const}$ и на каждой такой гиперплоскости задает аффинное действие, линейная часть которого есть обычное коприсоединенное действие.

5. Поляризации

5.1. Элементы симплектической геометрии. Здесь мы будем использовать сведения о симплектических многообразиях из п. 2.2 (понятия косого градиента, скобок Пуассона и т. д.).

В общей схеме геометрического квантования (квантово-механический аналог построения унитарных неприводимых представлений из коприсоединенных орбит) важную роль играет понятие поляризации.

Определение 4. Пусть (M,σ) — симплектическое многообразие. **Вещественной поляризацией** (M,σ) называется интегрируемое подрасслоение P касательного расслоения TM такое, что каждый слой $P(m)$ является максимальным изотропным подпространством симплектического векторного пространства $(T_m M, \sigma(m))$.

В частности, размерность P равна $\frac{1}{2}\dim M$.

Напомним, что подрасслоение P называется **интегрируемым**, если существует слоение M, т. е. разложение M на непересекающиеся части (так называемые **листы**) такие, что касательное пространство к листу в любой точке $m \in M$ есть в точности $P(m)$.

Для формулировки необходимых и достаточных условий интегрируемости P нам потребуются некоторые понятия. Векторное поле ξ на M называется **допустимым**, если $\xi(m) \in P(m)$ для всех $m \in M$. Пространство всех допустимых векторных полей обозначим $\operatorname{Vect}_P(M)$.

Двойственным объектом является пространство $\Omega_P(M)$ всех дифференциальных форм ω на M таких, что $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$ для любых допустимых векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_k$, $k = \deg \omega$.

[2]Инфинитезимальный вариант этого утверждения следует непосредственно из уравнения (26).

Критерий интегрируемости Фробениуса. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *подрасслоение* $P \subset TM$ *интегрируемо,*

(b) *пространство* $\mathrm{Vect}_P(M)$ *является подалгеброй Ли* $\mathrm{Vect}(M)$,

(c) *пространство* $\Omega_P(M)$ *является дифференциальным идеалом алгебры* $\Omega(M)$.

В практике применяют только те поляризации, которые на самом деле являются расслоениями M. В этом случае множество листов само является гладким многообразием B и M является расслоенным пространством над B с листами в качестве слоев. Эти листы образуют **лагранжевы** (т. е. максимальные изотропные) подмногообразия M.

Пусть $C_P^\infty(M)$ — пространство гладких функций на M, постоянных вдоль листов. Это пространство можно также определить как множество функций, на котором обращаются в нуль все допустимые векторные поля.

Лемма 2. *Подрасслоение* $P \subset TM$ *размерности* $\frac{1}{2}\dim M$ *является поляризацией тогда и только тогда, когда* $C_P^\infty(M)$ *— максимальная абелева подалгебра алгебры Ли* $C^\infty(M)$ *относительно скобок Пуассона.*

Доказательство. Пусть P — поляризация. Пространство $\mathrm{Vect}_P(M)$ состоит из векторных полей, касательных к слоям P. Для $f \in C_P^\infty(M)$ имеем $df \in \Omega_P^1(M)$. Поэтому $\text{s-grad}\, f(m)$ косо-ортогонально $P(M)$ и, следовательно, принадлежит $P(M)$. Таким образом, для любых $f_1, f_2 \in C_P^\infty(M)$ имеем $\{f_1, f_2\} = (\text{s-grad} f_1) f_2 = 0$.

Более того, если $(\text{s-grad} f_1) f_2 = 0$ для всех $f_2 \in C_P^\infty(M)$, то $\text{s-grad}\, f(m) \in P(m)$ и f_1 постоянна вдоль слоев и, следовательно, принадлежит $C_P^\infty(M)$. Мы показали, что $C_P^\infty(M)$ — максимальная абелева подалгебра Ли.

Теперь предположим, что $C_P^\infty(M)$ — абелева подалгебра Ли $C^\infty(M)$. Согласно формуле (15) из п. 2.2 имеем $\{f_1, f_2\} = \sigma(\text{s-grad} f_1, \text{s-grad} f_2)$. Таким образом, косые градиенты функции $f \in C_P^\infty(M)$ порождают изотропное подпространство в каждой точке $m \in M$. Однако это подпространство имеет размерность $\frac{1}{2}\dim M$ и, следовательно, должно быть максимальным изотропным подпространством $T_m(M)$. □

Имеет место замечательный комплексный аналог вещественных поляризаций.

Определение 5. **Комплексной поляризацией** (M, σ) называется интегрируемое подрасслоение P комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ такое, что каждый слой $P(m)$ является максимальным изотропным подпространством симплектического комплексного векторного пространства $(T_m^{\mathbb{C}}M, \sigma^{\mathbb{C}}(m))$.

Здесь интегрируемость определяется согласно критерию Фробениуса.

Заметим, что пространство $C_P^\infty(M)$, как и выше, является подалгеброй комплексификации $C^\infty(M)$. В некоторых специальных случаях можно дать наглядное описание этой подалгебры.

Пусть P — интегрируемое комплексное подрасслоение $T^{\mathbb{C}}M$. Тогда комплексное сопряженное $\overline{P}$ и пересечение $D := P \bigcap \overline{P}$ также интегрируемы (это легкое упражнение по критерию Фробениуса). Напротив, подрасслоение $E := P + \overline{P}$, вообще говоря, не интегрируемо.

Заметим, что как D, так и E, могут рассматриваться как комплексификации вещественных подрасслоений $D_0 = D \bigcap TM$ и $E_0 = E \bigcap TM$ of TM.

Предложение 4. *Допустим, что подрасслоение E (или E_0) интегрируемо. Тогда в окрестности каждой точки M существует локальная система координат $\{u_1, \ldots, u_k;\ x_1, \ldots, x_l;\ y_1, \ldots, y_l;\ v_1, \ldots, v_m;\}$ такая, что*

(i) D_0 *порождается* $\dfrac{\partial}{\partial v_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$,

(ii) E_0 *порождается* $\dfrac{\partial}{\partial v_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$, $1 \leqslant j \leqslant l$,

(iii) P *порождается* $\dfrac{\partial}{\partial v_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\dfrac{\partial}{\partial x_j} + i\dfrac{\partial}{\partial y_j}$, $1 \leqslant j \leqslant l$.

Введем обозначение $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leqslant j \leqslant l$. Тогда можно сказать, что алгебра $C^\infty_P(M)$ состоит из функций, которые не зависят от координат v_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и голоморфны в координатах z_j, $1 \leqslant j \leqslant l$. Или, в геометрической интерпретации, рассматриваемые функции постоянны вдоль листов D_0 и голоморфны вдоль листов E_0/D_0.

Замечание 3. Подрасслоения $P \subset T^{\mathbb{C}}M$, для которых $E = P + \overline{P}$ неинтегрируемо, довольно интересны, однако до сих пор не используются в теории представлений. В этом случае $C^\infty_P(M)$ все еще является подалгеброй $C^\infty_P(M)$. Природа этой подалгебры может быть проиллюстрирована следующим простейшим примером.

Пусть $M = \mathbb{R}^3$ с координатами x, y, t и P — линейная оболочка единственного комплексного векторного поля $\xi = \partial_x + i\partial_y + (y - ix)\partial_t$. В терминах комплексной координаты $z = x + iy$ это поле можно переписать в виде $\xi = \partial_{\overline{z}} - iz\partial_t$. Тогда $\overline{P}$ — линейная оболочка $\overline{\xi} = \partial_z + i\overline{z}\partial_t$ и $E = \mathbb{C} \cdot \xi \oplus \mathbb{C} \cdot \overline{\xi}$ неинтегрируемо, так как $[\xi, \overline{\xi}] = 2i\partial_t \notin E$.

Уравнение $\xi f = 0$ хорошо известно в математическом анализе. Среди решений этого уравнения — все граничные значения голоморфных функций двух комплексных переменных (z, w) в области $D = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} w \geqslant |z|^2\}$. Граница ∂D диффеоморфна $\mathbb{R}^3$ и параметризуется координатами z и $t = \operatorname{Re} w$.

5.2. Инвариантные поляризации на симплектических многообразиях. В теории представлений группы Ли основной интерес связан с G-инвариантными поляризациями однородных симплектических G-многообразий. Мы уже знаем, что последние являются по-существуककоприсоединенными орбитами. В этой ситуации геометрические и аналитические проблемы сводятся к чисто алгебраическим.

Пусть G — связная группа Ли и $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ — коприсоединенная орбита G. Выберем точку $F \in \Omega$ и обозначим через $\operatorname{Stab}(F)$ стабилизатор F в G и через $\operatorname{stab}(F)$ — соответствующую алгебру Ли.

Определение 6. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ **подчинена** функционалу $F \in \mathfrak{g}^*$, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(i) $B_F \big|_{[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]} = 0$,

(i′) отображение $X \mapsto \langle F, X\rangle$ есть одномерное представление $\mathfrak{h}$.

Заметим, что коразмерность $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ не меньше, чем $\frac{1}{2}\operatorname{rk} B_F$. Если дополнительно выполнено условие

(ii) $\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \frac{1}{2}\operatorname{rk} B_F$ (т. е. $\mathfrak{h}$ имеет максимально возможную размерность $\dfrac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk}\mathfrak{g}}{2}$), то будем говорить, что $\mathfrak{h}$ — **вещественная поляризация** F.

Понятие **комплексной поляризации** определяется точно так же, но в этом случае рассматриваются комплексные подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, которые удовлетворяют эквивалентным условиям (i) или (i′) (для функционала, полученного из F по комплексной линейности) и дополнительному условию (ii).

Может случиться, что для данного $F \in \mathfrak{g}^*$ не существует вещественной поляризации. Наиболее наглядный пример — это $G = SU(2)$, когда $\mathfrak{g}$ не имеет подалгебр размерности 2.

Однако вещественные поляризации всегда существуют для нильпотентных и вполне разрешимых алгебр Ли, а комплексные поляризации всегда существуют для разрешимых алгебр Ли. Этот факт вытекает из замечательного наблюдения М. Вернь.

Лемма 3 [Ve1]. *Пусть V — вещественное векторное пространство, снабженное симплектической билинейной формой B. Рассмотрим произвольную фильтрацию V*

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

где $\dim V_k = k$. Обозначим через W_k ядро сужения $B\,\big|_{V_k}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) *$W = \sum\limits_k W_k$ — максимальное изотропное подпространство B,*

(b) *если, кроме того, V — алгебра Ли, $B = B_F$ для некоторого $F \in V^*$ и все V_k — идеалы V, то W — поляризация F.*

Подробное доказательство этой леммы дано в [Di3, § 1.12], поэтому мы его опустим.

Заметим, что в [Di3] также показано, что для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем K множество функционалов $F \in \mathfrak{g}^*$, допускающих поляризацию над K, содержит подмножество, открытое в смысле Зарисского. Следовательно, оно плотно в $\mathfrak{g}^*$.

Пример 9. Пусть $G = Sp(2n, K)$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из матриц вида SJ, где S — симметрическая матрица с элементами из K и $J = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}$. Двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ можно отождествить с $\mathfrak{g}$, используя двойственность $(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$. Рассмотрим подмножество $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, заданное условием $\operatorname{rk} X = 1$. Это множество является единственной G-орбитой в случае $K = \mathbb{C}$ и распадается на две G-орбиты $\Omega_\pm$ в случае $K = \mathbb{R}$.

Покажем, что при $n \geqslant 2$ не существует поляризации ни при каком $F \in \Omega$. Действительно, легко вычислить, что $\operatorname{rk} B_F = 2n$ для $F \in \Omega$. Таким образом, предполагаемая поляризация $\mathfrak{h}$ должна иметь коразмерность n в $\mathfrak{g}$. Кроме того, она должна содержать $\operatorname{stab}(F)$ и, следовательно, $\mathfrak{h}/\operatorname{stab}(F)$ должно быть n-мерным $\operatorname{Stab}(F)$-инвариантным подпространством $T_F\Omega \cong \mathfrak{g}/\operatorname{stab}(F) \cong K^{2n}$.

Рассмотрим действие $\operatorname{Stab}(F)$ на $T_F\Omega \cong K^{2n}$ более подробно. Можно записать матрицу F в виде $F = vv^tJ$ для некоторого вектор-столбца $v \in K^{2n}$. Тогда $\operatorname{stab}(F)$ состоит из матриц X таких, что $Xv = 0$. Соответственно, $\operatorname{Stab}(F)$ состоит из матриц g таких, что $gv = v$. Итак, отображение $v \mapsto F = vv^tJ$ является $\operatorname{Stab}(F)$-эквивариантным и отождествляет линейное действие $\operatorname{Stab}(F)$ на $T_F\Omega$ со стандартным действием на K^{2n}. Это действие допускает только два нетривиальных инвариантных подпространства: одномерное пространство Kv и $(2n-1)$-мерное пространство $(Kv)^\perp$.

Теперь мы объясним связь между введенным здесь понятием поляризации и данным в п. 5.1. Как и раньше, обозначим через p_F отображение G на Ω, определенное по формуле $p_F(g) = K(g)F$, и через $(p_F)_*$ — его производную в точке e, которая отображает $\mathfrak{g}$ на $T_F\Omega$.

Теорема 5. *Существует биекция между множеством G-инвариантных вещественных поляризаций P коприсоединенной орбиты $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ и множеством вещественных поляризаций $\mathfrak{h}$ данного элемента $F \in \Omega$. Именно, поляризации $P \subset T\Omega$ соответствует подалгебра $\mathfrak{h} = (p_F)_*^{-1}(P(F))$.*

Для доказательства нам понадобится следующий общий результат.

Предложение 5. *Пусть $M = G/K$ — однородное многообразие.*

(a) *Существует взаимно однозначное соответствие между G-инвариантными подрасслоениями $P \subset TM$ и K-инвариантными подпространствами $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, содержащими $\operatorname{Lie}(K)$.*

(b) *Подрасслоение P интегрируемо тогда и только тогда, когда соответствующее подпространство $\mathfrak{h}$ является подалгеброй $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. (a) Выберем начальную точку $m_0 \in M$ и обозначим через p проекцию G на M согласно формуле $p(g) = g \cdot m_0$. Пусть $p_*(g)$ — производная p в точке $g \in G$. Определим подрасслоение $Q \subset TG$ по формуле $Q(g) := p_*^{-1}(g)(P(g \cdot m_0))$. Очевидно, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \xrightarrow{(L_g)_*(e)} & V_1 & \longleftarrow & Q(g) \\
{\scriptstyle p_*(e)}\downarrow & & {\scriptstyle p_*(e)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*(g)} & & \downarrow{\scriptstyle p_*(g)} \\
P(m_0) & \longrightarrow & T_{m_0}M & \xrightarrow{(g\cdot)_*(m_0)} & T_{g\cdot m_0}M & \longleftarrow & P(g\cdot m_0)
\end{array} \tag{30}$$

Здесь L_g обозначает левый сдвиг на $g \in G$ и звездочка в нижнем индексе указывает, что это производное отображение.

Таким образом, Q — левоинвариантное подрасслоение TG. Обратно, каждое левоинвариантное подрасслоение $Q \subset TG$, обладающее свойством $\mathfrak{h} := Q(e) \supset \operatorname{Lie}(K)$, можно получить этой процедурой из G-инвариантного подрасслоения $P \subset TM$: достаточно определить $P(g \cdot m_0)$ как $p_*(g)Q(g)$.

(b) Так как P G-инвариантно, P является линейной оболочкой G-инвариантных векторных полей $\widetilde{X}$, $X \in \mathfrak{h}$. Согласно критерию Фробениуса P интегрируемо тогда и только тогда, когда пространство $\mathrm{Vect}_P(M)$ является подалгеброй Ли. Однако последнее условие эквивалентно утверждению, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли $\mathfrak{g}$. □

Доказательство теоремы 5. Для данного подрасслоения $P \subset T\Omega$ определим $\mathfrak{h}$ так же, как в предложении 5 (с Ω вместо M и F вместо m_0). Как было указано в п. 2.1, $p^*(e)\sigma(F) = B_F$. Поэтому $P(F)$ — максимальное изотропное подпространство относительно σ тогда и только тогда, когда то же верно для $\mathfrak{h}$ относительно B_F. Остальные утверждения теоремы 5 вытекают из предложения 5. □

Замечание 4. Пусть $\mathfrak{h}$ — вещественная поляризация $F \in \mathfrak{g}^*$, P — вещественная поляризация Ω, соответствующая $\mathfrak{h}$, и $H = \exp \mathfrak{h}$. Тогда листы G-инвариантного расслоения Ω, определенного P, имеют вид $K(gH)(F)$. В частности, лист, проходящий через F, является орбитой коприсоединенного действия H.

В заключение заметим, что легко сформулировать и доказать аналог теоремы 5 в комплексном случае.

Теорема 5′. *Существует биекция между множеством всех G-инвариантных комплексных поляризаций P коприсоединенной орбиты $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ и множеством всех комплексных поляризаций $\mathfrak{h}$ данного элемента $F \in \Omega$.*

Как и выше, поляризации $P \subset T^{\mathbb{C}}_{\Omega}$ соответствует подалгебра $\mathfrak{h} = p_*(F)^{-1}(P(F)) \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Лекция 8

МЕТОД ОРБИТ ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ

1. Руководство для пользователя 181
2. Примеры 183
   2.1. Двойственный объект $\widehat{G}$ 183
   2.2. Построение унитарных неприводимых представлений 185
   2.3. Функтор ограничения 187
   2.4. Функтор индукции 189
   2.5. Тензорное произведение 190
   2.6. Обобщенные характеры 191
   2.7. Инфинитезимальные характеры 192
   2.8. Мера Планшереля 193
   2.9. Другие примеры 193
3. Доказательства 194
   3.1. Нильпотентные группы с одномерным центром 194
   3.2. Основная процедура индукции 197
   3.3. Существование обобщенных характеров 201
   3.4. Гомеоморфизм $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ 203

1. Руководство для пользователя

Класс нильпотентных групп Ли предоставляет идеальную ситуацию, когда метод орбит работает с наибольшей отдачей. Применяя метод орбит, можно получить простые наглядные ответы на все важнейшие вопросы теории представлений.

Все результаты, описанные в этом разделе, получены в [Kil] с одним исключением: гомеоморфизм $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ был установлен позднее в [Br].

Для неспециалистов мы формулируем эти результаты как "руководство для пользователя" с практическими инструкциями, как получить ответы на десять основных вопросов теории представлений.[1]

[1]Напомним еще раз, что это простые правила применимы для связных односвязных нильпотентных групп. Для групп более общего вида мы сформулируем позже "десять поправок" к этим правилам.

Мы используем определения и обозначения из предыдущих лекций. Поэтому в случае затруднений с терминологией читателю следует обратиться к предметному указателю и найти соответствующие определения в первой части книги.

РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Что требуется	Что нужно сделать
1. Описать двойственный объект $\widehat{G}$ (т. е. множество унитарных неприводимых представлений G) как топологическое пространство	1. Построить пространство $\mathcal{O}$ коприсоединенных орбит с топологией фактор-пространства
2. Построить унитарное неприводимое представление T_Ω, соответствующее орбите $\Omega \in \mathfrak{g}^*$	2. Выбрать точку $F \in \Omega$, рассмотреть подалгебру $\mathfrak{h}$ максимальной размерности, подчиненную F, и положить $T_\Omega = \operatorname{Ind}_H^G U_{F,H}$
3. Описать спектр $\operatorname{Res}_H^G T_\Omega$	3. Разложить проекцию $p(\Omega)$ на H-орбиты
4. Описать спектр $\operatorname{Ind}_H^G S_\Omega$	4. Разложить G-насыщение $p^{-1}(\Omega)$ на G-орбиты
5. Описать спектр тензорного произведения $T_{\Omega_1} \otimes T_{\Omega_2}$	5. Разложить арифметическую сумму $\Omega_1 + \Omega_2$ на орбиты
6. Вычислить обобщенный характер T_Ω	6. $\operatorname{tr} T_\Omega(\exp X) = \int\limits_\Omega e^{2\pi i\langle F,X\rangle + \sigma}$ или $\langle T_\Omega, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \widetilde{\varphi}(F) e^\sigma$
7. Вычислить инфинитезимальный характер T_Ω	7. Для $A \in Z(\mathfrak{g})$ взять значение $P_A \in \operatorname{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ на орбите Ω
8. Каково соотношение между T_Ω и $T_{-\Omega}$?	8. T_Ω и $T_{-\Omega}$ — двойственные представления
9. Найти функциональную размерность T_Ω	9. $\frac{1}{2}\dim\Omega$
10. Вычислить меру Планшереля μ на $\widehat{G}$	10. Мера на $\mathcal{O}(G)$, возникающая при разложении меры Лебега на $\mathfrak{g}^*$ на канонические меры на коприсоединенных орбитах

Ниже мы покажем на примерах, как пользоваться этим руководством. Другие поучительные примеры можно найти в [Di2].

2. Примеры

2.1. Двойственный объект $\widehat{G}$. Первый вопрос теории представлении относительно заданной группы G состоит в следующем: описать **двойственный объект** $\widehat{G}$, т. е. совокупности всех унитарных неприводимых представлений[2] группы G.

Существует естественная (не хаусдорфова) топология в $\widehat{G}$, которую можно определить тремя различными способами (см. [Di2]). Наиболее удобное определение мы приведем в п. 3.4. Ниже мы увидим, что для нильпотентной группы G множество $\widehat{G}$ является конечным объединением гладких многообразий, склеенных вместе соответствующим образом.

Самый простой пример — это группа Гейзенберга, которая уже упоминалась в предыдущих лекциях и будет опять рассматриваться подробно в п. 2.3 ниже. Для иллюстрации, как пользоваться руководством, рассмотрим следующий более сложный и более типичный случай.

Среди 4-мерных нильпотентных алгебр Ли имеется единственная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, которую нельзя представить в виде прямой суммы идеалов.[3] Она имеет базис $\{X_1, X_2, X_3, Y\}$ с коммутационными соотношениями

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [Y, X_i] = X_{i-1}, \qquad i = 2, 3. \tag{1}$$

Матрицы, реализующие $\mathfrak{g}$, выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i X_i + bY = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & b & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий элемент группы имеет вид

$$g(a_1, a_2, a_3, b) = \exp \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & b & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{1}{2}b^2 & a_1 + \frac{1}{2}ba_2 + \frac{1}{6}b^2a_3 \\ 0 & 1 & b & a_2 + \frac{1}{2}ba_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $F \in \mathfrak{g}^*$ с координатами $\{X_1, X_2, X_3, Y\}$ можно записать как нижнетреугольную матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 & 0 \end{pmatrix},$$

[2] Напомним, что мы всегда имеем в виду класс эквивалентности унитарных неприводимых представлений.

[3] Представления этой алгебры Ли используются в теории ангармонического осциллятора и впервые были изучены в [Di1].

а проекция $p : \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$p(\| A_{ij} \|) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} + A_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями[4] получаем, что коприсоединенное действие выглядит следующим образом:

$$K(g(a_1, a_2, a_3, b))(X_1, X_2, X_3, Y)$$
$$(X_1, X_2 - bX_1, X_3 - bX_2 + \frac{1}{2}b^2 X_1, Y + (a_2 - (ba_3)/2)X_1 + a_3 X_2). \qquad (2)$$

Мы интересуемся полиномиальными инвариантами коприсоединенного действия. Из (2) легко получить один из таких инвариантов: $P_1(F) = X_1$. Этому факту можно дать другое доказательство, более концептуальное. А именно: так как элемент $X_1 \in \mathfrak{g}$ принадлежит центру $\mathfrak{g}$, соответствующая координата X_1 на $\mathfrak{g}^*$ остается без изменений при коприсоединенном действии G.

Заметим, что P_1 не может быть единственным инвариантом, так как общая орбита не может иметь коразмерности 1. (Напомним, что коприсоединенные орбиты четномерны и $\dim \mathfrak{g} = 4$.) Чтобы найти другой инвариант, мы будем рассуждать по схеме из п. 4.2 лекции 4.

Рассмотрим плоскость S, заданную двумя линейными уравнениями $X_2 = 0, Y = 0$. В силу (2) почти все орбиты пересекают эту плоскость. Легко вычислить, что для орбиты Ω, проходящей через точку (X_1, X_2, X_3, Y) с $X_1 \neq 0$, пересечение $\Omega \bigcap S$ состоит из единственной точки с координатами $\left(X_1, 0, X_3 - \dfrac{X_2^2}{2X_1}, 0\right)$. Следовательно, $X_3 - \dfrac{X_2^2}{2X_1}$ является рациональными инвариантом. Таким образом, мы получаем полиномиальный инвариант $P_2(F) = 2X_1X_3 - X_2^2$.

Рассмотрим множество уровня полученных двух инвариантов:

$$P_1(F) = c_1, \quad P_2(F) = c_2. \qquad (3)$$

Предлагаем читателю доказать следующие утверждения.

Множество уровня

- является единственной орбитой Ω_{c_1,c_2} при $c_1 \neq 0$,
- распадается на две орбиты $\Omega^{\pm}_{0,c_2}$, отличающиеся знаком X_2, при $c_1 = 0$, $c_2 < 0$,
- пусто при $c_1 = 0$, $c_2 > 0$,
- распадается на 0-мерные орбиты $\Omega^{c_3,c_4}_{0,0} = \{(0, 0, c_3, c_4)\}$, которые являются неподвижными точками коприсоединенного действия, при $c_1 = c_2 = 0$.

Окончательное описание топологического пространства $\mathcal{O}(G)$ выглядит следующим образом. Рассмотрим вещественную плоскость $\mathbb{R}^2_{c_1,c_2}$, удалим прямую $c_1 = 0$ и приклеим к оставшимся множествам

[4] Мы рекомендуем читателю проделать выкладки независимо, используя соотношение $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

- две точки вместо каждой точки выброшенного луча $c_1 = 0$, $c_2 < 0$,
- целую 2-плоскость вместо выколотого начала координат.

Топология $\mathcal{O}(G)$ — это стандартная фактор-топология: множество орбит открыто тогда и только тогда, когда объединение всех орбит из этого множества открыто в $\mathfrak{g}^*$. В частности, предел [5] последовательности $\{\Omega_{\varepsilon_n, c}\}$ при $\varepsilon_n \to 0$ будет следующим:

- две точки $\Omega^{\pm}_{0,c}$ при $c < 0$,
- целая плоскость 0-мерных орбит $\Omega^{c_3,c_4}_{0,0}$ при $c = 0$,
- нет предела при $c > 0$.

Согласно правилу 1 существует гомеоморфизм (т. е. непрерывная в обе стороны биекция) между $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$.

2.2. Построение унитарных неприводимых представлений. Согласно правилу 2 представление T_Ω, соответствующее данной орбите Ω, индуцируется одномерным унитарным неприводимым представлением $U_{F,H}$ некоторой подгруппы $H \subset G$. Таким образом, чтобы получить явную формулу, надо сделать следующее:

(i) выбрать точку $F \in \Omega$,

(ii) найти подалгебру $\mathfrak{h}$ максимальной размерности, которая подчинена F (т. е. такую, что $B_F \big|_{\mathfrak{h}} = 0$),

(iii) для подгруппы $H = \exp \mathfrak{h}$ определить одномерное унитарное неприводимое представление $U_{F,H}$: $U_{F,H}(\exp X) = e^{2\pi i \langle F, X \rangle}$,

(iv) выбрать сечение $s : X = H \backslash G \to G$ и решить основное уравнение

$$s(x)g = h(x, g)s(x \cdot g), \tag{4}$$

(v) выписать окончательную формулу

$$(T_\Omega(g)f)(x) = U_{F,H}(h(x,g))f(x \cdot g). \tag{5}$$

Проведем вычисления для всех унитарных неприводимых представлений 4-мерной группы G из п. 2.1. Начнем с 0-мерных орбит.

Напомним, что орбита $\Omega^{c_3,c_4}_{0,0}$ состоит из одной точки $F = (0, 0, c_3, c_4)$. Здесь форма B_F равна нулю тождественно, так как $\operatorname{rk} B_F = \dim \Omega = 0$. Следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, $H = G$ и $T_\Omega = U_{F,H}$.

Таким образом, одномерное представление T_Ω группы G, соответствующее одноточечной орбите $\Omega = \{F\}$, задается формулой

$$T_\Omega(\exp X) = e^{2\pi i \langle F, X \rangle}. \tag{6}$$

В нашем случае функционалу $F = (0, 0, c_3, c_4)$ соответствует представление

$$U_{c_3,c_4}(g(a_1, a_2, a_3, b)) = e^{2\pi i (c_3 a_3 + c_4 b)}. \tag{7}$$

Остальные представления соответствуют 2-мерным орбитам. Они бесконечномерны и имеют **функциональную размерность** 1 (см. правило 9). Последнее утверждение, попросту говоря, означает, что представление естественно реализуется в пространстве функций одной переменной.[6] Согласно

[5] Так как рассматриваемое пространство не хаусдорфово, предел не единствен.

[6] Подробное обсуждение концепции функциональной размерности можно найти в [Ki8, ч. II].

правилу 2 каждое из этих представлений может быть получено индукцией из одномерного представления соответствующей подгруппы H коразмерности 1. На самом деле для группы G можно выбрать одну и ту же подгруппу H для всех представлений, соответствующих 2-мерным орбитам. Именно, положим $H = \exp \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — линейная оболочка X_1, X_2, X_3. Идея заключается в том, что $\mathfrak{h}$, будучи абелевой, подчинена любому функционалу $F \in \mathfrak{g}^*$ и имеет максимальную возможную размерность.

Замечание 1. Наблюдаемый феномен не отражает общего правила: для другой нильпотентной группы может потребоваться бесконечно много различных подгрупп H для построения всех унитарных неприводимых представлений. Мы рекомендуем читателю детально рассмотреть пример универсальной нильпотентной группы G класса нильпотентности 2 с тремя образующими. По определению эта группа является 6-мерной алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ и имеет базис $\{X_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$, $\{Y^j\}_{1\leqslant j\leqslant 3}$ с коммутационными соотношениями $[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}Y^k$, $[Y^j, Y^k] = 0$. Общая орбита в $\mathfrak{g}^*$ имеет размерность 2 и определяется в координатах X_i, Y^j уравнениями

$$Y^j = c^j,\ 1 \leqslant j \leqslant 3, \quad \sum_i X_i Y^i = c.$$

Ядро $\mathrm{stab}\, F$ формы B_F порождается всеми Y^j и $X = \sum_i c^j X_j$. Роль $\mathfrak{h}$ может исполнять любая подалгебра коразмерности 1, содержащая $\mathrm{stab}\, F$. Остается заметить, что конечное число собственных подалгебр не могут покрыть целиком $\mathfrak{g}$.

Теперь воспользуемся стандартной процедурой, описанной в первой части книги, для построения индуцированного представления $\mathrm{Ind}_H^G U_{F,H}$. В нашем случае удобно отождествить пространство с мерой (X, μ) с $(\mathbb{R}^1, dx)$ и рассматривать элемент $\exp xY$ как $s(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Требуется решить основное уравнение (5), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & \frac{b^2}{2} & a_1 + \frac{1}{2}ba_2 + \frac{1}{6}b^2a_3 \\ 0 & 1 & b & a_2 + \frac{1}{2}ba_3 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 1 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & \frac{y^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с заданными a_i, b и x и неизвестными h_i и y. Решение имеет вид

$$y = x + b, \quad h_1 = a_1 + \frac{1}{2}ba_2 + \frac{1}{6}b^2a_3 + \left(a_2 + \frac{1}{2}ba_3\right)x + \frac{1}{2}a_3x^2,$$

$$h_2 = \alpha_2 + \frac{1}{2}ba_3 + \alpha_3 x, \quad h_3 = a_3.$$

Заметим, что эти выражения значительно упрощаются, если мы рассматриваем по отдельности элементы с $b = 0$ или $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Другой способ упрощения вычислений основан на использовании координат

$\alpha_1 = a_1 + \dfrac{1}{2}ba_2 + \dfrac{1}{6}b^2a_3$, $\alpha_2 = a_2 + \dfrac{1}{2}ba_3$, $\alpha_3 = a_3$, $\beta = b$ вместо экспоненциальных координат $\{a_1, a_2, a_3, b\}$. На последнем шаге мы выписываем явную формулу для $U_{F,H}$.

Для общих представлений T_{c_1,c_2}, $c_1 \neq 0$, положим $F = (c_1, 0, c_2/(2c_1), 0)$, а для остальных представлений S_c, $c \neq 0$, полагаем $F = (0, c, 0, 0)$.

Мы подошли к окончательному результату:

$$
\begin{aligned}
&(T_{c_1,c_2}(g(a_1,a_2,a_3,0))f)(x) = e^{2\pi i(c_1(a_1+a_2x+1/2a_3x^2)+\frac{c_2}{2c_1}a_3)}f(x),\\
&(T_{c_1,c_2}(g(0,0,0,b))f)(x) = f(x+b),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&(S_c(g(a_1,a_2,a_3,0))f)(x) = e^{2\pi ic(a_2+a_3x)}f(x),\\
&(S_c(g(0,0,0,b))f)(x) = f(x+b).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

В заключение заметим, что пространство H^∞ гладких векторов в этом случае совпадает с пространством Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Как мы увидим в п. 3, это свойство присуще всем унитарным неприводимым представлениям нильпотентной группы Ли.

Для дальнейших рассмотрений приведем таблицу образов базисных элементов $\mathfrak{g}$ и образующих $Z(\mathfrak{g})$ при построенных унитарных неприводимых представлениях:

	T_{c_1,c_2}	S_c	U_{c_3,c_4}
X_1	$2\pi ic_1$	0	0
X_2	$2\pi ic_1x$	$2\pi ic$	0
X_3	$\pi ic_1x^2 + 2\pi ic_2$	$2\pi icx$	$2\pi ic_3$
Y	$\dfrac{d}{dx}$	$\dfrac{d}{dx}$	$2\pi ic_4$
$P_1 = X_1$	$2\pi ic_1$	0	0
$P_2 = 2X_1X_3 - X_2^2$	$-4\pi^2c_1c_2$	$-4\pi^2c^2$	0

Очевидно, что коммутационные соотношения (1) выполняются. Заметим также, что инфинитезимальные характеры разделяют общие представления T_{c_1,c_2} (но не разделяют S_c и S_{-c} или различные U_{c_3,c_4}).

2.3. Функтор ограничения. Продолжим изучение группы G из п. 2.1 и 2.2. В этом разделе мы рассмотрим ограничение общего представления T_{c_1,c_2} группы G на подгруппу.

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, порожденную X_1, X_2 и Y. Это известная **алгебра Ли Гейзенберга** — нетривиальное центральное расширение абелевой алгебры Ли $\mathbb{R}^2$. Эта алгебра играет фундаментальную роль в квантовой механике.

Базисные элементы $\mathfrak{h}^*$ допускают матричную реализацию строго верхнетреугольными матрицами

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая **группа Ли Гейзенберга** H состоит из матриц

$$g(a,b,c) = \exp \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1. Описать коприсоединенные орбиты для группы Гейзенберга H.

Указание. Использовать реализацию элемента $(X_1, X_2, Y) \in \mathfrak{h}^*$ в виде нижнетреугольной матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_2 & 0 & 0 \\ X_1 & Y & 0 \end{pmatrix}$. Показать, что коприсоединенное действие имеет вид

$$K\left(\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)(X_1, X_2, Y) = (X_1, X_2 + bX_1, Y - aX_1).$$

Ответ. Множество $\mathcal{O}(H)$ содержит 1-параметрическое семейство плоскостей $X_1 = \hbar \neq 0$ и 2-параметрическое семейство точек $(0, X_2, Y)$.

Соответственно, H имеет серию бесконечномерных унитарных неприводимых представлений, которая зависит от одного вещественного параметра $\hbar$ и действует в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ по формуле [7]

$$(V_\hbar(g(a,b,c))f)(x) = e^{2\pi i\hbar(bx+c)} f(x+a).$$

Соответствующее представление $\mathfrak{h}$ имеет вид

$$V_\hbar(X_1) = 2\pi i\hbar, \quad V_\hbar(X_2) = 2\pi i\hbar x, \quad V_\hbar(Y) = \frac{d}{dx}.$$

В квантовой механике величина $\hbar$ интерпретируется как **нормализованная константа Планка** $\frac{h}{2\pi}$, операторы $P = iX_2$ и $Q = iY$ играют роль координаты и импульса и удовлетворяют **каноническому коммутационному соотношению** $PQ - QP = ih \cdot 1$

Сравним унитарные неприводимые распределения групп H и G. Из приведенных выше равенств и таблицы в п. 2.2. получаем $\mathrm{Res}_H^G T_{c_1,c_2} = V_{c_1}$. Проверим, что это соотношение согласовано с правилом 3. Проекция $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ в этом случае является проекцией 4-мерного пространства с координатами X_1, X_2, X_3, Y на 3-мерное пространство с координатами X_1, X_2, Y параллельно X_3-оси. Общая орбита Ω_{c_1,c_2}, $c_1 \neq 0$, задается уравнением (3), и проекция p отображает ее в точности на плоскость $X_1 = c_1$.

[7]Оставляем читателю вывод этой формул из правила 2.

Упражнение 2. Из правила 3 вывести, что $\mathrm{Res}_H^G S_c$ распадается на 1-параметрическое семейство одномерных представлений H. Проверить это утверждение, используя формулу (9) и преобразование Фурье.

2.4. Функтор индукции. Простейшим примером индуцированного представления группы G является представление $T = \mathrm{Ind}_H^G 1$ в пространстве функций на однородном многообразии $X = H\backslash G$.

Группа G действует линейно на $\mathbb{R}^4$ с координатами $\{t, x, y, z\}$ с помощью матричного представления, введенного выше. Это действие сохраняет первую координату t, так как рассматриваются верхнетреугольные матрицы. На геометрическом языке это означает, что G сохраняет аффинную гиперплоскость $t = 1$ и, следовательно, действует аффинным преобразованием $\mathbb{R}^3$. В координатах α_1, α_2, α_3, β линейное действие записывается в виде

$$(t,x,y,z)\begin{pmatrix}1 & \beta & \beta^2/2 & \alpha_1\\ 0 & 1 & \beta & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \left(t, x+\beta t, y+\beta x+\frac{\beta^2 t}{2}, z+\alpha_3 y+\alpha_2 x+\alpha_1 t\right).$$

Соответствующее аффинное действие на гиперплоскости $t = 1$ имеет вид

$$(x,y,z)\cdot g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta) = (x+\beta, y+\beta x+\beta^2/2, z+\alpha_3 y+\alpha_2 x+\alpha_1).$$

Так как эти преобразования унимодулярны, получаем унитарное представление T группы G в $L^2(\mathbb{R}^3, dxdydz)$:

$$(T(g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta))f)(x) = f(x+\beta, y+\beta x+\beta^2/2, z+\alpha_3 y+\alpha_2 x+\alpha_1).$$

Возникает следующий вопрос: Каков спектр этого представления? Или, другими словами, как разложить представление [8] на неприводимые компоненты?

Напомним, что $T = \mathrm{Ind}_H^G 1$, где H — одномерная подгруппа $\exp\mathbb{R}\cdot Y$ и 1 — тривиальное одномерное представление H.

Чтобы описать спектр T согласно правилу 4, надо рассмотреть координатную проекцию p_Y группы $\mathfrak{g}^*$ на ось Y и разложить G-насыщение $p_Y^{-1}(0)$ гиперплоскости $Y = 0$ на G-орбиты. Эта гиперплоскость пересекает все двумерные орбиты Ω_{c_1,c_2} и $\Omega_{0,c}^{\pm}$ и содержит однопараметрическое семейство 0-мерных орбит $\Omega_{0,0}^{c_3,0}$.

Так как в задачах разложения можно пренебречь множеством меры нуль, ограничимся представлениями T_{c_1,c_2}, которые соответствуют общим орбитам. Окончательный ответ выглядит следующим образом:

$$T = \int T_{c_1,c_2} d\mu(c_1,c_2), \tag{10}$$

где μ — любая мера, эквивалентная мере Лебега на $\mathbb{R}^2_{c_1,c_2}$.

[8] Предполагается, что читатель знаком с теорией разложения унитарных представлений (см., например, [Ki4] или [Ki9]). Однако я надеюсь, что двнное здесь изложение процедуры достаточно замкнуто и не потребует дополнительных источников.

Замечание 2. Пространство $L^2(\mathbb{R}^3, dxdydz)$ имеет функциональную размерность 3, а общие унитарные представления имеют функциональную размерность 1. Естественно, что разложение включает 2-параметрическое семейство унитарных неприводимых представлений.

Разложение (10) можно интерпретировать как одновременную диагонализацию или спектральное разложение двух операторов Лапласа $\Delta_i = T(P_i)$, $i = 1, 2$. Укажем явную формулу для абстрактного разложения (10), которая может также служить и определением.

Для $f \in L^2(\mathbb{R}^3, dxdydz)$ введем семейство функций $\psi_{c_1,c_2} \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ таких, что

$$\psi_{c_1,c_2}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x, \frac{x^2}{2} + \frac{c_2}{2c_1}, z\right) e^{-2\pi i c_1 z} dz.$$

Теорема 1. (a) *Соответствие $f \longleftrightarrow \psi$ обратимо, и имеет место соотношение*

$$|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \iint |\psi_{c_1,c_2}|^2_{L^2(\mathbb{R})} \frac{dc_1 dc_2}{2|c_1|}. \tag{10'}$$

(b) *Если f преобразуется оператором $T(g)$, $g \in G$, то соответствующая функция ψ_{c_1,c_2} преобразуется оператором $T_{c_1,c_2}(g)$.*

Заметим, что в формуле разложения (10′) абстрактная мера $d\mu(c_1, c_2)$ из (10) приобретает конкретный вид $\dfrac{dc_1 dc_2}{2|c_1|}$.

2.5. Тензорное произведение. В качестве примера вычислим спектр тензорного произведения $T_{c_1,c_2} \otimes S_c$. Согласно правилу 5 надо рассмотреть арифметическую сумму орбит Ω_{c_1,c_2} и Ω_c. Общие точки этих орбит имеют координаты $(c_1, X, (c_2 + X^2)/(2c_1), Y)$ и $(0, c, x, y)$ соответственно. Следовательно, эта арифметическая сумма есть гиперплоскость $X_1 = c_1$, которая представляет собой объединение всех орбит Ω_{c_1,c_2} при фиксированном c_1 и подмножества меры нуль. Таким образом, ответ следующий: спектр состоит из всех представлений T_{c_1,c_2} с фиксированным c_1 и $T_{c_1,c_2} \otimes S_c$ кратно $\int T_{c_1,c_2} d\mu(c_2)$.

Более тонкий вопрос о кратности можно выяснить подсчетом функциональной размерности: для тензорного произведения $T_{c_1,c_2} \otimes S_c$ функциональные размерности складываются и дают 1+1= 2. С другой стороны, непрерывная сумма или интеграл всех T_{c_1,c_2} с фиксированным c_1 также имеет функциональную размерность 2. Поэтому можно предположить, что справедливо равенство

$$T_{c_1,c_2} \otimes S_c = \int T_{c_1,c_2} d\mu(c_2). \tag{11}$$

Конкретизировать формулу (11) (ср. с теоремой 1 выше) можно, используя формулу для тензорного произведения представлений (8) и (9). Воспользуемся тем, что гильбертово произведение $L^2(\mathbb{R}, dx)$ и $L^2(\mathbb{R}, dy)$ естественно изоморфно $L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$.

Представление тензорного произведения имеет вид

$$(T_{c_1,c_2} \otimes S_c)(g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta))(f)(x, y)$$
$$= e^{2\pi i(c_1(\alpha_1+\alpha_2 x+(\alpha_3 x^2)/2)+(c_2\alpha_3)/(2c_1)+c(\alpha_2+\alpha_3 y))} f(x+\beta, y+\beta). \qquad (12)$$

Разобьем плоскость с координатами x, y на семейство параллельных прямых $y = x + t$. Тогда пространство $L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$ можно представить в виде непрерывной суммы или интеграла меньших гильбертовых пространств. Именно, для $f \in L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$ определим семейство функций $\psi_t(x) = f(x, x+t)$. Очевидно, что

$$|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)} = \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2_{L^2(\mathbb{R}, dx)} dt \qquad (11')$$

и ψ_t преобразуется согласно $T_{c_1,c_2'}$ для некоторого c_2', когда f преобразуется согласно (12). В силу (11′) представление (12) можно записать как непрерывную сумму представлений вида $T_{c_1,c_2'}$ при фиксированном c_1 и переменном c_2'.

Упражнение 3. Найти значение c_2', соответствующее прямой $y = x + t$. ?
Ответ. $c_2' = c_2 + 2tcc_1 - c^2 c_1$.

2.6. Обобщенные характеры. Вычислим обобщенный характер χ_{c_1,c_2} унитарного неприводимого представления T_{c_1,c_2}. Согласно правилу 6 надо вычислить интеграл

$$\chi_{c_1,c_2}(\exp X) = \int_{\Omega_{c_1,c_2}} e^{2\pi i \langle F, X\rangle} \sigma \qquad (13)$$

как обобщенную функцию на G от экспоненциальной координаты $X = \log g$.

Начнем с вычисления формы σ. Из (2) получаем следующее выражение для инфинитезимального коприсоединенного действия $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$: $K_*(X_1) = 0$, $K_*(X_2) = -X_1 \dfrac{\partial}{\partial Y}$, $K_*(X_3) = -X_2 \dfrac{\partial}{\partial Y}$, $K_*(Y) = X_1 \dfrac{\partial}{\partial X_2} + X_2 \dfrac{\partial}{\partial X_3}$. Орбита Ω_{c_1,c_2} задана уравнениями (3). Выбрав $x := X_2$ и $y := Y$ как глобальные координаты на орбите, получим параметрическое представление Ω_{c_1,c_2}: $X_1 = c_1$, $X_2 = x$, $X_3 = \dfrac{x^2 + c_2}{2c_1}$, $Y = y$. В координатах x, y $\mathfrak{g}$-действие на Ω_{c_1,c_2} записывается в виде $K_*(X_1) = 0$, $K_*(X_2) = -c_1 \dfrac{\partial}{\partial y}$, $K_*(X_3) = -x \dfrac{\partial}{\partial y}$, $K_*(Y) = c_1 \dfrac{\partial}{\partial x}$. В силу определения 1 из лекции 7 в данном случае $\sigma = \dfrac{dx \wedge dy}{c_1}$. Теперь мы в состоянии вычислить интеграл (13).

Для $X = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & b & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & x & \frac{x^2+c_2}{2c_1} & 0 \end{pmatrix}$ этот интеграл записывается в виде

$$\iint e^{2\pi i (a_1 c_1 + a_2 x + a_3 \frac{c_2+x^2}{2c_1} + by)} \frac{dx\,dy}{c_1}.$$

Используя хорошо известные соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i b y} dy = \delta(b), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pi i a x^2} dx = \frac{1 + i \operatorname{sgn} a}{\sqrt{|a|}},$$

получаем окончательную формулу

$$\chi_{c_1,c_2}(g(a_1,a_2,a_3,b)) = \left| \frac{c_1}{a_3} \right|^{1/2} e^{\pi i c_1 (2a_1 - a_2^2/a_3)} (1 + i \operatorname{sgn}(a_3 c_1)) \delta(b). \tag{14}$$

Замечание 3. Этот результат можно получить чисто формальным путем. Действительно, можно рассмотреть оператор (8) как интегральный оператор с обобщенным ядром и вычислить его след интегрированием ядра по диагонали.[9] Этот подход оправдан во многих случаях в частности, он успешно применим для всех унитарных неприводимых представлений нильпотентной группы Ли и для представлений основных серий $SL(2,\mathbb{R})$. Было бы полезно установить соответствующую теорему общего характера.

2.7. Инфинитезимальные характеры. В качестве основного примера рассмотрим ту же группу G, как и выше. Известно, что алгебра $\operatorname{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ порождается двумя независимыми элементами X_1 и $X_2^2 - 2X_1X_3$. Так как X_i коммутируют, можно использовать те же выражения для образов этих полиномов в $Z(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})$. По техническим причинам более удобно в качестве образующих выбрать $A_1 = \frac{1}{2\pi i} X_1$ и $A_2 = \frac{1}{4\pi^2}(X_2^2 - 2X_1X_3)$. Мы уже знаем образы этих элементов для всех унитарных неприводимых представлений (см. п. 2.2.):

	T_{c_1,c_2}	S_c	$U_{a,b}$
A_1	c_1	0	0
A_2	$2c_1c_2$	$-c^2$	0

[9] Сравнивая эти два подхода, следует иметь в виду равенство $g(a_1,a_2,a_3,b) = \exp(\sum\limits_{i=1}^{3} a_i X_i) \exp(bY)$.

Сравним эту таблицу со значениями инвариантных полиномов $P_i = P_{A_i}$ на коприсоединенных орбитах:

	Ω_{c_1,c_2}	$\Omega^{\pm}_{0,c}$	$\Omega^{a,b}_{0,0}$
P_1	c_1	0	0
P_2	$2c_1c_2$	$-c^2$	0

Как мы видим, правило 7 отлично работает.

2.8. Мера Планшереля. Теперь вычислим меру Планшереля μ на $\widehat{G}$. Мы рассматриваем c_1, c_2 как локальные координаты на части $\widehat{G}$, состоящей из общих представлений. Оставшаяся часть имеет меру нуль, и ее можно не учитывать.

Согласно определению меры Планшереля справедливо равенство

$$\delta(g) = \int\limits_{\widehat{G}} \chi_{c_1,c_2}(g)d\mu. \tag{15}$$

Прямое вычисление μ на основе формулы (14) для обобщенного характера довольно сложно, тогда как правило 10 дает ответ немедленно:

$$\mu = \frac{1}{2}dc_1dc_2. \tag{16}$$

Действительно, из (3) и (13) следует, что для любой интегрируемой функции φ на $\mathfrak{g}^*$

$$\int\limits_{\mathfrak{g}^*} \varphi(X_1, X_2, X_3, Y)dX_1dX_2dX_3dY = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} dc_1dc_2 \int\limits_{\Omega_{c_1,c_2}} \varphi(F)\cdot\sigma.$$

Применяя преобразование Фурье, получаем равенство

$$\widehat{\varphi}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \operatorname{tr} T_{c_1,c_2}(\widehat{\varphi})\frac{dc_1dc_2}{2},$$

эквивалентное (15), где μ определена формулой (16).

2.9. Другие примеры. Мы настоятельно рекомендуем читателю (или лектору, использующему эту книгу для преподавания) самостоятельно разобрать другие примеры нильпотентных групп. Некоторые из наиболее интересных и поучительных примеров мы перечислим ниже.

1. *Группа G_n всех верхнетреугольных вещественных матриц порядка n с единичной диагональю.* Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}_n$ состоит из строго верхнетреугольных вещественных матриц (с нулевой диагональю). Классификация коприсоединенных орбит до сих пор не известна и исследование этого вопроса связано с глубокими комбинаторными задачами.

2. *Универсальная нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{n,k}$ класса нильпотентности k с n образующими.* По определению это фактор-алгебра свободной алгебры Ли с n образующими по k-й производной, порожденной всеми ком-

мутаторами длины $k+1$. Группа $G_{n,k}$ использовалась Брауном [Br] при доказательстве существования гомеоморфизма между $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ (см. п. 3.4).

3. *Алгебра Ли* $\mathfrak{w}_n$ *с базисом* $X_1, \ldots, X_n$ *и коммутационными соотношениями*

$$[X_i, X_j] = \begin{cases} (j-i)X_{i+j}, & i+j \leqslant n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствующая группа Ли W_n может быть реализована как группа преобразований φ окрестности начала координат на вещественной прямой вида

$$\varphi(x) = x \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right) + o(x^{n+1}).$$

Групповым законом служит композиция преобразований. Заметим, что 1-параметрические подгруппы, соответствующие основным векторам в $\mathfrak{w}_n$, вычисляются явно: $\exp(tX_k) : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt[k]{1-ktx^k}}$.

4. *Унипотентный радикал N параболической подгруппы P полупростой группы G* — обобщение примера 1. В этом случае получены несколько общих результатов, однако подробный анализ представлений никогда не проводился ранее.

Интересный частный случай представляет также группа $G_n^{\pm}$ верхнетреугольных матриц, которые либо симметричны, либо антисимметричны относительно второй диагонали.

3. Доказательства

Главное условие успешного применения метода орбит — это правильная геометрическая формулировка. Когда такая формулировка найдена, доказательства почти всех результатов, указанных в руководстве для пользователя, становятся технически простыми. Для нильпотентных групп доказательства основаны на индукции по размерности группы.[10]

3.1. Нильпотентные группы с одномерным центром. Нильпотентные группы Ли имеют замечательное свойство (которое они разделяют с экспоненциальными группами, см. ниже): экспоненциальное отображение взаимно однозначно. Это отображение устанавливает биекцию между подалгебрами Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ и подгруппами Ли группы G, а также между идеалами $\mathfrak{g}$ и нормальными подгруппами G.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— нильпотентная алгебра Ли. Тогда любая подалгебра* $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ *коразмерности* 1 *является идеалом.*

Доказательство. Ввиду определения нильпотентной алгебры Ли присоединенное действие $\mathfrak{g}$ задается нильпотентными операторами.[11] Если

[10] Конечно, при этом используются глубокие результаты функционального анализа и теории Ли, однако общая схема доказательств довольно естественна и проста.

[11] На самом деле это свойство является характеристическим. По теореме Энгеля, если оператор $\mathrm{ad}\,X$ нильпотентный для любого $X \in \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли.

$X \in \mathfrak{g}_0$, то оператор $\operatorname{ad} X$ нильпотентен на $\mathfrak{g}$ и сохраняет $\mathfrak{g}_0$. Следовательно, определен нильпотентный оператор в фактор-пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$. Однако это пространство одномерно и соответствующие операторы должны быть нулевыми. Следовательно, $[X,Y] \in \mathfrak{g}_0$ для любого $Y \in \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ — идеал. □

Другое свойство нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{g}$, которое вытекает из определения, заключается в том, что $\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центр $\mathfrak{z}$. В индукционной процедуре (см. ниже) важную роль играют нильпотентные алгебры Ли с одномерным центром. Опишем структуру таких алгебр.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли с одномерным центром $\mathfrak{z}$. Тогда существует базис $\{X, Y, Z, W_1, \dots, W_k\}$ в $\mathfrak{g}$, обладающий следующими свойствами:*

(a) *Z порождает $\mathfrak{z}$,*

(b) $[X,Y] = Z$, $[W_i, Y] = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Доказательство. Пусть Z — ненулевой элемент $\mathfrak{z}$. Алгебра $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ нильпотентна и, следовательно, имеет ненулевой центр $\tilde{\mathfrak{z}}$. Выберем $Y \in \mathfrak{g}$ так, что $\tilde{Y} = Y \mod \mathfrak{z}$ — ненулевой элемент $\tilde{\mathfrak{z}}$.

Так как $\tilde{Y} \neq 0$, элемент Y не будет центральным элементом $\mathfrak{g}$. Следовательно, существует $X \in \mathfrak{g}$ такой, что $[X,Y] \neq 0$. Однако $\tilde{Y}$ центральный элемент $\tilde{\mathfrak{g}}$. Поэтому Y центральный по модулю $\mathfrak{z}$. Таким образом, $[X,Y] \in \mathfrak{z}$. Заменив, если необходимо, X на cX, можно считать, что $[X,Y] = Z$.

Обозначим через $\mathfrak{g}_0$ централизатор Y в $\mathfrak{g}$. Опять используя тот факт, что Y центральный по модулю $\mathfrak{z}$, заключаем, что $\mathfrak{g}_0$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{g}$. Пусть $\{W_1, \dots, W_k\}$ — элементы $\mathfrak{g}_0$, которые вместе с Y и Z образуют базис в $\mathfrak{g}_0$. Тогда все соотношения в утверждении (b) выполняются. □

До конца этого раздела мы фиксируем следующие обозначения:

$G_0 \subset G$ — подгруппа Ли, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$; это централизатор элемента Y при присоединенном действии.

$A \subset G_0$ — нормальная абелева двумерная подгруппа G, соответствующая подалгебре Ли $\mathfrak{a}$, порожденной Y и Z.

$C = \exp \mathfrak{z}$ — центральная подгруппа G.

Теорема 2. *Пусть $(\pi, \mathcal{H})$ — унитарное неприводимое представление G. Тогда следующая альтернатива имеет место: справедливо ровно одно из следующих утверждений:*

(a) *представление π тривиально на C, т. е. $\pi(c) = 1_{\mathcal{H}}$ для всех $c \in C$,*

(b) *представление π имеет вид $\operatorname{Ind}_{G_0}^{G} \rho$, где ρ — унитарное неприводимое представление G_0.*

Доказательство. Построим сначала G-многообразие M из обычной вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. Для этого определим двойственную в смысле Понтрягина группу $M = \widehat{A}$ абелевой нормальной подгруппы $A = \exp \mathfrak{a} \subset G$.

Группа G действует на A внутренними автоморфизмами и, следовательно, действует на $M = \widehat{A}$. Опишем это действие более подробно.

Введем координаты (y, z) в векторном пространстве $\mathfrak{a}$ относительно базиса (Y, Z) и перенесем эти координаты в A, используя экспоненциальное отображение. Тогда точка $\exp(yY + zZ) \in A$ будет иметь координаты (y, z).

Двойственная группа $\widehat{A}$ состоит по определению из унитарных характеров A вида $\chi_{\mu,\lambda}(y,z) = e^{2\pi i(\mu y+\lambda z)}$. Поэтому $M = \widehat{A}$ — двумерная плоскость с координатами (μ, λ).

Лемма 3. *Пусть $g \in G$ имеет вид $g = g_0 \exp tX$, $g_0 \in G_0$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$K(g) : (\mu, \lambda) \mapsto (\mu - t\lambda, \lambda), \quad g_0 \in G_0. \tag{17}$$

Доказательство. Сначала заметим, что подгруппа G_0 действует тривиально на A и, следовательно, на M. Тогда остается вычислить действие однопараметрической подгруппы $\exp tX, x \in \mathbb{R}$ на A и $\widehat{A}$. Имеем

$$\mathrm{Ad}(\exp tX)(yY + zZ) = \exp(\mathrm{ad}\, xX)(yY + zZ) = yY + (z + ty)Z.$$

Коприсоединенное действие $K(g)$ на $\widehat{A}$ является двойственным и, следовательно, задано формулой (17). □

Доказательство теоремы 2 (продолжение). Заметим, что действие G на M ручное: G-орбиты являются прямыми $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$ и точками $(\mu, 0)$. В качестве счетного семейства G-инвариантных множеств разделяющих орбиты можно взять полосы $S_{a,b} : a < \lambda < b$ и интервалы $I_{a,b} : \lambda = 0$, $a < \mu < b$, с рациональными a и b.

Следующий шаг — построение представления Π для M, согласованного с данным унитарным представлением $(\pi, \mathcal{H})$. Пусть $f \in \mathcal{A}(M)$. Для $a \in A$ обозначим через $\widehat{f}$ функцию на A такую, что

$$\widehat{f}(y,z) = \int_M f(\mu,\lambda)\chi_{\mu,\lambda}(y,z)d\mu \wedge d\lambda.$$

Полагаем

$$\Pi(f) = \pi(\widehat{f}) = \int_A \widehat{f}(y,z)\pi(\exp(yY + zZ))dy \wedge dz.$$

Справедливы равенства

$$\Pi(f_1 f_2) = \pi(\widehat{f_1 f_2}) = \pi(\widehat{f_1} * \widehat{f_2}) = \pi(\widehat{f_1})\pi(\widehat{f_2}) = \Pi(f_1)\Pi(f_2),$$
$$\Pi(\overline{f}) = \pi(\widehat{\overline{f}}) = \pi(\widehat{f})^{\vee} = \pi(f)^*.$$

Мы видим, что $(\Pi, \mathcal{H})$ является представлением M. Условие согласования вытекает из определения действия G на M.

Теперь предположим, что π неприводимо. Согласно теореме 6 из лекции 4 представление Π для M является, фактически, представлением некоторой G-орбиты $\Omega \subset M$. Если эта орбита — точка $(\mu, 0) \in M$, то π тривиально на C. Если Ω — прямая $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$, то π индуцируется стабилизатором некоторой точки $(\mu, \lambda) \in \Omega$, который не зависит от μ и равен в точности G_0. □

В силу теоремы 2 в обоих случаях (a) и (b) изучение унитарного неприводимого представления π группы G сводится к изучению некоторого унитарного неприводимого представления меньшей группы: либо фактор-группы G/C, либо подгруппы $G_0 \subset G$.

3.2. Основная процедура индукции. В этом разделе мы докажем большинство результатов, представленных в "руководстве для пользователя". Доказательство проводится индукцией по размерности G. Иногда это довольно длинный, хотя и прямой путь. Конечно, более концептуальные доказательства были бы лучше, но на настоящий момент такие доказательства получены лишь для части результатов.

В случае $\dim G = 1$ имеем $G \simeq \mathbb{R}$ и все утверждения легко проверить.

Заметим, что в ходе проверки надо использовать следующее хорошо известное, но нетривиальное

Предложение 1. *Группа, двойственная в смысле Понтрягина группе* $\mathbb{R}$, *изоморфна* $\mathbb{R}$. *Другими словами, все унитарные неприводимые представления* $\mathbb{R}$ *одномерны и имеют вид*

$$\pi_\lambda(x) = e^{2\pi i\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Для интересующегося читателя мы приведем короткое доказательство этого утверждения.

Во-первых, любое семейство коммутирующих унитарных операторов в гильбертовом пространстве размерности $\geqslant 2$ всегда имеет общее нетривиальное инвариантное подпространство. Это означает, что унитарное неприводимое представление абелевой группы должно быть одномерным.

Во-вторых, свойство мультипликативности $\chi(t+s) = \chi(t) \cdot \chi(s)$ приводит к дифференциальному уравнению $\chi'(t) = a \cdot \chi(t)$, где $a = \chi'(0)$.[12] Таким образом, $\chi(t) = c \cdot e^{at}$. Так как $|\chi| \equiv 1$ и $\chi(0) = 1$, константа a чисто мнимая и $c = 1$. Следовательно, $\chi(t)$ имеет вид (18).

Теперь мы можем доказать все основные результаты, применив индукцию по размерности нильпотентной группы Ли G.

Теорема индукции. *Допустим, что правила* 1–10 *выполняются для всех связных односвязных групп Ли размерности* $< n$. *Тогда они выполняются также для группы* G *размерности* n.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ и $\mathfrak{z}$ — центр $\mathfrak{g}$. Рассмотрим два случая. $\dim\mathfrak{z} > 1$ и $\dim\mathfrak{z} = 1$.

Случай 1: $\dim\mathfrak{z} > 1$. Тогда группа G не имеет точных унитарных неприводимых представлений. Действительно, если $\dim\mathfrak{z} = k > 1$ и $Z_1, \ldots, Z_k$ — базис в $\mathfrak{z}$, то для любого унитарного неприводимого представления π группы G операторы $\pi\big(\exp(\sum_{j=1}^{k} x_i Z_j)\big)$ скалярные и, следовательно, имеют вид $\pi\big(\exp(\sum_{i=1}^{k} x_j Z_j)\big) = \exp(2\pi i \sum_j \lambda_j x_j)$.

[12] Мы не знаем *априори*, что χ гладкая, однако мы можем рассмотреть χ как обобщенную функцию и использовать тот факт, что все обобщенные решения уравнения являются фактически обычными гладкими функциями. С технической точки зрения более удобно иметь дело с $\log\chi$ вместо χ.

Пусть $\mathfrak{z}_0 = \{\sum\limits_j x_j Z_j \mid \sum\limits_j \lambda_j x_j = 0\}$. Тогда $C_0 = \exp \mathfrak{z}_0$ содержится в ядре π. Поэтому можно рассматривать π как композицию $\widetilde{\pi} \circ p$, где $p : G \to \widetilde{G} = G/C_0$ — проекция на фактор-группу и $\widetilde{\pi}$ — некоторое унитарное неприводимое представление $\widetilde{G}$.

Следующий шаг — проверка правил 1–10 для группы G при условии, что эти правила выполняются для $\widetilde{G}$. Некоторые правила, а именно, правила 2–4 и 6–9 проверяются очевидным образом. Рассмотрим, например, правило 2. По условию оно верно для $\widetilde{G}$. Тогда любое унитарное неприводимое представление $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{G}$ имеет вид $\widetilde{T} = T_{\widetilde{\Omega}} = \operatorname{Ind}_{\widetilde{H}}^{\widetilde{G}} U_{\widetilde{F},\widetilde{H}}$ для некоторой орбиты $\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{\mathfrak{g}}^*$ и точки $\widetilde{F} \in \widetilde{\Omega}$.

Остается проверить, что $T := \widetilde{T} \circ p = \operatorname{Ind}_H^G U_{F,H}$ для $H := p^{-1}(\widetilde{H})$, где $\Omega = p_*(\widetilde{\Omega})$ и $F \in p_*(\widetilde{\Omega})$. (Здесь p_* обозначает каноническую проекцию $\mathfrak{g}^*$ на $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$.) Эта проверка — всего лишь простое упражнение на определение индуцированного представления, и мы оставляем его интересующемуся (или скептически настроенному) читателю.

Эта же схема работает для других правил, исключая правила 1, 5 и 10. Правило 5 для G следует из правила 3 для $G \times G$, так как $T_1 \otimes T_2 = \operatorname{Res}_G^{G\times G}(T_1 \times T_2)$.

Итак, остается проверить правила 1 и 10. Заметим, что оба правила обладают общим свойством: они относятся не к индивидуальному представлению, а к целому множеству $\widehat{G}$. Чтобы доказать, что $\widehat{G} = \mathcal{O}(G)$ как множество, достаточно проделать следующие действия:

(i) разложить множество $\widehat{G}$ всех унитарных неприводимых представлений в соответствии с их ограничениями на Z,

(ii) разложить множество $\mathcal{O}(G)$ коприсоединенных орбит в соответствии с их проекциями на $\mathfrak{z}^*$,

(iii) установить биекции между соответствующими частями.

Несложно обосновать эту процедуру, и мы оставим доказательство читателю в качестве простого упражнения. Гораздо сложнее установить, что окончательная биекция — гомеоморфизм, и мы обсудим это ниже.

Правило 10 следует из правила 6, которое дает явную формулу для обобщенного характера. Действительно, если мы рассмотрим характеры как распределения, по формуле Планшереля получим разложение δ-функции, сосредоточенной в $e \in G$, на обобщенные характеры унитарных неприводимых представлений

$$\delta(g) = \int\limits_{\widehat{G}} \chi_\lambda(g) d\mu(\lambda).$$

Используя преобразование Фурье в экспоненциальных координатах и учитывая правило 6, можем преобразовать последнюю формулу к виду

$$\int\limits_{\mathfrak{g}^*} f(F) dF = \int\limits_{\mathcal{O}(G)} \left(d\mu(\Omega) \int\limits_{\Omega} f(F) \operatorname{vol}_\Omega(F) \right). \tag{19}$$

Это в точности правило 10 для G.

Случай 2: $\dim \mathfrak{z} = 1$. Тогда мы имеем альтернативу из теоремы 2. Если имеет место утверждение (a) теоремы 2, то правила 2–6 и 8, 9 проверяются в точности так же, как в случае 1. Это верно и в случае (b), но по другой причине. Для иллюстрации докажем правило 6, сохранив обозначения из теоремы 2. Пусть $\pi = \mathrm{Ind}_{G_0}^{G} \rho$ — унитарное неприводимое представление G. Пусть ρ действует в гильбертовом пространстве V. Тогда π может быть реализовано в $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, V, dx)$ по формуле

$$(\pi(g_0 \exp tX)f)(x) = \rho(\exp xX g_0 (\exp xX)^{-1}) f(x+t). \tag{20}$$

В следующем разделе мы докажем существование обобщенного характера и покажем, что он вычисляется по стандартной формуле с помощью обобщенного ядра $\pi(g)$, а здесь проведем соответствующее вычисление.

Из (20) получаем формулу для обобщенного ядра π в терминах обобщенного ядра ρ:

$$K_\pi(g_0 \exp(tX)|x, y) = K_\rho(\exp xX g_0 (\exp xX)^{-1}) \delta(x+t-y).$$

Тогда имеет место формула

$$\chi_\pi(g_0 \exp tX) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\rho(\exp xX g_0 (\exp xX)^{-1}) dx, \tag{21}$$

которая является точным аналогом формулы Фробениуса для характера индуцированного представления конечной группы.

Теперь мы применим правило 6 к группе G_0 и запишем

$$\chi_\rho(\exp X_0) = \int_{\Omega_0} e^{2\pi i \langle F_0, X_0 \rangle} \mathrm{vol}_{\Omega_0}(F_0).$$

Учитывая (21), получаем формулу

$$\begin{aligned} \chi_\pi(\exp X_0 \exp tX) &= \delta(t) \int_{\mathbb{R}} \left(dx \int_{\Omega_0} e^{2\pi i \langle K(\exp xX) F_0, X_0 \rangle} \mathrm{vol}_{\Omega_0}(F_0) \right) \\ &= \delta(t) \int_{\mathbb{R}} \left(dx \int_{\Omega_x} e^{2\pi i \langle F_x, X_0 \rangle} \mathrm{vol}_{\Omega_x}(F_x) \right), \end{aligned} \tag{22}$$

где $\Omega_x := K(\exp xX)\Omega_0$ и F_x обозначает общий элемент Ω_x.

С другой стороны, правило 6 для π выглядит следующим образом:

$$\chi_\pi(\exp(X_0 + tX)) = \int_{\Omega} e^{2\pi i \langle F, X_0 + tX \rangle} \mathrm{vol}_\Omega(F).$$

Однако орбита Ω является цилиндром, где $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \Omega_x$ — базис и $\mathbb{R} \cdot X$ — директриса (см. рис. 1).

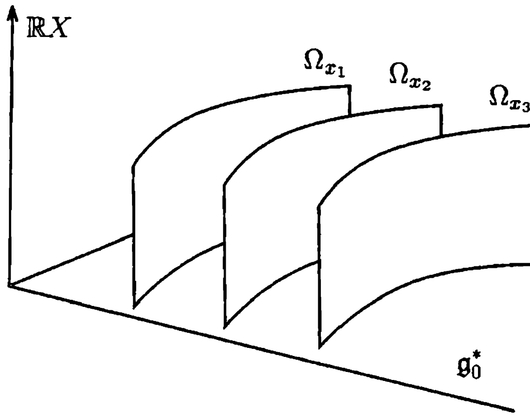

Рис 1

Общая точка Ω имеет вид $F = F_x + sF_1$, где $F_x \in \Omega_x$, $s \in \mathbb{R}$, $\langle F_1, X\rangle = 1$, $\langle F_1, X_0\rangle = 0$ при $X_0 \in \mathfrak{g}_0$. Поэтому интеграл по Ω в (22) принимает вид

$$\chi_\pi(\exp(X_0 + tX)) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(dx ds \int_{\Omega_x} e^{2\pi i (F_x + sF_1, X_0 + tX)} \operatorname{vol}_{\Omega_x}(F_x) \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(dx ds \int_{\Omega_x} e^{2\pi i ((F_x, X_0) + st)} \operatorname{vol}_{\Omega_0}(F_0) \right) = \delta(t) \int_{\mathbb{R}} \left(dx \int_{\Omega_x} e^{2\pi i (F_x, X_0)} \operatorname{vol}_{\Omega_x}(F_x) \right).$$

Последнее выражение совпадает с (22) и доказывает правило 6 для G.

Теперь обратимся к правилу 7. Возникающие трудности с проверкой этого правила обусловлены тем, что центр $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ меняется, когда мы переходим от $\mathfrak{g}$ к подалгебре $\mathfrak{g}_0$ или к фактор-алгебре $\widetilde{\mathfrak{g}}$. К счастью, это изменение можно контролировать.

Удобно отождествить $Z(\mathfrak{g})$ с $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$, $Z(\mathfrak{g}_0)$ с $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}_0)^{G_0}$ и $Z(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ с $\mathrm{Pol}(\widetilde{\mathfrak{g}})^{\widetilde{G}}$. Рассмотрим случай, когда мы переходим от $\mathfrak{g}$ к фактор-алгебре $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — подалгебра $\mathfrak{z}$. Обозначим через p проекцию $\mathfrak{g}$ на $\widetilde{\mathfrak{g}}$ (а также проекцию G на $\widetilde{G}$). Тогда двойственное отображение p^* отождествляет $\widetilde{\mathfrak{g}}^*$ с подпространством $\mathfrak{c}^\perp \subset \widetilde{\mathfrak{g}}^*$. Пусть Ω — G-орбита в этом подмножестве. Обозначим через $p' : S(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*) \to S(\widetilde{\mathfrak{g}}) \cong \mathrm{Pol}(\widetilde{\mathfrak{g}}^*)$ проекцию алгебр, которая соответствует проекции p множеств. Для любого элемента $A \in Z(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)^G$ имеем $p(A) \in Z(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Следовательно, правило 7 выполняется для $p(A)$: при унитарном неприводимом представлении $\widetilde{T}_\Omega$ группы $\widetilde{G}$ он переходит в скаляр $P_{p(A)}(\Omega)$. Но это означает, что при унитарном неприводимом представлении $T_\Omega := \widetilde{T}_\Omega \circ p$ элемент A переходит в $P_A(\Omega)$.

Теперь пусть реализуется возможность (b) альтернативы из теоремы 2. В силу леммы 2 $Z(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}_0)^{\exp \mathbb{R}\cdot X}$. Пусть π — унитарное неприводимое представление группы G, индуцированное унитарным неприводимым представлением ρ группы G_0. Предположим, что ρ соответствует некоторой орбите $\Omega_0 \subset \mathfrak{g}_0^*$ и обозначим через Ω орбиту, соответствующую π.

В силу формулы (20) при представлении π любой элемент $A \in Z(\mathfrak{g})$ переходит в скалярный оператор с тем же самым собственным значением, как у $\rho(A)$. Однако согласно правилу 7 последний совпадает с $P_A(\Omega_0)$. Мы можем рассматривать $P_A \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}_0^*)$ как полином на $\mathfrak{g}^*$, который не зависит от координаты X. Более того, этот полином инвариантен при действии $\exp\mathbb{R}\cdot X$. Следовательно, на Ω этот полином принимает такие же значения, как на Ω_0 (см. рис. 1 выше). □

3.3. Существование обобщенных характеров. Докажем существование обобщенных характеров для всех унитарных неприводимых представлений π и покажем, что они могут быть выражены в терминах обобщенных ядер операторов $\pi(g)$, $g \in G$. Мы выведем этот результат из следующей теоремы, которая представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Унитарное неприводимое представление π группы G, соответствующее $2n$-мерной орбите, может быть реализовано в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ так, что*

(a) *$\mathcal{H}^\infty$ совпадает с пространством Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,*

(b) *образ $U(\mathfrak{g})$ при π совпадает с алгеброй A_n всех дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.*

Доказательство. Если представление π не является локально точным (т. е. имеет ядро положительной размерности), то утверждение теоремы сводится к аналогичному утверждению для группы меньшей размерности. Таким образом, достаточно рассмотреть представление $(\pi, \mathcal{H})$ группы Ли G с одномерным центром, для которого имеет место утверждение (b) альтернативы из теоремы 2. Мы используем обозначения из формулировки и доказательства теоремы 2.

Без потери общности можно считать константу μ равной нулю. Тогда в силу (20) образы базисных элементов $\mathfrak{g}$ при π_* имеют вид $\pi_*(X) = \dfrac{d}{dx}$, $\pi_*(Y) = 2\pi i\lambda x$, $\pi_*(Z) = 2\pi i\lambda$, $\pi_*(W_j) = \rho_*(\mathrm{Ad}(\exp xX)W_j)$. Так как действие $\mathrm{ad}\, X$ в $\mathfrak{g}$ нильпотентно, элементы $\widetilde{W_j} := \mathrm{Ad}(\exp xX)W_j = \exp(\mathrm{ad}\, xX)W_j$ могут быть записаны как линейные комбинации $Y, Z, W_1, \ldots, W_k$, коэффициенты которых суть полиномы от x. При этом постоянные члены $\widetilde{W_j}$ совпадают с W_j.

Используя предположение индукции, выберем реализацию V в виде $L^2(\mathbb{R}^m, d^m y)$ так, что $\rho_*(W_j)$ порождают алгебру всех дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами от переменных $y_1, \ldots, y_m$. При выбранной реализации образ $U(\mathfrak{g})$ содержится в алгебре дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами от $x, y_1, \ldots, y_m$. Более того, этот образ содержит операторы x и ∂_x. Следовательно, вместе с $\rho_*(\widetilde{W_j})$ этот образ содержит $\rho_*(W_j)$. Действительно, постоянный член любого полинома P от x может быть выражен как линейная комбинация

$P, x\partial_x P, \ldots, (x\partial_x)^{\deg P} P$. Таким образом, $\pi(U(\mathfrak{g}))$ содержит все дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами.

Мы доказали второе утверждение теоремы. Первое утверждение справедливо, так как для любой обобщенной функции (в частности, для любой $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$) условия $D\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ для любого $D \in A_n$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны. □

На следующем шаге нам потребуется пример дифференциального оператора D с полиномиальными коэффициентами в $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, для которого L^{-1} существует и имеет след. Сначала исследуем случай $n = 1$. Рассмотрим оператор $H = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$.

Лемма 4. *Спектр оператора H простой и состоит из всех нечетных положительных целых чисел* $1, 3, 5, \ldots$.

Доказательство. Определим так называемые операторы **рождения** и **уничтожения**

$$a = x + \frac{d}{dx}, \qquad a^* = x - \frac{d}{dx}. \tag{23}$$

Оставляем читателю проверку следующих соотношений:

$$H = a^*a + 1 = aa^* - 1, \quad Ha = a(H - 2), \quad Ha^* = a^*(H + 2). \tag{24}$$

В силу последних двух соотношений в (24) для собственной функции f оператора H, соответствующей собственному значению λ, функции af и a^*f также являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda - 2$ и $\lambda + 2$.

Далее, уравнения $af = 0$, $a^*f = 0$ имеют соответственно решения $f = ce^{-x^2/2}$ и $f = ce^{x^2/2}$. Следовательно, оператор рождения a^* имеет нулевое ядро в $L^2(\mathbb{R}, dx)$, а оператор уничтожения a имеет одномерное ядро, порожденное $f_0(x) = e^{-x^2/2}$. Из первого соотношения в (24) следует $Hf_0 = f_0$. Полагая $f_n := (a^*)^n f_0$, получаем $Hf_n = (2n+1)f_n$.

Остается показать, что линейная оболочка V функций $f_0, , f_1, \ldots$ плотна в $L^2(\mathbb{R}, dx)$, откуда следует , что оператор H имеет точечный спектр с указанными в формулировке леммы свойствами.

Пусть $\overline{V}$ — замыкание V. Так как V инвариантно относительно a и a^*, $\overline{V}$ инвариантно относительно $\frac{1}{2}(a + a^*) = x$ и $\frac{1}{2}(a - a^*) = \frac{d}{dx}$. Следовательно, $\overline{V}$ инвариантно относительно переносов и умножений на функции.

Таким образом, ортогональный проектор P на $\overline{V}$ коммутирует с переносами и умножениями на функции. Однако любой оператор, коммутирующий с умножениями, сам является умножением на некоторую функцию φ и коммутирует с переносами, только если φ — константа. Итак, P — скалярный оператор. Но этот оператор является ортогональным проектором на ненулевое подпространство. Поэтому $P = 1$ и $\overline{V} = L^2(\mathbb{R}, dx)$. □

Поскольку оператор H имеет ограниченный компактный обратный оператор H^{-1} и H^{-1} является оператором Гильберта — Шмидта (принадлежит классу $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}, dx)))$, заключаем, что H^{-2} является оператором со следом.

В пространстве $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ определим оператор

$$H_n = \prod_{k=1}^{n} (-\partial_k^2 + x_k^2).$$

Тогда H_n^{-2} имеет след, так как является тензорным произведением n операторов со следом.

Теперь все готово для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть G — связная нильпотентная группа Ли, и пусть $(\pi, \mathcal{H})$ — соответствующее унитарное неприводимое представление. Определим пространство Шварца $\mathcal{S}(G)$, используя диффеоморфизм* $\exp : \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g} \to G$. *Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ оператор $\pi(\varphi)$ имеет след в $\mathcal{H}$. (Другими словами, характер χ_π является распределением умеренного роста на G.)*

Доказательство. Один путь доказательства: используя теорему 3, показать, что $\mathcal{H}$ может быть реализовано как $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ так, что $\pi(\varphi)$ является интегральным оператором с ядром из $\mathcal{S}(R^{2n})$. Оставим этот путь доказательства читателю.

Другой путь — более прямой. Выберем элемент $A \in U(\mathfrak{g})$ такой, что $\pi_*(A)$ преобразует A в оператор B, для которого обратный оператор B^{-1} имеет след (например, оператор H_n^2, рассмотренный выше). Тогда для $\varphi \in \mathcal{S}(G)$ можно написать $\pi(\varphi) = B^{-1}B\pi(\varphi) = B^{-1}\pi_*(A)\pi(\varphi) = B^{-1}\pi(A\varphi)$. В последнем члене первый множитель является оператором со следом, тогда как второй оператор ограничен. Таким образом, $\pi(\varphi)$ имеет след. Более того, можно оценить следовую норму оператора $\pi(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \|\pi(\varphi)\|_{\mathrm{tr}} &= \max_{\|C\| \leqslant 1} |\operatorname{tr}(\pi(\varphi)C)| = \max_{\|C\| \leqslant 1} |\operatorname{tr}(B^{-1}\pi(A\varphi)C)| \\ &\leqslant \operatorname{tr} B^{-1} \|\pi(A\varphi)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \operatorname{tr} B^{-1} \|A\varphi\|_{L^1(G)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Теорема доказана. □

3.4. Гомеоморфизм $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$. Пусть $\widetilde{G}$ — множество всех классов эквивалентности унитарных (не обязательно неприводимых) представлений топологической группы G. Для краткости мы используем одно и то же обозначение для представлений и их классов эквивалентности.

Напомним определение топологии в $\widetilde{G}$.

Определение 1. Окрестность данного представления (T, H) определяется следующими данными:

(i) компактное подмножество $K \subset G$,
(ii) положительное число ε,
(iii) конечное множество векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ в H.

Окрестность $U_{K,\varepsilon,X}(T)$ представления (T, H) состоит из всех унитарных представлений (S, V) таких, что существует конечное множество $Y =$

$\{y_1, \ldots, y_n\}$ векторов в V, удовлетворяющих неравенству

$$|(T(g)x_i, x_j)_H - (S(g)y_i, y_j)_V| < \varepsilon \quad \text{для любых } g \in K. \tag{26}$$

Множество $\widehat{G}$ унитарных неприводимых представлений является подмножеством $\widetilde{G}$ и наследует топологию из $\widetilde{G}$.

Напомним еще одно понятие из общей теории представлений. Будем говорить, что унитарное неприводимое представление S **слабо содержится** в унитарном представлении T, если точка $S \in \widehat{G} \subset \widetilde{G}$ содержится в замыкании точки $T \in \widetilde{G}$.

? Упражнение 4. Одномерное представление $t \mapsto e^{2\pi i\lambda t}$ для $\mathbb{R}$ слабо содержится в регулярном представлении T для $\mathbb{R}$, действующего переносами в $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Указание. Сделать преобразование Фурье и рассмотреть δ-образную последовательность в двойственном пространстве $L^2(\mathbb{R}^*, d\lambda)$.

Задача, изучаемая в этом разделе, распадается на две части.

(i) Доказать, что отображение $\mathcal{O}(G) \to \widehat{G}$ непрерывно.

(ii) Доказать, что обратное отображение непрерывно.

Задача (i) легче и может быть решена следующим образом. Предположим, что последовательность орбит $\{\Omega_n\}$ сходится к пределу Ω. Согласно определению фактор-топологии в $\mathcal{O}(G)$ это означает, что существует последовательность функционалов $\{F_n\}$ такая, что $F_n \in \Omega_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = F \in \Omega$.

Пусть $\mathfrak{h}_n$ — подалгебра максимальной размерности, подчиненная F_n, и $H_n = \exp \mathfrak{h}_n$ — соответствующая подгруппа G. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что все $\mathfrak{h}_n$ одной и той же коразмерности r и имеют предел $\mathfrak{h}$ в грассманиане $G_r(\mathfrak{g})$. Очевидно, что $\mathfrak{h}$ подчинена F. Однако может случиться так, что данная подалгебра имеет не максимальную возможную размерность (так как $\operatorname{rk} B_F$ может быть меньше, чем $\operatorname{rk} B_{F_n} = 2r$).

Используя лемму 5 из п. 5.2 лекции 7, можно построить подалгебру $\widetilde{\mathfrak{h}}$ максимальной размерности, подчиненную F, такую, что $\mathfrak{h} \subset \widetilde{\mathfrak{h}}$, Следовательно, $\widetilde{H} = \exp \widetilde{\mathfrak{h}} \supset H$. Обозначим через T (соответственно $\widetilde{T}$) индуцированное представление $\operatorname{Ind}_H^G U_{F,H}$ (соответственно унитарное неприводимое представление $T_\Omega = \operatorname{Ind}_{\widetilde{H}}^G U_{F,\widetilde{H}}$). Надо показать, что $\widetilde{T}$ содержится в пределе[13] $\lim\limits_{n\to\infty} T_{\Omega_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Ind}_{H_n}^G U_{F_n,H_n}$.

Лемма 5. *$\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ в $\widetilde{G}$ содержит T.*

Схема доказательства. Так как последовательность $\mathfrak{h}_n$ стремится к $\mathfrak{h}$ и все $\mathfrak{h}_n$ одной и той же размерности, мы можем отождествить $X_n = H_n \backslash G$ со стандартным пространством $\mathbb{R}^n$, так что действия G на $\mathbb{R}^n$ появляющиеся ввиду отождествления $\mathbb{R}^n \cong X_n$, имеют предел. Очевидно, что этот предел соответствует отождествлению $\mathbb{R}^n \cong X = H\backslash G$. Утверждение леммы следует из явной конструкции, даваемой правилом 2. □

[13]Поскольку $\widehat{G}$ не обязательно хаусдорфово, предел последовательности может оказаться не точкой, а некоторым замкнутым подмножеством $\widehat{G}$.

В случае $\operatorname{rk} B_F = 2r = \operatorname{rk} B_{F_n}$ имеем $\widetilde{H} = H, \widetilde{T} = T$ и требуемое соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ доказано.

Предположим, что $\operatorname{rk} B_F < 2r$. Тогда H — собственная подгруппа $\widetilde{H}$. Поэтому T — приводимое представление.

Лемма 6. *Представление $\widetilde{T}$ слабо содержится в T и, следовательно, содержится в $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.*

Схема доказательства. Сначала заметим, что $U_{F,\widetilde{H}}$ слабо содержится в $\operatorname{Ind}_H^{\widetilde{H}} U_{F,H}$. Это фактически эквивалентно утверждению из упражнения 4. В дальнейшем мы будем использовать более общий факт, доказанный Феллом.

Предложение 2 [F]. *Функтор индукции Ind_H^G определяет непрерывное отображение из $\widehat{H}$ в $\widehat{G}$.*

Чтобы объяснить идею доказательства второй части, мы опишем подход, примененный Брауном [Br]. Он основан на двух простых наблюдениях.

1. Любая нильпотентная алгебра Ли может рассматриваться как фактор $\mathfrak{g}_{n,k}$ (см. пример 3 из п. 2.9) для некоторых n и k. Следовательно, топологическое пространство $\widehat{G}$ является подпространством $\widehat{G_{n,k}}$ с наследственной топологией.

2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{n,k}$ имеет большую группу автоморфизмов индуцированных автоморфизмами свободной алгебры Ли.

В силу первого наблюдения можно свести общую задачу к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{n,k}$, тогда как благодаря второму можно доказать теорему для $\mathfrak{g}_{n,k}$ индукцией по k. □

Лекция 9

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ ЛИ

1. Экспоненциальные группы Ли 206
1.1. Условие Пуканского 206
1.2. Обобщенные характеры 208
1.3. Инфинитезимальные характеры 211
2. Общие разрешимые группы Ли 211
2.1. Ручные и дикие группы Ли 211
2.2. Ручные разрешимые группы Ли 215
3. Пример. Бубновая алгебра Ли 218
3.1. Присоединенные орбиты бубновой алгебры Ли 218
3.2. Представления, соответствующие общим орбитам 219
3.3. Представления, соответствующие цилиндрическим орбитам 222
4. Поправки к другим правилам 223
4.1. Правила 3–5 223
4.2. Правила 6, 7 и 10 223

1. Экспоненциальные группы Ли

Большинство предписаний руководства для пользователя (именно, правила 1, 3–5, 8, 9) остаются справедливыми и в более общей ситуации.

Эти результаты были получены в основном французской школой (см. [BCD]). Справедливость правил 3–5 впервые была установлена в [Bu]. Гомеоморфизм $\widehat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ установлен недавно в [LL].

Что касается правил 2, 6, 7 и 10, они требуют модификации, которые мы обсудим ниже.

1.1. Условие Пуканского. В правиле 2 требуется сделать важную поправку. Чтобы ее сформулировать, нам понадобится следующее

Определение 1. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{h}$, подчиненная $F \in \mathfrak{g}^*$, удовлетворяет **условию Пуканского**, если

$$p^{-1}(p(F)) = F + \mathfrak{h}^{\perp} \subset \Omega_F, \tag{1}$$

т. е. прообраз $p(F)$ целиком лежит в одной G-орбите.

Модифицированное правило 2 отличается от исходного только тем, что $\mathfrak{h}$ должна удовлетворять условию Пуканского.

Необходимость следует из правила 4. Согласно этому правилу спектр индуцированного представления $\operatorname{Ind}_H^G U_{F,H}$ состоит из единственной точки тогда и только тогда, когда выполняется условие Пуканского. В этом случае $\operatorname{Ind}_H^G U_{F,H}$ должно быть кратным унитарного неприводимого представления, ассоциированного с Ω_F.

Принимая во внимание функциональную размерность (правило 9), заключаем, что кратность конечна (фактически, равна 1), если справедливо равенство

$$\operatorname{codim}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h} = \frac{1}{2} \dim \Omega_F. \tag{2}$$

Таким образом, (1) и (2) дают необходимое и достаточное условие равенства

$$T_{\Omega_F} = \operatorname{Ind}_H^G U_{F,H}. \tag{3}$$

Мы не включили условие Пуканского в исходное правило 2 ввиду следующего факта.

Теорема 1. *Для нильпотентных алгебр Ли условие Пуканского* (1) *всегда выполняется.*

Выведем это утверждение из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли, подчиненная F, коразмерности $\frac{1}{2}\dim\Omega$ в $\mathfrak{g}$. Тогда аффинное многообразие $F + \mathfrak{h}^\perp$ имеет открытое пересечение с Ω_F (т. е. выполняется локальная версия условия Пуканского).*

Доказательство вытекает из рассмотрения H-орбиты F, где $H = \exp\mathfrak{h}$. Проверим, что эта орбита содержится в $F + \mathfrak{h}^\perp$. Для любых $X, Y \in \mathfrak{h}$ и $h = \exp(X)$ имеем

$$\langle K(h)F, Y\rangle = \langle F, \operatorname{Ad}(h)^{-1}Y\rangle = \langle F, e^{ad(-X)}Y\rangle = \langle F, Y\rangle.$$

Таким образом, F и $K(h)F$ имеют одни и те же значения на $\mathfrak{h}$. Следовательно, разность принадлежит $\mathfrak{h}^\perp$.

Теперь сравним размерности $K(H)F$ и $\mathfrak{h}^\perp$. Первая равна $\dim H - \dim \operatorname{Stab}(F) = \dim H - \dim G + \dim\Omega_F$, а вторая равна $\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{h}$. Размерности равны в силу (2), откуда следует, что $K(H)$ сохраняет $F + \mathfrak{h}^\perp$ и $K(H)$-орбита функционала F открыта в $F + \mathfrak{h}^\perp$. Теперь мы можем заключить, что пересечение $\Omega_F \bigcap (F + \mathfrak{h}^\perp)$ содержит окрестность F в $F + \mathfrak{h}^\perp$. Те же аргументы можно применить к любой точке $F_1 \in F + \mathfrak{h}^\perp$. Следовательно, пересечение $\Omega_F \bigcap (F + \mathfrak{h}^\perp)$ открыто в $F + \mathfrak{h}^\perp$. □

Лемма 2. *Пусть G — унипотентная подгруппа Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$. Тогда все G-орбиты в $\mathbb{R}^n$ являются аффинными алгебраическими подмногообразиями $\mathfrak{g}^*$ (т. е. определены системой полиномиальных уравнений).*

Доказательство проводится индукцией по n (см. детали в [Kil]). □

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 для нильпотентной группы Ли все коприсоединенные орбиты замкнуты. Поэтому пересечение $K(G)F \cap (F + \mathfrak{h}^{\perp})$ замкнуто в $(F + \mathfrak{h}^{\perp})$. Однако согласно лемме 1 оно также открыто. Таким образом, оно должно совпадать с $(F + \mathfrak{h}^{\perp})$. □

Для общих экспоненциальных групп лемма 2 уже не остается верной (см. пример 1 ниже), и мы должны включить условие Пуканского в формулировку правила 2.

Теорема 2 (Пуканский). *Модифицированное правило* 2 *справедливо для всех экспоненциальных групп Ли.*

Доказательство проводится по той же схеме, которая использовалась в лекции 8 при доказательстве правила 2 для нильпотентных групп Ли. Однако в данном случае рассуждение гораздо сложнее, и потому мы опустим его, рекомендуя обратиться интересующемуся читателю к [P1], [BCD] за подробностями. □

1.2. Обобщенные характеры. Теперь мы рассмотрим правило 6, которое требует корректировки в силу двух причин, указанных ниже.

Первая причина: для ненильпотентных экспоненциальных групп обобщенные характеры унитарных неприводимых представлений не обязательно определены корректно как распределения. Может оказаться, что оператор $T(\varphi)$ не имеет следа даже для $\varphi \in C_c^{\infty}(G)$.

Объяснение этого феномена с точки зрения метода орбит очень простое. Коприсоединенные орбиты уже не будут замкнутыми подмногообразиями $\mathfrak{g}^*$. Следовательно, форма объема, ассоциированная с симплектической структурой на орбите, может быть сингулярной на границе и интегральная формула в правиле 6 тогда не будет определять распределение на G.

Таким образом, мы должны сузить область определения обобщенного характера, налагая дополнительные условия на пробные функции $\varphi \in C_c^{\infty}(G)$. В простейшем случае примера 1 дополнительное условие очень просто и естественно: **преобразование Фурье**

$$\widetilde{\varphi}(F) = \int_{\mathfrak{g}} \varphi(\exp X) e^{2\pi i \langle F, X \rangle} dX \tag{4}$$

должно обращаться в нуль на границе орбиты.

Вторая причина: для нильпотентной группы преобразование Фурье $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, заданное формулой (4), определяет унитарное преобразование из $L^2(G, dg)$ в $L^2(\mathfrak{g}^*, dF)$, где dg — мера Хаара на G и dF — соответствующая мера Лебега на $\mathfrak{g}^*$. В терминах этого преобразования правило 6 можно выразить следующим образом:

$$\langle \chi_\Omega, \varphi \rangle := \operatorname{tr} T_\Omega(\varphi) = \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}(F) \frac{\sigma^r}{r!}, \quad r = \frac{\dim \Omega}{2}. \tag{5}$$

Правило 6 можно также сформулировать следующим образом: *Преобразование Фурье характера χ_Ω является канонической мерой на коприсоединенной орбите Ω.*

Если группа не является нильпотентной, следует подправить преобразование Фурье (4), принимая во внимание более сложное соотношение между инвариантными мерами на G и $\mathfrak{g}^*$.

Для неунимодулярной группы плотности правой и левой мер Хаара имеют следующую запись в канонических координатах:

$$d_r(\exp X) = \det\left(\frac{e^{\operatorname{ad} X} - 1}{\operatorname{ad} X}\right) dX, \quad d_l(\exp X) = \det\left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}\right) dX.$$

Заметим, что для унимодулярной группы оба выражения можно записать в виде $q(X)dX$, где

$$q(X) = \det\left(\frac{\sinh(\operatorname{ad} X/2)}{\operatorname{ad} X/2}\right).$$

Это аналитическая функция на $\mathfrak{g}$, нули которой совпадают с сингулярными точками экспоненциального отображения. Для экспоненциальной группы $q(X)$ всюду положительна, и поэтому функция

$$p(X) = \sqrt{q(X)} = \left(\det\left(\frac{\sinh(\operatorname{ad} X/2)}{\operatorname{ad} X/2}\right)\right)^{1/2}, \quad p(0) = 1, \tag{6}$$

корректно определена и аналитична.

Определим **модифицированное преобразование Фурье** следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}(F) = \int_{\mathfrak{g}} e^{2\pi i \langle F, X\rangle} \varphi(\exp X) p(X) dX. \tag{4'}$$

Для унимодулярной экспоненциальной группы это преобразование является унитарной биекцией между $L^2(G, dg)$ и $L^2(\mathfrak{g}^*, dF)$, и мы можем использовать его вместо (4) в выражении (5).

Модифицированное правило 6 приобретает вид

$$\operatorname{tr} T_\Omega(\exp X) = \frac{1}{p(X)} \int_{\Omega} e^{2\pi i \langle F, X\rangle + \sigma}. \tag{7}$$

Так как для нильпотентной группы $p(X) \equiv 1$, модифицированное правило 6 в этом случае совпадает с исходным правилом.

Оказывается, что модифицированное правило 6 справедливо для широкого класса ненильпотентных групп, если пробные функции подчинены подходящим дополнительными ограничениям.

Пример 1. Пусть $G = Aff_+(1, \mathbb{R})$ — группа сохраняющих ориентацию аффинных преобразований вещественной прямой.[1] Она имеет матричную

[1] В [Kil] подробно рассматривается этот простой, но поучительный случай (см. также [BCD] и [LL]).

реализацию 2×2-матрицами вида $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и двойственного пространства $\mathfrak{g}^*$ реализуются вещественными 2×2-матрицами вида $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ и коприсоединенное действие имеет вид $K(a,b) : (x,y) \mapsto (x + a^{-1}by, a^{-1}y)$. Мы видим, что $\mathfrak{g}^*$ распадается на две двумерные орбиты $\Omega_\pm = \{(x,y) | \pm y > 0\}$ и семейство 0-мерных орбит $\Omega_x = \{(x,0)\}$.

Оставляем читателю явное построение унитарных неприводимых представлений для G и вычисление их характеров. Заметим лишь, что для любого $F \in \Omega_\pm$ существует в точности одна одномерная подалгебра (одномерный идеал $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$), удовлетворяющая условию Пуканского.

Замечание 1. Введем функцию j комплексной переменной z по формуле

$$j^2(z) = \frac{\sinh(z/2)}{z/2}, \quad j(0) = 1.$$

Это голоморфная функция в диске $|z| < 2\pi$. Выпишем разложение Тейлора этой функции:

$$j(z) = 1 + \frac{z^2}{48} + \frac{z^4}{23040} + \dots.$$

Функция j имеет многозначное аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

Функция $p(X)$, которую мы используем в модифицированном преобразовании Фурье, может быть выражена через функцию j следующим образом. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $\operatorname{ad} X$. Тогда

$$p(X) = \det j(\operatorname{ad} X) = \prod_{k=1}^{n} j(\lambda_k) = 1 + \frac{\operatorname{tr} X^2}{48} + \frac{(\operatorname{tr} X^2)^2}{4608} - \frac{\operatorname{tr} X^4}{5760} + \dots. \qquad (8)$$

М. Концевич заметил, что хорошо известное тождество

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

влечет равенство

$$j^{-2}(z) = \Gamma\left(1 + \frac{z}{2\pi i}\right)\Gamma\left(1 - \frac{z}{2\pi i}\right).$$

Так как $\operatorname{ad} X$ — вещественный оператор, его собственные значения либо вещественны, либо распадаются на комплексно сопряженные пары. Принимая во внимание свойство $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$, заключаем, что

$$\frac{1}{p(X)} = \prod_{k=1}^{n} j^{-1}(\lambda_k) = \left| \prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda_k}{2\pi i}\right) \right|.$$

Поэтому естественно ввести функцию

$$k(X) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(1 + (\lambda_k)/(2\pi i))} = \det \frac{1}{(\mathrm{ad}(\frac{X}{2\pi i}))!}$$

и использовать эту функцию вместо $p(X)$ в определении модифицированного преобразования Фурье. Преимущество такой замены заключается в том, что $\frac{1}{\Gamma(z)}$ является целой функцией. Следовательно, $k(X)$ корректно определена на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и даже на ее комплексификации.

1.3. Инфинитезимальные характеры. Начальная формулировка правила 7 должна быть подправлена. Напомним, что в п. 2.3 лекции 6 мы определили отображение $A \mapsto P_A$ из $Y(\mathfrak{g})$ в $Z(\mathfrak{g})$, используя отображение симметризации $\mathbf{sym}$. Дело в том, что это отображение является изоморфизмом линейных пространств, но, вообще говоря, **не является гомоморфизмом алгебр**. Поэтому надо модифицировать правило 7, так как оба отображения $P \mapsto P(\Omega)$ и $A \mapsto I_\pi(A)$ являются гомоморфизмами алгебр. У нас будет возможность обсудить этот факт ниже, а здесь мы приведем скорректированную формулу.

А именно, **модифицированное правило 7** выглядит в точности так же, как раньше: $I_{T_\Omega}(A) = P_A(\Omega)$, но соответствие $A \longleftrightarrow P_A$ определено по-другому. Для определения этого нового соответствия мы рассмотрим разложение Тейлора (8) функции $p(X)$, определенной формулой (6). Формальное преобразование Фурье ставит в соответствие этому степенному ряду формальный дифференциальный оператор J бесконечного порядка с постоянными коэффициентами на $\mathfrak{g}^*$. Этот оператор действует на $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ и обратим.

Если $\{X_i\}$ и $\{F^j\}$ — произвольные двойственные базисы в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ соответственно, то J получается из p подстановкой $\dfrac{\partial}{\partial F^i}$ вместо X_i.

Для $A \in U(\mathfrak{g})$ определим $P_A \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ так, что $A = \mathbf{sym} \circ \alpha^{-1}(JP_A)$ или $P_A = J^{-1}(\alpha \circ \mathbf{sym}^{-1} A)$. Заметим, что для нильпотентной группы $\mathfrak{g}$ это определение P_A совпадает с исходным, поскольку $p(X) \equiv 1$ и $J = 1$.

2. Общие разрешимые группы Ли

2.1. Ручные и дикие группы Ли. При изучении неэкспоненциальных разрешимых групп Ли мы можем наблюдать новый феномен. Некоторые из этих групп не принадлежат типу I в смысле фон Неймана. Это означает, что теория представлений для этих групп имеет несколько неприятных свойств.

1. Для топологического пространства $\widehat{G}$ не выполняется аксиома отделимости даже в слабейшей форме T_0. Это означает, что существуют две различные точки $\widehat{G}$ такие, что любая окрестность каждой из этих точек содержит другую точку.

2. Разложение унитарного представления на неприводимые компоненты может быть неединственным. Может даже случиться так, что два

различных разложения не имеют общих унитарных неприводимых представлений.

3. Существуют фактор-представления типов II и III в смысле фон Неймана.

4. Существуют унитарные неприводимые представления, которые не обладают обобщенными характерами. А именно, операторы $\pi(\varphi), \varphi \in \mathcal{A}(G)$, никогда не имеют следов, за исключением случая, когда они обращаются в нуль.

Для таких групп я предлагаю название **дикие.** Соответственно, группы типа I будут называться **ручными**.

Можно выделить две ситуации, в которых разрешимая группа Ли может быть дикой. Обе имеют простую интерпретацию в рамках метода орбит.

Первая ситуация: для пространства $\mathcal{O}(G)$ может нарушаться аксиома отделимости T_0, так как коприсоединенные орбиты не обязательно замкнуты, даже локально. Простейший пример такой ситуации ,sk построен Маутнером в 50-х годах и позднее переоткрывался многократно. Мы опишем этот пример здесь.

Пример 2. Рассмотрим семейство 5-мерных групп Ли G_α, которое зависит от вещественного параметра α и имеет следующее матричное представление:

$$G_\alpha \ni g(t,z,w) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \ z, w \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Оказывается, что G_α ручная тогда и только тогда, когда α — рациональное число.

Коприсоединенные орбиты для иррационального α изображены на рис. 1.

Мы видим, что для топологического пространства $\mathcal{O}(G)$ не выполняется аксиома T_0.

Упражнение 1*. Рассмотрим два семейства представлений G:

• семейство $U_{a,b}$, $a, b \in \mathbb{C}$, действующее в $L^2(\mathbb{R}, d\tau)$ согласно формуле $(U_{a,b}(t,z,w)\varphi)(\tau) = e^{2\pi i \operatorname{Re}(e^{it}az + e^{i\alpha t}bw)}\varphi(\tau + t)$,

• семейство $V_{r_1,r_2,s}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}$, действующее в $L^2(\mathbb{T}^2, d\theta_1 d\theta_2)$ по формуле $(V_{r_1,r_2,s}(t,z,w)\psi)(\theta_1,\theta_2) = e^{2\pi i \operatorname{Re}(ts + e^{it}r_1 z + e^{i\alpha t}r_2 w)}\psi(\theta_1 + t \bmod 1, \theta_2 + \alpha t \bmod 1)$.

(a) Показать, что существуют два различных разложения правого регулярного представления T группы G на неприводимые компоненты

$$T = \int\limits_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}} U_{a,b}\, da\, d\bar{a}\, db\, d\bar{b}, \tag{i}$$

$$T = \int\limits_{\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}} V_{r_1,r_2,s}\, dr_1\, dr_2\, ds. \tag{ii}$$

(b) Показать, что $U_{a,b}$ не эквивалентно ни одному из представлений $V_{r_1,r_2,s}$.

Указание. См. [Kil].

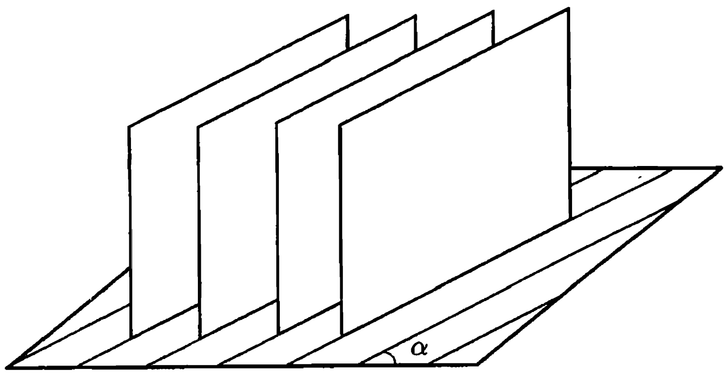

Рис 1. **Коприсоединенные орбиты для** G_α

Вторая ситуация: каноническая форма σ на некоторых орбитах может оказаться неточной. Применяя технику Макки (см. последний раздел лекции 4), мы приходим к необходимости изучения представлений неабелевых дискретных групп, которые обычно оказываются дикими.

Пример 3. Простейший пример группы такого сорта имеет размерность 7, и группа может быть реализована блочно-диагональными 6×6-матрицами с диагональными 3×3-блоками вида

$$\begin{pmatrix} e^{is} & 0 & z \\ 0 & e^{it} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & s & r \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s, r, t \in \mathbb{R}, \ z, w \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Мы опишем орбиты и представления этой группы, следуя [K2, § 19]. Введем семь вещественных координат x, y, z, u, v, s, t, r на $\mathfrak{g}$ так, что $z = x + iy$, $w = u + iv$. Обозначим через X, Y, Z, U, V, S, T, R соответствующие базисные векторы в $\mathfrak{g}$, которые также служат двойственными координатами в $\mathfrak{g}^*$. Выпишем ненулевые коммутаторы: $[S, X] = Y$, $[S, Y] = -X$, $[T, U] = V$, $[T, V] = -U$, $[S, T] = R$. Пусть G — связная односвязная группа Ли такая, что $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$.

Упражнение 2. Показать, что коприсоединенные орбиты максимальной размерности в $\mathfrak{g}^*$ диффеоморфны $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ и каноническая симплектическая форма σ не является точной.

Указание. Проверить, что для ненулевых r_1, r_2, r_3 уравнения

$$X^2 + Y^2 = r_1^2, \quad U^2 + V^2 = r_2^2, \quad R = r_3$$

определяют коприсоединенную орбиту с канонической 2-формой

$$\sigma = d\varphi \wedge dS + d\psi \wedge dT + r_3 d\varphi \wedge d\psi,$$

где угловые координаты φ и ψ определены соотношениями $X = r_1 \cos\varphi$, $Y = r_1 \sin\varphi$, $U = r_2 \cos\psi$, $V = r_2 \sin\psi$.

Установить, что G дикая, можно следующим образом. Имеется абелева нормальная подгруппа $A \subset G$, алгебра Ли которой $\mathfrak{a}$ является линейной оболочкой X, Y, U, V. Двойственная в смысле Понтрягина группа $\widehat{A}$ состоит из характеров $\chi(\exp(xX+yY+uU+vV)) = e^{2\pi i(ax+by+cu+dv)}$. Расщепление $\widehat{A}$ на G-орбиты будет ручным: орбиты задаются уравнениями $a^2+b^2 = r_1^2$, $c^2+d^2 = r_2^2$. Поэтому можно применить вторую часть теоремы 2 лекции 8. Тогда унитарное неприводимое представление π группы G имеет вид $\pi_{\chi,\rho} = \mathrm{Ind}_H^G \rho$, где $\chi \in \widehat{A}$, H — стабилизатор точки χ в G, и ρ — унитарное неприводимое представление H такое, что $\rho(a) = \chi(a)\cdot 1$ при $a \in A$.

Действительно, рассматриваемое представление остается в том же классе эквивалентности, когда мы заменяем пару (χ,ρ) парой $g\cdot(\chi,\rho) = (\chi \circ A(g^{-1}), \rho \circ A(g^{-1}))$, где $A(g) : x \mapsto gxg^{-1}$. Таким образом, унитарные неприводимые представления G в действительности определяются следующими данными: G-орбитой $\Omega \subset \widehat{A}$ и унитарным неприводимым представлением ρ стабилизатора некоторой точки $\chi \in \Omega$.

Будем называть χ **невырожденной**, если $a^2+b^2 \neq 0$ и $c^2+d^2 \neq 0$. Пусть $\widehat{A}_0$ — множество всех невырожденных характеров. Стабилизатор $\chi \in \widehat{A}_0$ в G не зависит от χ. Это полупрямое произведение $H = \exp(\mathbb{Z}\cdot S + \mathbb{Z}\cdot T + \mathbb{R}\cdot R) \ltimes A$. Отсюда следует, что часть $\widehat{G}_0 \subset \widehat{G}$ соответствующая части $\widehat{A}_0 \subset \widehat{A}$ гомеоморфна $(\widehat{A}_0)_G \times \widehat{H}$.

Мы видим, что G и H одного типа: обе ручные или обе дикие. Поэтому достаточно показать, что H — дикая группа.

Воспользуемся матричным представлением элементов $h \in H$ в виде матриц

$$h(m,n,r) = \begin{pmatrix} 1 & m & r \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z},\ r \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что H, в свою очередь, имеет нормальную абелеву подгруппу B, определенную условием $n = 0$. Общий характер χ подгруппы B имеет вид

$$\chi_{\theta,c}(h(m,0,r)) = e^{2\pi i(m\theta + rc)}, \quad \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}.$$

Группа H действует на $\widehat{B}$, и это действие факторизуется через H/B, так как B действует тривиально на $\widehat{B}$. Простыми вычислениями можно показать, что образующий элемент группы $H/B \cong \mathbb{Z}$ определяет преобразование

$(\theta, c) \mapsto (\theta + c \bmod 1, c)$. Тогда разбиение $\widehat{B}$ на H-орбиты будет диким: для любого иррационального c множество $\theta + \mathbb{Z} \cdot c \bmod 1$ плотно в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Рассмотрим представление $\pi_{\theta,c} = \mathrm{Ind}_B^H \chi_{\theta,c}$ группы H.

Упражнение 3. (a) Показать, что $\pi_{\theta,c}$ и $\pi_{\theta',c'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $c' = c$ и $\theta' = \theta + kc \bmod 1$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. ?

(b) Показать, что для иррационального c все точки $\pi_{\theta',c} \in \widehat{H}$ принадлежат любой окрестности $\pi_{\theta,c}$.

Указание. Выписать явную формулу для представлений и постараться найти сплетающие операторы для них.

Замечание 2. Естественно обобщить понятие коприсоединенной орбиты для дикой группы первого типа и рассмотреть эргодические G-инвариантные меры на $\mathfrak{g}^*$ как **виртуальные коприсоединенные орбиты.**[2]

Понятие виртуальной подгруппы предложено Г. Макки [M]. Идея использовать их в методе орбит была высказана автором [Ki4]. Однако вскоре после публикации [Ki4] я обнаружил, что эта идея уже реализована Пуканским. В частности, аналог интегральной формулы для обобщенных характеров был получен в [P2]. Левая часть формулы представляет собой **относительный след** оператора $T(g)$ в смысле фон Неймана, а правая часть является интегралом по виртуальной орбите.

2.2. Ручные разрешимые группы Ли. Теперь мы вернемся к ручным разрешимым группам Ли. Отметим замечательный факт: Руководство для пользователя работает и в этом случае при подходящих поправках ко всем правилам, кроме правил 7 и 9.

Почти все результаты, описанные в этом разделе, принадлежат Л. Ауслендеру и Б. Костанту [AK]. Эти результаты изложены здесь в несколько упрощенном варианте и с дополнениями, предложенными И. М. Щепочкиной [Shc].[3] Сначала рассмотрим простой критерий.

Теорема 3 (Ауслендер — Костант). *Связная односвязная разрешимая группа Ли G является ручной (или принадлежит типу* I) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

(a) *пространство $\mathcal{O}(G)$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_0,*

(b) *каноническая форма σ точна на каждой орбите.*

Далее мы предполагаем, что G удовлетворяет условиям теоремы 3.

Даже для ручной разрешимой группы соответствие между коприсоединенными орбитами и представлениями не обязательно взаимно однозначно. Для описания этого соответствия требуется модифицировать пространство $\mathfrak{g}^*$.

Дело в том, что в противоположность случаю экспоненциальной группе Ли коприсоединенная орбита Ω может оказаться не односвязной. Прос-

---

[2]Можно доказать, что в случае, когда $\mathcal{O}(G)$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, все такие меры пропорциональны каноническим мерам на орбитах.

[3]К сожалению, полный текст кандидатской диссертации И. М. Щепочкиной (Москва, 1980) никогда не был опубликован и до сих пор недоступен для математической общественности.

тое топологическое исследование (см. лекцию 4) показывает, что фундаментальная группа $\pi_1(\Omega)$ изоморфна $\mathrm{Stab}(F)/\mathrm{Stab}^0(F)$.

Определим **оснащенный момент** группы Ли G как пару (F,χ), где $F \in \mathfrak{g}^*$ и χ — унитарное одномерное представление $\mathrm{Stab}(F)$ такое, что

$$\chi_*(e) = 2\pi i F\,|_{\mathrm{stab}(F)}\,. \tag{11}$$

Напомним, что такие χ существуют только, когда орбита Ω_F целочисленная. Для разрешимой группы Ли типа I это условие выполняется, так как σ точна и, следовательно, все орбиты целочисленные.

Множество всех оснащенных моментов обозначается $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{rigg}}$. Группа G естественно действует на $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{rigg}}$ и это действие коммутирует с проекцией $\Pi : \mathfrak{g}^*_{rigg} \to \mathfrak{g}^*$, заданной формулой $\Pi(F,\chi) = F$.

G-орбиты в $\mathfrak{g}^*_{\mathrm{rigg}}$ называются **оснащенными коприсоединенными орбитами**, и множество всех таких орбит обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{rigg}}(G)$.

Следует заметить, что для ручной разрешимой группы Ли проекция Π — отображение “на” и слой над точкой $F \in \mathfrak{g}^*$ представляет собой тор размерности, равной первому числу Бетти Ω_F. Таким образом, соответствие между обычными и оснащенными орбитами многозначное.

Модифицированное правило 1 содержится в следующем утверждении.

Теорема 4 (Ауслендер — Костант). *Для любой связной односвязной разрешимой группы Ли G типа* I *существует естественная биекция между множеством $\widehat{G}$ унитарных неприводимых представлений и пространством $\mathcal{O}_{\mathrm{rigg}}(G)$ оснащенных коприсоединенных орбит.*

Подробное доказательство можно найти в оригинальной статье [AK] или в [Kil]. Здесь мы опишем конструкцию унитарного неприводимого представления T_Ω, ассоциированного с оснащенной орбитой Ω.

Оказывается, что для этого потребуется новая процедура **голоморфной индукции**, и мы объясним основную идею прежде, чем давать определение. Мы вернемся к этому вопросу в лекции 10.

Здесь и далее мы предполагаем, что $\Omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{rigg}}$ и $(F,\chi) \in \Omega$. Рассмотрим сначала случай, когда существует вещественная поляризация $\mathfrak{h}$ для F, удовлетворяющая условию Пуканского. Тогда обычная индукция из правила 2 применима при минимальных модификациях. Пусть $H^0 = \exp\mathfrak{h}$ и H — группа, порожденная H^0 и $\mathrm{Stab}(F)$. (Заметим, что $\mathrm{Stab}^0(F)$ содержится в H^0). Определим одномерное унитарное неприводимое представление $U_{F,\chi,H}$ группы H по формуле

$$U_{F,\chi,H}(g) = \begin{cases} e^{2\pi i}\langle F, X\rangle, & g = \exp X,\ X \in \mathfrak{h}, \\ \chi(g), & g \in \mathrm{Stab}(F). \end{cases} \tag{12}$$

Корректность этого определения обеспечивается равенством (11).

Затем определим требуемое унитарное неприводимое представление T_Ω по формуле

$$T_\Omega = \mathrm{Ind}_H^G\, U_{F,\chi,H}, \tag{13}$$

которая может рассматриваться как **первая поправка к правилу 2**.

Описанная процедура, к сожалению, не применима для построения унитарных неприводимых представлений всех оснащенных орбит. Причина заключается в том, что для некоторых $F \in \mathfrak{g}^*$ не существует вещественной поляризации, т. е. не существует подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, которая были бы подчинена функционалу F и имела бы требуемую коразмерность $\frac{1}{2}\operatorname{rk} B_F$.

С другой стороны, комплексная поляризация, т. е. комплексная подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ с такими свойствами всегда существует. Это следует из процедуры, описанной в п. 5 лекции 7. Мы используем обозначения из п. 5 лекции 7.

Модифицируя далее процедуру индукции, рассмотрим комплексную поляризацию $\mathfrak{p}$ вместо вещественной. Пусть $\mathfrak{p}$ — комплексная поляризация функционала $F \in \mathfrak{g}^*$. Следуя процедуре из п. 5 лекции 7, введем вещественные подпространства $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{g}$ такие, что их комплексификации будут соответственно $\mathfrak{p} + \bar{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{p} \bigcap \bar{\mathfrak{p}}$. Заметим, что $\mathfrak{d}$ — подалгебра $\mathfrak{g}$¡ содержащая $\mathrm{stab}(F) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}(F))$. Пусть D — соответствующая связная подгруппа G. Положим $H = D \cdot \mathrm{Stab}(F)$. Очевидно, что $H^0 = D$.

Поляризация $\mathfrak{p}$ называется **допустимой**, если $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра. Обозначим через E соответствующую подгруппу G.

Напомним, что любому $X \in \mathfrak{g}$ соответствует правоинвариантное векторное поле $\widehat{X}$ на G. Продолжим отображение $X \mapsto \widehat{X}$ до комплексно-линейного отображения из $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ в $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(G)$ и используем то же обозначение для продолженного отображения.

Рассмотрим пространство $L(G, F, \ \mathfrak{p})$ гладких функций на G, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &(\widehat{X} - 2\pi i \langle F, X\rangle) f = 0, \text{ для всех } X \in \mathfrak{p}, \\ &F(hg) = \chi(h) f(g) \text{ для всех } h \in H. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что для $X \in \mathfrak{g}$ вещественное поле $\widehat{X}$ является инфинитезимальным левым сдвигом вдоль подгруппы $\exp(\mathbb{R}X)$. Поэтому первое условие в (14) есть в точности инфинитезимальная форма уравнения $f(\exp X \cdot g) = e^{2\pi i \langle F, X\rangle}$. Заметим также, что второе условие в (14) для $h \in H^0$ следует из первого условия ввиду (11).

С геометрической точки зрения элементы $L(G, F, \mathfrak{p})$ могут рассматриваться как гладкие сечения некоторого линейного расслоения L над правым однородным пространством $M = H \backslash G$ при дополнительном условии: они голоморфны вдоль некоторого комплексного подмногообразия, изоморфного $H \backslash E$ (см. п. 5 лекции 7). Более того, L — G-расслоение и действие $\mathrm{Stab}(F)$ на одномерный слой L над F задается характером χ.

Обозначим через $L_0(G, F, \mathfrak{p})$ подпространство сечений, носители которых имеют компактные проекции на $E \backslash G$. В $L_0(G, F, \mathfrak{p})$ можно ввести G-инвариантное скалярное произведение (см. подробности в примерах ниже). Пополнение $L_0(G, F, \mathfrak{p})$ относительно этого скалярного произведение является гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, где G действует унитарными операторами.

Оказывается, что при подходящем условии положительности на $\mathfrak{p}$ результирующее представление неприводимо и зависит только от оснащенной орбиты Ω, которая содержит (F,χ). Обозначим его через T_Ω и рассмотрим описанную конструкцию как **вторую поправку к правилу 2**.

Наиболее важен частный случай этой конструкции, когда $\mathfrak{p}$ — так называемое **кэлерова поляризация**. Это означает следующее;

1. $\mathfrak{p}+\overline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.
2. $\mathfrak{p}\bigcap\overline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, где $\mathfrak{h}=\mathrm{stab}(F)$.
3. Эрмитова форма $h(X,Y):=\frac{1}{2i}B_F(X,\overline{Y})$ положительно определена на $\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{p}$.

В этом случае $E=G$ и $\mathfrak{p}$ определяет на многообразии $M=H\backslash G$ G-инвариантную комплексную структуру. Кроме того, M как однородное многообразие изоморфно коприсоединенной орбите $\Omega\subset\mathfrak{g}^*$ и, следовательно, обладает канонической формой объема. Можно ввести G-инвариантную эрмитову структуру на L так, что представление T_Ω будет действовать на пространстве квадратично интегрируемых голоморфных сечений L.

Как практически применять эту процедуру, подробно объясняется в следующем разделе на некоторых типичных примерах.

3. Пример. Бубновая алгебра Ли

Мы проиллюстрируем общую теорию на конкретном примере.

3.1. Присоединенные орбиты бубновой алгебры Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — так называемая **бубновая алгебра Ли $\mathfrak{g}$** с базисом T, X, Y, Z и ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[T,X]=Y,\quad [T,Y]=-X,\quad [X,Y]=Z. \tag{15}$$

Эта алгебра имеет матричную реализацию как подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{R})$ с общим элементом

$$S=\theta T+aX+bY+cZ=\begin{pmatrix}0&a&b&2c\\0&0&-\theta&b\\0&\theta&0&-a\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Для описания соответствующей односвязной группы Ли G рассмотрим группу $M(2)$ движений, сохраняющих ориентацию евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Как гладкое многообразие, $M(2)$ изоморфна $S^1\times\mathbb{R}^2$. Оказывается, что группа G может рассматриваться как универсальное накрытие центрального расширения $M(2)$ (см. ниже).

Перенесем координаты (θ,a,b,c) группы $\mathfrak{g}$ в группу G по формуле

$$g(\theta,a,b,c)=\exp(\theta T+cZ)\exp(aX+bY). \tag{17}$$

Предупреждение. Группа G допускает глобальную систему координат и диффеоморфна $\mathbb{R}^4$, но не является экспоненциальной.

? Упражнение 4. (a) Показать, что центр C группы G состоит из элементов $g(\theta,a,b,c)$, удовлетворяющих условиям $a=b=0,\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$.

(b) Проверить, что присоединенная группа G/C изоморфна группе движений $M(2)$.

Указание. Использовать явную формулу для коприсоединенного действия, определенного ниже.

Двойственное пространство $\mathfrak{g}^*$ реализуется как множество матриц

$$F(t,x,y,z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\x&0&t&0\\y&-t&0&0\\z&y&-x&0\end{pmatrix}\tag{18}$$

так, что $\langle F,S\rangle=\operatorname{tr}(FS)=\theta t+ax+by+cz$.

Явная формула для коприсоединенного действия следующая:

$$K(g(0,a,b,c))F(t,x,y,z)=F\big(t-bx+ay-\frac{a^2+b^2}{2}z,x+bz,y-az,z\big),$$
$$K(g(\theta,0,0,0))F(t,x,y,z)=F(t,x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta,z).$$

Инвариантными полиномами на $\mathfrak{g}^*$ являются полиномы z и x^2+y^2+2tz. Следовательно, общие орбиты суть 2-мерные параболоиды

$$\Omega_{c_1,c_2}:\ z=c_1\neq 0,\ t=c_2-\frac{x^2+y^2}{2c_1}.\tag{19a}$$

Гиперплоскость $z=0$ распадается на двумерные цилиндры

$$\Omega_r:\ x^2+y^2=r^2,\ r>0,\tag{19b}$$

и одномерные орбиты (неподвижные точки)

$$\Omega_0^c=(0,0,0,c),\quad c\in\mathbb{R}.\tag{19c}$$

Фактор-топология в $\mathcal{O}(G)$ — это обычная топология на каждой части (19a), (19b), (19c): $\{\Omega_{c_1,c_2}\}\cong\mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}$, $\{\Omega_r\}\cong\mathbb{R}_{>0}$, $\{\Omega_0^c\}\cong\mathbb{R}$. При $c_1\to 0$ и $2c_1c_2\to r^2$ параболоид Ω_{c_1,c_2} стремится к цилиндру Ω_r. При $c_1\to 0$ и $c_1c_2\to 0$ пределом является множество всех Ω_0^c.

Таким образом, чтобы получить топологическое пространство $\mathcal{O}(G)$, следует взять вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами ($a=c_1, b=2c_1c_2$), удалить луч $a=0$, $b\leqslant 0$ и приклеить прямую $\mathbb{R}$ вместо выколотого начала координат. Чтобы получить пространство $\mathcal{O}_{\text{rigg}}(G)$, надо дополнительно заменить каждую точку открытого луча $a=0$, $b>0$ окружностью.

3.2. Представления, соответствующие общим орбитам. Все общие коприсоединенные орбиты односвязны. Следовательно, нет никаких различий между орбитами и оснащенными орбитами. Согласно правилу 1 любой общей орбите Ω_{c_1,c_2} соответствует ровно одно (с точностью до эквивалентности) унитарное неприводимое представление π_{c_1,c_2}. Опишем построение этих унитарных неприводимых представлений.

Нетрудно показать, что для $c_1\neq 0$ функционал F не имеет вещественной поляризации. Действительно, каждая трехмерная подалгебра $\mathfrak{g}$ необходимо содержит Z, Следовательно, она не подчинена функционалу F.

Однако существуют две трехмерные комплексные подалгебры $\mathfrak{p}_\pm\subset\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, подчиненные F. Для упрощения вычисления выберем специальную точку $F \in \Omega_{c_1,c_2}$ с координатами $(0,0,c_1,c_2)$. Тогда можно положить

$$\mathfrak{p}_\pm = \mathbb{C}\cdot T \oplus \mathbb{C}\cdot (X \pm iY) \oplus \mathbb{C}\cdot Z.$$

Действительно, так как $[\mathfrak{p}_\pm, \mathfrak{p}_\pm] = \mathbb{C}\cdot (X \pm iY)$, мы видим, что $F\big|_{[\mathfrak{p}_\pm,\mathfrak{p}_\pm]} = 0$. Следовательно, обе $\mathfrak{p}_\pm$ являются комплексными поляризациями F. Позднее мы более подробно рассмотрим $\mathfrak{p}_+$, которая будет обозначаться просто $\mathfrak{p}$, а сейчас лишь укажем необходимые модификации для $\mathfrak{p}_-$. В этом случае имеем $\mathfrak{p}+\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{g}, \mathfrak{p}\bigcap\overline{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}\cdot T \oplus \mathbb{C}\cdot Z$. Одномерное комплексное пространство $\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{p}$ порождается вектором $\xi = (X - iY) \bmod \mathfrak{p}$ и снабжено эрмитовой формой h, заданной формулой $h(\xi,\xi) = c_1$. Таким образом, $\mathfrak{p}$ является кэлеровой поляризацией тогда и только тогда, когда $c_1 > 0$.

Пусть $D = \exp(\mathbb{R}\cdot T \oplus \mathbb{R}\cdot Z)$. Многообразие $M = D\backslash G$ есть обычная плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами (u,v). Правое действие G на M факторизуется? через G/C и порождает в точности группу преобразований $M(2)$:

$$(u,v)\cdot\exp(\theta T) = (u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta) \quad \text{(вращения)},$$
$$(u,v)\cdot\exp(aX+bY+cZ) = (u+a, v+b) \quad \text{(переносы)}.$$

? Упражнение 5. (a) Установить G-эквивариантный изоморфизм α между многообразием M и коприсоединеннйо орбитой Ω_{c_1,c_2}, $c_1 \neq 0$.

(b) Вычислить образ $\alpha^*(\sigma)$ канонической симплектической формы σ при этом изоморфизме.

Указание. (a) Учесть, что Ω_{c_1,c_2} является левым G-многообразием, а M — правым G-многообразием. Таким образом, эквивариантность отображения $\alpha : M \to \Omega_{c_1,c_2}$ выражается равенством $g\cdot\alpha(u,v) = \alpha((u,v)\cdot g^{-1})$.

(b) Использовать тот факт, что скобки Пуассона определяют на $\mathfrak{g}^*$ структуру алгебры Ли, изоморфной $\mathfrak{g}$.

Ответы. (a) $\alpha(u,v) = F(-c_1v, c_1u, c_1, c_2 - c_1(u^2+v^2)/2)$,

(b) $\alpha^*(\sigma) = c_1 du \wedge dv$.

Согласно общей теории каждая комплексная поляризация $\mathfrak{p}$ определяет на M G-инвариантную комплексную структуру. В нашем случае эта структура задается глобальной системой координат $w = u + iv$.

Предложение 1. *Пространство $L(G,F,\mathfrak{p})$, заданное системой (12), совпадает в нашем случае с пространством голоморфных сечений тривиального линейного расслоения L над M.*

Доказательство. В координатах (15) правоинвариантные векторные поля на G задаются в виде

$$\widehat{X} = \cos\theta\cdot\partial_a - \sin\theta\cdot\partial_b + \frac{b\cos\theta + a\sin\theta}{2}\cdot\partial_c, \qquad \widehat{Z} = \partial_c,$$
$$\widehat{Y} = \sin\theta\cdot\partial_a + \cos\theta\cdot\partial_b + \frac{b\sin\theta - a\cos\theta}{2}\cdot\partial_c, \qquad \widehat{T} = \partial_\theta.$$

Таким образом, второе условие в (14) ("вещественная часть") принимает вид $\dfrac{\partial f}{\partial c} = 2\pi i c_1 f$, $\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = 2\pi i c_2 f$. Это условие эквивалентно равенству

$$f(\theta,a,b,c) = e^{2\pi i(c_1c + c_2\theta)} f(0,a,b,0). \tag{20}$$

Определим сечение $s : M \to G : (u, v) \mapsto g(0, u, v, 0)$.

Приведенное равенство означает, что решение f как функция на G полностью определяется своим сужением на $s(M)$, которое в действительности является функцией $\varphi = f \circ s$ на $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(u, v) := f(0, u, v, 0). \tag{21}$$

Принимая во внимание (20) и (21), можно записать первое условие в (14) ("комплексную часть") в виде $e^{i\theta}(\partial_u + i\partial_v + \pi c_1(u + iv))\varphi = 0$ или $2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{w}} + \pi c_1 w\varphi = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \exp\left(-\frac{1}{2}\pi c_1 |w|^2\right) \cdot \psi, \tag{22}$$

где ψ — голоморфная функция комплексной переменной w.

Наконец, определим тривиальное линейное расслоение L так, что функция $\varphi_0 = \exp\left(-\dfrac{1}{2}\pi c_1 |w|^2\right)$ определяет голоморфное сечение L. Так как это сечение нигде не обращается в нуль, все другие голоморфные сечения имеют вид $\varphi = \psi \cdot \varphi_0$, где ψ голоморфна. □

Действие G в пространстве $L(G, F, \mathfrak{p})$ вычисляется, как обычно, с помощью основного уравнения

$$s(u, v) \cdot g(\theta, a, b, c) = \exp(\tau T + \gamma Z) \cdot s(u', v')$$

при заданных u, v, θ, a, b, c и неизвестных τ, γ, u', v'. Решение следующее:

$$\begin{aligned} &\tau = \theta, \quad \gamma = c + \frac{(au + bv)\sin\theta + (bu - av)\cos\theta}{2}, \\ &u' = u\cos\theta + v\sin\theta + a, \quad v' = -u\sin\theta + v\cos\theta + b. \end{aligned}$$

Следовательно, действие имеет вид

$$\begin{aligned} &(\pi(g(0, a, b, 0)\varphi)(u, v) = e^{\pi i c_1(bu - av)} \cdot \varphi(u + a, v + b), \\ &(\pi(g(\theta, 0, 0, c)\varphi)(u, v) \\ &\quad = e^{2\pi i(c_1 c + c_2\theta)} \cdot \varphi(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta). \end{aligned} \tag{23}$$

Соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве функций φ имеет вид $\pi_*(X) = \partial_u - \pi i c_1 v$, $\pi_*(Y) = \partial_v + \pi i c_1 u$, $\pi_*(Z) = 2\pi i c_1$, $\pi_*(T) = v\partial_u - u\partial_v + 2\pi i c_2$. В терминах голоморфных функций $\psi = \varphi/\varphi_0$ можно переписать это представление так: $\pi_*(X) = \partial_w - \pi c_1 w$, $\pi_*(Y) = i\partial_w + \pi i c_1 w$, $\pi_*(Z) = 2\pi i c_1$, $\pi_*(T) = -iw\partial_w + 2\pi i c_2$.

Представление группы в терминах ψ записывается в виде

$$\begin{aligned} &(\pi(g(0, a, b, c)\psi)(w) = e^{2\pi i c_1 c + \pi c_1(w(a - ib) - (a^2 + b^2)/2)} \cdot \psi(w + a + ib), \\ &(\pi(g(\theta, 0, 0, 0)\psi)(w) \ = e^{2\pi i c_2\theta} \cdot \psi(e^{-i\theta}w). \end{aligned} \tag{23$'$}$$

Рассмотрим теперь более тщательно пространство представления $\mathcal{H}$. По определению это пополнение $L(G, F, \mathfrak{p})$ относительно нормы, порожденной G-инваринатным скалярным произведением. Естественно выбрать такое скалярное произведение в виде

$$(\psi_1, \psi_2) = \int\limits_M \psi_1 \overline{\psi_2} |\varphi_0|^2 \alpha^* \sigma = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_1(w) \overline{\psi_2(w)} e^{-\pi c_1 |w|^2} c_1 du \wedge dv.$$

Очевидно, что $\mathcal{H}$ ненулевое в точности тогда, когда $c_1 > 0$, т. е. когда $\mathfrak{p}$ является кэлеровой поляризацией.

В качестве ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$ можно взять голоморфные функции $\psi_n = \dfrac{(\pi c_1 w)^n}{\sqrt{n!}}$, $n \geqslant 0$.

Упражнение 6. Ввести эрмитову структуру на L так чтобы пространство представлений $\mathcal{H}$ было изоморфно пространству всех квадратично интегрируемых голоморфных сечений L.

Ответ. Для голоморфного сечения ψ надо определить норму его значения в w по формуле $\|\psi(w)\|^2 := |\psi(w)\varphi_0(w)|^2$.

3.3. Представления, соответствующие цилиндрическим орбитам. Рассмотрим орбиты Ω_r, $r > 0$. Они имеют нетривиальную фундаментальную группу, так как стабилизатор $\operatorname{Stab}(F)$ точки $F(t,x,y,0) \in \Omega_r$ имеет вид $\exp(2\pi\mathbb{Z}\cdot T + \mathbb{R}\cdot(xX+yY)+\mathbb{R}\cdot Z)$. Поэтому $\pi_1(\Omega_r) \cong \operatorname{Stab}(F)/\operatorname{Stab}^0(F) \cong \mathbb{Z}$. Мы видим, что орбите Ω_r соответствует одномерное семейство оснащенных орбит $\Omega_r(\tau)$, где $\tau \in \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Более точно, оснащенная орбита $\Omega_r(\tau) \in \mathcal{O}_{\text{rigg}}$ состоит из пар $(F, \chi_{r,\tau})$ где $F \in \Omega_r$ и характер $\chi_{r,\tau} \in \widehat{H}$ задан формулой

$$\chi_{r,\tau}(\exp(2\pi n\cdot T + a\cdot(xX+yY)+c\cdot Z)) = e^{2\pi i(n\tau + ar^2)}. \tag{24}$$

Упражнение 7. Показать, что для любого $F \in \Omega_r$ существуют единственная вещественная поляризация $\mathfrak{h} = \mathbb{R}\cdot X \oplus \mathbb{R}\cdot Y \oplus \mathbb{R}\cdot Z$ и единственная комплексная поляризация $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.

Указание. Вычислить действие $\operatorname{Stab}(F)$ в $T_F\Omega_r$ (соответственно, в $T_F^{\mathbb{C}}\Omega_r$) и проверить, что оно имеет единственное $\operatorname{Stab}(F)$-инвариантное подпространство $\mathbb{R}\cdot\partial_t$ (соответственно, $\mathbb{C}\cdot\partial_t$).

Окончательно, **модифицированное правило 2** ассоциирует с орбитой $\Omega_r(\tau)$ унитарное неприводимое представление $T_{\Omega_r(\tau)} = \operatorname{Ind}_H^G \chi_{r,\tau}$.

Упражнение 8. Вывести следующую явную реализацию $T_{\Omega_r(\tau)}$ в $L^2([0,2\pi), d\alpha)$:

$$\begin{aligned} (T_{\Omega_r(\tau)}(g(0,a,b,c))f)(\alpha) &= e^{2\pi i r(a\cos\alpha + b\sin\alpha)} f(\alpha),\\ (T_{\Omega_r(\tau)}(g(\theta,0,0,0))f)(\alpha) &= e^{2\pi i n\tau} f(\theta_1), \end{aligned} \tag{25}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ и $\theta_1 \in [0,2\pi)$ определены равенством $\alpha + \theta = \theta_1 + 2\pi n$.

Указание. Использовать основное уравнение.

Соответствующее представление $T_* := (T_{\Omega_r(\tau)})_*$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $T_*(T) = \partial_\alpha$, $T_*(X) = 2\pi i r\cos\alpha$, $T_*(Y) = 2\pi i r \sin\alpha$, $T_*(Z) = 0$.

Замечание 3. На первый взгляд T_* не зависит от параметра τ. Дело в том, что оператор $A = i\partial_\alpha$ с областью определения $\mathcal{A}(0,2\pi) \subset L^2([0,2\pi), d\alpha)$

симметричен, но не является существенно самосопряженным. Он имеет несколько самосопряженных расширений A_τ, которые мы нумеруем здесь параметром $\tau \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. А именно, область определения A_τ состоит из всех непрерывных функций f на $[0, 2\pi]$, которые имеют квадратично интегрируемые обобщенные производные f' и удовлетворяют граничному условию $f(2\pi) = e^{2\pi i\tau} f(0)$.

4. Поправки к другим правилам

4.1. Правила 3–5. Здесь мы кратко обсудим **поправки к правилам 3–5** , предложенные Щепочкиной.

Пусть H — замкнутая подгруппа G. Будем говорить, что оснащенная орбита $\Omega' \in \mathcal{O}_{\mathrm{rigg}}(H)$ **лежит под** оснащенной орбитой $\Omega \in \mathcal{O}(G)$ (или, эквивалентно, Ω **лежит над** Ω'), если существуют оснащенный момент $(F, \chi) \in \Omega$ и момент $(F', \chi') \in \Omega'$ такие, что выполнены следующие условия:

(a) $p(F) = F'$,

(b) $\chi = \chi'$ на $H \cap \mathrm{Stab}(F)$.

Определим **сумму оснащенных орбит** Ω_1 и Ω_2 как множество всех (F, χ), для которых существуют $(F_i, \chi_i) \in \Omega_i$, $i = 1, 2$, такие, что

$$F = F_1 + F_2, \quad \chi = \chi_1\chi_2 \quad \text{на } \mathrm{Stab}(F_1) \cap \mathrm{Stab}(F_2). \tag{26}$$

Теорема 5 (Щепочкина). *Пусть G — связная односвязная ручная разрешимая группа Ли и H — ее замкнутая ручная подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Спектр $\mathrm{Ind}_H^G S_{\Omega'}$ состоит из T_Ω таких, что Ω лежит над Ω'.*

(b) *Спектр $\mathrm{Res}_H^G T_\Omega$ состоит $S_{\Omega'}$ таких, что Ω' лежит под Ω.*

(c) *Спектр $T_{\Omega_1} \otimes T_{\Omega_2}$ состоит из T_Ω таких, что Ω лежит в $\Omega_1 + \Omega_2$.*

Как и выше, доказательство проводится индукцией по размерности G и использует следующий результат, которые представляет и самостоятельный интерес.

Пусть G — связная односвязная разрешимая группа Ли, H — замкнутая подгруппа и K — максимальная связная нормальная подгруппа G, содержащаяся в H. В этом случае фактор-группа G/K называется **основной группой**.

Лемма 3 (Щепочкина). *Любая основная группа совпадает с односвязным накрытием одной из следующих групп:*

- *некоммутативная двумерная группа Ли $G_2 = Aff(1, \mathbb{R})$,*
- *однопараметрическое семейство трехмерных групп $G_3(\gamma)$ в $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$, действующих на $\mathbb{C}$ переносами и умножениями на $e^{\gamma t}$, $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$,*
- *четырехмерная группа $G_4 = \mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$.*

4.2. Правила 6, 7 и 10. Поправки к правилу 6 выглядят следующим образом. Рассмотрим орбиту $\Omega \in \mathcal{O}(G)$. Пусть $\{\Omega_\chi\}_{\chi \in \widehat{\pi_1(\Omega)}}$ — множество всех оснащенных орбит в $\Pi^{-1}(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\widehat{\pi_1(\Omega)}} \operatorname{tr} T_{\Omega_\chi}(\exp X) d\chi = \frac{1}{p(X)} \int\limits_{\Omega} e^{2\pi i \langle F, X\rangle + \sigma}.$$

Другими словами, преобразование Фурье канонической меры на орбите Ω равно среднему всех характеров унитарных неприводимых представлений соответствующих оснащенными орбитами из $\Pi^{-1}(\Omega)$.

Было бы интересно найти формулу для характера индивидуального унитарного неприводимого представления T_{Ω_χ}. Пример из п. 3.3 мог бы быть здесь полезным.

Для **модифицированного правила 7** необходимо сделать следующее естественное уточнение. Для оснащенной орбиты Ω, проходящей через точку $(F, \chi) \in \mathfrak{g}^*_{rigg}$ обозначим через $-\Omega$ оснащенную орбиту, проходящую через точку $(-F, \overline{\chi})$. (Заметим, что $\mathrm{Stab}(F) = \mathrm{Stab}(-F)$.)

Лекция 10

КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

Введение ... 225
1. Структура полупростых компактных групп Ли ... 226
   1.1. Абстрактные корневые системы ... 226
   1.2. Компактные и комплексные полупростые группы ... 232
   1.3. Классические и особые группы ... 237
2. Коприсоединенные орбиты компактной группы Ли ... 241
   2.1. Геометрия коприсоединенных орбит ... 241
   2.2. Топология коприсоединенных орбит ... 246
3. Орбиты и представления ... 251
   3.1. Обзор ... 251
   3.2. Веса унитарных неприводимых представлений ... 255
   3.3. Теорема Бореля — Вейля — Ботта ... 261
   3.4. Интегральная формула для характеров ... 264
   3.5. Инфинитезимальные характеры ... 265
   3.6. Сплетающие операторы ... 267

Введение

Теория представлений компактных групп Ли составляет старейшую и наиболее продвинутую часть теории представлений групп Ли. Простейшим примером компактной группы Ли является окружность S^1, которая интерпретируется также как одномерный тор $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Теория представлений группы S^1 существует (под названием **рядов Фурье**) уже в течение двух столетий. Более общий раздел — **коммутативный анализ Фурье** — имеет дело с абелевыми группами Ли — прямыми произведениями вида $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m \times F$, где F — конечная абелева группа. Оставим в стороне эту часть теории, поскольку метод орбит ничего нового здесь не добавляет.

Главным объектом исследования будет теория представлений неабелевой связной компактной группы Ли. Такая группа K может иметь нетривиальный центр C. Так как коприсоединенное представление тривиально на центре, можно заменить K подгруппой $K_1 = [K, K]$ или одной из фактор-групп K/C, K/C^0 без изменения коприсоединенных орбит. Мы предпочтем последнюю возможность и соответственно предположим, что K — связная компактная группа Ли с конечным центром. Тогда алгебра

Ли $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ полупроста, и можно получить полный список таких групп, воспользовавшись классификационными теоремами (см. лекцию 3).

Для **классической компактной группы**, т. е. унитарной группы над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, почти все основные результаты известны с 20-х годов и интенсивно использовались в квантовой физике, возникшей как раз в те времена.

Другие, так называемые **особые** группы $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{F_4}$, $\mathbf{E_6}$, $\mathbf{E_7}$, $\mathbf{E_8}$ до недавнего времени рассматривались как курьезные и бесполезные аномалии на фоне общей картины. Однако последние достижения квантовой теории поля убеждают, что эти группы могут играть важную роль в новых областях математической физики таких, например, как теория струн и зеркальная симметрия. Изучение этих групп и их представлений дало новые импульсы дальнейшему развитию физических теорий.

На первый взгляд, что-либо нового в этой хорошо исследованной области сказать невозможно. Тем не менее, метод орбит дает новую интерпретацию известных результатов и даже помогает установить некоторые новые факты.

В то же время, идиллическая гармония между унитарными неприводимыми представлениями и орбитами разрушается. Наиболее интригующие новые обстоятельства можно описать следующим образом. Выше мы видели, что установить соответствие между орбитами и унитарными неприводимыми представлениями можно двумя способами:

1) через функторы индукции и ограничения,

2) через теорию характеров.

Оказывается, что для компактных групп эти два подхода приводят к различным результатам![1]

1. Структура полупростых компактных групп Ли

1.1. Абстрактные корневые системы. Рассмотрим понятие и свойства замечательного геометрического объекта — корневой системы в евклидовом пространстве, который появляется в удивительно многих областях математики (см., например, [C], [HHSV]) и, в частности, при исследовании компактных полупростых групп Ли. Наша главная цель — привести основные факты и объяснить, как ими пользоваться. Поэтому подробные доказательства будут даны лишь, когда они не слишком громоздки и помогают лучшему пониманию идей. Читатель, знакомый с корневыми системами, может пропустить этот раздел и перейти непосредственно к следующему.

Определение 1. Конечное множество $R \subset \mathbb{R}^n$ называется **корневой системой**, а его элементы — **корнями**, если линейная оболочка множества R совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ и выполнены два условия

1) $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in R$,

[1] Есть соблазн рассматривать это несоответствие как своеобразное проявление принципа неопределенности Гейзенберга: данному унитарному неприводимому представлению мы можем поставить в соответствие орбиту лишь с определенной степенью точности ρ, равной полусумме положительных корней.

2) $\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in R$ для всех $\alpha, \beta \in R$.

В наших лекциях мы используем только **приведенные** корневые системы, удовлетворяющие дополнительному условию

3) если $\alpha \in R$, то $2\alpha \notin R$.

Геометрически, эти условия означают следующее.

1′) Угол между двумя корнями может принимать лишь те значения, которые перечислены ниже:

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi,$$

и отношение квадратов длин двух неперпендикулярных корней может быть равным только лишь 1, 2 или 3 в зависимости от угла между корнями. Все возможные конфигурации двух неперпендикулярных корней указаны ниже.

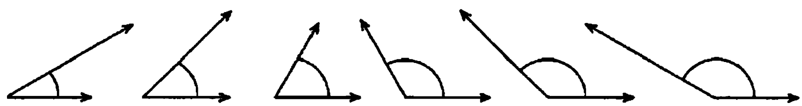

Рис. 1. Конфигурации корней

Гиперплоскость $M_\alpha \subset R^n$, ортогональная $\alpha \in R$, называется **зеркалом**, соответствующим α, и отражение относительно этого зеркала обозначается через s_α.

Условие 2) означает следующее:

2′) множество R симметрично относительно всех зеркал (т. е. инвариантно относительно отражений $s_\alpha, \alpha \in R$).

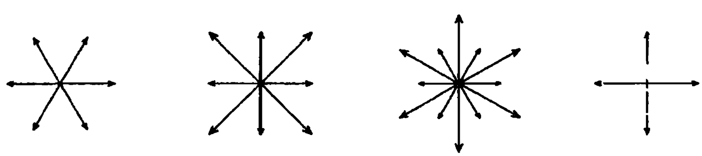

Рис. 2. Двумерные приведенные корневые системы

Конечная группа W, порожденная отражениями s_α, $\alpha \in R$, называется **группой Вейля**, соответствующей корневой системе R.

Дополнение в $\mathbb{R}^n$ к объединению всех зеркал распадется на связные компоненты, которые называются **открытыми камерами Вейля**, а их замыкания называются просто **камерами Вейля**.

Предложение 1. *Группа W действует просто транзитивно на множестве камер Вейля.*

Будем говорить, что вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ **регулярный**, если он принадлежит открытой камере Вейля, и **сингулярным**, если он принадлежит по крайней мере одному зеркалу.

Линейным порядком на $\mathbb{R}^n$ называется отношение порядка, согласованное со структурой вещественного векторного пространства (т. е. такое, что суммы положительных векторов положительны и положительное кратное положительного вектора положительно).

Упражнение 1. Показать, что любое линейное отношение порядка является лексикографическим порядком относительно подходящего (неортогонального) базиса в в $\mathbb{R}^n$.

Указание. Показать, что для любого линейного порядка на $\mathbb{R}^n$ существует гиперплоскость такая, что ее дополнение распадается на открытые полупространства, одно из которых состоит из положительных векторов, а другое — из отрицательных векторов. Затем применить индукцию.

Каждый линейный порядок на $\mathbb{R}^n$ индуцирует отношение порядка на корневой системе R. Обозначим через R_+ (R_-) множество положительных (отрицательных) корней. Очевидно, что существует конечное число отношений порядка на R. Приведем точную формулировку.

Предложение 2. *Для любого линейного порядка на $\mathbb{R}^n$ выпуклый конус, порожденный R_+, является в точности* **двойственным конусом**[2] *одной из камер Вейля.*

Следствие. *Группа W действует просто транзитивно на множество всех линейных порядков на R.*

Определим **положительную камеру Вейля**

$$C_+ = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid (\lambda, \alpha) \geqslant 0 \text{ для всех } \alpha \in R_+\}.$$

Для общих корневых систем мы повторим определения, которые были введены в лекции 3 для некоторых частных случаев.

Корень $\alpha \in R_+$ называется **разложимым**, если он может быть записан в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где оба слагаемых принадлежат R_+. В противном случае корень α называется **простым**. Из этого определения видно, что любой положительный корень является линейной комбинацией простых корней с неотрицательными целыми коэффициентами.

Обозначим через Π множество простых корней и заметим, что C_+ ограничена зеркалами $M_1, \ldots, M_n$, соответствующими простым корням.

Матрица $A \in \mathrm{Mat}_l(\mathbb{Z})$ с элементами $A_{i,j} = \dfrac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ называется **матрицей Картана** для Π. Так как W действует на $\mathbb{R}^n$ ортогональными преобразованиями, эта матрица не зависит от выбора отношения порядка (следо-

[2] Двойственный конус V' к выпуклому конусу $V \subset \mathbb{R}^n$ — это множество векторов v' таких, что $(v', v) \geqslant 0$ для всех $v \in V$.

вательно, от выбора П) и содержит всю информацию об исходной корневой системе R.

Существует удобный графический способ выразить информацию, закодированную в матрице Картана A. Рассмотрим **граф Дынкина** Γ_A, вершины которого нумеруются числами $1, 2, , \ldots, n$. Две различные вершины i и j соединяются $m_{i,j}$ ребрами, где $m_{i,j} = A_{i,j} \cdot A_{j,i}$. Если $-A_{i,j}| > |A_{j,i}|$, то надо добавить стрелку, направленную от i к j. Иногда граф Дынкина называется **диаграммой Дынкина**.

Используя перечисленные ниже свойства матрицы Картана A, можно восстановить A из графа Γ_A.

Предложенне 3. (a) *Все диагональные элементы A равны* 2.

(b) *Внедиагональные элементы матрицы A неположительны и* $A_{i,j} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A_{j,i} = 0$.

(c) *Все главные миноры матрицы A положительны. В частности,* $m_{i,j} = A_{i,j} \cdot A_{j,i}$ *может принимать только четыре значения:* 0, 1, 2 *и* 3.

Перечислим все 2×2-матрицы Картана и соответствующие графы:

$$A: \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Γ_A :

Итак, классификация корневых систем сводится к классификации диаграмм Дынкина. Более того, если граф Дынкина Γ множества R несвязный, то R является прямой суммой ортогональных подсистем, соответствующих связным компонентам Γ. Таким образом, достаточно классифицировать все связные графы Дынкина.

Теорема 1. *Связные графы Дынкина образуют четыре бесконечные серии и пять изолированных примеров (см. рис.* 3).

Упражнение 2. Вычислить детерминанты матриц Картана для серий $\mathbf{A_n}, \mathbf{B_n}, \mathbf{C_n}, \mathbf{D_n}, \mathbf{E_n}$.

Указание. Показать, что $\det_n$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям $\det_{n+1} = 2\det_n - \det_{n-1}$ и, следовательно, является линейной функцией от n. Использовать также изоморфизмы $\mathbf{A_1} \cong \mathbf{B_1} \cong \mathbf{C_1}$, $\mathbf{B_2} \cong \mathbf{C_2}$, $\mathbf{A_3} \cong \mathbf{D_3}$, $\mathbf{E_5} \cong \mathbf{D_5}$, $\mathbf{E_4} = \mathbf{A_4}$, $\mathbf{E_3} \cong \mathbf{A_2} + \mathbf{A_1}$.

Ответ. $a_n = n + 1$, $b_n = c_n = 2$, $d_n = 4$, $e_n = 9 - n$.

Упражнение 3. Пусть $\mathbf{T}_{p,q,r}$ — древесный граф с одной тройной вершиной и тремя "хвостами" длины p, q, r. (В частности, $T_{p,q,0} \cong A_{p+q+1}$, $T_{1,1,r} \cong D_{r+3}$, $T_{1,2,r} \cong E_{r+4}$.) Вычислить детерминант $t_{p,q,r}$ соответствующей матрицы Картана.

Ответ. $t_{p,q,r} = 2 + p + q + r - pqr = (p+1)(q+1)(r+1)\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} - 1\right)$.

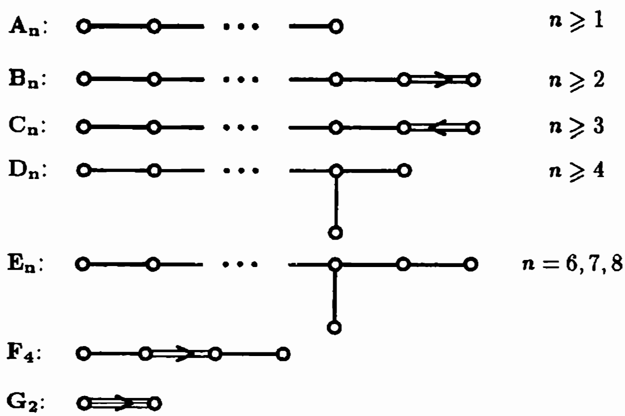

Рис. 3. Графы Дынкина простых корневых систем

Теперь изучим некоторые свойства корневых систем, связанных с группой Вейля. Определим **длину** $w \in W$ по формуле $l(w) = \#(w(R_+) \cap R_-)$ или, словами, $l(w)$ равно числу положительных корней α таких, что $w(\alpha)$ отрицательно.

Предложение 4. *Число $l(w)$ равно минимальной длине разложения $w = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}$ в произведение канонических образующих.*

Схема доказательства. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку λ положительной камеры Вейля C_+ и путь, соединяющий λ с $w\lambda$. Этот путь должен пересекать некоторые зеркала. Выберем путь с минимальным числом пересечений. Нетрудно понять, что этот путь можно деформировать в специальный кусочно линейный путь, сегменты симметричны относительно соответствующих зеркал. Однако тогда все угловые точки $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_k = w(\lambda)$ этого пути имеют вид $\lambda_j = w_j(\lambda)$. Более того, так как $w_j\lambda$ и $w_{j-1}\lambda$ принадлежат смежным камерам Вейля, то же верно для λ и $w_j^{-1} w_{j-1}\lambda$. Однако, как уже отмечалось выше, C_+ ограничено теми зеркалами, которые соответствуют простым корням. Поэтому $w_j^{-1} w_{j-1} = s_{i_j}$ и $w_j = w_{j-1} s_{i_j}$. Следовательно, путь, соединяющий λ с $w\lambda$, соответствует разложению w в произведения образующих. Теперь мы воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 1. *Образующие s_i имеют длину* 1, *т. е. только один положительный корень α имеет свойство $s_i\alpha \in R_-$.*

Доказательство. Очевидно, что простой корень α_i имеет это свойство. Пусть α — любой другой положительный корень. Тогда в разложении $\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j$ по меньшей мере один коэффициент c_j при $j \neq i$ строго положителен. Но при отражении s_i этот коэффициент не меняется. Теперь воспользуемся тем, что коэффициенты c_j либо все неотрицательны (для положительного корня), либо все неположительны (для отрицательного корня). Следовательно, $s_i\alpha \in R_+$. □

Таким образом, если w имеет разложение длины m, то $l(w) \leqslant m$. С другой стороны, существуют $l(w)$ положительных корней, которые становятся отрицательными под действием w. Это означает, что λ и $w(\lambda)$ разделяются $l(w)$ зеркалами, соответствующими этим корням. Следовательно, линейный путь, соединяющий λ и $w\lambda$, пересекает точно $l(w)$ зеркал и w можно разложить в произведение $l(w)$ множителей. □

Каждой корневой системе $R \subset \mathbb{R}^n$ (точнее, соответствующей группе Вейля W) можно поставить в соответствие ряд целых чисел $e_1 \leqslant e_2 \leqslant \cdots \leqslant e_n$, которые называются **показателями** (или **экспонентами**) и имеют много замечательных свойств. Мы укажем здесь некоторые из них.

Предложение 5. (a) *Распределение элементов W согласно их длине задается следующей производящей функцией:*

$$\sum_{w\in W} t^{l(w)} = \prod_{i=1}^{l=\operatorname{rk} G} \frac{1-t^{e_i+1}}{1-t} = \prod_{i=1}^{l=\operatorname{rk} G} (1+t+\ldots+t^{e_i}). \qquad (1)$$

(b) *Алгебра W-инвариантных полиномов на $\mathbb{R}^n$ свободно порождается однородными полиномами $P_1, \ldots, P_n$ такими, что* $\deg P_i = e_i + 1$.

(c) *Алгебра W-инвариантных элементов алгебры Грассмана $\wedge(\mathbb{R}^n)$ свободно порождается однородными элементами $Q_1, \ldots, Q_n$ такими, что* $\deg Q_i = 2e_i + 1$.

(d) *Показатели удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\prod_{i=1}^{n}(e_i+1) = |W|, \quad \sum_{i=1}^{n} e_i = |R_+|, \quad e_i + e_{n-i+1} = h,$$

где h — порядок так называемого **элемента Кокстера** $c = s_1 s_2 \ldots s_n \in W$.[3]

Корневой системе R соответствуют две важные **решетки** (т. е. дискретные подгруппы) в $\mathbb{R}^n$: **корневая решетка**, свободно порожденная простыми корнями

$$Q = \mathbb{Z}\cdot\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\cdot\alpha_l, \qquad (2)$$

и **весовая решетка**

$$P = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \mid \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha \in \Pi \right\}. \qquad (3)$$

[3]Фактически, это произведение зависит от выбора Π и от нумерации простых корней, но все элементы Кокстера принадлежат одному и тому же классу сопряженных элементов W и, следовательно, имеют один и тот же порядок.

Весовая решетка P свободно порождается **фундаментальными весами** $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которые определяются по формуле

$$\frac{2(\omega_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \delta_{ij}. \tag{4}$$

В терминах матриц Картана соотношение между простыми корнями и фундаментальными весами можно записать в виде

$$\alpha_j = \sum_i \omega_i A_{i,j} \quad \text{или} \quad \alpha = \omega \cdot A. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что Q — подрешетка P. Более того, она имеет конечный индекс в P, т. е. фактор-группа P/Q конечна и ее порядок равен $\det A$.

1.2. Компактные и комплексные полупростые группы. Мы используем обозначения из лекции 3, п. 3.1:

K — односвязная компактная группа Ли ранга l с максимальным тором T,

C — центр K, конечная группа порядка c,

G — односвязная комплексная группа Ли такая, что $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$ — каноническое разложение,

R — корневая система для пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$,[4]

$\{H_j, 1 \leqslant j \leqslant l, X_\alpha, \alpha \in R\}$ — **базис Шевалле** в $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями

(i) $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ для $H \in \mathfrak{h}$,

$$\text{(ii)}\ [X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, & 0 \neq \alpha + \beta \in R, \\ 0, & 0 \neq \alpha + \beta \notin R, \\ H_\alpha, & \alpha + \beta = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$H_\alpha = \sum_k \frac{(\alpha_k, \alpha_k)}{2} a_k H_k, \quad \text{если } \alpha = \sum_k a_k \alpha_k.$$

Можно нормировать базис так, что все $N_{\alpha,\beta}$ будут ненулевыми целыми числами такими, что $N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,\alpha}$.[5]

Этот объект представляет интерес в теории простых алгебр Ли над конечными полями. Большинство простых конечных групп могут рассматриваться как алгебраические группы над конечными полями с простой алгеброй Ли.

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ является линейной оболочкой элементов

$$\frac{X_\alpha - X_{-\alpha}}{2}, \quad \frac{X_\alpha + X_{-\alpha}}{2i} \quad \text{для всех } \alpha \in R,\ iH_j,\ 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{7}$$

[4] Ниже мы покажем (см. теорему 2), что корневые системы, введенные в лекции 3, удовлетворяют условиям определения 1.

[5] Мы получаем так называемую **$\mathbb{Z}$-форму** $\mathfrak{g}$, в которой структурные константы целочисленны.

Определим Ad-инвариантную симметрическую билинейную форму (**форму Киллинга**) на $\mathfrak{g}$:

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X, \mathrm{ad}\, Y). \tag{8}$$

Упражнение 4. Показать, что элементы $\{H_j\}$ базиса Шевалле (6) $\mathfrak{g}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$H_j = \frac{2H_{\alpha_j}}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \quad (X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1. \tag{9}$$

Указание. Использовать равенство $\omega_i(H_j) = \delta_{i,j}$. Затем использовать свойство антисимметричности трилинейной формы $\{X, Y, Z\} := ([X, Y], Z)$ на $\mathfrak{k}$ для троек X_α, $X_{-\alpha}$, H.

Лемма 2. (a) *Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ и ее ограничение на $\mathfrak{h}$ невырождены.*
(b) *Ограничение формы Киллинга на $\mathfrak{k}$ отрицательно определено.*

Доказательство. Операторы $\mathrm{ad}\, X$, $X \in \mathfrak{k}$, вещественны и кососимметричны. Следовательно, собственные значения этих операторов чисто мнимые. Поэтому $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X^2) \leqslant 0$. Равенство имеет место, только когда все собственные значения оператора $\mathrm{ad}\, X$ нулевые, т. е. когда $\mathrm{ad}\, X = 0$. Так как $\mathfrak{k}$ имеет нулевой центр, $X = 0$. Таким образом, утверждение (b) доказано.

Первая часть утверждения (a) вытекает из (b), а вторая часть — из соотношения $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$, за исключением случая $\alpha + \beta = 0$. □

Обычно $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ отождествляются посредством формы Киллинга: каждому элементу $X \in \mathfrak{h}$ ставится в соответствие линейный функционал $F_X \in \mathfrak{h}^*$ такой, что $F_X(Y) = (X, Y)$. Поэтому можно перенести форму Киллинга как $K(G)$-инвариантную форму на $\mathfrak{g}^*$ следующим образом:

$$(F_X, F_Y) := (X, Y). \tag{10}$$

Эта форма невырождена на $\mathfrak{h}^*$ и положительно определена на вещественном подпространстве $i\mathfrak{t}^*$, натянутом на корни.

Замечание 1. Иногда используется другая Ad-инвариантная форма $(X, Y)'$ для отождествления $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$. На каждом простом идеале $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$ форма $(X, Y)'$ пропорциональна форме Киллинга: $(X, Y)' = a_i \cdot (X, Y)$. Соответствующие формы на $\mathfrak{g}^*$ связаны соотношением $(F_1, F_2)' = a_i^{-1} \cdot (F_1, F_2)$ для $F_1, F_2 \in \mathfrak{g}_i^*$. В частности, для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и любого линейного представления (π, V) алгебры $\mathfrak{g}$ существует константа $c(\pi)$ такая, что

$$\mathrm{tr}(\pi(X)\pi(Y)) = c(\pi) \cdot (X, Y). \tag{11}$$

Для неприводимого представления π_λ со старшим весом λ и инфинитезимальным характером I_λ имеем

$$c(\pi_\lambda) = \frac{\dim \pi_\lambda I_\lambda(C)}{\dim \mathfrak{g}},$$

где $C = \sum\limits_{j=1}^{l} H_j^2 + \sum\limits_{\alpha \in R} X_\alpha X_{-\alpha}$ — квадратичный **элемент Казимира** $Z(\mathfrak{g})$.

Выясним соотношение между комплексными полупростыми группами Ли, с одной стороны, и абстрактными корневыми системами, с другой стороны. Для этого потребуются некоторые фундаментальные факты о представлениях $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Предложение 6. (a) *Любое конечномерное комплексно-линейное представление $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ является прямой суммой неприводимых представлений.*

(b) *Пусть (π_1, V_1) — стандартное (тавтологическое) представление $\mathfrak{g} : V_1 = \mathbb{C}^2$ и $\pi_1(X) = X$. Обозначим через (π_n, V_n) n-ю симметрическую степень (π_1, V_1). Тогда π_n неприводимо и в некотором базисе пространства $V_n = \mathbb{C}^{n+1}$ имеем*

$$\pi_n(E) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1\cdot n} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\cdot(n-1)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \sqrt{n\cdot 1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi_n(F) = \pi_n(E)^t,$$

$$\pi_n(H) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & n-4 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & -n \end{pmatrix}.$$

(c) *Любое неприводимое конечномерное комплексно-линейное представление $\mathfrak{g}$ эквивалентно одному из представлений π_n, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Теорема 2. (a) *Корневая система, соответствующая паре $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, является корневой системой в евклидовом пространстве it^*.*

(b) *Любая абстрактная приведенная корневая система получается из некоторой пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

(c) *Две комплексные полупростые алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие диаграммы Дынкина изоморфны.*

Схема доказательства. Мы уже видели, что все корни пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ принадлежат подпространству it^*, которое является евклидовым пространством относительно формы (10). Выберем корень α и для любого корня β рассмотрим так называемую **α-струну**, т. е. множество корней вида $\{\beta + k\alpha, -p \leqslant k \leqslant q\}$ таких, что соответствующие корневые векторы $X_k \in \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ удовлетворяют соотношениям

$$[X_\alpha, X_k] = \begin{cases} c_k X_{k+1}, & k < q, \\ 0, & k = q, \end{cases} \qquad [X_{-\alpha}, X_k] = \begin{cases} c'_k X_{k-1}, & k > -p, \\ 0, & k = -p, \end{cases}$$

где c_k и c'_k — некоторые ненулевые константы. Очевидно, что подпространство $S(\beta) \subset \mathfrak{g}$, натянутое на элементы $\{X_k, -p \leqslant k \leqslant q,\}$, является неприводимым $\mathfrak{g}_\alpha$-модулем. Такие модули описаны в предложении 6. Поэтому для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем $q+p=n$ и $[H, X_{\beta+k\alpha}] = (2k+p-q)X_{\beta+p\alpha}$ при подходящем $H \in \mathfrak{h} \bigcap \mathfrak{g}_\alpha$. Так как H пропорционально H_α и $\beta(H_\alpha) = (H_\beta, H_\alpha) = (\beta, \alpha)$, заключаем, что

$$2(\beta,\alpha) = (p-q)(\alpha,\alpha) \quad \text{или} \quad \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = p-q \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, первое свойство корневой системы выполняется.

Для проверки второго свойства рассмотрим опять подалгебру Ли $\mathfrak{g}_\alpha$ и определим элемент $\widetilde{s}_\alpha \in K_\alpha \subset K$ по формуле

$$\widetilde{s}_\alpha = \exp\frac{\pi}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha}).$$

Очевидно, что соответствующий внутренний автоморфизм K сохраняет все подпространства типа $S(\beta)$ и меняет местами одномерные подпространства, порожденные векторами X_{k-p} и X_{q-k}. Заметим, что соответствующие корни $\beta + (k-p)\alpha$ и $\beta + (q-k)\alpha$ симметричны относительно зеркала M_α. Отсюда заключаем, что $\widetilde{s}_\alpha$ принадлежит нормализатору $N_K(T)$ и соответствующий автоморфизм T индуцирует отражение s_α на it^*.

В качестве побочного результата мы получаем реализацию абстрактной группы Вейля как группы $W = N_K(T)/T$ автоморфизмов T и K/T.

Доказательства (b) и (c) более сложны, и мы опускаем их. □

Для произвольной абстрактной корневой системы R были определены выше две замечательные решетки; корневая решетка Q, свободно порожденная простыми корнями, и весовая решетка P, свободно порожденная фундаментальными весами. Таким образом, для любой полупростой компактной группы K с максимальным тором T определены две решетки $Q \subset P \subset it^*$. Выясним значение этих решеток с точки зрения теории представлений. Для этого напомним хорошо известное биективное отображение между классами эквивалентности голоморфных конечномерных представлений комплексной полупростой группы Ли и классами эквивалентности унитарных представлений максимальной компактной подгруппы K этой группы.

Начав с произвольного унитарного представления (π, V) подгруппы K, можно последовательно определить представление (π_*, V) вещественной алгебры Ли $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$, комплексно-линейное представление $(\pi_*^{\mathbb{C}}, V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ и, наконец, голоморфное представление $(\pi^{\mathbb{C}}, V)$ группы G таким образом, что следующая диаграмма будет коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{k} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_*^{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{End}(V) \arrow[d, "\exp"'] \\
K \arrow[r, "i"'] & G \arrow[r, "\pi^{\mathbb{C}}"'] & \mathrm{Aut}(V)
\end{tikzcd}$$

Обратно, ограничение на K любого голоморфного конечномерного представления G эквивалентно унитарному представлению K.

Напомним, что вес λ линейного представления (π, V) группы G является линейным функционалом на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ таким, что для некоторого ненулевого вектора $v \in V$

$$\pi_*(X)v = \lambda(X) \cdot v \quad \text{для любого } X \in \mathfrak{h}. \tag{12}$$

Этот функционал принимает чисто мнимые значения на $\mathfrak{t}$ и, следовательно, может рассматриваться как элемент $i\mathfrak{t}^*$.

Временно обозначим через P' множество всех весов всех голоморфных конечномерных представлений группы G. Как будет показано ниже, P' совпадает с весовой решеткой $P \subset i\mathfrak{t}^*$, определенной в терминах корневой системы.

Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через e^λ функцию на H такую, что

$$e^\lambda(\exp X) = e^{\lambda(X)}, \quad X \in \mathfrak{h}. \tag{13}$$

Не очевидно (и неверно в общем случае!), что эта функция определена корректно. Действительно, элемент $h \in H$ может иметь различные "логарифмы" X (т. е. элементы $X \in \mathfrak{h}$ такие, что $h = \exp X$).

Однако в силу (12) для любого $h \in H$

$$\pi(\exp X)v = e^{\pi_*(X)} \cdot v = e^{\lambda(X)} \cdot v = e^\lambda(\exp X) \cdot v. \tag{12'}$$

Следовательно, для $\lambda \in P'$ функция e^λ определена корректно.

Для дальнейших рассмотрений потребуется понятие **двойственной решетки**. Пусть V — конечномерное вещественное или комплексное векторное пространство и V^* — двойственное пространство. Для решетки L в V^* двойственная решетка L^* в V определяется по формуле

$$v \in L^* \iff f(v) \in \mathbb{Z} \quad \text{для всех } f \in L.$$

Очевидно, что это понятие самодвойственно: если рассматривать V как двойственное пространство V^*, то L будет двойственной решеткой для L^*.

Рассмотрим двойственные решетки $P^* \subset Q^* \subset i\mathfrak{t}$. Теоретико-групповая интерпретация этих решеток дана в следующем предложении. В качестве побочного результата мы получаем также доказательство равенства $P' = P$.

Предложение 7. (a) *Имеют место следующие соотношения:*

$$2\pi i(P')^* = \mathfrak{h} \bigcap \exp^{-1}(e), \quad 2\pi i Q^* = \mathfrak{h} \bigcap \exp^{-1}(C). \tag{14}$$

(b) *Оба определения веса совпадают, т. е. $P' = P$.*

Следствие. *Порядок с центра C равен $\#(P/Q) = \det A$.*

Доказательство предложения 7. Начнем с первого соотношения (14). Для любого $X \in \mathfrak{h} \bigcap \exp^{-1}(e)$ имеем $1 = e^\lambda(\exp X) = e^{\lambda(X)}$ или $\lambda(X) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Поэтому $\mathfrak{h} \bigcap \exp^{-1}(e) \subset 2\pi i(P')^*$.

Для доказательства обратного включения воспользуемся тем, что группа G имеет точное конечномерное представление. Поэтому совокупность всех функций e^λ, $\lambda \in P'$, отделяет точки H. Таким образом, если $X \in (P')^*$, то $e^\lambda(\exp 2\pi i X) = e^{2\pi i \lambda(X)} = 1$ для всех $\lambda \in P'$ и, следовательно, $\exp(2\pi i X) = e$.

Второе соотношение (14) доказывается точно так же, но следует рассматривать присоединенное представление. Функции e^λ, $\lambda \in Q$, не отделяют точки h_1 и h_2 пространства H тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ad} h_1 = \operatorname{Ad} h_2$, т. е. $h_1 h_2^{-1} \in C$. Поэтому $\exp X \in C$ эквивалентно $\lambda(X) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ для всех $\lambda \in Q$, т. е. $X \in 2\pi i Q^*$.

Для доказательства (b) нам потребуется

Лемма 3. *Для простой трехмерной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ справедливо равенство $P' = P$.*

Доказательство. Пусть E, F, H — стандартный базис $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. В силу предложения 6 старший вес λ_n представления π_n удовлетворяет равенству $\lambda_n(H) = n$, а все другие веса также принимают целочисленные значения в H. Таким образом, гомоморфизм вычисления в точке H отождествляет решетку P' с $\mathbb{Z}$. С другой стороны, $\alpha = \lambda_2$ — единственный положительный корень $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Следовательно, оценивание в H отождествляет решетку Q с $2\mathbb{Z}$. Наконец, образующий элемент ω решетки P определяется равенством $\dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 1$, из которого следует $\omega = \dfrac{1}{2}\alpha = \lambda_1$. Следовательно, $P' = P$. □

Продолжим доказательство предложения 7. Пусть $\lambda \in P'$. Рассмотрим соответствующее представление (π, V) группы G и его ограничение π_* на подалгебру $\mathfrak{g}_\alpha^* \subset \mathfrak{g}$. Тогда $\lambda\big|_{\mathfrak{g}_\alpha}$ будет весом представления $\mathfrak{g}_\alpha$. Выражение $\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ не зависит от выбора Ad-инвариантной формы на $\mathfrak{g}_\alpha$. Следовательно, это выражение равно целому числу и $P' \subset P$.

Для доказательства вложения $P \subset P'$ достаточно показать, что каждый фундаментальный вес принадлежит P'. Ниже мы покажем, что они являются старшими весами некоторых неприводимых представлений G. □

Для дальнейшего введем **канонические координаты** $(t_1, \ldots, t_l)$ на H по формуле

$$t_k(\exp X) = e^{\langle \omega_k, X\rangle}. \tag{15}$$

Эти координаты принимают ненулевые комплексные значения. Поэтому они отождествляют подгруппу Картана $H \subset G$ с подмножеством $(\mathbb{C}^\times)^l \subset \mathbb{C}^l$. При таком отождествлении максимальный тор $T \subset K$ переходит в подмножество $\mathbb{T}^l \subset (\mathbb{C}^\times)^l$. В то же время, решетка P отождествляется с $\mathbb{Z}^l$, так что функция e^λ принимает вид

$$e^\lambda(h) = t_1^{k_1}(h)\ldots t_l^{k_l}(h), \qquad \lambda = (k_1, \ldots, k_l). \tag{16}$$

1.3. Классические и особые группы. Здесь мы подытожим сведения об особых простых комплексных алгебрах Ли. Оказывается, любая такая алгебра может быть построена как $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли, где роль $\mathfrak{g}_0$ играет некоторая классическая алгебра Ли. Опишем один красивый результат, полученный Е. Винбергом и В. Кацом.

Пусть R — корневая система простой алгебры Ли g ранга n, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — множество простых корней и $\psi \in R$ — максимальный корень. Определим **расширенный граф Дынкина** $\widetilde{\Gamma}$ следующим образом. Вершины $\widetilde{\Gamma}$ образуют множество $\widetilde{\Pi} = \Pi \bigcup \{\alpha_0\}$, где $\alpha_0 = -\psi$. Вершины α_i и α_j соединяются $n_{i,j} = A_{i,j} \cdot A_{j,i}$ ребрами. Числа a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, определены следующим образом:

$$a_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha_k = 0. \tag{17}$$

Предложение 8. *Пусть Γ_k — граф, полученный из $\widetilde{\Gamma}$ удалением k-й вершины вместе с выходящими ребрами. Тогда $\mathfrak{g}$ может быть реализована как $(\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли, где $\mathfrak{g}_0$ определяется графом Γ_k.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра $\mathfrak{g}$, порожденная $\{X_{\pm\alpha}, \alpha \in \Gamma_k\}$. Согласно теореме 2(c) $\mathfrak{g}_0$ — полупростая подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. В силу (17) корневая решетка $\mathfrak{g}_0$ имеет индекс a_k в корневой решетке $\mathfrak{g}$. Таким образом, $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{g}_0$-модуль $(\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z})$-градуированная. Более точно, степень X_α равна $\dfrac{2(\omega_k, \alpha)}{(\alpha_k, \alpha_k)} \bmod a_k$. Заметим, что старший вес $\mathfrak{g}_0$-модуля степени 1 равен α_k. □

Пример 1. Рассмотрим особую комплексную алгебру Ли $\mathbf{G}_2$. Расширенный граф Дынкина и числа $\{a_k\}$ изображены на рис. 4.

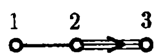

Рис. 4. Расширенный граф Дынкина $\widetilde{\Gamma}$ для $\mathbf{G}_2$

Следовательно, $\mathbf{G}_2$ может быть определена как

• $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}_0 = sl(2,\mathbb{C}) \oplus sl(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_1 = V_1 \otimes V_3$, где V_1 — стандартное двумерное представление первого множителя и V_3 — четырехмерное представление второго множителя (симметрический куб стандартного представления),

• $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$-градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $\mathfrak{g}_0 = sl(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_1 = V$, $\mathfrak{g}_{-1} = V^*$, где V — стандартный трехмерный $\mathfrak{g}_0$-модуль, который реализуется как пространство вектор-столбцов и V^* — двойственный модуль вектор-строк.

Соответствующие разложения корневой системы показаны ниже.

Рассмотрим более подробно второй подход. Коммутаторы однородных элементов $X \in \mathfrak{g}_i$ и $Y \in \mathfrak{g}_j$ определяются следующим образом.

Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, $v, v' \in V$, $f, f' \in V^*$. Тогда $[X,Y] = XY - YX$, $[X,v] = Xv$, $[f,X] = fX$, $[v,f] = vf - fv \cdot 1$, $[v,v'] = f(v,v')$, $[f,f'] = v(f,f')$, где $f(v,v') \in V^*$ и $v(f,f') \in V$ определяются соотношениями

$$\langle f(v,v'), v'' \rangle = a \cdot \det \begin{vmatrix} v & v' & v'' \end{vmatrix}, \quad \langle f'', v(f,f') \rangle = b \cdot \det \begin{vmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{vmatrix},$$

a и b — некоторые константы. В силу тождества Якоби имеем $2ab = 1$. Таким образом, мы приходим к матричной реализации $\mathbf{G}_2$ комплексными 7×7-матрицами вида

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X & v & A(\check{f}) \\ f & 0 & -\check{v} \\ A(v) & -\check{f} & -\check{X} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где A — линейное отображение V в $so(3, \mathbb{C})$, заданное по формуле

$$A(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^2 & -v^1 & 0 \\ -v^3 & 0 & v^1 \\ 0 & v^3 & -v^2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем компактную вещественную форму для G_2, предположив, что X — косо-эрмитова матрица и $v = -f^t$. Заканчивая описание $\mathbf{G}_2$, отметим, что ограничение семимерного представления (17) на компактную вещественную форму для $\mathbf{G}_2$ отождествляет $\mathbf{G}_2$ с ограничением алгебры Ли дифференцирований 8-мерной **алгебры октав** $\mathbb{O}$ на подпространство чисто мнимых элементов.

Дело в том, что для любой матрицы $\mathcal{X}$ вида (17) линейное преобразование, заданное $\exp \mathcal{X}$, сохраняет некоторую трилинейную форму $\{a, b, c\}$ в $\mathbb{R}^7$. Так как оно сохраняет также билинейную форму $(a, b) = \bar{a}b$, можно определить неассоциативную билинейную операцию в $\mathbb{R}^8$:

$$(\alpha, a) * (\beta, b) = (\gamma, c), \quad \gamma = \alpha\beta - (a, b), \ (c, c') = \{a, b, c'\}.$$

Тогда получаем в точности алгебру октав.

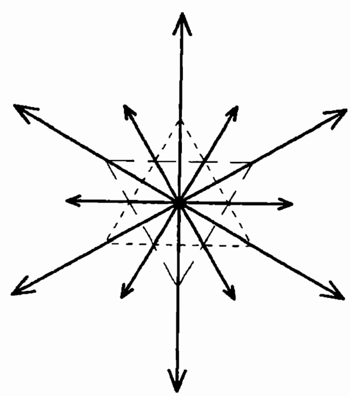

Рис. 5. **Разложения корневой системы для $\mathbf{G}_2$**

Укажем расширенные графы Дынкина для других особых простых алгебр Ли (см. рис. 6).

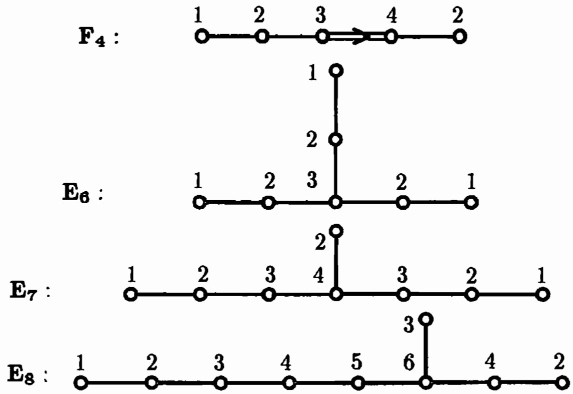

Рис. 6. Расширенные графы Дынкина

Читатель легко сможет вывести правило, по которому распределяются числа a_k: имеется максимальное значение $a_j = \max\limits_k a_k$, а все другие числа образуют арифметическую прогрессию на любом сегменте графа Дынкина, начиная с $\{j\}$.

Упражнение 5. Описать градуированные реализации остальных особых алгебр Ли.

Ответ. Для $\mathbf{F}_4$:

1) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{B}_4$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_4}$,
2) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{C}_3 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_3} \otimes V_{\omega_1}$,
3) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_2$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{2\omega_1}$, $\mathfrak{g}_{-1} = V_{\omega_2} \otimes V_{2\omega_2}$,
4) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_2 = V_{\omega_2} \otimes V_{2\omega}$, $\mathfrak{g}_3 = V_{\omega_3} \otimes V_{\omega}$.

Для $\mathbf{E}_6$:

1) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_3} \otimes V_{\omega_1}$,
2) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_2$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_1}$, $\mathfrak{g}_{-1} = V_{\omega_2} \otimes V_{\omega_2} \otimes V_{\omega_2}$

Для $\mathbf{E}_7$:

1) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_7$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_4}$,
2) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{D}_6 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_6} \otimes V_{\omega_1}$,
3) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_2$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_2}$, $\mathfrak{g}_{-1} = V_{\omega_2} \otimes V_{\omega_4}$,
4) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_3} \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_2 = V_{\omega_2} \otimes V_{\omega_2} \otimes V_0$, $\mathfrak{g}_3 = V_{\omega_3} \otimes V_{\omega_1} \otimes V_{\omega}$.

Для $\mathbf{E}_8$:

1) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{D}_5$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_5}$, $\mathfrak{g}_2 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_5}$, $\mathfrak{g}_3 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_5}$,

2) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_4 \times \mathbf{A}_4$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_2}$, $\mathfrak{g}_2 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_3}$, $\mathfrak{g}_3 = V_{\omega_4} \otimes V_{\omega_2}$, $\mathfrak{g}_4 = V_{\omega_4} \otimes V_{\omega_3}$,

3) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega_2} \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_2 = V_{\omega_2} \otimes V_{\omega_1} \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_3 = V_{\omega_3} \otimes V_0 \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_4 = V_{\omega_4} \otimes V_{\omega_2} \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_5 = V_{\omega_5} \otimes V_{\omega_1} \otimes V_{\omega}$,

4) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_7 \times \mathbf{A}_1$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_1} \otimes V_{\omega}$, $\mathfrak{g}_2 = V_{\omega_4} \otimes V_0$, $\mathfrak{g}_3 = V_{\omega_7} \otimes V_{\omega}$,

5) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{D}_8$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_8}$,

6) $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_8$, $\mathfrak{g}_1 = V_{\omega_3}$, $\mathfrak{g}_{-1} = V_{\omega_6}$.

2. Коприсоединенные орбиты компактной группы Ли

2.1. Геометрия коприсоединенных орбит. Для компактной группы Ли K коприсоединенное представление эквивалентно присоединенному представлению ввиду существования Ad-инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$.

Хорошо известная теорема о компактной группе преобразований утверждает, что для данной компактной группы Ли K существует лишь конечное число типов (ко)присоединенных орбит, рассматриваемых как однородные K-многообразия. Другими словами, стабилизаторы элементов $X \in \mathfrak{k}$ (или $F \in \mathfrak{k}^*$) образуют конечное число классов сопряженности подгрупп K. Пусть $K^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, — представители этих классов. Тогда любая присоединенная (или коприсоединенная) орбита изоморфна одному из фактор-пространств $\mathcal{F}_i = K/K_i$.

Общие орбиты (максимальной размерности) образуют один тип. Стабилизаторы этих орбит являются максимальными торами в K.

Предложение 9. (a) *Подгруппы $K^{(i)}$ можно выбрать таким образом, что $T \subseteq K^{(i)} \subseteq K$.*

(b) *Каждая подгруппа, промежуточная между T и K, сопряжена какой-либо из подгрупп $K^{(i)}$.*

Оба утверждения будут выведены из следующего важного факта.

Лемма 4. *Любая K-орбита в $\mathfrak{k}^*$ пересекает положительную камеру Вейля C_+ точно в одной точке.*

Доказательство. Пусть Ω — K-орбита в $\mathfrak{k}$. Выберем регулярный элемент $\lambda \in \mathfrak{t}$ и рассмотрим функцию $d_\lambda(\mu) = |\mu - \lambda|^2$ на Ω. Так как Ω — компактное множество, эта функция достигает минимума в некоторой точке μ_0, которая должна быть стационарной точкой d_λ. Поэтому для любого $X \in \mathfrak{k}$ имеем $([X, \mu_0], \lambda) = 0$, откуда получаем равенство $([\mu_0, \lambda], X) = 0$ для всех $X \in \mathfrak{k}$. Таким образом, μ_0 коммутирует с λ и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{t}$. Заменяя, при необходимости, μ_0 на $w(\mu_0)$ для подходящего $w \in W$, мы можем считать, что $\mu_0 \in C_+$.

Остается заметить, что W-орбита любой точки имеет единственную общую точку с C_+. Действительно, пусть $\mu \in C_+$ и $w \in W$. Тогда $w(\mu)$ отделено от μ $l(w)$ зеркалами. Поэтому $w(\mu)$ может принадлежать C_+ только тогда, когда $w(\mu)$ принадлежит всем этим зеркалам. Но в этом случае $w(\mu) = \mu$. □

Доказательство предложения 9. Очевидно, что стабилизатор точки $\mu \in \mathfrak{t}$ содержит T и совпадает с T для регулярной точки μ. Утверждение (a) доказано.

Если μ — произвольная точка $\mathfrak{t}$, то алгебра Ли стабилизатора этой точки содержит $\mathfrak{t}$ и, следовательно, имеет вид

$$\mathfrak{k}^{(i)} = \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in R_i} \left(\mathbb{R} \cdot \frac{X_\alpha - X_{-\alpha}}{2} \oplus \mathbb{R} \cdot \frac{X_\alpha + X_{-\alpha}}{2i} \right) \quad \text{для некоторого } R_i \subset R.$$

Обратно, любая такая подалгебра является централизатором некоторого элемента $\mu \in \mathfrak{t}$. □

Пространство $\mathcal{F} = K/T$ называется **полным флаговым многообразием** для K. Остальные однородные пространства $\mathcal{F}_i = K/K^{(i)}$ называются **обобщенными флаговыми многообразиями** они могут быть получены из $\mathcal{F}$ проекцией со слоем, изоморфным произведению меньших флаговых многообразий.

Пример 2. Пусть $K = U(n)$, $T = T(n)$ — подгруппа диагональных матриц. Тогда $\mathfrak{g}$ состоит из всех косо-эрмитовых $n \times n$-матриц X. Мы можем определить инвариантную билинейную форму на $\mathfrak{g}$ по формуле $(X, Y) := -\operatorname{tr}(XY)$. Утверждение (a) предложения 8 в этом случае сводится к хорошо известному факту: любая косо-эрмитова матрица может быть приведена к диагональной форме сопряжением с помощью унитарной матрицы. Согласно (b) эта диагональная матрица единственна, если (чисто мнимые) собственные значения $(i\lambda_1, \ldots, i\lambda_n)$ удовлетворяют условию $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Собирая равные собственные значения матрицы X в блоки размеров $n_1, \ldots, n_r$, мы видим, что $\operatorname{Stab}(X)$ будет сопряженным блочно-диагональной подгруппе $U_{n_1,\ldots,n_r} \simeq U_{n_1} \times \ldots \times U_{n_r}$. Соответствующая орбита имеет размерность $d = 2 \sum\limits_{i<j} n_i n_j$, и эта величина изменяется от 0 до $n(n-1)$. В этом случае число различных типов орбит равно числу $p(n)$ всех разбиений n.

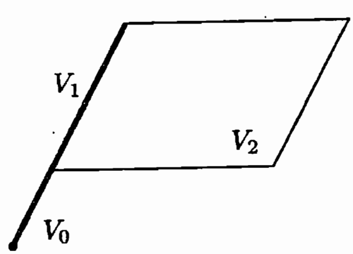

Рис. 7. Флаг в $\mathbb{R}^3$

Флаговое многообразие $\mathcal{F}_{n_1,\ldots,n_r}$ может быть реализовано как многообразие всех **фильтраций**, называемых также **флагами**, типа $(n_1,\ldots,n_r)$:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{C}^n, \quad \dim V_i/V_{i-1} = n_i.$$

Наиболее вырожденные флаговые многообразия — это **грассманианы** $G_{n,k} = U(n)/U_{k,n-k}$. Геометрически они реализуются как многообразия k-мерных подпространств $\mathbb{C}^n$.

Флаговые многообразия имеют богатую геометрическую структуру, которую мы сейчас опишем.

Во-первых, будучи однородными пространствами для компактной группы Ли K, они допускают K-инвариантную риманову метрику.

Во-вторых, будучи коприсоединенными орбитами, они имеют каноническую K-инвариантную симплектическую структуру.

В-третьих, они могут быть снабжены K-инвариантной комплексной структурой, т. е. допускают локальные комплексные координаты, в которых действие K голоморфно.

Кроме того, все три структуры можно объединить в одну, считая, что флаговые многообразия являются однородными кэлеровыми K-многообразиями

Напомним, что комплексное многообразие M называется **кэлеровым**, если в каждом касательном пространстве $T_m(M)$ задана эрмитова форма $h(x,y)$ такая, что

(i) вещественная часть $g = \operatorname{Re} h$ определяет риманову метрику на M,

(ii) мнимая часть $\sigma = \operatorname{Im} h$ определяет симплектическую структуру на M.

Пусть $z^1,\ldots,z^n, z^k = x^k + iy^k$, — локальная система координат на M. Тогда локальные выражения для h, g и σ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
&h = h_{\alpha,\beta} dz^\alpha \otimes \overline{dz^\beta}, \quad h_{\beta,\alpha} = \overline{h_{\alpha,\beta}} = s_{\alpha,\beta} + i a_{\alpha,\beta}, \ s_{\alpha,\beta}, a_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R},\\
&g = s_{\alpha,\beta}(dx^\alpha dx^\beta + dy^\alpha dy^\beta) + 2a_{\alpha,\beta} dx^\alpha dy^\beta,\\
&\sigma = \frac{1}{2} a_{\alpha,\beta}(dx^\alpha \wedge dx^\beta + dy^\alpha \wedge dy^\beta) - s_{\alpha,\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta.
\end{aligned}$$

Лемма 5. *Пусть M — комплексное многообразие с локальными координатами $z^1,\ldots,z^n$ и $h = h_{\alpha,\beta} dz^\alpha \overline{dz^\beta}$ — локальное выражение кэлеровой формы на M.*

(a) *В окрестности любой данной точки существует вещественнозначная функция $\mathbf{K}$ такая, что коэффициенты h имеют вид*

$$h_{\alpha,\beta} = \partial_\alpha \overline{\partial}_\beta \mathbf{K}. \tag{19}$$

(b) *Функция $\mathbf{K}$, называемая* **кэлеровым потенциалом формы** *h, определяется с точностью до слагаемого вида $\operatorname{Re} f$, где f — голоморфная функция.*

Схема доказательства. (a) Удобно переписать симплектическую форму $\sigma = \operatorname{Im} h$ в виде $\frac{1}{2} h_{\alpha,\beta} dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta}$. В силу условия $d\sigma = 0$ имеем

$$\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial z^\gamma} dz^\gamma \wedge dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta} + \frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial \overline{z^\gamma}} dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta} \wedge \overline{dz^\gamma} = 0.$$

Так как слагаемые принадлежат различным типам (2,1) и (1, 2) соответственно, равенство может быть верным только лишь, если оба слагаемых обращаются в нуль. Следовательно,

$$\frac{\partial h_{\gamma,\beta}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial z^\gamma}, \quad \frac{\partial h_{\alpha,\gamma}}{\partial \overline{z^\beta}} = \frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial \overline{z^\gamma}}. \tag{20}$$

Известно,[6] что первое условие в (20) достаточно для существования функции φ_β такой, что локально выполняется равенство $h_{\alpha,\beta} = \partial\varphi_\beta/\partial z^\alpha$.

Аналогично, второе условие в (20) обеспечивает существование функции ψ_α такой, что локально выполняется равенство $h_{\alpha,\beta} = \partial\psi_\alpha/\partial\overline{z^\beta}$.

Наконец, уравнение $\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial z^\alpha} = \dfrac{\partial\psi_\alpha}{\partial\overline{z^\beta}}$ гарантирует существование функции $\mathbf{K}$ такой, что локально выполняются соотношения

$$\varphi_\beta = \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\overline{z^\beta}}, \quad \psi_\alpha = \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial z^\alpha}.$$

Таким образом, мы нашли функцию $\mathbf{K}$, удовлетворяющую (19). Заметим, что комплексно-сопряженная функция $\overline{\mathbf{K}}$ также удовлетворяет (19), поскольку матрица $\|h_{\alpha,\beta}\|$ эрмитова. Поэтому $\operatorname{Re}\mathbf{K}$ вещественная функция и опять же удовлетворяет (19).

Утверждение (b) справедливо, так как все вещественные решения системы уравнений

$$\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha\partial\overline{z^\beta}}f = 0, \quad \alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,n\},$$

имеют вид $f = \operatorname{Re} g$, где g — голоморфная функция. □

Пример 3. Пусть $K = U(n+1)$, $M = K/U_{n,1} = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Для $n \geqslant 2$ это вырожденное флаговое многообразие. Обозначим через $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ однородные комплексные координаты в M и положим

$$\mathbf{K}_i = -\log\frac{|x_i|^2}{\sum\limits_k |x_k|^2} \text{ на аффинной части } U_i\subset M, \text{ где } x_i\neq 0.$$

Так как разности $\mathbf{K}_j - \mathbf{K}_i = \log\dfrac{x_i}{x_j} + \overline{\log\dfrac{x_i}{x_j}}$ суть вещественные части аналитических функций, соответствующая кэлерова форма не зависит от индекса i и корректно определена на M. В локальных координатах $z_k = \dfrac{x_k}{x_0}$, $1\leqslant k\leqslant n$, кэлерова форма на U_0 выглядит следующим образом:

$$h = \frac{\sum\limits_k dz_k\otimes\overline{dz_k}}{1+\sum\limits_k|z_k|^2} - \frac{\sum\limits_{k,l}\overline{z_k}z_l dz_k\otimes\overline{dz_l}}{(1+\sum\limits_k|z_k|^2)^2}. \tag{21}$$

[6] На самом деле мы используем здесь лемму Дольбо — Гротендика (комплексный аналог леммы Пуанкаре): $d'\omega = 0$ локально влечет $\omega = d'\theta$, где d' — голоморфная часть дифференцирования d, т. е. $d'(f dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_p}\wedge d\overline{z}^{j_1}\wedge\ldots\wedge d\overline{z}^{j_q}) = \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}}{\partial z_i}dz^i\wedge dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_p}\wedge d\overline{z}^{j_1}\wedge\ldots\wedge d\overline{z}^{j_q}$.

Соответствующая метрика известна под названием **метрика Фубини — Штуди** на $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. В частности, при $n = 1$ мы получаем формулу $g = |dz|^2(1 + |z|^2)^{-2}$.

Можно дать простое объяснение тому, что все флаговые многообразия обладают комплексной структурой. Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ — это полупростая вещественная алгебра Ли, допускающая комплексификацию $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. Пусть $G_{\mathbb{C}}$ — соответствующая односвязная комплексная группа Ли.

Для упрощения технических выкладок, предположим, что группа K односвязна. Известно, что в этом случае K вкладывается в G как максимальная компактная подгруппа.

Рассмотрим стандартное разложение (см. лекцию 3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Пусть $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_\pm$ — противоположные подалгебры Бореля и $B_\pm \subset G_{\mathbb{C}}$ — соответствующие подгруппы. Мы часто будем опускать индекс "$_+$" в обозначениях $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{b}_+, B_+$.

Напомним, что $H = T_{\mathbb{C}}$ — **подгруппа Картана** $G_{\mathbb{C}}$, т. е. максимальная абелева подгруппа, которая состоит из Ad-полупростых элементов.

Рассмотрим комплексное однородное многообразие $Y = G/B$.

Лемма 6. *Компактная группа K действует транзитивно на Y и стабилизатор начальной точки совпадает с $B \cap K = T$.*

Доказательство. Пусть $\{H_k, 1 \leqslant k \leqslant l, X_\alpha, \alpha \in R,\}$ — базис Шевалле в $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями (6)

Напомним, что **компактная вещественная форма** $\mathfrak{k}$ для $\mathfrak{g}$ является линейной оболочкой элементов $X_\alpha - X_{-\alpha}$, $iX_\alpha + iX_{-\alpha}$ для всех $\alpha \in R$, iH_k, $1 \leqslant k \leqslant l$. Поэтому

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{k} \bigcap \mathfrak{b} = \mathfrak{t}. \tag{22}$$

Первое равенство в (22) означает, что K-орбита начальной точки $B/B \in G/B$ открыта. Поскольку эта орбита компактна, она также замкнута и, следовательно, совпадает с $Y = G/B$.

Второе равенство в (22) показывает, что локально $K \bigcap B$ совпадает с T. Так как T — максимальная компактная подгруппа B, это верно и глобально. □

Таким образом, мы можем отождествить $\mathcal{F}$ с Y. Тогда мы получим K-инвариантную комплексную структуру на флаговом многообразии $\mathcal{F}$.

Для вырожденного флагового многообразия $\mathcal{F}_i = K/K_i$ ситуация аналогична: роль Y_i играет G/P_i, где P_i — **параболическая** подгруппа G, т. е. минимальная комплексная подгруппа G, содержащая B и K_i.

Замечание 2. K-инвариантная комплексная структура на флаговом многообразии не единственна. В случае полного флагового многообразия $\mathcal{F} = K/T$ все возможные комплексные структуры могут быть описаны следующим образом:

Ранее мы определили **группу Вейля** W, соответствующую паре (K, T), как $W = N_K(T)/T$. Эта группа как K-пространство действует автоморфизмами $\mathcal{F}$.[7] Заметим, что группа Вейля W совпадает с $N_G(H)/H$. Следовательно, эта группа действует автоморфизмами G/H как однородного пространства.

Однако действие $w \in W$ на G/B *не является автоморфизмом* этого комплексного однородного пространства! Оказывается, что W действует на множестве $c(\mathcal{F})$ всех различных K-инвариантных комплексных структур на $\mathcal{F}$ просто транзитивно. Таким образом, $c(\mathcal{F})$ — главное однородное пространство для W и имеет мощность $|W|$.

Заметим, что существуют ровно $|W|$ различных борелевских подгрупп, содержащих H и, следовательно, $|W|$ способов отождествить $\mathcal{F}$ с Y.

С этого момента мы фиксируем комплексную структуру на $\mathcal{F}$ или, другими словами, фиксируем борелевскую подгруппу B такую, что $B \supset H \supset T$.

Пример 4. Пусть $K = SU(2)$. Тогда $G = SL(2, \mathbb{C}), \mathcal{F} = S^2, Y = P^1(\mathbb{C})$ и две комплексные структуры на S^2 приводят нас к двум K-ковариантным отождествлениям S^2 и $\mathbb{C}P(1)$.

Оставляем читателю следующее полезное

? Упражнение 6*. Описать шесть различных инвариантных комплексных структур на флаговом многообразии $\mathcal{F} = SU(3)/T$.

Указание. Точки пространства $Y = SL(3, \mathbb{C})/B$ геометрически реализуются флагами $V_1 \subset V_2$, где V_i — i-мерное подпространство $\mathbb{C}^3$. Можно рассматривать V_1 как точку проективной плоскости $P^2(\mathbb{C})$ и V_2 (более точно, аннулятор $V_2^{\perp} \subset (\mathbb{C}^3)^*$) — как точку двойственной проективной плоскости ${}^*P^2(\mathbb{C})^*$. Мы получим K-ковариантное вложение Y в произведение двух двойственных комплексных проективных плоскостей. В терминах двойственных однородных координат $(y^1 : y^2 : y^3)$ и $(y_1 : y_2 : y_3)$ в этих плоскостях многообразие Y задается уравнением $y^1y_1 + y^2y_2 + y^3y_3 = 0$. Далее, K-ковариантное отображение $\mathcal{F} \to Y$ полностью определяется образом начальной точки $x_0 = T/T \in K/T = \mathcal{F}$. Этот образ должен быть неподвижной точкой T-действия на Y. Остается показать, что существуют шесть неподвижных точек T в Y и найти их.

2.2. Топология коприсоединенных орбит. В основном мы интересуемся орбитами максимальной размерности, которые называются **общими** или **регулярными**. Мы уже видели, что каждая (ко)присоединенная орбита пересекает подпространство $\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^*$. Кроме того, для регулярной орбиты Ω это пересечение состоит из $|W|$ различных точек, которые образуют главную W-орбиту. Все эти точки являются **регулярными** элементами $\mathfrak{t}$, т. е. их централизатор совпадает с T. Поэтому, все регулярные орбиты диффеоморфны полному флаговому многообразию $\mathcal{F} = K/T$.

Теперь изучим топологию регулярных орбит.

Теорема 3 (лемма Брюа). *Пусть G — комплексная полупростая группа Ли, H — подгруппа Картана и $W = N_G(H)/H$ — соответствующая группа Вейля. Выберем борелевскую подгруппу $B \supset H$ и для любого $w \in W$ выберем представителя $\tilde{w} \in N_G(H)$ класса $w \in N_G(H)/H$. Тогда G является*

[7] См. упражнение 3 из лекции 4.

дизъюнктным объединением двойных смежных B-классов

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B\widetilde{w}B, \quad \widetilde{w} \in w. \tag{23}$$

Упражнение 7*. Доказать лемму Брюа для классической простой комплексной группы.

Указание. Использовать реализацию флагов в виде фильтраций и данной паре фильтраций поставить в соответствие элемент группы Вейля. В случае $G = SL(n, \mathbb{C})$ это можно проделать следующим образом. Рассмотрим пару фильтраций

$$f : \{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n, \quad f' : \{0\} = V_0' \subset V_1' \subset \cdots \subset V_n' = \mathbb{C}^n$$

такую что $\dim V_i = \dim V_i' = i$. Заметим, что фильтрация на векторном пространстве V индуцирует фильтрацию на любом подпространстве, на любом фактор-пространстве и на любом подфакторе (т. е. факторе одного подпространства по другому подпространству). В частности, первая фильтрация f индуцирует фильтрацию на $W^{(i)} = V_i'/V_{i-1}'$. Индуцированная фильтрация имеет вид

$$0 = W_0^{(i)} \subset W_1^{(i)} \subset \cdots \subset W_n^{(i)} = W^{(i)},$$

$$W_j^{(i)} = (V_i' \bigcap V_j) \Big/ (V_{i-1}' \bigcap V_j) + (V_i' \bigcap V_{j-1}).$$

Так как $W^{(i)}$ — одномерное пространство, в точности один из факторов $W_j^{(i)}/W_{j-1}^{(i)}$ ненулевой. Пусть это будет для номера $j = s(i)$. Получаем отображение $i \mapsto s(i)$, которое на самом деле есть перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Однако множество S_n перестановок — это и есть группа Вейля для $SL(n, \mathbb{C})$.

Пусть $N = \exp \mathfrak{n} = [B, B]$. Тогда N — нормальная подгруппа B, которая называется **унипотентным радикалом** B. Более того, B — полупрямое произведение $H \ltimes N$. Пусть $N_w = N \bigcap \widetilde{w} N \widetilde{w}^{-1}$, где $\widetilde{w}$ — представитель в $N_K(T)$ класса $w \in W = N_K(T)/T$.

Определим **длину** $w \in W$ по формуле $l(w) = \dim_{\mathbb{C}} N - \dim_{\mathbb{C}} N_w$. Согласно предложению 4 это определение эквивалентно каждому из следующих утверждений:

- $l(w)$ — длина минимального представления w как произведения канонических порождающих $s_1, \ldots, s_l$ группы W.
- $l(w) = \#(w(R_+) \bigcap R_-)$ т. е. число положительных корней α таких, что $w(\alpha)$ отрицательно.

Следствие. *Полное флаговое многообразие $\mathcal{F} = G/B$ является объединением четномерных клеток:*

$$\mathcal{F} = \bigsqcup_{w \in W} \mathcal{F}_w, \quad \dim \mathcal{F}_w = 2l(w). \tag{24}$$

Доказательство. В силу разложения (23) существуют $|W|$ B-орбит в $\mathcal{F}$, пронумерованных элементами W. А именно, положим $\mathcal{F}_w = B\widetilde{w} \bmod B$. Общий элемент $x \in \mathcal{F}_w$ может быть записан в виде $x = nh\widetilde{w} \bmod B$, $h \in H$, $n \in N$. Так как $\widetilde{w} \in N_G(H)$, можем переписать его в виде $x = n\widetilde{w}B$. Более того, элемент n в этом выражении определен по модулю $N_w = \widetilde{w}N\widetilde{w}^{-1}$. Поэтому $\mathcal{F}_w = N/N_w \cong \mathbb{C}^{l(w)} \cong \mathbb{R}^{2l(w)}$. □

В частности, так как $l(w) = 1$ только для образующих, мы получаем следующие выражения для второго числа Бетти $b_2(\mathcal{F}) := \dim H^2(\mathcal{F}, \mathbb{R})$:

$$b_2(\mathcal{F}) = \text{число простых корней } = \operatorname{rk} G = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim T. \tag{25}$$

Этот важный факт можно доказать также следующим образом.

Хорошо известно, что для компактной группы Ли K такой, что $\pi_1(K) = 0$, имеем $\pi_2(K) = 0$.[8]

Так как последовательность

$$\ldots \to \pi_k(G) \to \pi_k(\mathcal{F}) \to \pi_{k-1}(T) \to \pi_{k-1}(G) \to \ldots$$

точна (см. лекцию 3), флаговое многообразие $\mathcal{F}$ односвязно и

$$H_2(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \cong \pi_2(\mathcal{F}) \cong \pi_1(T) \cong \widehat{T} \cong \mathbb{Z}^{\dim T}. \tag{10'}$$

Используя структуру группы Вейля (см. п. 1.1 или [B]), можно получить существенно более точный результат. В частности, можно вывести простую формулу для **полинома Пуанкаре** для $\mathcal{F}$ в терминах показателей

$$P_{\mathcal{F}}(t) := \sum_k t^k \cdot \dim H^k(\mathcal{F}, \mathbb{R}) = \prod_{i=1}^{l=\operatorname{rk} G} \frac{1 - t^{2(e_i+1)}}{1 - t^2}. \tag{26}$$

Пусть $\Omega \subset \mathfrak{k}^*$ — регулярная коприсоединенная орбита. Каноническая симплектическая форма σ на Ω определяет класс когомологий $[\sigma] \in H^2(\mathcal{F}, \mathbb{R})$.

Напомним, что орбита $\Omega \subset \mathfrak{k}^*$ называется **целочисленной** (см. лекцию 1, п. 2.4), если $[\sigma] \in H^2(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) \subset H^2(\mathcal{F}, \mathbb{R})$. Число "условий целочисленности" для орбиты данного типа равно второму числу Бетти этой орбиты. Но, как показано выше, это число равно размерности многообразия $\mathcal{O}_{reg}(K) \cong T_{reg}/W$ регулярных орбит.

Таким образом, для компактной группы целочисленные регулярные орбиты образуют дискретное множество. Более точный результат сформулирован в теореме 5 ниже (см. п. 3.1).

Теорема 4 (Картан). (a) *Любое конечномерное неприводимое голоморфное представление (π, V) односвязной комплексной полупростой группы Ли G имеет* **старший вес** λ *(который больше любого другого веса в смысле частичного порядка, введенного выше).*

(b) *Два представления с одинаковым старшим весом эквивалентны.*

(c) *Множество допустимых старших весов совпадает с множеством P_+ доминантных весов.*

[8] Это так ввиду, например, отсутствия Ad-инвариантной кососимметричной билинейной формы на $\mathfrak{k}$.

Следствие. *Для компактной односвязной группы K множество $\widehat{K}$ всех унитарных неприводимых представлений нумеруется множеством P_+ доминантных весов.*

Доказательство. Как показано в теореме 2, существует биекция между классами эквивалентности голоморфных конечномерных представлений G и классами эквивалентности унитарных представлений K. □

Доказательство теоремы 4. Здесь используется лемма Брюа, согласно которой открытое плотное подмножество $G' \subset G$ имеет вид $G' = B_- \cdot B = N_- \cdot H \cdot N$. Пусть (π, V) — неприводимое конечномерное представление G. Мы выберем максимальный вес λ, где "максимальный" означает, что не существует веса (π, V) больше λ. Пусть $v \in V$ — соответствующий весовой вектор.

Выберем минимальный вес μ двойственного представления (π^*, V^*) и обозначим через $v^* \in V^*$ соответствующий весовой вектор. Заметим, что единственность весов λ и μ не предполагается.

Рассмотрим функцию f_{v,v^*} на G (матричный элемент π), заданную формулой

$$f_{v,v^*}(g) = \langle v^*, \pi(g)v \rangle. \tag{27}$$

На элементе $g' \in G'$ эта функция может быть явно вычислена двумя различными способами:

$$f_{v,v^*}(n_-hn) = \begin{cases} \langle \pi^*(n_-)^{-1}v, \pi(h)\pi(n)v \rangle = e^{\lambda}(h)\langle v^*, v \rangle, \\ \langle \pi^*(h)^{-1}\pi^*(n_-)^{-1}v^*, \pi(n)v \rangle = e^{-\mu}(h)\langle v^*, v \rangle. \end{cases} \tag{28}$$

Лемма 7. *Величина $\langle v^*, v \rangle$ отлична от нуля.*

Доказательство. В противном случае имеем $f_{v,v^*}\big|_{G'} = 0$ и, так как G' плотно в G, $f_{v,v^*} = 0$ всюду. Однако (π, V) неприводимое и, следовательно, векторы вида $\pi(g)v$, $g \in G$, порождают все пространство V. В силу $f_{\pi(g_1)v,v^*}(g) = f_{v^*,v}(gg_1)$ заключаем, что $f_{v^*,v} = 0$ для всех $v \in V$, что противоречит условию $v^* \neq 0$. □

В силу (28) имеем $\lambda = -\mu$. Однако мы выбрали λ как произвольный максимальный вес (π, V) и μ — как произвольный минимальный вес (π^*, V^*). Поэтому оба веса определены однозначно. Следовательно, λ — старший вес (π, V). Действительно, предложим обратное. Тогда существуют веса λ', которые не удовлетворяют неравенству $\lambda \geqslant \lambda'$. Из таких весов выберем максимальный и обозначим его λ_1. Очевидно, что λ_1 — максимальный вес (в ином случае имеем $\lambda_2 > \lambda_1$ для некоторого $\lambda_2 \leqslant \lambda$, что невозможно). Однако существует только один максимальный вес и, следовательно, $\lambda_1 = \lambda$, что также невозможно. Утверждение (a) доказано.

Далее мы используем следующее хорошо известное

Предложение 10. *Неприводимое представление G полностью определяется любым из своих матричных элементов.*

Доказательство. Как и выше, можно показать, что подпространство W, порожденное левыми и правыми сдвигами $f_{v^*,v}$, содержит все другие матричные элементы. Группа $G \times G$ действует на G левыми и правыми сдвигами, и это действие приводит к линейному представлению Π произведения $G \times G$ в W. Легко проверить, что $\Pi \equiv \pi \times \pi^*$. □

Утверждение (b) доказано.

Для доказательства (c) рассмотрим ограничение представления (π_*, V) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на подалгебру $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R_+$. Возьмем неприводимую компоненту, содержащую вектор v. Так как v — вектор старшего веса для (π, V), он остается таковым для ограничения. Так как утверждение (c) для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ справедливо (см. лекцию 3), получаем неравенство $\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \geqslant 0$ (здесь мы воспользовались тем, что рассматриваемая величина не зависит от выбора Ad-инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{g}_\alpha$). Так как неравенство выполняется для всех положительных корней α, вес λ является доминантным.

Наконец, пусть λ — доминантный вес. Функция f_λ, определенная на G' по формуле $f_\lambda(n_-hn) = e^\lambda(h)$, непрерывно продолжается на все клетки Брюа коразмерности 1 (что можно установить, рассмотрев ограничение f на подгруппы $G_i = \exp \mathfrak{g}_{\alpha_i}$). Однако аналитическая функция не может иметь особенности на комплексном подмногообразии коразмерности > 1. Поэтому f всюду регулярна. Можно проверить, что подпространство, порожденное левыми сдвигами функции f, конечномерно (в подходящих координатах это пространство состоит из полиномов с ограниченной степенью). Более того, соответствующее представление неприводимо и имеет старший вес λ. Теорема Картана доказана. □

Теорема Картана не только классифицирует конечномерные неприводимые голоморфные представления G и унитарные неприводимые представления K, но также указывает явное построение их.

Пример 5. Пусть $G = SL(n+1,\mathbb{C})$, $K = SU(n+1)$, H — диагональная подгруппа Картана. Общий элемент H в канонических координатах, введенных выше, имеет вид

$$h(t) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & t_2t_1^{-1} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3t_2^{-1} & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & t_nt_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & t_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda = (k_1, \dots, k_n) \in P \cong \mathbb{Z}^n$ имеем $e^\lambda(h(t)) = t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$. Пусть $\Delta_k(g)$ обозначает k-й главный минор матрицы $g \in G$. Тогда $\Delta_k(h(t)) = t_k$. Следовательно, функция

$$f_\lambda(g) = \Delta_1^{k_1}(g) \dots \Delta_n^{k_n}(g) \tag{29}$$

голоморфна на G в точности тогда, когда все k_i неотрицательны, т. е. λ доминантный.

Мы получаем следующую реализацию неприводимого представления π_λ со старшим весом $\lambda = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Это подпредставление левого регулярного представления в пространстве P_λ полиномов на G, которые однородны степени k_1 относительно элементов первого столбца, однородны степени k_2 относительно миноров первых двух столбцов и т. д.

Даже частный случай $n = 2$ не тривиален, хотя и вполне нагляден. Пусть $g \in SL(3,\mathbb{C})$. Введем обозначения $x_i(g) = g_{i1}$, $x^i(g) = \varepsilon^{ijk} g_{j1} g_{k2}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Эти шесть полиномов на G удовлетворяют единственному квадратичному соотношению

$$\sum_i x_i x^i = 0. \tag{30}$$

Пространство $P_{k,l}$ состоит из биоднородных полиномов степени k относительно x_i и степени l относительно x^j. Если бы x_i и x^j были независимы, размерность $P_{k,l}$ была бы равна произведению $\binom{k+2}{2}\binom{l+2}{2}$. Принимая во внимание (30), мы получим истинную размерность

$$\dim P_{k,l} = \binom{k+2}{2}\binom{l+2}{2} - \binom{k+1}{2}\binom{l+1}{2} = \frac{(k+1)(l+1)(k+l+2)}{2}.$$

Упражнение 8. Показать, что приведенный выше результат согласуется с формулой Г. Вейля

$$\dim \pi_\lambda = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)}. \tag{31}$$

Указание. Изобразить корневую систему для $SL(3,\mathbb{C})$, найти фундаментальные веса ω_1, ω_2 и показать, что положительными корнями будут $\alpha = 2\omega_1 - \omega_2$, $\beta = -\omega_1 + 2\omega_2$, $\gamma = \rho = \omega_1 + \omega_2$. Таким образом, при $\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$ имеем

$$\frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)} = k+1, \quad \frac{(\lambda+\rho,\beta)}{(\rho,\beta)} = l+1, \quad \frac{(\lambda+\rho,\gamma)}{(\rho,\gamma)} = \frac{k+l+2}{2}.$$

3. Орбиты и представления

3.1. Обзор. Мы сохраним введенные выше обозначения. В частности, K обозначает компактную односвязную группу Ли с максимальным тором $T \cong \mathbb{T}^l$, в котором введены канонические координаты $(t_1, \ldots, t_l)$.

Как мы видели, унитарные неприводимые представления (π_λ, V_λ) группы K нумеруются доминантными весами $\lambda \in P_+ \subset i\mathfrak{t}$. Наша цель — поставить в соответствие множество $\widehat{K}$ унитарных неприводимых представлений некоторому множеству коприсоединенннных орбит.

Далее мы используем также обозначение

(N) $\quad \Omega_\lambda \subset \mathfrak{t}^*$ — орбита, проходящая через точку $\dfrac{1}{2\pi i}\lambda$.

Замечание 3. Это обозначение требует определенного комментария. Согласно теореме двойственности Понтрягина существует канонический изоморфизм между произвольной абелевой локально компактной группой A и второй двойственной группой $\hat{\hat{A}}$. Однако часто (например, для всех конечных групп и для аддитивных групп локально компактных полей) уже первая двойственная группа $\hat{A}$ изоморфна A. Но в таком случае не существует канонического изоморфизма. В частности, нет канонического способа нумеровать характеры $\mathbb{R}$ элементами самого пространства $\mathbb{R}$. В практике обычно используют два способа: $\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ или $\chi_\lambda(x) = e^{2\pi i\lambda x}$. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. В наших лекциях мы используем второй способ. Однако следует упомянуть, что случится при выборе первого способа.

Одномерные представления $U_{F,H}$, которые используются в правиле 2 для построения унитарных неприводимых представлений, примут более простой вид $U_{F,H}(\exp X) = e^{i\langle F,X\rangle}$. Обозначение (N) также примет более естественный вид

(N') $\Omega_\lambda \subset \mathfrak{k}^*$ обозначает орбиту, проходящую через точку $\dfrac{1}{i}\lambda$.

С другой стороны, симплектическая структура на коприсоединенных орбитах будет связана не с формой B_F, а с формой $\dfrac{1}{2\pi}B_F$. Желание сохранить первоначальное определение симплектической формы σ (широко известной в настоящее время как **форма Кириллова — Костанта**) побуждает нас ввести довольно искусственное определение (N).

Напомним, что любая орбита $\Omega \subset \mathfrak{k}^*$ пересекает $\mathfrak{t}^*$ вдоль единственной W-орбиты, содержащей единственный элемент вида $\dfrac{1}{2\pi i}\lambda$, где $\lambda \in C_+$, т. е.

$$\lambda = \sum_{j=1}^{l} c_j\omega_j, \quad c_j \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{32}$$

Таким образом, множество всех коприсоединенных орбит отождествляется с $(\mathbb{R}_+)^l$. Для регулярных орбит все коэффициенты $\{c_j\}$ положительны, а для сингулярных орбит некоторые коэффициенты обращаются в нуль.

Теорема 5. *Орбита $\Omega_\lambda \subset \mathfrak{k}^*$ целочисленна тогда и только тогда, когда λ принадлежит весовой решетке P, т. е. все коэффициенты c_j в (32) целые.*

Доказательство. Однородное многообразие Ω_λ изоморфно $K/\operatorname{Stab}(\lambda)$.[9] Подгруппа $\operatorname{Stab}(\lambda)$ всегда содержит T и совпадает с T при регулярном λ. Рассмотрим K-эквивариантный проектор $p_\lambda : \mathcal{F} = K/T \to \Omega_\lambda$, заданный формулой $p_\lambda(kT) = \dfrac{1}{2\pi i}K(k)\lambda$. (Здесь $K(k)$ обозначает коприсоединенное действие $k \in K$ на $\mathfrak{k}^*$.) Для регулярной орбиты Ω_λ p_λ является диффеоморфизмом.

Теперь воспользуемся некоторыми результатами из лекции 3 (см. предложение 8 и его следствия). В качестве базиса $H_2(\mathcal{F})$ возьмем фундаментальные классы двумерных клеток Брюа $\mathcal{F}_j := \mathcal{F}_{s_j}$, $1 \leqslant j \leqslant l$, соответствующих образующим $(s_1, \ldots, s_l)$ группы Вейля.

[9]Отметим, что $\operatorname{Stab}(\lambda)$ совпадает с $\operatorname{Stab}\left(\dfrac{1}{2\pi i}\lambda\right)$.

Клетки $\mathcal{F}_j$ описываются следующим образом. Для каждого простого корня α_j, $1 \leqslant j \leqslant l$, мы определили вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ как подалгебры $\mathfrak{g}_j \hookrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, порожденной $X_{\pm\alpha_j}$. Это индуцирует вложения $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{k}_j \hookrightarrow \mathfrak{k}$ и $SU(2) \cong K_j \hookrightarrow K$. Поэтому флаговое многообразие для $K_j \cong SU(2)$, изоморфное $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, вкладывается во флаговое многообразие $\mathcal{F}$ для K. Образом этого вложения является в точности $\mathcal{F}_j$. Таким образом, в качестве базиса $H_2(\Omega_\lambda)$ для регулярной орбиты Ω_λ мы можем взять образы $p_\lambda(\mathcal{F}_j)$.

В случае сингулярной орбиты Ω_λ некоторые из этих образов стягиваются в точку, но оставшиеся по-прежнему образуют базис $H_2(\Omega_\lambda)$.

В общем случае справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{T}^1 & \xrightarrow{\approx} & T_j & \xrightarrow{\hookrightarrow} & T & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \mathrm{Stab}(\lambda) \\
\downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\
SU(2) & \xrightarrow{\approx} & K_j & \xrightarrow{\hookrightarrow} & K & = & K \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\approx]{} & \mathcal{F}_j & \xrightarrow[\hookrightarrow]{} & \mathcal{F} & \xrightarrow[p_\lambda]{} & \Omega_\lambda
\end{array}$$

Здесь $\hookrightarrow$ и i обозначают включения, $\approx$ — изоморфизм группы или однородного многообразия, p — естественную проекцию однородного пространства с отмеченной точкой. Обозначение p_λ введено выше.

Каноническая форма σ на Ω целочисленна тогда и только тогда, когда ее сужение на каждую клетку $p_\lambda(\mathcal{F}_j)$ целочисленно. С другой стороны, элемент $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$ принадлежит P тогда и только тогда, когда выполняется условие целочисленности (см. (12)), которое означает что ограничение λ на подалгебру Картана $\mathfrak{g}_j$ принадлежит весовой решетке в $\mathfrak{g}_j^*$ для всех $j = 1, \ldots, l$.

Важно отметить, что последняя строка — это последовательность симплектических многообразий, связанных симплектоморфизмами. В частности, ограничение $p_\lambda^*(\sigma)\big|_{\mathcal{F}_j}$ совпадает с канонической симплектической формой на $\mathcal{F}_j \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, умноженной на $\dfrac{1}{2\pi}c_j = \dfrac{(\lambda, \alpha_j)}{\pi(\alpha_j, \alpha_j)}$.

Таким образом, общий случай теоремы сводится к простейшему, когда $K = SU(2)$. Рассмотрим этот случай подробно. Он является хорошей иллюстрацией общих понятий на довольно наглядных примерах.

Лемма 8. *Теорема* 5 *остается верной для* $K = SU(2)$.

Следствие. *Коэффициенты* c_j *в* (32) *имеют вид*

$$c_j = \int_{p(\mathcal{F}_j)} \sigma,$$

где σ *— каноническая симплектическая форма на* Ω_λ. *Если коэффициент* c_j *обращается в нуль,* $p(\mathcal{F}_j)$ *стягивается в точку. Во всех случаях условие* *целочисленности орбиты эквивалентно условию целочисленности коэффициентов c_j.*

Доказательство леммы 8. Дадим детальное описание всех общих понятий для этого частного случая. Утверждение леммы будет сведено к вычислению интеграла по двумерной сфере S^2.

Общий элемент K имеет вид $k = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Алгебра Ли $\mathfrak{k}$ имеет базис (X, Y, Z) такой, что

$$A_{x,y,z} := xX + yY + zZ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} iz & x+iy \\ -x+iy & -iz \end{pmatrix}.$$

Двойственное пространство $\mathfrak{k}^*$ состоит из матриц $F_{a,b,c} = \begin{pmatrix} -ic & -a-ib \\ a-ib & ic \end{pmatrix}$ таких, что $\langle F_{a,b,c}, A_{x,y,z}\rangle = \operatorname{tr}(F_{a,b,c} \cdot A_{x,y,z}) = ax + by + cz$. Максимальные торы имеют элементы вида $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$, где t — каноническая комплексная координата, $|t| = 1$. Решетка $\exp^{-1}(e)\bigcap \mathfrak{t}$ порождается элементом $\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix} = 4\pi Z$, соответственно $\exp^{-1}(C)\bigcap \mathfrak{t}$ порождается элементом $2\pi Z$. Элементы $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ имеют такой же вид $A_{x,y,z}$ и $F_{a,b,c}$, как и выше, но с комплексными координатами (x, y, z) и (a, b, c) соответственно. В частности, единственный простой положительный корень α и единственный фундаментальный вес ω для $\mathfrak{k}$ можно представить в виде $\alpha = F_{0,0,-i}$ и $\omega = \dfrac{1}{2}\alpha = F_{0,0,-i/2}$. Регулярные коприсоединенные орбиты записываются в виде

$$\Omega_{r\omega} = \{F_{a,b,c} \mid a^2 + b^2 + c^2 = \frac{r^2}{16\pi^2}, r > 0\}.$$

Коприсоединенное действие $\mathfrak{k}$ на $\mathfrak{k}^*$ задано формулой

$$K_*(X) = b\partial_c - c\partial_b, \quad K_*(Y) = c\partial_a - a\partial_c, \quad K_*(Z) = a\partial_b - b\partial_a.$$

Каноническая симплектическая форма на коприсоединенной орбите определяется следующим образом:

$$\sigma = \frac{a db \wedge dc + b dc \wedge da + c da \wedge db}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Симплектический объем орбиты равен

$$\operatorname{vol}(\Omega_{r\omega}) = \int\limits_{\Omega_{r\omega}} \sigma = r.$$

Здесь удобно использовать "географические координаты" $-\pi < \varphi < \pi$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, в которых

$$x = \frac{r}{4\pi}\cos\theta\cos\varphi, \quad y = \frac{r}{4\pi}\cos\theta\sin\varphi, \quad z = \frac{r}{4\pi}\sin\theta, \quad \sigma = \frac{r}{4\pi}\cos\theta d\varphi \wedge d\theta.$$

Объем орбиты равен целому числу, когда $r \in \mathbb{Z}$, т. е.

$$\Omega_{r\omega} \bigcap \mathfrak{t} = \{F_{0,0,\frac{r}{2\pi}}, F_{0,0,-\frac{r}{2\pi}}\} \subset \frac{1}{2\pi i}\mathbb{Z} \cdot \omega = \frac{1}{2\pi i}P.$$

Лемма доказана. □

Таким образом, множество $\mathcal{O}^{int}$ всех целочисленных коприсоединенных орбит для K можно естественно нумеровать с помощью множества P_+, а множество $\mathcal{O}^{\text{int}}_{\text{reg}}$ целочисленных регулярных орбит — множеством $P_{++} = \rho + P_+$, которое является сдвигом P_+.

С другой стороны, как мы видели выше, множество $\widehat{K}$ всех унитарных неприводимых представлений также нумеруется множеством P_+.

Ввиду этих фактов можно предположить, что имеется соответствие между орбитами и унитарными неприводимыми представлениями. Но при этом мы сталкиваемся со следующей дилеммой:

Произвольному унитарному неприводимому представлению π_λ, $\lambda \in P_+$, мы ставим в соответствие либо целочисленную орбиту Ω_λ, либо регулярную целочисленную орбиту $\Omega_{\lambda+\rho}$. (Напомним, что Ω_λ обозначает орбиту, проходящую через точку $\frac{1}{2\pi i}\lambda$.) Как будет показано ниже, обе возможности имеют свои преимущества.

3.2. Веса унитарных неприводимых представлений. Пусть (π_λ, V_λ) — унитарное неприводимое представление K со старшим весом $\lambda \in P_+$. Ограничение $\mathrm{Res}_T^K\, \pi_\lambda$ уже не будет неприводимым. Так как T — абелева группа, она распадается на одномерные унитарные представления, которые оказываются в точности функциями e^μ, $\mu \in P$, определенными по формуле (20).

Введем в T канонические координаты (21) и отождествим P с $\mathbb{Z}^l$, используя базис из фундаментальных весов. Тогда для $\mu = (m_1, \ldots, m_l) \in \mathbb{Z}^l$ имеем $e^\mu(t) = t_1^{m_1} \ldots t_l^{m_l}$ (или t^μ для краткости). Обозначим через V_λ^μ изотипическую компоненту типа μ в V_λ, т. е. $V_\lambda^\mu := \{v \in V_\lambda \mid \pi_\lambda(t)v = t^\mu v\}$. Одна из старейших (и наиболее востребованных в приложениях) задач теории представлений компактных групп Ли заключается в вычислении **кратности** $m_\lambda(\mu)$ **веса** μ т. е. размерности V_λ^μ.

В терминах функтора ограничения мы можем записать

$$\mathrm{Res}_T^K\, \pi_\lambda = \sum_{\mu \in P} m_\lambda(\mu) e^\mu.$$

Для этой величины известны различные формулы, но ни одна из них не является достаточно эффективной. К сожалению, метод орбит в данном случае не составляет исключения. Формула, предлагаемая методом орбит, элегантна, наглядна, но (по крайней мере, в настоящей форме) не имеет большого практического значения.

Пример 6. Чтобы продемонстрировать своеобразие этой задачи, мы рассмотрим случай $G = SU(3)$. Здесь весовой решеткой является обычная треугольная решетка в $\mathbb{R}^2$, порожденная двумя фундаментальными весами ω_1 и ω_2. Функция кратности $m_\lambda(\mu)$ для двух частных случаев $\lambda = 4\omega_1 + 2\omega_2$ и $\lambda = 3\omega_1 + 3\omega_2$ выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{c} 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 1\ \ 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \end{array}$$

На основе этих картинок нетрудно предсказать, каким должен быть общий принцип для произвольного унитарного неприводимого представления $SU(3)$. А именно, пусть $Q \subset P$ — корневая подрешетка. Для $G = SU(3)$ она имеет индекс 3 в P. Носителем $m_\lambda(\mu)$ является выпуклый шестиугольник в $\lambda+Q$, вершины которого образуют W-орбиту старшего веса λ. Значения $m_\lambda(\mu)$ вдоль периметра шестиугольника равны 1. На следующем слое они равны 2 и затем продолжают расти линейно до тех пор, пока шестиугольный слой не выродится в правильный треугольник. После этого рост прекратится (на значении $\min(k,l)+1$ при $\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$).

В случае общей компактной группы ситуация описывается следующей теоремой.

Теорема 6. *Носитель $m_\lambda(\cdot)$, т. е. множество $\mu \in P$ таких что $m_\lambda(\mu) \neq 0$, имеет вид*

$$\operatorname{supp} m_\lambda = \bigcap_{w \in W} w(\lambda - Q_+). \tag{33}$$

Схема доказательства. Пространство V_λ является линейной оболочкой элементов $(\pi_\lambda)_*(A)v$, где $A \in U(\mathfrak{g})$ и v — вектор старших весов. Примем во внимание следующие факты: $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-)U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}_+)$, v аннулируется элементами $\mathfrak{n}_+$, и v — собственный вектор для элемента $\mathfrak{h}$. Тогда V_λ порождается элементами $(\pi_\lambda)_*(A)v$, где $A \in U(\mathfrak{n}_-)$. Следовательно, все веса π_λ должны иметь вид $\mu = \lambda - \nu$, $\nu \in Q_+$, т. е. левая часть (33) содержится в $\lambda - Q_+$.

Далее, множество весов инвариантно при действии группы Вейля. Поэтому $\operatorname{supp} m_\lambda \subset \bigcap\limits_{w \in W} w(\lambda - Q_+)$. Обратное вложение можно установить, рассмотрев ограничение π_λ на различные трехмерные подгруппы K_α. □

Идеология метода орбит связывает функтор ограничения Res_T^K с естественной проекцией $p : \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{t}^*$. Читатель может убедиться в этом, сравнив теорему 6 и следующий хорошо известный факт.

Теорема 7. *Образ $p(\Omega_\lambda) \subset \mathfrak{t}^*$ является выпуклой оболочкой пересечения $\Omega_\lambda \bigcap \mathfrak{t}^*$, которое состоит из точек $\dfrac{1}{2\pi i} w(\lambda)$, $w \in W$.*

Схема доказательства. Прежде всего мы заметим, что утверждение теоремы следует из более общего результата о симплектическом действии тора (см. [At] и [GS2]). Здесь мы кратко опишем другой подход.

Пусть $p_*(F)$ — производная отображения p в точке $F \in \Omega_\lambda$. Как и в п. 1.3, запишем функционал F в виде F_X, $X \in \mathfrak{k}$, и X — в виде

$$X = Y + \sum_{\alpha \in R_+} (c_\alpha X_\alpha - \bar{c}_\alpha X_{-\alpha}), \tag{34}$$

где $Y \in \mathfrak{t}$ и $c_\alpha \in \mathbb{C}$. Пусть $H_\alpha := [X_\alpha, X_{-\alpha}]$. Тогда образ $p_*(F)$ будет порождаться теми H_α, для которых $c_\alpha \neq 0$. Таким образом, для общей точки F эта производная является сюръективным отображением $T_F\Omega_\lambda$ в $\mathfrak{t}^*$ и p — открытое отображение в окрестности F.

Выясним, когда это отображение не будет сюръективным. Пересечение корневой системы R с различными подпространствами $L \subset \mathfrak{t}^*$ образует семейство подмножеств $R_i \subset R$, где i пробегает конечное множество I. Пусть $\mathfrak{k}^{(i)}$ — подалгебра Ли, порожденная X_α, $\alpha \in R_i$, и $\mathfrak{t}^{(i)}$ — аннулятор R_i в $\mathfrak{t}$. Каждое R_i может рассматриваться как корневая система ранга $l_i < l$ относительно подалгебры $\mathfrak{k}^{(i)}$.

Допустим, что F_X — **сингулярная точка**, т. е. такая, что $p_*(F_X)$ не сюръективно. Тогда для некоторого индекса $i \in I$ элемент X имеет вид (34) с коэффициентами c_α, обращающимися в нуль при $\alpha \notin R_i$. Следовательно, X принадлежит одной из подалгебр $\mathfrak{t}^{(i)} + \mathfrak{k}^{(i)}$. Пусть $K^{(i)}$ — подгруппа K, соответствующая подалгебре $\mathfrak{k}^{(i)}$. Множество всех сингулярных элементов типа $i \in I$ распадается на $K^{(i)}$-орбиты. По индукции можно считать, что теорема верна для алгебр меньшего ранга. Тогда проекция всех таких $K^{(i)}$-орбит будет выпуклой оболочкой ее пересечения с $\mathfrak{t}^*$. Однако это пересечение представляет собой подмножество $S \subset \Omega_\lambda \bigcap \mathfrak{t}^*$. Таким образом, проекции всех сингулярных точек образуют конечное число выпуклых политопов P_S размерности $< l$. В частности, граница $p(\Omega_\lambda)$ также состоит из этих политопов. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Пример 7. Для группы типа $\mathbf{B}_2 \cong \mathbf{C}_2$ проекция типичной орбиты и множества сингулярных точек изображены на рис. 8.

Сравнивая теоремы 6 и 7, мы видим, что правило 3 выполняется для пары $T \subset K$, если унитарному неприводимому представлению π_λ мы поставим в соответствие орбиту Ω_λ и рассмотрим в $p(\Omega_\lambda)$ только те точки, которые конгруэнтны λ по модулю Q.

Теперь рассмотрим разложение тензорного произведения двух унитарных неприводимых представлений. Эта проблема также давно известна и очень важна во многих приложениях. Напомним, что правило 5 связывает тензорное произведение унитарных неприводимых представлений T_{Ω_1} и T_{Ω_2} с арифметической суммой $\Omega_1 + \Omega_2$. Самый известный и наглядный случай $K = SU(2)$ представлен в следующем примере.

Пример 8. Так называемое **правило сложения** для моментов и спинов в квантовой механике на математическом языке может быть сформулировано следующим образом:

$$\pi_m \otimes \pi_n = \bigoplus_{|m-n|}^{m+n} \pi_k, \qquad k \equiv (m+n) \bmod 2.$$

Без учета конгруэнции эта формула находится в полном согласии со следующим геометрическим фактом в $\mathbb{R}^3$: арифметическая сумма сферы с радиусом r_1 и сферы с радиусом r_2 является объединением сфер с радиусом r, где $|r_1 - r_2| \leqslant r \leqslant r_1 + r_2$. Возникновение арифметического условия обусловлено тем, что группа $SU(2)$ имеет нетривиальный центр (или, эквивалентно, присоединенная групп не односвязна). Мы вернемся к этому вопросу ниже.

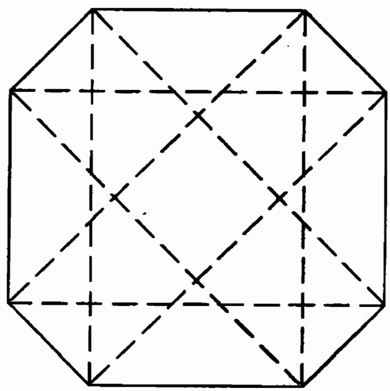

Рис. 8. Проекция орбиты B_2

Оказывается, что правило 5 с той же поправкой выполняется для всех компактных групп Ли типа **A**. Приведем точную формулировку этого утверждения.

Теорема 8. (a) *Пусть Ω_1, Ω_2, Ω_3 — целочисленные орбиты в $\mathfrak{u}(n)$ и T_1, T_2, T_3 — соответствующие унитарные неприводимые представления $U(n)$. В этом случае $\Omega_1 + \Omega_2$ содержит Ω_3 тогда и только тогда, когда $T_1 \otimes T_2$ содержит T_3.*

(b) *То же верно для группы $SU(n)$ при дополнительном требоеании: ν принадлежит тому же классу в $P \bmod Q$, как и $\lambda + \mu$.*

Замечание 4. Таким образом, проблема разложения тензорного произведения двух унитарных неприводимых представления группы $U(n)$ сводится методом орбит к следующей давно известной задаче линейной алгебры: *Пусть A и B — эрмитовы матрицы. Что можно сказать о спектре $A + B$, если мы знаем спектры A и B?* Эта проблема недавно решена А. Клячко [Kl] методами алгебраической геометрии. Приведем здесь его результат.

Пусть $\lambda(A) = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ — спектр эрмитовой матрицы A. Оказывается, что спектр $\lambda(A + B)$ является выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^n$, заданными равенством $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}, A + \operatorname{tr} B$ и неравенствами

$$\sum_{i\in I}\lambda_i(A+B) \leqslant \sum_{j\in J}\lambda_j(A) + \sum_{k\in K}\lambda_k(B). \tag{35}$$

Здесь I, J, K — три подмножества $\{1,2,\ldots,n\}$ одной и той же мощности p, которые образуют **хорошую тройку**. Для определения хорошей тройки нам потребуются некоторые предварительные приготовления. Напомним, что многообразие Грассмана $G_{n,p}$ образовано всеми p-мерными подпространствами $\mathbb{C}^n$. Фиксируем фильтрацию $\mathbb{C}^n$:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n, \quad \dim V_k = k.$$

Для любого подмножества $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$ обозначим через S_I так называемое **многообразие Шуберта** в $G_{n,p}$, состоящее из всех подпространств $V \subset \mathbb{C}^n$ размерности p таких, что $\dim(V \bigcap V_{i_k}) \geqslant k$, $1 \leqslant k \leqslant p$. Это алгебраическое подмногообразие $G_{n,p}$, которое является замыканием клетки размерности $d_I = \sum\limits_{k=1}^{p}(i_k - k)$. Обозначим через $[S_I]$ соответствующий класс гомологий в $H_{d_I}(G_{n,p},\mathbb{Z})$ и через $[S_I]^*$ — двойственный класс гомологий в смысле Понтрягина в $H_{p(n-p)-d_I}(G_{n,p},\mathbb{Z})$. Заметим, что $[S_I]^* = [S_{I^*}]$, где $I^* = \{n - i_p + 1 > \cdots > n - i_1 + 1\}$.

Теперь мы можем дать определение. Тройка $\{I, J, K\}$ называется **хорошей**, если $[S_I^*] \subset [S_J^*]\cdot[S_K^*]$.

В качестве примера мы можем положить $p = 1$. Тогда грассманиан $G_{n,1}$ является проективным пространством $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ и многообразие Шуберта $S_{\{i\}^*}$ — это $\mathbb{P}^{n-i}(\mathbb{C})$. Так как $[\mathbb{P}^{n-j}]\cdot[\mathbb{P}^{n-k}] = \mathbb{P}^{n-j-k+1}$, тройка $S_{\{i\}}, S_{\{j\}}, S_{\{k\}}$ хорошая тогда и только тогда, когда $i \geqslant k + j - 1$. Это соответствует неравенству Г. Вейля

$$\lambda_i(A+B) \leqslant \lambda_j(A) + \lambda_k(B), i \geqslant k + j - 1.$$

Связь между арифметической суммой орбит и геометрией грассманианов довольно глубокая. Этот факт можно использовать для решения следующей нелинейной задачи: описать произведение двух классов сопряженности в $U(n)$. Как было показано в [KT], ответ можно получить в терминах квантовых когомологий грассманианов.

Все изложенное свидетельствует в пользу первого соответствия $\pi_\lambda \longleftrightarrow \Omega_\lambda$. Однако можно указать и такие факты, которые лучше исследовать на основе второго соотношения.

Вернемся к проблеме кратности. Известно, что $m_\lambda(\cdot)$ — кусочно полиномиальная функция, как в примере 5. Кроме того, известны области, в которых кратность задается фиксированными полиномами. Эти области ограничены гиперплоскостями

$$P_{w,i} = w(\lambda) + \{H_\alpha, \alpha \in R_i\}, \quad w \in W, \ i \in I. \tag{36}$$

С другой стороны, в силу теоремы 7 образ Ω_λ при канонической проекции $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{t}^*$ является выпуклой оболочкой множества $\left\{\dfrac{1}{2\pi i}w(\lambda), w \in W\right\}$. Кроме того, из доказательства этой теоремы ясно, что множество сингулярных точек Ω_λ (т. е. таких, в которых проекция не является регулярным отображением) проектируется на объединение политопов $P_S \cap p(\Omega_\lambda)$, которые являются в точности пересечениями $p(\Omega_\lambda)$ гиперплоскостями (36).

Другими словами, формула кратности изменяется именно там, где может измениться структура прообраза $p^{-1}(x)$. Можно высказать гипотезу, что кратность веса $m_\lambda(\mu)$ связана с геометрией прообраза $p^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\mu\right) \cap \Omega_\lambda$. Оказывается, что это действительно так, но только при замене Ω_λ на $\Omega_{\lambda+\rho}$! А именно, пусть $X^\mu_{\lambda+\rho}$ — фактор-множество $p^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\mu\right) \cap \Omega_{\lambda+\rho}$ относительно действия централизатора μ в группе G — так называемое **приведенное симплектическое многообразие** (см. [AG]). Оказывается, что самая наивная гипотеза

$$m_\lambda(\mu) = \operatorname{vol} X^\mu_{\lambda+\rho} \tag{37}$$

будет "асимптотически справедливой" (см. [He]).

Огромное количество публикаций посвящены этой гипотезе и ее более изощренным версиям, включающим род Тодда и число Римана — Роха для многообразия $X^\mu_{\lambda+\rho}$ (по этому поводу см. [GS2], [GLS] и библиографию там).

По моему личному мнению, правильная формула для кратностей все еще ждет своего открытия. В связи с этим выскажу здесь следующее наблюдение. Пусть r_λ — плотность проекции $p_*(vol)$ канонической меры на орбите $\Omega_{\rho+\lambda}$. В силу формулы Вейля для характера и интегральной формулы (40) эта плотность имеет вид

$$r_\lambda(x) = \sum_\mu m_\lambda(\mu) \cdot r_\rho\left(x - \frac{1}{2\pi i}\mu\right). \tag{38}$$

Проиллюстрируем формулу (38) на простейшем примере.

Пример 9. Пусть $G = SU(2)$. Тогда можно отождествить решетку P с $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Плотность r_λ оказывается характеристической функцией сегмента $[-\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$. В частности, $r_\rho = \chi_{[1/2,-1/2]}$. Равенство (38) принимает вид

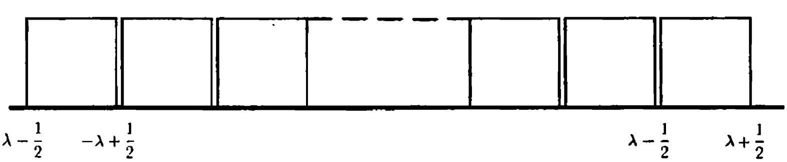

Рис. 9. Плотность проекции канонической меры на орбите

Укажем еще одну задачу, в которой соответствие $\pi_\lambda \longleftrightarrow \Omega_\lambda$ успешно применяется: ограничение унитарного неприводимого представления π_λ группы $U(n)$ на подгруппу $U(n-1)$. Известно, что унитарные неприводимые представления $U(n)$, так же, как целочисленные коприсоединенные орбиты этой группы, можно нумеровать последовательностями $\lambda = \{l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n\}, l_i \in \mathbb{Z}$. Именно, старший вес π_λ имеет вид $e^\lambda(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)) = t_1^{l_1} \ldots t_n^{l_n}$. Соответствующую орбиту можно отождествить с множеством всех эрмитовых матриц с собственными значениями $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Ограничение π_λ на подгруппу $U(n-1)$ должно быть описано в терминах естественной проекции пространства $\mathcal{H}_n$ эрмитовых $n \times n$-матриц на $\mathcal{H}_{n-1}$. При этой проекции p удаляется последняя строка и последний столбец рассматриваемой матрицы. Соотношение между собственными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ матрицы $X \in \mathcal{H}_n$ и собственными значениями $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ проекции $Y = p(X)$ хорошо известно и описывается следующим принципом.

Принцип промежуточности (Курант).

$$x_1 \geqslant y_1 \geqslant x_2 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_{n-1} \geqslant x_n.$$

Этот принцип находится в полном соответствии с (хорошо известным) фактом из теории представлений.

Предложение 11. *Ограничение* $\mathrm{Res}^{U(n)}_{U(n-1)} \pi_\lambda$, $\lambda = \{l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n\}$, *имеет простой спектр, состоящий из всех* π_μ, $\mu = \{m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{n-1}\}$, *таких, что* $l_1 \geqslant m_1 \geqslant l_2 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_{n-1} \geqslant l_n$.

3.3. Теорема Бореля — Вейля — Ботта. Эта теорема являет собой кульминационный результат теории представлений компактных групп Ли, поскольку дает единую геометрическую конструкцию для всех унитарных неприводимых представлений всех компактных связных групп Ли. Первая часть, известная как теорема Бореля — Вейля, является современной интерпретацией теоремы Картана о старшем весе (см. п. 1.3). Теорема Бореля — Вейля имеет замечательное обобщение, принадлежащее Ботту. Мы покажем, как эти теоремы согласуются с идеологией метода орбит.

Теория Бореля — Вейля имеет дело с однородными голоморфными линейными расслоениями L на флаговом многообразии $\mathcal{F}$, т. е. расслоениями, допускающими G-действие голоморфными преобразованиями. На самом деле это действие автоматически продолжается до действия комплексной группы $G_\mathbb{C}$, что позволяет давать описание в теоретико-групповых терминах.

А именно, пусть χ — голоморфный характер (т. е. комплексное одномерное представление) борелевской подгруппы B. Пусть B действует на $G_\mathbb{C}$ правыми сдвигами. Обозначим через $\mathbb{C}_\chi$ одномерное комплексное пространство, на котором B действует с помощью характера χ. Тогда **расслоенное произведение** $G_\mathbb{C} \times_B \mathbb{C}_\chi$ является комплексным многообразием, которое имеет естественную проекцию на $\mathcal{F} = G_\mathbb{C}/B$ со слоем $\mathbb{C}$ над каждой точкой. Следовательно, его можно отождествить с тотальным пространством линейного расслоения L_χ над $\mathcal{F}$.

Голоморфное сечение $s : \mathcal{F} \to L_\chi$ можно представить голоморфной функцией φ_s на $G_\mathbb{C}$ такой, что $\varphi_s(bg) = \chi(b)\cdot\varphi_s(g)$. Обозначим через $\Gamma_{hol}(L_\chi)$ (конечномерное) пространство всех голоморфных сечений L_χ. Группа $G_\mathbb{C}$ действует на этом пространстве отображениями $\varphi_{g\cdot s}(g') = \varphi_s(g'g)$. Полученное таким образом представление называется **голоморфно индуцированным** из (B, χ) и обозначается $\operatorname{Ind}\operatorname{hol}_B^{G_\mathbb{C}}\chi$ (см. п. 3.2 лекции 5 и п. 2.2 лекции 9).

Легко описать множество однородных голоморфных расслоений на $\mathcal{F}$ или, эквивалентно, множество всех голоморфных характеров B. Эти характеры тривиальны на $[B, B] = N$, а их ограничения на подгруппу Картана H суть в точности функции e^λ, $\lambda \in P$ из п. 1.3.

Таким образом, любому $\lambda \in P$ соответствует характер борелевской подгруппы B и, следовательно, однородное голоморфное линейное расслоение на $\mathcal{F}$, которое мы обозначим L_λ.

Теорема 9 (Борель — Вейль). *Пространство $\Gamma_{hol}(L_\lambda)$ ненулевое только тогда, когда λ принадлежит множеству P_+ и в этом случае G действует на $\Gamma_{\mathrm{hol}}(L_\lambda)$ неприводимым представлением π_λ со старшим весом λ.*

Эта теорема наводит на мысль, что представление π_λ должно быть связано с целочисленной коприсоединенной орбитой Ω_λ, проходящей через $i\lambda$ (или через $\lambda/(2\pi i)$). Дело в том, что на любой орбите Ω_λ существует канонически определенное линейное расслоение $\widetilde{L}_\lambda$, соответствующее симплектической форме σ на этой орбите.[10]

Ранее мы определили G-ковариантное отображение $p_\lambda : \mathcal{F} \to \Omega_\lambda$. Оказывается, что $L_\lambda = p_\lambda^!(\widetilde{L}_\lambda)$ является индуцированным расслоением.

Пример 10. (a) Тривиальное представление реализуется в пространстве постоянных функций на $\mathcal{F}$, которое, очевидно, индуцируется отображением $p_0 : \mathcal{F} \to \{pt\} = \Omega_0$. Таким образом, π_0 должно соответствовать одноточечной орбите — началу координат в $\mathfrak{g}^*$.

(b) В примере 4 дана реализация представления $\pi_{k\omega_1}$ группы $SL(3, \mathbb{C})$ в пространстве однородных полиномов степени k в (x^1, x^2, x^3). Согласно теореме Бореля — Вейля это пространство может рассматриваться как пространство сечений линейного расслоения $L_{k\omega_1}$ над $\mathcal{F}$. Однако из конструкции примера 4 ясно, что $L_{k\omega_1}$ индуцировано каноническим линейным расслоением над $\Omega_{k\omega_1} \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, которое является k-й степенью структурного расслоения $\mathcal{O}(1)$. Поэтому естественно ассоциировать это представление с $\Omega_{k\omega_1}$.

Соответствие $\pi_\lambda \longleftrightarrow \Omega_\lambda$ согласовано с подправленными надлежащим образом правилами 3, 4 и 5 (см. предыдущий раздел).

В то же время имеются еще более сильные аргументы в пользу целесообразности ассоциировать π_λ с регулярной орбитой $\Omega_{\lambda+\rho}$, где ρ равно полусумме положительных корней пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Один из таких аргументов — теорема Ботта, дополняющая теорему Бореля — Вейля. В теореме Ботта рассматривается пространство $H^k(\mathcal{F}, \mathcal{L}_\lambda)$ k-мерных когомологий $\mathcal{F}$ с

[10] В частности, класс Черна $\widetilde{L}_\lambda$ — это в точности класс когомологий σ. Более точное утверждение связывает σ с кривизной связи в $\widetilde{L}_\lambda$.

коэффициентами в пучке $\mathcal{L}_\lambda$ ростков голоморфных сечений L_λ. При $k=0$ это пространство сводится к пространству $\Gamma_{hol}(L_\lambda)$, фигурирующему в теореме Бореля — Вейля.

Теорема 10 (Ботт). *Пространство $H^k(\mathcal{F},\mathcal{L}_\lambda)$ ненулевое в точности тогда, когда $\lambda+\rho=w(\mu+\rho)$ для некоторых $\mu\in P_+, w\in W$, где $k=l(w)$ — длина w. В этом случае представление G в $H^k(\mathcal{F},\mathcal{L}_\lambda)$ эквивалентно π_μ.*

Пример 11. (a) Тривиальное представление реализуется в пространстве $H^r(\mathcal{F},\mathcal{L}_{-2\rho})$, где $r=\#R_+$ равно числу положительных корней. Здесь r — комплексная размерность $\mathcal{F}$ и $L_{-2\rho}$ — линейное расслоение **канонического класса** на $\mathcal{F}$ соответствующее голоморфным формам максимальной степени на $\mathcal{F}$. Действительно, так как -2ρ равно сумме отрицательных чисел, характер $e^{-2\rho}(t)$ равен якобиану преобразования $t\in H$ в начальной точке на $\mathcal{F}$. Согласно двойственности Кодаиры - Серра $H^r(\mathcal{F},\Omega^r)\cong\mathbb{C}$.

(b) Фундаментальное представление π_{ω_1} группы $SL(3,\mathbb{C})$ реализуется в следующих пространствах когомологий:

$$H^0(\mathcal{F},\mathcal{L}_{\omega_1}),\quad H^1(\mathcal{F},\mathcal{L}_{-3\omega_1+2\omega_2}),\quad H^1(\mathcal{F},\mathcal{L}_{2\omega_1-2\omega_2}),$$
$$H^2(\mathcal{F},\mathcal{L}_{-4\omega_2}),\quad H^2(\mathcal{F},\mathcal{L}_{-4\omega_1+\omega_2}),\quad H^3(\mathcal{F},\mathcal{L}_{-2\omega_1-3\omega_2}).$$

Первая реализация стандартная (см. пример 4). Другая реализация с наглядной геометрической интерпретацией — это $H^2(\mathcal{F},\mathcal{L}_{-4\omega_2})$. Так как $4\omega_2$ — сингулярный вес, линейное расслоение $L_{-4\omega_2}$ индуцируется расслоением над $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Ввиду двойственности Кодаиры - Серра $H^2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\mathcal{O}(-4)\cong H^0(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}),\mathcal{O}(1))\cong\mathbb{C}^3$ (см. [GH]).

Пример 12. Известно, что голоморфное линейное расслоение над $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ изоморфно одному из расслоений $\mathcal{O}(k)$, $k\in\mathbb{Z}$, с функциями перехода $\varphi_{ij}(z)=z_j^kz_i^{-k}$. Известно также, что

$$\dim H^i(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\mathcal{O}(k))=\begin{cases}\begin{pmatrix}n+k\\k\end{pmatrix}, & i=0,\ k\geqslant 0,\\[2ex] \begin{pmatrix}-1-k\\-1-k-n\end{pmatrix}, & i=n,\ k\leqslant -n-1,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Укажем, как эти факты связаны с теоремой Ботта.

Линейное расслоение $\mathcal{O}(k)$ может быть поднято из $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ на $\mathcal{F}_n$ и поднимается до линейного расслоения L_λ, где $\lambda=k\omega_1=\{k,0,0,\dots,0\}\in\mathbb{Z}^n$. Чтобы описать действие группы Вейля и вычислить вектор $w\cdot\lambda=w(\lambda+\rho)-\rho$, перейдем от $\lambda\in Z^n$ к вектору $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{Z}^{n+1}$ такому, что $\lambda_i=\widetilde{\lambda}_i-\widetilde{\lambda}_{i+1}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $\widetilde{\lambda}_{n+1}=0$.

Заметим, что условие $\lambda\in C_+$ эквивалентно условию $\widetilde{\lambda}_1\geqslant\dots\geqslant\widetilde{\lambda}_{n+1}$. Тогда действие $W\cong S_{n+1}$ принимает вид $\widetilde{w(\lambda)}_i=\widetilde{\lambda}_{w(i)}-\widetilde{\lambda}_{w(n+1)}$.

В нашем случае $\widetilde{\lambda}_1=k$ и $\widetilde{\lambda}_i=0$ при $k>1$. Следовательно, вектор $\widetilde{\lambda+\rho}$ будет таким: $n+k,n-1,n-2,\dots,1,0$. Этот вектор регулярный только тогда, когда $k \geqslant 0$ или $k \leqslant -n-1$. В первом случае $w \cdot \lambda \in P_+$ только при $w = e$. Во втором случае $w \cdot \lambda \in P_+$ только, когда w является циклической перестановкой длины n, при которой первая координата переходит на $(n+1)$-е место. В результате получаем элемент $w \cdot \lambda$, равный $\{0, 0, \ldots 0, -n-1-k\} = (-n-1-k)\omega_n$. Остается заметить, что $\pi_{k\omega_1}$ является k-й симметрической степенью стандартного $(n+1)$-мерного представления и имеет размерность $\binom{n+k}{k}$, а $\pi_{l\omega_n}$ — двойственно к l-й симметрической степени стандартного представления и имеет размерность $\binom{n+l}{l}$.

Ввиду теоремы Ботта можно предположить существование соответствия $\pi_\lambda \longleftrightarrow \Omega_{\lambda+\rho}$, которое является биекцией между $\widehat{G}$ и множеством всех целочисленных орбит максимальной размерности.

3.4. Интегральная формула для характеров. Еще один более наглядный аргумент в пользу соответствия $\pi_\lambda \longleftrightarrow \Omega_{\lambda+\rho}$ — равенство

$$\operatorname{vol}(\Omega_{\lambda+\rho}) = \dim \pi_\lambda, \tag{39}$$

которое находится в полном согласии с принципом квантования: размерность квантового фазового пространства равна объему классического фазового пространства в единицах Планка (в краткой форме — одна размерность на единицу объема).[11] Равенство следует из интегральной формулы для характеров (модифицированное правило 6), которую мы рассмотрим ниже в контексте компактных групп. В этом случае унитарные неприводимые представления конечномерны и характеры являются регулярными (даже аналитическими) функциями. С другой стороны, множитель $1/p(X)$ в модифицированном правиле 6, определяется только в открытом подмножестве $\mathcal{E} \subset \mathfrak{g}$, где экспоненциальное отображение взаимно однозначно.

Теорема 11 (см. [Ki3]). *Для $X \in \mathcal{E}$ справедливо равенство*

$$\operatorname{tr} \pi_\lambda(\exp X) = \frac{1}{p(X)} \int\limits_{\Omega_{\lambda+\rho}} e^{2\pi i \langle F, X\rangle + \sigma}. \tag{40}$$

Равенство (39) — это частный случай теоремы 11 при $X = 0$.

Доказательство теоремы 11. Все известные доказательства (40) состоят из двух частей: 1) показать, что левая и правая части равенства пропорциональны, 2) проверить, что множитель пропорциональности равен 1.

Первая часть следует, например, из дифференциальных уравнений для обобщенных характеров (см. формулу (25) в лекции 6, п. 2.3).

При другом подходе используются свойства преобразования Фурье на полупростой алгебре Ли (см. [Ve2]).

---

[11] Здесь опять два отождествления $\widehat{\mathbb{R}}$ с $\mathbb{R}$ связаны с двумя выборами констант Планка: обычная h и нормализованная $\hbar = h/(2\pi)$ (см. замечание 3).

Утверждение 2) эквивалентно сравнению двух форм объема на группе K: одна форма dg соответствует римановой метрике на K относительно формы Киллинга, другая форма vol нормализована условием $\mathrm{vol}(K) = 1$.

Это утверждение также допускает различные доказательства. Одно из них (см. [Ki3]) основано на вычислении асимптотики интеграла

$$\int_{\mathfrak{g}} e^{-t(X,X)} d(expX)$$

при $t \to +\infty$. Другое доказательство использует равенство (39), которое может быть установлено методами алгебраической топологии с использованием теоремы Бореля — Вейля. □

Хотя теорема 11 упоминалась уже в [Ki1] (в простейшем случае $G = SU(2)$), только недавно было замечено (см. [KV], [DW]), что из этой теоремы вытекает следующее замечательное свойство алгебры сверток на G. Рассмотрим преобразование $\Phi : C^\infty(\mathfrak{g})' \to C^\infty(G)'$, определенное формулой

$$\langle \Phi(\nu), f\rangle = \langle \nu, p \cdot (f \circ \exp)\rangle. \tag{41}$$

Теорема 12 (см. [DW]). *Для* $\operatorname{Ad} G$*-инвариантных распределений операторы свертки на* G *и* $\mathfrak{g}$ *(последняя рассматривается как абелева группа Ли) связаны указанным преобразованием:*

$$\Phi(\mu) *_G \Phi(\nu) = \Phi(\mu *_{\mathfrak{g}} \nu). \tag{42}$$

Таким образом, преобразование Φ "выпрямляет" сверточное произведение на G, превращая ее в абелеву свертку на $\mathfrak{g}$. Отсюда следует, в частности, следующий замечательный факт.

Следствие. *Для любых двух (ко)присоединенных орбит* $O_1, O_2 \subset \mathfrak{g}$ *соответствующие классы сопряженных элементов* $C_1 = \exp O_1$, $C_2 = \exp O_2$ *обладают следующим свойством:* $C_1 \cdot C_2 \subset \exp(O_1 + O_2)$.

Аналитическое объяснение этого геометрического феномена можно дать, используя свойства операторов Лапласа, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

3.5. Инфинитезимальные характеры. Из интегральной формулы (40) и уравнений (25) вытекает

Теорема 13 (см. [Ki3]). *Модифицированное правило 7 выполняется для всех компактных (следовательно, для всех полупростых) групп Ли.*

Данный факт может быть использован при выводе явной формулы для изоморфизма $\mathrm{sym} : Y(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})$, что будет продемонстрировано на следующем примере.

Пример 13. Пусть $G = SU(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ со стандартным базисом X, Y, Z и стандартными коммутационными соотношениями $[X, Y] = Z$, $[Y, Z] = X$, $[Z, X] = Y$. Обозначим латинскими строчными буквами x, y, z элементы

X, Y, Z, рассматриваемые как координаты на $\mathfrak{g}^*$, и греческими строчными буквами α, β, γ — двойственные координаты на $\mathfrak{g}$. Положим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Очевидно, что в нашем случае $Y(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[r^2]$ и $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[C]$, где $C := X^2 + Y^2 + Z^2 = \mathrm{sym}(r^2) \in Z(\mathfrak{g})$. К сожалению, отображение $\mathrm{sym} : \mathbb{C}[x, y, z] \to U(\mathfrak{g})$ нелегко вычислить даже при его ограничении на $Y(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[r^2]$. Например, можно "вручную" проверить, что $\mathrm{sym}(r^4) = C^2 + \frac{1}{3}C$, однако прямое вычисление $\mathrm{sym}(r^6) = C^3 + C^2 + \frac{1}{3}C$ или $\mathrm{sym}(r^8) = C^4 + C^3 + \frac{9}{5}C^2 + \frac{3}{5}C$ уже довольно затруднительно.[12] Поэтому мы выбираем окольный путь, основанный на модифицированном правиле 7.

Поучительно сравнить эту задачу с вычислением различных символов дифференциальных операторов (см. [Ki4, §1 8]).

В нашем случае функция p на $\mathfrak{g}$ принимает вид

$$p(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\det\left(\frac{\sinh(\mathrm{ad}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)/2)}{\mathrm{ad}(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)/2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\rho/2)}{\rho/2} = 1 - \frac{\rho^2}{24} + \dots. \tag{43}$$

Напомним, что мы отождествляет полиномы на $\mathfrak{g}$ с дифференциальными операторами на $\mathfrak{g}^*$ с постоянными коэффициентами, так что ρ^2 переходит в оператор $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ и функция p соответствует некоторому дифференциальнôму оператору $D = 1 - \frac{1}{24}\Delta + \dots$ бесконечного порядка.

Так как ограничение оператора Δ на $Y(\mathfrak{g})$ задается простым выражением $\Delta = r^{-1} \circ \frac{d^2}{dr^2} \circ r$, получаем

$$(DF)(r) = r^{-1}\frac{\sin(\frac{1}{2}\frac{d}{dr})}{\frac{1}{2}\frac{d}{dr}}(rF(r)) = F(r) - \frac{(rF(r))''}{24r} + \dots$$

и, в частности,

$$Dr^2 = r^2 - \frac{1}{4}, \qquad D\frac{\sinh ar}{ar} = \frac{\sin(a/2)}{a/2} \cdot \frac{\sinh ar}{ar}.$$

В силу модифицированного правила 7 ограничение отображения $\mathrm{sym} \circ D$ на $Y(\mathfrak{g})$ является гомоморфизмом алгебр. Следовательно, для любого степенного ряда f

$$\mathrm{sym}((Df)(r^2)) = f(\mathrm{sym}(Dr^2)) = f(C - 1/4). \tag{44}$$

[12] В лекциях Р. Годмана о группах Ли это вычисление сопровождалось следующей сентенцией: "Resultat qui n'incite pas à pousser plus loin les investigations, encore que les physiciens procedent tout les jours depuis le debut des années 30 à des calculs de ce genre". [Результат, который нисколько не продвигает исследование, хотя физики с начала 30-х годов не прекращают подобиых вычислений. — *Пер. с франц.*]

Из (44) получаем

$$\operatorname{sym}\left(\frac{\sinh ar}{ar}\right) = \frac{a/2}{\sin(a/2)} \cdot \frac{\sin(a\sqrt{1/4 - C})}{a\sqrt{1/4 - C}}.$$

Отсюда получаем явное выражение для отображения sym : $Y(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})$:

$$\operatorname{sym}(r^{2n}) = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} B_{2k}(4^k - 2)(1 - 4C)^{n-k}, \tag{45}$$

где B_{2k} — числа Бернулли. Эта явная формула показывает, в частности, что нет простых выражений для отображения sym.

3.6. Сплетающие операторы. Другой важный для приложений вопрос — структура **сплетений** или G-ковариантных операторов между двумя пространствами представлений. Много замечательных дифференциальных и интегральных операторов можно интерпретировать (или даже определить) как сплетающие операторы. Например, оператор Лапласа

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$$

является сплетающим относительно естественного действия группы евклидовых движений в любом функциональном пространстве на $\mathbb{R}^n$. Другие примеры доставляют преобразования Фурье и Радона.

Отметим большой дефект метода орбит — вклад этого метода в изучение сплетающих операторов до сих пор еще слишком недостаточен. (Хотя и известна великолепная формула для так называемого **числа сплетения** двух представлений в терминах симплектической геометрии, см. [GS2].) Причина заключается в том, что метод орбит устанавливает естественное соответствие между орбитами и классами эквивалентности унитарных неприводимых представлений. Построение индивидуального представления T из данного класса эквивалентности по орбите Ω требует некоторого произвола в выборе (например, представителя $F \in \Omega$ и подалгебры $\mathfrak{h}$, подчиненной функционалу F).

Недавно был предложен [EK] и развит [EFK] новый подход с позиций теории представлений к изучению специальных функций. При этом подходе требуется подробное описание операторов сплетения для некоторых геометрических представлений компактных групп. По моему мнению, применение метода орбит к этим вопросом может оказаться очень перспективным.

Лекция 11
РАЗНОЕ

1. Почему работает метод орбит? ... 268
1.1. Математический аргумент ... 268
1.2. Физический аргумент ... 270
2. Отображение момента ... 271
2.1. Определение и геометрические свойства ... 271
2.2. Симплектическая редукция ... 271
3. Метод орбит и интегрируемые системы ... 272
3.1. Интегрируемые системы ... 272
3.2. Связь с методом орбит ... 273
4. Некоторые открытые вопросы и темы для размышлений ... 274
4.1. Функциональная размерность ... 274
4.2. Инфинитезимальные характеры ... 276
4.3. Кратности и геометрия ... 276
4.4. Дополнительные серии ... 277
4.5. Конечные группы ... 277
4.6. Бесконечномерные группы ... 277

1. Почему работает метод орбит?

Некоторые считают метод орбит чудом, которому нет естественных объяснений. Тем не менее, два независимых аргумента, объясняющих появление этого феномена будут приведены ниже. Однако для конечной или p-адической группы эти аргументы неприменимы, так что чудо остается, по крайней мере, частично.

1.1. Математический аргумент. Идея восходит к следующему простому, но важному наблюдению. Рассмотрим матричную группу Ли G, являющуюся нелинейным подмногообразием $G \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. **Отображение логарифма**

$$G \ni g \mapsto \log g := \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}(g-1)^k}{k} \tag{1}$$

преобразует G в линейное подпространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. В отличие от своего обратного (экспоненциального отображения exp), отображение log корректно определено только в некоторой окрестности единичного элемента. Однако для наших целей это небольшое неудобство не играет большой роли.

Более существенно то, что групповой закон не линеаризуется отображением логарифма. В экспоненциальных координатах групповой закон определяется известной формулой Кемпбелла — Хаусдорфа[1]

$$\log(\exp X \cdot \exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]) + \dots . \quad (2)$$

Конечно, это и не может быть иначе, если вспомнить, что групповой закон некоммутативен. Но еще 100 лет назад Дедекинд открыл лекарство от этого недуга. Он заметил, что элементы g_1g_2 и g_2g_1 некоммутативной группы могут быть различными, но они всегда принадлежат одному и тому же классу сопряженных элементов. В связи с этим можно сделать следующий вывод. *Групповой закон коммутативен на классах сопряженных элементов*

Этот факт принципиально важен в теории представлений конечных групп и лежит в основе теории Картана — Гельфанда — Годмана — Хариш-Чандра сферических функций. Новый аспект этого явления был замечен сравнительно недавно [DW] (см. также лекцию 10, п. 3.5). Оказывается, что отображение логарифма сплетает два типа операторов свертки: групповую свертку центральных функций на G и абелеву свертку $\mathrm{Ad}\,G$-инвариантных функций на $\mathfrak{g}$. Точные формулировки даны в [DW] только для компактных и нильпотентных групп Ли (последний результат можно, по-видимому, обобщить на случай экспоненциальных групп Ли). В обоих случаях соответствующие утверждения в некотором смысле эквивалентны интегральной формуле для характеров (см. правило 6 в Руководстве для пользователя, лекция 8), при этом для доказательства в нильпотентном случае используется совершенно иная техника.

Коприсоединенные орбиты возникают в этом контексте естественным образом: заменим сверточную алгебру центральных функций на G алгеброй сверток $\mathrm{Ad}\,G$-инвариантных функций на $\mathfrak{g}$, а затем заметим, что последняя алгебра и обычная алгебра $K(G)$-инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$ составляют так называемые **двойственные гипергруппы**, связанные преобразованием Фурье.

Этот же результат можно изложить на "инфинитезимальном" языке. Используя обобщенное преобразование Фурье (см. лекцию 9), можно упростить не только свертку, но и инфинитезимальные характеры, т. е. действие операторов Лапласа — Казимира. Грубо говоря, справедливо

Предложение 1. *Все операторы Лапласа — Казимира становятся дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами (в канонических координатах) после сопряжения оператором умножения на $p(X)$ и ограничения на центральные функции.*

Подобный результат впервые получен в диссертации Ф. А. Березина в 60-х годах для полупростой группы Ли.[2] Общая формулировка теоремы

[1]На самом деле Кемпбелл и Хаусдорф доказали лишь существование такой формулы. Красивое (но не очень полезное для практики) явное выражение для коэффициентов было найдено позже Е. Б. Дынкиным.

[2]Доказательство Березина содержало небольшой пробел, который заметил Хариш-Чандра во время своего визита в Москву в 1966 г. Соответствующие исправления появились уже к следующему году.

предложена в моем курсе, прочитанном в Институте Анри Пуанкаре в 1968 г., а доказательство дано М. Дюфло [Du] и В. А. Гинзбургом [Gi].

Значительно более общее утверждение было недавно доказано Концевичем [Kon] в рамках теории деформационного квантования. Здесь я хотел бы процитировать одну фразу из его статьи: "Теперь мы можем наконец-то сказать, что метод орбит имеет под собой твердый фундамент."

1.2. Физический аргумент. Этот аргумент широко известен и получил довольно удачное название **геометрического квантования**. Он основан на использовании соответствия между классическими и квантовыми физическими системами. К настоящему времени уже ясно, что не существует канонического или универсального соответствия: квантовый мир существенно отличается от классического. Тем не менее, для многих специальных систем формулировались так называемые **правила квантования**, следуя которым можно было построить квантовую систему из классической, при этом симметрия классической системы часто наследовалась квантовым двойником.

Есть много вариантов перевода на математический язык физического термина "квантование" (например, существуют алгебраическое, асимптотическое, деформационное квантование и др.) Все они основаны на предпосылке, суть которой в том, что классическая и квантовая механики — это всего лишь различные реализации одной и той же абстрактной схемы.

Цель геометрического квантования — построить квантовые объекты, исходя из геометрии классических объектов. Исторически, этот подход возник из двух источников:

- "правила квантования" старой квантовой механики, которые все более и более обобщались и усложнялись (но все еще оставались приспособленными лишь для довольно специфических гамильтонианов определенных на специфических фазовых пространствах),
- функтор унитарной индукции и его обобщения в теории представлений, которые позволяли явное построение двойственного объекта (по крайней мере, большую его часть) для многих групп Ли.

Б. Костант [Ko1] заметил, что эти два аспекта можно объединить, и с тех пор геометрическое квантование стало весьма популярным, особенно среди физиков.

Однако следует подчеркнуть, что в неоднородной ситуации не известно никаких общих результатов. Правила квантования обычно некорректны, а иногда и противоречивы в неоднородном случае, а в однородном — они практически эквивалентны тому или иному варианту процедуры индуцирования (см. лекцию 3). Определение и основные свойства геометрического квантования можно найти в [GLS], [Ki8], [Ko1], [S].

Наиболее интересные и важные приложения геометрического квантования связаны с бесконечномерными системами, хотя многие из них доказаны лишь "на физическом уровне" (см. [AN], [AS], [GS2], [V], [W]).

Рассмотрим теперь физическую систему с данной группой симметрии G. Будем называть такую систему **элементарной**, если ее нельзя разложить на меньшие части без потери симметрии.

На "классическом" языке, фазовое пространство физической системы с заданной группой симметрии G является симплектическим G-многообразием M, причем в случае элементарной системы многообразие M должно быть однородным.

На "квантовом" языке, фазовое пространство физической системы с заданной группой симметрии G является проективизацией гильбертова пространства $\mathcal{H}$ с унитарным представлением G в $\mathcal{H}$, причем в случае элементарной системы это представление должно быть неприводимым.

Таким образом, принцип квантования обеспечивает существование соответствия между однородными симплектическими G-многообразиями, с одной стороны, и унитарными неприводимыми представлениями G, с другой стороны.

В действительности ситуация более деликатная. Известно, что функция энергии для классических систем определена с точностью до аддитивной константы, тогда как для квантовой системы энергия определяется единственным образом и обычно неотрицательна. Это означает, что правильный классический аналог квантовых систем с группой симметрии G должен быть скорее G-многообразием Пуассона, чем симплектическим многообразием. Однако, как мы видели в лекции 7, однородные G-многообразия Пуассона — это по-существу коприсоединенные орбиты. Таким образом, мы приходим к требуемому соответствию между унитарными неприводимыми представлениями и коприсоединенными орбитами.

Приведенные аргументы формально теряют силу в случае конечной, p-адической или адельной группы, однако некоторые факты из теории представлений таких групп показывают, что идеологию квантования, можно применять даже в таких случаях.

2. Отображение момента

2.1. Определение и геометрические свойства. Первое общее определение отображение момента дано Дж.-М. Сурио, [S], хотя частные случаи (например, связанные с группами Галилея и Пуанкаре) давно уже известны физикам. В частности, знаменитая теорема Э. Нётер, описывающая связь между симметриями и инвариантами в гамильтоновом формализме, есть не что иное, как отображение моментов для одномерной группы Ли симметрий.

Мы здесь рассмотрим лишь одно геометрическое свойство отображения момента, которое было нами использовано выше.

Предложение 2. *Пусть M — компактное симплектическое многообразие с пуассоновым действием тора T. Тогда образ отображения момента $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{t}^*$ является выпуклой оболочкой образа множества M^T всех неподвижных точек при этом действии.*

2.2. Симплектическая редукция. Большинство новых приложений отображения момента связаны с понятием **симплектической редукции**. Эта процедура, восходящая к классической гамильтоновой механике, естественным образом формулируется в терминах отображения момента.

Пусть G — связная группа Ли, (M, σ) — симплектическое G-многообразие Пуассона и $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ — соответствующее отображение момента. Для любой коприсоединенной орбиты $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ множество $M_\Omega = \mu^{-1}(\Omega)$ будет G-инвариантно. Предположим, что это множество является гладким многообразием и G действует на него так, что все орбиты имеют одну и ту же размерность.[3] Тогда множество $(M_\Omega)_G$ G-орбит в M_Ω также является гладким многообразием и будет обладать канонической симплектической структурой.

Действительно, легко проверить, что ограничение σ на M_Ω вырождается и $\ker \sigma|_{M_\Omega}$ в точке m совпадает с касательным пространством к G-орбите в m. Поэтому σ индуцирует невырожденную форму на $(M_\Omega)_G$.

Применяя эту процедуру, удается свести изучение механической системы с группой симметрий G к изучению другой системы с меньшим числом степеней свободы.

Иногда целесообразно обратить эту процедуру и рассмотреть более сложную систему малой размерности как результат редукции простой системы большей размерности. Обзор результатов симплектической геометрии и приложений можно найти в [AG], а описание геометрических свойств отображения момента — в [GS1]. Здесь мы ограничимся алгебраической интерпретацией симплектической редукции. При алгебраическом подходе подмногообразие M_Ω следует заменить алгеброй $C^\infty(M_\Omega)$ гладких функций на этом многообразии. Это фактор-алгебра $C^\infty(M)$ по идеалу I, состоящему из функций, равных нулю на M_Ω.

К сожалению, I не будет пуассоновым идеалом, так как он не замкнут относительно операции скобки. Рассмотрим подалгебру $A \subset C^\infty(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid \{f, I\} \subset I\}$. Тогда I — идеал Пуассона в A, Следовательно, A/I наследует пуассонову структуру. Оказывается, что $A/I \simeq C^\infty((M_\Omega)_G)$.

Заметим, что то же самое многообразие $(M_\Omega)_G$ можно получить как подмногообразие фактор-многообразия многообразия M_G. При алгебраическом подходе это означает, что мы берем фактор-многообразие подалгебры $C^\infty(M)^G \subset C^\infty(M)$ по соответствующему идеалу J.

3. Метод орбит и интегрируемые системы

3.1. Интегрируемые системы. Эта обширная область интенсивно развивалась в течение последних 30 лет. До этого времени были известны отдельные примеры, но никакой общей теории не существовало. Новая эра в этой области началась с плодотворного открытия, суть которого заключается в том, что уравнение Кортевега де Фриза $p_t = pp_x + p_{xxx}$ допускает бесконечный ряд законов сохранения и является вполне интегрируемой системой.

Было найдено много важных примеров классических и квантовых интегрируемых систем, а также предложены различные схемы, объясняющие возникновение таких примеров (см. обзор [DKN]). Например, аналитический подход к задаче Римана — Гильберта, так называемый метод обратной

[3] В практике эти условия часто нарушаются на подмногообразиях меньшей размерности. В этом случае следует удалить соответствующее подмногообразие или рассмотреть так называемые орбифолды (т. е. многообразия с углами) и более общие многообразия с особенностями.

задачи рассеяния, схему Адлера — Костанта, основанную на паре согласованных пуассоновых структур, метод пар Лакса, уравнение нулевой кривизны и т. д.

3.2. Связь с методом орбит. Метод орбит является естественным источником однородных симплектических многообразий (коприсоединенных орбит), которые могут рассматриваться как фазовые пространства классических механических систем. Заметим, что большинство из них неизоморфны кокасательным расслоениям и поэтому не соответствуют традиционным механическим системам. С другой стороны, этот новый тип фазового пространства включает следующий замечательный

Пример 1. Рассмотрим двумерную сферу S^2 с симплектической формой такую, что общий объем равен целому числу $n \geqslant 1$. Как коприсоединенная орбита для $\mathfrak{su}(2)$, она допускает квантование с помощью соответствующих унитарных неприводимых представлений размерности n. Физическая интерпретация этой квантовой системы следующая: частица спина $s = (n-1)/2$, которая не имеет других степеней свободы. Таким образом, мы получаем классический аналог спина, в существование которого долгое время никто не мог поверить.

Для построения интегрируемой системы требуется большое семейство пуассоново коммутирующих функций (в классической ситуации) или большое семейство коммутирующих операторов (в квантовой ситуации). Существование такой системы обеспечивает **схема Адлера — Костанта** (см. [Ko3] и [RS]), основанная в простейшем варианте на разложении алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств $\mathfrak{g}_\pm$, которые, на самом деле, являются подалгебрами $\mathfrak{g}$. В этом случае можно определить на $\mathfrak{g}$ коммутатор

$$[X,Y]^{\sim} := [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-], \tag{3}$$

где $X_\pm$ — проекция $X \in \mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}_\pm$. Коммутатор (3) определяет новую структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ и новую пуассонову структуру на $\mathfrak{g}^*$.

Отметим замечательный факт: центральные функции относительно первой скобки остаются коммутирующими относительно второй скобки. Более того, гамильтоновы системы, соответствующие $H \in P(\mathfrak{g}^*)^G$, допускают явное решение в терминах **задачи факторизации**:

$$g = g_+ \cdot g_-, \quad g \in G, \quad g_\pm \in G_\pm. \tag{4}$$

Теорема 1 (Адлер — Костант — Семенов-Тян-Шанский). (a) *Все функции из $P(\mathfrak{g}^*)^G$ образуют пуассоново коммутирующее семейство относительно новой структуры.*

(b) *Для функции $H \in P(\mathfrak{g}^*)^G$ определим кривую $g_\pm(t)$ в G уравнением*

$$\exp(tdH(F)) = g_+(t)^{-1} g_-(t). \tag{5}$$

Тогда траектория точки $F \in \mathfrak{g}^*$ при гамильтоновом потоке, соответствующим функции H, определяется уравнением

$$F(t) = K(g_+(t))F = K(g_-(t))F. \tag{6}$$

Применение этой схемы к различным алгебрам Ли $\mathfrak{g}$ и различным точкам $F \in \mathfrak{g}^*$ дает единую конструкцию для большинства известных интегрируемых систем, включая бесконечномерные (такие, как уравнение Кортевега де Фриза, его супераналоги, связанные с алгеброй Вирасоро и ее суперрасширениями; см. [GD] и [KhO]).

Этот подход имеет всего один дефект: он появился постфактум, когда почти все интересные примеры уже были открыты другими методами.

4. Некоторые открытые вопросы и темы для размышлений

4.1. Функциональная размерность. Следующие утверждения хорошо известны.

• Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны.

• Пространства $C^\infty(M)$ изоморфны как пространства Фреше для всех гладких компактных многообразий M положительной размерности.

• Все бесконечные счетные множества эквивалентны.

Однако не существует *естественного* изоморфизма между
$L^2(\mathbb{R}, dx)$ и $L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$, $C^\infty(S^1)$ и $C^\infty(S^2)$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$.

Неформально хотелось бы дать определение **функциональной размерности** f-$\dim$ бесконечномерного пространства так, чтобы

$$f\text{-}\dim L^2(\mathbb{R}^n, d^nx) = f\text{-}\dim C^\infty(\mathbb{R}^n) = n. \qquad (7)$$

Для этого надо сузить множество морфизмов между рассматриваемыми пространствами и учитывать лишь *естественные* морфизмы. Можно указать несколько способов таких ограничений.

Один способ заключается в том, чтобы сначала определить "основные" морфизмы и естественными считать только те морфизмы, которые являются композициями основных.

Для пространства гладких функций на многообразиях множество основных морфизмов должно включать

(a) умножение на ненулевые функции,

(b) диффеоморфизмы (гладкие замены переменных),

(c) некоторые интегральные преобразования такие, как преобразования Фурье или Радона.

При другом способе надо ввести дополнительную структуру в линейные пространства и рассматривать лишь те морфизмы, которые эту структуру сохраняют. Например, легко показать, что компактное гладкое многообразие M полностью определяется ассоциативной алгеброй $A = C^\infty(M)$ (см. лекцию 1) или алгеброй Ли $L = \mathrm{Vect}(M)$ гладких векторных полей на M (см. ниже). Действительно, точки M соответствуют максимальным идеалам в A или подалгебрам Ли минимальной коразмерности в L.

Здесь мы рассмотрим другую неформальную задачу, связанную с понятием функциональной размерности.

- *Показать, что при* $\dim M_1 > \dim M_2$ *алгебра Ли* $\mathrm{Vect}(M_1)$ *является, во-первых, “больше” и, во-вторых, “более некоммутативной”, чем* $\mathrm{Vect}(M_2)$

Ответ на один из возможных строгих вариантов первой части этой задачи получен в [KiK]. Мы опишем соответствующий результат ниже.

Пусть ξ, η — пара векторных полей на M. Рассмотрим подалгебру Ли $L(\xi,\eta) \subset \mathrm{Vect}(M)$, порожденную этими полями. Это биградуированная алгебра Ли вида

$$L(\xi,\eta) = FL(x,y)/I(\xi,\eta), \tag{8}$$

где $FL(x,y)$ — естественно биградуированная свободная алгебра Ли с двумя образующими x, y и $I(\xi,\eta) \subset FL(x,y)$ — ядро отображения $\varphi : FL(x,y) \to L(\xi,\eta)$ такого, что $\varphi(x) = \xi$, $\varphi(y) = \eta$.

Оказывается, что для общих ξ, η идеал $I(\xi,\eta)$ зависит только от $\dim M$. Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем выделенный биградуированный идеал $I_n \subset FL(x,y)$ и мы можем определить биградуированную алгебру Ли $L(n) := FL(x,y)/I_n$.

Рост чисел $a_{k,l}(n) := \dim L^{k,l}(n)$ может рассматриваться как характеристика размера $\mathrm{Vect}(M)$ для n-мерного M.

Теорема 2 (сформулированная в [KiK] и доказанная позднее Молевым).

$$a_{k,l}(1) = p_k(k+l-1) + p_l(k+l-1) - p(k+l-1), \tag{9}$$

где $p(n)$ *— стандартная функция разбиения и* $p_k(n)$ *— число разбиений* n *на* $\leqslant k$ *частей (или на части размера* $\leqslant k$*).*

Отметим интересное

Следствие. *Последовательность* $a_m(n) = \sum\limits_{k+l=m} a_{k,l}(n)$ *при* $n = 1$ *имеет* **промежуточный** *или* **субэкспоненциальный** *рост. А именно,*

$$a_m(1) \approx \frac{1}{4\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}m}},$$

откуда

$$\log\log a_m(1) \approx \frac{1}{2}\log m. \tag{10}$$

А. И. Молев получил более общий результат:

$$\log\log a_m(n) \approx \frac{n}{n+1}\log m, \tag{11}$$

из которого следует, что все алгебры Ли векторных полей на гладких многообразиях имеют промежуточный рост. В частности, вопреки широко распространенному заблуждению, они никогда не содержат свободную подалгебру Ли имеющую экспоненциальный рост:

$$\sum_{k+l=m} \dim FL^{k,l}(x,y) = \frac{1}{m}\sum_{d|m} \mu(d) 2^{m/d} \approx \frac{2^m}{m}.$$

Много интересных задач возникает в связи со вторым вопросом, т. е. по поводу алгебраической структуры алгебр $L(n)$ и идеалов $I(n)$. Здесь мы приведем лишь следующую гипотезу.

Гипотеза. Идеал $I(1)$ порождается выражениями

$$\sum_{s \in S_4} \operatorname{sgn} s \cdot \operatorname{ad}(x_{s(1)}) \operatorname{ad}(x_{s(2)}) \operatorname{ad}(x_{s(3)}) \operatorname{ad}(x_{s(4)}) x_0, \quad x_i \in FL(x, y). \tag{12}$$

Имеются некоторые наглядные соображения, подтверждающие эту гипотезу. По-видимому, $L(1)$ допускает точное представление как алгебра Ли векторных полей на бесконечномерном многообразии, касательных к одномерному расслоению.

В заключение мы сформулируем главный вопрос в данной области:

?

- *Дать определение функциональной размерности унитарного неприводимого представления так, чтобы выполнялось правило* 9

4.2. Инфинитезимальные характеры. Общее доказательства модифицированного правила 7 было получено независимо в [Du] и [Gi]. Доказательство довольно сложное и аналитическое по своей природе, тогда как само утверждение чисто алгебраическое и несомненно может быть доказано чисто алгебраическим способом. Моя собственные попытки реализовать алгебраический подход зашли в тупик, когда я обнаружил (см. лекцию 3), что многообразие A_n структурных констант n-мерной группы Ли оказалось в высшей степени приводимым. В связи с этим представляется весьма сомнительной возможность доказательства этого утверждения лишь на основе определяющих уравнений для A_n.

Другой подход был предложен в [KV], однако и с его помощью задачу окончательно решить не удалось. Совсем недавно я узнал, что М. Концевич нашел новое доказательство, основанное на вычислении некоторого функционального интеграла, вид которого подсказан одним из вариантов квантовой теории поля. Возможно, его подход приведет к правильному решению задачи (в той формулировке, которая дана в п. 1.1). В самых общих чертах, преимущество нового подхода состоит в обращении к общим пуассоновым многообразиям (а не только к тем, которые связаны с алгебрами Ли). Так что ситуация похожа на историю со знаменитой теоремой Атьи — Зингера для дифференциальных операторов, которая была доказана лишь после перехода к более общему контексту псевдодифференциальных операторов.

4.3. Кратности и геометрия. Пусть G — компактная односвязная группа Ли и T - максимальная связная абелева подгруппа, $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{t}$ — соответствующие алгебры Ли, которые отождествляются с их двойственными с помощью $\operatorname{Ad}(G)$-инвариантного скалярного произведения. Пусть $P \subset i\mathfrak{t}^*$ — весовая решетка, $Q \subset P$ — корневая подрешетка, $\rho \in P$ — сумма фундаментальных весов и $\Omega_\lambda \subset \mathfrak{g}^*$ — коприсоединенная орбита точки $i\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$. Обозначим через p естественную проекцию $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{t}^*$.

Известно, что для любого $\lambda \in P_+$ множество $C_\lambda = p(\Omega_{\lambda+\rho})$ является выпуклой оболочкой $|W|$ различных точек $\{iw(\lambda + \rho), w \in W\}$.

Будем называть **элементарной ячейкой** в $\mathfrak{t}^*$ множество $C_0 = p(\Omega_\rho)$, а также все множества, полученные из C_0 переносом на элементы P. Можно проверить, что C_λ является объединением элементарных ячеек с центрами в в точке $(\lambda + Q) \bigcap p(\Omega_\lambda)$. Более точный результат приведен в лекции 10.

Более трудный и менее формальный вопрос:

- *Как связана кратность $m_\lambda(\mu)$ веса μ в унитарном неприводимом представлении π_λ с геометрией множеств $p^{-1}(C_0 + \mu)$ и $p^{-1}(\mu)$?*

4.4. Дополнительные серии. Метод орбит по-видимому, не оставляет места для дополнительных серий представлений полупростых групп. Действительно, согласно идеологии метода орбит разбиение $\mathfrak{g}^*$ на коприсоединенные орбиты соответствует разложению регулярного представления на неприводимые компоненты. Однако унитарные неприводимые представления дополнительных серий не дают вклада в это разложение по определению.

Возможное разрешение этого парадокса основано на замечании в одной из ранних статей Гельфанда и Наймарка. Они заметили, что в случае некомпактной полупростой группы пространство $L^1(G, dg)$ существенно отличается от пространства $L^2(G, dg)$ ввиду экспоненциального роста плотности меры Хаара. Это различие можно объяснить следующим образом. Одним из ингредиентов метода орбит является обобщенное преобразование Фурье (см. лекцию 9) пространства функций на G в пространство функций на $\mathfrak{g}^*$, которое представляет собой композицию двух отображений:

— отображение функций на G в функции на $\mathfrak{g}$:

$$f \longmapsto \varphi, \quad \varphi(X) = \sqrt{\frac{d(\exp X)}{dX}} \cdot f(\exp X),$$

— обычное преобразование Фурье, которое преобразует функции на $\mathfrak{g}$ в функции на $\mathfrak{g}^*$.

Образ $L^2(G, dg)$ при обобщенном преобразовании Фурье состоит из квадратично интегрируемых функций (по крайней мере, если мы рассматриваем функции с носителем в области $\mathcal{E}$, где экспоненциальное отображение взаимно однозначно). Однако образ $L^1(G, dg)$ состоит из более гладких функций, допускающих аналитическое продолжение из $\mathfrak{g}^*$ в некоторую полосу в $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$.

Итак, можно попробовать ассоциировать дополнительные серии унитарных неприводимых представлений с G-орбитами, которые лежат внутри этой полосы и инвариантны относительного комплексного сопряжения. Можно проверить, что в простейшем случае $G = SL(2, \mathbb{R})$ этот подход приводит к правильной интегральной формуле для обобщенного характера представления дополнительных серий. На мой взгляд, данная проблема заслуживает дальнейшего исследования.

4.5. Конечные группы. Метод орбит может развиваться в очень интересном направлении. А именно, можно применить этот метод к некоторой конечной группе типа $G(\mathbb{F}_q)$, где G — алгебраическая группа, определенная над $\mathbb{Z}$, и $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. В связи с этим рассмотрим пример одной из наиболее важных нильпотентных групп. Пусть $G_n(K)$ — группа всех верхнетреугольных матриц с элементами из некоторого поля K и единицами на главной диагонали.

Напомним, что случай $K = \mathbb{R}$ был одним из главных примеров, на которых иллюстрировался метод орбит в [Kil]. Оказывается, что случай конечного поля $\mathbb{F}_q$, когда $G_n(\mathbb{F}_q)$ — конечная нильпотентная группа порядка $q^{[n(n-1)]/2}$, также представляет значительный интерес (см. [Ki10]).

Мы в основном интересуемся асимптотическими свойствами гармонического анализа на $G_n(\mathbb{F}_q)$, когда q фиксировано и n стремится к бесконечности. В частности, я сформулирую несколько принципиальных вопросов.

- *Какова асимптотика числа коприсоединенных орбит для* $G_n(\mathbb{F}_q)$?
- *Можно ли описать "общую" или "типичную" коприсоединенную орбиту* ?
- *Какие характеристики орбит и представлений имеют смысл для групп "очень больших матриц", скажем, порядка* 10^{10} *(или даже* 20) *над конечным полем* ?

(Заметим, что даже самые простые численные вопросы относительно этих групп находятся вне пределов возможностей современных компьютеров.) Конечно, эти вопросы имеют смысл не только для треугольных групп и их аналогов (унипотентных радикалов классических групп). Можно попробовать найти ответ для $GL(n, \mathbb{F}_q)$.

4.6. Бесконечномерные группы. Это направление может оказаться наиболее перспективным обобщением метода орбит. В ситуации, когда нет общей теории и в то же время накоплено много важных примеров, трудно переоценить эмпирическое значение метода орбит.

Наиболее интригующая и важная проблема связана с группой Вирасоро — Ботта и формулируется следующим образом:

- *Как объяснить довольно сложную структуру дискретных серий унитарных неприводимых представлений группы Вирасоро — Ботта (Vir) в терминах коприсоединенных орбит* ?

Ответ содержится в очень интересной статье [AS], но на физическом уровне строгости и требует перевода на математический язык.

Следуя примеру Д. Кнута [Kt], я заканчиваю книгу следующей проблемой:

- *Сформулировать и решить другие задачи, связанные с приложениями метода орбит к бесконечномерным группам*

Литература

[A] Ариольд В. И. *О математическом образовании*, Успехи мат. иаук **53** (1998), вып. 1, 229–234.

[AN] Ариольд В. И., Новиков С. П. (ред) *Динамические системы-4*, Современиые проблемы математики. Фуидвмеитвльиые иапрввлеиия 4 (Итоги иауки и техиики, ВИНИТИ), М., 1985.

[AG] Ариольд В. И., Гивеитвль А. *Симплектическая геометрия*, Динвмические системы-4, Современиые проблемы матемвтики. Фуидаментальные иаправлеиия 4 (Итоги ивуки и техники, ВИНИТИ), М., 1985, с. 5–140.

[AK] Auslander L., Kostant B. *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. **14** (1971), no. 4, 255–354.

[AS] Alekseev A., Shatashvili S. *Path integral quantization of the coadjoint orbits of the Virasoro group and 2-d gravity*, Nuclear Phys. B **323** (1989), no. 3, 719–733.

[At] Atiyah M. *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[B] Бурбвки Н. *Группы Ли*, М., Мир, 1972.

[Ba] Bargmann V. *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. Math. 48 (1947), 568–590.

[BCD] Bernat P., Conze N., Duflo M. et al *Representations des groupes de Lie resolubles*, Paris, Dunod, 1972.

[Be1] Березни Ф. А. *Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли*, Фуикциои. вивл. прил. 1 (1967), вып. 2, 1–14.

[Be2] Березии Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, МГУ, 1983.

[BK] Березии Ф. А., Квц Г. И. *Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами*, Мвт. сб. **82** (1970), 343–359.

[BL] Bernstein I. N., Leites D. A. *Irreducible representations of finite dimensional Lie superalgebras of series W and S*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. **32** (1979), 277–278.

[Br] Brown I. *Dual topology of a nilpotent Lie group*, Ann.Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 407–411.

[Bu] Бусяцквя И. *О представлениях экспоненциальных групп Ли*, Фуикциои. вивл. прил. 7 (1973), вып. 2, 79–80.

[BW] Borel A., Wallach N. *Continuous cohomology, Discrete subgroups and Representations of Reductive groups*, Princeton, Princeton University Press, 1980.

[C] Coxeter H. S. M. *The evolution of Coxeter-Dynkin diagrams*, Polytopes: abstract, convex and computational, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1994.

[D] Drinfeld V. G. *Quantum groups*, Proc. ICM (Berkeley 1986), AMS, 1987, p. 798–820.

па всех верхнетреугольных матриц с элементами из некоторого поля K и единицами на главной диагонали.

Напомним, что случай $K = \mathbb{R}$ был одним из главных примеров, на которых иллюстрировался метод орбит в [Kil]. Оказывается, что случай конечного поля $\mathbb{F}_q$, когда $G_n(\mathbb{F}_q)$ — конечная нильпотентная группа порядка $q^{[n(n-1)]/2}$, также представляет значительный интерес (см. [Kil0]).

Мы в основном интересуемся асимптотическими свойствами гармонического анализа на $G_n(\mathbb{F}_q)$, когда q фиксировано и n стремится к бесконечности. В частности, я сформулирую несколько принципиальных вопросов.

- *Какова асимптотика числа коприсоединенных орбит для* $G_n(\mathbb{F}_q)$?
- *Можно ли описать "общую" или "типичную" коприсоединенную орбиту* ?
- *Какие характеристики орбит и представлений имеют смысл для групп "очень больших матриц", скажем, порядка* 10^{10} (*или даже* 20) *над конечным полем* ?

(Заметим, что даже самые простые численные вопросы относительно этих групп находятся вне пределов возможностей современных компьютеров.) Конечно, эти вопросы имеют смысл не только для треугольных групп и их аналогов (унипотентных радикалов классических групп). Можно попробовать найти ответ для $GL(n, \mathbb{F}_q)$.

4.6. Бесконечномерные группы. Это направление может оказаться наиболее перспективным обобщением метода орбит. В ситуации, когда нет общей теории и в то же время накоплено много важных примеров, трудно переоценить эмпирическое значение метода орбит.

Наиболее интригующая и важная проблема связана с группой Вирасоро — Ботта и формулируется следующим образом.:

- *Как объяснить довольно сложную структуру дискретных серий унитарных неприводимых представлений группы Вирасоро — Ботта* (*Vir*) *в терминах коприсоединенных орбит* ?

Ответ содержится в очень интересной статье [AS], но на физическом уровне строгости и требует перевода на математический язык.

Следуя примеру Д. Кнута [Kt], я заканчиваю книгу следующей проблемой:

- *Сформулировать и решить другие задачи, связанные с приложениями метода орбит к бесконечномерным группам*

Литература

[A] Арнольд В. И. *О математическом образовании*, Успехи мат. наук **53** (1998), вып. 1, 229–234.

[AN] Арнольд В. И., Новиков С. П. (ред) *Динамические системы-4*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **4** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1985.

[AG] Арнольд В. И., Гивенталь А. *Симплектическая геометрия*, Динамические системы-4, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **4** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1985, с. 5–140.

[AK] Auslander L., Kostant B. *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. **14** (1971), no. 4, 255–354.

[AS] Alekseev A., Shatashvili S. *Path integral quantization of the coadjoint orbits of the Virasoro group and 2-d gravity*, Nuclear Phys. B **323** (1989), no. 3, 719–733.

[At] Atiyah M. *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[B] Бурбаки Н. *Группы Ли*, М., Мир, 1972.

[Ba] Bargmann V. *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. Math. **48** (1947), 568–590.

[BCD] Bernat P., Conze N., Duflo M. et al *Representations des groupes de Lie resolubles*, Paris, Dunod, 1972.

[Be1] Березин Ф. А. *Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли*, Функцион. анал. прил. **1** (1967), вып. 2, 1–14.

[Be2] Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, МГУ, 1983.

[BK] Березин Ф. А., Кац Г. И. *Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами*, Мат. сб. **82** (1970), 343–359.

[BL] Bernstein I. N., Leites D. A. *Irreducible representations of finite dimensional Lie superalgebras of series W and S*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. **32** (1979), 277–278.

[Br] Brown I. *Dual topology of a nilpotent Lie group*, Ann.Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 407–411.

[Bu] Бусяцкая И. *О представлениях экспоненциальных групп Ли*, Функцион. анал. прил. **7** (1973), вып. 2, 79–80.

[BW] Borel A., Wallach N. *Continuous cohomology, Discrete subgroups and Representations of Reductive groups*, Princeton, Princeton University Press, 1980.

[C] Coxeter H. S. M. *The evolution of Coxeter-Dynkin diagrams*, Polytopes: abstract, convex and computational, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1994.

[D] Drinfeld V. G. *Quantum groups*, Proc. ICM (Berkeley 1986), AMS, 1987, p. 798–820.

[Di1] Dixmier J. *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II.*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 325–388.

[Di2] Диксмье Ж. *C^*-алгебры и их представления*, М., Наука, 1974.

[Di3] Диксмье Ж. *Универсальные обертывающие алгебры*, М., Мир, 1978.

[DKN] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. *Интегрируемые системы*, Динамические системы-4. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **4** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1985, с.179–285.

[Du] Duflo M. *Operateurs differentiels bi-invariants sur un group de Lie*, Ann.Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 265–283.

[DW] Дули А. Х., Вилдбергер Н. Дж. *Гармонический анализ и глобальное экспоненциальное отображение для компактных групп Ли*, Функцион. анал. прил. **27** (1997), вып. 1, 25–32.
Wildberger N. J. *On a relationship between adjoint orbits and conjugacy classes of a Lie group*, Canad. Math. Bull. **33** (1990), 297–304.

[EFK] Etingof P., Frenkel I. B., Kirillov A. A. (Jr) *Spherical functions on affine Lie groups*, Duke Math. Jour. (1995), no. 1, 59–90.

[EK] Кириллов А. А. (мл.), Этингоф П. И. *О едином теоретико-представленческом подходе к теории специальных функций*, Функцион. анал. прил. **28** (1994), вып. 1, 91–94.

[F] Fell J. M. G. *Weak containment and induced representations of groups*, Canad. J. Math. **14** (1962), 237–268.

[FF] Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б. *Об инвариантных дифференциальных операторах на прямой*, Функцион. анал. прил. **13** (1979), вып. 4, 91–92;
———, *Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой*, Функцион. анал. прил. **14** (1980), вып. 3, 45–60.

[GD] Гельфанд И. М., Дикий Л. А. *Резольвента и гамильтоновы системы*, Функцион. анал. прил. **11** (1997), вып. 2, 11–27.

[GH] Griffiths P., Harris J. *Principles of algebraic geometry*, New York, John Wiley & Sons, 1994 [Русский перевод 1-го изд.: М., Мир, 1982.]

[Gi] Гинзбург В. А. *Метод орбит в теории представлений комплексных групп Ли*, Функцион. анал. прил. **15** (1981), вып. 1, 23–37.

[GLS] Guillemin V., Lerman E., Sternberg S. *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams* Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

[GN] Гельфанд И. М., Наймарк М. А. *Унитарные представления группы Лоренца*, Изв. АН СССР, Сер. мат. **11** (1947), no. 5, 411–504.

[Gr] Grothendieck A. *Sur certains questions d'algebre homologique*, Tohoku.

[Grz] Грозман П. Я. *Локальные инвариантные билинейные операторы над тензорными полями на плоскости*, Вестник МГУ, Сер. I (1980), N 6, 3–6.
———, *Классификация билинейных инвариантных операторов над тензорными полями*, Функцион. анал. прил. **14** (1980), вып. 2, 58–59.

[GS1] Guillemin V., Sternberg S. *Geometric asymptotics*, Providence, AMS, 1977.

[GS2] Guillemin V., Sternberg S. *Quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), 515–538.

[He] Heckman G. J. *Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups*, Invent. Math. **67** (1982), 333–356.

[HHSV] Hazewinkel M., Hesselink W., Siersma, D., Veldkamp, F. D. *The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the $A-D-E$ problem)*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **25** (1977), no. 3, 257–307.

[IS] Ol'shantskii M. A., Perelomov A. M., Reiman A. G., Semenov-Tian-Shanskii M. A. *Integrable systems II*, Encycl. Math. Sci. Dynamical Systems VII **16** (1994).

[KhO] Овсиенко В. Ю., Хесин Б. А. *Суперуравнение Кортевега де Фриза как уравнение Эйлера*, Функцион. анал. прил. **21** (1987), вып. 4, 81–82.

[Ki1] Кириллов А. А. *Унитарные представления нильпотентных групп Ли*, Успехи мат. наук, **17** (1962), вып. 4, 57–110.

[Ki2] Кириллов А. А. *Конструкции унитарных неприводимых представлений групп Ли*, Вестник МГУ, Сер. I (1970), N 2, 41–51.

[Ki3] Кириллов А. А. *Характеры унитарных представлений группы Ли. Редукционные теоремы*, Функцион. анал. прил. **3** (1969), вып. 1, 36–47.

[Ki4] Кириллов А. А. *Элементы теории представлений*, М., Наука, 1972; 1978.

[Ki5] Кириллов А. А. *Локальные алгебры Ли*, Успехи мат. наук, **31** (1976), вып. 4, 57–76.

[Ki6] Кириллов А. А. *Инвариантные операторы над геометрическими величинами*, Современные проблемы математики **16** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1980, с. 3–29.

———, *Об инвариантных дифференциальных операторах на геометрических величинах*, Функцион. анал. прил. **11** (1977), вып. 2, 39–44.

[Ki7] Кириллов А. А. *Геометрическое квантование*, *Динамические системы-4*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **4** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1985, с. 141–178.

[Ki8] Kirillov A. A. *Introduction to the orbit method. I, II*, Contemp. Math. **145** (1993).

[Ki9] Кириллов А. А. *Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ*, Некоммутативный гармонический анализ – I. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **22** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1988, с. 5–162.

[Ki10] Kirillov A. A. *Variation on the triangular theme*, E. B. Dynkin Seminar on Lie Groups. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **169** (1995), p. 43–73.

[Ki11] Kirillov A. A. *Merits and demerits of the orbit method*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 433–488.

[Ki12] Кириллов А. А. *Метод орбит и конечные группы*, Студенческие чтения МК НМУ **1** (2000), М., МЦНМО с. 37–73.

[KiG] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. *Теоремы и задачи функционального анализа*, М., Наука, 1979; 1988.

[KiK] Кириллов А. А., Концевич М. Л. *Рост алгебры Ли, порожденной двумя общими векторными полями на прямой*, Вестник МГУ, Сер. 1 (1983), N 4, 15–19.

Kirillov A. A., Kontsevich M. L., Molev A.I. *Algebras of intermediate growth*, Selecta Math. Sov. **9** (1990), 155–169.

[KiN] Кириллов А. А., Неретин Ю. А. *Многообразие A_n структур n-мерных алгебр Ли*, Некоторые проблемы современного анализа. М., МГУ, 1984, с. 42–56.

[Kl] Klyachko A. A. *Stable bundles, representation theory and Hermitian operators*, Selecta Math. (N.S.) **3** (1998), 419–445.

[Kn] Knapp A. *Representation Theory of Semisimple Gropus. An Overview Based on Examples*, Princeton, Princeton University Press, 1986.

[KMS] Kolár I., Michor P., Slovák J. *Natural operations in differential geometry*, Springer, 1993.

[Ko1] Kostant B. *Quantization and unitary representations*, Lect. Notes Math. **170** (1970), 87–208.

[Ko2] Kostant B. *Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization*, Lect. Notes Math. **570** (1977), 177–306.

[Ko3] Kostant B. *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. Math. **34** (1979), 195–338.

[Kon] Kontsevich M. L. *Formality conjecture. Deformation theory and symplectic geometry*, Math. Phys. Study **20**, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1996, p. 139–156.

[KR] Curtis Ch. W., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras*, New York, John Wiley & Sons, 1962.

[KT] Knutson A., Tao T. *The honeycomb model of $GL_n(C)$ tensor products. I. Proof of the saturation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. (1999), no. 4, 1055–1090.

[Kt] Кнут Д. *Искусство программирования*, М., Мир, 1978.

[KV] Kashiwara M., Vergne M. *The Campbell-Hausdorff formula andinvariant hyperfunctions*, Invent. Math. **47** (1978), 249–272.

[La] Ленг С. $SL_2(\mathbf{R})$, М., Мир, 1977.

[Le] Лейтис Д. А. *Введение в теорию супермногообразий*, Успехи мат. наук **35** (1980), вып. 1, 3–57.

[LL] Leptin H., Ludwig J. *Unitery representation theory of exponential Lie groups*, Walter de Gruyter & Co, 1994.

[M] Mackey G. W. *Ergodic theory and virtual groups*, Math. Ann. **166** (1966), 187–207.

[MacL] MacLane *Categories for the working mathematician*, Springer, 1998.

[Mn1] Манин Ю. И. *Новые размерности в геометрии*, Успехи мат. наук **39** (1984), вып. 6, 47–73.

[Mn2] Манин Ю. И. *Калибровочные поля и комплексная геометрия*, М., Наука, 1984.

[N] Nijenhuis A. *Geometric aspects of formal differential operations on tensor fields*, Proc. ICM Edinbourg, 1958.

[OS] Ørsted B., Schlichtkrull H. (eds.) *Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory*, Perspectives in Mathematics **17** Academic Press, 1977.

[P1] Pukanszky L. *On the theory of exponential groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), 487–507.

[P2] Pukanszky L. *Unitary representations of solvable Lie groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup., Ser. 4 (1971), 457–608.

[PT] Palais R., Terng C. L. *Natural bundles have finite order*, Topology **16** (1977) 271–277.

[QFS] Deligne P., Etingof P., Freed D.S., Jeffrey L.C., Kazhdan D., Morgan J.W., Morrison D.R., Witten E. (eds.) *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians I, II*, Providence, Amer. Math. Soc., 1999.

[R] Рудаков А. Н. *Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли типа Картана*, Изв. АН СССР, **38** (1974), 835–866.
———, *Неприводимые представления бесконечномерных алгебр типов S и H*, Изв. АН СССР **39** (1975), 496–511.

[RS] Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. *Теоретико-групповые методы в теории интегрируемых систем*, Динамические системы–7. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **16** (Итоги науки и техники, ВИНИТИ), М., 1987, 119–193.

[S] Souriau J.-M. *Structure des Systemes Dynamiques*, Paris, Dunod, 1970.

[Sch] Schouten Y. A. *Tensor analysis for physicists*, Oxford, Clarendon Press, 1959.

[Se] Серре Ж.-П. *Линейные представления конечных групп*, М. Мир, 1979.

[Shc] Щепочкина И. М. *О представлениях разрешимых групп Ли*, Функцион. анал. прил. **11** (1977), вып. 2, 93–94.
——, *Orbit method for the reduction-induction problems for a normal subgroup of a solvable Lie group*, C.R. de l'Acad. Bulgare Sci. **33** (1980), 1039–1042.

[ShSt] Shnider S., Sternberg S. *Quantum groups. From coalgebras to Drinfeld algebras*, International Press Inc., 1993.

[Soh] Sohnius M. *Introduction to SUSY*, Phys. Letters, **128**.

[T] Terng C. L. *Natural vector bundles and natural differential operators*, Amer. Math. J. **100** (1978), 775–828.
Palais R., Terng C. L. *Natural bundles have finite order*, Topology **16** (1977), 271–277.

[V] Veblen O. *Differential invariants and geometry*, Atti del Congr. Int. Mat., Bologna, 1928

[Ve1] Vergne M. *Construction de sous-algè bres subordonée a un элемент du dual d' une algèbre de Lie résoluble,* C.R. Acad. Sci. Paris (A), **270** (1970), 173–175; 704–707. [Русский перевод: Математика, 15: 2 (1971), 14–18.]

[Ve2] Vergne M. *On Rossmann's character formula for discrete series*, Invent. Math. **54** (1978), 11–14.

[VO] Винберг Е. Б., Онищик А. Л. *Семинар по алгебраическим группам и группам Ли*, М., Наука, 1988; 1995.

[Vog] Vogan D. A. *Representations of Real Reductive Lie Groups*, Boston, Birkhäuser, 1981.

[W] Witten E. *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geometry (1982), 661–692.
—— *Geometry and quantum field theory*, Amer. Math. Soc. centennial publications, II, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1992, p. 479–491.

Предметный указатель

А

Автоморфизм внутренний 3.1.2; 7.1
Алгебра
— внешняя (грассманова) 1.3.1
— Ли 3.2.1
— — абелева 3.2.5
— — жесткая 3.2.4
— — исключительная 3.3.2
— — классическая 3.3.2
— — коммутативная 3.2.5
— — нильпотентная 3.2.5
— — особая 3.3.2
— — полупростая 3.2.5
— — разрешимая 3.2.5
— октонионная 3.3.2
— с делением 3.1.2
— суперкоммутативная 1.3.1
— суперсимметрическая 1.3.1
— универсальная обертывающая 6.2.1
Аналитическая серия представлений $SL(2,\mathbb{R})$ 5.3.1
Антикоммутационные соотношения 1.3.1
Антигомоморфизм 3.1.2; 4.1.1
Антиинволюция 3.1.2
Антипредставление 2.1
Атлас
— ориентируемый 1.1.1
— эквивалентный 1.1.1
Антигомоморфизм 4.1.1

Б

База расслоения 1.2.1
Базис ортонормированный 6.1.1
Березиниан 2.8
Борелевское множество 4.4

В

Вектор
— гладкий 6.2.4
— касательный 1.2.1
— световой, пространственно (времени) подобный 4.2.5
— циклический 4.2.4
Векторное поле 1.2.1
Вещественная форма (алгебры Ли) 3.2.6
— нормальная (расщепимая) 3.3.1
— компактная 3.3.1
Вложение каноническое слагаемого в сумму 1.1.4

Г

Геометрический объект 1.2.1
— дифференциальный порядок 2.2
— компоненты 2.2
— линейный 2.2
— неприводимый 2.2
— поле 2.2
Гомоморфизм 1.1.2
— алгебр Ли 3.2.2
— существенный 1.1.2
Группа
— Вейля (H. Weyl) 4.1.2
— Вирасоро — Ботта 7.4.2
— квантовая 1.3.2
— Ли 3.1.1
— локально изоморфная 3.1.1
— Лоренца
— — общая 3.1.2
— — собственная (специальная) 3.1.2

— Пуанкаре 4.2.5
— симметрическая 3.1.1
— симплектическая 3.1.2
— типа I (ручная) 6.1.2
— не типа I (дикая) 6.1.2
Групповая алгебра 5.1.1

Д
Двойственное пространство градуированное 1.3.2
Действие
— алгебры Ли
— — левое 4.2.2
— — эффективное (точное) 4.2.2
— группы
— — правое 2.1; 4.1.1
— — просто транзитивное 7.2.1
— — транзитивное 4.1.2
— — эффективное 4.1.1
Диаграмма коммутативная 1.1.4
Диффеоморфизм 1.2.2; 2.2
Дифференциальная 1-форма, k-форма 1.2.1
— векторная 2.7
— Маурера — Картана 7.2.1
Дифференциальный оператор
— порядка k 2.4
— типа $(\mu_1, \ldots \mu_m; \mu)$ 2.5.1
Дифференцирование
— порядка k коммутативной супералгебры 2.7
Дискретная серия
— (представлений $SL(2, K)$) 5.1.5
— (представлений $SL(2, \mathbb{R})$) 5.3.2
Длина вектора 6.1.1

Е
Естественная операция
— линейная 2.1

З
Закон коассоциативности 1.3.2

И
Идеал Шаттена 6.1.1
Изоморфизм объектов категории 1.1.4
Инвариант относительный веса λ 4.2.4
Инвариантная операция 2.5
— на тензорных плотностях 2.5.1
— билинейная 2.7
— примитивная 2.7
Инволюция 3.1.2
Интегрирование формы, плотности 1.2.3
Интегральная форма 1.3.3
Интегрируемая структура 2.7

К
Категория 1.1.4
— алгебр Ли 3.2.2
— двойственная 1.1.4
Карта 1.1.1
— положительно связанная 1.1.1
— отрицательно связанная 1.1.1
Кватернион 3.1.2
Классы смежности левые 4.1.2
Ковекторное поле 1.2.1
Комплексный тор 3.1.3
Композиция морфизмов категории 1.1.4
Конкомитант
— Схоутена — Лагранжа 2.7
— Схоутена симметрический 2.7
Контактная структура 1.3.3
Координаты локальные 1.1.1
— однородные 1.1.2
Корень (алгебры Ли) 3.3.1
— отрицательный 3.3.1
— положительный 3.3.1
— простой 3.3.1
— разложимый 3.3.1
Косой градиент 7.2.2; 7.4.1
Коцикл
— эквивалентный (когомологичный) 5.1.3
— Чеха 1.2.4
— универсальный 5.1.3
Коумножение 1.3.2

Кривые эквивалентные 1.2.1
Коэффициент зацепления 1.2.3

Л
Левый сопряженный функтор 4.1.4
Левое G-пространство 4.1.1
Линейный принцип
двойственности Фробениуса 4.1.5

М
Максимальный тор 4.1.2
Матрица
— Картана 3.3.1
— ортогональная 3.1.2
— псевдоортогональная 3.1.2
— транспонированная 3.1.2
— псевдоунитарная 3.1.2
— унитарная 3.1.2
— эрмитово сопряженная 3.1.2
Многообразие
— аффинное алгебраическое 1.3.1
— k-гладкое n-мерное 1.1.1
— комплексное 1.1.2
— линейно связное 1.1.1
— неориентируемое 1.1.1
— ориентированное 1.1.1
— ориентируемое 1.1.1
— Пуассона 7.2.2
— ручное (G-многообразие) 4.4
— связное 1.1.1
— сепарабельное 1.1.1
— флаговое 4.1.2
— хаусдорфово 1.1.1
Модуль над алгеброй Ли
($\mathfrak{g}$-модуль) 3.2.2
Морфизм категории 1.1.4

Н
Неподвижная точка 4.1.1
Нечетный элемент 1.3.1
Нормализатор 4.1.2
Носитель функции 1.1.3
— компактный по модулю H 5.2.2

О
Объект категории 1.1.4
— изоморфный 1.1.4
— универсальный 1.1.4
Окрестность 1.1.1
Ортогональный проектор 4.4
Оператор
— Гильберта — Шмидта 6.1.1
— инвариантный
(естественный) 2.5.1
— интегральный 6.1.1
— компактный 6.1.1
— конечного ранга 6.1.1
— Лапласа разностный 5.1.4
— Лапласа —Казимира 6.2.3
— ограниченный 6.1.1
— со следом 6.1.1
— сплетающий 3.2.2; 5.1.2
— G-эквивариантный 5.1.2
Орбита коприсоединенная 7.1
— целочисленная 7.2.1
— оснащенная 9.2.2
Ориентация 1.1.1
Основная серия
(представлений) 5.1.5
— (унитарных
представлений $SL(2,K)$) 5.3.1
Основное уравнение 5.1.3
Отображение
— G-эквивариантное 4.1.1
— m-гладкое 1.1.1
— локальное 2.5.1
— моментов 7.4.1
— собственное 1.1.2
— эквивариантное 2.1

П
Параллельный перенос 1.2.4
Подалгебра Картана 3.3.1
Подгруппа
— инволютивная 3.1.2
— линейная 3.1.3
Подмногообразие 1.1.2
Подфактор 4.2.2

Покрытие Лере 1.2.4
Поливекторное поле 1.2.1
Полином
— Лежандра 5.1.6
— Эрмита 6.1.1
Полуплотности, полиформы 4.3.1
Почти всюду 6.1.1
Правило Эйнштейна 1.2.1
Правое G-пространство 4.1.1
Представление
— знаковое 5.1.4
— индуцированное 2.2
— — гладко 5.2.2
— — голоморфно 4.3.1
— коприсоединенное 4.2.2; 7.1
— линейное
— — алгебры Ли 3.2.2
— — группы Ли 5.1.1
— множества 4.1.3
— неприводимое 5.1.1
— ортогональное 5.1.1
— перестановочное 5.1.3; 5.1.4
— присоединенное 3.2.3; 7.1
— приводимое 5.1.1
— спинорное 4.2.5
— тавтологическое 2.3
— унитарное 5.1.1
— унитарно индуцированное 5.2.4
— фундаментальное 2.3
$*$-Представление множества 4.1.3
— многообразия 4.4
— — согласованное с представлением группы 4.4
Преобразование
— дробно-линейное (Мёбиуса) 4.2.1
— Фурье 5.1.1
Проекторнозначная мера 4.4
Произведение
— векторное 3.1.2
— косое (скрещенное) 1.2.1
— над G 4.1.1
— полупрямое (алгебр Ли) 3.2.5
— прямое объектов категории 1.1.4
— — в категории G-множеств 4.1.1
— расслоенное 2.2
— скалярное 3.1.2
— смешанное 3.2.1
Производная
— ковариантная 1.2.4
— Ли 2.7; 7.4.2
Пространство
— G-пространство 4.1.1
— Гельфанда — Гординга 6.2.4
— — однородное 4.1.2
— основное аффинное 5.3.1
— топологическое 1.1.1
— Минковского 3.1.2
— -время 3.1.2
— представления 3.2.2
Путь кусочно гладкий 1.1.1
Пфаффиан 1.3.3

Р

Разбиение
— ручное 4.4
Разложение каноническое (полупростой алгебры Ли) 3.3.1
— полярное 6.1.1
Распределение 5.2.1
— регулярное 5.2.1
Расслоение (расслоенное пространство) 1.2.1
— векторное 1.2.1
— естественное 2.2
— эрмитово 4.3.2
Расширение (алгебры Ли) 3.2.5
— тривиальное 3.2.5
— центральное 3.2.5
Решетка корневая 3.3.1
Ряд Фурье 6.1.1

С

Связность 1.2.4
— в касательном расслоении 2.4
Сечение расслоения 1.2.1
— проекции 5.1.1
— ковариантно постоянное 1.2.4
Сжатие (алгебры Ли) 3.2.4
Симметризация 6.2.2
Симплектический лист 7.2.2
Система координат симметрическая 3.4.1
— унимодулярная 5.2.1

Система
— корней 3.3.1
— ортонормированная 6.1.1
Скобка
— Ли 2.7; 3.2.2; 4.2.3
— Нейенхейса 2.7
— Пуассона 2.7; 7.2.2
— Схоутена 2.7
След оператора 6.1.1
Следовая норма 6.1.1
Слой расслоения 1.2.1
Событие 3.1.2
Стабилизатор (стационарная подгруппа) 2.2; 4.1.1; 5.1.3
Старше 2.3
Структурные константы 3.2.4
Сумма прямая
— объектов категорий 1.1.4
— представлений 5.1.1
Супералгебра Ли 3.2.7
Супераналог 1.3.1
Супергруппа 1.3.3
Суперкоммутатор 2.7
Супермногообразие 1.3.1
Суперобласть 1.3.1
Суперправило Лейбница 2.7
Суперсимметрия 4.2.5
Супертождество Якоби 2.7
Суперфункция 4.2.5
— антикиральная 4.2.5
— киральная 4.2.5
Счетная аддитивность 4.4

Т
Тело 3.1.2
Тензор
— скалярный 2.6
— бесследный (с нулевым следом) 2.6
Тензорное поле 1.2.2
— аффинное 2.6
— типа (k, l) 1.2.2
Тензорное произведение (линейных представлений) 5.1.1
Тождество Бернсайда 5.1.1
Точная последовательность 3.2.5
Транзитивное действие 4.1.2

У
Универсальное
— накрытие 3.1.1
— свойство (каприсоединенных орбит) 7.4.1
Уравнение коцикла 4.1.3; 4.4; 5.1.1; 7.4.2
Условие
— интегрируемости 2.7
— полноты 6.1.1

Ф
Фильтрация 6.2.1
Форма
— дифференциальная 1.2.1
— кривизны 1.2.4
Функция
— обобщенная 5.2.1; 6.1.2
— однородная типа θ 5.3.1
— G-инвариантная 4.2.4
— локально интегрируемая 5.2.1
— мультипликативная 5.1.1
— основная 5.2.1
— перехода 1.1.1
Функтор 1.1.4
— индукции 4.1.4; 5.1.3
— левый сопряженный 4.1.4
— ограничения 4.1.4; 5.1.3
— правый сопряженный 4.1.5
— представимый 1.1.2
— производный 4.3.1

Х
Характер
— инфинитезимальный 5.3.1; 6.2.4
— мультипликативный 5.1.5
— обобщенный 6.1.2

Ц
2-Цикл геометрический 7.2.1

Ч
Частичная изометрия 6.1.1
Частичный порядок (в корневом пространстве) 2.3
Четный элемент 1.3.1
Число сплетения 5.1.2

Э
Эквивариантные отображения 4.1.1

Я
Ядро (интегрального оператора) 6.1.1
— вырожденное 6.1.1