

**GEOMETRIA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRIA AL AIRE LIBRE**

*El idioma de la naturaleza es matemática,  
letra de esta lengua, son los círculos,  
triángulos y otras figuras geométricas.*

*Galileo.*



**CAPITULO PRIMERO  
GEOMETRÍA EN EL BOSQUE**

**Contenido:**

1. [Por longitud de la sombra.](#)
2. [Dos modos mas](#)
3. [El modo de Julio Verne](#)
4. [Como actuó el coronel](#)
5. [Con ayuda de una agenda](#)
6. [Sin acercarse al árbol](#)
7. [El altímetro de los silvicultores.](#)
8. [Con ayuda del espejo](#)
9. [Dos pinos](#)
10. [La forma del tronco](#)
11. [Un gigante a seis patas.](#)

**1. Por longitud de la sombra.**

Todavía recuerdo esa atención, con la que yo estuve mirando por primera vez a un canoso guardabosque, el que estando junto a un pino grande, ha medido su altura con un aparato de bolsillo. Cuando él apuntó con una tablilla cuadrada en la cima del árbol, yo esperaba, que el viejo subiera con una cadena para medir, en lugar de ello, él volvió a meter en el bolsillo el aparato y dijo que la medición estaba terminada. Yo pensaba que por el momento no había comenzado...

En aquel tiempo yo era muy joven y esa manera de medir, cuando la persona establece la altura del árbol sin cortarlo o sin subirse a él, me parecía como un milagro pequeño. Tan solo mas tarde, cuando tuve las primeras naciones geométricas, he entendido, como es de fácil hacer ese tipo de milagros.

Existen muchas maneras distintas de realizar semejantes mediciones con ayuda unos aparatos sin pretensión y sin mecanismos especiales.

Un modo que es muy fácil y muy antiguo, sin duda, que con él, el sabio griego Falos, seis siglos antes de Cristo, definió en Egipto la altura de la pirámide. Él aprovechó la sombra suya. Los sacerdotes y faraón, reuniéndose al pie de la pirámide, miraban confusamente al extranjero, adivinando por la sombra la altura de la gran construcción. Falos, dice la leyenda, eligió el día cuando la longitud de su sombra era igual a su altura, en el mismo momento, la altura de la pirámide tenía que ser iguala a la longitud de su sombra. Es el único caso, cuando la persona aprovecha su sombra.

La tarea del sabio griego nos parece ahora infantil, fácil, pero no tenemos que olvidar, que estamos mirando desde la altura del edificio geométrico, levantado después de Falos. Él vivió mucho tiempo antes del Euclides, que es el autor del libro famoso, con el cual estudiaron la geometría durante dos siglos, después de su fallecimiento. En concreto, las verdades del libro que ahora las conoce cualquier alumno, no estaban descubiertas en la época de Falos. Y aprovechándose de la sombra para resolver la tarea sobre la altura de la pirámide, necesitaba saber algunas características geométricas del triángulo, prácticamente las dos siguientes (Falos fue el primero en enunciar estos principios):

1. *Los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles, son iguales, e inversamente, los lados, opuestos a los ángulos iguales del triángulo isósceles, son iguales.*
2. *La suma de los ángulos de cualquier triángulo (el triángulo rectángulo es un caso particular), es igual a dos ángulos rectos.*

Falos, armado solo de estos conocimientos, pudo discurrir, que estando sobre un terreno plano, su sombra era igual a su altura, los rayos de Sol caen en un ángulo igual a la mitad del recto, por lo tanto, la altura de la pirámide desde el centro de su base y el extremo de su sombra definían un triángulo isósceles.

Con ayuda de ese método, que nos parece tan simple, durante un día soleado podemos hacer mediciones de cualquier árbol aislado, cuando su sombra no se une con la sombra de otro. Pero en nuestras latitudes (San Petersburgo está en la latitud 60°N y El Cairo, 30°N) no es tan fácil elegir un buen momento como en Egipto; el Sol se presenta muy bajo sobre el horizonte, y las sombras pueden ser iguales a la altura de sus objetos, solo durante el verano y en torno al mediodía. Por eso el modo del Falos no es siempre cómodo para llevar a la practica.

No es difícil calcular la altura de una manera un poco distinta, cuando en cualquier día soleado se puede usar la sombra, no importando su longitud. Se puede medir su propia sombra o la de una pértiga enterrada verticalmente en un suelo plano y calcular la altura buscada con la proporción siguiente (figura 1):

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$$

Es decir, la altura del árbol en cuantas veces mayor que la altura de Ud. (o la altura de la pértiga), en tantas veces la sombra del árbol es más larga de la sombra Ud. (o la sombra de la pértiga). Esto se deduce de la semejanza geométrica de los triángulos  $ABC$  y  $abc$  (por dos ángulos).

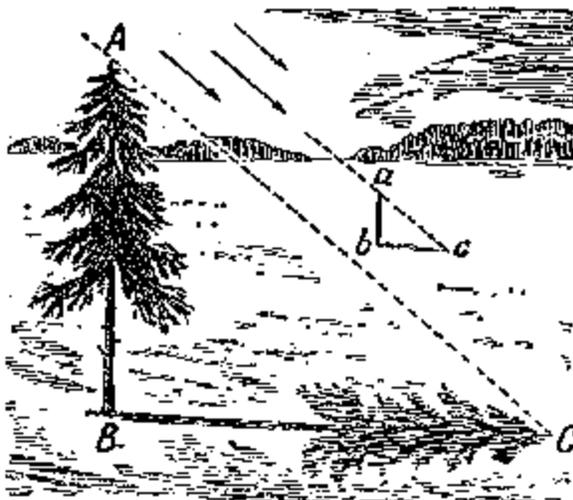


Figura 1. Medición de la altura de un árbol por su sombra

Algunos lectores replican, pues, que esta manera es tan elemental que no necesita argumentación geométrica. ¿Es posible que sin geometría, quede claro, en cuántas veces un árbol es más alto, en tantas veces como su sombra es más larga? Ocurre que no es tan fácil como parece. Intente llevar a la práctica esta regla de la sombra, proyectando una con la luz de una lámpara, verá que no se cumple.

En la figura 2 se ve el poste  $AB$  más alto que la columna pequeña  $ab$ , aproximadamente al triple, y la sombra del poste más larga que la sombra de la columna ( $BC : bc$ ) unas ocho veces. Explicar por qué en una ocasión podemos emplear el modo, y en otro no; sin geometría no es posible.

### Problema

Vamos a ver dónde está la diferencia. Lo que pasa es que los rayos de Sol son paralelos entre ellos, los rayos de farola no son paralelos. Esto último está claro, pero ¿cómo que los rayos de Sol son paralelos, cuando ellos, sin duda, están cruzándose en el mismo lugar de donde están saliendo?

### Solución

Los rayos de Sol, cayendo sobre la Tierra, los podemos considerar paralelos, porque el ángulo entre ellos es muy pequeño, prácticamente imperceptible. Un simple cálculo geométrico puede aclarar la situación confusa. Imagínese dos rayos saliendo desde cualquier punto del Sol y cayendo sobre la Tierra a una distancia entre ellos de un kilómetro mas o menos. Entonces, si ponemos una pata del compás en el punto del Sol y hacemos una circunferencia de radio igual a distancia entre el Sol y Tierra (150.000.000 km), entonces nuestros dos rayos—radios sostienen un arco justo de un kilómetro de longitud. La longitud total de esta gigantesca circunferencia igual a

$$L = 2 \times \pi \times 150.000.000 = 940.000.000 \text{ km}$$

Un grado de ella, evidentemente, es 360 veces menor, es decir, mas o menos 2.600.000 km; Un minuto de arco es 60 veces menor del grado, es igual a 43.000 km, y un segundo de arco en 60 veces menor, es igual 720 km. Pero nuestro arco tiene la longitud de 1 km; es decir, corresponde al ángulo 1/720 segundos. Ese ángulo es imperceptible, incluso para aparatos astronómicos; por lo tanto, prácticamente podemos considerar que los rayos de Sol, caen a la Tierra en forma paralela.

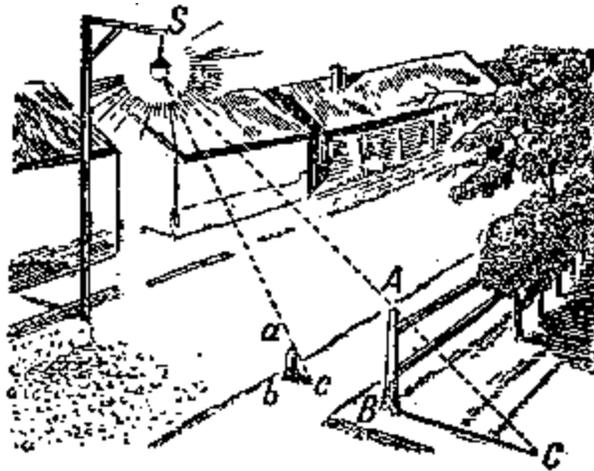


Figura 2. Cuando el mismo modo de medición es imposible.

Sin consideraciones geométricas no podemos argumentar el modo examinado, haciendo la proporción de la altura por su sombra.

Si llevamos a la práctica el sistema de las sombras, constataremos su inexactitud. Las sombras no son limitadas de manera precisa; ellas tienen un contorno difuso por lo que su límite es indeterminado.

Esto ocurre, porque el Sol no es un punto, es un gran cuerpo luminiscente, emite los rayos desde más de un punto.

La Figura 3 indica por qué la sombra  $BC$  del árbol tiene una adición de la penumbra  $CD$ , el que poquito a poco desaparecerá. El ángulo  $CAD$  entre los límites de la penumbra corresponden al ángulo, sobre el que siempre podemos ver el disco de Sol, es decir, mitad de un grado. Aparecerá un error, por que tendremos dos sombras, ambas correctas. Este error puede alcanzar un 5% o más, si la posición del sol es baja, ambas sombras sean medidas no exactamente correcto, con un bajo estado de Sol procede alanzar 5% y más.

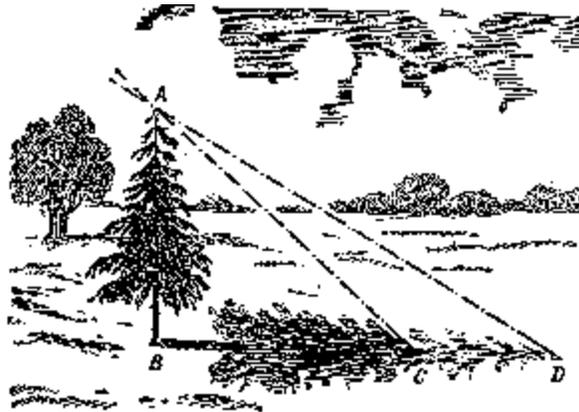


Figura 3. Cómo aparece la sombra

A estos errores se le unen otros, como por ejemplo, accidentes del terreno, y el resultado es poco seguro. En los sitios montañosos este modo es inaplicable.

[Volver](#)

## 2. Dos modos mas

Es muy posible hacer mediciones de la altura sin ayuda de las sombras. Existen muchas maneras; empezaremos con dos fáciles.

Antes de todo podemos utilizar las propiedades del triángulo rectángulo isósceles, aprovechando un simple aparato, lo cual es fácil de preparar a través de una tablilla y tres alfileres. Sobre una tablilla lisa marcamos tres puntos, los vértices del triángulo rectángulo isósceles, en los puntillos clavamos alfileres (Figura 4). Si no tiene escuadra y compás para dibujar el triángulo, entonces puede coger el papel, lo dobla una vez, después lo dobla transversalmente al primer doblado, de modo que ambas partes del primer doblado se unen, y se obtiene el ángulo recto. El mismo papel puede ser útil para medir los trozos iguales.

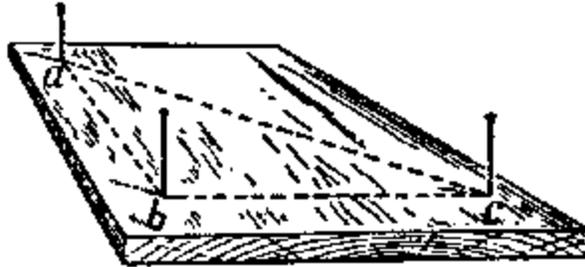


Figura 4. El aparato de alfileres para la medición a las alturas

Como vemos, el aparato lo podemos preparar en distintas formas.

Utilizar este aparato es tan fácil como prepararlo. Alejándose del árbol, teniendo el aparato de modo que uno de los catetos del triángulo apunte verticalmente, para facilitar la observación, podemos utilizar una plomada (un hilo con un objeto pesado atado a un extremo) atada al alfiler superior.

Acercándose al árbol o alejándose de él, Ud. siempre encontrará un sitio  $A$  (Figura 5), desde cual, mirando a los alfileres  $a$  y  $c$ , verán, que ellos tapan la cima  $C$  del árbol: eso significa que la prolongación de la hipotenusa  $ac$  pasa por el punto  $C$ . Como ya lo hemos visto en el ejemplo anterior, la separación entre  $ab$  es igual a  $CB$ , ya que el ángulo  $a = 45^\circ$ .

Por consecuencia, acabando de medir el trazo  $aB$  y añadir  $BD$ , es decir, elevación  $aA$  del ojo sobre el fondo, recibimos la altitud buscada del árbol.

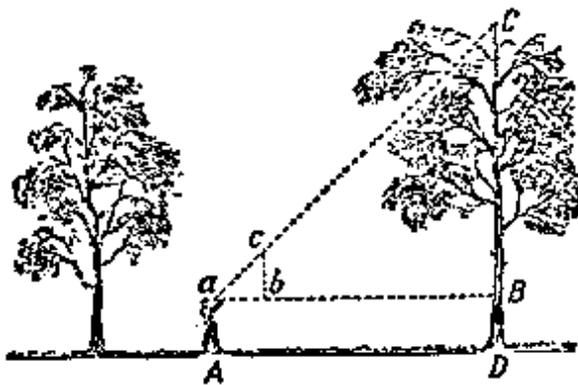


Figura 5. Esquema del uso al aparato de alfileres

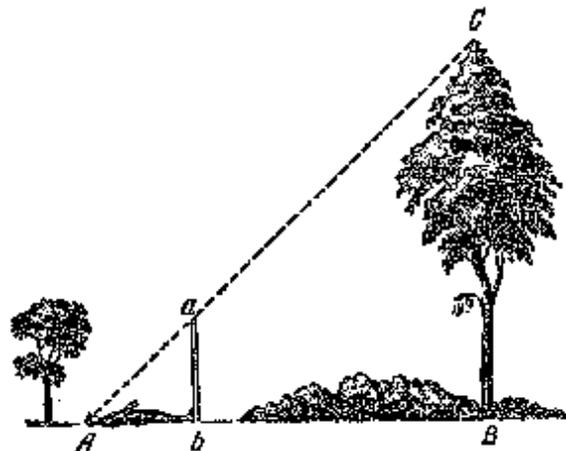


Figura 6. Un modo más para medir la altura.

Existe otro modo, que no usa tablilla con los alfileres. Necesitamos una pértiga, la cual clavamos verticalmente en la tierra de modo que la parte que sobresale sea igual a su estatura. El sitio elegido para la pértiga debe ser tal que nos permita al tumbarnos como indica la Figura 6, podamos ver la cima del árbol y el punto superior de la pértiga sobre una

línea recta. Como triángulo  $Abc$ , es isósceles y rectangular, entonces el ángulo  $A = 45^\circ$ , y por lo tanto

$$AB = BC,$$

es la altura buscada del árbol

[Volver](#)

### 3. El modo de Julio Verne

El siguiente modo tampoco es difícil. La manera de medir los objetos altos lo describió en su novela "La isla misteriosa" Julio Verne:

–Hoy vamos a medir la altura de una plazoleta de la Vista Lejana, –dijo el ingeniero.

–¿ Necesitamos algunos instrumentos? –preguntó Gebert.

–No hace falta. Lo haremos de otra manera, más fácil y más segura.

El joven, aplicadamente sigue detrás bajándose desde el muro hasta la orilla. Cogiendo una pértiga de 12 pies de longitud, el ingeniero lo hizo exacto, comprobándolo con su estatura, la cual sabía muy bien. Gebert le trajo una plomada, dada por el ingeniero; fue una piedra atada al extremo de una cuerda. Acercándose 500 pies al muro granítico y vertical, el ingeniero clavó la pértiga, verticalmente con la ayuda de la plomada, en la arena. Un poco después se alejó tanto de la pértiga, que tumbándose pudo ver el extremo de la pértiga y la cresta de montaña sobre una línea recta (Figura 7). Este punto lo marcó con un palito.

–¿Tienes algunas nociones geométricas?–preguntó a Gebert.

–Sí.

–¿Recuerdas las propiedades de los triángulos semejantes?

– Sus lados análogos son proporcionales.

–Exacto. Ahora voy a construir dos triángulos rectángulos semejantes. El cateto del pequeño sea la pértiga, el otro cateto, sea la distancia desde el palillo hasta el pie de la pértiga; la hipotenusa, es la línea de mi vista. En el triángulo mayor los catetos son la muralla, la altura que queremos medir, y la distancia desde el palillo hasta el pie de la muralla; hipotenusa es la línea de mi vista, uniéndose con la hipotenusa triángulo menor.

–¡He entendido! – exclamó el joven. El trayecto del palillo hasta la pértiga corresponde así al trayecto desde el palillo hasta el pie de la muralla, como la altura de la pértiga a la altura de la muralla.

–Exactamente. Sigamos, si medimos las dos distancias primeras, y sabiendo la altura de la pértiga, podemos calcular el cuarto miembro de la proporción que es la altura de muralla. Ambas líneas horizontales fueron medidas: la pequeña es de 15 pies, la grande es de 500 pies.

Al fin el ingeniero lo hizo anotación:

$$\frac{15}{500} = \frac{10}{x}$$

$$15x = 5000$$

$$x = 333,3 \text{ pies}$$

Entonces, la altura de la muralla es 333 pies.

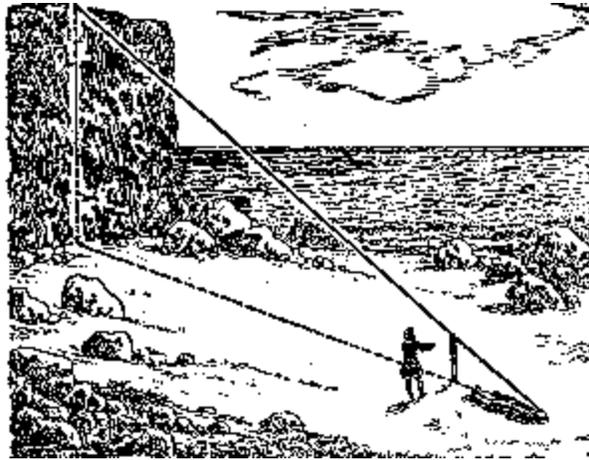


Figura 7. Como encontraban la altura de una escala los personajes de Julio Verne

[Volver](#)

#### 4. Como actuó el coronel

Algunos modos, descritos anteriormente, no son cómodos por la necesidad de tumbarse sobre la tierra. Pero ese tipo de incomodidades las podemos evitar.

Así ha ocurrido un día en un frente durante la Segunda Guerra Mundial. A la subdivisión del teniente Ivanov le mandaron a construir un puente por encima de un río de montaña, enfrente del lugar donde desembarcó el enemigo.

Para reconocimiento de un terreno boscoso, mandaron un grupo de búsqueda con el mayor coronel Papov...En el monte cercano ellos midieron el diámetro y las alturas de los arboles más típicas de aquella zona, establecieron la cuenta de los arboles útiles.

Establecieron las alturas de los arboles con ayuda de una jalón, como indica la Figura 8. Explicación del modo.

Necesitamos una pértiga mucho alta que nuestra propia estatura, la clavamos en la tierra a cierta distancia del árbol (Figura 8). Alejándose atrás de la pértiga, a continuación  $Dd$  hasta el sitio  $A$ , desde cual, mirando a la copa del árbol, veremos el punto superior  $b$  de la pértiga, sobre la una línea recta. Después, sin cambiar la posición la cabeza, se mira en el sentido de una línea recta horizontal  $aC$ , marcando los puntos  $c$  y  $C$ , donde la línea de la vista encuentra la pértiga y el tronco. Piden al ayudante hacer las marcas en aquellos puntos, y la observación se ha terminado. Solo es necesario, en virtud de la semejanza de los triángulos  $abc$  y  $aBC$ , calcular  $BC$  de la proporción.

$$BC : bc = aC : ac$$

Donde

$$BC = \frac{bc \times aC}{ac}$$

Las distancias  $bc$ ,  $aC$  y  $ac$  son fáciles de medir inmediatamente. Al resultado de tamaño  $BC$  añadir la distancia  $CD$ , para encontrar la altura buscada.

Para la determinación de la cantidad de los arboles, el coronel dio órdenes a los soldados de medir la superficie del bosque. Después calculó la cantidad de arboles dentro de un terreno  $50 \times 50$  metros cuadrados e hizo los cálculos correspondientes.

De todos los datos recogidos, el coronel ha puesto en orden las cosas, dónde y cómo construir mejor el puente, el que fue construido rápidamente y la misión de combate fue cumplida.

[Volver](#)

### 5. Con ayuda de una agenda

En otro lugar, para tener los resultados aproximados de las alturas inaccesibles, podemos utilizar nuestra agenda y un lápiz. Ella nos ayuda a construir en el espacio dos triángulos semejantes, desde cuales obtenemos la altura buscada. Sujetamos la libreta cerca de los ojos, como indica la Figura 9. Ella tiene que estar en plano vertical y el lápiz sobresaliendo encima del canto de libreta tanto, que mirando desde el punto  $a$ , ver la cima  $B$  del árbol tapado por la punta  $b$  del lápiz. Como consecuencia de los triángulos semejantes  $abc$  y  $ABC$ , la altura  $BC$  determina de la proporción:

$$BC : bc = aC : ac$$

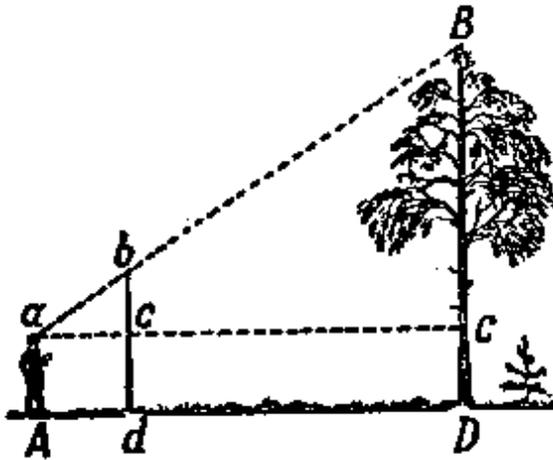


Figura 8. Medición de altura con la ayuda de una pértiga.

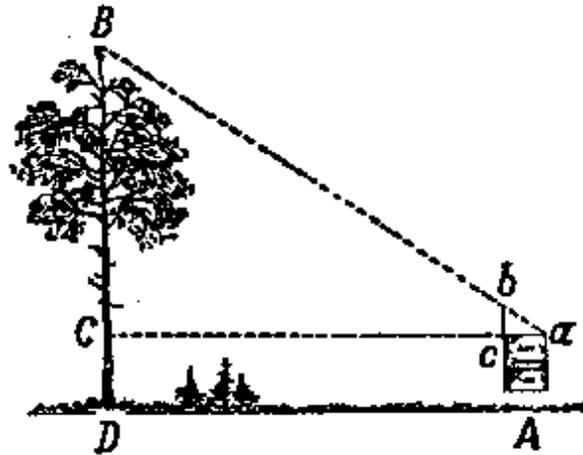


Figura 9. Medición de altura con la ayuda de una agenda.

Las distancias  $bc$ ,  $ac$  y  $aC$  se miden inmediatamente. Al resultado de tamaño  $BC$  es necesario añadir la longitud  $CD$ , es decir, en un sitio plano, la altura de los ojos sobre el piso.

Como la anchura de la agenda es invariable, y si nosotros siempre vamos a estar a la misma distancia del árbol (por ejemplo 10 m), la altura dependerá solo del parte sobresalida  $bc$  de lápiz. Por eso se puede hacer antes el cálculo, a cuál la altura corresponde una u otra altura  $bc$  sobresaliente, y marcar estas cifras sobre el lápiz. La agenda se convierte a un altímetro, con su ayuda se puede definir la altura inmediatamente, sin cálculos.

[Volver](#)

### 6. Sin acercarse al árbol

Algunas veces, por cualquier causalidad, no podemos acercarse justo al pie del árbol. ¿Podemos en esta ocasión determinar su altura?

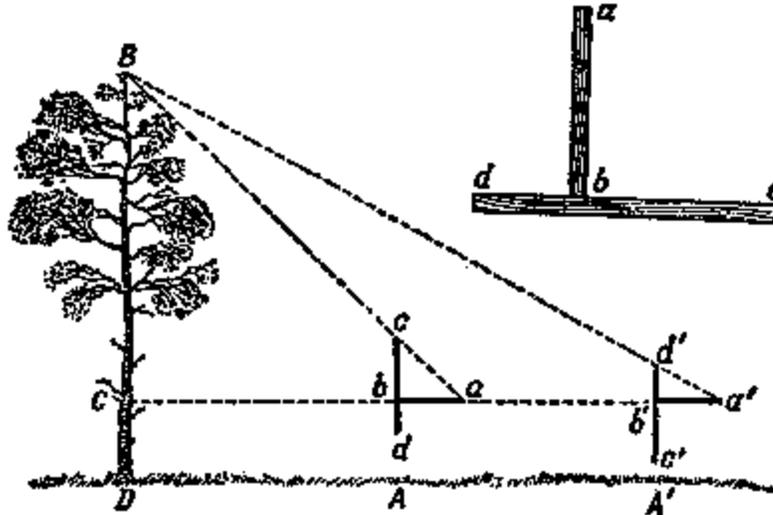


Figura 10. Uso de un altímetro, construido solo con dos tablillas.

Es posible. Para eso inventaron un aparato muy ingenioso, el que, como aparatos anteriores, es fácil de preparar. Dos tablillas  $ab$  y  $cd$  (Figura 10) se fijan en ángulo recto de modo que  $ab$  sea igual  $bc$ , y  $bd$  sea la mitad de  $ab$ . Es todo el truco.

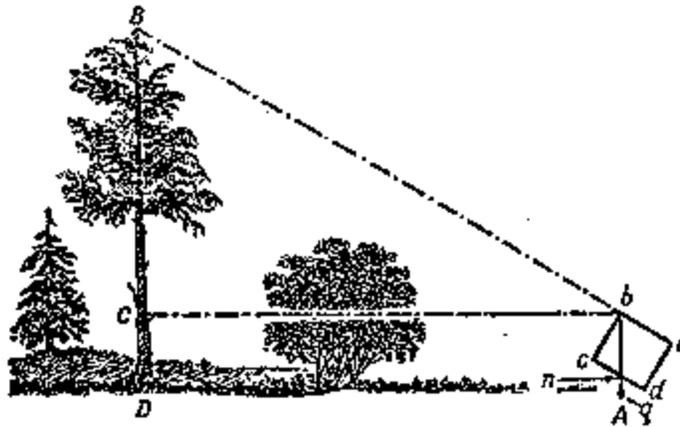


Figura 11. Esquema del uso al altímetro de los silvicultores.

Para poder medir, se mantiene el aparato en las manos, apuntando la tablilla  $cd$  verticalmente (para eso existe una plomada, el cordoncillo con el plomo), y se ubica sucesivamente en dos sitios: primero (figura 10) en el punto  $A$ , donde se sostiene el aparato con la punta  $c$  hacia arriba, y después en el punto  $A'$ , más alejado, donde el aparato donde el aparato se sostiene con la punta  $d$  hacia arriba. El punto  $A$  se elige así: mirando desde el punto  $a$  al punto  $c$ , en línea con la cima del árbol. El punto  $A'$  se busca así: mirando desde el punto  $a$  al punto  $d$ , en línea con la cima del árbol. La distancia entre los puntos  $A$  y  $A'$ , es igual a la altura  $BC$  del árbol. La igualdad se deduce de

$$aC = BC,$$

y

$$a'C = 2BC ;$$

entonces,

$$a'C - aC = BC$$

Como se ve, utilizando este aparato tan simple, medimos el árbol, sin acercarnos a su base más que a la distancia igual que su altura. Se supone, que si es posible acercarse al tronco, entonces, es suficiente encontrar un punto  $A$  o  $A'$  para saber su altura.

En lugar de dos tablillas podemos utilizar dos alfileres, situándolos apropiadamente sobre una tabla. Así el "aparato" mucho más simple.

[Volver](#)

### 7. El altímetro de los silvicultores.

Casi es la hora de explicar, como son hechos los "verdaderos" altímetros, los que utilizan los silvicultores. Describo un altímetro semejante, un poco modificado, para poderlo construir por sí mismo. El sentido de estructura se ve en la figura 11.

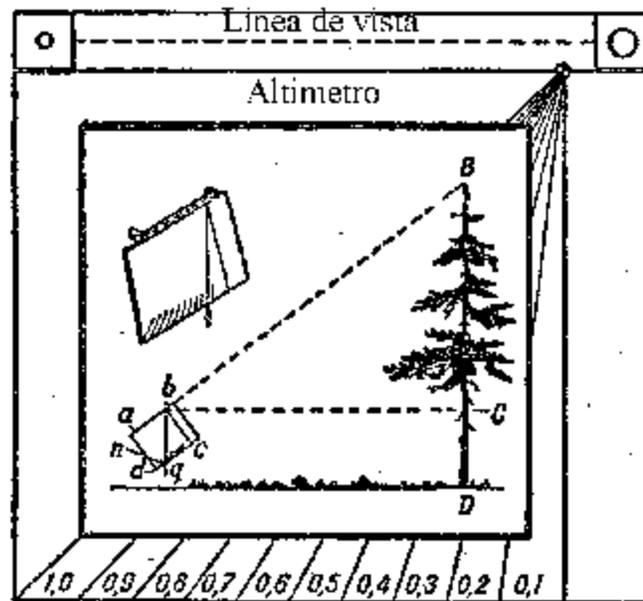


Figura 12. El altímetro de los silvicultores

Se hace un rectángulo  $abcd$ , de cartón o madera para sostener en las manos, mirando a lo largo del borde  $ab$ , alineándolo con la cima  $B$  del árbol. El punto  $b$  tiene colgado una plomada  $q$ . Se marca el punto  $n$ , en el cual el hilo cruza la línea  $dc$ . Los triángulos  $bBC$  y  $bnc$  son semejantes, y como ambos son rectángulos y tienen los ángulos agudos iguales  $bBC$  y  $bnc$  (conforme con los lados paralelos), entonces podemos escribir la proporción

$$BC : nc = bC : bc;$$

De aquí se desprende

$$BC = \frac{bC \times nc}{bc}$$

Como  $bC$ ,  $nc$  y  $bc$  son conocidos, entonces es fácil de encontrar la altura buscada del árbol, añadiendo la distancia de la parte baja del tronco  $CD$  (la altura del instrumento sobre la tierra).

Falta añadir algunos detalles. Si el borde  $bc$  de la tabla es igual, por ejemplo, a 10 cm, marcando las divisiones del centímetro, pues la proporción  $nc/bc$  siempre va a expresarse como fracción decimal, indicará directamente la fracción de la distancia  $bC$ , que es la altura  $BC$  del árbol.

Sea, por ejemplo, el hilo se ubicó enfrente la división séptima (es  $nc=7$  cm); es decir, que la altura del árbol sobre nivel del ojo equivale a 0,7 veces la distancia del observador hasta el tronco.

Otro mejoramiento se refiere al modo de la observación: para que sea cómodo mirar a lo largo de la línea  $ab$ , podemos doblar sobre los ángulos superiores del rectángulo (es de cartón) dos cuadrados agujereados: Un agujero, para el ojo, el otro más grande, para apuntar la cima del árbol (figura 12).

El perfeccionamiento siguiente se representa en un aparato, el que se muestra en su tamaño natural en la figura 12. Preparar el aparato es fácil y consume poco tiempo. No necesita mucho sitio en el bolsillo y durante la excursión da la posibilidad rápida de definir las alturas de los objetos, como los arboles, edificios y etc. (El instrumento esta dentro del compuesto preparado por el autor del libro "Geometría en el aire libre")

### Problema

¿Es posible con ayuda del aquel altímetro, anteriormente descrito, medir los arboles, sin ninguna posibilidad de acercarse? ¿Si es posible, entonces cómo tenemos que actuar?

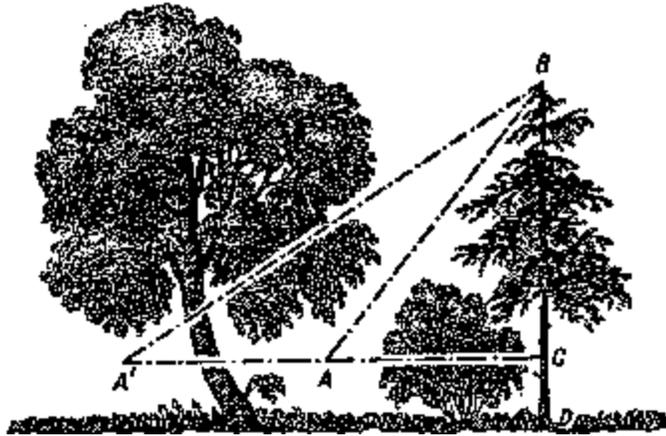


Figura 13 Como medir la altura de un árbol, sin acercarse hacia él

### Solución

Necesita apuntar el aparato justo la cima  $B$  del árbol (figura 13) desde los dos puntos  $A$  y  $A'$ . Una vez que está determinado  $A$ ,

$$BC = 0,9 AC,$$

y en el punto  $A'$  que

$$BC = 0,4 A'C.$$

Entonces, ya sabemos, que

$$AC = BC / 0,9$$

y

$$A'C = BC / 0,4$$

donde

$$AA' = A'C - AC = BC/0,4 - BC/0,9 = 25/18 BC$$

Entonces,

$$AA' = 25/18 BC,$$

o

$$\begin{aligned} BC &= 18/25 \\ AA' &= 0,72 AA'. \end{aligned}$$

Se ve que midiendo la distancia  $AA'$  entre ambos sitios de observación y cogiendo la división necesaria de esta cantidad, se puede encontrar la altura buscada.

[Volver](#)

### 8. Con ayuda del espejo

Problema

Un modo más para determinar la altura de un árbol con ayuda del espejo. A cualquier distancia (figura 14) desde el árbol, sobre un piso llano en el punto  $C$  se pone el espejo horizontalmente y alejan hacia atrás hasta un punto  $D$ , en el cual el observador ve la cima  $A$  del árbol en el espejo. Por lo tanto el árbol  $AB$  es tantas veces más alto que la estatura del observador  $ED$ , en las veces que la distancia  $BC$  desde el espejo hasta el árbol es más grande que la distancia  $CD$  desde el espejo hasta el observador. ¿Por qué?

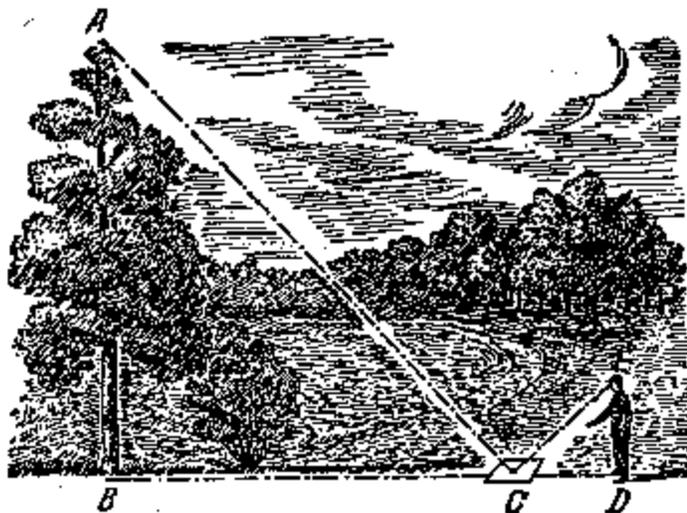


Figura 14 Medición de altura con la ayuda de un espejo.

Solución

El modo está fundado en la ley de la reflexión de la luz. El punto superior  $A$  (figura 15) se refleja en el punto  $A'$  así, que  $AB = A'B$ . Dada la semejanza de los triángulos  $BCA'$  y  $CED$  se deduce, que

$$A'B : ED = BC : CD$$

En esta proporción queda solo cambiar  $A'B$  igualado a  $AB$ , para argumentar la proporción de la tarea.

Esta manera cómoda podemos utilizar en cualquier tiempo, pero no en el bosque frondoso.

Problema

¿Cómo tenemos que proceder, cuando no podemos acercarnos al árbol que queremos medir?

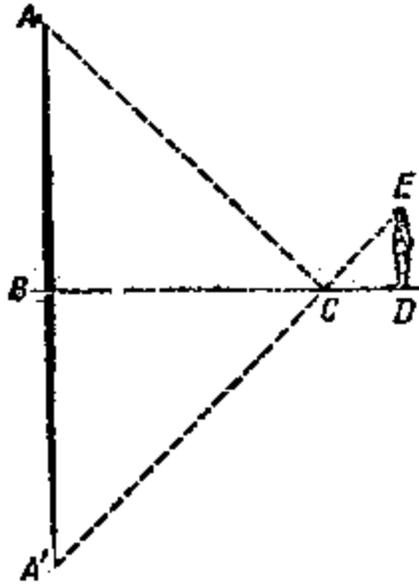


Figura 15. Construcción geométrica para el modo de medir las alturas con ayuda del espejo

#### Solución

Esta antigua tarea, tiene ya, como 500 años. Ella la examinó un matemático de la Edad Media, Antonio de Cremona en su obra "Geodesia Práctica" (año 1400).

La tarea se soluciona con la doble aplicación del modo anteriormente descrito, poniendo el espejo en dos sitios. Haciendo la construcción correspondiente, no es difícil por semejanza de los triángulos deducir que la altura buscada del árbol es igual a la elevación del ojo del observador, multiplicado por la proporción de la distancia entre las dos posiciones del espejo hasta la diferencia las distancias entre el observador y el espejo.

Antes de terminar nuestro diálogo sobre la medición de los arboles, propongo a los lectores una tarea mas "desde el bosque".

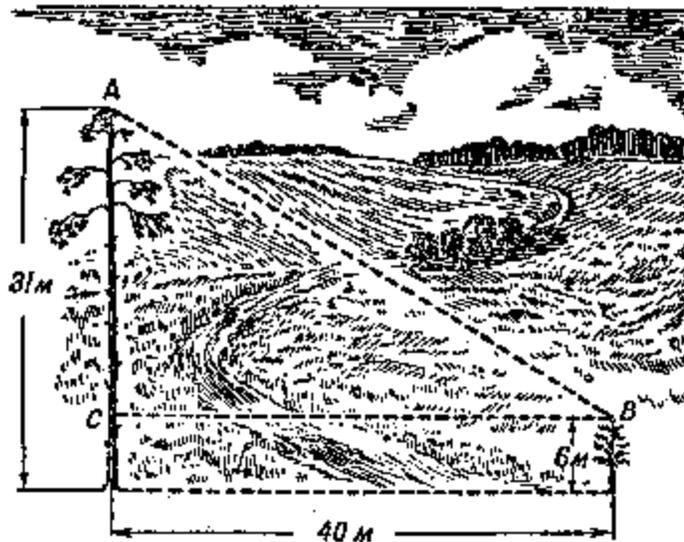


Figura 16. La distancia entre los vértices de los pinos

[Volver](#)

## 9. Dos pinos

Tarea

La distancia entre dos pinos es de 40 m. Sus alturas son: 31 m y solo 6 m. ¿Pueden calcular la distancia entre sus cimas?

Solución

La distancia buscada entre las cimas de los pinos (figura 16) por el teorema de Pitágoras es:

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47,2$$

[Volver](#)

## 10. La forma del tronco

Ahora, paseando por el bosque podrían determinar la altura de cualquier árbol, por la media decena de las maneras. Sería interesante también determinar su *volumen*, calcular cuántos metros cúbicos de madera tiene, y además *pesar*, para saber si es posible llevar este tronco solo con ayuda de un carro de cuatro ruedas. Ambas tareas no son tan fáciles, como las anteriores; los especialistas no encontraron la solución *precisa* y están contentos con una evaluación aproximadamente. Incluso el tronco cortado y limpio de ramas, la tarea no se soluciona fácilmente

Lo que pasa es que un tronco del árbol, incluso liso, sin anchuras, no representa ni un cilindro, ni un cono, ni cono truncado, ni otro cuerpo geométrico, cuyo volumen lo podemos calcular a través de las fórmulas. El tronco, está claro, no es un cilindro, él se estrecha hacia la cima, pero tampoco es cono, porque su generatriz no es la línea recta, es una línea curva, además no es arco de circunferencia, como tampoco es otra línea curva, convexa hacia el eje de un árbol.

Por eso, el cálculo de volumen exacto es realizado solo con ayuda del calculo integral. Para algunos lectores le parece extraño, que para la medición de una simple viga tenemos que dirigirnos a la matemática superior. La mayoría piensa, que la matemática superior no tiene mayor relación con la vida corriente y sólo se relaciona con algunos temas especiales.

Absolutamente no es así: puede ser muy correcto medir el volumen de una estrella o planeta, utilizando la geometría elemental, mientras tanto el calculo exacto del volumen a una viga o barrica no es posible sin geometría analítica o cálculo integral.

Pero nuestro libro no propone a los lectores los conocimientos de la matemática superior; por eso quedaremos satisfecho con el cálculo aproximado del volumen de un tronco. Vamos a suponer que el volumen de un tronco es aproximadamente equivalente al volumen del tronco de cono, y para el tronco completo, incluyendo su cima, el volumen del cono, o por fin, para las vigas cortas, al cilindro. El volumen de cada uno de los tres cuerpos es fácil de calcular. ¿Es posible para uniformidad de cálculo, encontrar una fórmula del volumen, que sea válida para los tres cuerpos indicados?

Después calcularemos aproximadamente el volumen del tronco, y no nos interesaremos si se parece más a un cilindro, un cono perfecto o truncado.

### La formula universal

Evidentemente la formula existe; mas que ella es beneficiosa, no solo para el cilindro, el cono perfecto, o truncado, si no también para una prisma, las pirámides perfectas o truncadas y también para la esfera. Esta formula perfecta conocida por el nombre de la formula de Simpson:

$$v = h/6 (b_1 + 4b_2 + b_3),$$

$h$  = la altura del cuerpo,

$b_1$  = la superficie de la cara inferior,

$b_2$  = la superficie la sección media,

$b_3$  = la superficie de la cara superior.

### Problema

Demostrar, que con ayuda de la formula de Simpson se puede calcular el volumen de los siete cuerpos siguientes: del prisma, la pirámide perfecta, la pirámide truncada, el cono perfecto, el cono truncado y de la esfera.

### Solución

Estando seguro de la exactitud de esta formula es fácil su la aplicación a los cuerpos enumerados. Entonces para el prisma y el cilindro (Figura 17, a)

$$v = h/6 (b_1 + 4b_2 + b_3) = b_1 h;$$

para la pirámide y el cono (Figura 17, b)

$$v = h/6 (b_1 + 4 b_1 /4 + 0) = b_1 h/3;$$

para el cono truncado (Figura 17, c)

$$v = \frac{h}{6} \left[ pR^2 + 4p \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 + p^2 \right]$$

$$v = \frac{h}{6} (pR^2 + pR^2 + 2pRr + p^2 + p^2)$$

$$v = \frac{ph}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Para la pirámide truncada el cálculo es semejante.

Por fin, para la esfera (Figura 17, d)

$$v = 2R/6 (0 + 4 p R^2 + 0) = 4/3 p R^3.$$

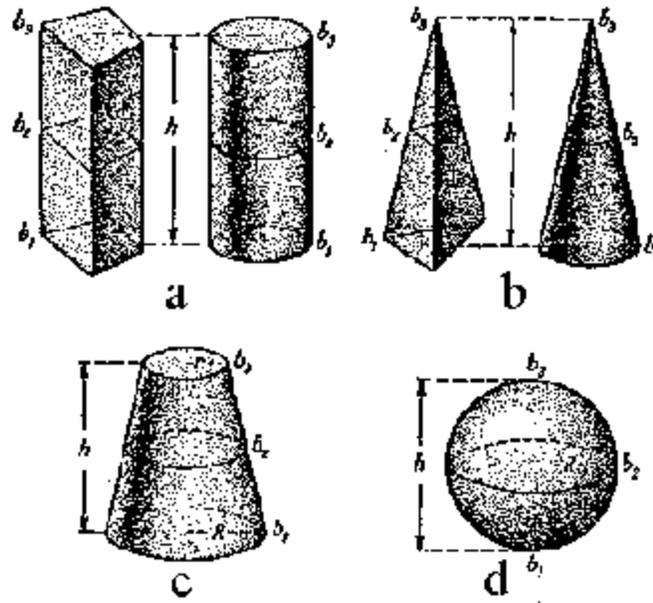


Figura 17. Los cuerpos geométricos, cuyos volúmenes se pueden calcular con la fórmula universal

Problema

Anotamos otra característica muy interesante de nuestra fórmula universal: ella es válida para calcular la superficie de las figuras planas: el paralelogramo, el trapecio y triángulo, si:

- $h$  = la altura de la figura,
- $b_1$  = la longitud del lado inferior,
- $b_2$  = la longitud de la media,
- $b_3$  = la longitud del lado superior

¿Cómo lo demostramos?

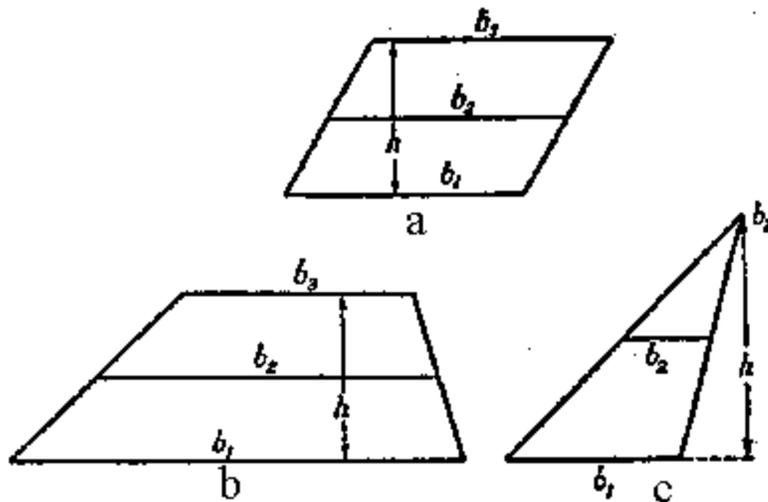


Figura 18. La fórmula universal para calcular las superficies de estas figuras

Solución

Utilizando la fórmula, tenemos:

Para el paralelogramo (cuadrado, rectángulo) (Figura 18, a)

$$S = h/6 (b_1 + 4b_2 + b_3) = b_1 h;$$

para el trapecio (Figura 18, b)

$$S = \frac{h}{6} \left( b_1 + 4 \frac{b_1 + b_3}{2} + b_3 \right) = \frac{h}{2} (b_1 + b_3)$$

para triángulo (Figura 18, c)

$$S = \frac{h}{6} \left( b_1 + 4 \frac{b_1}{2} + 0 \right) = b_1 \frac{h}{2}$$

Como ven, la fórmula tiene el suficiente derecho de llamarse *universal*.

### El volumen y el peso del árbol (antes de ser talado)

Pues tienen a su disposición la fórmula, con la ayuda de cual pueden aproximadamente calcular el volumen del tronco *cortado*, sin preocuparse y sin preguntar a qué cuerpo geométrico se parece, si al cilindro, o al cono perfecto o al cono truncado.

Para esto necesitamos las cuatro dimensiones, la longitud del tronco y los tres diámetros: el corte de abajo, de arriba y el de la longitud media. La medición de los diámetros extremos es muy fácil; la determinación inmediata del diámetro mediano sin instrumentos especiales (escala de los leñadores, Figura 19 y 20) es bastante incomoda. Pero la complejidad la podemos evitar, si medimos la circunferencia del tronco con un cordel y dividimos su

longitud por  $3\frac{1}{7}$ , (el valor aproximado de  $\pi$ ) para obtener el diámetro.



Figura 19. Midiendo el diámetro del árbol con escalímetro

El volumen del árbol cortado, es suficientemente exacto para los objetivos prácticos.

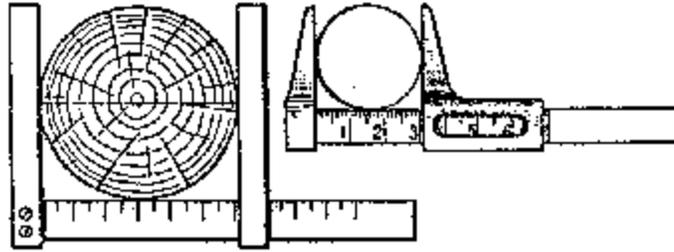


Figura 20. Escala y escalímetro

Brevemente, con menos exactitud se soluciona esta tarea, si calculamos el volumen del tronco, como el volumen del cilindro, el diámetro del extremo es igual al diámetro por el medio de longitud: el resultado obtenido es menor a veces hasta en un 12 %. Pero si dividimos el tronco mentalmente en secciones de dos metros de longitud cada uno, y determinamos el volumen de cada una, como si fueran cilindros, entonces el resultado será mucho mejor, con un error de 2 a 3%.

Todo esto, sin embargo, no es aplicable al árbol crecido: si no deciden subirse a él, entonces sólo podrán medir la parte de abajo. En ese caso, nos contentaremos con un valor aproximado, sabiendo que los silvicultores profesionales actúan habitualmente de la misma manera.

Para esos casos ellos usan una tabla, llamada de "los números específicos", es decir los números muestran, cual parte del volumen de árbol medido forman el volumen del cilindro de la misma altura y el diámetro, medido sobre el nivel de pecho de una persona, es 1,30 cm (este tamaño es más cómodo medir).

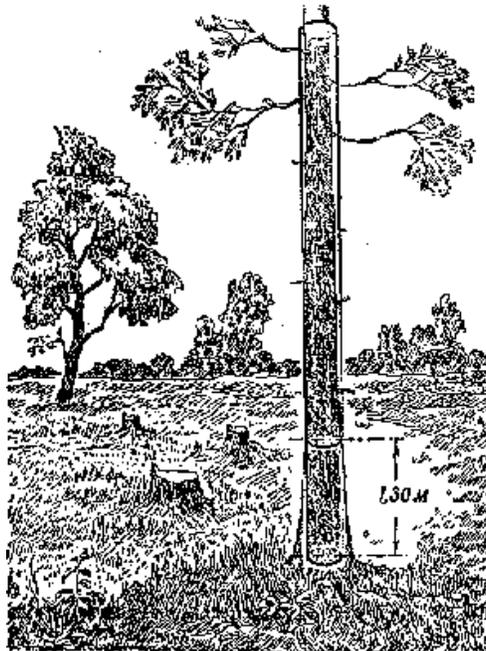


Figura 21. Los números muestran, cual parte del volumen de árbol medido forman el volumen del cilindro de la misma altura y el diámetro, medido sobre el nivel de pecho de una persona, es 1,30 cm (este tamaño es más cómodo medir).

El Figura 21 explica lo anteriormente dicho. Por supuesto, "los números específicos" son distintos para los arboles de altitud y de rasa diferente, así como la forma del tronco es inconstante. Pero las variaciones no son muy grandes: para el tronco de un pino o para el

abeto (crecido en bosque frondoso) "los números específicos" son entre los  $0,45$  y  $0,51$ , es decir más o menos igual a su mitad.

Entonces, sin equivocación podemos obtener el volumen de un árbol conífero como la mitad del volumen de cilindro de la misma altura con el diámetro, sea igualado el corto de árbol sobre un nivel de pecho.

Evidentemente, es solamente un volumen aproximado, pero no muy lejos del resultado auténtico: entre un  $2\%$  de sobredimensión y hasta un  $10\%$  de subdimensión.

Entonces solamente queda un paso para valuar el peso de árbol sobre la raíz. Para eso es suficiente saber, que  $1$  metro cúbico de una madera fresca del pino o abeto pesa como  $600 - 700$  kg. Sea por ejemplo, está Ud. al lado de un abeto, la altura de cual es de  $28$  m. Y la circunferencia de tronco sobre el nivel de pecho son  $- 120$  cm.

La superficie de círculo correspondiente es  $1.100$  cm<sup>2</sup> o  $0,11$  m<sup>2</sup>, y el volumen de tronco será

$$\frac{1}{2} \cdot 0,11 \cdot 28 = 1,5 \text{ m}^3.$$

Sabiendo que el  $1\text{m}^3$  de madera fresca del abeto pesa  $\sim 650$  kg, encontraremos que el  $1,5$  m<sup>3</sup> deberían pesar aproximadamente una tonelada ( $1\ 000$  kg)

### Geometría de las hojas.

#### Problema

Debajo de la sombra de álamo plateado han crecido ramas desde raíz. Se coge una hoja y se comprueba que ella es más grande las hojas del árbol paterno. Las hojas que crecen en sombra compensan la falta de luz con el tamaño de su superficie. Estudiar este fenómeno es asunto de botánica, pero la geometría también aquí puede decir algo: saber en cuántas veces la superficie de la hoja es más mayor que la superficie de la hoja del árbol paterno. ¿Cómo se solucionara este problema?

#### Solución

Podemos ir por dos caminos. En primer lugar, determinar la superficie de cada una hoja y encontrar sus proporciones. Medir la superficie de la hoja es posible, tapándola con un papel cuadriculado y transparente, donde cada una casilla corresponde, por ejemplo,  $4$  mm<sup>2</sup> (la hoja cuadriculada y transparente utilizada en la práctica se llama "paleta"). Aunque la manera es correcta, pero demasiado minuciosa.

El modo corto se basa que ambas hojas, de diferentes tamaños, tienen la forma más o menos parecida, es decir, son figuras semejantes. Las superficies de estas figuras, corresponden al cuadrado de sus medidas de longitud.

Entonces, determinando en cuántas veces una hoja es más larga o más ancha que la otra, elevamos el número al cuadrado y obtendremos la proporción sus superficies.

Sea que una hoja de las raíces tenga la longitud  $15$  cm y la hoja paterna solamente  $4$  cm; la proporción de las longitudes es  $15/4$ , entonces, al elevar al cuadrado, tendremos  $225/16$ , es decir en  $14$  veces, que corresponde a las veces que una superficie es mayor a la otra.

Redondeando (porque la exactitud absoluta aquí no puede ser), podremos decir que la hoja del soto es más grande que la arbórea en  $\sim 15$  veces.

Un ejemplo más.

#### Problema

Creciendo bajo la sombra, una hoja tiene una longitud de  $31$  cm. En otro ejemplar, creciendo a pleno sol, la longitud de placa es solamente  $3,3$  cm. ¿En cuantas veces más o menos la superficie de primera hoja es mayor que la otra superficie?

#### Solución

Actuamos sobre antecedente. La proporción de las superficies es

$$31 / 3,3 \Rightarrow 960 / 10,6 = 87;$$

Entonces, la hoja grande tiene una superficie mayor a la otra en 90 veces.



*Figura 22. Encontrar la proporción de las superficies de estas hojas.*

No es difícil recoger en el bosque mucho pares de hojas con forma parecida, pero con tamaños distintos y de esta manera recibir un material curioso para las tareas geométricas sobre la proporción de las superficies de las figuras semejantes.



*Figura 23. Encontrar la proporción a las superficies de estas hojas.*

Para un ojo desacostumbrado siempre parece extraño, que relativamente una pequeña diferencia en longitud y anchura de las hojas derive una diferencia apreciable en sus

superficies. Si, por ejemplo, entre dos hojas, de forma semejante, una mas larga que otra en 20%, entonces la proporción de sus superficies será

$$1,2 \quad 1,4,$$

es decir, la diferencia importa 40%. Con la diferencia de la anchura en 40% una hoja supera otra sobre la superficie en

$$1,4 \quad 2,$$

es casi doble.

#### Problema

Proponemos a los lectores encontrar la proporción de las superficies de hojas, representadas en las figuras 23 y 24

[Volver](#)

### 11. Un gigante a seis patas.

¡Las hormigas son unas criaturas sorprendentes! Vivamente subiendo sobre un tallo con una carga demasiado pesada para su tamaño tan pequeño (Figura 24), ella le plantea un problema a un observador: ¿De dónde ese insecto tiene tanta fuerza, sin demasiado esfuerzo para subir con un peso 10 veces superior del peso de ella misma?

Es que una persona no es capaz de subir por la escalera, con una carga, por ejemplo, como un piano (Figura 24), pero la proporción del cargamento sobre el peso de cuerpo es igual como para una hormiga. Resulta, que una hormiga es mas fuerte que el humano.

¿Es así?

Sin geometría aquí no comprendemos.

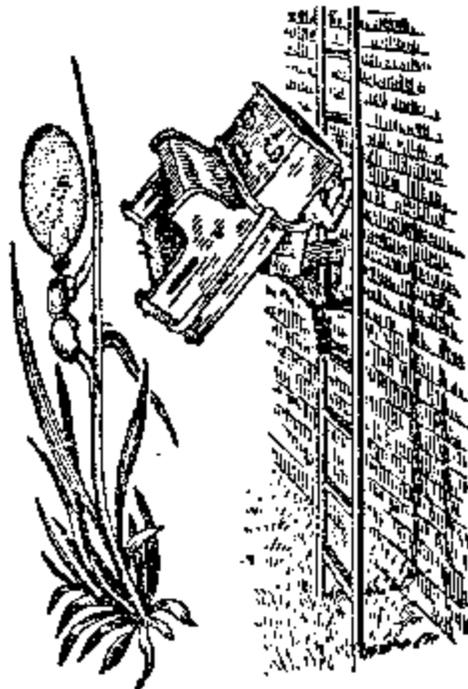


Figura 24. Un gigante a seis patas.

Escuchemos antes de todo a un especialista (profesor A. F. Brandt) sobre la fuerza de los músculos y después contestamos a la pregunta sobre la proporción de las fuerzas de un insecto y de una persona:

«Un músculo vivo parece a un cordoncillo elástico, pero su contracción principalmente funciona sobre la influencia de la excitación nerviosa, en la práctica fisiológica aplicando una corriente eléctrica al nervio apropiado o al mismo músculo. «Los experimentos se realizan sobre los músculos cortados de una rana recientemente muerta. Como los músculos de los animales de sangre fría mantienen sus propiedades vitales bastante tiempo fuera del organismo, a una temperatura normal. La forma de la prueba es muy simple, se corta un músculo de la pata de atrás, la pantorrilla, junto con un trozo de fémur, desde el cual comienza el tendón. Para una prueba este músculo resulta más cómodo por su tamaño y su forma y por su facilidad de desecación.

«A través del tendón se pasa un gancho, bajo de cual enganchan una pesa. Si tocamos el músculo con el hilo metálico, pasando desde la pila galvánica, entonces instantáneamente se contrae, se acorta y levanta el peso. Gradualmente poniendo mas pesas pequeñas suplementarias ya es fácil decidir cual es la máxima capacidad de levantamiento muscular.

«Atamos ahora dos, tres, cuatro músculos iguales en serie y empezaremos rápidamente a excitarles. Como vemos, con esta manera no conseguimos mayor esfuerzo de levantamiento, pero el peso va a subir mas alto. Pero si juntamos dos, tres, cuatro músculos en un *atado*, entonces, todo el sistema bajo excitación va a subir mayor cantidad del peso.

«El resultado es parecido cuando los músculos se unen entre ellos. Entonces, veremos que el esfuerzo de levantamiento muscular depende únicamente del *grosor*, es decir, del corte transversal; pero de ninguna manera depende de la longitud o del peso general.

Después de ese desvío volveremos a las semejanzas geométricas, pero en animales de diferente tamaño.

«Imaginamos dos animales; el primero ampliado al doble en todas medidas de longitud del otro; el volumen y peso del cuerpo, y también de todos los órganos sea en 8 veces mayor.

Todas las medidas superficiales, además recortes transversales de los músculos, solamente en 4 veces mayor. Resulta que el esfuerzo muscular, según el crecimiento de animal de la doble longitud y aumentado en ocho veces del cuerpo, se aumenta solamente en cuatro veces, es decir, que el animal se convierte en doblemente más *débil*. Fundamentalmente un animal, cual es el triple mas largo (con los cortes transversales en 9 veces más anchos y con el peso en 27 veces más grande), resulta que es el triple más flojo, y aquel, cual al

cuádruplo más largo es cuatro veces débil y etc.

Con esta ley del inadecuado crecimiento del volumen y peso de un animal, además del esfuerzo muscular se explican, porque un insecto, como una hormiga, abeja, etc. pueden subir cargas 30 ó 40 veces mayor del peso de su cuerpo, cuando una persona normal es capaz de subir solamente 9/10, y el caballo, 7/10 de su peso. »

Después de las explicaciones vamos a mirar las hazañas de hormigas "gigantes" desde otro punto de vista. Como el fabulista Y. A. Krylov burlonamente escribe:

*Una hormiga tiene una fuerza excelente,  
De cual no lo conoce la antigüedad;  
Y además (le dice su fuente viejo)  
Podría levantar dos grandes granos de cebada.*

[Volver](#)

**GEOMETRIA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRIA AL AIRE LIBRE**



**CAPITULO SEGUNDO  
GEOMETRIA JUNTO AL RIO**

**Contenido:**

1. [Medir la anchura de un río.](#)
2. [Con ayuda de una visera.](#)
3. [Longitud de la isla.](#)
4. [Un peatón al otro lado.](#)
5. [Los telémetros más ordinarios.](#)
6. [La energía de los ríos.](#)
7. [La velocidad de la corriente.](#)
8. [Cuánta agua pasa por el río.](#)
9. [La rueda de agua.](#)
10. [La placa irisada.](#)
11. [Los círculos en el agua.](#)
12. [Un obús fantástico.](#)
13. [La ola de quilla.](#)
14. [La velocidad de los proyectiles.](#)
15. [La profundidad de un estanque.](#)
16. [El cielo estrellado en el río.](#)
17. [Un camino a través del río.](#)
18. [Construir dos puentes.](#)

**1. Medir la anchura de un río.**

Sin atravesando el río nadando, medir su anchura es tan fácil, para quien conoce la geometría, como determinar la altura de un árbol sin subir encima. Una distancia inaccesible mide a través de los modos, anteriormente descriptos, como la medición de la altura inaccesible. En ambos casos un trayecto buscado lo sustituimos con la otra medida, la cual es fácil de medir inmediato.

Entre los muchos modos de solucionar esta Problema, distinguimos algunos más sencillos.

1.– Para el primero necesitamos un “aparato” ya conocido por nosotros, como tres alfileres sobre los vértices del triángulo rectángulo isósceles (Figura 25). Necesitamos encontrar la anchura  $AB$  de río (Figura 26), estando en aquella orilla, donde se encuentra el punto  $B$ , y sin atravesar al otro lado. Estando sobre el punto  $C$ , mantenga el aparato cerca de los ojos así, cuando mira con un solo ojo a través de dos alfileres, se ve como ambos están tapando los puntos  $B$  y  $A$ .



Figura 25. Medición de la anchura de un río con el aparato de alfileres

Esta claro que cuando conseguimos esto, nos encontraremos justo en la prolongación de la línea  $AB$ . Ahora, sin mover la tablilla, mire a lo largo de los otros dos alfileres (perpendicular a la dirección anterior) y fijemos un punto  $D$ , tapado con estos dos alfileres, es decir está situado en la recta, perpendicular a  $AC$ .

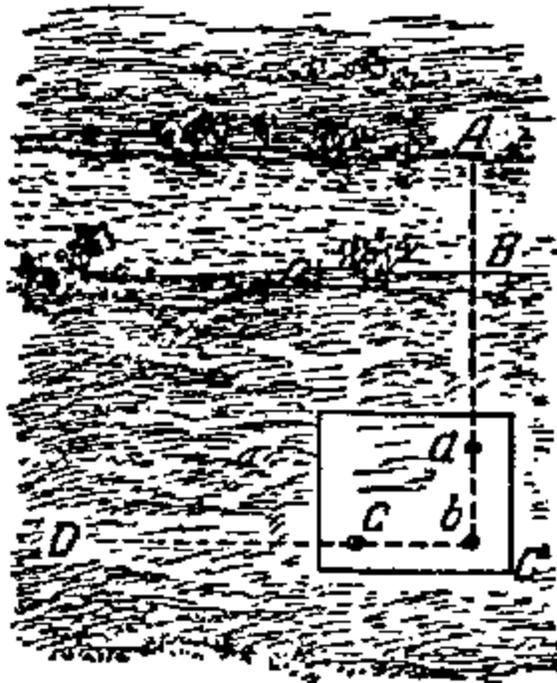


Figura 26. La primera posición del aparato de los alfileres.

Después clavamos un jalón en el punto  $C$ , dejamos este sitio y nos instalamos con el instrumento a lo largo de la recta  $CD$ , hasta que no encontraremos un punto  $E$  sobre ella (Figura 27), de donde es posible al mismo tiempo alinear el alfiler  $b$  con la pértiga del punto  $A$ , y el alfiler  $a$ , con el punto  $C$ .

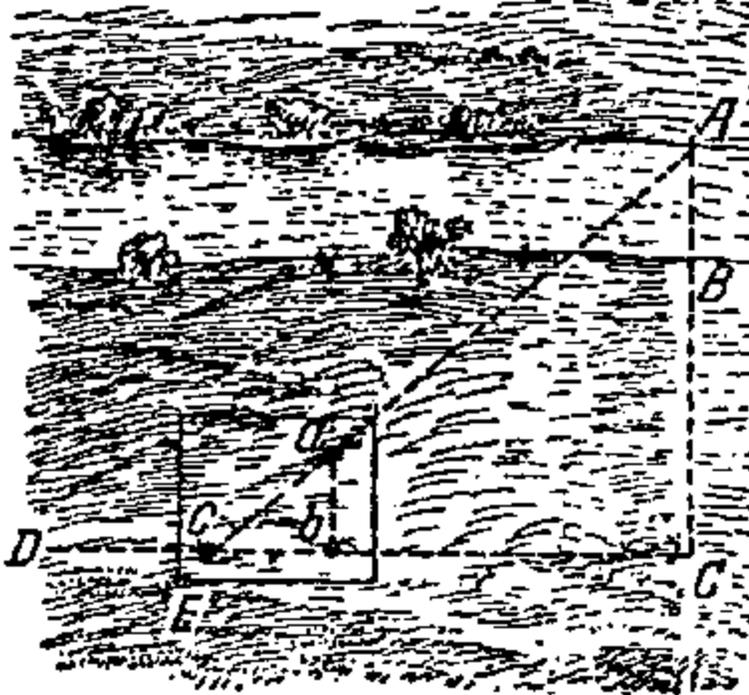


Figura 27. La segunda posición del aparato de los alfileres.

Esto significa que hemos encontrado el tercer vértice del triángulo  $ACE$ , sobre la orilla, donde el ángulo  $C$  es recto, el ángulo  $E$  es igual al ángulo agudo del aparato de los alfileres, es decir  $\frac{1}{2}$  del ángulo recto. Evidentemente que el ángulo  $A$  es igual a un ángulo recto, es decir

$$AC = CE.$$

Si medimos la distancia  $CE$  a través de los pasos, encontraremos la distancia  $AC$ , y quitando  $BC$ , el que es fácil de medir, encontraremos la anchura buscada de río.

Es bastante incómodo y difícil tener en la mano el aparato sin moverlo; mejor fijar la tablilla sobre un palo con una punta para mantener verticalmente sobre la tierra.

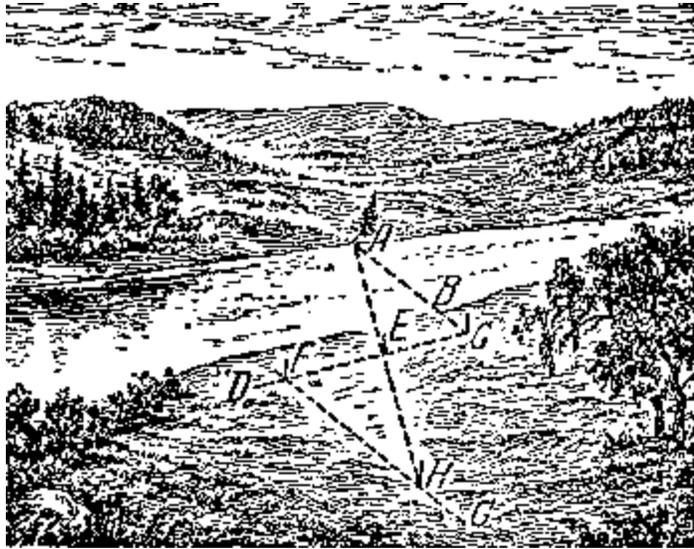


Figura 28. Utilizando las propiedades de igualdad a los triángulos.

2.– El segundo modo es parecido al primero. Aquí también se encuentra un punto  $C$  a lo largo de  $AB$  y se marca con ayuda del aparato de los alfileres la línea recta  $CD$  bajo ángulo recto sobre el  $CA$ . Pero después se actúa de otra manera (Figura 28). Sobre la línea recta  $CD$  se medirá dos distancias arbitrariamente iguales  $CE$  y  $EF$  y marcamos los puntos  $E$  y  $F$  con sendos jalones.

Después estado con el aparato en el punto  $F$ , marcamos la dirección  $FG$ , perpendicular sobre el  $FC$ . Ahora vamos a andando a lo largo de la  $FG$ , buscando sobre la línea el punto  $H$ , desde el cual el jalón  $E$  parece que está tapando al punto  $A$ . Esto significa, que los puntos  $H$ ,  $E$  y  $A$  encuentran sobre una línea recta.

La Problema esta solucionada: la distancia  $FH$  es igual a la distancia  $AC$ , desde cual es suficiente quitar  $BC$ , para encontrar la anchura buscada de río ( los lectores, evidentemente, adivinen el mismo, porque  $FH$  es igual a  $AC$  ).

Este modo necesita más sitio que el anterior; si un lugar lo permite hacer de ambos modos, es útil comprobar un resultado con el otro.

3.– En el modo ahora descrito, es una modificación del anterior: medir sobre la línea  $CF$  distancias no iguales, donde una es tantas veces menor que la otra.

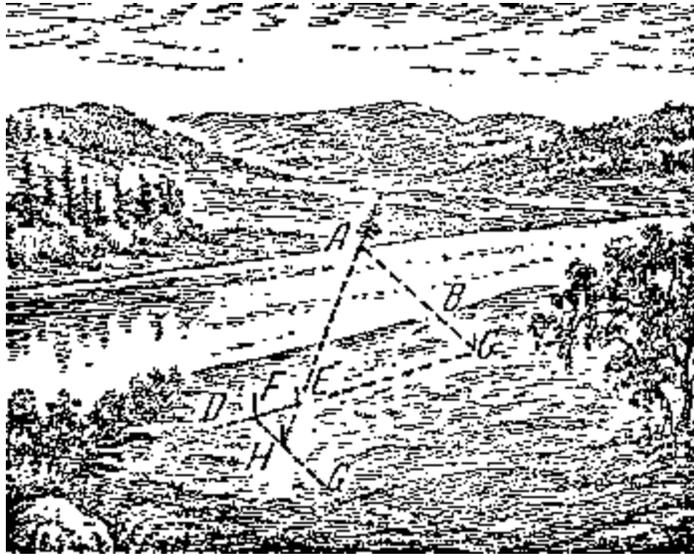


Figura 29. Utilizando las propiedades de semejanza a los triángulos.

Por ejemplo (Figura 29), hacemos  $FE$  cuatro veces menor que  $EC$ , después actuamos como siempre: a la dirección  $FG$ , perpendicular sobre  $FC$ , se busca el punto  $A$ . Pero ahora  $FH$  no es igual a  $AC$ , es menos de esta distancia en cuatro veces: el triángulo  $ACE$  y  $EFH$  aquí no son iguales, son semejantes (tienen los ángulos iguales sobre los lados no iguales). De la semejanza de los triángulos tenemos la proporción

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

Entonces, midiendo  $FH$  y multiplicando el resultado por 4, obtenemos la distancia  $AC$ , y quitando  $BC$ , encontraremos la anchura buscada de río.

El modo, como podemos comparar, no necesita mucho sitio y por eso es cómodo para llevar a la práctica.

4.- El modo cuarto básicamente es utilizando las propiedades del triángulo rectángulo, cuando uno de los ángulos agudos es  $30^\circ$ , entonces el cateto inverso equivale a la mitad de la hipotenusa.

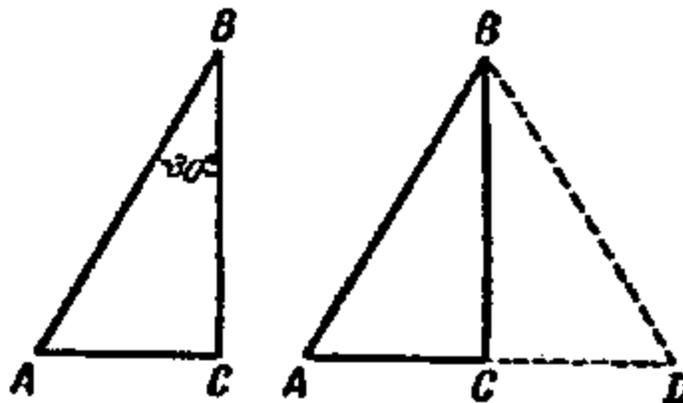


Figura 30. Cuando el cateto es igual a la mitad de la hipotenusa

Asegurarse que la posición es exacta es muy fácil: sea que el ángulo  $B$  del triángulo rectángulo  $ABC$  (Figura 30, a la izquierda) es  $30^\circ$ ; demostraremos que en este caso

$$AC = \frac{1}{2} AB.$$

Hacemos girar el triángulo  $ABC$  sobre  $BC$ , quedando simétricamente ubicado con respecto a su postura anterior (Figura 30, a la derecha), creando una figura  $ABD$ ; la línea  $ACD$  es recta, por que ambos ángulos sobre el punto  $C$ , son rectos.

En el triángulo  $ABD$  el ángulo  $A = 60^\circ$ , el ángulo  $ABD$ , como está formado con dos ángulos de  $30^\circ$  también es  $60^\circ$ .

Entonces,  $AD = BD$  como dos lados estando frente a los ángulos iguales. Pero  $AC = \frac{1}{2} AD$ ; es decir,  $AC = \frac{1}{2} AB$ .

Deseando a utilizar esta característica de triángulo, necesitamos colocar los alfileres encima de tablilla formando un triángulo rectángulo, donde el cateto es la mitad de la hipotenusa. Con este instrumento se ubica en un punto  $C$  (Figura 31) Así, con la recta  $AC$  coincide con la hipotenusa de triángulo de los alfileres.

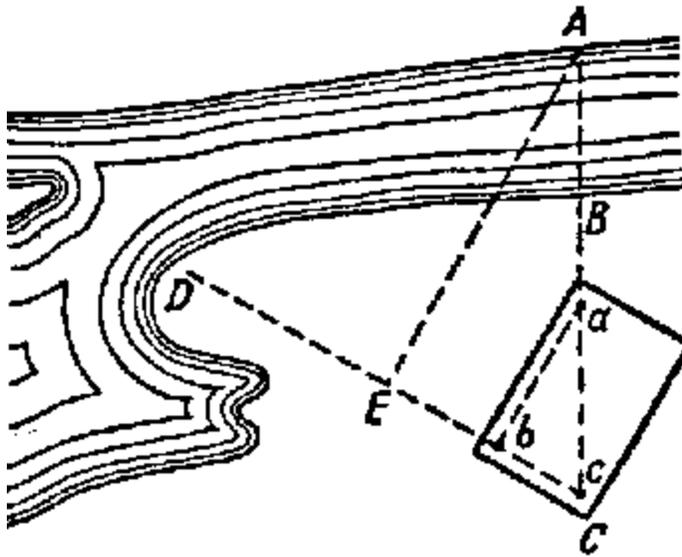


Figura 31. Esquema del uso el triángulo rectángulo con un ángulo de  $30^\circ$

Mirando a lo largo del cateto corto de este triángulo, marcamos la dirección  $CD$  y sobre cual encontraremos un punto  $E$ , donde  $EA$  es perpendicular a  $CD$  (lo construimos con la ayuda del mismo aparato de los alfileres). Es fácil de comprender, que la distancia  $CE$ , cateto enfrente al ángulo de  $30^\circ$ , es igual a la mitad de  $AC$ . Entonces midiendo  $CE$ , doblando esta distancia y restándole  $BC$ , tenemos la anchura buscada  $AB$  de río.

Así son los cuatro modos fáciles de utilizar, con ayuda de los cuales siempre es posible, sin atravesar el río, medir la anchura del mismo con resultado plenamente satisfactorio. No vamos a examinar los modos difíciles, los que necesitan aparatos especiales para hacer las mediciones.

[Volver](#)

## 2.- Con ayuda de una visera .

Un modo, que fue muy útil para el coronel mayor Kuprianov, estando en una situación de guerra. Le mandaron medir la anchura de un río, a través de cual necesitaba organizar un pasaje...

«Acercándose furtivamente la subdivisión de Kuprianov hasta el arbusto al lado de río, se escondieron, pero él junto con el ayudante Karpov salieron a poca distancia del río, de

donde se ve muy bien a la orilla enfrente, donde se escondió el enemigo. En estas condiciones necesitaba medir la anchura, confiando a su vista.

—¿A ver, Karpov, cuánto mide el ancho del río? — preguntó Kuprianov.

—Penso, no más que 100 a 110 metros, - se respondió el Karpov.

«El coronel estuvo de acuerdo con su ayudante, pero para la seguridad decidió medir la anchura de río con ayuda de su "visera".



Figura 32. Por debajo de una visera deberemos notar un punto en la orilla opuesta.

«El modo es el siguiente. Necesita ponerse enfrente al río y calar la gorra sobre los ojos así, para poder ver justo bajo de la visera la línea de orilla opuesta (Figura 32).

«La visera la podemos substituir con la palma de la mano o con una agenda, situando el canto en la frente. Después sin cambiar de posición la cabeza, gira a la izquierda o a la derecha, o atrás (en aquella parte, donde el campo es más llano, accesible para medir la distancia) y observamos el punto más lejano, visible bajo de la visera ( de la palma o de la agenda).

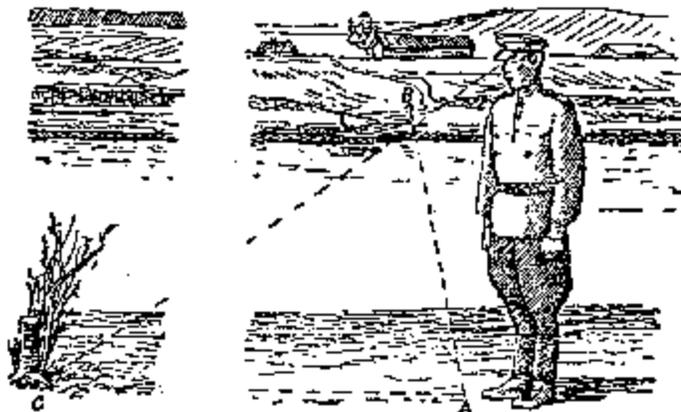
«La distancia hasta este punto es la anchura del río aproximadamente.

«Este es el modo que utiliza el coronel. Rápidamente se levantó, llevó la agenda al frente, rápidamente dio la vuelta y ubicó el punto lejano. Después él con el ayudante Karpov, arrastrándose llegaron hasta el punto, midiendo la distancia con una cuerda. El resultado fue 105 metros.

Kuprianov dejó el resultado a sus ayudantes.»

#### Problema

Dar la explicación geométrica al modo de la "visera".



*Figura 33. Sobre el mismo modo, marcar el punto en la orilla donde estamos*

Solución

El rayo de la vista, tocando el borde de la visera ( palma o agenda), es primero apuntado a la línea de la orilla apuesta ( Figura 32). Cuando la persona da vuelta, pues el rayo de vista, lo mismo que la pata de compás, describe la circunferencia, entonces  $AC = AB$ , como los radios de la circunferencia (Figura 33).

[Volver](#)

### 3. Longitud de la isla.

Problema

Ahora tenemos un problema más difícil. Estando en la orilla de un río o de un lago, vemos una isla (Figura 34), cuya longitud deseamos conocer sin dejar la orilla, por supuesto. ¿Es posible hacer la medición?

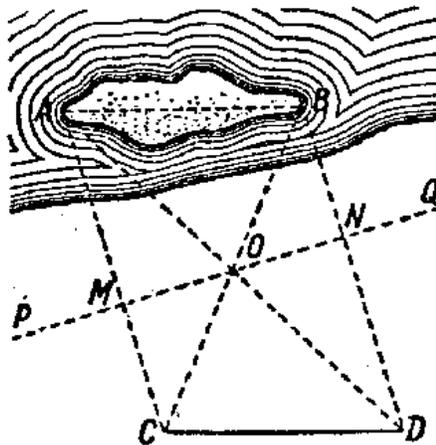


*Figura 34. Como encontrar la longitud de una isla.*

Aunque en este caso para nosotros ambos extremos de la línea medida, son inaccesibles. La Problema se solucionara, además sin aparatos especiales.

Solución

Necesitamos saber la longitud  $AB$  (Figura 35) de la isla, permaneciendo en la orilla durante la medición.



*Figura 35. Utilizando las propiedades de igualdad de los triángulos rectángulos*

Eligiendo dos puntos  $P$  y  $Q$  arbitrarios, se marcan con jalones y se buscan sobre la recta  $PQ$  los puntos  $M$  y  $N$  así, cuando los sentidos  $AM$  y  $BN$  formaban con la dirección  $PQ$ , ángulos rectos (para esto utilizaremos el aparato de los alfileres).

En el centro  $O$  del trazo  $MN$  se marca con otro jalón y se busca a lo largo de la línea  $AM$  el punto  $C$ , donde el jalón  $O$  parece que está tapando el punto  $B$ . Igualmente a lo largo de la  $BN$  buscan el punto  $D$ , donde el jalón  $O$  parece esta tapando el extremo  $A$  de la isla. La distancia  $CD$  es la longitud buscada.

Demostrar esto no es difícil.

Cogemos dos triángulos rectángulos  $AMO$  y  $OND$ ; sus catetos  $MO$  y  $NO$  son iguales, además los ángulos  $AOM$  y  $NOD$  son iguales, entonces, los triángulos son iguales entre sí, y

$$AO = OD.$$

De igual manera podemos deducir que

$$BO = OC.$$

Comprobando después los triángulos  $ABO$  y  $COD$ , deducimos que

$$AB = CD.$$

[Volver](#)

#### 4. Un peatón al otro lado.

Problema

A lo largo de un río está paseando una persona. Al otro lado Ud. precisamente distingue sus pasos. ¿Podemos, sin movernos, encontrar la distancia aproximada entre el peatón y Ud., sin tener ningún instrumento a mano?

Solución

No tenemos ningún aparato, pero hay ojos y manos, y eso es suficiente. Estiraremos la mano hacia el peatón y miramos al fin del dedo con un solo ojo, el derecho si el peatón esta andando a mano derecha, el izquierdo, si el peatón esta andando a mano izquierda.



Figura 36. Como encontrar la distancia hasta el peatón, andado por la orilla apuesta.

Inmediatamente que el dedo tapa al peatón (Figura 36), cierre el ojo con el cual observan, y abren el otro: el peatón aparece alejado un poco hacia atrás. Contaremos, cuantos pasos

hacia delante él da, antes que se junte otra vez con el dedo. Ahora tenemos todos los datos necesarios para tener un resultado aproximadamente.

Explicaremos cómo utilizar estos datos. En la Figura 36, sean  $a$   $b$  nuestros ojos; el punto  $M$ , fin del dedo de la mano estirada; el punto  $A$ , primera medición de la distancia al peatón y  $B$ , la segunda.

Los triángulos  $aBM$  y  $ABM$ , son semejantes (deberemos dar la vuelta hacia el peatón cuando  $ab$  sea paralela a la dirección de su movimiento). Entonces,

$$BM \cdot bM = AB \cdot ab$$

es la proporción, donde se desconoce el miembro  $BM$ , todo el resto lo podemos medir inmediatamente. Efectivamente,  $bM$  es la longitud de la mano;  $ab$  es la distancia entre las pupilas de ojos,  $AB$  lo medido con los pasos de peatón (el paso tomaremos  $\approx 3/4$  metros). Por lo tanto, tenemos la distancia desconocido entre el observador y el peatón en la orilla apuesta

$$MB = \frac{AB \times bM}{ab}$$

Si, por ejemplo, la distancia entre las pupilas ( $ab$ ) es de 6 centímetros, la longitud  $bM$  desde el fin de mano hasta los ojos, 60 centímetros, y el peatón hizo desde  $A$  hasta  $B$ , digamos, 14 pasos, entonces la distancia desde él hasta el observador es

$$MB = 14 \cdot 60 / 6 = 140 \text{ pasos, ó } 105 \text{ metros.}$$

Es suficiente conocer la distancia entre las pupilas y  $bM$ , la distancia desde los ojos hasta el extremo de mano estirada, y recordar su proporción  $bM/ab$ , para encontrar rápidamente la distancia a objetos inaccesibles. Solo falta multiplicar  $AB$  por la proporción. La mayoría de las personas, tienen  $bM/ab$  más o menos igual a 10. La dificultad es encontrar, de cualquier manera, la distancia  $AB$ . En nuestro caso estamos utilizando los pasos de peatón. Pero podemos utilizar otros datos también.

Si por ejemplo, necesitamos encontrar la distancia hasta el tren, entonces la longitud  $AB$  podemos tener comprobando con la longitud de un vagón, el que conocemos (7,6 metros entre los topes). Si necesitamos buscar la distancia hasta la casa, entonces  $AB$  podría ser el ancho de una ventana o el tamaño de ladrillo, etc.

Este sistema lo podemos utilizar para determinar el tamaño de los objetos lejanos, si sabemos la distancia hasta el observador.

Probaremos utilizar diferentes "telémetros", los cuales describimos enseguida.

[Volver](#)

### 5. Los telémetros más ordinarios.

Anteriormente, en el capítulo primero, hemos descrito un aparato bastante sencillo para medir las alturas, el altímetro. Ahora describimos un instrumento, para medir distancias inaccesibles y se llama telémetro. Un telémetro muy ordinario lo podemos preparar de una cerilla. Únicamente suficiente marcar las divisiones milimétricas, blancas y negras, uno a través de otro (Figura 37).



Figura 37. Cerilla – telémetro

Imaginaremos, los vemos a lo lejos una persona y formaremos un problema, encontrar la distancia hasta él.

En este caso la cerilla – telémetro es muy útil. Manteniendo en la mano estirada y mirando con solo un ojo, llevaremos su extremo a coincidir con la parte superior de la persona.

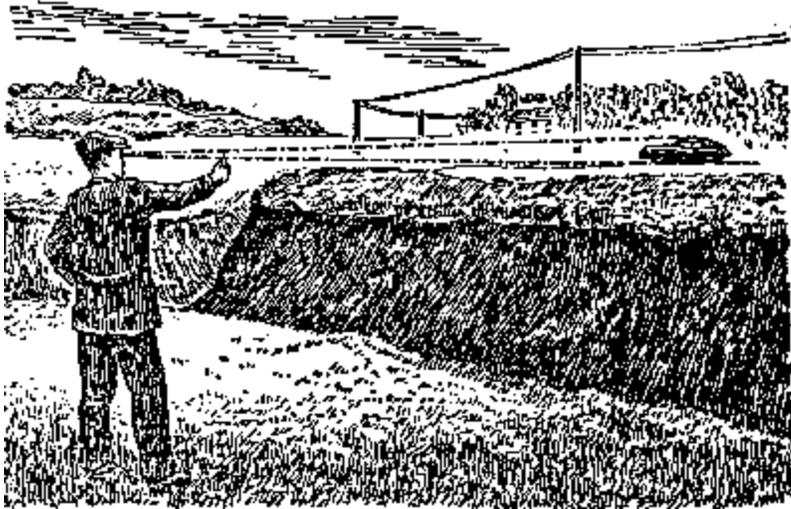


Figura 38.

Después, despacio movemos la uña del dedo pulgar sobre la cerilla, fijando el punto donde se proyectan los pies de la persona. Lo queda por saber, acercando la cerilla, sobre qué división se fijó la uña, y ya tenemos los datos para resolver el problema.

Es fácil de asegurarse que la proporción es correcta:

$$\frac{\text{la distancia buscada}}{\text{la distancia entre el ojo y la cerilla}} = \frac{\text{la estatura media de una persona}}{\text{la medida sobre la cerilla}}$$

Desde este momento ya no es difícil calcular la distancia buscada. Si, por ejemplo, la distancia hasta la cerilla es *60 centímetros*, la estatura de una persona es *1,7 metros*, y la parte medida de cerilla es *12 milímetros*, entonces la distancia es:

$$\text{la distancia buscada} = \frac{60 \times 1700}{12} = 8.500 \text{ cm} = 85 \text{ m}$$

Llevando a la práctica, para tener un mejor conocimiento, utilizando este telémetro podemos medir la estatura de un amigo, o proponiendo alejarse, encontrar en cuantos pasos él se alejó del observador.

Con el mismo modo podemos encontrar la distancia hasta el jinete (la altura mediana es *2,2 metros*), hasta la bicicleta (el diámetro de rueda es *75 centímetros*), hasta el poste telegráfico a lo largo de ferrocarril (la altura es *8 metros*, la distancia entre los aisladores son *90 centímetros*), hasta el tren, la casa y etc. las medidas de los que no es difícil de encontrar. Durante una excursión podemos utilizar el modo también.

Podemos hacer a mano un aparato muy cómodo del mismo tipo, el que sirve para encontrar la distancia a través de la altura de una persona que está lejos.

El instrumento los podemos ver en las figuras 39 y 40.

El objeto observado coloca en el espacio *A*, el que se alinea con la parte alta de instrumento. El tamaño del espacio se determina por las divisiones en las partes *C* y *D* de tablilla. Para librarse de la necesidad de hacer los cálculos, podemos en la parte *C* señalar, enfrente las

divisiones, las distancias correspondientes a ellos, si el objeto observado es la figura de una persona (mantenga el instrumento enfrente los ojos con la mano estirada).



Figura 39.

En la parte derecha *D* puede señalizar las distancias, calculadas antes para cualquier necesidad, cuando se observa la figura del jinete ( *2,2 centímetros*). Para el poste telegráfico (altura – *8 metros*), el aeroplano con alas es *15 metros* y para otros objetos podemos utilizar la parte libre de los *C* y *D*. Al final, nuestro instrumento va a tener un aspecto presentado en la Figura 40.

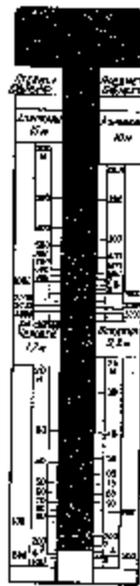


Figura 40. La estructura del telémetro sobresalido

Evidentemente, la distancia así determinada es siempre exacta. El ejemplo que examinamos anteriormente, donde la distancia hasta la persona fue valorada en *85 metros*, un error en solo *1 milímetro* durante la medición con la cerilla da una equivocación de resultado en *7 metros* ( $1/12$  de *85*).

Pero si la persona estuviera en cuatro veces más lejos, medimos con la cerilla no *12*, si no *3 milímetros*, entonces el error será solamente en  $\frac{1}{2}$  milímetro se cambia el resultado en *57*

*metros*. Por eso, nuestro ejemplo es seguro únicamente para distancias más cercanas, *100 a 200 metros*. Para las distancias más largas tenemos que buscar los objetos más grandes.

[Volver](#)

## 6. La energía de los ríos.

Un río cuya longitud no es más que *100 kilómetros*, tomamos como pequeño. ¿Sabe cuántos ríos así hay en nuestro país? ¡Muchos, *43.000!*

Si pusiéramos todos los ríos en una línea, tendrán una cinta de longitud *1.300.000 kilómetros*. Con esta cinta podemos ceñir el globo terrestre treinta veces sobre el ecuador (la longitud ecuatorial es *40 000 kilómetros*).

La corriente de agua de un río se mueve lentamente, pero él mantiene en secreto una reserva de energía inagotable. Especialistas están pensando, si fuera practicable sumar las posibilidades ocultas de todos los ríos pequeños, los que corren por nuestras tierras, ¡recibimos una cantidad considerable de *43 millones de kilovatios!* Esta energía gratis debería ser utilizada para la electrificación económicas de las localidades situadas cerca de los ríos.

Sabemos que la realización es posible con la ayuda de las centrales hidroeléctricas y todos pueden demostrar iniciativa y ayuda real sobre la preparación y la construcción de una central. La verdad, a los constructores les interesa todo, a qué sistema pertenece el río: su anchura y velocidad de corriente ("consumo de agua"), la superficie del corte transversal del lecho ("corte vivo") y cual es la presión de agua bajo las orillas. Todo esto es posible de medir con los medios a mano y aquí mismo presentamos una Problema geométrica, pero no muy complicada.

Ahora empezaremos a solucionar esta Problema.

Pero antes tienen que conocer algunos consejos prácticos de parte los especialistas ingenieros V. Yaros y I. Fiodorov. Como elegir el sitio para construcción futura.

*«Una central no grande, ellos recomiendan construir no más cerca de 10 a 15 kilómetros y no más lejos que 20 a 40 kilómetros desde la fuente de río, porque el alejamiento trae consigo el encarecimiento de la presa y abre gran afluencia de agua. Si se construye la presa más cerca que 10 a 15 kilómetros desde la fuente, la central hidroeléctrica, por la pequeña afluencia de agua y sin la presión suficiente, no puede proveer a la potencia necesaria. La parte elegida de río no debe de ser de gran profundidad, ya que aumenta el valor de la construcción, necesitando un fundamento muy pesado».»*

[Volver](#)

## 7. La velocidad de la corriente.

¿Cuanta agua corre durante el periodo de veinticuatro horas en este sitio?

El cálculo no es difícil: La medición la realizan dos personas. Uno con un reloj en la mano y el otro con la boya o, por ejemplo, con una botella bien cerrada con una banderilla. Eligen un trozo de río rectilíneo y colocan a lo largo de río dos jalones *A* y *B* a la distancia *10 metros* uno del otro. (Figura 41).

Sobre las líneas, perpendiculares al *AB*, colocan otros más jalones *C* y *D*. Uno de los observadores con el reloj esta detrás del jalón *D*. El otro, con la boya va hacia arriba del jalón *A*, tira la boya al agua, y se pone detrás del jalón *C*. Ambos miren a lo largo de sentidos *CA* y *DB* sobre la superficie de agua. En el momento, cuando la boya está cruzando la prolongación de la línea *CA*, el primero observador levanta la mano. Con esta señal el otro observador empieza a medir el tiempo y detiene la medición cuando la boya cruza la línea *DB*.

Por ejemplo, supongamos que la diferencia de tiempo fue de *20 segundos*.

Entonces, la velocidad de corriente del río:

$$10 / 20 = 0,5 \text{ metros / segundo.}$$

Usualmente, las mediciones se repiten un par de veces, tirando la boya en puntos diferentes de la superficie de río. Después suman las velocidades obtenidas y se dividen en la cantidad de medidas. Esto determina la velocidad media que lleva la superficie del río.

Las capas más profundas corren más despacio, y la velocidad mediana de todo el torrente es como  $4/5$  de la velocidad superficial, en nuestro caso, entonces,  $0,4 \text{ metros / segundo}$ . Podemos encontrar la velocidad superficial con otro modo, pero menos seguro.

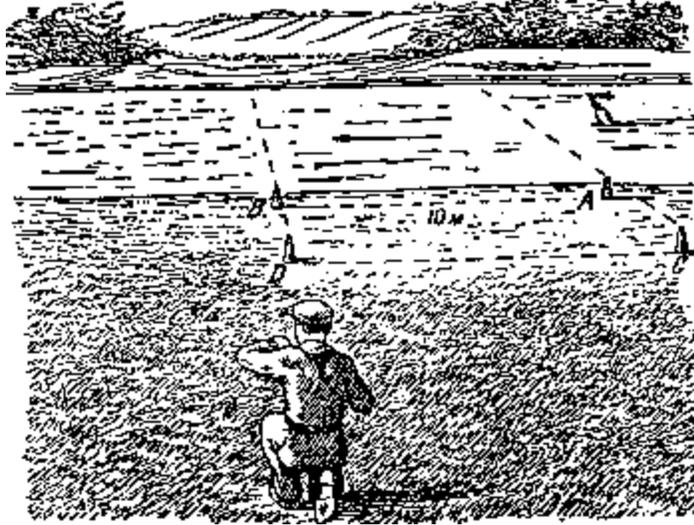


Figura 41. La medición de la velocidad al corriente de un río

Montamos una lancha y flotamos un kilómetro (marcado en la orilla) contra la corriente, después volverse e irse con la corriente, remando con la misma fuerza.

Supongamos que recorremos los  $1000 \text{ metros}$  contra la corriente en  $18 \text{ minutos}$ , y a favor de la corriente, en  $6 \text{ minutos}$ . Designando la velocidad buscada del río a través de  $x$ , la velocidad de nuestro movimiento en el agua estancada a través de  $y$ , formemos una ecuación

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1000}{y-x} = 18 \\ \frac{1000}{y+x} = 6 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} y-x = \frac{1000}{18} \\ y+x = \frac{1000}{6} \end{array} \right\} \\ 2x = 110 \\ x = 55$$

La velocidad de agua corriente sobre la superficie es  $55 \text{ metros / segundo}$ , es decir, la velocidad media será cerca de  $5/6 \text{ metros / segundo}$ .

[Volver](#)

### 8. Cuánta agua pasa por el río.

De una manera u otra siempre es posible encontrar la velocidad de la corriente de un río. Un poco complicada es la otra parte de la preparación necesaria para calcular la cantidad del agua corriente, encontrar la superficie del corte transversal del agua. Para saber la superficie, "el corte vivo" del río necesariamente hay que preparar el plano de aquel corte. El levantamiento del corte vivo es el siguiente:

#### Primer método

En el mismo sitio, donde los medimos la anchura del río, junto al agua, en ambas orillas, clavamos dos jalones. Después con un amigo montamos una lancha y vamos desde un jalón hasta el otro, todo el tiempo siguiendo exactamente una línea recta, la que une los dos jalones. El amigo debe de ser un buen remero; además, él debe ser ayudado por un tercer miembro de trabajo, que estando en la orilla, observa, para que la lancha siga bien su dirección, y en los casos necesarios dar unos señales al remero, hacia dónde debería girar. En el primer pasaje por el río deberemos contar solamente, cual es la cantidad de los golpes con los remos él necesitaba, y desde aquí saber, cual es la cantidad de los golpes necesaria para trasladar la lancha en unos *5* o *10 metros*.

Cuando hacemos la segunda navegación, pero ahora con un listón apropiado para medir, y cada *5 – 10 metros* (medidos mediante la cantidad de los golpes de remo) se hunde el listón en el agua verticalmente hasta el fondo del río, anotando la profundidad de río en este sitio. En esta forma podemos medir el "corte vivo" del río, si no es muy grande; para un río muy ancho, con mucha agua, se necesitan unos modos más difíciles. Este trabajo lo dejaremos para los especialistas. Los aficionados eligen las Problemas, correspondientes a sus sencillos recursos.

#### Segundo método.

Para un río estrecho y poco profundo no necesitamos una lancha. Entre los jalones se estira perpendicularmente a la corriente, una cuerda con nudos hechos cada *1 metro*, y bajando el listón sobre el cada nudo hasta el fondo, medimos la profundidad del cauce.

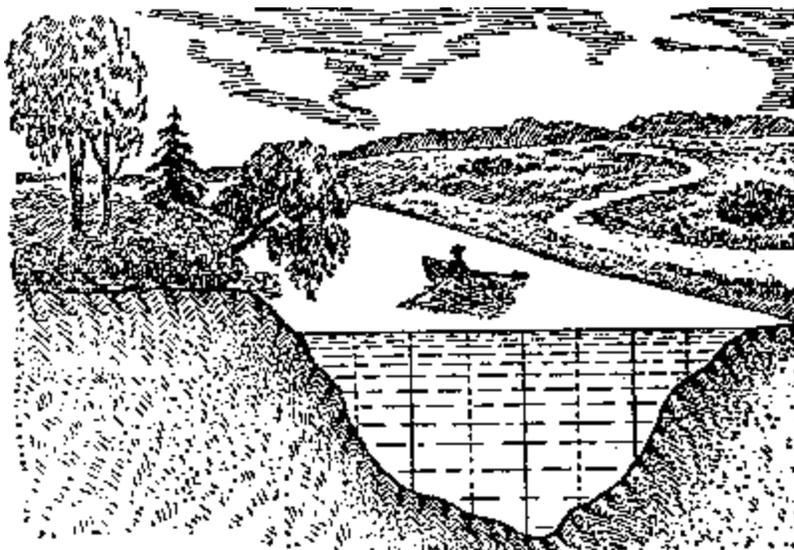


Figura 42. El "corte vivo" del río

Cuando todas las medidas están hechas, anotamos en el papel cuadriculado el plan del corte transversal. Obtenemos una figura, más o menos, como vemos en la Figura 42. Ahora podemos encontrar su superficie, como ella esta dividida en numerosos trapecios (donde conocemos las bases y las alturas) y por dos triángulos extremos también con la base y la

altura conocida. Si, la escala del plano es  $1 : 100$ , entonces, el resultado lo obtenemos en metros cuadrados.

Ahora tenemos los todos datos para calcular la cantidad de agua corriente. Evidentemente, a través del corte vivo corre un volumen de agua en cada un segundo, igual al volumen de un prisma, donde la base es el corte, y la altura, la velocidad media de la corriente.

Si, por ejemplo, la velocidad media de la corriente en el río es  $0,4$  metros /segundo, y la superficie del corte vivo, digamos, es  $3,5$  metros cuadrados, entonces incesantemente cruzan a través del corte

$$3,5 \times 0,4 = 1,4 \text{ metros cúbicos de agua por segundo,}$$

o 1,4 toneladas ( $1 \text{ m}^3$  de agua potable pesa 1 tonelada = 1000 kilogramos).

En una hora

$$1,4 \times 3\,600 = 5\,040 \text{ m}^3$$

en el periodo de veinticuatro horas

$$5\,040 \times 24 = 120\,960 \text{ m}^3$$

¡ más de cien mil metros cúbicos!



Figura 43. Estación hidráulica con potencia de 80 kilovatios de una artel agrícola de Burmakin; da energía para los siete koljoces.

En tal caso el río con el corte vivo de  $3,5 \text{ metros}^2$  es un río pequeño: él puede tener, digamos,  $3,5 \text{ metros}$  de anchura y de  $1 \text{ metro}$  de profundidad, es posible de vadear, pero él tiene guardada mucha energía capaz de convertirse en electricidad. ¿Cuánta agua corre durante el periodo de veinticuatro horas por un río como el Neva, si a través de su corte vivo pasan  $3.300 \text{ metros}^3$  de agua?

Es el "consumo medio" de agua en el Neva de San Petersburgo. "El consumo medio" de agua en el Dnepro de Kyev es de  $700 \text{ metros}^3$ .

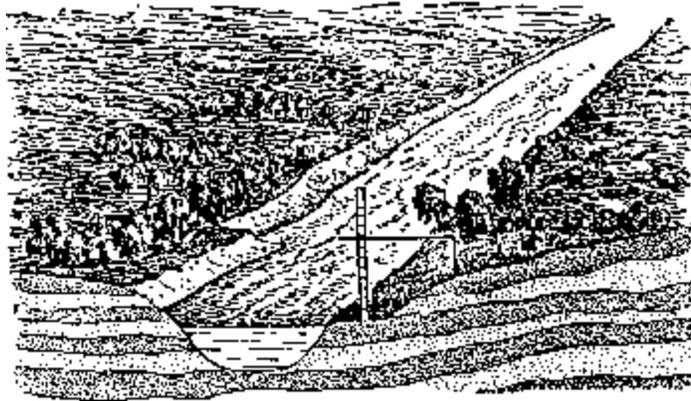


Figura 44. La medición del corte vertical de las orillas

Los prospectores jóvenes y los constructores futuros de su central hidroeléctrica necesitan saber cual es la presión de agua sobre las orillas de río, es decir, cual diferencia de niveles podría formar la presa (Figura 43).

Por eso en *5 a 10 metros* de las orillas del agua en colocan dos estacas, habitualmente sobre la línea perpendicular al corriente del río. Pasando después sobre esta línea, se ponen pequeños piquetes en los sitios de la fractura litoral (Figura 44). Con ayuda de las reglas se mide la sobresaliente a uno sobre el otro piquete y la distancia entre ellos.

Con los datos de medición se hace el plano del perfil del litoral analógicamente al dibujo del perfil de cauce.

Por el perfil del litoral podemos calcular magnitud de la presión.

Supongamos que la presa sube el nivel de agua hasta *2,5 metros*. En este caso podemos calcular la potencia posible de la central hidroeléctrica.

Para esto los ingenieros electricistas nos recomiendan multiplicar *1,4* ("consumo" del río por segundo) por *2,5* (la altura del nivel de agua) y por *6* (el coeficiente dependiente de la pérdida de energía en las maquinas). El resultado tenemos en kilovoltio. Entonces,

$$1,4 \times 2,5 \times 6 = 21 \text{ kilovoltio.}$$

Como los niveles del río cambian a lo largo del año, el consumo también lo hace, para el cálculo tenemos que saber el valor típico de consumo de agua anual.

[Volver](#)

## 9. La rueda de agua.

Problema

La rueda provista de paletas se instala en el fondo del río (Figura 45). ¿Cómo va girar la rueda, si la corriente toma la dirección hacia la izquierda?

Solución

La rueda se gira contra el reloj. La velocidad de la corriente de las capas más profundas es menor que la velocidad de las capas superiores de la corriente, entonces, la presión sobre las paletas de arriba sea mayor, que la de abajo.

[Volver](#)

## 10. La placa irisada.

En un río, donde baja el agua desde una fábrica, podemos observar las manchas coloradas. Aceite, bajando al río junto con agua de la fábrica, deja en la superficie del río estas manchas ligeras. ¿Podemos saber, aproximadamente, la anchura de una de estas placas? La Problema parece complicada, pero solución no es tan difícil. Noten que nosotros no vamos a medir la anchura de la placa ahora mismo. La calcularemos de manera indirecta.

Cogemos una cantidad de aceite mecánico, por ejemplo, *20 gr* y lo echamos al agua, lejos de la orilla, por supuesto. Cuando la placa tome la forma de un círculo, medimos aproximadamente su diámetro. Sabiendo el diámetro, encontraremos la superficie. Y como sabemos el volumen (se calcula por el peso), entonces no será difícil encontrar la anchura buscada de la placa. Miraremos atentamente el ejemplo.



Figura 45. ¿El que sentido tome la rueda?

#### Problema

Un solo gramo de petróleo, está formando una charca de *30 centímetros* diámetro. ¿Cuál es la anchura de la placa petrolera encima de agua? Un centímetro cubico del petróleo pesa *0,8 gr*.

#### Solución

Encontraremos el volumen de la placa, el cual, evidentemente, es igual al volumen cogido de petróleo. Si  $1 \text{ cm}^3$  de petróleo pesa *0,8 gr*, entonces, para un gramo es  $1/0,8 = 1,25 \text{ cm}^3$  o  $1.250 \text{ mm}^3$ . La superficie del círculo con el diámetro de *30 centímetros*, o *300 milímetros*, es  $70.000 \text{ mm}^2$ . La anchura buscada es igual al volumen, dividido por la superficie:

$$\frac{1250}{70.000} = 0,018 \text{ mm}$$

La medición directa con los medios habituales, evidentemente, no es posible. Las placas que forman el aceite y el jabón son las capas más finas, como *0,0001 mm* y menos.

«Una vez, cuenta el físico inglés Boyz en su libro "Pompas de jabón", hice esta prueba en un estanque. En la superficie del agua echo una cucharada del aceite de oliva. Inmediatamente se ha convertido en una mancha grande, con el diámetro *20 a 30 metros*.

«Como la mancha es mil veces mayor por su longitud y por su anchura sobre la cuchara, pues, la capa del aceite sobre agua tiene que ser, aproximadamente, una millonésima parte de la anchura dentro de cuchara, o más o menos *0,000002 milímetro*."»

[Volver](#)

## 11. Los círculos en el agua.

## Problema

Más de una vez, por curiosidad, miramos atentamente los círculos encima de agua estanca, formados al tirar a una piedra (Figura 46). No es difícil de explicar este fenómeno de la naturaleza: la agitación extiende desde un punto principal en todas direcciones con la misma velocidad; por eso en cada momento todos los puntos perturbados se alejan la misma distancia del punto de aparición de la perturbación, es decir, sobre la una circunferencia.



Figura 46. Los círculos sobre el agua

¿Pero qué pasa en el agua corriente? ¿Tienen las olas originadas por una piedra tirada, formar un círculo o su forma es alargada?

En primer lugar, parece que en el agua corriente las olas deberían alargarse y tomar el sentido del río: la agitación en el agua corriente es más rápida, que en los sentidos laterales. Por eso, las partes excitadas de la superficie acuática, tienen que formar una línea curva larga y cerrada, pero, por ninguna manera forman la circunferencia.

En la realidad, no es así. Tirando las piedras en una corriente del río muy rápido, podemos asegurar que las olas son circulares, son las mismas como en aguas estancadas. ¿Por qué?

## Solución

El motivo es siguiente. Si el agua no se mueve, las olas son circulares. ¿El que cambie viene con la corriente? La corriente lleva cada punto de esta ola en la dirección, marcada por las flechas (Figura 47, a la izquierda), además, todos los puntos traspasan por las líneas paralelas con la misma velocidad, es decir, sobre las mismas distancias.

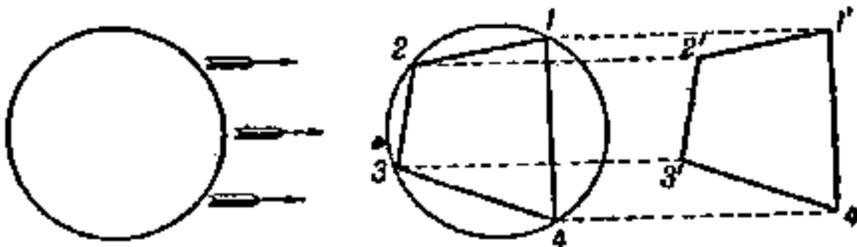


Figura 47. La corriente de agua no cambia la forma de las olas

“El traspaso paralelamente” no cambia la forma de una figura. Exactamente, al final de este traspaso el punto 1 (Figura 47, a la derecha) aparece un punto 1', el punto 2 en el punto 2',

y etc.; el tetrágono  $1\ 2\ 3\ 4$  se cambia por el tetrágono  $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ , los cuales son iguales, como podemos ver, toman las formas de los dos paralelogramos,  $1\ 2\ 2'\ 1'$ ,  $2\ 3\ 3'\ 2'$ ,  $3\ 4\ 4'\ 3'$  y etc. Tomando en la circunferencia más de cuatro puntos, obtenemos polígonos iguales; por fin, cogiendo una cantidad de puntos infinita, entonces, obtenemos una circunferencia. Por eso el movimiento del agua no cambia la forma de una ola, en el agua corriente ellas son círculos. La única diferencia es, que en la superficie de un estanco los círculos no se mueven (sin contar que ellos se divergen desde su centro); en la superficie de un río los círculos se mueven junto con su centro y con la misma velocidad de la corriente.

[Volver](#)

## 12. Un obús fantástico.

Problema

Empezaremos con la Problema, la cual parece no tiene ninguna relación con todo que estamos investigando, pero después, como los veremos, va en el mismo sentido.

Imaginaremos una bomba de obús, volando hacia arriba; comienza a bajar y de repente se hay una explosión; los cascos de metralla vuelan por todos partes.

Los cascos son esparcidos con la misma fuerza que vuelan, sin encontrar ninguna resistencia en el aire. Pregunta: ¿Qué destino forman los cascos pasado un segundo después de la explosión, antes de llegar a la tierra?

Solución

La Problema es semejante a la anterior, sobre los círculos en el agua. Pareciera que los cascos tienen que formar una figura, alargada hacia abajo, en el sentido de la caída; porque los cascos, lanzados hacia arriba, vuelan más despacio, que los lanzados hacia abajo.

No es difícil de demostrarlo, cuando los cascos de nuestra imaginada metralla tomen la forma de un globo. Imaginaremos en un segundo, que la gravitación no lo existe; entonces, por supuesto, todos los cascos durante un segundo se alejan una determinada distancia desde su centro explosivo, es decir, forman la superficie del globo. Y si ahora incluimos la gravitación, por su influencia los cascos deberían bajar; y como sabemos, que todos los cuerpos bajan con la misma velocidad<sup>1</sup>, entonces, los cascos durante en un segundo bajarán la misma distancia, y además, sobre las líneas paralelas. Por eso es que mantiene la misma forma, la de globo.

Así es, los cascos del obús fantástico deberían formar un globo, el que parece hincharse, en la medida que bajan con la velocidad de la caída libre.

[Volver](#)

## 13. La ola de quilla.

Volvemos otra vez al río. Estado en un puente, atentamente miraremos en el rastro dejado por un barco. Vamos a ver como de la proa se separan, sobre el ángulo, dos crestas de olas (Figura 48).

¿Por qué ellas aparecen? ¿Y por qué el ángulo entre ellas cuando es más agudo, más rápido va el barco?

Para tener más claridad en la causa de la aparición las dos crestas, volvemos otra vez a los círculos divergentes en superficie acuática, aparecidos por los pedruscos tirados.

Tirando al agua los pedruscos con cierto intervalo, podemos observar en la superficie unos círculos de tamaños diferentes; además el pedrusco tirado más tarde forma el círculo más pequeño. Y si tiramos los pedruscos a lo largo de una línea recta, entonces, los círculos formados en su conjunto aparecerán parecidos a las olas delante de la proa. Mientras más pequeño es el pedrusco tirado y mayor su frecuencia mayor será la semejanza. Hundiendo en el agua un palito y llevándolo sobre la superficie de agua, es como substituímos la caída

---

<sup>1</sup> Las diferencias se explican con la resistencia del aire, la que nosotros excluimos de esta Problema

los pedruscos irregulares por algo continuo y podemos reproducir la ola, la que vemos delante de la proa del barco.

Falta de añadir un poco para tener la claridad. Hundiéndose en el agua, la proa del barco en cada segundo forma la misma ola circular, como la piedra tirada.

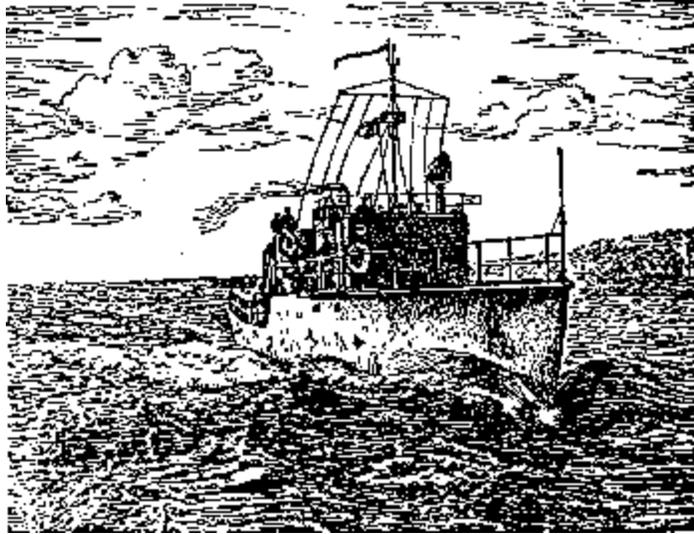


Figura 48. La ola de quilla

El círculo se aumenta, pero en este momento el barco tira para adelante y forma la otra ola circular, detrás de cual viene tercera, y etc. La formación irregular de los círculos, procedida por los pedruscos es substituida por su aparición continua, así como podemos ver en la Figura 49.

Encontrándose las crestas de olas vecinas se rompen una a otra: intocables son aquellas dos partes de la circunferencia, los que están en sus partes exteriores. Uniéndose, estas partes exteriores forman las dos crestas ininterrumpidas, teniendo la posición de los tangentes exteriores sobre todas olas circulares (Figura 49, a la derecha).

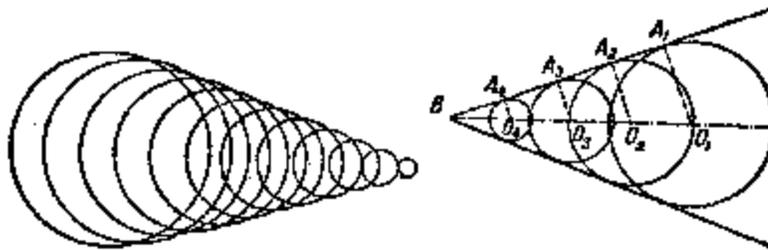


Figura 49. Como aparece la ola de quilla.

Así es como aparecen las crestas, las que los vemos detrás del barco, y detrás del cualquier cuerpo, moviéndose sobre la superficie de agua.

De aquí se ve, que este fenómeno es posible solamente cuando el cuerpo mueve *más rápido* que las olas del agua. Si llevamos el palito sobre el agua lentamente, entonces, no podemos observar las crestas: Las olas circulares están situadas una entre otra y, entonces será imposible trazar la tangente común.

Las crestas divergentes las podemos observar en otro caso, cuando el agua corre frente a un cuerpo parado. Si, la corriente del río es bastante rápida, entonces, las crestas aparecen en el agua, contorneando los pilares de un puente. Además esta forma de olas se ve con más

claridad, que aquellas que deja el barco, donde su forma no es perturbada por la acción de la hélice.

Aclarada esta acción geométrica, probamos a resolver otra Problema.

Problema

¿De qué depende la amplitud angular entre ambas ramas de la ola de quilla de un barco?

Solución

Dibujaremos desde el centro de las olas circulares (Figura 49, a la derecha) los radios hasta las partes correspondientes de la cresta rectilínea, es decir, hasta los puntos de la tangente general. Es fácil de comprender, que el  $OB$  es el camino, dejado por el barco durante de un tiempo, y  $OA$ , la distancia, hasta el cual en mismo tiempo se extendería la agitación.

La proporción  $OA / OB$ , es el seno del ángulo  $OBA$ , pero al mismo tiempo ésta es la proporción de las velocidades de la agitación y el barco. Entonces, el ángulo  $B$  entre la cresta, es como el doble ángulo, del cual el seno es igual a la proporción de la velocidad corriente de las dos olas circulares sobre la velocidad del barco.

La magnitud de la velocidad de las olas circulares en el agua, más o menos es igual para todos los barcos; por eso el ángulo de la divergencia de las ramas de la ola de la quilla depende, principalmente de la velocidad del barco: el seno de la mitad del ángulo casi siempre es proporcional de esta velocidad. Y, al contrario, por el tamaño del ángulo podemos determinar, en cuantas veces la velocidad del barco es mayor de la velocidad de las olas. Si, por ejemplo, el ángulo entre los ramos de una ola de quilla es  $30^\circ$ , como para la mayoría de los buques, entonces, el seno de su mitad (*seno*  $15^\circ$ ) es  $0,26$ ; es decir, la velocidad del barco es mayor que la de la corriente de las olas circulares en  $1/0,26$ , es más o menos en cuatro veces.

[Volver](#)

#### 14. La velocidad de los proyectiles.

Problema

Las olas, parecidas a las que acabamos de discutir, aparecen en el aire a través de una bala disparada o de un proyectil de artillería.

Existen muchas maneras de hacer las fotos de un proyectil volando; en la Figura 50 son dos imágenes reproducidas por los proyectiles, circulando no con la misma rapidez. En ambos dibujos claramente podemos ver lo que nos interesada a nosotros "la ola de cabeza" (como se llaman a ella en estos casos).

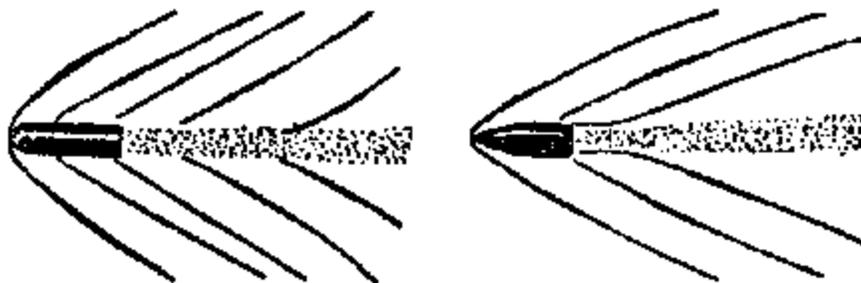


Figura 50. La ola de la cabeza en el aire, creada por un proyectil volado.

Su aparición es parecida a la ola de quilla de un barco.

Y aquí se utilizan las mismas proporciones geométricas: el seno de la mitad del ángulo de la separación de las olas de cabeza, es igual a la proporción de la velocidad de la agitación sobre la velocidad del proyectil volado. Pero la agitación en el aire se transmite con una

velocidad, cerca de la velocidad de sonido, es *330 metros / segundo*. Teniendo la foto de un proyectil volando, encontrar la aproximadamente su velocidad es fácil. ¿Cómo podemos encontrar para estos dos imágenes?

Medimos el ángulo de separación de las dos ramas de la ola de cabeza en la Figura 50.

En primer caso tiene  $\sim 80^\circ$ , en otro,  $\sim 55^\circ$ . Mitad de ellos es  $40^\circ$  y  $27\frac{1}{2}^\circ$ .

El  $\text{seno } 40^\circ = 0,64$ ,  $\text{seno } 27\frac{1}{2}^\circ = 0,46$ . Por lo tanto, la velocidad de agitación de la ola de aire, es decir, *330m*, es en el primer caso *0,64* de la velocidad del vuelo, y en el otro *0,46*. De aquí se desprende la velocidad de primer proyectiles

$$\frac{330}{0.64} = 520 \text{ metros/seg undo}$$

y del segundo:

$$\frac{330}{0,46} = 720 \text{ metros /segundo}$$

Como vemos, bastante simples razones geométricas, a parte de la ayuda de la física, podemos resolver la Problema, a primera vista muy complicada: por una foto de un proyectil volando podemos encontrar su velocidad en el momento. (Este cálculo es aproximado, por supuesto, porque no se han tenido en cuenta algunas circunstancias).

Problema

A quien desea, por su propia cuenta, hacer el calculo de la velocidad de unos núcleos, aquí lo tienen los tres imágenes de los proyectiles, volando con las velocidades distintas (Figura 51).

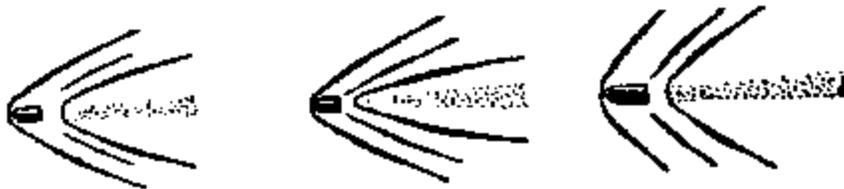


Figura 51. ¿Cómo encontrar la velocidad de los proyectiles?

[Volver](#)

### 15. La profundidad de un estanque.

Los círculos sobre la superficie de agua nos desviaron la atención hacia el asunto de la artillería. Volveremos otra vez junto al río y examinaremos una Problema hindú sobre una flor.

De viejos tiempos viene una tradición india, que es proponer una Problema en verso.

Problema

*Sobre un lago tranquilo,  
Tamaño del medio pie,  
se levantó la flor de una maravilla.  
Creció solita, sin familia.  
Y de repente vino aquel viento fuerte  
Que se llevo así, para atrás.  
No, no existe más flor,  
Pero no, la encontró un pescador  
durante los días de primavera nueva  
A dos pies del sitio natal  
Así lo tengo la Problema:  
¿Cuál es del lago la profundidad?*

Solución

Indicaremos (Figura 52) la profundidad buscada  $CD$  del estanque a través de  $x$ , después sobre el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$BD^2 - x^2 = BC^2,$$

Es decir

$$x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2^2$$

$$x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 4$$

$$x = 3\frac{3}{4}$$

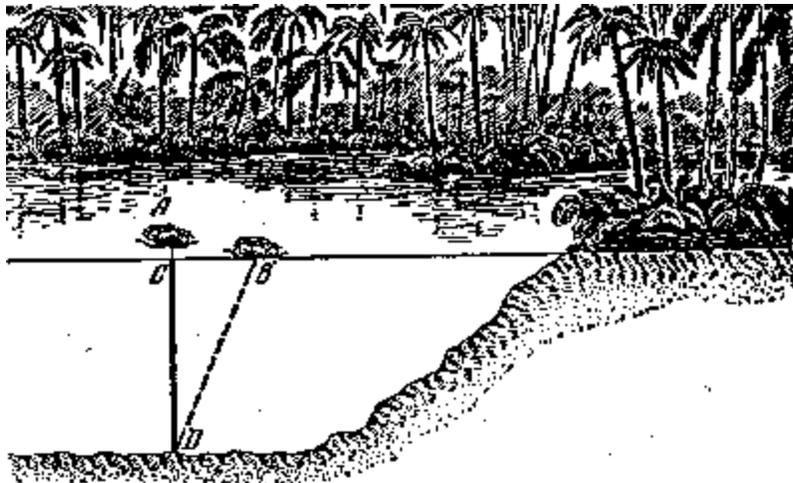


Figura 52. La Problema india sobre la flor de loto

Cerca de la orilla de un río o de un estanque no muy profundo podemos encontrar una planta acuática, la que deja un material real para una Problema semejante: sin ningún instrumento, sin mojarnos los pies y las manos, podemos encontrar la profundidad de un estanque en este sitio.

[Volver](#)

### 16. El cielo estrellado en el río.

El río por la noche tiene para nosotros una Problema. Recuerdo como Gogol tiene una descripción del Dnepro:

«Las estrellas brillan encima del mundo y todas juntas se reflejan en el Dnepro. A todas ellas tiene el Dnepro dentro de su seno: Ninguna puede escaparse, quizás, cuando se apague en el cielo.»»

Es cierto, cuando estás en la orilla de un río ancho parece que en el espejo acuático se refleja toda la cúpula de estrellas. ¿En realidad, es así? ¿Todas las estrellas se “reflejan” en el río?

Haremos un plano (Figura 53):

$A$  – el ojo del observador, estado en la orilla de río, cerca de lugar cortado al pico,  
 $MN$  – es la superficie de agua.

¿Cuales serán las estrellas que puede ver en agua el observador desde el punto  $A$ ?

Para contestar a esta pregunta, trazaremos desde el punto  $A$  una perpendicular  $AD$  hacia la recta  $MN$  y continuaremos en la misma dirección, hasta el punto  $A'$ . Si el ojo del observador está en el punto  $A'$ , él podrá ver solamente aquella parte del cielo, el cual esta dentro del ángulo  $BA'C$ .

El campo visual es lo mismo mirando desde el punto  $A$ . Las estrellas que están fuera de este ángulo, no puede ver; sus rayos reflejados pasan fuera del campo visual de sus ojos.

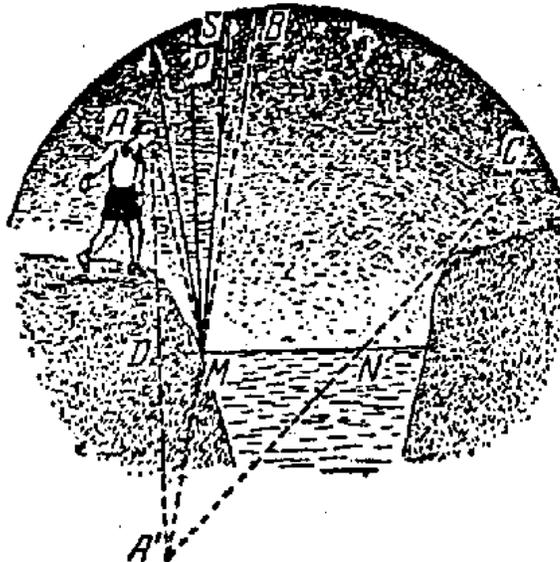


Figura 53. La parte del cielo estrellado que podemos ver estrellas en el agua

¿Cómo podemos asegurarnos? ¿Cómo demostrar, que, por ejemplo, la estrella  $S$ , que está fuera del ángulo  $BA'C$ , no puede verla nuestro observador en el espejo de río? Sigamos detrás de su rayo, cayendo cerca de la orilla en el punto  $M$ ; el se refleja, de acuerdo a las leyes de la Física, en un ángulo igual al ángulo de incidencia  $SMP$  y, por lo tanto, menor del ángulo  $PMA$  (es fácil de demostrarlo aprovechando la igualdad de los triángulos  $ADM$  y  $A'DM$ ); entonces, el rayo reflejado debería pasar de largo  $A$ . Además pasarán de largo de los ojos del observador los rayos de la estrella  $S$ , reflejadas en los puntos, situadas más distante del punto  $M$ .



Figura 54. En un río estrecho con las orillas bajas verlo en el espejo acuático de un río

Entonces, descripción de Gogol mantiene su vigencia: En el Dnepro no se reflejan todas estrellas, y tal vez menos de la mitad del cielo estrellado.

Además, lo curioso es que gran extensión del cielo estrellado no es visto en un río ancho. En el río más estrecho y con las orillas bajas podemos observar casi la mitad de cielo (es decir, más que en un río grande), sin inclinarnos cerca de agua.

Es fácil comprobar este asunto, haciendo la construcción de un campo visual. (Figura 54)

[Volver](#)

### 17. Un camino a través del río.

Problema

Entre los puntos  $A$  y  $B$  pasa el río (o un canal) con las orillas más o menos paralelas (Figura 55) Necesitamos construir a través del río un puente en ángulo recto con sus orillas. ¿Dónde tenemos que elegir el sitio para el puente, para que el camino desde  $A$  hasta el  $B$  sea más corto?



Figura 55. Donde debemos construir el puente para que el camino sea más corto

Solución

Pasando a través del punto  $A$  (Figura 56) una línea recta, perpendicular hacia el sentido de río y marcar desde el  $A$  el segmento  $AC$ , igual a la anchura del río, unimos  $C$  con  $B$ . Después en el punto  $D$  necesitamos construir el puente, para el camino desde el  $A$  hasta el  $B$  más corto.



Figura 56. El sitio elegido para la construcción está bajo ángulo recto sobre las orillas.

En realidad, construyendo el puente  $DE$  (Figura 57) y uniendo el  $E$  con el  $A$ , obtenemos el camino  $AEDB$ , donde la parte  $AE$  es paralela al  $CD$  ( $AEDC$ , es paralelogramo, así, como los lados enfrentados  $AC$  y  $ED$  son iguales y paralelos.) Por eso, el camino  $AEDB$  por su longitud es igual al camino  $ACB$ .

Es fácil demostrar que el cualquier otro camino va ser más largo. Supongamos que existiera otro camino  $AMNB$  (Figura 58) más corto que  $AEDB$ , es decir, más corto que  $ACB$ . Uniendo  $C$  con  $N$  vemos que  $CN$  es igual  $AM$ . Entonces, el camino

$$AMNB = ACNM.$$

Pero  $CNB$ , evidentemente, es más que  $CB$ ; entonces,  $ACNB$  es mayor que  $ACB$ , y por lo tanto, mayor que  $AECB$ . Así vemos que el camino  $AMNB$  no es más corto, es más largo que el camino  $AEDB$ .

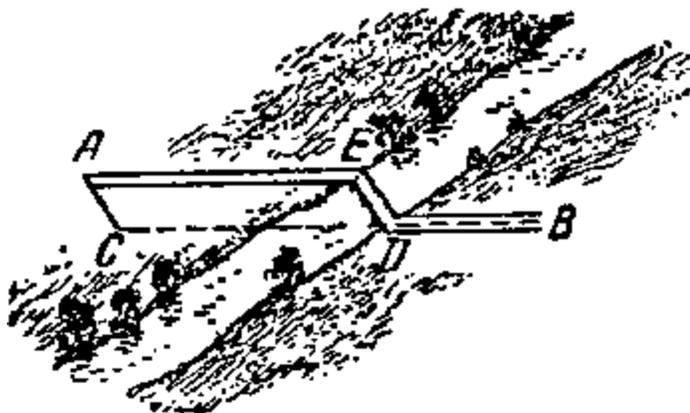


Figura 57. El puente había construido

Este razonamiento es aplicable a cualquier situación del puente, si coincide con  $CD$ ; o sea, el camino  $AEDB$  realmente es más corto.

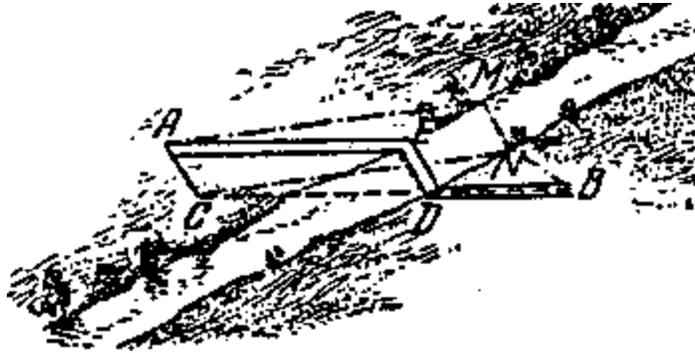


Figura 58. El camino AEDB – realmente es más corto

[Volver](#)

### 18. Construir dos puentes.

Problema

Probemos imaginar un caso más complicado, cuando necesitamos encontrar el camino más corto desde  $A$  hasta  $B$  a través del río, pero ahora cruzando doblemente el río bajo ángulo recto sobre las orillas (Figura 59) ¿En que sitios tenemos que construir los puentes?

Solución

Deberemos desde el punto  $A$  (Figura 59, a la derecha) trazamos el segmento  $AC$ , igual a la anchura del río en la primera parte y perpendicular a sus orillas. Desde el punto  $B$  se pasa el segmento  $BO$ , igual a la anchura del río en la segunda parte y también perpendicular a las orillas. Unir los puntos  $C$  y  $D$ . En el punto  $E$  se construye el puente  $ED$ , en el punto  $G$ , el puente  $GH$ . El camino  $AFEGHB$  es el camino buscado más corto desde el  $A$  hasta el  $B$ .

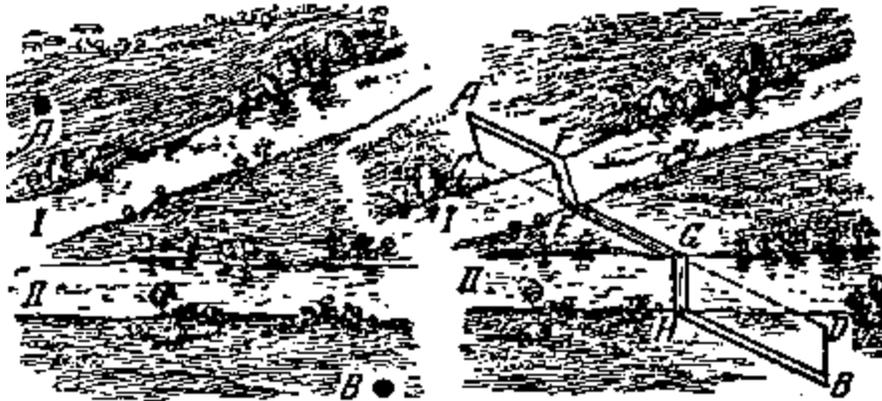


Figura 59. Los dos puentes construidos

Como puede ver el lector, se razona en forma semejante al ejemplo anterior.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE**



**CAPITULO TERCERO  
GEOMETRÍA A CAMPO RASO**

**Contenido:**

1. [Las medidas visuales de la Luna.](#)
2. [El ángulo visual](#)
3. [Un plato y la Luna.](#)
4. [La Luna y las monedas.](#)
5. [Las fotos sensacionales.](#)
6. [El transportador vivo.](#)
7. [Báculo de Yakov.](#)
8. [Goniómetro de rastrillo.](#)
9. [El ángulo del artillero.](#)
10. [La agudeza de nuestra vista.](#)
11. [La Luna y las estrellas sobre el horizonte.](#)
12. [Cual es la longitud de la sombra lunar y de la sombra de estratóstato.](#)
13. [¿En que altura están las nubes?](#)
14. [La altura de una torre en la foto.](#)
15. [Para los ejercicios independientes.](#)

**1. Las medidas visuales de la Luna.**

¿De qué tamaño os parece la Luna llena? De cada persona podemos recibir un par de respuestas diferentes sobre esta pregunta.

La Luna del tamaño "un plato", "una manzana", "la cara de una persona" y etc. Las opiniones bastante indefinidas e inciertas, las cuales justifican solamente que la gente no le entienden el fondo de la cuestión.

La respuesta correcta sobre esta pregunta tan habitual la puede dar aquella persona que sabe sobre el "aparente" o "visible" tamaño del objeto. Pero nadie sospecha, que aquí se trata de un valor de un ángulo, precisamente aquel que se forma con dos líneas rectas, trazadas desde el ojo hasta los puntos extremos del objeto observado; Este ángulo se llama el "ángulo visual", o el "tamaño angular del objeto" (Figura 60).

Y cuando el tamaño aparente de Luna en el cielo se evalúa, comparando con el tamaño de un plato, de una manzana y etc., entonces, las respuestas no tienen ningún sentido y deberían significar que la Luna se ve bajo el mismo ángulo visual que un plato o una manzana. Pero esta indicación por si mismo no es suficiente: un plato o una manzana los observamos bajo ángulos distintos en según su alejamiento: cerca, con un ángulo grande, lejos, con un más pequeño. Para tener la claridad, es necesario indicar desde cuál distancia se observa un plato o una manzana.

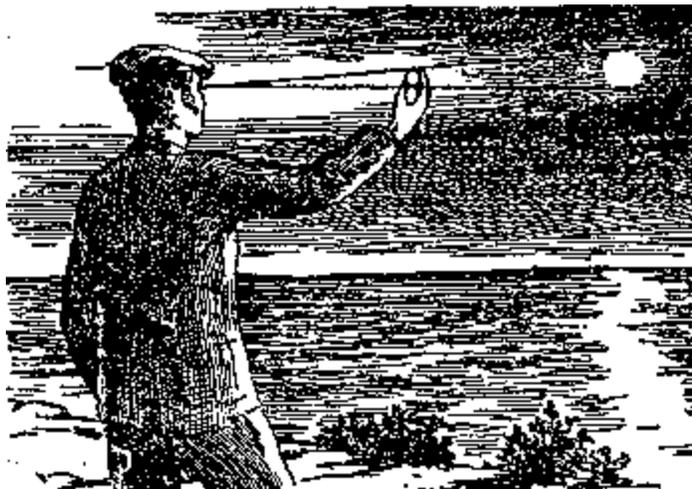
Comparar los tamaños de los objetos lejanos con el tamaño de los otros sin decir la distancia es el método literario, el que usan los escritores clásicos. El que impresiona gracias a su intimidad con la psicología de la mayoría de las personas, pero no produce ninguna imagen clara.

Un buen ejemplo es del "Rey Lear" de William Shakespeare; descripción (por Edgar) de una vista desde una escarpadura muy alta sobre del mar:

*¡Que miedo!  
 ¡Me mareo! Es demasiado abajo tirar sus miradas...  
 Chovas y cuervos, rizando por el medio,  
 Parezcan es poco probable tan grandes  
 como las moscas por el medio abajo,  
 Una persona colgada, cogiendo las hierbas del mar...*

*¡Que terrible oficio!  
 A mí me parece no es más grande que su cabeza.  
 Los pescadores, andan por la marina,  
 Como ratones; y aquel barco grande  
 Había disminuido al tamaño de su lancha;  
 Su lancha, un punto flotado,  
 Es demasiado pequeña para la vista...*

Estas comparaciones dejarían una idea más clara sobre la distancia, si estuvieran acompañados con las indicaciones sobre el grado de alejamiento a los objetos comparables (moscas, cabeza de una persona, ratón, lancha...). Es lo mismo para compararlo el tamaño de Luna con un plato o una manzana, necesitamos indicaciones, como lejos del ojo deben estar estos objetos.



*Figura 60. Qué es el ángulo visual*

La distancia resulta demasiado grande, como pensamos. Teniendo la manzana en la mano estirada, tapamos no solo la Luna si no también la parte del cielo. Sobre un hilo colgaremos la manzana y alejándose poquito a poco hacia atrás, hasta que ella no tape el disco lleno de Luna: En esta posición la manzana y la Luna van a tener para nosotros el mismo tamaño visual. Midiendo la distancia desde el ojo hasta manzana, nos daremos cuenta que es mas o menos *10 metros*. ¡Así tenemos que alejar la manzana, para que de verdad se aprecie del mismo tamaño con la Luna en el cielo! Un plato tiene que alejar hasta mas o menos *30 pasos*.

Lo dicho parecerá increíble a quien lo escucha por la primera vez, además se deduce que la Luna es observada por nosotros bajo del ángulo visual solamente de un medio grado.

Valorar los ángulos en la vida cotidiana casi no hace falta, y por eso, la mayoría de gente tiene una imagen indefinida sobre la cantidad de los ángulos, por ejemplo, el ángulo de  $1^\circ$ , de  $2^\circ$  o de  $5^\circ$  (sin hablar de los agrimensores y otras especialidades de las que necesitan medir los ángulos en la práctica). Solo los ángulos grandes los fijamos mas o menos verdaderamente.

Si comparamos con los punteros del reloj, todos conocerán los ángulos de  $90^\circ$ , de  $60^\circ$ , de  $30^\circ$ , de  $120^\circ$  y de  $150^\circ$ , cuales acostumbramos de verlo cada día en esfera del reloj (a las 3.00, a la 1.00, a las 2.00, a las 4.00, a las 5.00), hasta que sin numeración podemos adivinar la hora a través del ángulo entre las agujas. Pero a los objetos pequeños, habitualmente los miramos bajo de un ángulo demasiado pequeño y por eso no los sabemos valorar a simple vista.

[Volver](#)

## 2. El ángulo visual

Deseando encontrar un ejemplo práctico con el ángulo de un grado, calcularemos cuanto debe de alejarse la persona de estatura mediana (1,7 metros), para aparecer bajo del este ángulo. Traduciendo en la lengua geométrica, digamos, necesitamos encontrar el radio de una circunferencia, cuyo arco de  $1^\circ$  *equivalga a 1,7 metros* (mejor dicho la cuerda, pero para los ángulos pequeños la diferencia entre el arco y la cuerda es insignificante).

Razonamos así: Si el arco  $1^\circ$  es de *1,7 metros*, entonces, la circunferencia total, teniendo  $360^\circ$ , va a tener la longitud  $1,7 \times 360 = 610$  *metros*, el radio es  $2\delta$  veces menor que la longitud de la circunferencia; si el numero  $\delta = 3,1416$ , entonces el radio será

$$\text{radio} = \frac{1,7 \times 360}{2\pi} = \frac{610}{2 \times 3,1416} \approx 97 \text{ metros}$$



Figura 61. La figura de una persona se observa desde cien metros de longitud bajo el ángulo de 1 grado

Así pues, la persona aparece bajo el ángulo de  $1^\circ$ , si entre nosotros hay una distancia de aproximadamente *100 metros* (Figura 61). Si él se aleja al doble veces hacia atrás, *200 metros*, le observaremos bajo un ángulo de medio grado; si se acerca a *50 metros*, entonces, el ángulo visual crece hasta  $2^\circ$  y etc.

No es difícil de calcular también, que un palo a *1 metro* de longitud, tiene que presentarse a nosotros bajo un ángulo de  $1^\circ$  a una distancia de *57 metros*.

Bajo de mismo ángulo observamos *un centímetro* a la distancia de *57 centímetros*, *un kilómetro* a una distancia *57 kilómetros* y etc. y por lo tanto, cualquier objeto a una distancia *57 veces* mayor que su diámetro. Si recordamos este número, *57*, entonces, podemos hacer los cálculos muy rápidos del tamaño angular del objeto.

Por ejemplo, si deseamos saber, a qué distancia tenemos que alejar la manzana, con diámetro de *9 centímetros*, para poder ver a ella bajo el ángulo de  $1^\circ$ , entonces basta multiplicar  $9 \cdot 57 = 510$  *centímetros*, mas o menos *5 metros*; desde el doble de la distancia, la observaremos bajo la mitad del ángulo, de medio grado, es decir, concordante con el tamaño de la Luna.

Podemos hacer lo mismo con cualquier otro objeto y calcular la distancia sobre la que aparece del mismo tamaño que la Luna.

[Volver](#)

### 3. Un plato y la Luna.

Problema

¿A qué distancia tenemos que alejar un plato con el diámetro de *25 centímetros*, para que el plato parezca del mismo tamaño que la Luna en el cielo?

Solución

$25 \text{ centímetros} \cdot 57 \cdot 2 = 28 \text{ metros}$ .

[Volver](#)

### 4. La Luna y las monedas.

Problema

Deberemos que hacer el mismo cálculo para una moneda (con diámetro de *25 milímetros*) o para moneda con diámetro de *22 milímetros*.

Solución

$$0,025 \text{ metros} \cdot 57 \cdot 2 = 2,9 \text{ metros}$$

$$0,022 \text{ metros} \cdot 57 \cdot 2 = 2,5 \text{ metros}$$

Si os parece increíble, que la Luna aparece al ojo no más grande que una moneda desde la distancia al cuatro pasos o un lápiz sobre la distancia *80 centímetros*, mantenemos el lápiz en la mano estirada enfrente el disco de la Luna llena: él tapa a ella mas que suficiente. ¡Y no es extraño, que el objeto más adecuado para comparar con la Luna, en sentido de los tamaños aparentes, no es un plato ni una manzana o una cereza, es un guisante o lo mejor, la cabeza de una cerilla!

Comparación con un plato o con una manzana presupone un alejamiento bastante grande; una manzana en la mano o un plato encima de la mesa los observamos en diez ó veinte veces más grande que el disco de la Luna. Y solo la cabeza de una cerilla, la que observamos a la distancia de *25 centímetros* desde el ojo ("la distancia visual clara"), en realidad vemos bajo un ángulo de medio grado, es decir, con el mismo tamaño de la Luna. Es un de los más curiosos engaños de la vista, cuando el crecimiento en 10 ó 20 veces al disco de la Luna toma el carácter ilusorio para la mayoría de la gente. Él depende, tenemos que pensar, mas que todo de la *brillantez* de la Luna: La Luna llena se ve en el fondo del

cielo más penetrante, que los platos, las manzanas, las monedas y otros objetos entre medio ambiente<sup>1</sup>.

Esta ilusión nos persigue irresistiblemente, hasta que los pintores, distinguidos por su muy buena vista, ceden a esta ilusión como la mayoría y pintan en sus cuadros la Luna llena más grande de lo que debe. Lo suficiente es comparar el paisaje, pintado por un pintor, con su imagen fotográfica, para asegurarse finalmente.

Lo dicho corresponde también al Sol, un astro que observamos desde la Tierra bajo un medio grado; aunque el radio verdadero del globo solar es en 400 veces mayor que la luna, pero su alejamiento desde nosotros también mayor en 400 veces.

[Volver](#)

## 5. Las fotos sensacionales.

Para explicar la gran importancia que tiene el ángulo visual, dejaremos por un momento el tema directo, la geometría a campo raso, y haremos un par de ejemplos del tema de la fotografía.

En el cine, evidentemente, vimos muchas catástrofes, como por ejemplo, el choque dos trenes o las escenas muy curiosas, como el coche que pasa por el fondo del mar.

Recordaremos la película "Los Niños del Capitán Grant" (Julio Verne). ¡Que impresión!

¿Verdad?

Viendo las escenas del hundimiento barco durante la tormenta o la escena de los cocodrilos alrededor del chico, encontrándose en el pantano. Nadie, posiblemente, ha pensado, que las todas escenas parecidas son rodajes verdaderos. ¿Pero como se obtienen?

El secreto se abre con ayuda de las imágenes siguientes. En la Figura 62, podemos ver una "catástrofe", un tren de juguete dentro de una situación de "mentira"; En la Figura 63, un coche de juguete, enganchado por un hilo se mueve detrás del acuario. Esto es toda la "naturaleza", sobre la que estaba rodeada la película. ¿Por qué viendo estos rodajes en la pantalla, nos persigue la ilusión, nos parece que tenemos delante de nosotros un tren y un coche de verdad?



Figura 62. Preparación de la catástrofe de ferrocarril para un rodaje.

Aunque aquí en las fotos inmediatamente notamos sus tamaños de miniatura, además no es necesario comparar con los tamaños de otros objetos. Por una simple razón: El tren y el coche se filmaron de una distancia muy cercana; Por eso ellos se presentan para nosotros

<sup>1</sup> Por la misma razón el hilo incandescente de una bombilla eléctrica, les parece mucho más ancho, que en un estado frío y apagado.

bajo del mismo ángulo visual, como los observamos los coches y los trenes en su tamaño real. Esto es el todo secreto de ilusión.

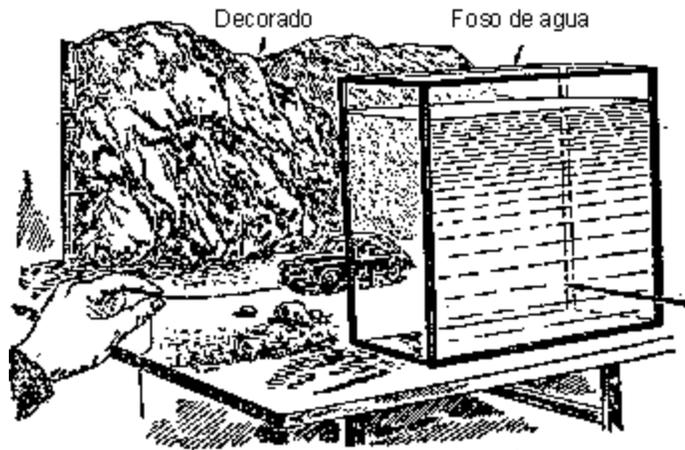


Figura 63. Un paseo por el fondo del mar.

Una imagen más, de la película " Ruslan y Ludmila" (Figura 64). Una cabeza enorme y el Ruslan pequeño montando el caballo. La cabeza está situada en el campo de maqueta, cerca del aparato de filmación. Y el jinete a una distancia bastante lejana. Ese es todo el secreto de la ilusión.

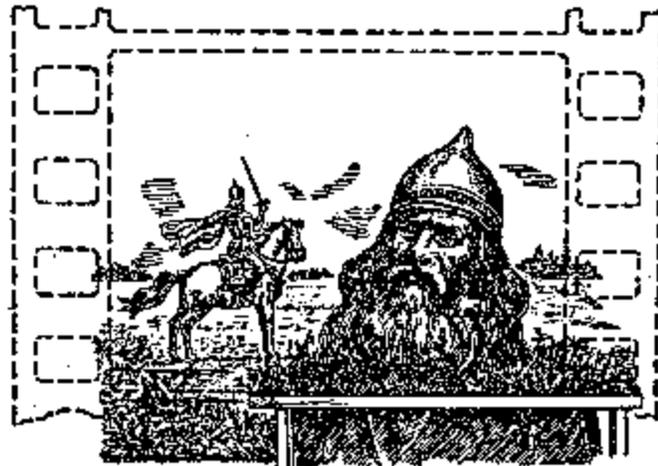


Figura 64. Una imagen de película "Ruslan y Ludmila"

La Figura 65 presenta otra imagen de la ilusión, el principio tiene el mismo sentido. Vimos unos paisajes muy extraños, recuerden la naturaleza de los tiempos paleolíticos: Los árboles muy raros, parecidos a los musgos gigantes, encima de ellos unas gotas de agua gigantescas, en el primer plano, un monstruo grande, sin embargo, teniendo la analogía con un inofensivo milpiés. Sin tener en cuenta un aspecto bastante extraño, el dibujo es de la realidad: es solamente un terreno no muy grande de bosque bajo un ángulo visual extraordinario. Nosotros nunca podemos ver los tallos de musgos, las gotas de agua, los milpiés y etc. bajo un ángulo visual tan grande, por eso la foto nos parece bastante extraña y desconocida. Enfrente de nosotros hay un paisaje, el que podemos ver, si disminuimos hasta el tamaño de una hormiga.



Figura 65. Un terreno misterioso, reproducido de la naturaleza

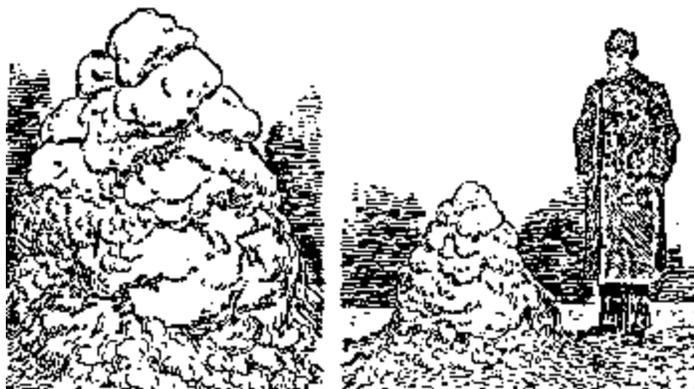


Figura 66. Una montaña de nieve en la foto (a la izquierda) y en realidad (a la derecha).

Al lado una imagen de aquellas "montañas", la que impresiona mucho (Figura 66, a la izquierda).

Al fin, la situación se aclara: para la foto sirvió un montículo de nieve, hecho por el fotógrafo humorista, tomado desde una distancia bastante cercana, es decir, bajo de un ángulo insólitamente grande (Figura 66, a la derecha).

[Volver](#)

## 6. El transportador vivo.

Preparar un aparato goniométrico es bastante fácil, aún más cuando podemos utilizar el transportador. Pero el goniómetro hecho a mano tampoco puede estar siempre con nosotros. En esos momentos es cuando podemos aprovechar el "goniómetro vivo", el que siempre está con nosotros. Son nuestros propios dedos. Para obtener una idea aproximada los ángulos visuales, antes tenemos que hacer algunas mediciones y cálculos.

Primero, hay que saber bajo qué ángulo visual vemos la uña del dedo índice de la mano estirada hacia delante.

Habitualmente, la anchura de la uña, *1 centímetro*, a una distancia desde el ojo de unos *60 centímetros* la vemos bajo un ángulo de más o menos,  $1^\circ$  (un poco menos, por que el ángulo de  $1^\circ$  corresponde a una distancia de *57 centímetros*). Un adolescente tiene la uña

más pequeña, pero el brazo y la mano más pequeños, entonces, su ángulo visual, es el mismo de  $1^\circ$ .

Algunos lectores saben cómo podemos hacer nuestras propias mediciones y cálculos, para asegurarse si no hay gran diferencia entre los resultados de  $1^\circ$ . Si la diferencia es grande, tiene que probar otro dedo.

Sabiendo esto, tenemos a nuestra disposición el modo de valorar los pequeños ángulos visuales solamente con las manos. El cualquier objeto lejano, el que tapa la uña del dedo índice de la mano estirada, lo vemos bajo un ángulo de  $1^\circ$ , y por lo tanto, apartado en 57 veces diámetro. Si la uña solo tapa la mitad del objeto, entonces, su valor angular es  $2^\circ$ , la distancia es igual a 28 veces su diámetro.

La Luna llena tapa solamente la mitad de la uña, es decir, vemos bajo del medio grado, entonces, la distancia entre ella y nosotros es 114 veces su diámetro; ¡Es uno de las más valoradas mediciones astronómicas, realizada solamente con las manos!

Para los ángulos más grandes utilizaremos la articulación del pulgar, teniéndole *doblado* sobre la mano estirada. Una persona mayor tiene longitud de esta articulación de  $\sim 3\frac{1}{2}$  centímetros, la distancia entre el ojo y la mano estirada,  $\sim 55$  centímetros. Es fácil de calcular, que su valor angular en esta posición tiene que ser  $4^\circ$ . Esto es nuestro medio de valorar los ángulos visuales de  $4^\circ$  (también y de  $8^\circ$ ).

Añadimos dos ángulos más, los que pueden ser medidos por los dedos, son aquellos espacios entre los dedos:

- 1) entre el mediano y el índice, separados más posible;
- 2) entre el pulgar y el índice, también separados.

No es difícil de calcular; el primer ángulo es más o menos  $7^\circ$  a  $8^\circ$ , el segundo,  $15^\circ$  a  $16^\circ$ . Durante un paseo podemos utilizar nuestro goniómetro vivo. Por ejemplo, a lo lejos vemos un vagón de mercancías, el que está tapado por la mitad de articulación del pulgar sobre la mano estirada, es decir, lo vemos bajo ángulo de  $\sim 2^\circ$ . Como ya lo sabemos la longitud del vagón ( $\sim 6$  metros), entonces, es fácil encontrar la distancia entre nosotros:

$$6 \times 28 = 170 \text{ metros.}$$

Evidentemente, la medición es aproximada, pero es mejor que un valor infundado.

A lo largo del libro enseñaremos también un modo como construir sobre un terreno los ángulos rectos, aprovechando nuestro cuerpo.

Si necesitamos pasar a través de un punto la perpendicular hasta un punto dado, colocándose en este punto sobre la línea indicada, *sin mover la cabeza*, ligeramente estiramos la mano sobre el sentido, donde deseamos pasar el perpendicular. Después de, solevantar el pulgar de la mano estirada, hacemos girar la cabeza hacia él y fijamos la vista en un objeto, un pedrusco, un arbusto y etc., el que se tapa por el pulgar, mirando con el ojo apropiado (es decir, el ojo derecho, cuando la mano estirada es la derecha, y el izquierdo, cuando la izquierda).

Solamente marca sobre la tierra la línea recta allí donde estabamos, hasta el objeto notado, esa es la perpendicular buscada. El modo, parece no tener buenos resultados, pero después de varios ejercicios aprenderemos aprovechar la "escuadra viva".

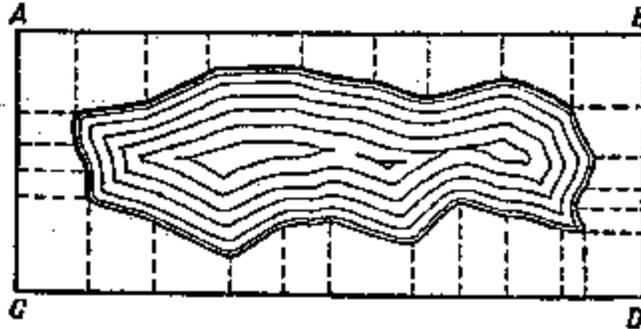


Figura 67. Trazado de un plano del lago.

Luego utilizando la "escuadra viva", podemos sin otros medios, medir la altura angular de las estrellas sobre el horizonte, alejamiento de las estrellas entre la medida gradual, los caminos de fuego dejados por los meteoritos y etc.

Y por fin, sabiendo construir sin ningún aparato a los ángulos rectos podemos preparar el plano de un terreno, la idea de cual se ve en la Figura 67. Por ejemplo, para trazar un plano del lago se mide el rectángulo  $ABCD$ , también las longitudes de los perpendiculares, bajados desde los puntos notados en la orilla, y los trayectos de sus fundamentos desde los vértices del triángulo. Mejor dicho, estado en la situación de Robinson Crusoe, saber usar nuestras propias manos para medir los ángulos (y con los pasos, las distancias) puede ser útil para cualquier tipo de necesidades.

[Volver](#)

### 7. Báculo de Yakov.

Si deseamos tener unos aparatos mejores al anteriormente descrito, como la "escuadra viva" para medir los ángulos, podemos preparar un aparato bastante simple y muy cómodo, a veces en otro tiempo aprovechado por nuestros abuelos. Está llamado por el nombre de un inventor "báculo de Yakov", el aparato utilizado por los navegantes hasta el siglo XVIII (Figura 68).

El aparato había construido con una regla larga  $AB$ , de 70 a 100 centímetros, sobre cual puede deslizarse una tablilla perpendicular  $CD$ ; donde ambas partes  $CO$  y  $OD$  de la tablilla son iguales.

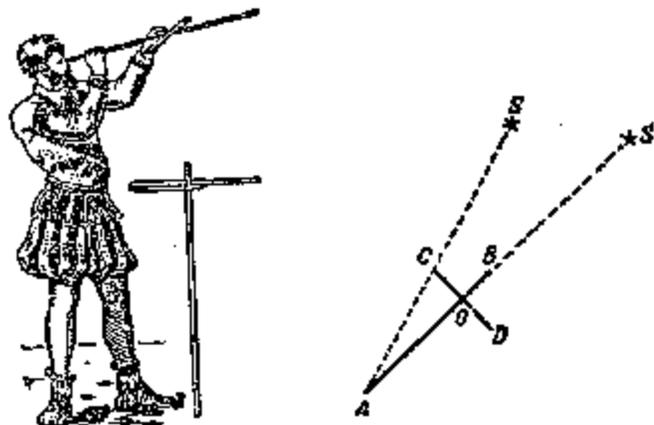


Figura 68. Báculo de Yakov y esquema de uso.

Si deseamos medir el trayecto angular entre las estrellas  $S$  y  $S'$  (Figura 68) con la ayuda de este aparato, entonces acercaremos el extremo  $A$  de la regla (para comodidad de

observación le hacemos un agujero) y apuntaremos la regla de modo que la estrella  $S'$  sea vista sobre el extremo  $B$  de la regla; después trasladamos la tablilla  $CD$  a lo largo de regla hasta que la estrella  $S$  sea vista sobre el extremo  $C$  (dibujo N68). Ahora solo queda por medir el trayecto  $AO$ , sabiendo la longitud  $CO$ , calcular el valor angular de  $SAS'$ . Quien conoce de trigonometría habrá notado que la tangente del ángulo buscado es igual a la proporción

$$\frac{CO}{AO}$$

Nuestra "trigonometría de champaña", explicada en el capítulo quinto, también es suficiente para hacer el cálculo; calcularemos  $AC$  por el teorema de Pitágoras la longitud  $AC$ ,  $CO$  Después encontremos el ángulo, mediante el seno

$$\frac{CO}{AC}$$

Por fin podemos saber el ángulo buscado por el camino gráfico: construyendo el triángulo  $ACO$  en el papel a una escala voluntaria, medimos el ángulo  $A$  con el transportador, si no le tenemos, entonces, usaremos el modo descrito en nuestra "trigonometría de campaña" (ver el capítulo quinto).

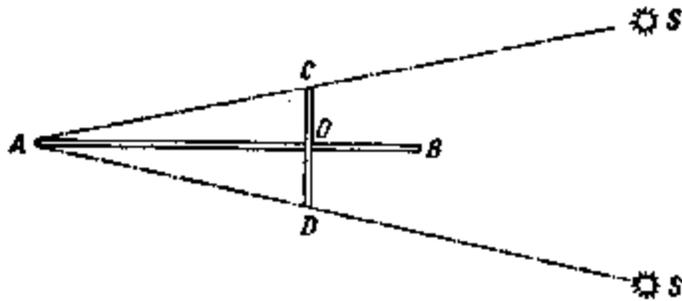


Figura 69. La medición del trayecto angular entre las estrellas con la ayuda de báculo de Yakov.

¿Para que necesitamos la otra mitad de la traviesa? Cuando el ángulo es demasiado grande, y no podemos medir por el camino explicado ahora, entonces apuntaremos sobre la estrella  $S'$  no la regla  $AB$ , si no la regla  $AD$ , moviendo la tablilla hasta que cuando su extremo  $C$  esté sobre la estrella  $S$  (Figura 69). Entonces es fácil encontrar el valor del ángulo  $SAS'$  ya sea calculando o construyendo.

Para no hacer los cálculos y las construcciones después de cada medición, es mejor hacerlos antes, durante la preparación del aparato y marcar los resultados sobre la regla  $AB$ ; Luego apuntando el aparato sobre las estrellas, leemos solamente el dato anotado sobre el punto  $O$ , que es el valor del ángulo buscado.

[Volver](#)

### 8. Goniómetro de rastrillo.

Más fácil de preparar es este otro aparato para medir el tamaño angular, se llama "Goniómetro de rastrillo", porque en realidad parece un rastrillo (Figura 70). Su parte principal, la tablilla es de cualquier forma, junto un borde se fija un disco agujereado; donde el observador acerca su ojo. Junto al borde de enfrente se clavan los alfileres finos, donde los espacios entre ellos miden  $1/57$  veces su distancia al agujero en el disco.

Nosotros ya sabemos que cada espacio se observa bajo un ángulo de  $1^\circ$ . Podemos también colocar los alfileres siguiendo otro modo, donde es posible tener un resultado más exacto; sobre de una pared se delinear dos rectas paralelas separadas a un metro entre ellas, se aleja sobre una perpendicular hasta *57 metros*, observan estas líneas a través del agujero del disco; los alfileres colocan de modo que cada pareja los alfileres vecinos tapan las líneas dibujadas en la pared.

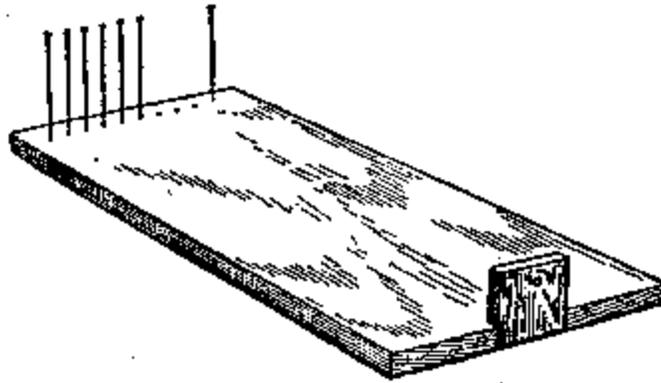


Figura 70. Goniómetro de rastrillo

Cuando los alfileres están colocados, podemos quitar algunos de ellos, para tener los ángulos de  $1^\circ$ , de  $3^\circ$ , de  $5^\circ$ . La manera de utilizar este Goniómetro, evidentemente, la entiende cualquier lector sin ninguna explicación. Con alguna experiencia, podemos medir los ángulos visuales con bastante exactitud, no menos que  $\frac{1}{4}^\circ$ .

[Volver](#)

### 9. El ángulo del artillero.

Un artillero no dispara "a ciegas".

Sabiendo la altura del punto donde se dirige el tiro, busca su valor angular y calcula el trayecto hasta el punto; En otro caso busca, el ángulo que debe mover el arma para hacer los disparos de un objeto al otro.

Estas tareas las soluciona muy rápido y además, mentalmente. ¿De qué manera?

Fijémonos en la Figura 71.

$AB$ , es el arco de la circunferencia con el radio  $OA = D$ ;  $ab$ , es el arco de circunferencia con el radio  $Oa = r$ .

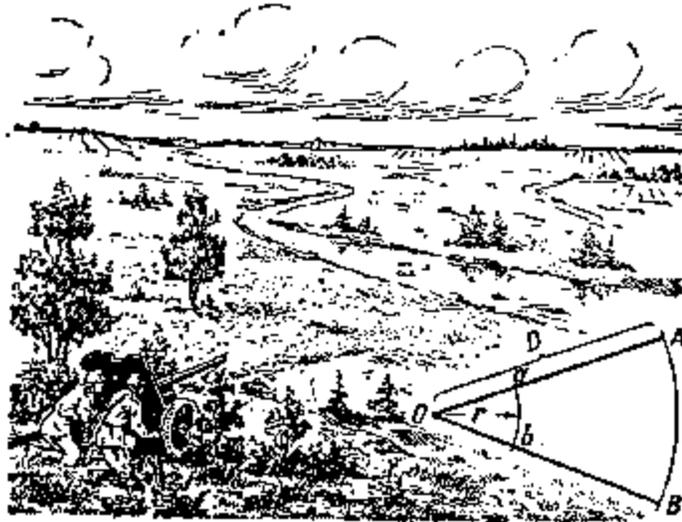


Figura 71. Esquema del transportador al artillero.

Por la semejanza de los sectores AOB y aOb se deduce:

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r}$$

$$AB = \frac{ab}{r} D$$

La proporción  $\frac{ab}{r}$  caracteriza el valor del ángulo visual AOB; sabiendo esta proporción, es fácil de encontrar AB si se conoce D, o D si se conoce AB.

Los artilleros se facilitan los cálculos, dividiendo la circunferencia no en  $360^\circ$  partes, como normalmente, si no sobre los 6.000 arcos iguales, entonces la longitud de cada uno es más o menos 1/1000 del radio de circunferencia.

En la realidad, por ejemplo, el arco AB del círculo goniométrico O (Figura 71) se muestra una unidad de división; la longitud de toda circunferencia es

$$2\pi r \approx 6r$$

$$ab = \frac{6r}{6000} = \frac{1}{1000} r$$

En la artillería su nombre es "milésimo". Entonces,

$$AB = \frac{0,001r}{r} D = 0,001D$$

Para saber a qué distancia AB sobre el terreno corresponde a una división de goniómetro (al ángulo de una "milésima") es suficiente separar con la coma de la derecha a los tres dígitos. Por el teléfono o radio entregan los datos o comandos y el numero de "milésimas": pronuncian como un número de teléfono, por ejemplo: el ángulo de 150 "milésimas" dicen: "Uno cero cinco", y anotan:

$$1 - 05;$$

El ángulo de 8 "milésimas" dicen: "cero cero ocho", y anotan:

$$0 - 08.$$

Ahora sin ninguna dificultad, resolveremos la tarea siguiente.

#### Problema

Un carro de combate ve desde el arma antitanque bajo ángulo de  $0 - 05$ . Encontrar la distancia hasta al tanque; tomaremos su altura como  $2$  metros.

#### Solución

$5$  divisiones de goniómetro =  $2$  metros,  
 $1$  división de goniómetro =  $2 / 5 = 0,4$  metros.

Como una división del goniómetro es una milésima parte del alejamiento, entonces la longitud será mil veces mayor, es decir

$$D = 0,4 \cdot 1000 = 400 \text{ metros.}$$

Si, por el momento, el comandante o el soldado no tiene instrumentos goniométricos, entonces se usa la palma, los dedos o otros medios como los descritos anteriormente (ver "el transportador vivo"). El artillero debe saber solamente su "valor" no con los grados, sino, con "milésimas". Estos son los "valores" aproximados en "milésimas" de los ángulos:

La palma de mano	1 - 20
El dedo medio, índice o anular	0 - 30
Lápiz (anchura)	0 - 12
Cerilla por su longitud	0 - 75
Cerilla por su anchura	0 - 03

[Volver](#)

### 10. La agudeza de nuestra vista.

Acostumbrándose al concepto del valor angular de un objeto, podemos ahora entender cómo medir la agudeza visual, y hacer por su propia cuenta las mediciones.

Dibujaremos en un papel veinte líneas negras iguales de longitud de  $5$  centímetros y de  $1$  milímetro de anchura de modo que su forma sea un cuadrado (Figura 72).

Fijando el dibujo en una pared luminosa, nos alejaremos hasta que las líneas se unen en un fondo gris. Medimos la distancia y calculamos, ya lo sabemos cómo, el ángulo visual, bajo el cual no podemos distinguir las líneas de  $1$  milímetro de anchura. Si este ángulo es  $1'$  (un minuto), entonces, nuestra agudeza visual es normal; si es tres minutos, la agudeza es  $1/3$  de lo normal y etc.

#### Problema

Las líneas de la Figura 72 se unen para nuestro ojo a una longitud de  $2$  metros. ¿Es normal la agudeza visual?

#### Solución

Sabemos, que desde la distancia de  $57$  milímetros la línea con la anchura de  $1$  milímetro se ve bajo un ángulo de  $1^\circ$ , es decir,  $60'$ . Por lo tanto, desde la distancia de  $2000$  milímetros ella se ve bajo ángulo  $x$ , el que sale de la proporción

$$x : 60 = 57 : 2000,$$

$$x = 1,7'$$

La agudeza visual es bajo de lo normal:  $1 : 1,7 =$  aproximadamente  $0,6$ .

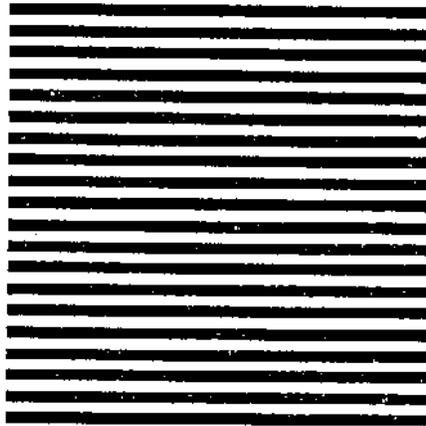


Figura 72. Para medir la agudeza visual.

#### Minuta máxima

Hemos dicho que las líneas observadas bajo un ángulo visual de al menos un minuto, no se pueden distinguir separadas con un ojo normal. Esta aseveración es también correcta para cualquier otro objeto: hablando de cualquier contorno de un objeto observado, si se ve bajo un ángulo menor que  $1'$ , no lo puede distinguir un ojo normal.

Cada un objeto se convierte en un punto "bastante pequeño para la vista" (Sheakespeare), en la partícula de polvo sin tamaño y sin forma. Es una de las propiedades del ojo humano: un minuto angular es el límite de su agudeza. ¿Por qué motivo? esta es otra pregunta que debe ser tratada por la física y la fisiología de la vista. Aquí hablamos, solamente de la parte geométrica de este fenómeno.

Todo lo que estamos hablando, corresponde a los objetos cercanos, pero demasiado pequeños. Nosotros no podemos distinguir la forma de una partícula del polvo, estado en el aire: alumbradas por los rayos del sol, ellas se presentan para nosotros como unos pequeños puntillos, aunque en la realidad tienen formas distintas.

Nosotros tampoco podemos distinguir los pequeños detalles de un insecto, porque los vemos bajo un ángulo menor de  $1'$ . Por la misma razón no podemos sin telescopio ver los detalles en la superficie de la Luna, de los planetas y de los otros astros.

El mundo se podría presentar para nosotros totalmente distinto, si el límite de la vista natural se aumentara.

Una persona teniendo él límite de agudeza visual,  $1'/2$  por ejemplo, podrá observar el oriente medio más profundo y más lejos. Una muy bonita descripción de esta capacidad de la vista puede verse en la novela "Estepa" de A. P. Chéjov.

*«La vista de aquel chico (Basilio) fue sorprendentemente aguda. Lo vio todo tan perfectamente bien, que la estepa parda y desierta fue para él siempre llena de vida y movimiento. Le bastaba mirar atentamente a la lejanía, para encontrar una zorra, un conejo, un ave cuellilarga o cualquier otro animal, manteniéndose lejos de la gente. No es nada extraño ver un conejo alejándose rápidamente o una ave volando, eso lo pudo ver cualquiera persona, cruzando la estepa, pero no para cualquiera es posible ver a los animales salvajes en su vida cotidiana, cuando ellos no corren, no se esconden y no miran en su alrededor inquietamente. Pero Basilio vio los zorros jugando, los conejos limpiándose con sus patas, el ave cuellilarga desplegando las alas, el ave esteparía pisoteando sus "puntillos".*

*Gracias a la agudeza de la vista, aparte del mundo, el que observaban todos, el muchacho tuvo otro el mundo, su propio, inaccesible para nadie y, probablemente, muy bonito, por que cuando él observaba y admiraba, ha sido muy difícil sin tener la envidia.”»*

Es extraño pensar que para ocurra este cambio sorprendente sea suficiente bajar el ángulo  $1'$  a más o menos  $1/2'$ .

El funcionamiento mágico de los microscopios y de los telescopios está relacionado al mismo fenómeno.

El objetivo de estos aparatos es cambiar el paso de los rayos del objeto observado, como si entraran en el ojo como un haz divergente, entonces, el objeto se presenta bajo de un ángulo visual más grande. Cuando se dice que el microscopio o el telescopio amplía en  $100$  veces, quiere decir, que con su ayuda nosotros vemos los objetos bajo de ángulo  $100$  veces mayor, que a siempre vista. Y entonces los detalles que antes se escapaban del ojo desnudo, están accesibles para nuestra vista. La Luna llena observaremos bajo un ángulo de  $30'$ , y como su diámetro es  $3.500$  km, cada parte de la Luna tendrá un diámetro de  $3500/30 = 120$  km

En el tubo, ampliando en  $100$  veces, serán imperceptibles las partes pequeñas con un diámetro de  $120/100 = 1,2$  km y en el telescopio con un aumento de  $1000$  veces, la parte ampliada medirá  $120$  metros de anchura. De aquí se deduce, que en la Luna unas construcciones tan grandes como nuestros polígonos industriales o barcos transatlánticos, pueden verse en el telescopio<sup>2</sup>.

La regla de una minuta máxima tiene gran significación para nuestras observaciones cotidianas. Con la magnitud de esta propiedad de nuestra vista cualquier objeto, alejado más de  $3.400$  (es  $57 \sim 60$ ) veces su diámetro, dejamos de distinguir sus contornos y se confunden en un punto. Por eso, no tiene ningún sentido, cuando alguien esta diciendo, que le ha reconocido a una persona a la distancia en cuatro kilómetros, a menos que cuente con una vista fenomenal, por supuesto. Por otra parte, entre los ojos de una persona hay solo  $6$  centímetros ( $3$  para cada ojo), entonces ambos se unen en un punto a una distancia de

$3 \sim 3.400$  centímetros, es decir  $100$  metros.

Los artilleros utilizan estos datos para la distancia del ojo desnudo. Una de sus reglas es que si los ojos de una persona que está lejos, aparecen como dos puntos, entonces la distancia entre ellos no supera a los  $100$  pasos ( $60 - 70$  metros). Nosotros hemos calculado una distancia mayor,  $100$  metros: Esto quiere decir, que los militares tienen la agudeza visual bajo lo normal en  $30\%$ .

#### Problema

¿Podrá una persona con vista normal, distinguir al jinete a una distancia de  $10$  kilómetros, usando el prismático, ampliado en tres veces?

#### Solución

La altura del jinete es  $2,2$  metros. Su figura convierte en un punto a una distancia de

$$2,2 \sim 3.400 = 7 \text{ kilómetros};$$

<sup>2</sup> Con la condición de absoluta transparencia y de homogeneidad similar a nuestra atmósfera. En realidad, el aire no es transparente y tampoco es homogéneo; por eso con las grandes ampliaciones la imagen observada se aparece cubierta de bruma y desfigurada. Esto es el limite de la utilización de las fuertes ampliaciones y impulsa a los astrónomos a construir los observatorios arriba en las montañas, donde el aire más limpio.

El prismático amplía al triple, entonces resulta una distancia de *21 kilómetros*. Por lo tanto, distinguir con el prismático a una distancia sobre *10 kilómetros* es posible (sí aire esta bastante limpio).

[Volver](#)

\*\*\*

### 11. La Luna y las estrellas sobre el horizonte.

Hasta un distraído observador los sabe; que la Luna llena, estado bajo el horizonte, tiene el tamaño más grande, que cuando esta más arriba en el cielo. La diferencia es tan grande, que es difícil de no notar. Lo mismo pasa con el Sol; sabemos como es grande el disco a la puesta del Sol o a la salida del Sol comparando su tamaño arriba en el cielo, cuando brilla entre las nubes.

Para las estrellas esta propiedad se hace notoria porque la distancia entre ellas aumenta, cuando ellas se acercan al horizonte. Quien ha visto en invierno la constelación Orión arriba en el cielo y abajo cerca del horizonte, se sorprende por la gran diferencia de los tamaños de la constelación en ambas posiciones.

Todo esto es más misterioso aún, cuando estamos observando los astros a la puesta y a la salida, ellos no están más cerca, si no más lejos (a lo largo del eje de Tierra), como podemos ver en la Figura 73: En el cenit nosotros observamos los astros desde el punto A, y bajo el horizonte, desde los puntos B o C. ¿Por qué la Luna, el sol y las constelaciones se amplían bajo el horizonte?

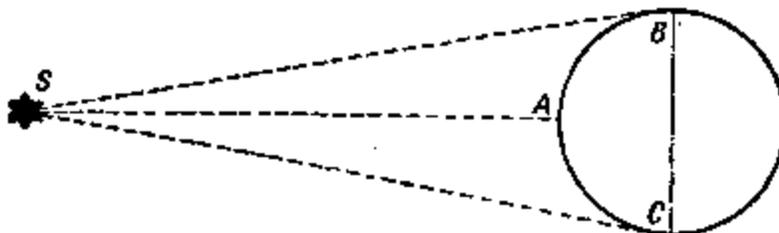


Figura 73. ¿Por qué el Sol, estado en el horizonte, parece más lejos desde el observador, que estando en el cenit?

“Por que no es cierto”, podemos contestar así. Es una ilusión óptica. Con la ayuda del transportador de rastrillo o con otro tipo de aparatos podemos asegurarnos que el disco de la Luna lo vemos en ambos casos bajo del mismo ángulo visual<sup>3</sup> equivalente a la mitad de un grado. Utilizando el mismo aparato o la “báscula de Yakov”, podemos ver, que las distancias angulares entre las estrellas no cambian, en cualquier lugar donde se encuentren las constelaciones: en el cenit o bajo el horizonte. Entonces la ampliación es una ilusión óptica.

¿Cómo podemos explicar tal ilusión óptica? La respuesta indiscutible todavía no lo tenemos; La ciencia no ha encontrado la respuesta, aunque busca la solución hace 2.000 años. La ilusión esta relacionada con que el cielo se representa no como la semiesfera (de punto de vista geométrico), sino como segmento del globo, la altura del cual es 2 a 3 veces menor que el radio de su base. Es por que, con la postura habitual de la cabeza y de los ojos, las distancias sobre la horizontal y cercanas las valoramos como más significativas que las verticales: En sentido horizontal observamos el objeto con “mirada recta”, y en cualquier otro sentido, con los ojos subidos o bajados. Si observamos la Luna estando tumbados de espaldas, entonces, al contrario, parecerá más grande, cuando está en cenit, que bajo el

<sup>3</sup> Las mediciones hechas con los instrumentos de precisión, dicen, que el diámetro observado de la Luna es menor, aunque esta cerca del horizonte, por consecuencia de que refracción de la luz hace que se “aplaste” el disco.

horizonte<sup>4</sup>. Delante de los psicólogos y los fisiólogos existe todavía problema de explicar *por qué* el tamaño visual del objeto depende de la orientación nuestros ojos.

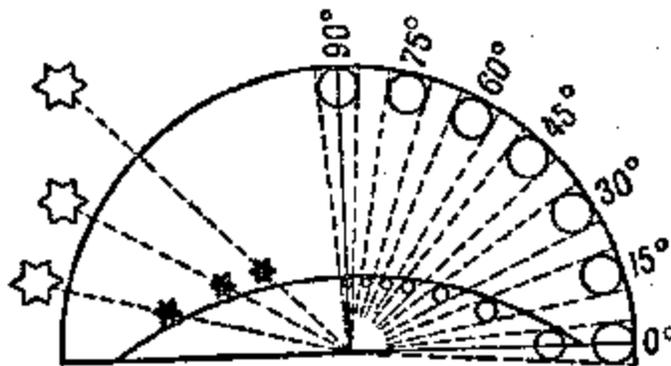


Figura 74. Influencia del cielo aplastado sobre los tamaños aparentes de los astros.

La compresión aparente del cielo sobre el tamaño de los astros en distintas partes, se grafica claramente en la Figura 74. En el cielo el disco de la Luna siempre se ve bajo un ángulo de medio grado, estado bajo el horizonte (en la altura de  $0^\circ$ ), o sobre el cenit (en la altura de  $90^\circ$ ).

Pero nuestro ojo no siempre sitúa el disco a una misma distancia: La Luna en el cenit se encuentra a la menor distancia de nosotros, que bajo el horizonte, y por eso su tamaño se ve inadecuado. En la parte izquierda del mismo dibujo se ve, como las distancias entre estrellas aparecen estirados acercándose al horizonte: Los mismos trayectos angulares entre ellas parecen, entonces, inadecuados.

Desde otro punto de vista. ¿mirando atentamente al disco de Luna bajo el horizonte, han notado algún nuevo rasgo, que no hayan podido ver en el disco estado en cenit? No, verdad. ¿Pero enfrente a un disco ampliado, entonces, por qué no se ven nuevos detalles? Por que aquí no se *amplió el ángulo visual*, bajo de cual se presenta el objeto. Solamente ampliación de este ángulo permite distinguir los nuevos detalles; cualquiera otra "ampliación" es simplemente ilusión óptica, y para nosotros es absolutamente inútil<sup>5</sup>.

[Volver](#)

## 12. Cual es la longitud de la sombra lunar y de la sombra de estratóstato.

He encontrado otra aplicación inesperada para ángulo visual, en el cálculo de longitud de la sombra, dejada por otros cuerpos del espacio.

La Luna, por ejemplo, deja en el espacio un cono de sombra, el que acompaña a ella en todas partes.

¿Qué destino toma esta sombra?

Para hacer este calculo, siguiendo a semejanza de los triángulos, no es necesario hacer la proporción, donde son componentes, los diámetros del Sol y de la Luna, y también la distancia entre el Sol y la Luna.

El calculo lo podemos hacer más simple. Imaginaremos, que nuestro ojo está situado en el mismo punto, donde se termina el cono de la Luna, en el vértice del cono, y nosotros vemos desde allí a la Luna. ¿Que ven? El círculo negro tapando el Sol. El ángulo visual, bajo el que

<sup>4</sup> En las ediciones anteriores de "Geometría recreativa" Y. I. Perelman explicaba la ampliación aparente de la Luna bajo el horizonte: "que bajo el horizonte vemos a ella *junto* con otros objetos lejos, pero arriba en el cielo vemos la Luna única. Sin embargo la misma ilusión se observa bajo el horizonte del mar abierto, entonces, las explicaciones anteriores planteadas sobre el efecto se consideran poco satisfactorias.

<sup>5</sup> Los detalles se ven en el libro del mismo autor "Física recreativa", libro segundo.

vemos el disco de la Luna (o del Sol), sabemos es demasiado grande. Pero nosotros, ya conocemos que el objeto visible bajo un ángulo de medio grado, se aleja desde el observador hasta  $2 \cdot 57 = 114$  veces su diámetro. Entonces, el vértice del cono de la sombra lunar está desde la Luna a 114 diámetros lunares. Por lo tanto, la longitud de la sombra lunar es

$$3.500 \cdot 114 \approx 400.000 \text{ kilómetros.}$$

Esta es la mayor distancia entre la Tierra y la Luna; por eso aparecen los eclipses solares totales (para los sitios de la tierra que entran en esta sombra).

No es difícil de calcular la longitud de la sombra de la Tierra en el espacio: Ella es tantas veces mayor que la sombra lunar, en tantas veces como el diámetro de la Tierra supera el diámetro de la Luna, es decir, aproximadamente, en cuatro veces.

El mismo modo se utiliza para calcular las longitudes de las sombras espaciales para objetos más pequeños. Encontraremos, por ejemplo, que el cono de sombra, dejado por el estratostato «COAX – 1» en el instante cuando toma la forma de un globo. Como el diámetro del globo es 36 metros, entonces, la longitud de su sombra (el ángulo sobre el vértice del cono es de medio grado)

$$36 \times 114 = 4.100 \text{ metros,}$$

mas o menos 4 kilómetros.

En todos casos examinados hablamos, por supuesto, sobre la *longitud* de la sombra total, pero no de la media sombra.

[Volver](#)

### 13. ¿En que altura están las nubes?

Recuerden, cómo se han sorprendido con un largo camino blanco, cuando lo vieron por primera vez, arriba en el cielo azul. Ahora, por supuesto, sabemos que se trata de una cinta nubosa que es un "autógrafo" dejado por un avión en el espacio.

En el aire frío, húmedo y lleno de partículas de polvo fácilmente aparece la niebla.

Un avión volando, va dejando en el aire las pequeñas partículas, son productos del motor en marcha, y estas partículas son aquellos puntos, entre cuales hay vapor condensado que aparece como una nube.

Si encontraremos la altura de la nube, antes que desaparezca, podemos saber a que altura vuela el avión.

#### Problema

¿Cómo encontrar la altura de la nube sobre la Tierra, además si, ella esta por encima de nuestra cabeza?

#### Solución

Para reconocer muy altas distancias es muy útil un aparato fotográfico, un instrumento bastante complicado, pero le gusta mucho a los jóvenes.

Para este caso necesitamos dos aparatos con las mismas distancias focales. (Las distancias focales están marcadas en el objetivo.)

Los dos aparatos se colocan a las mismas alturas. En el campo se usan trípodes, en la ciudad, miradores. La distancia entre las elevaciones tiene que ser de tal modo que un observador pueda ver al otro directamente o con los prismáticos.

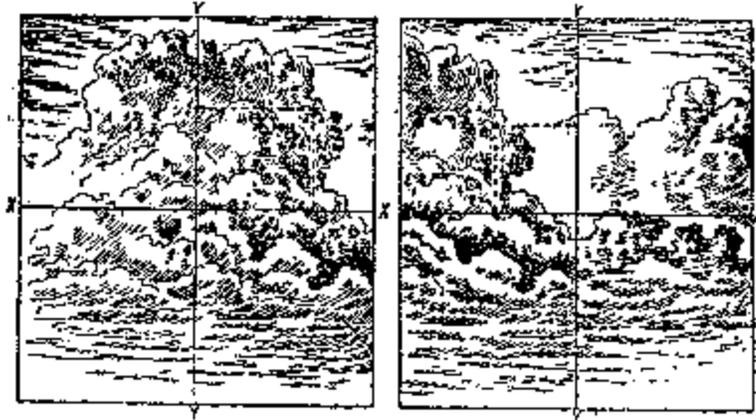


Figura 75. Las dos imágenes de la nube

Esta distancia se mide o se busca sobre el plano territorial. Los aparatos montan de manera que sus ejes ópticos sean paralelos (por ejemplo mirando al cenit).

Cuando el objeto aparece en el campo visual del objetivo, un observador da una señal al otro, por ejemplo, con un pañuelo y ambos fotógrafos hacen imágenes de manera inmediata.

En las fotos, cuales por su tamaño deben de ser iguales a las placas fotográficas, se dibujan las rectas  $YY$  y  $XX$ , uniendo los centros de los bordes opuestos de las imágenes (Figura 75). Después se marcan en ambas imágenes el mismo punto de nube y se calcula su distancia (en *milímetros*) desde las rectas  $YY$  y  $XX$ . Estas distancias señalan con las letras correspondientes  $x_1$ ,  $y_1$  para una imagen y  $x_2$ ,  $y_2$  para la otra.

Si los puntos marcados aparecen en la imagen sobre lados distintos de la recta  $YY$  (como en la Figura 75), entonces, la altura de la nube  $H$  se calcula con la fórmula

$$H = b \frac{F}{x_1 + x_2}$$

donde  $b$  = la longitud de la base (en *metros*),

$F$  = la distancia focal (en *milímetros*).

Si los puntos marcados aparecen en el mismo lado de la recta  $YY$ , entonces, la altura se calcula con la fórmula

$$H = b \frac{F}{x_1 - x_2}$$

Que no depende de las distancias  $y_1$  e  $y_2$ , pues ellas no son necesarias para calcular  $H$ , pero, comprobándolas entre ellas, podemos ver exactitud del cálculo.

Si las placas estaban colocadas simétricas dentro el casete, entonces  $y_1$  sea igual al  $y_2$ .

Sea bien, por ejemplo, las distancias desde las rectas  $YY$  y  $XX$  hasta el punto marcado de la nube *sobre* la foto son siguientes:

$$x = 32 \text{ mm}, y = 29 \text{ mm},$$

$$x = 23 \text{ mm}, y = 25 \text{ mm}.$$

Las distancias focales de los objetivos  $F = 135 \text{ mm}$  y la distancia entre los aparatos<sup>6</sup> (base)  $b = 937 \text{ m}$ .

Las fotos enseñan, que para encontrar la altura de la nube necesitamos usar la formula

$$H = b \frac{F}{x_1 + x_2}$$

$$H = 937 \text{ m} \times \frac{135}{32 + 23} = 2.300 \text{ metros} = 2,3 \text{ kilómetros}$$

Si desean deducir la fórmula para buscar la altura de las nubes, pueden utilizar el esquema, de la Figura 76.

La Figura 76 se debe imaginar en el espacio (la imaginación espacial se produce del aprendizaje de una parte de la geometría, que se llama estereometría).

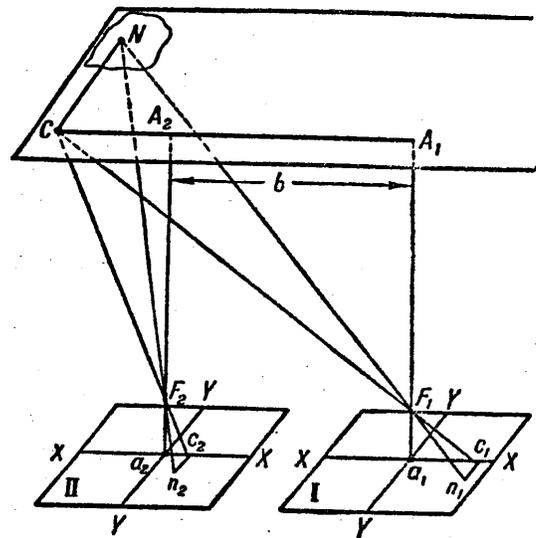


Figura 76. Esquema de la imagen del punto de la nube sobre placas de ambos aparatos, apuntados al cenit.

Las figuras I y II, la imagen de las placas fotográficas;  $F_1$  y  $F_2$ , los centros ópticos de los objetivos;  $N$  es el punto observado de la nube;  $n_1$  y  $n_2$  es la representación del punto  $N$  sobre las placas fotográficas;  $a_1 A_1$  y  $a_2 A_2$ , las perpendiculares, trazadas desde el centro de cada una placa fotográfica hasta el nivel de la nube;  $A_1 A_2 = a_1 a_2 = b$ , el tamaño de la base. Siguiendo desde el centro óptico  $F_1$  hacia arriba hasta el punto  $A_1$ , luego desde el punto  $A_1$  a lo largo de la base hasta un apunto  $C$ , el que será el vértice del ángulo recto  $A_1 C N$  y, por fin, desde el punto  $C$  hasta el punto  $N$ , entonces, los segmentos  $F_1 A_1$ ,  $A_1 C$  y  $C N$  en el aparato corresponden a los segmentos  $F_1 a_1 = F$  (la distancia focal),  $a_1 c_1 = x_1$  y  $c_1 n_1 = y_1$ . La teoría es análoga para el otro aparato.

Por la semejanza de los triángulos se deducen las proporciones

<sup>6</sup> Conocido por experiencia, descrita en el libro de N. F. Platonov "Aplicación de análisis matemático para solución de las tareas prácticas". En él artículo "altura de las nubes" N. F. Platonov saca la conclusión que la formula para el calculo de  $H$ , describe otros posibles montajes de los aparatos para fotografiar la nube y da un par de consejos prácticos.

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_1 F_1}{F} = \frac{C_1 F_1}{F_1 c} = \frac{CN}{y_1}$$

$$\frac{A_2 C}{x_2} = \frac{A_2 F_2}{F} = \frac{C_2 F_2}{F_2 c} = \frac{CN}{y_2}$$

Comprobando estas proporciones y teniendo en cuenta la cierta igualdad de  $A_2 F_2 = A_1 F_1$ , en primer lugar encontraremos, que  $y_1 = y_2$  (es un indicio de la imagen es correcta), también que

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_2 C}{x_2}$$

Pero sobre el dibujo lineal  $A_2 C = A_1 C - b$  aquí se deduce,

$$\frac{A_1 C}{x_1} = \frac{A_1 C - b}{x_2}$$

donde

$$A_1 C = b \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

y, por fin,

$$A_1 F_1 \approx H = b \frac{F}{x_1 - x_2}$$

Si,  $n_1$  y  $n_2$ , imagen en las placas del punto  $N$ , aparecieron por distintos lados de la recata  $YY$ , eso significa, que el punto  $C$  esta entre los puntos  $A_1$  y  $A_2$  y después  $A_2 C = b - A_1 C$  y la altura buscada

$$H = b \frac{F}{x_1 + x_2}$$

Estas fórmulas corresponden al caso cuando los ejes ópticos de los aparatos apuntan al cenit. Si la nube esta lejos del cenit y no se entra en el campo visual, entonces, podemos colocar los aparatos en otra posición (manteniendo paralelismo de los ejes ópticos), por ejemplo, indicar horizontalmente, además perpendicularmente a la base o a lo largo de ella. Para cualquier posición necesita antes construir el dibujo lineal y deducir unas formulas para determinación la altura de la nube.

En el mediodía aparecen en el cielo las nubes estratos de color blanco. Necesita encontrar sus alturas dos a tres veces a través de un período del tiempo. Si resulta que las nubes han bajado, es la señal que durante unas horas va llover. Podrán hacer unas fotos del aeróstato volando o del estratóstato y luego miden sus alturas.

[Volver](#)

#### 14. La altura de una torre en la foto.

## Problema

Con la ayuda del aparato fotográfico podemos encontrar no solamente la altura de las nubes o de avión, sino la altura de una construcción terrestre: de una torre, de una antena, de mástil y etc.

En la figura 77 una foto del motor eólico, construido en Crimea cerca de Balaklava. La base de la torre es cuadrada, donde la longitud de un lado, suponemos, que ya lo sabemos después de una medición, 6 metros

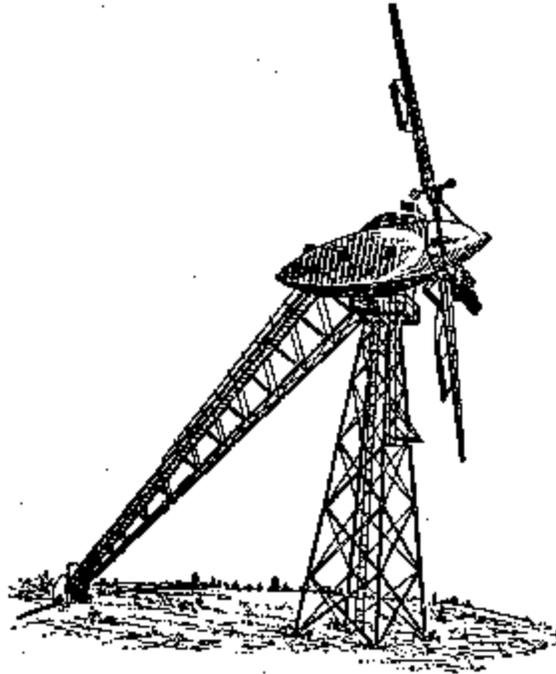


Figura 77. Motor eólico en la Crimea

Se necesita realizar unas mediciones sobre la imagen y encontrar la altura  $h$  de la instalación.

## Solución

La foto de la torre y su dibujo son geoméricamente semejantes. Por lo tanto, en la imagen, la altura es mayor que la diagonal de la base, en tantas veces la altura de torre original es mayor a una diagonal de su base.

Las mediciones de la imagen: la longitud diagonal menos alterada de la base es 23 mm, la altura de toda instalación es 71 mm.

La que longitud de un lado de la base del cuadrado es 6 m, entonces diagonal de la base es

$$diagonal = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,48m$$

De aquí se deduce

$$\frac{71}{23} = \frac{h}{8,48}$$

$$h = 26,17 \text{ metros}$$

Evidentemente, no vale cualquier imagen, solamente, donde las proporciones no son alteradas, como pasa con los fotógrafos sin experiencia.

[Volver](#)

### 15. Para los ejercicios independientes.

Ahora los lectores puedan utilizar todos sus conocimientos de este libro para resolver un par de las siguientes tareas:

- Una persona con estatura mediana (*1,7 metros*) vista desde lejos bajo un ángulo de  $12'$ . Encontrar la distancia gaste ella.
- Un jinete (*2,2 metros*) es visto desde lejos bajo un ángulo de  $9'$ . Encontrar la distancia hasta él.
- El poste telegráfico (*8 metros*) es visto bajo un ángulo de  $22'$ . Encontrar la distancia hasta él.
- Un faro de *42 metros* de altura se ve desde un barco bajo un ángulo de  $1^\circ 10'$  ¿Cuál es la distancia entre el barco y el faro?
- Planeta Tierra se ve desde la Luna bajo de  $1^\circ 54'$ . Encontrar la distancia entre la Luna y la Tierra.
- Sobre una distancia de *2 kilómetros* se ve un edificio bajo un ángulo de  $12'$ . Encontrar la altura del edificio.
- La Luna se ve desde la Tierra bajo un ángulo de  $30'$ . Sabiendo la distancia hasta la Luna (*380.000 kilómetros*), encontrar su diámetro.
- ¿Cuán grandes deben de ser las letras en la pizarra para que los alumnos las puedan ver tan claro, como las letras de sus libros (*25 centímetros* de los ojos)? La distancia entre los pupitres y la pizarra es de *5 metros*.
- El microscopio amplía *5 veces*. ¿Podemos ver las células de la sangre humana, si sus diámetros son de *0,007 milímetros*?
- ¿Si en la Luna hubiera gente como nosotros, entonces, qué ampliación necesita un telescopio, para verlos desde la Tierra?
- ¿Cuántas “milésimas” hay en un grado?
- ¿Cuántos grados hay en una “milésima” (o milésimo)?
- El avión, volando perpendicularmente sobre la línea de observación, en un lapso de *10 segundos* recorre la distancia vista bajo un ángulo de *300 “milésimas”*. Encontrar la velocidad del avión, si alejamiento es de *2 000 metros*.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE**



**CAPITULO CUARTO  
GEOMETRÍA DE VIAJE**

**Contenido:**

1. [Habilidad de medir con pasos](#)
2. [Buen ojo](#)
3. [Inclinaciones](#)
4. [Montón del casquijo](#)
5. [Una colina orgullosa](#)
6. [Circunvalación vial](#)
7. [El radio de circunvalación](#)
8. [El fondo de océano](#)
9. [¿Existen las montañas acuáticas?](#)

**1. Habilidad de medir con pasos**

Encontrándose por las afueras cerca de un ferrocarril o en la carretera, podemos hacer un par de ejercicios geométricos muy interesantes.

Antes de todo utilizaremos la carretera, para saber la longitud de nuestro paso y la marcha. Esto nos ayuda medir a las distancias con pasos, técnica que se consigue bastante fácil, después de un par de ejercicios. Lo más importante es aprender hacer los pasos de igual longitud, es decir, similar a la definida durante la marcha.

En la carretera, cada *100 metros* se coloca una piedra blanca; caminando este espacio de *100 metros* con su paso "mesurado" y contando la cantidad de pasos, es muy fácil de encontrar la longitud media de un paso. La medición semejante es deseable repetirla cada año, por ejemplo, cada primavera, porque longitud del paso, no es invariable.

Una correlación muy curiosa, encontrada por las mediciones frecuentes: La longitud mediana del paso de una persona mayor es equivalente a la mitad de su estatura, hasta los ojos. Si, por ejemplo, estatura de una persona es *1,40 m*, entonces la longitud de su paso, es *70 centímetros*. Aconsejo comprobarlo.

Aparte de la longitud de su paso, es útil saber la *velocidad* de la marcha, la cantidad de kilómetros, hechos durante la hora. A veces se usa la regla siguiente: Nosotros andamos durante la hora tanto kilómetros, ¿cuántos pasos se hacen durante tres segundos?

Por ejemplo, si durante tres segundos nosotros hacemos cuatro pasos, entonces, durante la hora dejamos detrás *4 kilómetros*. Sin embargo, la regla es útil solamente, cuando sabemos

la longitud del paso. No es difícil de encontrar, señalando longitud del paso por  $x$ , la cantidad de pasos durante tres segundos a través de  $n$ , tenemos la ecuación:

$$\frac{3600}{3} \times n \times x = n \times 1000$$

de donde  $1.200 x = 1000$  y  $x = 5/6$  metros, es decir, más o menos *80 a 85 centímetros*. Relativamente es paso muy grande; estos son pasos de personas muy altas. Si el paso de Uds. es diferente de *80 – 85 cm*, entonces, tendrá que hacer la medida de la marcha de otra manera, midiendo el tiempo que transcurre caminando entre dos mojones.

[Volver](#)

## 2. Buen ojo.

Es agradable y no solo útil saber medir las distancias sin cadena y sin pasos mensurados, sino valorar directamente a ojo, sin mediciones. La maestría se consigue solamente por el camino de los ejercicios. Durante mis años escolares, cuando yo con un grupo de amigos hacía excursiones fuera de la ciudad, los ejercicios fueron para nosotros muy habituales. Realizados en una forma deportiva y especial, inventada por nosotros, en una forma de competición. Saliendo en la carretera, nosotros marcábamos con la mirada cualquier árbol junto la carretera u otro elemento sólido, y la competencia había comenzado.

-¿Cuántos pasos hasta el árbol? – preguntaba alguien.

El resto decían el número aproximado y después juntos contábamos los pasos, para saber, quién había estado más cerca del verdadero. Era su turno elegir el objeto para valorar la buena vista.

Quien había medido con más éxito la distancia, obtenía un punto. Después de diez veces calculábamos los puntos: el que obtenía más puntos era el ganador.

Recuerdo que en las primeras distancias estuvimos muy errados. Pero muy pronto, más pronto de lo que se esperaba, ejercimos el arte de medir las distancias, aprovechando la vista, haciendo cada vez menos errores.



Figura 78. Un árbol detrás de colina parece más cerca.

Basta un cambio rápido de la situación, por ejemplo, con el traspaso de un campo a un bosque, o a un calvero de arbustos, volviendo a la ciudad, pasando por las calles estrechas, a veces por la noche, bajo de la luz engañosa de la Luna, nos dábamos cuenta que los errores eran mayores. Luego, sin embargo, aprendimos que era necesario, para mediciones más exactas, tener presente este cambio de circunstancias. Por fin, nuestro grupo consiguió tanta perfección dentro de la evaluación de las distancias con la vista, que debimos eliminar este tipo de deporte; todos adivinaban igualmente bien, y las competiciones perdieron el interés. Pero por otra parte, conseguimos tener un buen ojo, que siempre sirvió durante los paseos fuera de la ciudad.

Es curioso, pero el buen ojo parece que no depende de agudeza visual. Entre nuestro grupo fue un chico cegato, y no solo tuvo buenos resultados, sino a veces ganaba. Al contrario, un chico con una vista normal no pudo conseguir medir las distancias. Mas tarde tuve necesidad de hacer lo mismo con medición visual de la altura de los árboles: ejercitando a los estudiantes, esta vez no para un juego, sino para su profesión futura, noté que los cegatos lo hacían igual que los otros. Esto puede ser el consuelo para cegatos: sin estar dotado de una vista aguda, ellos son capaces de desarrollar un cálculo visual bastante satisfactorio.



*Figura 79. Subes en la colina, hasta el árbol tantos.*

Ejercitarse en la exactitud de las distancias visibles, lo podemos en cualquiera temporada y dentro de cualquier circunstancia. Paseando por las calles de ciudad Uds. podrán imponerse a si mismos las tareas, probando adivinar, cuantos pasos hasta farola mas cercana, hasta uno u otro objeto. Durante el mal tiempo, sin darnos cuenta, tendremos minutos mas útiles paseando por las calles sin gente.

Los militares le dan mucha importancia a las mediciones visuales: buena vista necesita el batidor, el tirador, el artillero. Es interesante conocer aquellas propiedades, los que llevan en la practica.

- "A ojo se miden las distancias o con la posibilidad de distinguir, sobre el grado de claridad a los objetos visibles sus distintas distancias del observador, o valorar la distancia sobre una dimensión de 100 – 200 pasos, parece menor, cuando esta mas lejos del observador".

- “Los objetos parecen más cercano por el grado de claridad. Debemos tener en cuenta, que aquellos que están más alumbrados o más claros, y dependiendo del terreno o si está encima de una superficie acuática; los objetos que están más alto, los grupos comparados con otros objetos y en general los objetos más grandes”.
- “Podemos seguir a las propiedades siguientes: hasta 50 pasos se pueden distinguir la boca y los ojos de la persona; Hasta 100 pasos, los ojos parecen dos puntos; Hasta 200 pasos – los botones y otros detalles de ropa se podrán distinguir; sobre 300 se ve la cara; sobre 400 pasos se distingue el movimiento de las piernas; Sobre 500 pasos se ve el color de ropa”.

Sobre eso, el ojo más práctico comete un error de 10% de la distancia medida. Entre los casos cuando los errores de la vista son más significativos, se encuentra la estimación de la distancia sobre una superficie llana y absolutamente de un color, por ejemplo, encima de agua de un río, de un lago, encima de llanura arenosa, en un campo verde. Aquí las distancias parecen más pequeñas que las verdaderas; valorando visualmente, nos equivocamos en el doble, sino en más. Por otra parte, los errores posibles, cuando medimos la distancia hasta un objeto, el fundamento del que está tapado por una colina o por un edificio o por alguna elevación. En estos casos sin querer pensamos, que el objeto está no *detrás* de la elevación, sino *encima* de la misma, por lo tanto, cometemos un gran error aparte de disminución de la distancia (figuras 78 y 79).

En casos semejantes, confiar al buen ojo es peligroso, y deberemos usar otros modos, de los cuales ya hemos hablando y vamos a hablar.

[Volver](#)

### 3. Inclinaciones

A lo largo de ferrocarril, aparte de postes de versta (de un kilómetro), vemos otros no muy altos, con tablillas fijadas con una inscripción de algo incomprendible para mucha gente, como en la figura 80.

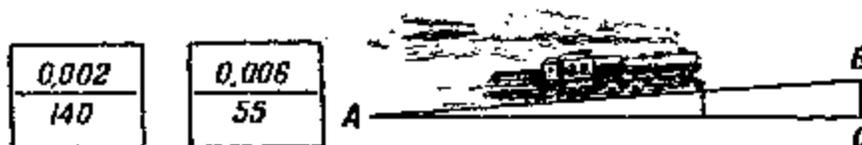


Figura 80. “Señales de inclinación”

Eso es “señales de inclinación”. En la primera inscripción el número arriba 0,002 significa, que ahí la inclinación del camino (en qué sentido, también lo indica la tablilla) es 0,002; el camino sube o baja 2 mm sobre cada mil de milímetros. El número de abajo, 140, significa, que esta inclinación dura 140 metros, donde está la otra señal indicando la nueva inclinación.

Otra tablilla con inscripción  $\frac{0,006}{55}$  indica, durante próximos 55 m, el camino baja o sube 6 mm con cada metro.

Sabiendo significación de las señales de inclinación, podemos calcular la diferencia de alturas a los dos puntos vecinos, marcados por estas señales. En primer caso, por ejemplo, la diferencia de alturas es  $0,002 \cdot 140 = 0,28$  m; En otro,  $0,006 \cdot 55 = 0,33$  m.

En la práctica del ferrocarril, como vemos, la cantidad de inclinación se busca no por medida graduada. Pero es posible transformar en medidas graduadas estas indicaciones de la inclinación de vía férrea. Si AB (figura 80), es la línea da vía, BC, diferencia de alturas a los puntos A y B, entonces la rampa de vía AB sobre línea horizontal AC será indicada por proporción

$$\frac{BC}{AB}$$

Como el ángulo  $A$  es demasiado pequeño, entonces podemos utilizar  $AB$  y  $AC$  como radios de circunferencia, donde el arco es  $BC$ <sup>1</sup>. Después el cálculo del ángulo  $A$ , si sabemos la proporción  $BC / AB$ , no será tan difícil. La longitud del arco es  $1/57$  el radio, el ángulo es de  $1^\circ$ ; ¿Qué ángulo corresponde al arco con  $0,002$  del radio? Obtenemos su valor  $x$  de la proporción

$$\frac{x}{1^\circ} = \frac{0,002}{\frac{1}{57}}$$

$$x = 0,002 \times 57 = 0,11^\circ$$

entonces, mas o menos  $7'$ .

En las vías férreas son admisibles solo rampas pequeñas. Tenemos la norma de inclinación máxima de  $0,008$ , es decir, en medida graduada  $0,008 \cdot 57$ , menos de  $1/2$ : Esa es una inclinación pequeña. Solamente para la vía férrea Transo-Caucásica son admisibles inclinaciones hasta  $0,025$ , en medida graduada es casi  $1 \frac{1}{2}$ .

Nosotros no notamos inclinaciones tan pequeñas. El peatón empieza sentir una inclinación del piso, cuando supera a  $1/24$ : en medida graduada es  $57/24$ , es decir  $2 \frac{1}{2}$ .

Paseando por ferrocarril unos cuantos kilómetros y anotando las señales de inclinación observadas, se puede calcular, en cuánto los subieron o bajaron, es decir, que diferencia de alturas entre el primer punto y el punto final.

**Problema**

Uds. empiezan el paseo a lo largo de la vía del ferrocarril cerca del poste con señal de subida  $\frac{0,004}{153}$  y anotan luego otras señales:

plazoleta <sup>2</sup>	subida	subida	plazoleta	bajada
$\frac{0,000}{60}$	$\frac{0,0017}{84}$	$\frac{0,0032}{121}$	$\frac{0,000}{45}$	$\frac{0,004}{210}$

El paseo terminaba cerca de la última señal de la inclinación. ¿Cuál es el camino recorrido y cuál es la diferencia de alturas entre la primera y la última señal?

**Solución**

Todo el camino recorrido es

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ m.}$$

Subiendo a

<sup>1</sup> A algunos lectores les parece inadmisibles creer, que la rampa  $AB$  equivalente a  $AC$ . Es instructivo asegurarse, como es pequeña la diferencia de longitud  $AC$  y  $AB$ , cuando  $BC$  se calcula, por ejemplo,  $0,01$  de  $AB$ . Por teorema Pitágoras:

$$AC^2 = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0,9999 \times AB^2} = 0,99995 \times AB$$

La diferencia de longitud es  $0,00005$ . Para cálculos aproximadamente error no toma en cuenta.

<sup>2</sup> Señal  $0,000$  significa un trozo horizontal de la vía (una plataforma, plazoleta).

$$0,004 \cdot 153 + 0,0017 \cdot 84 + 0,0032 \cdot 121 = 1,15 \text{ m.}$$

Bajando a

$$0,004 \cdot 210 = 0,84 \text{ m,}$$

entonces finalmente, aparecieron Uds. en un punto más alto del punto de la salida en:

$$1,15 - 0,84 = 0,31 \text{ m} = 31 \text{ cm.}$$

[Volver](#)

#### 4. Montón del casquijo.

Los montones del casquijo sobre los bordes de una vía levantan nuestro interés.

Pregunta: ¿Qué volumen tiene esta gran cantidad de casquijo? Inmediatamente recibimos una tarea, bastante complicada para una persona acostumbrada superar dificultades matemáticas en el papel o en la pizarra. Necesita calcular el volumen del cono, donde la altura y el radio son inaccesibles para medir de manera inmediata. Pero podemos encontrar su cantidad por la vía indirecta. El radio se encontrará midiendo la circunferencia de la base y dividiendo<sup>3</sup> su longitud por 6,28.

Más difícil es con la altura: se necesita medir la longitud formada por  $AB$  o (figura 81), como harían los capataces de carril, ambas formadas al  $ABC$  (pasando la cinta de medir por encima), luego, sabiendo el radio de la base, calculan altura  $BD$  por el teorema Pitágoras

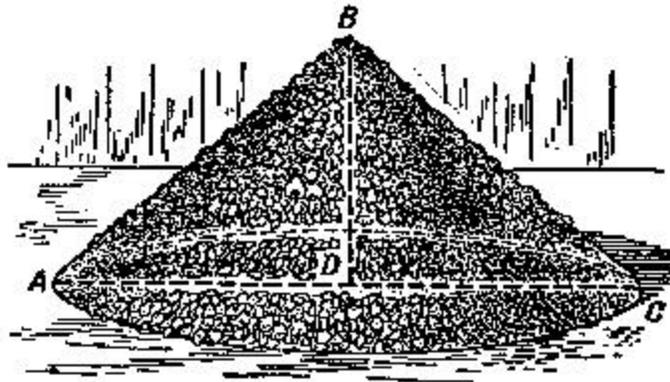


Figura 81. Montón de casquijo

Problema

Tenemos el montón del casquijo. La circunferencia de la base del cono es 12,1 m; la longitud de dos formadas es 4,6 m. ¿Cuál es el volumen del montón?

Solución

El radio de la base es equivalente a

$$12,1 \cdot 0,159 \text{ (en vez de } 12,1 : 6,28) = 1,9 \text{ m.}$$

La altura equivale a

<sup>3</sup> En la práctica esta operación cambian por la *multiplicación* a 0,318, si buscan el diámetro y al 0,159, para el radio

$$\sqrt{2,3^2 - 1,9^2} = 1,2\text{m}$$

donde el volumen del cono es

$$\frac{1}{3} \times 3,14 \times 1,9^2 \times 1,2 = 4,5\text{m}^3$$

Los valores de los volúmenes de montones con casquijos de nuestras carreteras, habitualmente, de acuerdo con Reglamento de Circulación y Seguridad Vial, fueron,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{8}$  *sazhen*<sup>4</sup>, es decir, 4,8 2,4 y 1,2  $\text{m}^3$

[Volver](#)

### 5. Una colina orgullosa.

Viendo los montones cónicos del casquijo o de arena me acordé de una vieja leyenda rusa, contada por el poeta A. Pushkin en "Un caballero avaricioso".

Leí en alguna parte,  
Que el zar a sus guerreros  
Mando llevar la tierra en la mano para una pila,  
Y colina orgullosa se ha levantado,  
Y el zar pudo observar desde arriba  
Y valle, cubierta por los toldos,  
Y mar, donde corren los barcos...

Es una de las muchas leyendas, donde en la realidad aparente no hay ni una gota de verdad. Podemos examinar con cálculo geométrico, que podría pasar, si de verdad se le ocurriera esta idea a un tirano antiguo, al final, el resultado sería miserable: delante de nosotros se levantaría un pobre montoncillo de tierra, que ninguna fantasía sería capaz de convertir en una "colina orgullosa".

Haremos el cálculo. ¿Cuántos guerreros pudo tener el zar? Es sabido que los ejércitos antiguos no eran tan numerosos. Las tropas se calculaban en unas 100.000 personas y ya el número era significativo. Si la colina se levantó por aquellas 100.000 manos colmadas de tierra, entonces por favor, cojan un puño de tierra lo más grande posible y échennla en un vaso: como verán no podemos ni llenar un vaso con solo un puño.

Si admitimos, que el volumen del puño de un guerrero es  $\frac{1}{5}$  litros (*decímetros*<sup>3</sup>), deducimos que el volumen de la colina:

$$\frac{1}{5} \times 100.000 = 20.000\text{dm}^3 = 20\text{m}^3$$

Entonces, la colina es un cono con el volumen de no más de  $20 \text{ m}^3$ . Un volumen tan limitado ya desilusiona. Vamos a continuar haciendo cálculos para encontrar la altura de la colina. Para esto necesito saber, el ángulo que forman las generatrices del cono con su base. En nuestro caso podemos admitir el ángulo de reposo natural, es decir  $45^\circ$  y la altura de este cono es equivalente al radio de su base; por lo tanto,

$$20 = \frac{\pi x^2}{3}$$

de donde

<sup>4</sup> *Sazhen* es la medida rusa equivalente a 2,13 metros.

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2,4\text{m}$$

Deberemos tener una gran imaginación, para que un montón de tierra en  $2,4\text{ m}$  ( $1\frac{1}{2}$  veces la estatura de una persona) llamar la "colina orgullosa".

Átela tenía unas de las más numerosas tropas de todo el mundo antiguo. Historiadores dicen de 700.000 personas. Si todos los guerreros participaran en el ejercicio, entonces habrían hecho un montón un poco más alto del calculado por nosotros: como su volumen es siete veces más grande, que el nuestro, entonces la altura superaba solo en  $\sqrt[3]{7}$ , es decir, en  $1,9$  veces; equivalente a  $2,4 \cdot 1,9 = 4,6\text{ m}$ . Es dudoso, que el túmulo de estos tamaños pudiera satisfacer la ambición de Átela.

Desde estas alturas fue fácil observar "valles, cubiertos por los toldos", pero ver el mar fue imposible, si es que no se tratara de un sitio cerca del mar.

Sobre, cuán lejos podemos ver desde una o otra altura, hablaremos en el capítulo sexto.

[Volver](#)

## 6. Circunvalación vial.

Ni las carreteras ni ferrocarril nunca tuercen bruscamente, sino que cambian de sentido suavemente, siguiendo la trayectoria de un arco. El arco es, normalmente la parte de circunferencia, situada de manera que las partes rectas de la carretera son tangentes a ella. Por ejemplo, en la figura 82, las partes rectas  $AB$  y  $CD$  de la carretera están unidas por el arco  $BC$  así, que  $AB$  y  $CD$  convergen (geoméricamente) a este arco en los puntos  $B$  y  $C$ , es decir,  $AB$  forma un ángulo recto con el radio  $OB$ , y  $CD$  el mismo ángulo con el radio  $OC$ . Se hace, normalmente, para que la vía pase suavemente desde la dirección recta a la línea curva y volviendo a la línea recta.

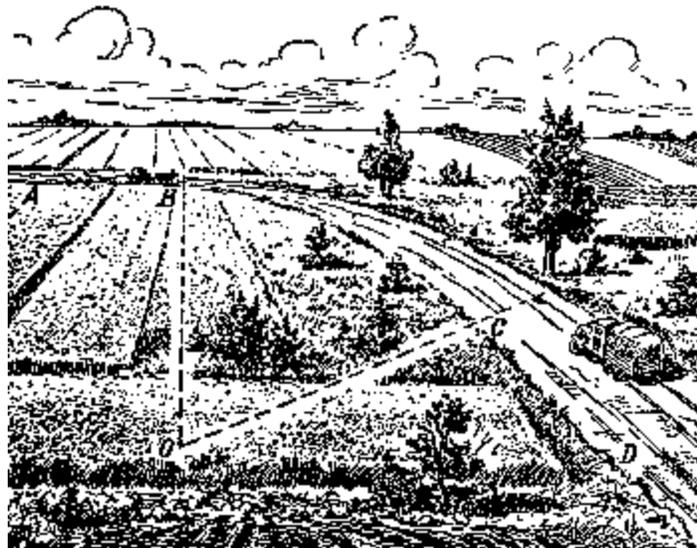


Figura 82. Circunvalación vial

El radio de circunvalación vial habitualmente se toma bastante grande, en los ferrocarriles no menos de  $600\text{ m}$ ; El radio más habitual en el carril principal es  $1000$  y también  $2000\text{ m}$ .

[Volver](#)

## 7. El radio de circunvalación.

Estando cerca de aquellas curvas, ¿Podrían Uds. encontrar el tamaño de su radio? No es tan fácil, como buscar el radio del arco, dibujando sobre el papel. Hacer el dibujo lineal es fácil:

Pasamos dos cuerdas cualesquiera y desde sus centros trazaremos unas perpendiculares. En el punto de su intersección, como sabemos, está el centro del arco. Su distancia desde cualquier punto de la curva es la longitud del radio buscado.

Para hacer la misma construcción en terreno sería, evidentemente, incómodo: además el centro de curvatura está a 1 ó 2 kilómetros desde el carril. Podríamos hacer una construcción del plano lo que tampoco es tan fácil.

Todas estas dificultades se eliminan, cuando aprovechamos el cálculo del radio. Para esto lo haremos del modo siguiente.

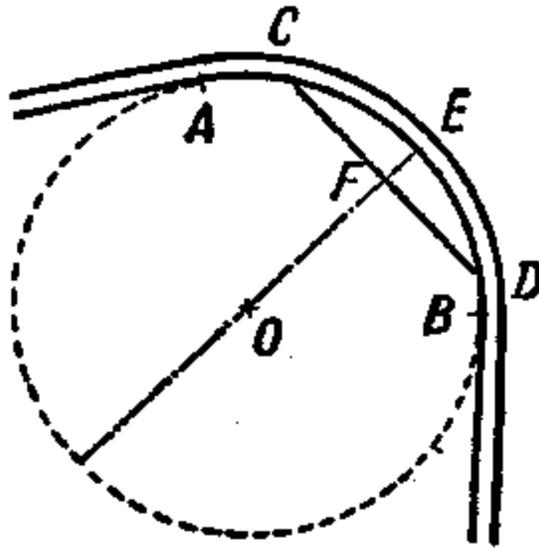


Figura 83. Para el cálculo del radio de la circunvalación.

Añadimos mentalmente (figura 83) el arco AB de circunvalación hasta la circunferencia. Uniendo dos puntos cualesquiera C y D del arco, medimos la cuerda CD y también la "flecha" EF (es decir, la altura del segmento CED). Sobre estos dos datos ya no es tan difícil de calcular la longitud del radio buscado. Examinando las rectas CD y el diámetro del círculo como las cuerdas de intersección, designamos a través de  $a$ , longitud de flecha por  $h$ , radio por  $R$ ; tenemos:

$$\frac{a^2}{4} = h \times (2R - h)$$

de donde

$$\frac{a^2}{4} = 2 \times R \times h - h^2$$

y el radio buscado

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

Por ejemplo, con la flecha de 0,5 m y cuerda de 48 m el radio buscado será

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0,5^2}{8 \times 0,5} = 580\text{m}$$

Este cálculo lo podemos facilitar si tomamos  $2R - h$  equivalente a  $2R$ , licencia permitida, porque  $h$  es demasiado pequeño comparando con  $R$  ( $R$  es centenares de metros,  $h$  algunas unidades). Entonces sale, probablemente, una fórmula bastante cómoda para hacer los cálculos aproximadamente

$$R = \frac{a^2}{8h}$$

Su uso en nuestro caso, dará el mismo resultado

$$R = 580 \text{ m.}$$

Calculando longitud del radio de la circunvalación y sabiendo, además, que el centro de circunvalación esta sobre la perpendicular hacia el centro de cuerda, Uds. pueden marcar también el sitio, donde debe estar el centro de circunvalación vial.

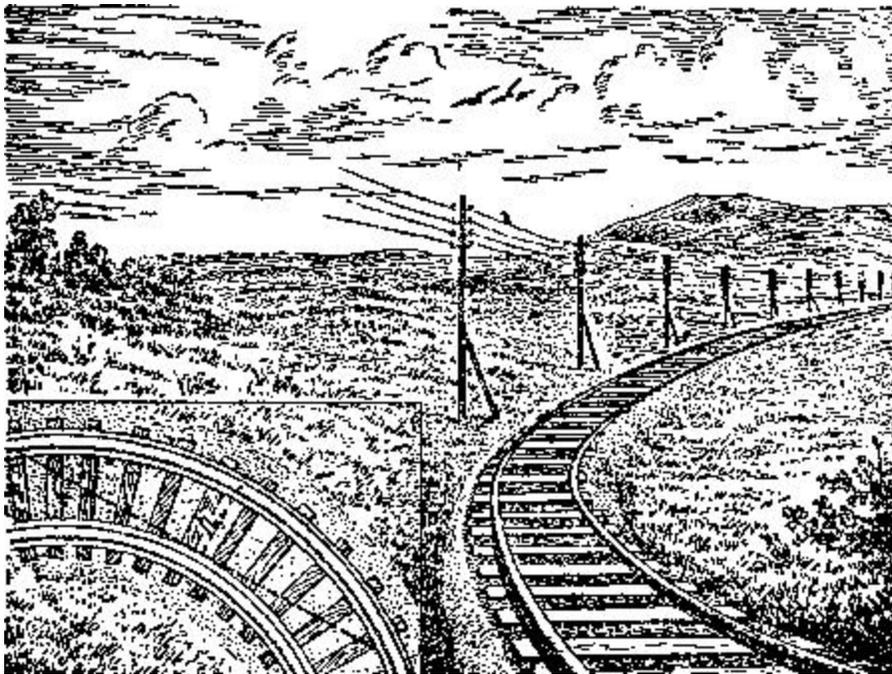


Figura 84. Para el cálculo del radio de la circunvalación ferrocarril.

Si hay rieles puestos, entonces búsqueda del radio se facilita. La verdad, que trazando una cuerda sobre el riel interior, obtenemos la cuerda del arco de riel exterior, donde su flecha  $h$  (figura 84) es equivalente a la anchura entre rieles (trocha)  $1,52 \text{ m}$ . El radio de circunvalación en este caso ( si  $a$  es la longitud de la cuerda) es

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1,25} = \frac{a^2}{12,2}$$

Si  $a = 120 \text{ m}$  el radio de circunvalación será equivalente a  $1.200 \text{ m}^5$

[Volver](#)

<sup>5</sup> Como el radio es muy grande, y con la necesidad de tener una cuerda bastante larga este modo se presenta no muy cómodo.

### 8. El fondo de océano.

Desde la circunvalación vial hasta el fondo oceánico, es un salto inesperadamente para Uds. Pero geometría le une ambas temas de manera natural.

Se trata de la curvatura del fondo oceánico, sobre qué forma tiene el fondo: cóncavo, llano o convexo. La mayoría, sin duda, parece increíble, que los océanos con su enorme profundidad no muestra en el globo terráqueo los huecos; como ahora vamos a ver, su fondo no es cóncavo, sino convexo.

Tomando el océano como "sin el fondo e inmenso" olvidamos, que su "inmenso" en centenares de veces mas que su "profundidad", es decir, que el espesor acuático es muy profundo y repite, evidentemente, la curvatura de nuestro planeta.

Por ejemplo, el océano Atlántico; su anchura cerca de ecuador es, mas o menos, la sexta parte de la circunferencia total. Entonces el círculo ecuatorial (figura 85), el arco  $ACB$ , refleja la superficie acuática del océano Atlántico.

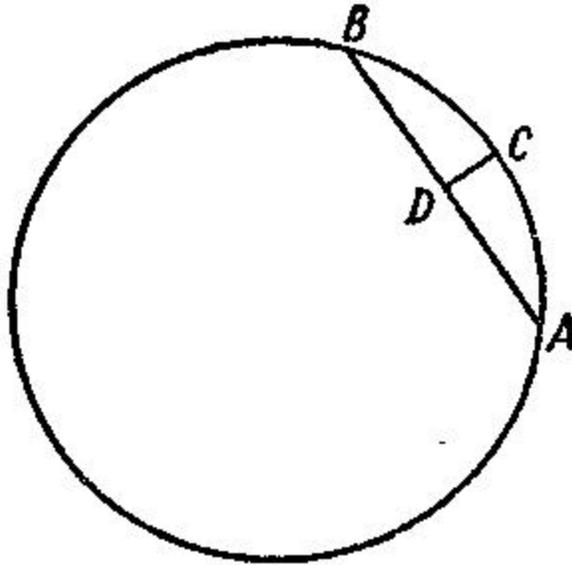


Figura 85. ¿El fondo oceánico es llano?

Si su fondo fuera llano, entonces la profundidad, equivalente a  $CD$ , es la flecha del arco  $ACB$ .

Sabiendo, que el arco es  $AB = \frac{1}{6}$  de la circunferencia y, por lo tanto, la cuerda  $AB$  es

el lado de un hexágono correctamente inscrito (equivalente al radio  $R$  del círculo), podemos calcular  $CD$ , aprovechando la formula anterior de circunvalaciones viales:

$$R = \frac{a^2}{8h}$$

donde

$$h = \frac{a^2}{8R}$$

Sabiendo, que  $a = R$ , obtenemos para este caso:

$$h = \frac{R}{8}$$

Si  $R = 6\,400\text{ km}$ . tenemos que  $h = 800\text{ km}$ .

Pues, si el fondo del océano Atlántico fuera llano, su mayor profundidad tendría que alcanzar a 800 km. En realidad, no alcanza ni 10 km. De aquí se deduce: El fondo de este océano es cóncavo y tiene un poco curvatura, que es la de su superficie acuática.

Es cierto y para otros océanos: su fondo representa en la superficie de la tierra a los *sitios de curvatura disminuida*, casi sin desequilibrarlo a su forma esférica.

Nuestra fórmula para calcular el radio de circunvalación vial indica, que cuando más amplia la superficie acuática, más convexo será su fondo.

Examinando la fórmula  $h = \frac{a^2}{8R}$  vemos, que con el aumento de la anchura oceánica  $a$  su

profundidad  $h$  debería, para el fondo llano, aumentarse muy rápido, proporcionalmente al cuadrado de anchura  $a$ .

Antes de todo, desde unas no muy grandes cuencas hidrológicas hasta las mas grandes, la profundidad no crece tan rápido. Un océano puede ser más ancho que el mar, digamos en 100 veces, pero no es  $100 \sim 100$ , es decir, en 10.000 veces mas profundo. Por eso, relativamente, las pequeñas cuencas hidrológicas tienen el fondo mas hundido, que los océanos. El fondo del Mar Negro entre Crimea y Asia Menor no es convexo, como en los océanos, y tampoco es llano, es un poco cóncavo. La superficie del mar representa el arco de  $\approx 2^\circ$  (exactamente de  $1/700$  parte de circunferencia terrestre). La profundidad del Mar Negro es bastante regular, 2,2 km. Asimilando en el mismo caso el arco a la cuerda, obtenemos, que para el fondo llano debe de ser profundidad máxima

$$h = \frac{40.000^2}{1,70^2 \times 8 \times R} = 1,1\text{km}$$

Entonces, en realidad el fondo del Mar Negro esta mas de un kilómetro ( 2,2 – 1,1) bajo del plano imaginario, pasando a través de los puntos extremos de sus orillas opuestas, es decir, representa el hueco.

[Volver](#)

### 9. ¿Existen las montañas acuáticas?

La fórmula anterior para el calculo del radio de circunvalación vial les ayudará encontrar la respuesta a esta pregunta.

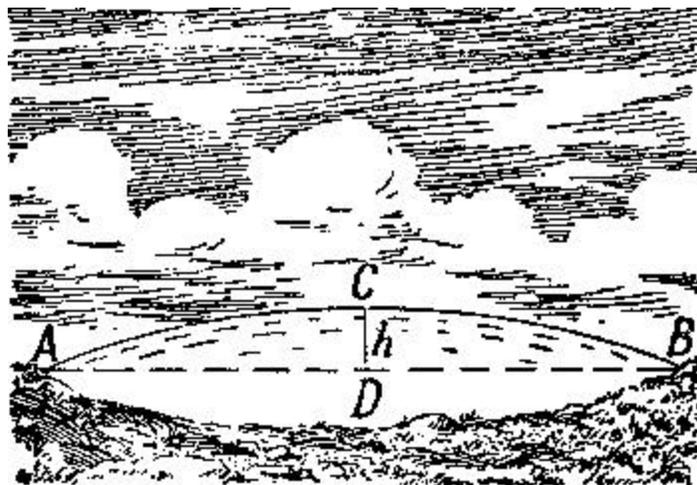


Figura 86. "Montaña acuática"

Unos de los problemas anteriormente propuestos nos ha preparado para contestar. Montañas acuáticas existen, pero no físicamente, sino que tiene significado geométrico. No

solo el mar, también los lagos representan de un modo la montaña acuática. Cuando estamos cerca de un lago, nosotros nos separa con la orilla apuesta la concavidad acuática, donde más ancho el lago, mas alta la concavidad.

Podemos encontrar esta altura con formula:  $R = \frac{a^2}{8h}$ , tenemos altura de flecha  $h = \frac{a^2}{8R}$ ; aquí

$a$  es la distancia entre orillas sobre una línea recta, el que podemos asimilar a la anchura de lago (cuerda al arco). Si esta anchura, digamos, es  $100 \text{ km.}$ , entonces altura de la "montaña" acuática

$$h = \frac{10.000}{8 \times 6.400} \approx 200\text{m}$$

¡La "montaña" tiene el aspecto imponente!

Aunque el lago tiene una anchura de  $10 \text{ km.}$  levanta el vértice de su comba sobre la línea recta, (la que une sus orillas), en más de  $2 \text{ m}$ , es decir, mas alta de estatura de una persona.

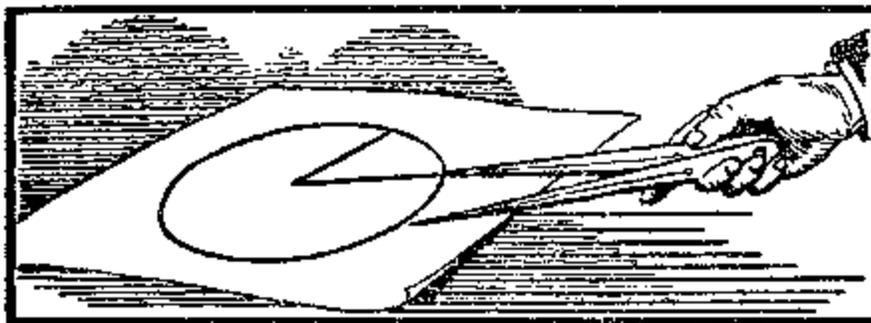
Pero realmente, ¿tenemos derecho de llamar a estas concavidades, "montañas"? Físicamente ellas no se alzan sobre el horizonte, entonces, son llanuras.

Es equivocado pensar, que la recta  $AB$  (figura 86) es la línea horizontal, sobre cual sube el arco  $ACB$ . Línea horizontal aquí no es  $AB$ , sino es  $ACB$ , uniendo con la superficie de agua. La recta  $ADB$ , es la inclinada sobre horizonte:  $AD$  va inclinándose para bajo hasta el punto  $D$ , su punto más profundo, y luego otra vez sube arriba de abajo de tierra (o de agua) en el punto  $B$ . Si, a lo largo de la recta  $AB$  se instalaran tuberías, entonces una pelota, estado en el punto  $A$ , bajaría hasta el punto  $D$  y desde aquí acelerando hasta el punto  $B$ ; luego sin parar bajaría hasta  $D$ , corriendo hasta  $A$ , y otra vez abajo y etc. Una pelota dentro de una superficie perfectamente lisa (sin aire que estorbe el movimiento) iría de ida y vuelta por siempre...

Entonces, aunque parezca (figura 86), que  $ACB$  es la montaña, físicamente aquí es un sitio plano. Solamente del punto de vista de la geometría existe la montaña.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE**



**CAPÍTULO QUINTO  
SIN TABLAS NI FORMULAS**

**Contenido:**

1. [Cálculo del seno](#)
2. [Extraer raíz cuadrada](#)
3. [Encontrar ángulo por seno](#)
4. [Altura del Sol](#)
5. [Distancia hacia la isla](#)
6. [La anchura de un lago](#)
7. [Terreno triangular](#)
8. [Cálculo de ángulos sin ningún tipo de medición](#)

**1. Cálculo del seno.**

En este capítulo vamos a enseñar, como calcular los lados del triángulo con precisión hasta 2% y los ángulos con la precisión de hasta 1°, usando únicamente el concepto del seno y sin apelar a tablas ni fórmulas. Esta trigonometría simplificada puede ser útil durante un paseo, cuando no hay tablas y las fórmulas están olvidadas. Robinson Crusoe en su isla pudo usar esta trigonometría con éxito.

Pues, imaginaremos, que nosotros no conocemos todavía la trigonometría o está completamente olvidada, ¿No es difícil de imaginar, verdad? Empezaremos estudiar desde el principio. ¿Qué es el seno del ángulo agudo? Es la proporción del cateto alterno a la hipotenusa en aquel triángulo, el que está cortado por el perpendicular desde el ángulo hasta uno de sus lados. Por ejemplo, el seno de ángulo a (figura 87) es

$$\frac{BC}{AB}, \text{ o } \frac{ED}{AD}, \text{ o } \frac{D'E'}{AD'}, \text{ o } \frac{B'C'}{AC'}$$

Es fácil de ver, que por causa de semejanza de los triángulos, todas esas proporciones son equivalentes una a otra.

¿A qué son equivalentes los senos de diferentes ángulos de 1° a 90°? ¿Cómo saber sin tablas? Es fácil: se necesita crear la tabla de los senos por sí mismo. Eso es lo que vamos a hacer ahora.

Empezaremos por aquellos ángulos, donde los senos ya los conocemos de la geometría. Antes de todo, el ángulo de 90°, su seno es 1. Después el de 45°, su seno es fácil de

calcular por el teorema de Pitágoras; es equivalente a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , es decir, 0,707. Luego conocemos el seno de  $30^\circ$ ; como el cateto, alterno de este ángulo, es equivalente a la mitad de la hipotenusa, entonces, el seno de  $30^\circ = \frac{1}{2}$ .

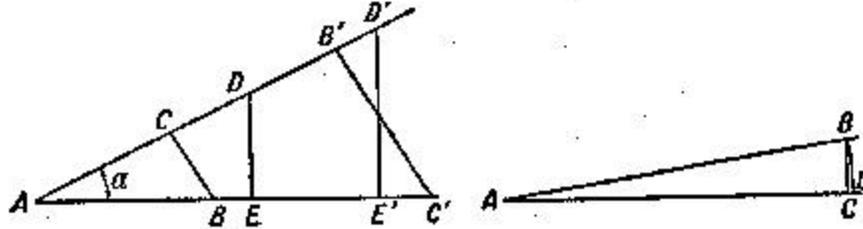


Figura 87. ¿Qué es el seno de ángulo agudo?

O sea, sabemos los senos ( designación es sen) de los tres ángulos.

$$\begin{aligned}\text{sen } 30^\circ &= 0,5 \\ \text{sen } 45^\circ &= 0,707 \\ \text{sen } 90^\circ &= 1.\end{aligned}$$

Eso es, evidentemente, insuficiente; deberemos saber a los senos de todos los ángulos intermedios, por lo menos de cada grado. Para la búsqueda del seno de los ángulos muy pequeños podemos utilizar a su vez la proporción del cateto e hipotenusa, coger la

proporción del arco y radio: en el dibujo 87 (a la izquierda) vemos, que la proporción  $\frac{BC}{AB}$ .

no tiene gran diferencia de  $\frac{BD}{AB}$ . La ultima es fácil de calcular. Por ejemplo, para ángulo de  $1^\circ$ , el arco

$$BD = \frac{2 \times \pi \times R}{360}$$

y, por lo tanto,  $\text{sen } 1^\circ$  podemos tomar como equivalente a

$$\frac{2 \times \pi \times R}{360 \times R} = \frac{\pi}{180} = 0,0175$$

De esta manera encontraremos:

$$\begin{aligned}\text{sen } 2^\circ &= 0,0349 \\ \text{sen } 3^\circ &= 0,0524 \\ \text{sen } 4^\circ &= 0,0698 \\ \text{sen } 5^\circ &= 0,0873\end{aligned}$$

Pero tenemos que asegurarnos hasta qué punto podemos hacer esta tabla, sin cometer errores significativos. Si, por ejemplo, de esta manera, buscáramos el  $\text{sen } 30^\circ$ , entonces obtendremos 0,524 en vez de 0,500; El error del calculo seria  $24/500$ , es decir, 5%. Es demasiado, aunque solamente para nuestro caso. Para encontrar el límite, hasta el que podemos llevar el cálculo de los senos, probaremos encontrar el  $\text{sen } 15^\circ$  por la manera más certera. Para esto utilizaremos la siguiente construcción no muy complicada (figura 88).

Sea,  $\text{sen } 15^\circ = \frac{BC}{AB}$ . Prolongamos BC hasta D; unimos A con D, así obtenemos dos triángulos iguales: ADC y ABC, y el ángulo BAD es equivalente a  $30^\circ$ . Bajamos hasta AD la perpendicular BE; se ha construido un triángulo rectángulo BAE con el ángulo de  $30^\circ$  ( $\angle BAE$ ), entonces  $BE = \frac{AB}{2}$ . Luego se calcula AE del triángulo ABE por medio del teorema de Pitágoras:

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} AB^2$$

$$AE = \frac{AB}{2} \sqrt{3} = 0,866 \times AB$$

Entonces,

$$ED = AD - AE = AB - 0,866 \times AB = 0,134 \times AB.$$

Ahora del triángulo BED calcularemos BD:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0,134 \times AB)^2 = 0,268 \times AB^2$$

$$BD = \sqrt{0,268 \times AB^2} = 0,518 \times AB$$

Es la mitad de BD, es decir BC, es  $0,259 \times AB$ , de aquí se deduce que el seno buscado es

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{0,259 \times AB}{AB} = 0,259$$

Esto es el  $\text{sen } 15^\circ$  con tres cifras significativas. Su valor es aproximado al encontrado por nosotros, es 0,262.

Comparando a los valores 0,259 y 0,262 y vemos que limitándose a dos cifras significativas, obtenemos:

$$0,26 \text{ y } 0,26$$

es decir, los resultados son idénticos. El error con el cambio con el resultado más certero (0,259) al aproximarlos a 0,26, se calcula como  $1/1000$ , es decir, 0,4%. Esta equivocación es permisible para los cálculos de marcha, y por lo tanto, los senos de ángulos de  $1^\circ$  hasta  $15^\circ$  los podremos calcular con nuestro modo encontrado.

Para el espacio de  $15^\circ$  a  $30^\circ$  nosotros podemos calcular los senos con la ayuda de las proporciones. Vamos a discurrir así: la diferencia entre el  $\text{sen } 30^\circ$  y  $\text{sen } 15^\circ$  es equivalente a  $0,50 - 0,26 = 0,24$ . Entonces podemos aceptar que con el crecimiento de un grado de cada ángulo, su seno crece, aproximadamente, en  $1/15$  de esta diferencia, es decir, en

$$0,24/15 = 0,016.$$

La realidad no es así, pero el error aparece en la tercera cifra significativa, la que nosotros hemos quitado. Añadiendo 0,016 al  $\text{sen } 16^\circ$ , obtenemos los senos de  $16^\circ$ ,  $17^\circ$ ,  $18^\circ$  y etc.:

$$\begin{aligned} \text{sen } 16^\circ &= 0,26 + 0,016 = 0,28 \\ \text{sen } 17^\circ &= 0,26 + 0,032 = 0,29 \\ \text{sen } 18^\circ &= 0,26 + 0,048 = 0,31 \\ &\dots \\ \text{sen } 25^\circ &= 0,26 + 0,16 = 0,42 \text{ y etc.} \end{aligned}$$

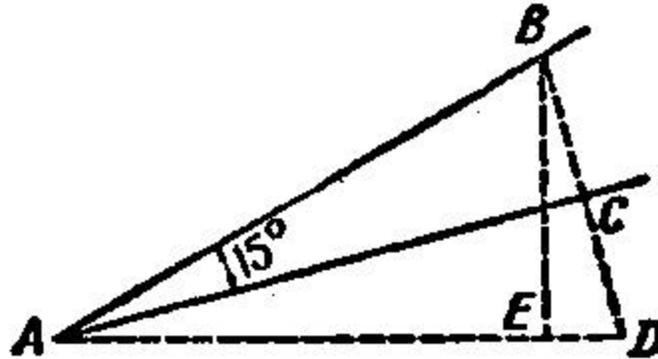


Figura 88. ¿Cómo calcular el seno de  $15^\circ$ ?

Todos estos senos son correctos en las primeras cifras decimales, es decir, son suficiente para nuestros objetivos.

De misma manera calculan los ángulos en el intervalo de  $30$  a  $45^\circ$ .

La diferencia

$$\text{sen } 45^\circ - \text{sen } 30^\circ = 0,707 - 0,5 = 0,207.$$

Dividiendo por  $15$ , tenemos  $0,014$ . Este resultado se le añade al  $\text{sen } 30^\circ$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{sen } 31^\circ &= 0,54 - 0,014 = 0,51 \\ \text{sen } 32^\circ &= 0,54 - 0,028 = 0,53 \\ &\dots \\ \text{sen } 40^\circ &= 0,5 + 0,14 = 0,64 \text{ y etc.} \end{aligned}$$

No queda solo encontrar los senos de ángulos agudos mayores de  $45^\circ$ . En esto ayudara el teorema de Pitágoras. Sea, por ejemplo, queremos encontrar  $\text{sen } 53^\circ$ , es decir, (figura 90)

la proporción  $\frac{BC}{AB}$ . Como el ángulo  $B = 37^\circ$ , entonces su seno lo podemos calcular sobre

anterior: es equivalente a  $0,5 + 7 \cdot 0,014 = 0,6$ . Por otra parte sabemos, que

$$\text{sen } B = \frac{AC}{AB} \times \frac{AC}{AB} = 0,6$$

Donde  $AC = 0,6 \cdot AB$ . Sabiendo  $AC$ , es fácil de calcular  $BC$ . Este segmento es

$$\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{AB^2 - (0,6 \times AB)^2} = AB \sqrt{1 - 0,36} = 0,8 \times AB$$

En principio el calculo no es tan difícil; Solamente es necesario saber calcular las raíces cuadradas.

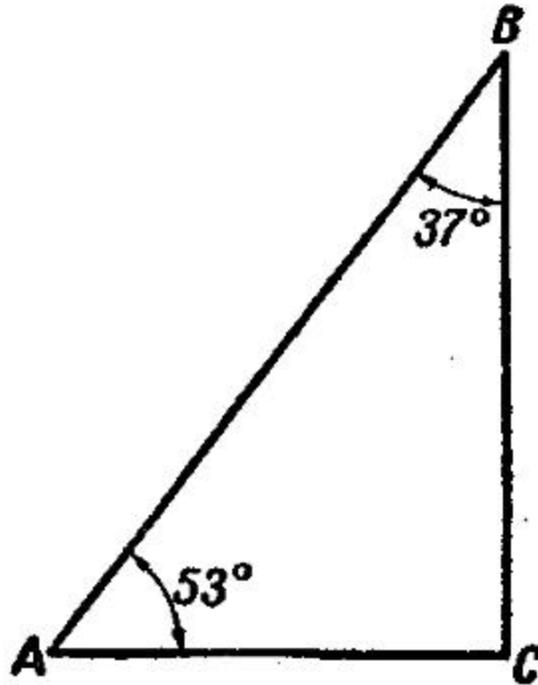


Figura 89. Para el cálculo de seno del ángulo mayores de 45°.

[Volver](#)

## 2. Extraer raíz cuadrada.

En los manuales míos de geometría hay un modo simplificado y muy antiguo para extraer la raíz cuadrada por medio de la división. Aquí voy a explicar el otro modo antiguo, que es más fácil, como aquellos modos del curso de álgebra.

Supongamos que necesitamos encontrar  $\sqrt{13}$ . Ella está entre 3 y 4, por lo tanto, es equivalente a 3 con fracción, el que indicaremos por  $x$ . Entonces,

$$\sqrt{13} = 3 + x$$

elevando al cuadrado (aplicación del cuadrado del binomio) entonces

$$13 = 9 + 6x + x^2$$

El cuadrado de la porción  $x$  es la pequeño, y por lo tanto, para tener una primera aproximación, no tomaremos en cuenta.

Luego tenemos:

$$13 = 9 + 6x$$

de donde

$$6x = 4 \text{ y } x = 2/3 = 0,67.$$

Entonces, aproximadamente,

$$\sqrt{13} = 3,67.$$

Si queremos saber el resultado de la raíz mas exacto, escribiremos ecuación:

$$\sqrt{13} = 3 \frac{2}{3} + y$$

donde habrá una fracción positiva o negativa no muy grande.  
De aquí

$$13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$$

Quitando  $y^2$ , hallaremos que  $y$  es equivalente a  $-2/33 = -0,06$   
Por lo tanto en la otra aproximación

$$\sqrt{13} = 3,67 - 0,06 = 3,61.$$

La tercera aproximación se encuentra por el mismo modo y así sucesivamente.

Por el modo habitual, que enseña nos álgebra, obtendremos  $\sqrt{13}$  con una precisión de hasta 0,01, también 3,61.

[Volver](#)

### 3. Encontrar el ángulo por su seno.

Pues, tenemos posibilidad de calcular el seno de cualquier ángulo de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  con dos cifras decimales. Tener las tablas preparadas no hace falta; para cálculos aproximados nosotros siempre podemos preparar las tablas, si deseamos.

Pero para solucionar las tareas trigonométricas se necesita saber o si no, calcular ángulos por el seno indicado. Eso también no es difícil. Se necesita encontrar el ángulo cuyo seno es 0,38. Como el seno es menos de 0,5, entonces el ángulo buscado será menos de  $30^\circ$ . Pero es mas de  $15^\circ$ , como  $\sin 15^\circ$ , lo sabemos, es 0,26. Para encontrar un ángulo entre  $15^\circ$  a  $30^\circ$ , seguimos las explicaciones del artículo "Cálculo del seno".

$$0,38 - 0,26 = 0,12$$

$$\frac{0,12}{0,016} = 7,5^\circ$$

$$15^\circ + 7,5^\circ = 22,5^\circ.$$

Entonces el ángulo buscado es  $22,5^\circ$ .

Otro ejemplo, encontrar el ángulo cuyo seno es 0,62.

$$0,62 - 0,50 = 0,12$$

$$\frac{0,12}{0,014} = 8,6^\circ$$

$$30^\circ + 8,6^\circ = 38,6^\circ$$

El ángulo buscado es, aproximadamente,  $38,6^\circ$ .

Por fin, el tercer ejemplo: Encontrar el ángulo, cuyo seno es 0,91.

Como el seno indicado está entre  $0,71$  y  $1$ , entonces, el ángulo está entre de  $45^\circ$  y  $90^\circ$ . En la figura 91,  $BC$  es el seno de ángulo  $A$ , si  $BA = 1$ . Sabiendo  $BC$ , es fácil de encontrar el seno de ángulo  $B$ :

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0,91^2 = 1 - 0,83 = 0,17$$

$$AC = \sqrt{0,17} = 0,41$$

Ahora encontraremos el valor de ángulo  $B$ , el seno de cual es  $0,41$ ; después será fácil de encontrar el ángulo  $A$ , equivalente a  $90^\circ - B$ . Como  $0,41$  esta dentro de  $0,26$  y  $0,5$ , entonces ángulo  $B$  esta en el espacio entre de  $15^\circ$  y  $30^\circ$ . Se encuentra así:

$$0,41 - 0,26 = 0,15$$

$$\frac{0,15}{0,015} = 10^\circ$$

$$B = 15^\circ + 10^\circ = 25^\circ$$

$$A = 90^\circ - B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

Ahora tenemos todo lo necesario para solucionar las tareas trigonométricas, como ya sabemos buscar los senos por ángulos y ángulos por senos con una exactitud suficientemente para nuestros objetivos.

Pero, ¿es lo suficiente saber solo un seno? ¿No deberemos tener en cuenta otras funciones trigonométricas, como coseno, tangente y etc.? Ahora vamos a dar un par de ejemplos, donde para nuestra trigonometría simplificada es necesario aprovechar solo el seno.

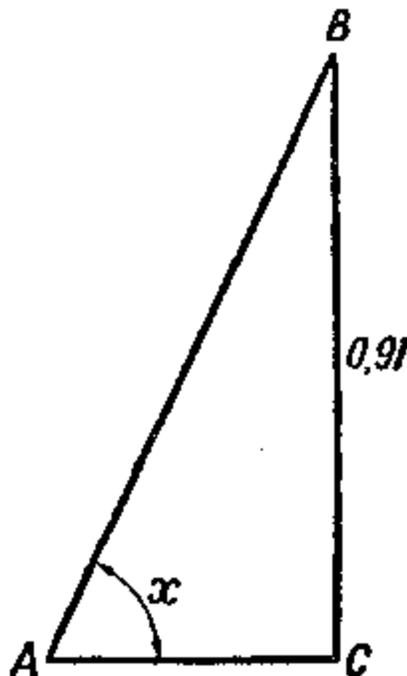


Figura 90. Cálculo del ángulo agudo por su seno.

[Volver](#)

#### 4. Altura del Sol.

**Problema**

La sombra  $BC$  (figura 91) de la pértiga  $AB$  con altura de  $4,2\text{ m}$  tiene  $6,5\text{ m}$  de longitud. ¿Cuál es la altura del Sol sobre horizonte en este momento, o sea, cual es el valor del ángulo  $C$ ?

**Solución**

Es fácil de comprender, que el seno de ángulo  $C$  es  $\frac{AB}{AC}$

Pero

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4,2^2 + 6,5^2} = 7,74$$

Por eso el seno buscado es equivalente a

$$\frac{4,2}{7,74} = 0,55$$

Por el modo dicho anteriormente buscaremos el ángulo correspondiente y resulta  $33^\circ$ . La altura del Sol es de  $33^\circ$ , con una precisión de hasta  $\frac{1}{2}^\circ$ .

*Figura 91. Encontrar altura del Sol sobre horizonte*

[Volver](#)

**5. Distancia hacia la isla.****Problema**

Paseando con brújula cerca de río, vemos una isleta  $A$  (figura 92) y deseamos encontrar su trayecto desde el punto  $B$  en la orilla. Para eso buscaremos el valor de ángulo  $ABN$ , formado por sentido norte – sur ( $NS$ ) y por una recta  $BA$ . Después medimos la recta  $BC$  y buscaremos el valor de ángulo  $NBC$  entre ella y  $NS$ . Por fin, hacemos lo mismo en el punto  $C$  para la recta  $AC$ .

Nuestros resultados son:

El sentido	$AB$	inclina de $NS$ hacia al este sobre	$52^\circ$
"	$BC$	"	$110^\circ$
"	$AC$	"	$27^\circ$

Longitud de  $BC = 187\text{ m}$ .

¿Cómo sobre estos datos buscar el trayecto  $BA$ ?

**Solución**

En el triángulo  $ABC$  sabemos:  
el lado  $BC$ .

$$\text{El ángulo } ABC = 110^\circ - 52^\circ = 58^\circ$$

$$\text{ángulo } ACB = 180^\circ - 110^\circ - 27^\circ = 43^\circ.$$

Bajaremos en este triángulo (figura 92, a la derecha) la cima  $BD$  y tenemos

$$\text{sen}C = \text{sen}43^\circ = \frac{BD}{187}$$

Calculando por el modo dicho el  $\text{sen } 43^\circ$ , obtenemos  $0,68$ . Entonces,

$$BD = 187 \times 0,68 = 127.$$

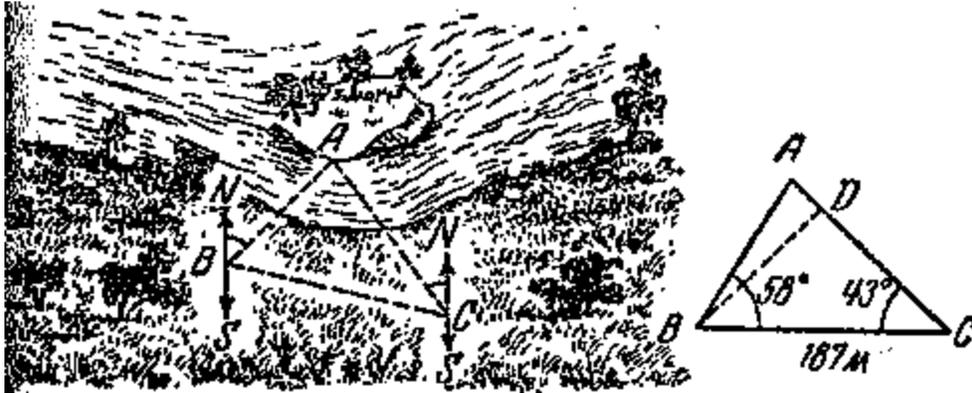


Figura 92. ¿Cómo calcular el trayecto hacia la isla?

Ahora en el triángulo  $ABD$  conocemos el cateto  $BD$

$$\text{ángulo } A = 180^\circ - (58^\circ - 43^\circ) = 79^\circ$$

ángulo  $ABD = 90^\circ - 79^\circ = 11^\circ$ ;  $\text{sen } 11^\circ$  lo podemos calcular:  $0,19$ . Por lo tanto  $AD/AB = 0,19$ . Por otra parte, por teorema de Pitágoras

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Poniendo  $0,19 \cdot AB$  en lugar de  $AD$ , y en vez de  $BD$  el número  $127$ , tenemos:

$$AB^2 = 127^2 + (0,19 \cdot AB)^2,$$

Donde  $AB \gg 128$ .

Entonces la distancia hacia la isla es  $\gg 128 \text{ m}$ .

No pienso que los lectores tendrán complicaciones de buscar el lado  $AC$ , si por acaso hacía falta.

[Volver](#)

## 6. La anchura de un lago.

Problema

Para conocer anchura del lago (dibujo 93), Uds. habían encontrado con la brújula, que la recta  $AC$  inclina hacia oeste sobre  $21^\circ$ , y  $BC$  – hacia este sobre  $22^\circ$ . Longitud  $BC = 68 \text{ m}$ ,  $AC = 35 \text{ m}$ . Hacer el cálculo con estos datos.

Solución

En el triángulo  $ABC$  conocemos ángulo de  $43^\circ$  y las longitudes de sus lados encerrados,  $68 \text{ m}$  y  $35 \text{ m}$ . Bajaremos (figura 93, a la derecha) el vértice  $A$ ; Tenemos  $\text{sen } 43^\circ = AD/AC$ . Calcularemos, independiente de esto,  $\text{sen } 43^\circ$  y recibiremos:  $0,68$ . Entonces  $AD/AC = 0,68$ ,  $AD = 0,68 \cdot 35 = 24$ . Luego hacemos el cálculo de  $CD$ :

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649; \quad CD = 25,5;$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25,5 = 42,5.$$

Ahora del triángulo  $ABD$  tenemos:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42,5^2 = 2380;$$

$$AB \gg 49.$$

Entonces, anchura buscada de lago es, aproximadamente, 49 m.

Si, por acaso, en el triángulo ABC necesitamos encontrar los otros dos ángulos, entonces, encontrando  $AB = 49$ , seguimos adelante así:

$$\text{sen}B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} = 0,49 \Rightarrow B = 29^\circ$$

El tercer ángulo C encontrará, restando de  $180^\circ$  la suma de los ángulos de  $29^\circ$  y  $43^\circ$ ; Es  $108^\circ$ .

Puede ocurrir, que en el caso examinado de la solución (por dos lados y ángulo entre ellos) ángulo actual no es agudo, seno obtuso. Si, por ejemplo, en el triángulo ABC (dibujo 94) son conocido el ángulo obtuso y dos lados, AB y AC, entonces, el paso de calculo sus elementos en resta, es siguiente:

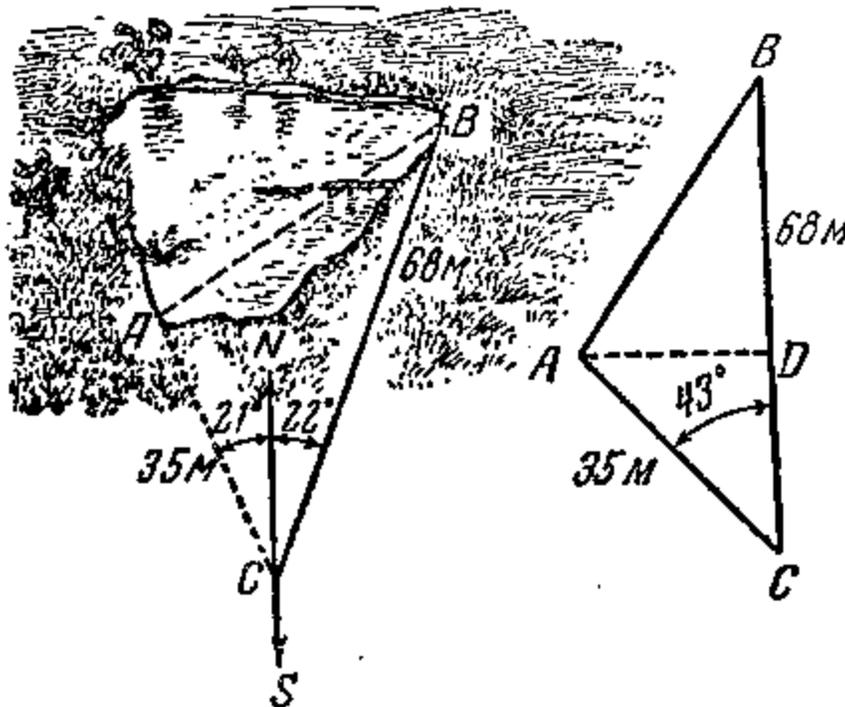


Figura 93. El calculo de anchura del lago.

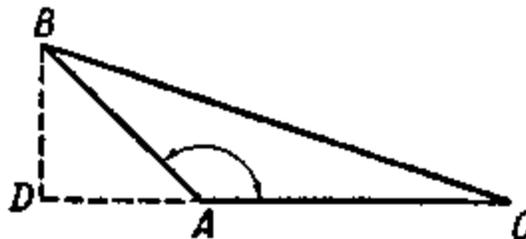


Figura 94. Para resolución del triángulo obtuso.

Bajando el vértice  $B$ , buscan  $BD$  y  $AD$  del triángulo  $BDA$ ; luego sabiendo  $DA + AC$ , encuentran  $BC$  y  $\text{sen } C$ , calculando la proporción  $BD/BC$

[Volver](#)

### 7. Terreno triangular.

#### Problema

Durante la una excursión nosotros habíamos medido con los pasos a los lados de un terreno triangular y ya sabemos, que ellos son equivalentes a 34, 60 y 54. ¿Cuáles son ángulos del triángulo?

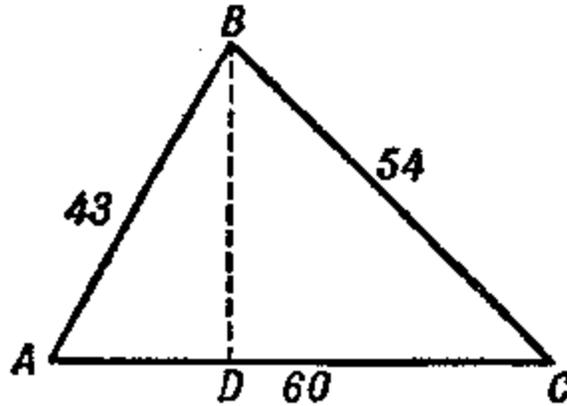


Figura 95. Encontrar los ángulos de este triángulo: 1) calculando 2) con ayuda de transportador.

#### Solución

Este es el caso más difícil de solución: Sobre tres lados. Sin embargo, podemos lograrlo, sin utilizar ninguna función aparte del seno.

Bajando (figura 95) el vértice  $BD$  sobre el lado mas largo  $AC$ , tenemos:

$$BD^2 = 43^2 - AD^2, \quad BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

de donde

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2,$$

$$DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070.$$

Pero

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60(DC - AD).$$

Se deduce,

$$60(DC - AD) = 1070 \quad \text{y} \quad DC - AD = 17,8.$$

De las dos ecuaciones

$$DC - AD = 17,8 \quad \text{y} \quad DC + AD = 60$$

Obtenemos

$$2DC = 77,8, \quad \text{es decir} \quad DC = 38,9.$$

Ahora es fácil de calcular la altura:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38,9^2} = 37,4$$

De aquí buscamos:

$$\text{sen}A = \frac{BD}{BC} = \frac{37,4}{43} = 0,87 \Rightarrow A \approx 60^\circ$$

$$\text{sen}C = \frac{BD}{BC} = \frac{37,4}{54} = 0,69 \Rightarrow C \approx 44^\circ$$

$$\text{Tercer ángulo } B = 180 - (A + C) = 76^\circ$$

Si en este caso se hubieran calculando con ayuda de las tablas, siguiendo todas las reglas de trigonometría, entonces obtendremos los ángulos, expresados por los grados y minutos. Como los lados se midieron con pasos, entonces, los minutos serían erróneos, por que los lados medidos por los pasos, tienen equivocación no menos de 2 – 3%. Entonces, para qué engañarse a si mismo, las cantidades “ciertas” de los ángulos obtenidos, necesitaremos redondear, por la menos, a los grados enteros. Y luego obtendremos los mismos resultados, los que encontrábamos anteriormente, aprovechando la manera más simple. El interés de nuestra trigonometría “de marcha” es aquí evidentemente.

[Volver](#)

### 8. Cálculo de ángulo sin ningún tipo de medición.

Para medir los ángulos de un terreno necesitamos por la menos la brújula, a veces es suficiente usar los dedos o una caja de cerillas. Pero puede aparecer en caso de necesidad extrema de medir ángulos, señalados en una mapa o plano.

Evidentemente, si tendremos transportador, entonces la pregunta se soluciona fácil. ¿Y si no hay? Un geómetra no tiene que perderse en este caso. ¿Cómo se soluciona esta este problema?

Problema

En la figura 96 hay una imagen de ángulo  $AOB$ , menor de  $180^\circ$ . Encuentren su cantidad sin ningún tipo de medición.

Solución

Es posible de un punto cualquiera del lado  $BO$  bajar la perpendicular sobre lado  $AO$ , en el triángulo rectángulo obtenido, medir a los catetos y la hipotenusa, encontrar el seno del ángulo, y luego el valor del mismo ángulo (veamos “Buscar ángulo por el seno”). Pero esta solución no corresponde a nuestras duras condiciones - ¡Sin medir!

Aprovecharemos la resolución, que propuso Z. Rupeyka de ciudad Kaunas en año 1946.

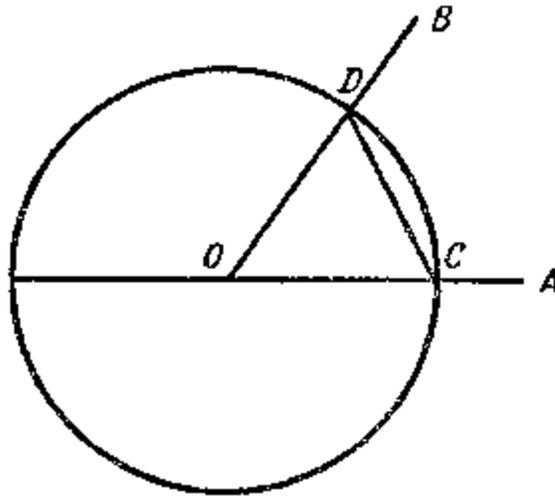


Figura 96. ¿Cómo encontrar cantidad de ángulo AOB, utilizando solo compás?

Desde el vértice  $O$ , como desde el centro, con abertura espontánea del compás construimos circunferencia.  $C$  y  $D$  los puntos de su intersección unimos con el segmento a los lados de ángulo.

Ahora desde el  $C$  punto principal sobre circunferencia vamos a gradualmente apartar con ayuda del compás la cuerda  $CD$ , siguiendo al mismo sentido hasta que la pata del compás no se une con el  $C$  punto principal de nuevo.

Dejando las cuerdas, tenemos que contar, cuantas veces durante el tiempo daremos la vuelta alrededor de circunferencia y cuantas veces era dejada la cuerda.

Pongamos, que dieron la vuelta alrededor de circunferencia  $n$  veces y durante este tiempo  $S$  veces dejando la cuerda  $CD$ . Entonces, el ángulo buscado será:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ \times n}{S}$$

En realidad, será mejor el ángulo tiene de  $x^\circ$ ; Dejando la cuerda  $CD$  sobre circunferencia  $S$  veces, aparezca que nosotros hicimos ampliar ángulo  $x^\circ$  en  $S$  veces, pero como la circunferencia tenía vueltas a su alrededor  $n$  veces, entonces el ángulo calcula de  $360^\circ \cdot n$ , es decir,  $x^\circ \cdot S = 360^\circ \cdot n$ ; de aquí

$$x^\circ = \frac{360^\circ \times n}{S}$$

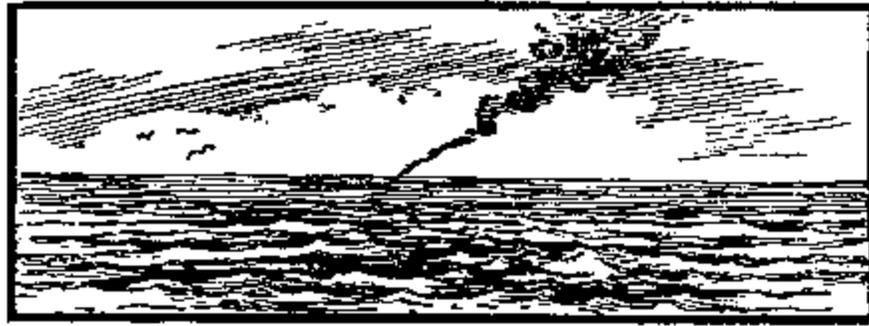
Para ángulo de dibujo lineal,  $n = 3$ ,  $S = 20$  (¡Comprueben!); Por lo tanto,  $\angle AOB = 54^\circ$ . Con falta de compás la circunferencia podemos circunscribir con ayuda de un alfiler y una cinta de papel; dejar la cuerda, utilizando también cinta del papel.

Problema

Necesita encontrar con el modo señalado los ángulos de triángulo aprovechando la figura 95.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE**



**CAPITULO SEXTO  
DONDE LA TIERRA SE JUNTA CON EL CIELO**

**Contenido:**

1. [Horizonte](#)
2. [Barco en el horizonte](#)
3. [Distancia del horizonte](#)
4. [Torre de Gogol](#)
5. [Colina de Pushkin](#)
6. [Dónde se juntan los rieles](#)
7. [Tareas sobre el faro](#)
8. [El rayo](#)
9. [El velero](#)
10. [Horizonte en la luna](#)
11. [En el cráter lunar](#)
12. [En Júpiter](#)
13. [Ejercicios Independientes](#)

**1. Horizonte**

En la estepa o en un campo llano nosotros estamos en el centro de una circunferencia, cual limita a la superficie terrestre accesible para nuestro ojo. Es el horizonte. La línea del horizonte es imperceptible: Cuando nos acercamos a ella, ella se aleja. Aunque inaccesible, ella en realidad existe; no es una ilusión o espejismo.

Para cada punto de observación hay un su límite visual de superficie, y la lejanía de este límite no es difícil de calcular. Para entender las proporciones geométricas, relacionadas con horizonte, veamos la figura 97, reflejando la parte de la esfera terrestre. En el CD es la altura sobre la superficie que se encuentra un punto C, que es el ojo de observador. ¿Qué lejanía alrededor de sí mismo se ve observador? Evidentemente, hasta los puntos M, N, donde el rayo de vista toca la superficie: después la tierra está bajo de la vista. Estos puntos M, N (y otros en la circunferencia MEN) representan el límite de la superficie terrestre visible, es decir, forman la línea del horizonte. El observador ve que aquí el cielo esta apoyándose sobre la tierra, porque al mismo tiempo se ve el cielo y algunos objetos terrestres.

Puede ser, os parece, que la figura 97 no da la imagen verdadera de la realidad: en la realidad el horizonte siempre esta en nivel de los ojos, mientras que en el dibujo el círculo esta bajo de observador.

Realmente, para nosotros siempre parece que la línea del horizonte está en el mismo nivel con los ojos, además, se sube, cuando nosotros subimos. Pero esto es ilusión: en realidad, la línea de horizonte siempre está bajo de los ojos, como se ve en la figura 97. Pero el ángulo formado por las líneas rectas CN y CM con la recta CK, perpendicularmente al radio en el punto O (este ángulo se llama "bajada del horizonte"), es demasiado pequeño, y sin aparato es imposible de ver.

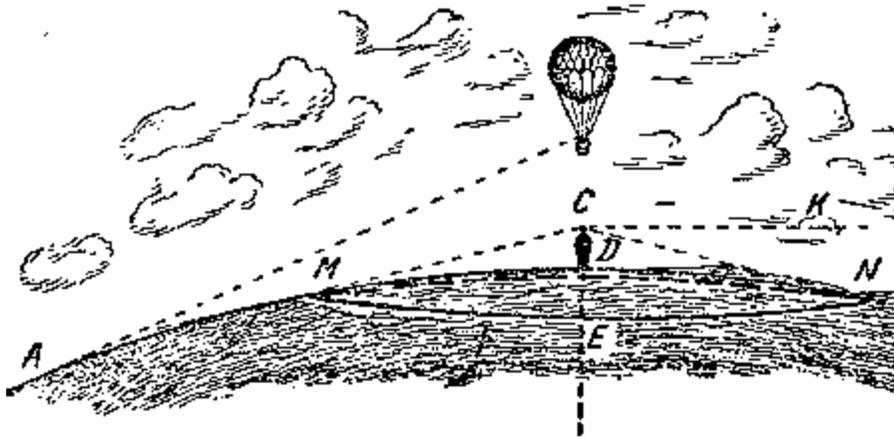


Figura 97. El horizonte

Durante de investigación anotamos otra circunstancia curiosa. Hemos dicho que cuando se sube el observador sobre la superficie terrestre, por ejemplo en un aeroplano, la línea de horizonte se fija nivel de los ojos, es decir, como se sube junto con observador. Si él se sube lo bastante, aparece que la tierra bajo aeroplano está *situada mas bajo de la línea del horizonte*, de otro modo, la tierra se representa con forma de taza hundida, cuyos bordes es la línea del horizonte. Esto está bien explicado y descrito en las "Aventuras de Granza Pfal" por Edgar Alan Poe.

"Sobre todo, dice su protagonista aeronauta, me había sorprendido aquella circunstancia, que la superficie terrestre aparecía cóncava. Esperaba ver un hundimiento durante la subida; solamente considerando he encontrado la respuesta para este fenómeno. La línea inclinada, llevada desde el globo mío hasta la tierra, formaba el cateto del triángulo rectángulo, cuya base sería la línea desde el fondo de la inclinación hasta el horizonte, hipotenusa, la línea desde el horizonte hasta el globo. Pero la altura mía era nada comparado con el campo visual; de otra manera, la base y hipotenusa del triángulo rectangular imaginario, eran tan grandes comparados con el cateto inclinado, que parecen paralelos. Por eso, cualquier punto estando por debajo de aeronauta, siempre parece bajo del nivel horizontal. De aquí se ve la impresión de hundimiento. Y esto tiene que durar hasta que la subida no es lo bastante significativa, cuando la base de triángulo y su hipotenusa acaban por aparecer paralelas."

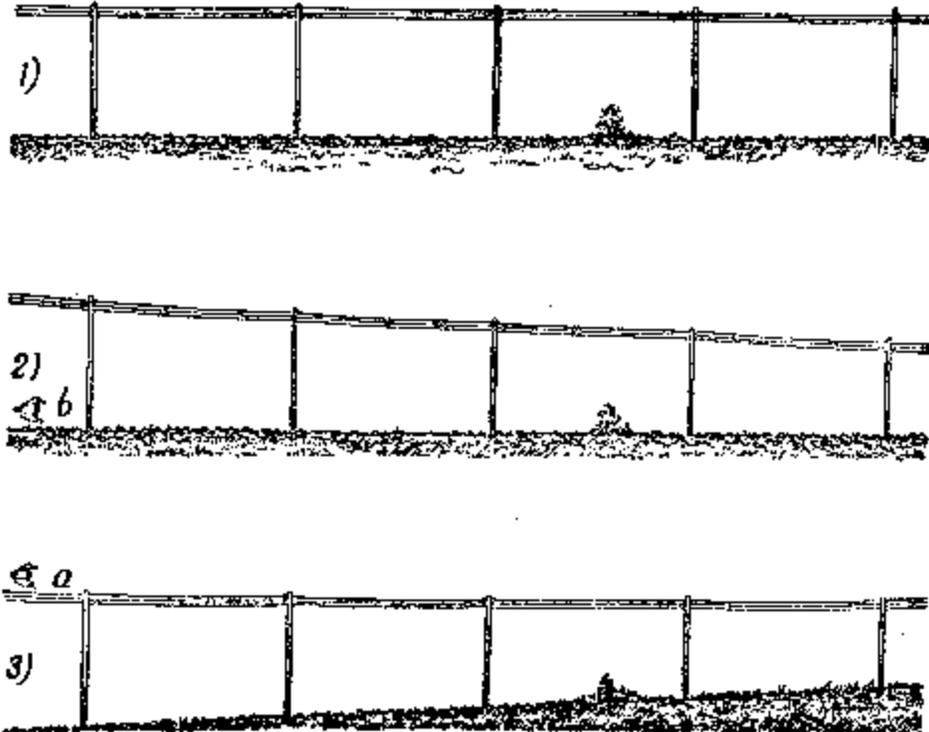


Figura 98. ¿Qué ve el ojo, observando la serie de postes telegráficos?

Añadimos otro ejemplo más. Imaginen una serie de postes telegráficos (figura 98). Para el ojo estando en el punto  $b$ , sobre nivel básico de los postes, la fila toma un aspecto, indicado por numero 2. Pero para el ojo estando en el punto  $a$ , sobre nivel de las cimas, la fila tomara el aspecto 3, es decir, la tierra parece que sube sobre horizonte.

[Volver](#)

## 2. Barco en el horizonte.

Cuando desde la costa observamos un barco, apareciendo en el horizonte, nos parece que vemos el barco no en el mismo punto (figura 99), donde él está situado, mas cerca, en el punto  $B$ , donde nuestra vista es tangente a la concavidad del mar. Observando a simple vista, es difícil de dejar la impresión, que el barco esta en punto  $B$ ; y no detrás de horizonte.



Figura 99. Barco detrás de horizonte..

Sin embargo, con el catalejo, la diferencia de alejamiento del barco se ve con mas claridad. No es lo mismo ver con el catalejo los objetos cercanos y lejanos: el catalejo enfocado a la lejanía, los objetos cercanos se ven imprecisamente, y por el contrario, si de enfoca a los objetos cercanos, se ve lejanía cubierta con la niebla.

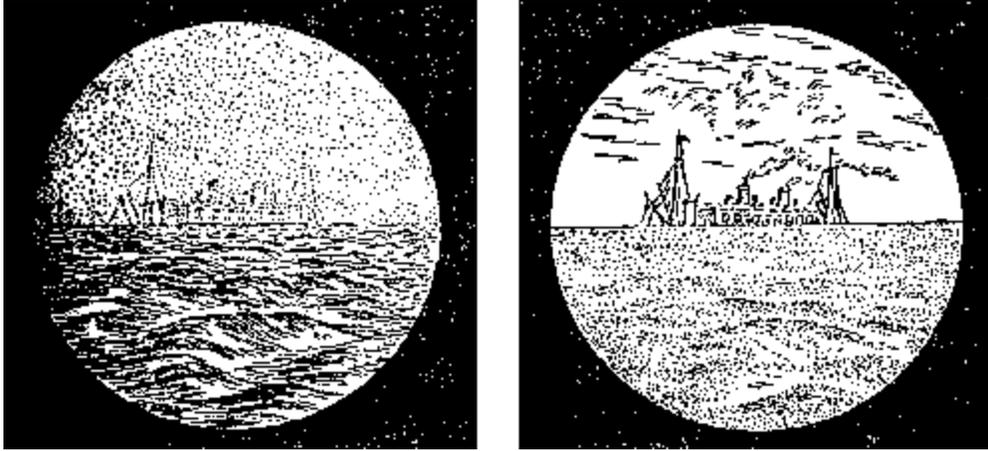


Figura 100 y 101. Barco detrás del horizonte, observado en catalejo.

Si apuntamos el catalejo (con la suficiente ampliación) sobre el horizonte y lo mantenemos así, cuando superficie acuática se ve claramente, el barco se representa impreciso, encontrando su mayor alejamiento desde el punto de observación (figura 100). Lo contrario, apuntando el catalejo así, se ve el contorno del barco, escondido detrás del horizonte, notamos, que la superficie ha perdido su claridad y se ve como cubierta con la niebla (figura 101).

[Volver](#)

### 3. Distancia del horizonte.

¿Qué lejos se encuentra línea del horizonte del observador? O sea, ¿Cuál es el tamaño del radio de la circunferencia, dentro de cual nos encontramos en este momento?

¿Cómo calcular distancia del horizonte, sabiendo la altura del observador por sobre la superficie?

La tarea tiene expresión en la cantidad del segmento  $CN$  (figura 102) por tangente, llevada desde el ojo de observador hasta superficie.

La tangente al cuadrado, lo sabemos de la geometría, es equivalente a la derivación del segmento exterior  $h$  secando sobre la toda longitud de este secante, es decir, sobre  $h + 2R$ , donde  $R$  es el radio de globo terrestre. Como la altura del observador por encima de superficie es normalmente, muy pequeña comparado con el diámetro ( $2R$ ) del globo, (esta altura, por ejemplo, para un aeroplano en su máxima altura es  $\approx 0,001$  de su parte), entonces  $2R + h$  usar su equivalente  $2R$ , y la formula se simplifica:

$$CN^2 = h \times 2R$$

Entonces, distancia del horizonte la podemos calcular por una formula muy simple.

$$\text{Dis tancia} = \sqrt{2 \times R \times h}$$

Donde  $R$  es el radio del globo terrestre ( $\approx 6400 \text{ km}$ ),  $h$  altura de la vista encima de superficie.

Como  $\sqrt{6400} = 80$ , entonces la fórmula puede tener otro aspecto:

$$\text{Dis tancia} = 80 \sqrt{2 \times h} = 113 \sqrt{h}$$

donde  $h$  está expresada en kilómetros.

Este cálculo es geométrico y simplificado. Si deseamos especificar bajo los factores físicos que influyen en la distancia del horizonte, entonces, deberemos recordar a un factor, cual se llama "refracción atmosférica". Refracción es la desviación de los rayos de luz en la atmósfera, amplía la distancia del horizonte sobre 1/15 del alejamiento calculado (sobre 6%). El número - 6% - es mediano. La distancia del horizonte se amplía o disminuye según las circunstancias siguientes:

**se amplía**

con alta presión  
cerca de superficie terrestre  
cuando hace frío  
por las mañanas y tardes  
húmedo  
encima del

**se disminuye**

con baja presión  
sobre una altura  
cuando hace calor  
en mediodía  
el tiempo seco  
encima de tierra

## Problema

¿Qué tan lejos puede ver una persona, estando en una llanura?

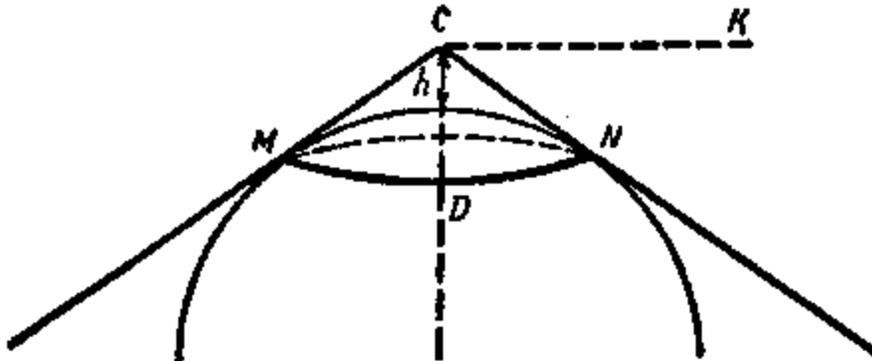


Figura 102 Para el problema sobre alejamiento de horizonte

## Solución

Sabiendo, que el ojo de un adulto alcanza por encima de superficie sobre 1,6 m, o sobre 0,0016 km, tenemos:

$$\text{Distancia} = 133 \cdot \sqrt{0,0016} = 4,52 \text{ km}$$

Como sabemos la refracción atmosférica desfigura el camino de los rayos, por lo tanto el horizonte se aleja por el menos sobre 6%, que es más lejos de aquella distancia que sale de la fórmula. Para tener en cuenta esta corrección, se necesita multiplicar 4,52 km por 1,06; y:

$$4,52 \cdot 1,06 \approx 4,8 \text{ km}$$

O sea, una persona de estatura media estando en una llanura no ve más lejos de 4,8 km. El diámetro del círculo observado es solamente 9,6 km, superficie es 72 km<sup>2</sup>. Es mucho menos de lo que piensa la mayoría de la gente, los que describen lejanías de estepas y llanuras.

## Problema

¿Qué tan lejos se ve el mar, estando en una lancha?

## Solución

La elevación del ojo de una persona sentada en una lancha sobre agua puede ser  $1\text{ m}$ , ó  $0,001\text{ km}$ , entonces, distancia del horizonte es:

$$\text{Distancia} = 133\sqrt{0,001} = 3,58\text{km}$$

o teniendo en cuenta la refracción atmosférica, es  $3,8\text{ km}$ . A los objetos muy lejanos se le ven las partes de arriba; las partes fundamentales están tapadas por el horizonte. El Horizonte se estrecha en la medida que los ojos están más bajos: para medio metro, por ejemplo, hasta  $2\frac{1}{2}\text{ km}$ . Y al contrario, observación desde los puntos elevados la distancia del horizonte aumenta: para  $4\text{ m}$ , por ejemplo, hasta  $7\text{ km}$ .

#### Problema

¿Qué tan lejos pudieron ver aeronautas, observando la tierra desde su nave "COAX-I", en momento de su máxima altura?

#### Solución

Cuando el globo está a una altura de  $22\text{ km}$ , entonces distancia del horizonte sobre esta elevación es

$$\text{Distancia} = 133\sqrt{22} = 530\text{km}$$

y teniendo en cuenta la refracción alrededor de  $580\text{ km}$ .

#### Problema

¿Cuántos kilómetros debería subir el piloto para ver tierra alrededor de  $50\text{ km}$ ?

#### Solución

De formula sobre distancia del horizonte, en este caso tenemos ecuación

$$50 = \sqrt{2 \times R \times h}$$

de donde

$$h = \frac{50^2}{2 \times R} = \frac{2500}{12.800} = 0,2\text{km}$$

Entonces es suficiente subir sobre  $200\text{ m}$ . Para tener en cuenta la corrección, quitaremos  $6\%$  de  $50\text{ km}$ , obtenemos  $47\text{ km}$

Luego

$$h = \frac{47^2}{2 \times R} = \frac{2200}{12800} = 0,17\text{km}$$

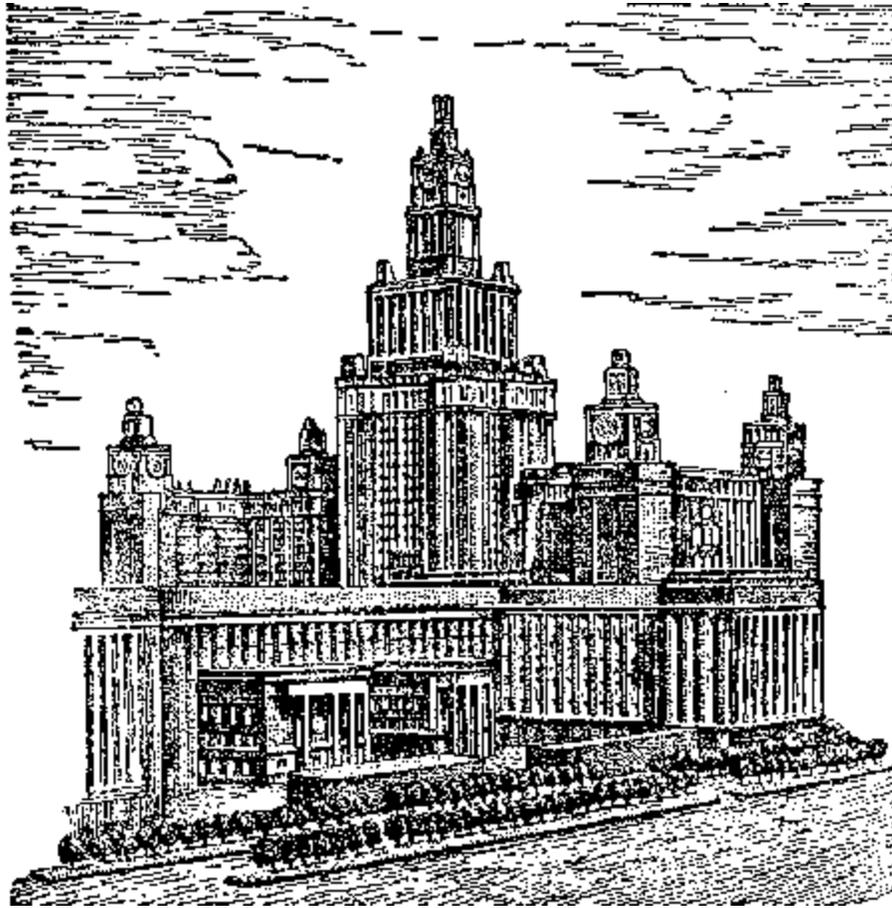


Figura 103. La universidad de Moscú (dibujo de proyecto del edificio en construcción)

En el sitio más alto de Moscú, están construyendo un edificio de veintiséis pisos (figura 103), uno de los mayores centros docentes del mundo. El se destaca por su altura, sobre 200 m encima del nivel de río Moscú.

Por lo tanto, desde los pisos mas altos de la Universidad se abre una vista panorámica de 50 km en radio.

[Volver](#)

#### 4. Torre de Gogol.

Problema

Es curioso, ¿qué se amplía más rápido, la altura de subida o la distancia del horizonte? La mayoría piensa que cuando el observador se sube mas alto, más rápido aumenta el horizonte. De esta manera pensó Gogol, escribiendo el artículo, sobre arquitectura contemporánea:

“Las torres muy altas, enormes, son imprescindibles para la ciudad...Nosotros habitualmente tenemos un limite de las alturas, dejando la posibilidad de observar una sola ciudad, mientras que necesitamos observar por la menos un medio centenar de verstas<sup>1</sup> alrededor, y para eso es suficiente tener un o dos pisos mas arriba, y todo cambiará. El volumen del horizonte, sobre esa elevación va a crecer progresivamente”.

¿En realidad es así?

Solución

---

<sup>1</sup> 1 verst equivale 1,0668 km; 150 verstas – 160 km.

Es suficiente ver la fórmula

$$\text{Distancia del horizonte} = \sqrt{2 \times R \times h}$$

para que desde el principio veamos el error de apreciación, donde el "volumen del horizonte" aumentará muy rápido con la subida de observador. Al contrario, distancia del horizonte aumenta más lentamente que la altura: ella es proporcional a la raíz cuadrada de la altura. Cuando ella crece a 100 veces, el horizonte se aleja solamente a 10 veces; Cuando la altura elevada más de 1000 veces, el horizonte se aleja solamente a 31 vez. Por eso, es equivocado pensar, que "una o dos plantas más arriba, - y todo cambiara". Si se construye encima de un edificio de ocho pisos dos más, la distancia se aumenta en  $\sqrt{\frac{10}{8}}$ , es decir, en

1,1 veces, esto es un 10%. Es un poco perceptible.

Hablando de construcción de la torre, desde cual podemos ver, "por lo menos medio centenar de verst", es decir, sobre 160 km; pues es absolutamente irrealizable. El escritor, evidentemente, no sospechaba, que la torre debe de tener una altura enorme.

De la ecuación

$$\text{Distancia del horizonte} = 160 = \sqrt{2 \times R \times h}$$

obtenemos

$$h = \frac{160^2}{2 \times R} = \frac{25600}{12800} = 2 \text{ km}$$

Es la altura de una montaña muy alta. Uno de los mayores proyectos de la capital, es el edificio administrativo de 32 pisos, donde el todo dorado va ser elevado sobre 280 m encima de fundamento, en siete veces más bajo que los proyectos del escritor Gogol.

[Volver](#)

### 5. Colina de Pushkin.

El mismo error cometió el Pushkin, hablando sobre un horizonte lejano, observando desde la cima de una "colina orgullosa".

*Y el zar pudo observar de arriba  
Y valle, cubierta por los toldos,  
Y mar, donde corren los barcos...*

Ya lo sabemos, cómo es de modesta la altura de aquella colina: las tropas de Atylla no han podido levantar una colina más de 4 ½ m. Ahora nosotros podemos calcular, como aumentaba el horizonte, observando desde la cima.

Elevación del ojo encima de tierra es 4,5 + 1,5, es decir, sobre 6 m, y por lo tanto, distancia sería equivalente a  $\sqrt{2 \times 6400 \times 0,006} = 8,8 \text{ km}$ . Son 4 km más que si se observara desde una superficie llana.

[Volver](#)

### 6. Dónde se juntan los rieles.

Problema

Evidentemente que varias veces habrán visto cómo se estrecha a lo lejos la vía férrea. ¿Pero han visto el punto donde se junta un riel con otro? Ahora Uds. tienen suficientes conocimientos para resolver la tarea.

### Solución

Recordaremos, que cualquier objeto se convierte en un punto (para un ojo normal), cuando se ve bajo de  $1'$  es decir, cuando está apartado sobre 3400 veces su diámetro. La anchura (trocha) de una vía férrea es variable, pero la tomaremos como de  $1,52 \text{ m}$ . entonces el espacio entre rieles debería unirse a un punto a una distancia de  $1,52 \cdot 3400 = 5,2 \text{ km}$ .

Pues, si tenemos la posibilidad de observar vía férrea a lo largo de  $5,2 \text{ km}$ , tendremos la veremos como ambos se juntan en un punto.

En una superficie llana el horizonte está más cerca de  $5,2 \text{ km}$ , está precisamente, a  $4,4 \text{ km}$ . Por lo tanto, una persona a simple vista, estado en un sitio llano, no puede ver aquel punto de la unión. Él podría ver el punto únicamente teniendo en cuenta una de las siguientes condiciones:

- 1) si su agudeza de vista es baja, entonces, objetos para el se juntan sobre el ángulo de vista, mayor de  $1'$
- 2) si el ojo de observador esta encima de tierra sobre mas de

$$\frac{5,2^2}{2 \times R} = \frac{27}{12.800} = 0,0021 \text{ km} = 210 \text{ cm}$$

[Volver](#)

## 7. Tareas sobre el faro.

### Problema

En una costa está situado un faro, el vértice de cual está sobre  $40 \text{ m}$  encima del mar.

¿Desde qué distancia se aparece el faro para un barco, si la persona que está observando está a una altura de  $10 \text{ m}$  encima del mar?

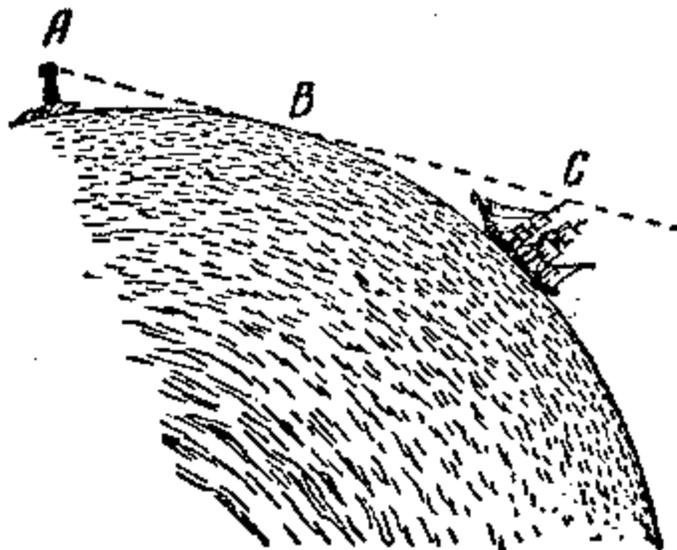


Figura 104. Para tareas sobre el faro.

### Solución

En el dibujo 104 se ve, que esta tarea depende del cálculo de la línea recta  $AC$ , formada con dos partes  $AB$  y  $BC$ .

La parte  $AB$  es la distancia del horizonte desde la punta superior del faro que está a  $40\text{ m}$  sobre la superficie;  $BC$  es la distancia del horizonte sobre una altura de  $10\text{ m}$ . Por lo tanto, el trayecto buscado será:

$$113\sqrt{0,04} + 113\sqrt{0,01} = 113 \times (0,2 + 0,1) = 34\text{ km}$$

Problema

¿De qué parte de aquel faro se ve una persona a una distancia de  $30\text{ km}$ ?

Solución

En la figura 104 claramente se ve el camino de solución: Pero antes de todo se necesita encontrar la longitud  $BC$ , después quitar el resultado de la longitud total  $AC$ , es decir, menos  $30\text{ km}$ , para saber la distancia  $AB$ . Sabiendo  $AB$ , encontraremos la altura, con qué distancia del horizonte es  $AB$ . Hacemos todos cálculos:

$$\begin{aligned} 50 &= 113\sqrt{0,01} - 11,3\text{ km} \\ 30 - 11,3 &= 18,7\text{ km} \\ \text{altura} &= \frac{18,7^2}{2 \times R} = \frac{350}{12800} = 0,027\text{ km} \end{aligned}$$

entonces, desde una distancia de  $30\text{ km}$  no se ven  $27\text{ m}$  del faro; quedan para observar solo  $13\text{ m}$ .

[Volver](#)

## 8. El rayo.

Problema

Encima de cabeza, a una altura de  $1,5\text{ km}$ , cayó un rayo. ¿A qué distancia podemos observar el rayo?

Solución

Deberemos calcular (figura 105) la distancia del horizonte para altura de  $1,5\text{ km}$ . Ella es

$$113\sqrt{1,5} = 138\text{ km}$$

Entonces, si el terreno es llano, el rayo fue visto a ojo por una persona que está a nivel de tierra, a una distancia de  $138\text{ km}$  (con  $6\%$  de corrección – sobre  $146\text{ km}$ ).

En puntos más alejados de  $146\text{ km}$ , el rayo se habría visto en el horizonte; y como sobre esta distancia el sonido no llega, entonces se habría observado el rayo como un relámpago sin trueno.

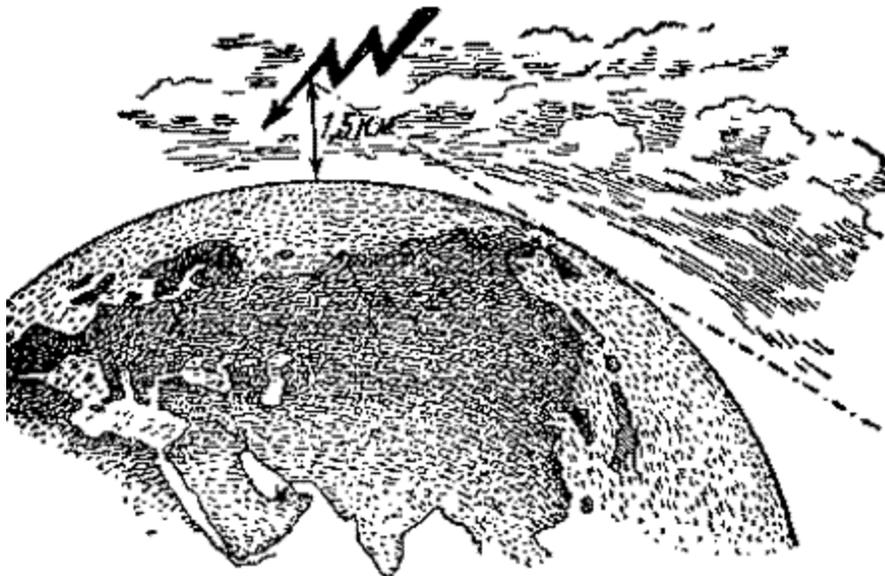


Figura 105. Para el problema del rayo.

[Volver](#)

### 9. El velero.

Problema

Estamos en la costa, cerca del mar, y observamos un velero alejándose. Ya le sabemos que el mástil alcanza a la altura de  $6\text{ m}$  sobre el mar. ¿A qué distancia de nosotros el velero empezará a desaparecer detrás del horizonte y sobre qué distancia desaparecerá definitivamente?

Solución

El velero empezará a desaparecer (veamos la figura 99) en el punto  $B$ , a una distancia mayor que la distancia del horizonte para una persona de estatura mediana; es decir, en  $4,4\text{ km}$ . Desaparecerá definitivamente en el punto donde la distancia desde  $B$  es

$$113\sqrt{0,006} = 8,7\text{ km}$$

Entonces, el velero desaparecerá sobre el trayecto desde la costa a

$$4,4 + 8,7 = 13,1\text{ km.}$$

[Volver](#)

### 10. Horizonte en la Luna.

Problema

Hasta ahora todos nuestros cálculos dependieron del globo terrestre. ¿Pero cómo cambia la distancia del horizonte, si observador estuviera en otro cuerpo celeste, por ejemplo, en la Luna?

Solución

El problema se soluciona por la misma fórmula; distancia del horizonte es  $\sqrt{2 \times R \times h}$ , pero en este caso en vez de  $2R$  tenemos que poner la longitud de diámetro de la Luna. Y como el diámetro es  $3.500\text{ km}$ , entonces, a la elevación del ojo encima de superficie a  $1,5\text{ m}$  tenemos

$$\text{Distancia del horizonte} = \sqrt{3500 \times 0,0015} = 2,3 \text{ km}$$

En la Luna es posible de ver a los lejos sobre  $2 \frac{1}{2} \text{ km}$ .

[Volver](#)

### 11. En el cráter lunar.

Observando la luna desde un cohete, podemos ver gran cantidad de montañas de forma circular, formaciones geológicas, las que no se encuentran en la Tierra. Una de las mas grandes montañas es el "cráter de Capernik", tiene un diámetro exterior de  $124 \text{ km}$ , e interior de  $90 \text{ km}$ . Los puntos mas altos de la cresta llegan a tener una altura sobre superficie de la cuenca interior de  $1500 \text{ m}$ . ¿Si Uds. están en la parte media de cuenca interior, pudieron ver desde allí la cresta del circulo?

Solución

Para contestar a esta pregunta, tenemos que calcular distancia del horizonte para cresta del cráter, es decir, para una altura de  $1,5 \text{ km}$ .

En la Luna ella es equivalente a  $\sqrt{3500 \times 1,5} = 23 \text{ km}$ . Añadiendo la distancia del horizonte para una persona de estatura mediana, obtenemos la distancia sobre la cual la cresta de cráter desaparece detrás del horizonte

$$23 + 2,3 = \text{aproximadamente } 25 \text{ km.}$$

Y como el borde del cráter hasta el centro es de  $45 \text{ km}$ , entonces, ver aquella cresta desde el centro no es posible, únicamente si se suben a las montañas centrales, las que se elevan desde el fondo de cráter a una altura de  $600 \text{ m}^2$ .<sup>1</sup>

[Volver](#)

### 12. En Júpiter.

Problema

¿Cuál es la distancia del horizonte en Júpiter, donde el diámetro es de  $11$  veces mas que la terrestre?

Solución

Si Júpiter esta cubierto por costera dura y tiene superficie llana, entonces, una persona, estando en la superficie, podrá ver a los lejos

$$\sqrt{11 \times 12800 \times 0,0016} = 14,4 \text{ km}$$

[Volver](#)

### 13. Ejercicios Independientes

- Calcular distancia del horizonte para el periscopio de un submarino, ubicado a  $30 \text{ cm}$  sobre la superficie del mar.
- ¿A qué altura tendría que subir el piloto encima del lago de Ladoga, para ver las dos orillas en mismo tiempo, separadas por una distancia de  $210 \text{ km}$ ?
- ¿A qué altura tendría que subir el piloto entre San Petersburgo y Moscú para ver las dos ciudades en el mismo momento? El trayecto San Petersburgo – Moscú es  $640 \text{ km}$ .

[Volver](#)

<sup>2</sup> Ver el libro de Y. I. Perelman, "Astronomía recreativa", cap. II, artículo, "Pasajes de Luna".



**GEOMETRÍA RECREATIVA  
PARTE PRIMERA  
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE**



**CAPITULO SÉPTIMO  
GEOMETRÍA DE LOS ROBINSONES.**

(Algunas paginas de Julio Verne)

**Contenido:**

1. [Geometría Celeste](#)
2. [Latitud de la "isla misteriosa"](#)
3. [Búsqueda de la longitud geográfica](#)

**1. Geometría celeste.**

*Abrió el abismo, lleno de estrellas;  
No hay fin de estrellas, de abismo al fondo  
Lomonosov*

Hubo un tiempo, cuando el autor de este libro estuvo preparándose para un futuro extraordinario: Hacer el papel de una persona náufraga. Mejor dicho, hacerme el Robinson. Si éste en el futuro se realiza, el libro actual podrá ser escrito mejor o no ser escrito. No he conseguido ser el Robinson, lo que ahora me da mucha pena. Sin embargo, durante la adolescencia he creído en mi vocación de ser el Robinson y me preparaba a mí mismo muy en serio. Es que un Robinson tenía que estar dotado de conocimientos y mucha práctica, no obligatoria para gente de otras profesiones.

¿Qué debe hacer una persona náufraga ante de todo, estando en una isla? Evidentemente encontrar su ubicación geográfica, latitud y longitud. Sobre esto, desgraciadamente, se dice muy poco en la mayoría de las novelas. En la edición del auténtico "Robinson Crusoe", sobre esta tema encontraremos solo una línea:

*"En aquellas latitudes, donde está situada mi isla (es decir, por mis cálculos, en 9° 22' al norte de ecuador)..."*

Una abreviatura sensible me ha puesto desesperado, cuando ya estaba preparándome para mi futuro. Estuve dispuesto a dejar mi carera de único habitante en la isla salvaje, cuando he encontrado el secreto de la "Isla Misteriosa" de Julio Verne.

No preparo a mis lectores para ser Robinsones, pero sí enseñar las maneras más simples para buscar latitud geográfica, pienso, hace falta. Estos conocimientos pueden ser útiles no

solo encontrándose en la isla desconocida. Nosotros todavía tenemos tantos sitios habitados que no están señalados en el mapa, cuando cualquier lector puede enfrentarse con la tarea de encontrar la latitud geográfica. No hace falta, ponerse en camino de aventuras marítimas para ser un Robinson, buscando por primera vez su ubicación geográfica.

Principalmente, este trabajo no es tan difícil. Observando por la noche el cielo, vemos, que las estrellas lentamente circunscriben los círculos inclinados, parece que toda la cúpula armoniosamente gira sobre su eje invisible. En realidad, Uds. mismos giran junto con la Tierra, circunscribiendo los círculos junto a su eje en sentido inverso. En el hemisferio del norte, el punto único de la cúpula, el que tiene ubicación fija es aquel donde se apoya la continuación del eje terrestre. Es el polo norte está situado cerca de estrella brillante en el fin del rabo de Osa Mayor, la estrella Polar. Encontrando ella en nuestro cielo nórdico, por el mismo encontraremos donde está situado el polo norte del mundo. Buscarlo no es difícil, si primero encontramos la constelación de la Osa Mayor. Pasamos la línea recta a través de sus estrellas extremas, como vemos en la figura 106 y a continuación sobre la distancia mas o menos igual a longitud de toda constelación, Uds. encuentran estrella Polar.

Es un punto en el cielo, el que vamos a necesitar para encontrar la latitud geográfica. Otro punto, se llama **cenit**, es un punto del cielo, ubicado verticalmente sobre nuestra cabeza. Explico, el cenit es un punto del cielo, donde se apoya la continuación de aquel radio terrestre que pasa por el sitio de nuestra ubicación.

El ángulo del arco del cielo entre nuestro cenit y la estrella Polar, es el ángulo de nuestro sitio con el polo terrestre. Si nuestro cenit está a una distancia de la estrella Polar de  $30^\circ$ , entonces, nosotros estamos a  $30^\circ$  desde el Polo terrestre, es decir, a  $60^\circ$  del círculo ecuatorial; dicho de otra manera, estamos en el paralelo  $60^\circ$ .



Figura 106. Búsqueda de la estrella polar.

Por lo tanto, para encontrar la latitud de cualquier sitio, se necesita traducir en grados la "distancia del cenit" desde la estrella Polar; luego de  $90^\circ$  restamos esta cantidad y latitud ha sido encontrada.

Podemos hacerlo de otra manera. Como el arco entre cenit y el horizonte es de  $90^\circ$ , entonces, de  $90^\circ$  restamos la distancia cenit de la estrella Polar, y obtenemos la latitud del arco celeste desde la estrella hasta el horizonte; digamos, encontramos la altura de la estrella Polar encima del horizonte. Por eso la latitud geográfica de cualquier sitio es equivalente a la altura de la estrella Polar sobre horizonte de este sitio.

Ahora, Uds. entienden qué es lo que necesitamos hacer para encontrar la latitud. Durante una noche clara, encontraremos en el cielo la estrella Polar y medimos su altura angular sobre horizonte; el resultado inmediatamente deja ver la latitud buscada de este sitio. Si deseamos tener el resultado mas cierto, teniendo en cuenta, que la estrella Polar no coincide con el polo del mundo, está sobre  $1\frac{1}{4}^\circ$  del polo.

Como la estrella Polar se mueve, entonces describe alrededor del polo un círculo, manteniéndose mas alto o más bajo de él, a la derecha o a la izquierda sobre  $1\frac{1}{4}^\circ$ .

Encontrando altura de estrella Polar en su mas alto o más bajo estado, Uds. cogen término

medio de ambas medidas. Esta será verdadera altura del polo, por lo tanto latitud buscada del sitio.

Como consecuencia de lo anterior, no es necesario buscar la estrella polar: podemos elegir cualquier estrella brillante y midiendo su altura en ambos extremos sobre horizonte, y se saca el término medio de estas medidas.

Al fin encontraremos la altura del polo sobre el horizonte, es latitud del sitio. Pero es necesario saber aprovechar los momentos más alto y más bajo estado de la estrella elegida, lo que complica el trabajo; y, además, no siempre se tiene éxito observarlo esto durante una noche. Por eso mejor trabajar con la estrella Polar para obtener buenos resultados aproximados, sin tener en cuenta su pequeño alejamiento del polo.

Hasta ahora nosotros estábamos ubicados en el hemisferio norte. ¿Cómo lo harán Uds. si estuviesen en hemisferio austral? Es lo mismo, únicamente hay una diferencia, aquí se necesita buscar la altura del polo sur mundial.

Por desgracia, cerca de este polo, no existe una estrella como la Polar. Conocida es la Cruz del Sur que brilla demasiado lejos del polo sur, y si deseamos aprovecharnos de estrellas de esta constelación para búsqueda de la latitud, entonces, deberemos usar el promedio de las dos mediciones, la más alta y la más baja.

Los protagonistas de Julio Verne en búsqueda de latitud de su "isla misteriosa", se aprovecharon precisamente de esta constelación del cielo austral.

Sentenciosamente volver a leer aquel pasaje de la novela, donde está descrito el trabajo.

Además, conocer como los nuevos Robinsones cumplieron su trabajo sin ningún instrumento geométrico.

[Volver](#)

## 2. Latitud de la "isla misteriosa"

"Eran las 8 de la noche. La Luna todavía no ha salido, pero con tonos pálidos y tiernos brillaba el horizonte, los que podemos llamar amanecer de Luna. En el cenit brillaban constelaciones de hemisferio austral y entre ellas la constelación de la Cruz del Sur. El ingeniero Smit estaba observando unos momentos la constelación.

- Gerbert – dijo después de unos momentos de reflexión, - ¿hoy es 15 de abril?
- Si, - respondió el joven.
- Si no me equivoco, mañana es uno de los cuatro días del año, cuando el tiempo verdadero es equivalente al tiempo medio: Mañana tomaré la posición del Sol en el meridiano, justo al mediodía de nuestro reloj<sup>1</sup>. Si hace buen tiempo, yo puedo encontrar latitud de la isla.
- ¿Sin instrumentos?
- Por qué no. La tarde es clara, y por eso voy a probar encontrar la latitud de nuestra isla, midiendo la altura de la Cruz del Sur, es decir, la altura del Polo Sur encima del horizonte. Y mañana al mediodía encuentro latitud de isla.

Si el ingeniero hubiese tenido un sextante, un instrumento usado en navegación para medir alturas de los astros con la ayuda de los rayos de luz reflejada, la tarea no hubiera sido difícil. Encontrando la altura del polo esta noche, mañana al mediodía, cuando el Sol pasa por el meridiano del lugar, él podría obtener las coordenadas geográficas de isla - latitud y longitud. Pero no había sextante y debería que suplirlo de alguna manera.

El ingeniero entró en la cueva. Con la luz de hoguera él cortó dos tablillas rectangulares, las que juntó como formando las patas del compás que se podían mover. La charnela la hizo con una espina de acacia, encontrada cerca de hoguera.

Cuando instrumento estuvo listo, el ingeniero volvió a la orilla. Él necesitaba medir la altura del polo sobre horizonte, es decir, por encima de nivel marítimo. Para sus observaciones él

---

<sup>1</sup> Nuestro reloj no anda de acuerdo con reloj solar: Entre "tiempo solar verdadero" y aquel "tiempo medio", el que indica el reloj, hay una diferencia, equivalente a cero solamente cuatro días al año: 16 de abril, 14 de junio, 1 de septiembre y 24 de diciembre. (Ver "Astronomía recreativa" de Y. I. Perelman)

fue a la planicie de la Vista Lejana. Además, hay que tener en cuenta la altura de la planicie por sobre el mar. Esta última medición la podrían hacer al día siguiente aprovechando los métodos de la geometría elemental.

El horizonte de repente se dibujó alumbrado con los primeros rayos de la Luna, dando todas las comodidades para observación. Constelación de la Cruz del Sur brillaba en el cielo de manera volcada: indicando el extremo de la estrella *alfa*, el polo sur.

Esta constelación está situada con respecto al Polo Sur no tan cerca como está la estrella Polar, al norte. La Estrella *alfa* está a  $27^\circ$  sobre el polo; el ingeniero sabía eso y estuvo preparado incluir esta distancia en sus cálculos. Él esperaba el momento, cuando la estrella pasara a través de meridiano, esto se simplifica la operación.

Smit apuntó una pata de su compás horizontalmente, la otra hacia la estrella *alfa* de la Cruz del Sur, y el ángulo dio la altura angular de la estrella sobre horizonte. Para fijar este ángulo de manera segura, él clavó con las espinas sobre ambas tablillas la tercera, cruzando transversalmente, para que la figura mantenga postura segura.

Le faltaba solamente encontrar el valor de ángulo, con respecto del nivel del mar, es decir, tener en cuenta la bajada del horizonte, por eso era imprescindible medir altura de la roca<sup>2</sup>.

El valor de ángulo da altura de estrella *alfa*, por lo tanto, altura del polo sobre el horizonte, es decir, latitud geográfica de la isla, como latitud de cualquier sitio del mundo es equivalente a altura del polo sobre horizonte de este sitio. Este cálculo se podía hacer mañana."

Cómo hacer la medición de una roca, mis lectores ya lo saben por el capítulo primero.

Dejando este pasaje de la novela, seguimos viendo como el ingeniero desarrolla su trabajo:

"El ingeniero cogió el compás, el que había preparado antes y con ayuda de cual encontró el trayecto angular entre estrella *alfa* de la Cruz del Sur y el horizonte. Cuidadosamente ha medido el valor de este ángulo con ayuda del círculo, dividiéndolo en las 360 partes, y encontró que era equivalente a  $10^\circ$ . Entonces la altura del polo sobre el horizonte, después sumar los  $10^\circ$  con los de  $27^\circ$ , los que separan estrella del polo, y sobre el nivel del mar, la altura de la planicie desde donde habían hecho la medición, obtuvo  $37^\circ$ . En concreto, la isla de Lincoln está situada a  $37^\circ$  de latitud sur, o teniendo en cuenta imperfección de medición, entre los paralelos 35 y 40.

Le faltaba encontrar ahora su longitud. El ingeniero calculaba hacer este trabajo el mismo día, cuando sol pasa a través por el meridiano de la isla."

[Volver](#)

### 3. Búsqueda de longitud geográfica.

"¿Pero como sabe ingeniero elegir aquel momento, cuando el Sol pasa a través del meridiano de la isla, sin tener instrumentos? Esta pregunta dejó preocupado a Gerbert.

El ingeniero organizó todo lo que fue necesario para la observación astronómica. Eligió en la orilla un sitio absolutamente limpio, aplanado por la marea. Una pértiga de seis pies, colocada en este sitio, totalmente vertical.

Gerbert había entendido que mientras el ingeniero estuvo listo a hacer el trabajo, buscando el momento cuando sol pasara a través del meridiano de la isla, o mejor dicho, para búsqueda del mediodía local.

Él estaría observando la sombra dejada por la pértiga. Este modo, evidentemente, no es muy exacto, por falta de medios, pero daría un resultado bastante bueno.

El momento, cuando la sombra se hace más corta, será mediodía. Basta observar atentamente el movimiento del extremo de la sombra, para fijar este momento, cuando sombra termina de disminuir, y otra vez empieza a crecer. En este caso sombra actuaba como horario.

---

<sup>2</sup> Como el ingeniero hizo las mediciones desde una roca, entonces, la línea recta desde el ojo del observador hasta horizonte no era perpendicular al radio de la Tierra, pues formaba con él un ángulo. Sin embargo, este ángulo es tan pequeño, que no era necesario incluirlo en los cálculos (en una altura de 100 m él es de la tercera parte del grado).

Mientras el ingeniero comenzaba los cálculos, él se arrodillaba e iba clavando en la orilla palitos pequeños, fijando poco a poco la disminución de la sombra de la pértiga. Un periodista (uno de los compañeros del ingeniero) tenía a mano su cronómetro, preparándose para fijar aquél momento, cuando la sombra era más corta. Como el ingeniero estaba haciendo la observación el día 16 de abril, es decir, en uno de aquellos días, cuando el mediodía verdadero coincide con el mediano, en el momento, fijado por periodista con el cronómetro, era marcado sobre el tiempo del meridiano de Washington (sitio de salida de los aventureros).

El Sol se movía despacio. La sombra poquita a poco se hizo más corta. Por fin, cuando ella empezó a crecer, ingeniero preguntó:

- ¿Qué hora es?
- Las cinco y un minuto, - respondió el periodista.

La observación había terminado. Solamente faltaban algunos cálculos.

La observación comprobó que entre meridiano de Washington y el meridiano de Lincoln la diferencia era de casi cinco horas. Esto significa, cuando la isla está de mediodía, en Washington son las cinco de la tarde. El Sol a lo largo de veinticuatro horas pasa sobre  $1^\circ$  durante *4 minutos*, en una hora,  $15^\circ$ .  $15^\circ$  multiplicada por 5 (cantidad de horas), es  $75^\circ$ . Washington está situado en el meridiano de  $77^\circ 34' 11''$  al oeste del meridiano de Greenwich, aprovechado por norteamericanos e ingleses, como principal. Entonces, la isla está situada, aproximadamente, sobre  $152^\circ$  de longitud oeste.

Teniendo en cuenta la insuficiente exactitud de la observación, podemos decir, que la isla está situada entre paralelos 35 y 40 de latitud austral y entre 150 y 155 de los meridianos hacia oeste de Greenwich."

Al final nos damos cuenta que existe muchas y bastante diferentes maneras de encontrar la latitud geográfica; el modo utilizado por protagonistas de Julio Verne, es uno de ellos (conocido por nombre del "modo de transportación de los cronómetros"). Actualmente existen otros modos para encontrar la latitud, más certeros, (para la navegación es inútil este modo descrito).

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
SEGUNDA PARTE  
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA.**



*El sentido de matemática es tan serio,  
que es aconsejable no perder la  
oportunidad de divertirse.*

*Pascal*

**CAPITULO OCTAVO  
GEOMETRÍA A CIEGAS**

**Contenido:**

1. [En el fondo de una bodega](#)
2. [Medir un tonel](#)
3. [La regla graduada](#)
4. [Lo que necesitaba cumplir](#)
5. [Comprobación del cálculo](#)
6. [Un viaje nocturno de Mark Twain](#)
7. [El giro enigmático](#)
8. [Medición a mano](#)
9. [Ángulo recto en la oscuridad](#)

**1. En el fondo de una bodega**

Saliendo de una atmósfera de aire libre y de mar, imaginaremos de repente que estamos en una bodega oscura de un barco viejo, donde un joven protagonista de la novela de Mayn – Rid con éxito seleccionó un problema matemático dentro de unas circunstancias muy incómodas. En la novela "El chico navegado", Mayn – Rid habla de un joven admirador de aventuras marítimas (figura 107), sin tener los medios para pagar el viaje, entró a una bodega de un barco y ahí permaneció encerrado por todo el viaje. Buscando entre maletas él encontró una caja con galletas y un tonel con agua. El chico se dio cuenta, que con esta provisión de agua y comida tenía que ser ahorrativo, y por eso tomó la decisión de dividir por porciones para cada día.

Contar las galletas fue tan difícil, ¿Pero cómo calcular las porciones de agua sin saber su cantidad total? Esto era un problema para nuestro protagonista. Vamos a ver, como la ha solucionado.

[Volver](#)

## 2. Medir a un tonel

“Yo necesitaba saber las porciones diarias de agua. Para esto necesitaba encontrar la cantidad de agua en total, y luego dividir por porciones.

Por la suerte, en la escuela he aprendido los primeros conocimientos de geometría: tenía idea de qué es un cubo, pirámide, cilindro, esfera; Sabía también, que un tonel se ve como dos troncos de conos colocados por sus bases.

Para saber el volumen de mi tonel, necesitaba saber su altura (o la mitad de esta altura), después la circunferencia de uno de sus fondos y la circunferencia de la sección mediana, es decir, la parte más ancha del tonel. Sabiendo estos dos datos, yo puedo encontrar el volumen del tonel.

Encontrar esas cantidades fue complejo para mí.

¿Cómo hacer esta medición?

Encontrar la altura no sería tan difícil, ella estaba delante de mí; pero las circunferencias era más complicado pues yo no podía acercarme a ellas. Era muy pequeño para llegar arriba; además, molestaban las cajas por todas partes.

Existió otra complicación: no tenía escala ni regla, que pudiera utilizar para las mediciones; ¿Cómo puedo encontrar las cantidades sin tener ninguna medida? Pero tomé la decisión de no rechazar el plan, hasta que no encuentre la respuesta.”

[Volver](#)

## 3. La regla graduada (La tarea de Mayn – Rid)



Figura 107. El joven aventurero de la novela de Mayn – Rid.

Pensando en el tonel, con la decisión que tuvo, de repente descubrió lo que le faltaba. Me ayudaría una varilla tan larga, que pudiera pasar a través del tonel en su sitio más ancho. Si meto la varilla en tonel hasta el otro lado, voy a saber su diámetro. Me queda solo triplicar la longitud de varilla, para saber longitud de circunferencia. No es exactamente justo, pero es lo que suficiente para el uso corriente. Y como el agujero, el que lo hice antes, estaba en el sitio más ancho del tonel, entonces, pasando la varilla, tengo aquel diámetro, que necesito. ¿Pero donde yo encuentro una varilla? Bueno. Decidió aprovechar la tabla de una caja, y ahora mismo empezó el trabajo. La verdad, es que la tabla tenía 60 cm de longitud, el tonel mas que el doble de ancho. Pero esto no ha sido un problema, necesitaba preparar y unir tres palitos, para tener varilla con el suficiente largo.

Cortando la tabla por lo largo de las fibras, preparé tres palitos lisos. ¿Cómo unir? Aproveché los cordones de mis zapatos, los que tenían longitud casi de un metro. Atando los palitos, tuve una tablilla de un metro y medio.

En el comienzo de la medición, encontré otra dificultad. No era fácil pasar la varilla, había muy poco sitio y tampoco pude doblarla.

Rápidamente he encontrado la solución: la desmonté en sus partes, he medido la parte primera, luego atando la siguiente, pasé la otra; empujando la segunda parte, le até la tercera.

He indicado mi varilla así, cuando ella toca lado inverso, enfrente del agujero y lo hice una marca justo de cara del tonel. Restando anchura de las paredes, obtuve la cantidad que necesitaba.

Saqué la varilla de la misma manera, aplicadamente notando aquellos sitios, donde las partes habían sido unidas, para poder construirla otra vez del mismo largo afuera. Un pequeño error y podría tener un resultado equivocado.

De suerte, he podido tener el diámetro tronco de cono inferior. Ahora tenía que encontrar el diámetro del fondo del tonel, igual a la base de arriba. Puse la varilla encima del tonel, toque el borde opuesto y marqué la cantidad del diámetro. Esta operación no necesitaba nada mas que un minuto.

Me quedaba solamente encontrar la altura del tonel. Deberá, digan Uds., fijarlo el palito verticalmente justo al tonel y marcarlo altura. Pero dentro había muy oscuro y fijando la varilla verticalmente, no pude verlo hasta que sitio llegaba. Tenía que actuar a ciegas. Necesitaba con el tacto encontrar el fondo del tonel y aquel sitio de la varilla. Además, la varilla moviéndose se inclinaba, y podría tener un resultado erróneo.

Pensando bien, encontré como superar esta dificultad. Até solamente dos palitos, el tercero lo puse en el fondo de arriba del tonel pasando por su borde en 80 – 40 cm; Luego fijé el largo de palito, formando un ángulo recto y, por lo tanto era paralelo a altura del tonel. Haciendo la marca en aquel sitio de tonel, sobresalido, es decir, por el medio y restando anchura del fondo, encontré la mitad de la altura del tonel, o lo que es lo mismo, la altura de un cono truncado.

Ahora tenía todos los datos necesarios para resolver la tarea.”

[Volver](#)

#### 4. Lo que necesitaba cumplir

Convertir el volumen del tonel en unidades cúbicas y después convertirlo en galones haciendo un calculo aritmético, era fácil de cumplir. La verdad, es que para cálculos no tenía modo de escribir, pero era inútil, yo estaba en total oscuridad. A menudo tenía que hacer operaciones aritméticas de memoria, sin lápiz y papel. Las próximas operaciones las tendré que hacer no con cantidades muy grandes.

Pero ha aparecido otra dificultad, he tenido tres datos: altura del cono truncado; ¿Pero cual es la cantidad numérica de estos datos? Era necesario, antes de calcular, traducir los valores en los números.

En el principio me ha parecido imposible de lograr, ya que no tenía ningún instrumento de medidas. Pero recuerdo que en esta época yo he medido mi estatura; era equivalente a cuatro pies. ¿Cómo podré aprovechar este dato? Muy fácil: he podido marcar cuatro pies en mi varilla y utilizar básicamente para los cálculos. Para marcar mi estatura, me tumbé en el suelo, y luego he puesto la varilla encima de mí, cuando uno de los extremos tocó el pie y otro mi frente. Con una mano sujete la varilla, con otra marque el sitio enfrente de mi cabeza.

Mas adelante, otras nuevas dificultades. La varilla, equivalente a los cuatro pies, será inútil para hacer mediciones, si no tiene las divisiones marcadas. Parece, que no es tan difícil dividir 4 pies en 48 partes (pulgadas) y marcar la regla. En teoría es fácil; pero en la practica, además, actuando a ciegas, fue muy complicado.

¿Cómo encontrar la mitad de 4 pies? ¿Cómo dividir cada mitad de varilla otra vez a la mitad, y luego cada uno de los pies en 12 pulgadas, equivalente uno a otro?

Empecé preparando un palillo un poco mas de 2 pies. Comparando él con la varilla, donde estaban marcados lo 4 pies, vi, que doblé la longitud del palillo un poco mas de 4 pies.

Cortando el palillo, he repetido la operación otra y otra vez, hasta que la longitud del palillo ha sido equivalente a 4 pies.

He perdido mucho tiempo. Pero estuve muy contento, por que pude gastarlo útilmente. Además, me di cuenta, que pude abreviar el trabajo, cambiar el palillo por el cordón, el que ha sido fácil de doblar. Por eso aproveche mis cordones de zapatos. Atando con un fuerte nudo, comencé el trabajo, poco tiempo después pude cortar un trozo de 1 pie. Hasta ahora tenia que doblar, era fácil. Luego doblar el triple, ha sido mas complicado. Pero lo logré, y poco después tuve tres trozos de cuatro pulgadas cada uno. Quedaba doblarlo, y otra vez doblarlo, para tener un trozo de 1 pulgada.

Ahora he tenido todo, me faltaba marcar sobre la varilla las divisiones; aplicadamente poniendo trozos de mi medida, hice 48 marcas, significado de pulgadas. Al final he tenido mi propia regla con las divisiones, con ayuda de cual pude medir las longitudes encontradas por mí. Solamente ahora pude terminar la tarea, significada mucho para mí.

Inmediatamente empecé hacer los cálculos. Promediando ambos diámetros, utilicé la mitad de sus longitudes, encontré la superficie, correspondiente a este diámetro. Así encontré la cantidad de base del cilindro, equivalente al doble cono de misma altura. Multiplicando resultado por altura, encontré unidad cúbica del volumen buscado.

Dividiendo el numero de las pulgadas cúbicas en 69 (cantidad de pulgadas cúbicas en una cuarta), sabia, cuantas cuartas tenía mi tonel.

El contenido del tonel ha sido mas de cien galones, - 108 exactamente."

[Volver](#)

## 5. Comprobación del calculo

El lector competente en geometría, sin duda, anota, que el modo del calculo de los dos conos truncados, utilizando por nuestro protagonista, no es muy cierto. Si, (figura 108) señalamos el radio de los fondos menores a través por  $r$ , el radio de mayor por  $R$ , la altura del tonel, es decir, doble altura de cada cono truncado, por  $h$ , entonces, el volumen, encontrado por el chico, se traduce en una fórmula

$$\pi \left( \frac{R+r}{2} \right)^2 \times h = \frac{\pi \times h}{4} (R^2 + r^2 + 2Rr)$$

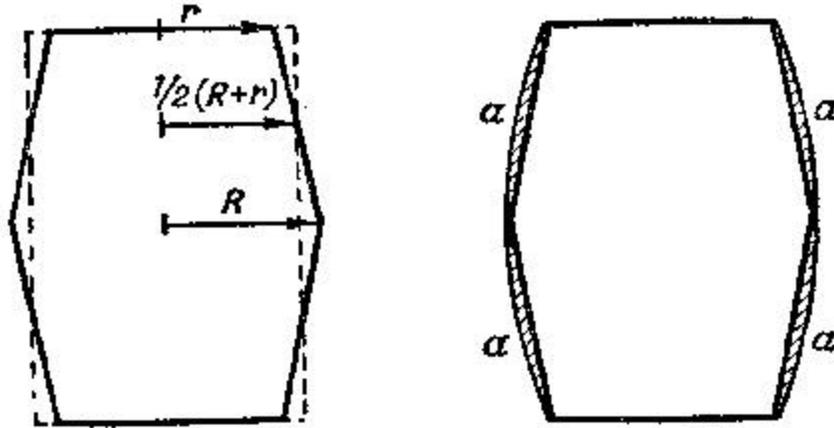


Figura 108. Comprobación del cálculo.

Además, siguiendo a las reglas geométricas, es decir, utilizando la fórmula del volumen del cono truncado, obtendremos la expresión

$$\frac{\pi \times h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

Ambas expresiones no son idénticas, y es fácil de asegurarse, la segunda es mayor de la primera en

$$\frac{\pi \times h}{12} (R - r)^2$$

Quienes conozcan el álgebra, ven, que la diferencia  $\frac{\pi \times h}{12} (R - r)^2$  es de valor positivo, es decir, el modo del chico dio con el resultado por defecto.

Es interesante saber cuánto vale esta disminución. Los toneles, habitualmente se construyen así: la mayor anchura supera el diámetro del fondo en  $1/5$  de él, es decir,

$$R = r + \frac{R}{5}$$

Sabiendo, que el tonel ha sido fabricado de la misma forma, podemos encontrar la diferencia entre la cantidad obtenida y la verdadera del volumen de los conos truncados:

$$\frac{\pi h}{12} \times (R - r)^2 = \frac{\pi h}{12} \left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300}$$

es decir, aproximadamente  $\frac{hR^2}{100}$  (si  $p=3$ ). El error es equivalente, como vemos, al

volumen del cilindro, donde el radio del fondo es igual al radio de la circunferencia central del tonel y la altura, la tricentésima parte de su altura.

Sin embargo, en este caso es deseable tener una no muy gran exageración del resultado, porque el volumen del tonel es mayor del volumen de dos conos truncados inscritos en él. Es evidente, viendo la figura 108 (a la derecha), donde se nota, sobre el modo de medir el tonel, se quitara la parte de su volumen, marcado por letras  $a, a, a, a$ .

El joven matemático no adivinaba la fórmula para encontrar el volumen del tonel; la fórmula la podemos encontrar en algunos manuales de geometría principal como un modo más cómodo, para obtener resultados aproximadamente. Tengan en cuenta que medir el volumen de un tonel es una tarea bastante complicada. Sobre ella trabajo Kepler ha dejado una obra matemática. Una solución geométrica más fácil y exacta todavía no ha sido encontrada hasta hoy: solamente existen los modos prácticos con más o menos aproximación. En el sur de Francia, por ejemplo, utilizan la fórmula empírica

$$\text{Volumen del tonel} = 3,2 \times h \times R \times r$$

Es curioso: ¿Por qué los toneles tienen una forma tan incómoda para medir, un cilindro con lados convexos? ¿No es más fácil de hacer toneles de forma cilíndrica? Los mismos se hacen, pero no de madera, sino de metal (para el petróleo, por ejemplo). Ahora tenemos el siguiente

#### Problema

¿Por qué construyen los toneles con lados convexos? ¿Cuál es la ventaja de esta forma?

#### Solución

La utilidad es siguiente: poniendo los anillos (zunchos) a los toneles, podrá ponerlos apretadamente y fuertemente de una manera muy simple: acercándose a la parte más ancha del tonel. Luego se aprieta con tornillos, dando al tonel la solidez suficiente. Por la misma razón a los cubos (baldes) de madera se le dan forma no de cilindro, sino de cono truncado: Aquí también lo rodean fuertemente con anillos y los acercan al sitio más ancho (figura 109).



*Figura 109. Acercando los zunchos a la parte más ancha del tonel se consigue rodearlo fuertemente*

Aquí es útil de conocer la opinión sobre este tema de parte de Kepler. Durante el tiempo de descubrimiento de la segunda y tercera Ley de Movimientos de los planetas, el gran matemático trabajaba sobre el tema de los toneles y, además, dejó un artículo matemático. Así comienza su obra "Estereometría de los toneles":

"Bajo de exigencia de material, la construcción y utilización de los toneles de vino tienen forma esférica, familiar a cónica y cilíndrica. Un líquido estando mucho tiempo dentro de un cacharro metálico, se estropea por culpa de la herrumbre: de cristal o de arcilla son frágiles y no suficiente de tamaño; de piedra, por culpa de peso no son útiles, entonces, queda guardar el vino dentro de toneles de madera. De un solo tronco no es posible preparar un cacharro bastante espacioso, y en la suficiente cantidad, además, puede henderse. Por eso los toneles tienen que ser construidos con trozos unidos de madera. No es posible de evitar a pasar el líquido por rendijas de ningún material, menos rodeando fuertemente con anillos... Si fuera posible preparar con tablillas una esfera, entonces, esta forma era más deseable. Pues, como no es posible de apretar las tablillas de esta manera, entonces, el cilindro es la única forma más útil. Tampoco la forma puede ser totalmente cilíndrica; ataduras en mismo momento eran inútiles, y no podrían ser atadas más fuerte, si el tonel no tuviera forma cónica, un poco estrechándose por ambas partes de su barriga. Esta forma es muy cómoda para el balance, para transportar, formada por dos partes semejantes unidas por sus fundamentos, es más válida y ventajosamente."<sup>1</sup>

<sup>1</sup> No tenemos que pensar, que la obra de Kepler es una cachivache, diversión para el genio. No, es obra bastante seria, donde por primera vez la geometría habla sobre infinitesimales y el comienzo del cálculo integral. Tonel de

[Volver](#)

## 6. Un viaje nocturno de Mark Twain.

La ingeniosidad de aquel chico dentro de unas circunstancias no muy agradable es impresionante. Dentro de la total oscuridad, la mayoría de gente no podrían orientarse, ni hablar de ningún tipo de mediciones y cálculos. La novela de Mayn – Rid es útil de comparar con una historia cómica sobre un viaje confuso dentro de una habitación del hotel, aventura, que ha podido pasar con el conocido humorista el Mark Twain. En este relato esta muy bien descrito como es difícil tener el modo de imaginar la situación de los muebles en una habitación, la que era poco conocida. Mas adelante voy a presentar brevemente un episodio divertido del “Viaje al extranjero” de Mark Twain.

“Me desperté y sentí sed. Tuve una idea estupenda, ponerme la ropa, salir al jardín y refrescarse, lavándome en una fuente.

Me levanté y estuve intentando buscar la ropa. Encontré un calcetín. Sin tener ni idea donde estaba el otro. Con mucho cuidado me baje al suelo, empecé a buscar, pero sin éxito. Sigo buscando mas y más y en vez de encontrar el calcetín me choqué con un mueble. Cuando me acosté, alrededor vi pocos muebles, ahora me parece que habitación esta llena de muebles, además, las sillas en todas partes. ¿Posiblemente dos familias mas ocuparon la misma habitación? Ni vi ni una de las sillas, pero siempre mi cabeza chocaba contra ellas. Al final he decidido que puedo vivir con solo un calcetín. Me fui a la puerta, pero de repente veo mi reflejo pálido en espejo.

Evidentemente me he perdido, y no tengo ni idea donde estoy. Si la habitación tenía solo un espejo, pudo ser una buena ayuda para orientación, pero había dos, es lo mismo como mil. Quise encontrar la puerta pegándome a la pared. Con mis pruebas terminé tirando un cuadro al suelo. Quizá no era muy grande, pero lo hizo con tanto ruido como una montaña. Garris (mi vecino, estaba durmiendo en la otra cama) no se ha movido, pero lo sabía, si voy a seguir por el mismo camino, seguro despierta. Voy a probar el otro camino. Encontré otra vez la mesa redonda, estuve un par de veces al lado de ella, y desde aquí voy a probar encontrar mi cama; si encuentro mi cama, pues, encuentro también la garrafa con agua, por lo menos puedo apagar la sed. Mejor es arrodillarse y arrastrarse; este modo lo he probado, por eso confío en él.

Por fin encontré la mesa, tocando con cabeza, con un poco de ruido. Luego otra vez me levanté y fui balanceándome con las manos estiradas. Encontré la silla. Después la pared. Otra silla. Luego el sofá. Mi bastón. Otra vez sofá. Me ha sorprendido, perfectamente lo sabía, en la habitación esta solo el sofá. Encontré otra vez la mesa y recibí un golpe de nuevo. Luego choque con una fila de sillas. Un poco después se me ha ocurrido una idea, que tenia que aparecer mucho antes: La mesa es redonda, por lo tanto, no puede ser el punto de la salida para mi viaje. Por suerte me fui al espacio entre las sillas y sofá, pero me pareció un lugar desconocido, dejando caer el candelabro de la chimenea. Luego solté la lámpara, luego con el sonido voló la garrafa.

- ¡Ah! - pensé, - ¡Por fin te encontré, querido mío!
- ¡Ladrones! ¡Socorro! – grito el Garris.

Ruidos y gritos levantaron a toda casa. Habían venido con velas y linternas el jefe, invitados y sirvientas.

Yo mire alrededor. Aparecía, que estoy al lado de la cama de Garris. Solo un sofá estaba al lado de la pared; Solo una silla ubicada de manera que era fácil chocarse con ella, yo estuve dando vueltas alrededor, como una planeta, y chocando con ella, como una cometa, durante toda la noche.

Sobre mis pasos, me aseguré, que lo hice durante la noche *47 millas*.

vino y la tarea agrícola sobre su espaciosidad son los motivos de largos pensamientos matemáticos. (Traducción rusa 1935, Estereometría de los toneles”.

Lo último es exagerado por encima de cualquier medida: no es posible durante par de horas pasar andando *47 millas*, pero otros detalles de la historia son bastante reales y bien caracterizan las dificultades del viaje dentro de una habitación oscura. Además, tenemos que valorar el espíritu metódico sorprendente y ánimo del joven protagonista de Mayn – Rid, el que no solo ha podido orientarse a oscuras, sino resolver una tarea matemática, dentro aquellas circunstancias.

[Volver](#)

### 7. El giro enigmático

Sobre las vueltas de M. Twain dentro de la habitación oscura, es curioso tomar la nota de un fenómeno que sucede con la gente que camina con ojos tapados: ellos no pueden ir sobre una línea recta, sin falta se apartan del camino, describiendo un arco, sin embargo, imaginando, que van por el camino recto hacia delante (figura 110).

También eso caracteriza a los aventureros, viajando sin brújula por el desierto, por la estepa nublada, en todos casos, cuando no hay posibilidad de orientarse, se apartan del camino y caminan sobre un círculo, a menudo volviendo al mismo sitio. El radio de la circunferencia, circunscrita por el peatón, es *60 a 100 m*; Más rápido camina, mas se estrecho es el radio, es decir, más estrechos son los círculos cerrados.

En la practica existen algunas pruebas para estudiar esta tendencia de la gente, como apartarse del camino recto. Habla un científico Y. Spirin:

“En un aeródromo liso y verde han puesto en una fila los pilotos. A todos les taparon los ojos y propusieron a caminar hacia delante. La gente andaba... al principio caminaban bien recto; después unos apartaban a la derecha, otros a la izquierda, poco a poco comenzaban hacer los círculos, volviendo a sus primeros pasos.”

Un caso conocido analógico hubo en Venecia en la plaza de Marco Polo. Tapaban los ojos a la gente, situadas en un lugar de la plaza, enfrente de la catedral, y propusieron llegar hacia ella. Aunque había que andar solamente *175 m*, todas de las personas metidas en esta prueba no han podido alcanzar la fachada del edificio (*82 m* de anchura), todas se inclinaban, circunscribieron a los arcos y chocaban con columnas laterales (figura 111).

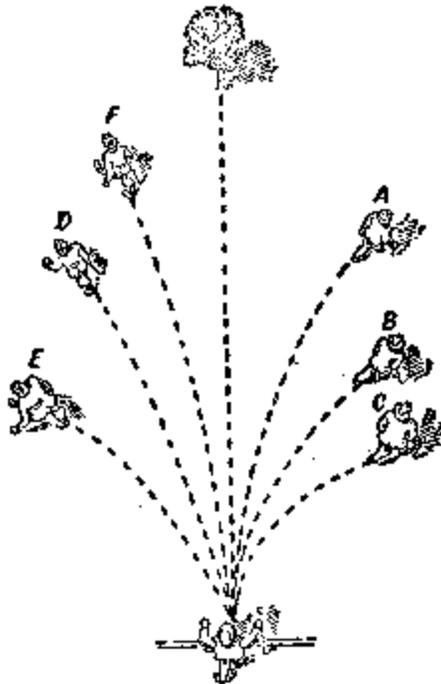


Figura 110. El camino con ojos tapados.

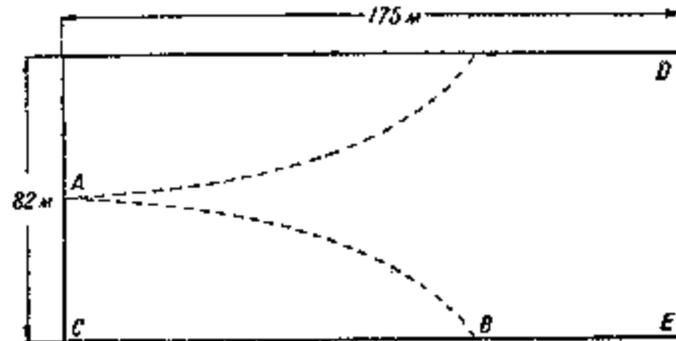


Figura 111. Esquema de la prueba en la plaza de Marco Polo en Venecia.

Quien ha leído la novela de Julio Verne "Las aventuras del capitán Gateras", se acordará de un episodio, como los viajeros se encontraron dentro de un desierto de nieve unos pasos de una tal persona:

"- ¡Son nuestras huellas, amigos míos! – exclamo el doctor. – Nos hemos perdido por culpa de la niebla y ahora descubrimos nuestras propias huellas.

Una descripción clásica de vueltas semejantes dejo L. N. Tolstoi "Dueño y trabajador":

"Basilio Andreevich hizo correr al caballo allá, donde él pensó que podía estar la caseta del guardabosque. La nieve impedía ver, y el viento parecía que quería parar al hombre, pero el doblándose para delante intentó hacer correr al caballo.

Cinco minutos después, no pudo ver nada, excepto la cabeza del caballo y desierto blanco.

De repente vio a los lejos una casa negra. Su corazón latía de alegría, y se dirigió hacia aquel sitio negro, viendo las paredes de una aldea. Pero el negro ha sido solo la variedad de ajenjo ... El aspecto del ajenjo, golpeado por el viento, obligó a que temblase el pobre corazón del hombre mas y más. Con rapidez él fue para allá, sin darse cuenta, que acercándose al ajenjo, cambió totalmente la dirección.

Otra vez en el frente ve algo oscuro, otra vez la línea de ajenjo, la hierba seca golpeada por el viento. A lado de él veía las huellas del caballo, desapareciendo por el viento. Basilio Andreevich paró el caballo y miró con la atención: no ha sido otra cosa que las huellas de su caballo. Por lo visto, él daba las vueltas dentro de un espacio limitado por él."

El fisiólogo noruego Gulberg, dedicó al fenómeno de giros una investigación especial (1896), el juntó varios testimonios verificados sobre casos reales del mismo origen. Ponemos en claro los dos ejemplos.

Dos peregrinos tomaron la decisión de dejar la caseta en una noche nevada y salir de aquel valle con anchura de 4 km, para llegar a su casa, situada en el sentido, del que esta marcado por la línea discontinua (figura 112). Sin darse cuenta, durante el camino ellos se apartaban a la derecha, sobre la línea curva, señalada por flechas, pasando una cierta distancia, ellos calculaban que el objeto estaba conseguido, pero en realidad se encontraban al lado de la misma caseta, la cual dejaron hacia muy poco tiempo.

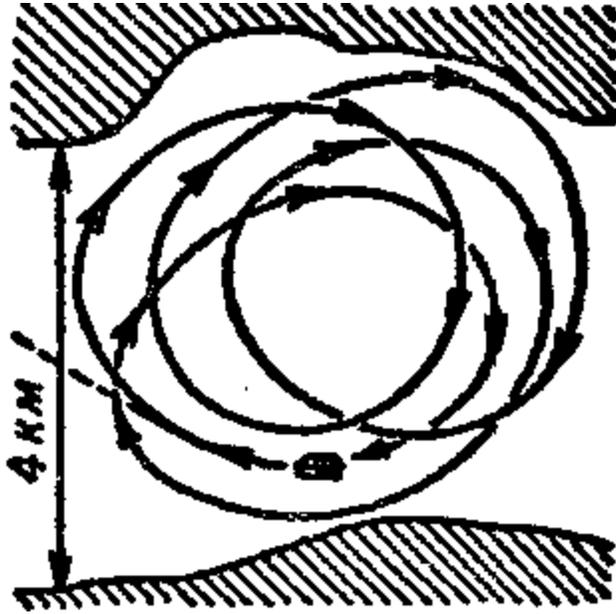


Figura 112. Esquema del viaje de los tres peregrinos.

Saliendo por otra vez, ellos se apartaban todavía más y volvieron al punto de salida. Lo mismo se ha repetido por tercera vez y cuarta vez. Desesperados, probaron por quinta vez, pero con el mismo resultado. Se decidieron no complicar más la noche y esperar hasta mañana.

Más difícil es remar sobre una línea recta en una noche oscura o tapado por la niebla. Hay un caso, cuando dos remeros, decididos atravesar un estrecho de 4 km de anchura, en una noche. Dos veces estaban en la orilla apuesta, pero sin conseguir a ella, sin darse cuenta circunscribieron dos círculos y al fin desembarcaban en el sitio de salida (figura 113).

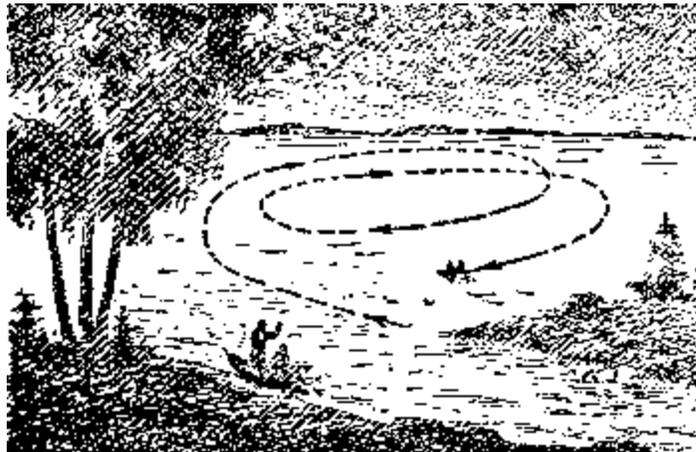


Figura 113. Como remeros probaron atravesar el estrecho en la niebla.

Lo mismo pasa con los animales. Unos viajeros polares cuentan sobre los círculos, dejados en la nieve por animales, enganchados en el trineo. Los perros dejándolos nadar con ojos tapados también circunscriben los círculos en el agua. Dando vueltas, vuelan las aves cegadas. Un animal perseguido, por el miedo sin poder orientarse, se salva por el camino en espiral.

Zoólogos examinaban los renacuajos, cangrejos, medusas, además, las amebas en una gota de agua; todos ellos se movían sobre un círculo.

¿Cómo explicar esta afición tan enigmática del humano y animales al círculo, sin ser capaces mantener una trayectoria recta a ciegas?

Esta pregunta pierde su milagro, cuando hacemos una pregunta correcta.

Preguntaremos no sobre por qué los seres vivos andan dando las vueltas, sino, sobre - ¿Qué necesitan para mantener un camino recto?

Acuerden como se mueve un carro, un juguete mecánico. Puede ser, que la carreta cambia el sentido, en vez de seguir a un recto camino.

En este movimiento nadie se ven ningún tipo de milagro, cualquier se adivina, ¡Porque esto ocurre! Evidentemente, las ruedas de derecha no son iguales a la parte izquierda.

Esta claro, el ser vivo podrá moverse en aquel caso sin ayuda de los ojos por un recto camino, cuando los músculos de ambas partes (de derecha y de izquierda) están trabajando completamente igual. Pero aquí estamos, la simetría del cuerpo humano y de animales no es igual. En la mayoría de gente y de animales los músculos de parte derecha del cuerpo se desarrollan desigualmente con los músculos de parte izquierda. Evidentemente, el peatón siempre estira la pierna derecha mas adelante, que la izquierda, no puede mantenerse en una línea recta; Si los ojos no ayudan a alinear el camino, el inevitablemente se correrá a la izquierda. Lo mismo pasa con un remero, por culpa de un mal tiempo, se correrá a la izquierda, si la mano derecha trabaja con mas fuerza, que la otra. Esto es geometría absoluta.

Imaginaremos, por ejemplo, la persona haga el paso con la pierna izquierda en un milímetro mas largo, que con la derecha. Después, haciendo por turnos con cada pierna mil pasos, la persona hará el camino con la pierna izquierda sobre  $1000\text{ mm}$ , es decir, sobre un metro mas largo, que de la derecha. En los caminos rectos y paralelos esto es imposible, pero es real en las circunferencias concéntricas.

Además, nosotros podemos, utilizando el plano anteriormente descrito del giro en el valle nevado, calcular, en cuantas veces la pierna izquierda hizo mas largo el paso, que la derecha (como el camino se apartaba hacia derecha, entonces los pasos más largos lo hizo la pierna izquierda). El trayecto entre líneas de las piernas izquierda y derecha durante el camino (figura 114) equivalente a  $\sim 10\text{ cm}$ , es  $0,1\text{ m}$ . Cuando la persona circunscribe un círculo completo, su pierna derecha alcanza el camino  $2pR$ , la izquierda  $2p(R + 0,1)$ , donde  $R$  es el radio de aquella circunferencia en metros. La diferencia

$$2p(R + 0,01) - 2pR = 2p \cdot 0,1$$

es decir

$$0,62\text{ m o }620\text{ mm},$$

formada por la diferencia entre la longitud del paso izquierdo y derecho, repitiendo tantas veces, cuantos han sido los pasos. De la figura 112 podemos deducir, que los peregrinos circunscribieron los círculos con diámetros de  $\approx 3,5\text{ km}$ , es decir,  $\approx 10000\text{ m}$  de longitud. Sobre el paso medio de  $0,7\text{ m}$  durante ese camino asido hecho

$$\frac{10000}{0,7} = 14000\text{ pasos}$$

De ellos son  $7.000$  con la pierna derecha e igual con la pierna izquierda. Entonces, ya sabemos, que  $7.000$  pasos "izquierdos", mas de  $7000$  pasos de  $620$  "derechos" de  $620\text{ mm}$ . De aquí, un paso izquierdo más largo de un derecho en

$$\frac{620}{7000}\text{ mm},$$

menos que  $0,1 \text{ mm}$ . ¡Esta diferencia entre los pasos es suficiente para lograr un resultado tan sorprendente.

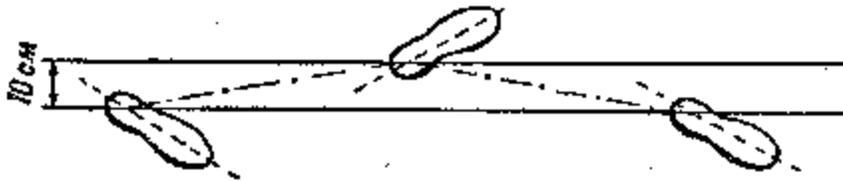


Figura 114: Las líneas de huellas de la pierna derecha y la izquierda durante el camino.

El radio de aquel círculo, el que el viajero circunscribe, depende de la diferencia entre las longitudes de pasos "derecho" e "izquierdo". Es fácil de establecer la cantidad de pasos, hechos a lo largo de un círculo, con una longitud de un paso de  $0,7 \text{ m}$  es

$$\frac{2 \times \pi \times R}{0,7}$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia en metros; Entre ellos hay

$$\frac{2 \times \pi \times R}{2 \times 0,7}$$

"izquierdos" e igual número de "derechos. Multiplicando esta cantidad por el valor de la diferencia  $x$  de longitud de los pasos, recibimos la diferencia longitudinal de aquellos círculos, los que son circunscribimos como por la izquierda tanto por la derecha piernas, es decir

$$\frac{2 \times \pi \times R}{2 \times 0,7 \times x} = 2 \times \pi \times 0,1$$

$$R \times x = 0,14$$

$R$  y  $x$  se expresan en metros.

Con esta fórmula tan simple no es difícil de calcular el radio de la circunferencia, cuando la diferencia de los pasos es conocida, y al contrario. Por ejemplo, para los participantes de la prueba en la plaza de Marco Polo de Venecia nosotros podemos establecer el radio mas grande circunscrito por ellos a lo largo del camino. Realmente, como ninguno de ello no llegó hasta la fachada  $DE$  del edificio (figura 111), entonces, entre la fachada  $AE = 14 \text{ m}$  y el arco  $BC$ , no supera a  $175 \text{ m}$ , podemos calcular el radio máximo del arco  $AB$ . El sale de igualdad

$$2R = \frac{BC^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = 750 \text{ m}$$

de aquí  $R$ , el radio máximo, será  $\approx 370 \text{ m}$ .

Sabiendo esto, de la formula anterior  $R \cdot x = 0,14$  buscamos la menor cantidad de la diferencia longitudinal de los pasos:

$$370 x = 0,14, \text{ donde } x = 0,4 \text{ mm}.$$

Entonces la diferencia de longitud de los pasos derechos e izquierdos de los participantes no es menor de  $0,4 \text{ mm}$ .

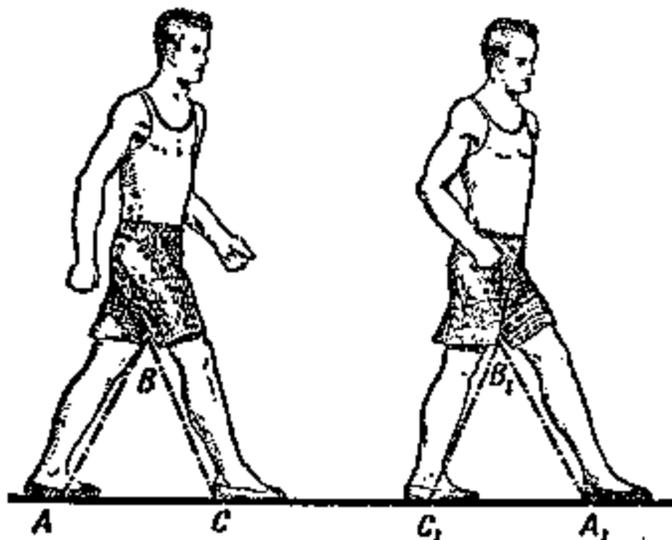


Figura 115. Si el ángulo del paso es mismo, entonces los pasos eran iguales.

A veces escuchas o lees, que la acción del giro durante la caminata a ciegas depende de la diferencia de las piernas; como la pierna izquierda la mayoría de gente la tiene mas larga, entonces durante el camino la gente deberá apartarse hacia la derecha. Lo importante es la longitud de los pasos, pero no las piernas.

De la figura 115 es evidente, con la existencia de piernas diferentes podemos hacer pasos iguales, si durante el camino separamos las piernas en un mismo ángulo, es decir, andar así, donde  $\angle B_1 = B$ . Como siempre  $A_1B_1 = AB$  y  $B_1C_1 = BC$ , entonces  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$  y por lo tanto,  $AC = C_1A_1$ . Al contrario, con dos piernas totalmente iguales, los pasos podrán ser de diferentes longitudes, si una pierna se adelanta a la otra.

Por la misma razón el barquero, remando mas fuerte con la mano derecha, debe de apartar la lancha, dando vuelta hacia la izquierda. Los animales haciendo pasos diferentes, o aves haciendo movimientos con las alas no con la misma fuerza, también deberían dar las vueltas cada vez, cuando pierden control visual. Aquí una diferencia pequeña de esfuerzo también es suficiente para perder el rumbo.

Sobre esta razón todos los casos pierden su misterio y se convierten en reales. De manera sorprendente era, si seres vivos, al contrario, pudieran caminar rectamente a ciegas. Más importante condición, es la simetría geométrica del cuerpo, absolutamente imposible para naturaleza. La menor desviación de la simetría absoluta matemática debe llevar detrás, como la consecuencia inevitable del giro. El milagro no es aquello, que nos sorprende, sino aquello, que estábamos preparados verlo como realidad.

Imposibilidad mantener el camino recto ahora no es complejo: Las brújulas, vías, cartas evitan las dificultades.

Otra cosa, animales y demás habitantes de desiertos, estepas, del espacio marítimo: la asimetría del cuerpo obliga a ellos circunscribir los círculos, en vez del camino recto, es un factor importante de la vida. Como si un hilo invisible se enganchara en un sitio, quitando posibilidad de alejarse. Un león, que osa alejarse mas lejos del desierto, antes o después vuelve. Las gaviotas, dejando sus rocas, no podrán volar sin volver al nido (además, misterioso es la larga migración de las aves, cruzando los continentes y océanos).

[Volver](#)

## 8. Medición a mano

El chico de Mayn – Rid pudo con éxito resolver su tarea geométrica solamente porque sabía su estatura y recortaba bien el resultado. Sería bueno para cada de nosotros tener un “metro vivo”, por si acaso necesitamos para hacer mediciones.

Es útil de recordar, que la mayoría de la gente tienen la distancia entre las manos estiradas equivalente a la estatura (figura 116) la regla examinada por un pintor y científico Leonardo da Vinci: la regla permita aprovechar nuestras “medidas vivas” más cómoda, como ha hecho el chico. La estatura de una persona adulta (de una raza eslava) @1,7 m o 170 cm, es fácil de recordar. Pero confiar a esta cantidad *mediana* no hace falta: Cada uno debe de medir su estatura y la distancia de las manos.

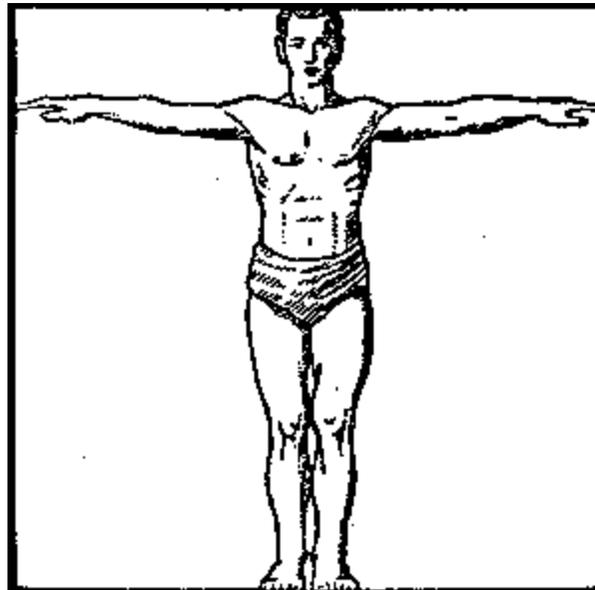


Figura 116. Precepto de Leonardo da Vinci

Para medir, sin regla, las distancias pequeñas tenemos que recordar longitud de su “cuarta”, es decir, la distancia entre las puntas del pulgar y el dedo meñique (figura 117). Para un hombre mayor es @18 cm, aproximadamente  $\frac{1}{4}$  de arshin (de aquí viene el nombre “cuarta”); Pero para adolescentes el mismo segmento es menor y crece hasta los 25 años.

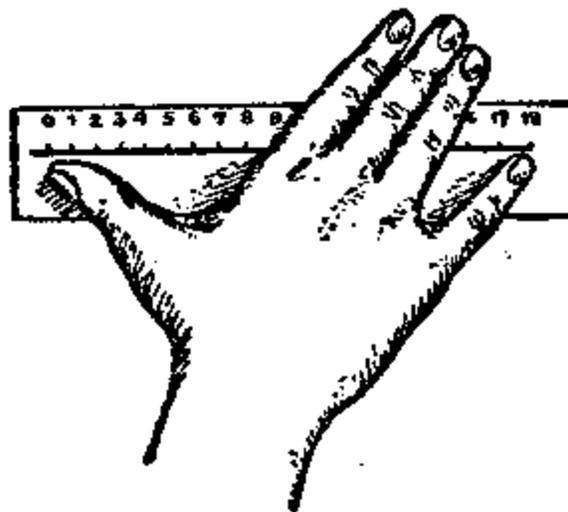


Figura 117. Medición del segmento entre dedos.



Figura 118. Medición del dedo índice

Luego, es útil recordar la longitud del índice, calculando dos cosas: desde el fondo del dedo medio (figura 118) y desde el fondo del pulgar.



Figura 119 . Medición del segmento entre dedos.



Figura 120. Medición de circunferencia del vaso

Lo mismo tiene que saber es la distancia máxima entre el dedo índice y el medio, para una persona adulta es  $\approx 10\text{ cm}$  (figura 119). Al final tenemos que saber la anchura de nuestros dedos.

La anchura de los tres dedos del medio, bien sujetados, es aproximadamente es de  $5\text{ cm}$ . Teniendo todos los datos Uds. podrán cumplir cualquier tipo de medición aprovechando sus manos, además, a ciegas. Hay un ejemplo en la figura 120: aquí medimos con dedos la circunferencia del vaso. Teniendo cantidades medias, podemos decir, que la longitud de la circunferencia es  $18 + 5 = 23$ , es  $23\text{ cm}$ .

[Volver](#)

## 9. Ángulo recto en la oscuridad

Problema

Otra vez volveremos a aquel chico de la novela y formaremos una pregunta: ¿Qué trabajo tenía que hacer, para encontrar el ángulo recto de un modo mas justo? "Coloqué junto a ella (sobre la tablilla) una vara así, para que ella forme con tablilla un ángulo recto", leemos la novela. Trabajando a ciegas, confiando a sus sentimientos musculares, podemos equivocarnos. Por lo visto el chico dentro de su situación tenía un secreto para construir ángulo de una manera fija. ¿Cuál es esa manera?

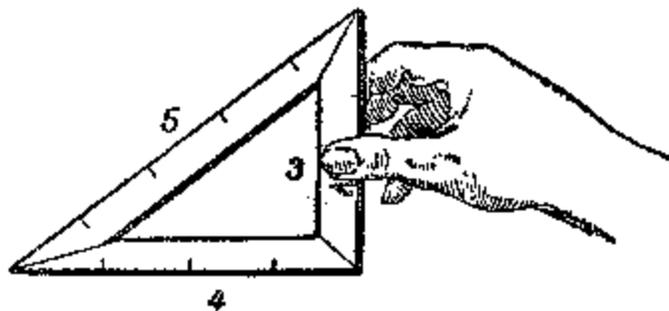


Figura 121. Un triángulo rectángulo donde los lados son completos

Solución

Aprovecharemos el teorema de Pitágoras, construimos un triángulo de tablas, donde uno de sus ángulos era recto. Bien sujetadas las tablillas con longitud de 3, de 4 y de 5 según elegidos segmentos iguales (figura 121).

Es el antiguo modo de egipcios, el que utilizaban en la tierra de las pirámides mil años atrás. Además, en nuestro tiempo aprovechan este modo en las construcciones.

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
SEGUNDA PARTE  
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA**



**CAPITULO NOVENO  
LO ANTIGUO Y NUEVO SOBRE EL CIRCULO**

**Contenido:**

1. [Geometría practica de los egipcios y romanos](#)
2. ["Lo sé y recuerdo perfectamente"](#)
3. [El error de Jack London](#)
4. [Lanzamiento de aguja](#)
5. [Enderezamiento de circunferencia](#)
6. [Cuadratura del círculo](#)
7. [Triángulo de Bingo](#)
8. [La cabeza y los pies](#)
9. [Alambre a lo largo de ecuador](#)
10. [Acción y calculo](#)
11. [Chica encima de una cuerda](#)
12. [Un vuelo a través del Polo](#)
13. [Longitud de la correa de transmisión](#)
14. [Una tarea sobre la corneja prudente](#)

**1. Geometría practica de los egipcios y romanos**

Cualquier alumno sabe calcular la longitud de una circunferencia dividida por el diámetro, mucho más exacto que un sacerdote de Egipto o un arquitecto de gran Roma. Los egipcios pensaban, que la circunferencia era mas larga que su diámetro en 3,16 veces, los romanos en 3,12, pero la proporción correcta es 3,14159... Los matemáticos egipcios y romanos calcularon la proporción de la longitud sobre su radio, no de un modo geométrico, sino que empíricamente. ¿Pero por qué ellos tuvieron estos errores? ¿No pudieron ceñir a un objeto redondo un hilo y luego, enderezarlo y simplemente medir?

Sin duda que ellos actuaron de esta manera; Pero no tenemos que pensar, que este modo da un buen resultado. Imaginen, por ejemplo, un jarrón con el fondo redondo y el diámetro de 100 mm. Longitud de circunferencia tiene que ser 314 mm. Pero en la práctica, midiendo con hilo, no obtendremos esta longitud: Simplemente un error de un milímetro, y luego  $\pi$

sería equivalente a 3,13 o 3,15. Además teniendo en cuenta la imposibilidad de medir diámetro de un modo exacto, los errores son inevitables, entonces el valor de  $\pi$  oscila entre

$$\frac{313}{101} \text{ y } \frac{315}{99}$$

es decir, en fracciones decimales entre

$$3,09 \text{ y } 3,18.$$

Uds. ven, que buscando  $\pi$  por el modo dicho, podemos recibir el resultado, no coincidiendo al 3,14: Una vez 3,1, segunda vez 3,12, tercera 3,17 y etc. Causalmente entre ellos aparece el 3,14, pero para contador este número no tendrá gran significación. Este camino experimental no pudo dar un resultado aceptable para  $\pi$ . Entonces está claro por qué el mundo antiguo no sabía la proporción correcta de la longitud de circunferencia sobre su diámetro, y necesitaban un genio llamado Arquímedes, para encontrar el valor de  $\pi = 3 \frac{1}{7}$ , sin medición, solamente reflexionando.

[Volver](#)

## 2. "Lo sé y recuerdo perfectamente"

En "Algebra" de un matemático árabe Magamed – ben - Musa leemos sobre el cálculo de la longitud de la circunferencia:

"La mejor manera es multiplicar el diámetro por  $3 \frac{1}{7}$ . Es el modo más fácil y rápido. El Dios sabe mejor."

Ahora sabemos, que el número  $3 \frac{1}{7}$  del Arquímedes no obstante exacto expresa la proporción de longitud de la circunferencia sobre diámetro. Teóricamente no estaba demostrado, que esta proporción no puede ser expresada por una fracción. Nosotros podemos escribirla aproximadamente, aún superando esta exactitud, respondiendo a las exigencias más estrictas de vida práctica. Un matemático del siglo XVI Ludolf de Leuden, tuvo gran paciencia para calcular el número con 35 decimales y su testimonio era grabar encima de su lápida este valor de  $\pi^1$  (figura 122).

Aquí esta:

3,14159265358979323846264338327950288...

¡Un tal Shenx en el año 1873 obtuvo un valor para  $\pi$ , donde después de coma iban 707 decimales! Estos largos números, expresando el valor de  $\pi$  aproximadamente no tienen valor práctico, ni tampoco teórico. Solamente en nuestra época, durante el ocio, pudieron aparecer las ganas de batir récords, superando a Shenx: En los años 1946 – 1947, Ferguson (universidad de Manchester) y Wrench (Washington) calculaban 808 decimales para  $\pi$  y estaban muy contentos porque encontraron errores en los cálculos de Shenx, que comenzaban a partir del decimal número 528.

---

<sup>1</sup> En aquel tiempo este valor no era utilizado: fue traducido en el siglo XVIII por un académico matemático ruso Leonardo Pavlovich Eyley



Figura 122. Grabación matemática encima la lápida.

Por ejemplo, si deseáramos encontrar longitud de ecuador terrestre con la exactitud de un centímetro, sabiendo su diámetro, sería suficiente usar 9 decimales de  $\pi$ . Cogiendo el doble (18), habíamos podido calcular longitud de la circunferencia, con el radio desde la Tierra hasta el Sol, equivocándonos en no más de 0,0001 mm (¡en 100 veces menores del pelo!). Muy claramente enseñó la utilidad absoluta del primer centenar de decimales del número  $\pi$ , el matemático ruso Grave. Había calculando, si imaginamos una esfera, donde el radio es equivalente a la distancia desde la Tierra hasta Sirio, es decir, la cantidad de los kilómetros es equivalente a 132 con diez ceros:  $132 \times 10^{10}$ , llenando a esta esfera con microbios, donde en cada milímetro cubico de esfera hay por mil millones  $10^{10}$  de microbios, luego todos estos microbios se colocan sobre una línea recta así, donde distancia entre cada un microbio era otra vez equivalente a la distancia desde Sirio hasta la Tierra, entonces, teniendo en cuenta este segmento fantástico como diámetro de la circunferencia, era posible calcular longitud de la circunferencia gigantesca así obtenida con una exactitud de 1/1.000.000 mm, utilizando 100 decimales después de coma. Bien anota sobre este asunto un astrónomo francés Arago, "en el sentido práctico, nosotros no habríamos ganado nada, si entre longitud de circunferencia y su diámetro hubiera existido la proporción exacta".

Para cálculos habituales con el número  $\pi$  es necesario recordar dos decimales después de la coma (3,14), para los más exactos, los cuatro decimales (3,1416: en vez de 5 utilizaremos 6, porque luego sigue un decimal superior al 5).

Pequeños poemas o frases divertidas se quedaran en memoria más tiempo, que números. Por eso para recordar mejor el significado numérico de  $\pi$  inventan unos versos o frases

especiales. En estas obras de poesía matemática buscan palabras, donde la cantidad de letras de cada palabra coincide sucesivamente al número correspondiente del  $\pi$ .

Hay versos en inglés de 13 palabras, por lo tanto dan 12 signos después de coma; en alemán, de 24 palabras, y en francés de 30 palabras<sup>2</sup>.

Ellos son curiosos, pero muy grandes y pesados. Entre alumnos de E. Y. Tereskov, el profesor de matemática de una región moscovita, hay una estrofa muy popular en la escuela inventada por el mismo:

Ýòì	ÿ	çíàþ	è	ïïïþ	ïðáéðàñíí
3	1	4	1	5	9

Una de sus alumnas, Elisa Cherikover inventó una siguiente frase irónica y práctica:

Ïè	ííãèà	çíàèè	ííá	èèøíè,	íàïðàñíú.
2	6	5	3	5	8

El autor de este libro no atreve de inventar algo suyo, pero propone una frase bastante prosaica. "¿Qué yo lo se sobre círculos?", una pregunta, donde el número 3,1416 esconde la respuesta.

[Volver](#)

### 3. El error de Jack London

El sitio siguiente de la novela de Jack London "Un dueño pequeño de una gran casa" deja para nosotros unos datos para los cálculos geométricos:

#### Problema:

*" En el medio del campo hay una pértiga de acero, puesta profundamente a la tierra, Desde la cima hasta el fin del campo viene el cable, fijado por el tractor. Mecánicos aprietan la palanca, y el motor empieza a trabajar.*

*El vehículo tira para adelante, circunscribiendo el círculo alrededor de la pértiga, como si fuera su centro.*

- *Para perfeccionar finalmente el vehículo, - dijo Gregen, - os queda convertir la circunferencia, la que circunscribe el vehículo, al cuadrado.*
- *Por cierto, en el campo cuadrado de este modo se elimina mucha tierra.*
- *Gregen hizo un par de cálculos, luego dijo:*
- *Se pierde, aproximadamente tres acres de cada diez.*
- *No menos."*

---

<sup>2</sup> Versos extranjeros:

en inglés:

See I have a rhyme assisting  
My feeble brain, its tasks oftentimes resisting

en alemán:

Wie o dies ð  
Macht ernstlich, so vielen viele Muh'!  
Lernt immerhin, Jungltnge, leichte Verselein,  
Wie so zum Beispeil dies durfte zu merken sein'

en francés

Que j'aime a faire apprendre un  
Nombre utile aux sages!  
Jmmortel Archimede, sublime ingenieur,  
Qui de ton jugement peut sender la valeur?  
Pour moi ton probleme eut de pareils avantages

Proponemos a los lectores comprobar el cálculo.

### Solución

El cálculo ha sido erróneo: Se pierde 0,3 de toda la tierra. Pues bien, en realidad, un lado del cuadrado es  $a$ . La superficie de este cuadrado es  $a^2$ . Diámetro del círculo inscrito es equivalente a  $a$ , su superficie

$$\frac{\pi a^2}{4}$$

La parte limitada de la plaza cuadrada es:

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)a^2 = 0,22a^2$$

Veamos, que la parte bruta del campo cuadrado esta formado no 30%, como pensaban protagonistas de novela americana, sino 22%.

[Volver](#)

### 4. Lanzamiento de aguja

Un modo original e espontáneo para cálculo de  $\pi$  es el siguiente. Aprovechando con una aguja corta (de dos centímetros), mejor sin punta, para que aguja sea del mismo espesor, se dibujan en un papel un par de líneas paralelas, separadas una de otra por el doble de la longitud de la aguja. Luego se arroja la aguja de una altura arbitraria sobre el papel y se marca, ha cruzado o no la aguja una de las líneas (figura 123 de la izquierda). Para que la aguja no rebote, se deja por debajo, un papel secante o un paño. Se repite el lanzamiento muchas veces, por ejemplo cien o mejor, mil de veces, marcando cada vez el sitio de intersección<sup>3</sup>. Luego se divide la cantidad total de lanzamientos sobre el número de acontecimientos, cuando la aguja ha caído sobre las rayas, entonces, el resultado será el número  $\pi$ , por supuesto, mas o menos aproximadamente.

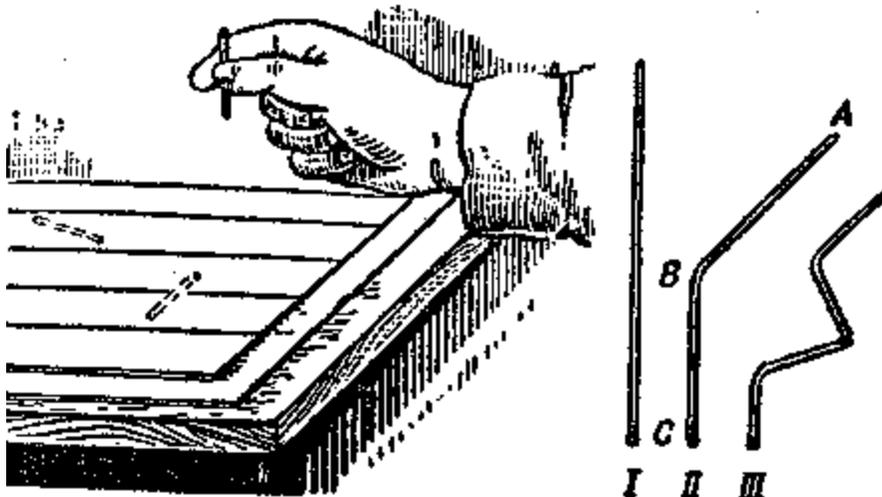


Figura 123. Lanzamiento de aguja. Experimento del Bufón

<sup>3</sup> Intersección era también cuando aguja solamente tocara con el punto a la línea.

Explicaremos por qué el resultado es así. Llamaremos  $K$  a la probabilidad de intersección y la longitud de la aguja será 20 mm.

Entonces la cantidad probable de intersecciones de cada milímetro de aguja es  $K/20$ . Para una parte la aguja de 3 mm, será  $3K/20$  y para una porción de 11 mm será  $11K/20$  y etc. Entonces la cantidad probable de intersecciones es directamente proporcional a la longitud de aguja.

Esta proporcionalidad se mantiene aún en el caso que la aguja sea curva. Será mejor si la aguja tiene la forma de la figura II (figura 123 a la derecha), además la parte  $AB = 11$  mm y  $BC = 9$  mm.

Para parte  $AB$  la cantidad de intersecciones probables es  $11K/20$  y para  $BC$  es  $9K/20$  y para la aguja completa será  $11K/20 + 9K/20$ , es decir, como antes es equivalente a  $K$ . Podemos doblar la aguja de una manera todavía más ingeniosa (la figura III, figura 123), la cantidad de intersecciones no cambiará.

(Tengan en cuenta, que con una aguja doblada son posibles intersecciones con dos o más partes de la aguja en el mismo momento; Esa intersección la tenemos que calcular como 2, como 3 y etc., porque la primera ha sido tomada cálculos de intersecciones para una parte de aguja, la segunda, para otra y etc.)

Imaginase ahora, que estamos lanzando una aguja en forma del círculo, con diámetro equivalente a la distancia entre las líneas (es el doble mas de nuestra aguja). Este anillo debe cada vez cruzar alguna línea (o tangente a ambas líneas, en todo caso, veremos dos intersecciones). Si la cantidad total de lanzamientos es  $N$ , entonces él numero de encuentros es  $2N$ . Nuestra aguja recta es menor de este anillo en tantas veces, en cuantas veces el medio diámetro es menor de la longitud de circunferencia, es decir, en  $2\pi$  veces. Pero nosotros ya tenemos establecido, que la cantidad probable de intersecciones es proporcional a la longitud de aguja. Por eso el número probable ( $K$ ) de las intersecciones por nuestra aguja tiene que ser menos de  $2N$  en  $2\pi$  veces, es decir, equivalente a

$$\pi = \frac{\text{cantidad de lanzamientos}}{\text{cantidad de intersecciones}} \cdot \frac{N}{2N}$$

Cuando mayor sea la cantidad de lanzamientos, más exacto será el valor para  $\pi$ . Un astrónomo suizo R. Volf en siglo XIX observó 5000 caídas de aguja sobre el papel rayado y ha obtenido la cantidad de  $\pi = 3,159...$  esta expresión es menos exacta que el número del Arquímedes.

Como vemos, la proporción de longitud de la circunferencia sobre el diámetro aquí buscan siguiendo por el camino practico, además, es curioso, no hace falta dibujar el círculo o diámetro, es decir, no falta el compás. Una persona sin tener ni idea sobre geometría o sobre el círculo, podrá encontrar la cantidad del numero  $\pi$ , si pacientemente hace bastante mayor cantidad de lanzamientos con aguja.

[Volver](#)

## 5. Enderezamiento de circunferencia

Para mayoría de los propósitos prácticos es bastante utilizar para el  $\pi$  un numero  $3 \frac{1}{7}$  y el largo de la circunferencia equivalente a  $3 \frac{1}{7}$  veces el diámetro (dividiendo un segmento sobre siete partes es, evidentemente, fácil). Existen otros modos aproximadamente de enderezamiento, utilizados en la practica por carpinteros y etc. No vamos a examinar ahora ellos, sino mostraremos un modo de enderezamiento bastante fácil, el que deja un resultado muy exacto.

## Problema

Si necesitamos enderezar la circunferencia  $O$  del radio  $r$  (figura 124), entonces pasaran el diámetro  $AB$ , y en el punto  $B$  – una línea perpendicular  $CD$  hacia  $AB$ . Desde el centro  $O$  sobre ángulo de  $30^\circ$  hacia  $AB$  pasan la recta  $OC$ . Luego en la recta  $CD$  desde el punto  $C$  dejan los tres radios de esta circunferencia y unen el punto  $D$  recibido con  $A$ : El segmento  $AD$  es equivalente a longitud de la media circunferencia. Si el segmento  $AD$  prolongaremos doble, entonces recibiremos la circunferencia  $O$  enderezada. El error posible menos de  $0,0002r$ .

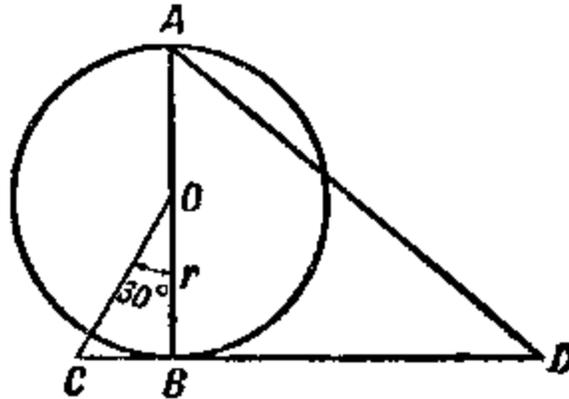


Figura 124. El modo aproximadamente geométrico de enderezamiento de la circunferencia. ¿Cuál es el principio elemental de esta teoría?

### Solución

Sobre el teorema de Pitágoras

$$CB^2 + OB^2 = OC^2.$$

Indicando el radio  $OB$  otra vez de  $r$  y teniendo en cuenta, que  $CB = OC/2$  (como el cateto que está frente del ángulo de  $30^\circ$ ), obtenemos:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2$$

De donde

Luego en el triángulo  $ABD$

$$\begin{aligned} BD &= CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3} \\ AD &= \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} = \\ &= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3,14153r \end{aligned}$$

Comparando este resultado con aquel que obtuvimos, si cogemos  $\pi$  con la mayor potencia de exactitud ( $\pi = 3,141593$ ), vimos, que la diferencia forma solamente  $0,00006$  m. Si nosotros de esta manera enderezaremos la circunferencia con el radio de  $1$  m, el error será para media circunferencia solamente  $0,00006$  m, y para circunferencia total  $0,00012$  m, o  $0,12$  mm (es la triple anchura del pelo).

[Volver](#)

## 6. Cuadratura del círculo

No puede ser, que ninguno de Uds. no escucharan alguna vez sobre la “cuadratura del círculo”, sobre aquella famosa tarea de geometría, con la cual trabajaban matemáticos veinte siglos antes. Estoy seguro, que hay lectores que ellos mismos probaron solucionar esta tarea. Y aun más, lectores que están perplejos de la dificultad de esta tarea clásica e insoluble. La mayoría acostumbrados de repetir lo mismo, que la tarea sobre la cuadratura del círculo es irresoluble, no sabiendo nada de la naturaleza de este problema, ni nada sobre dificultad de la solución.

La Matemática tiene muchas tareas todavía más curiosas como teórica y prácticamente de la cuadratura del círculo. Pero ninguna ha tenido tanto popularidad como esta; durante siglos han trabajado sobre ella profesionales, matemáticos y aficionados.

“Encontrar la cuadratura del círculo”, es entonces, dibujar un cuadrado cuya superficie sea equivalente a la de un círculo dado. Prácticamente esta tarea aparece a menudo, pero tal vez se soluciona prácticamente. La tarea famosa pide, para que el figura sea totalmente correcta, construirlo con la ayuda de dos tipos de operaciones técnico – lineales:

1. Circunscribir la circunferencia alrededor de un punto
2. Pasar la línea recta a través de dos puntos.

O sea, necesita hacer la figura, utilizando solamente dos instrumentos: compás y regla. Entre los matemáticos hay mayor extensión de opinión, que la dificultad condicionada por aquello, que la proporción de la longitud de la circunferencia sobre el diámetro (el famoso número  $\pi$ ) no puede ser expresado por una cantidad determinada de dígitos. Es cierto en tanto que solución de esta tarea depende de la naturaleza especial del número  $\pi$ . En realidad: Transformación del rectángulo al cuadrado con la misma superficie es una tarea fácil y rápida de solucionar. Para el problema de cuadratura del círculo tiene su expresión en la construcción, por el compás y regla, de un rectángulo isométrico al círculo. De la fórmula de la superficie de una circunferencia  $S = \pi r^2$ , o (que es lo mismo)  $S = \pi r \times \pi r$ , evidentemente, superficie del círculo es equivalente a la superficie de este rectángulo, donde uno de los lados es  $r$ , otro en  $\pi$  veces más. Entonces se trata de dibujar un segmento, el que en  $\pi$  veces será más largo del dado. Se sabe,  $\pi$  no es exactamente equivalente a  $3 \frac{1}{7}$ , ni  $3,14$ , ni tampoco  $3, 14159$ . La serie de los números se lleva hasta el infinito.

Esta característica del número  $\pi$ , su irracionalidad<sup>4</sup> fue examinada en el siglo XVIII por los matemáticos Lamber y Lejandro. Sin embargo, conocimientos de irracionalidad de  $\pi$  no habían parado a los esfuerzos de los “cuadroturistas” de matemática. Ellos sabían, que la irracionalidad por si misma no hacía la tarea desesperada. Existen cantidades irracionales, las que geometría sabe “construir” perfectamente. Si necesito dibujar un segmento, que sea más largo del dado en  $\sqrt{2}$  veces. El número  $\sqrt{2}$ , como  $\pi$ , son irracionales. Sin embargo, no es nada tan fácil, que dibujar el segmento buscado: Recordaremos,  $a\sqrt{2}$  es el lado del cuadrado inscrito en el círculo con el radio  $a$ . Cualquier alumno hará la construcción del. Cualquier alumno hará la construcción del segmento  $a\sqrt{3}$  (lado del triángulo inscrito equilátero). No hay grandes dificultades con la construcción de una expresión irracional (de primera vista tan complicada)

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \sqrt{2}$$

porque la tiene su expresión en la construcción de 64 – rinconera.

<sup>4</sup> La característica del número  $\pi$  es, que el no puede ser expresado por una fracción justa.

Como vemos, multiplicador irracional, estado en la expresión, no siempre lo hace esta expresión imposible para construir con el compás y la regla. La insolubilidad de cuadratura del círculo se esconde no totalmente en el  $\pi$  - irracional, sino dentro de otra característica de este número. Precisamente, la cantidad  $\pi$  - no es algebraica, es decir no podemos recibir por la solución de una ecuación con coeficiente racional. Estos números llaman "trascendental". El matemático de siglo XVI el Viet demostró, que el número

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \dots}$$

Esta expresión para  $\pi$  soluciona la tarea de la cuadratura del círculo, si la cantidad de las operaciones entre su serie finita (después esta expresión podrá ser construida geoméricamente). Pero como cantidad de expresiones de raíces cuadradas en este caso es infinita, entonces la fórmula de Viet no ayuda.

Pues el motivo de la insolubilidad de la tarea sobre cuadratura del círculo es el transcendentalismo del número  $\pi$ , es decir no se podrá solucionar la ecuación con coeficientes racionales. Esta característica del número  $\pi$  ha sido examinada por el matemático alemán Lindeman en año 1889. En el fondo este científico es la única persona que ha solucionado la cuadratura del círculo, a pesar que la solución es, afirma, de construcción imposible. Por lo tanto, en año 1889 se terminan esfuerzos seculares de los matemáticos en este sentido; pero, por desgracia, no terminan los ensayos inútiles de los aficionados, que conocen insuficientemente el problema.

Lo anterior se deduce de la teoría, pero, ¿qué pasa con la práctica? Pues ella no necesita una resolución justa de esta tarea famosa. La opinión de mayoría, es una resolución sobre el problema de cuadratura del círculo, quizás tendría gran significación para la vida práctica si se tiene una equivocación profunda. Para las necesidades habituales es suficiente tener a disposición los modos aproximados de solución.

Las averiguaciones prácticas de la cuadratura del círculo han sido inútiles desde aquel tiempo, cuando se tenían los primeros 7 u 8 números exactos de  $\pi$ . Para necesidades de vida práctica es suficiente saber, que  $\pi = 3,1415926$ . Ninguna medición de longitud puede dar un resultado expresado por más de siete cifras significativas. Por eso, tomar para  $\pi$  más de ocho cifras decimales, es inútil: la exactitud del cálculo no se mejorará<sup>5</sup>.

Si el radio está expresado por siete números significativos, entonces la longitud de la circunferencia no tendrá más de siete números, aunque cojamos para las primeras cien cifras significativas.

En aquello, que los matemáticos antiguos lo hicieron con gran trabajo para obtener las cifras significativas más largas, no tiene ninguna importancia práctica. Además la significación científica de esta obra es inútil. Sencillamente se trata de paciencia. Si Uds. tienen ganas y mucho tiempo ocioso, podrán encontrar 1000 signos para  $\pi$ , utilizando la serie siguiente infinita, encontrada por el Leibniz<sup>6</sup>

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

Un astrónomo, citado anteriormente, Argo, tiene escrito lo siguiente:

"Buscadores de cuadratura del círculo siguen dedicando el tiempo al solucionar la tarea, imposibilidad de la cual ahora esta examinada positivo y la cual, si por acaso pudiera realizarse, no traería ningún interés práctico. No hace falta ocupándonos sobre este asunto:

<sup>5</sup> Ver "Aritmética recreativa" Y. I. Perelman.

<sup>6</sup> Pero esto será un ejercicio aritmético inútil, ni siquiera un poco avanzado para la solución de la tarea famosa.

Los enfermos de cerebro hagan todo lo posible para descubrir la cuadratura del círculo, pero por desgracia no tiene ningún sentido. Esta enfermedad mental existe de la antigüedad."

Y termina irónicamente:

"Las academias de todos países, enfrentándose contra los buscadores de cuadratura, anotaban un fenómeno, que la enfermedad, habitualmente, progresa en la primavera."

[Volver](#)

### 7. Triángulo de Bingo

Examinaremos una de las soluciones aproximadas del problema sobre cuadratura del círculo, muy cómoda para las necesidades prácticas de la vida.

El modo consiste en que se calcula (figura 125) el ángulo  $a$ , bajo de cual deberemos pasar hacia diámetro  $AB$  a la cuerda  $AC = x$ , era el lado del cuadrado buscado. Para saber el valor de este ángulo, tenemos que pedir ayuda a la trigonometría:

$$\cos a = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}$$

donde  $r$  es el radio del círculo.

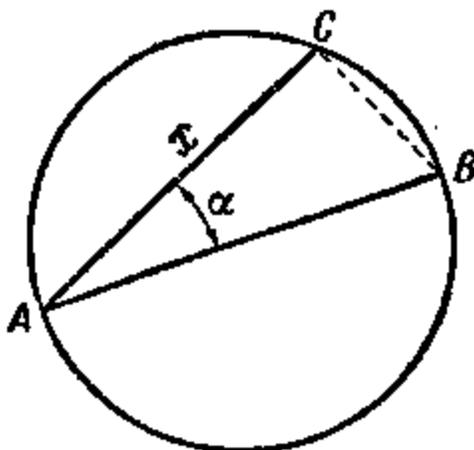


Figura 125. Un modo de ingeniero ruso del Bingo (1836)

Entonces, un lado del cuadrado buscado  $x = 2r \times \cos a$ , su superficie es  $4r^2 \times \cos^2 a$ . Por otro lado, la superficie del cuadrado  $\pi r^2$  es la superficie del círculo correspondiente. De aquí se deduce,

$$4r^2 \times \cos^2 a = \pi r^2$$

de donde

$$\cos^2 a = \frac{\pi}{4}; \cos a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0,886.$$

En las tablas encontramos:

$$a = 27^\circ 36'.$$

Entonces, pasando en el mismo círculo la cuerda bajo de  $27^\circ 36'$  sobre el diámetro, inmediatamente obtenemos un lado del cuadrado, la superficie del cual es equivalente a la

superficie del círculo. Prácticamente se hacen así: preparan el triángulo técnico<sup>7</sup>, donde uno de los ángulos agudos es de  $27^{\circ} 36'$  (el otro  $62^{\circ} 24'$ ). Teniendo a su disposición este triángulo, podemos, para cada un círculo, encontrar un lado del cuadrado isométrico. Para personas quienes deseen preparar este triángulo técnico son útiles las indicaciones siguientes.

Como la tangente de  $27^{\circ} 36'$  es equivalente a 0,523, o  $23/44$ , entonces los catetos de este triángulo están en la proporción de  $23/44$ . Por eso, preparando el triángulo, uno de los catetos, por ejemplo, es de 22 cm, y el otro 11,5 cm, nosotros vamos a tener todo lo que necesitamos. Esta claro, que podemos utilizar este triángulo como otro cualquiera.

[Volver](#)

## 8. La cabeza y los pies

Parece, que uno de los protagonistas de Julio Verne calculaba, cuál parte de su cuerpo había pasado un camino mas largo durante el tiempo de los cruceros alrededor del mundo, la cabeza o los pies. Esta tarea es más instructiva, si preguntamos de otra manera. Nosotros la proponemos en otro aspecto.

### Problema.

*Imagínense que Uds. han cruzado el mundo a lo largo de ecuador. ¿En cuánto la cima de la cabeza pasara el camino mas largo, que la punta del pie?*

### Solución

Los pies recorrieron un camino  $2\pi R$ , donde  $R$  es el radio del globo terrestre. La cima de cabeza andaba sobre esto  $2\pi (R + 1,7)$ , donde 1,7m es la estatura del cuerpo humano. La diferencia de los caminos es  $2\pi (R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi \times 1,7 = 10,7\text{m}$ . Entonces, la cabeza había recorrido un camino en 10,7 m mayor, que los pies.

Es curioso, que en la respuesta final no entra el radio de la Tierra. Por eso el resultado sale lo mismo en la Tierra, como en Júpiter, u otro planeta pequeño. En general, la diferencia de longitudes de dos circunferencias concéntricas no depende de sus radios, solamente de las distancia entre ellos. Adición de un centímetro del radio de la órbita terrestre aumentará su longitud en tantas veces, en cuantas prolonga esa adición al radio de una simple moneda. Más sobre esta paradoja geométrica se encuentra en uno de los manuales de distracciones geométricas.

### Problema.

*¿Si se pone sobre el ecuador terrestre un hilo metálico y luego se le añade un metro, entonces, podrá pasar un ratón entre alambre y tierra?*

### Solución.

Normalmente contestan, que el espacio era mas estrecho que un pelo: ¡Qué significa un metro comparando con 40 millones de metros de ecuador terrestre! En realidad el espacio es

$$\frac{100}{2\pi} \text{ cm} \approx 16 \text{ cm}$$

No solo un ratón, sino también el gato podrá pasar por este espacio.

[Volver](#)

## 9. Alambre a lo largo de ecuador

<sup>7</sup> Este modo cómodo había sido propuesto en año 1836 por un ingeniero ruso de apellido Bingo; el triángulo tiene el nombre del inventor - "triángulo de Bingo".

**Problema.**

Ahora imagínense, que el globo terrestre está cubierto fuertemente por un hilo metálico a lo largo de ecuador. ¿Qué sucederá, si el hilo se enfría en  $1^\circ\text{C}$ ? ¿Considerando que no se rompe o no se estira, entonces, cuánto se hunde dentro de la tierra?

**Solución.**

Parece, que no es tan importante la bajada de temperatura solamente de  $1^\circ\text{C}$ , no podrá provocar hundimiento profundo del alambre en la tierra. Los cálculos dicen lo siguiente. Enfriándose en  $1^\circ\text{C}$ , el hilo metálico reduce un cien mil parte de toda su longitud. Con longitud de 40 millones de metros (es la longitud de ecuador) el hilo tiene que reducirse, como es fácil de calcular, sobre 400m. Pero el radio de esta circunferencia metálica se reduce no en 400 metros, sino mucho más menos. Para saber, en cuántas veces disminuye el radio, debemos dividir 400 m sobre 6,28, es decir sobre  $2\pi$ . Obtendremos como 64 metros. Entonces el hilo enfriándose en  $1^\circ\text{C}$ , tendría sobre estas circunstancias que hundirse en la tierra no en par de centímetros, ¡sino más que en 60 metros!

[Volver](#)

**10. Acción y cálculo****Problema**

Enfrente de Uds. hay ocho círculos iguales (figura 126). Los siete pintados – son inmóviles, octavo (claro) corre encima de ellos sin deslizarse. ¿Cuántas vueltas daría el, dando una vuelta alrededor de los círculos inmóviles?

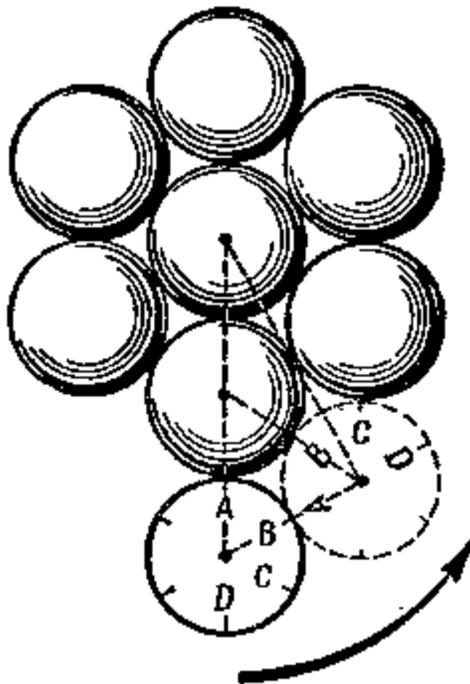


Figura 126. ¿Cuántas vueltas hará el círculo claro, dando un giro alrededor de otros siete?

Uds. ahora mismo podrán comprobar en la práctica: Poniendo encima de la mesa ocho monedas del mismo tamaño, colocando como se indica el figura y fijando las siete monedas sobre la mesa, dejando moneda octava hacer una vuelta. Para saber la cantidad de vueltas fíjense, por ejemplo, a la postura del número encima de moneda. Cuando el número se vuelva a ponerse en la postura principal, la moneda habrá dado un giro alrededor de su centro.

Hagan la prueba en realidad, no imaginándola, y verán, que la moneda hará solo cuatro vueltas.

Ahora vamos a probar de obtener la misma respuesta con ayuda de reflexión y cálculos. Vamos a encontrar, por ejemplo, el que arco circunscribe el círculo corriente encima del círculo inmóvil. Con esta razón imaginaremos movimiento del círculo corriente desde la "colina" A en la "valleja" (quebrada) próxima entre dos círculos inmóviles (figura 126 la raya discontinua).

Sobre la figura no es tan difícil de establecer, que el arco AB, sobre el que corría el círculo, sea de  $60^\circ$ . En la circunferencia de cada círculo inmóvil aquellos arcos son dos; Juntos ellos forman el arco de  $120^\circ$  ó  $1/3$  de circunferencia.

Por lo tanto, el círculo corriendo haga  $1/3$  de vuelta, dejando  $1/3$  de cada uno círculo inmóvil.

Todos juntos los seis círculos inmóviles; Pues la respuesta es: el círculo móvil hace solamente  $1/3 \times 6 = 2$  vueltas.

¡Pues estamos con los diferentes resultados de observación! Pero "la acción es cosa caprichosa". Si la observación no confirma el cálculo, entonces hay dentro del cálculo un defecto.

Uds. tendrán que encontrar el defecto en los siguientes razonamientos.

### Solución.

Es que pasa, cuando el círculo corre sin deslizamiento sobre el segmento recto con  $1/2$  de longitud de la circunferencia del círculo corriente, entonces en realidad hace  $1/2$  vuelta alrededor de su centro. Esta aprobación parece injusta, no corresponda a realidad, cuando el círculo corre sobre el arco de alguna línea curva. En la tarea examinada el círculo corriente, recorriendo el arco, formado, por ejemplo,  $1/3$  longitud de su circunferencia, hace no  $1/2$  vuelta, sino  $2/3$  vueltas y por lo tanto, recorriendo a los seis arcos harán

$$6 \times 2/3 = 4 \text{ vueltas!}$$

Podemos asegurarnos observándola. La raya punteada en el figura 126 refleja esa posición del círculo corriente después de que él recorrió sobre el arco AB ( $=60^\circ$ ) del círculo inmóvil, es decir, sobre el arco formado por  $1/6$  longitud de la circunferencia. En la nueva posición del círculo el sitio mas alto sobre su circunferencia ocupa ahora no el punto A, sino el punto C, como vemos corresponda al giro de los puntos de circunferencia sobre  $120^\circ$ , es decir, sobre  $1/2$  de vuelta completa. Al "camino" de  $120^\circ$  corresponda  $2/3$  de vuelta completa del círculo corriente.

Entonces, si el círculo corre sobre una línea curva, el hará otra cantidad de vueltas, que cuando el corre sobre un camino recto de la misma longitud.

\* \* \*

Nos detendremos un poco sobre la parte geométrica de este fenómeno curioso, además, la explicación habitual no siempre es segura.

Sea el círculo con radio  $r$  que corre sobre la recta. El hace una vuelta sobre el segmento AB, longitud de cual es equivalente a la longitud de circunferencia del círculo corriente ( $2\pi r$ ).

Doblabamos el segmento AB por la mitad (figura 127) y daremos la vuelta con CB sobre ángulo  $\alpha$  proporcionalmente a la postura principal.

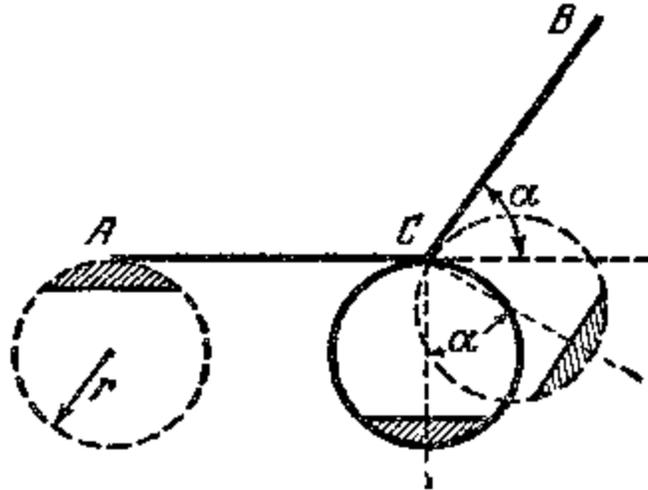


Figura 127. Como aparece la vuelta suplementaria con la ida del círculo sobre la línea curva.

Ahora, cuando el círculo esta haciendo media vuelta, alcanza a la cima C y, para mantener esta postura, sobre cual el iba a tocar en el punto C a la recta CB, girar junto con su centro sobre el ángulo, equivalente a  $\alpha$  (estos ángulos son iguales, porque tienen mutuamente los lados perpendiculares).

Durante el giro el círculo corre sobre el segmento. Esto es que produce aquí la parte suplementaria de la vuelta completa comparando con el giro sobre la recta.

La curva suplementaria forma aquella parte de la vuelta completa, cual esta formando el ángulo  $\alpha$  desde el ángulo  $2\pi$ , es decir, media vuelta, entonces, en total con el movimiento sobre la línea quebrada ACB él hará  $1 + \alpha/2\pi$  vueltas.

Ahora no es difícil de imaginar, cuantas vueltas tiene que hacer el círculo, corriendo por la parte exterior del hexágono (figura 128).

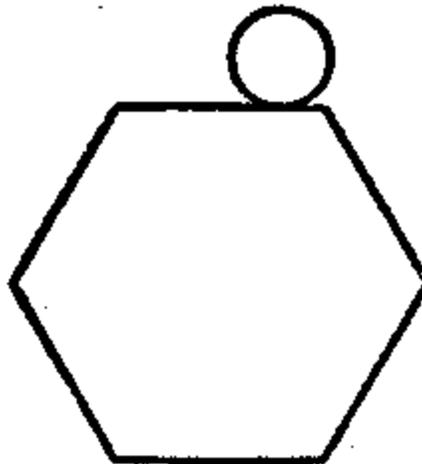


Figura 128. ¿En cuantas vueltas mas haré el círculo, si el correrá encima de los lados del polígono, pero no sobre su perímetro enderezado?

Evidentemente tanto, cuantas veces él dará vueltas sobre el camino recto, equivalente al perímetro (suma de los lados) del hexágono, plus la cantidad de vueltas, equivalente a la suma de los ángulos exteriores del hexágono, dividida por  $2\pi$ . Como la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es justa e equivalente a  $4d$ , o  $2\pi$ , entonces  $2\pi/2\pi = 1$ .

De este modo, rodeando al hexágono y también cualquier polígono convexo, el círculo siempre hará con una vuelta mas, que con movimiento sobre el segmento recto, equivalente al perímetro del polígono.

Duplicación infinita a los lados del polígono convexo y justo esta acercándose a la circunferencia, significa, todas las consideraciones dichos tienen la misma importancia para circunferencia. Sí, por ejemplo, de acuerdo con el problema principal un círculo corre sobre el arco de  $120^\circ$  equivalente a su círculo, entonces, la confirmación, que el círculo movido hace no  $1/3$ , sino  $2/3$  de vueltas, tendrá la claridad geométrica completa.

[Volver](#)

### 11. Chica encima de una cuerda

Cuando círculo corre encima de una línea, estado con el en mismo plano, entonces el cada punto del círculo se mueve sobre el plano, es decir, tiene su trayecto.



Figura 129. Cicloide – el trayecto del punto A del disco, corriendo sin deslizamiento sobre la rectilínea.

Fíjense en la trayectoria de cualquier punto del círculo, corriendo encima de una línea o encima de una circunferencia, y Uds. podrán ver curvas distintas.

Algunas de ellas estas reflejadas en los figuras 129 e 130.

Surge una pregunta: ¿Podrá un punto del círculo, corriendo por la “parte inferior” de la circunferencia de otro círculo(figura 130), inscribiendo no línea curva, sino la recta? En primer lugar parece imposible.

Sin embargo esta construcción la vi por mis propios ojos. Ha sido un juguete “la chica en la cuerda”(figura 131). Uds. podrán prepararlo también sin ninguna dificultad. En un trozo de cartón dibujan un círculo con diámetro de 30 cm, dejando el campo en el papel, y uno de los diámetros prolongan por ambas partes.

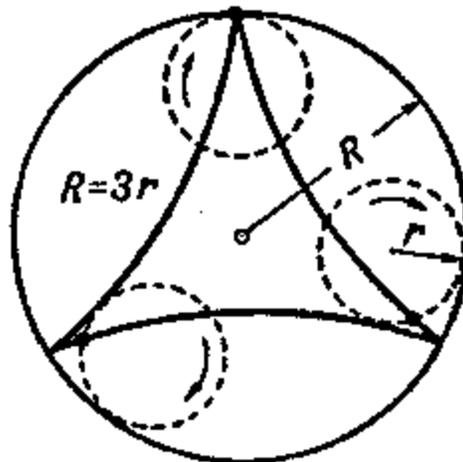


Figura 130. Hipocicloide, el trayecto del punto de la circunferencia del disco, corriendo por el dentro de gran circunferencia, además  $R = 3r$ .

Sobre el diámetro prolongado por ambas partes colocaremos agujas con hilo, estirando al horizontalmente y ambas sus fines fijar encima del cartón. El círculo dibujado se cortara y dentro de ventanilla creada ponen un círculo también de cartón con diámetro de 15cm. Sobre el borde del círculo pequeño colocan una aguja, como en el figura 131, cortan del papel la figura de la chica y se pegan por la pierna sobre cabeza de aguja. Ahora prueban a rodar el círculo menor, ajustándose al borde de la ventanilla; La cabeza de aguja, junto con ella figura de chica van a deslizarse hacia delante, y detrás a lo largo del hilo tirante.

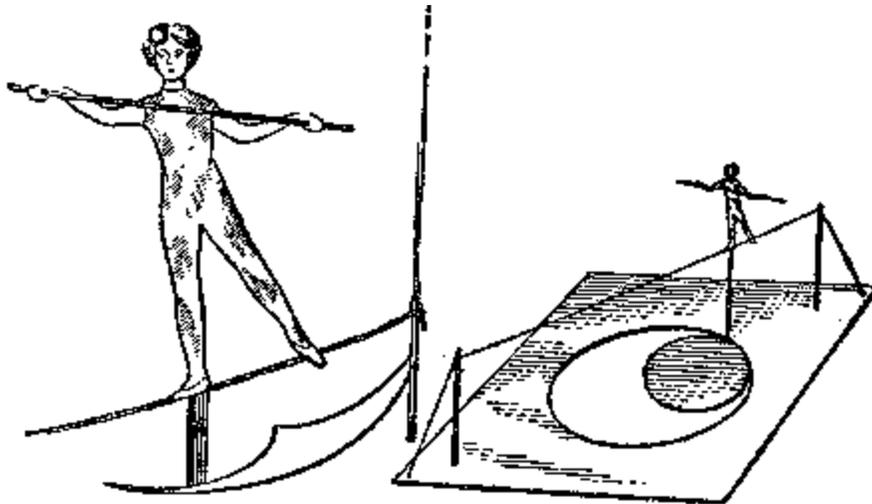


Figura 131. "La chica en la cuerda". En el círculo corriente hay unos puntos, los cuales se mueven rectamente.

Esto se explica solo, porque el punto del círculo corriente, donde esta fijada la aguja, se mueve justamente a lo largo del diámetro de ventanilla  
 ¿Pero por qué en el caso análogo, reflejando en la figura 130, el punto del círculo corriente inscribe no la recta, sino la línea curva (se llama hipocicloide)? Todo depende de la proporción sobre los diámetros de ambos círculos.

### **Problema**

*Demostrar, que si dentro de un círculo mayor corre un círculo doble menor de su diámetro, entonces durante este movimiento cualquier punto sobre circunferencia del círculo menor se moverá sobre rectilínea, la cual es el diámetro del círculo mayor.*

### **Solución.**

Si el diámetro del círculo  $O_1$  el doble menor del diámetro del círculo  $O$  (figura 132), entonces en cualquier momento de movimiento del círculo  $O_1$ , uno de su punto esta en el centro del círculo  $O$ .

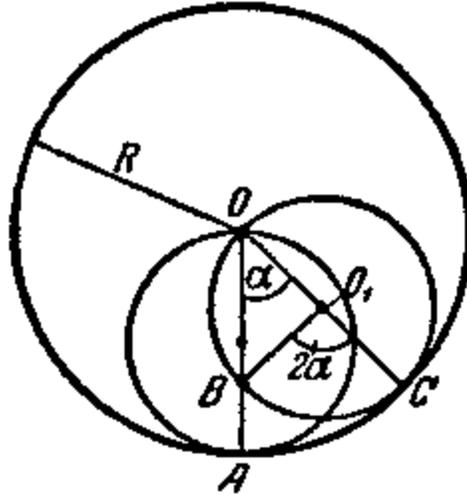


Figura 132. Explicación geométrica "la chica en la cuerda"

Observaremos el movimiento del punto A. Sea el círculo menor que se ha recorrido sobre arco AC.

¿Dónde se encontrará el punto A en el nuevo estado del círculo  $O_1$ ?

Evidentemente que debe encontrarse en tal punto B de su circunferencia, para que los arcos AB y BC sean iguales de longitud (círculo se corre sin deslizarse).

Sea  $OA = R$  y  $\angle AOC = \alpha$ .

Luego  $AC = R\alpha$ ; por lo tanto,  $BC = R\alpha$ , pero como  $O_1C = R/2$ , entonces

$$\angle BO_1C = R \times \alpha / (R/2) = 2\alpha;$$

Luego  $\angle BOC$  como inscrito es  $2\alpha / 2 = \alpha$ , es decir, el punto B se ha quedado en la recta OA.

El juguete descrito aquí representa por si mismo un mecanismo primitivo para transformación del movimiento giratorio rectilíneo.

La construcción de estos mecanismos (se llaman inversores) interesa a los técnicos – mecánicos desde el tiempo de primer inventor ruso de la maquina de vapor – I. I. Polzunov. Normalmente estos mecanismos, transmiten al punto el movimiento rectilíneo, tienen estructura de charnelas.

Una valiosa aportación en la matemática de los mecanismos hizo el matemático ruso P.L. Chebyshev (1821 – 1894) (figura 133). El era no solo un matemático generoso, sino también gran mecánico. Construyó un modelo de la silla "cicleta", inventó el mejor mecanismo contable de aquel tiempo – aritmómetro y etc.



Figura 133 P. L. Chebyshev (1821 – 1894)

[Volver](#)

## 12. Un vuelo a través del Polo

Uds. evidentemente, se acuerdan de un vuelo del famoso M M. Gromov y sus compañeros desde Moscú a San Jacinto a través del Polo norte, cuando durante 62 horas 17 min. de vuelo han sido conquistados dos marcas mundiales de un vuelo sin aterrizaje sobre una línea recta (10.200 km) y sobre la curva (11.500 km).

¿Cómo piensan Uds, será posible que el avión de los héroes dio la vuelta alrededor del eje terrestre junto con la Tierra, y además cruzando el Polo? Esta pregunta se escucha a menudo, pero no siempre nos dan la respuesta correcta. Cualquier avión, también aquel, que cruzó el Polo, sin duda alguna tendrá que tomar parte de la vuelta del globo terrestre. Esto aparece, por que el avión volando esta solamente separado con la litosfera, pero se queda en atmósfera y lleva tras si en el movimiento alrededor del eje de nuestro planeta. Entonces, haciendo el vuelo desde Moscú hasta Norteamérica, el avión en el mismo tiempo giraba junto con la Tierra alrededor de su eje. ¿Cuál es el trayecto de este vuelo?

Para contestar correctamente, debemos que tener en cuenta que cuando digamos “el cuerpo se mueve”, es decir, se cambia de postura del cuerpo con respecto de otros. La pregunta sobre el camino y en general sobre el movimiento no tendría sentido, si no está indicado, como dicen matemáticos, el sistema de referencia, o sencillamente, un cuerpo, respecto al cual aparece el movimiento.

Relativo a la Tierra el avión de M M. Gromov se ha movido casi a lo largo de meridiano Moscú, como cualquier otro, giró junto con la Tierra alrededor de su eje, manteniendo la línea de meridiano durante todo el vuelo; pero sobre la forma del camino para un observador de la Tierra este movimiento no se refleja, porque en este momento se aparece en relación con otro cualquier cuerpo, no sobre la Tierra.

Por lo tanto, para nosotros, estando en la Tierra, el camino de este vuelo a través del Polo, es el arco de un gran círculo, si tener en cuenta, que el avión se ha movido justamente sobre el meridiano y siempre sobre el mismo trayecto desde el centro de la Tierra.

Ahora preguntaremos de otra manera: tenemos el movimiento del avión con respecto a la Tierra y sabemos, que el avión con la Tierra junto giran alrededor de eje terrestre, es decir,

tenemos el movimiento de avión y de la Tierra con respecto de un tal tercer cuerpo; ¿Cuál es el camino de vuelo para el observador, en relación con este tercer cuerpo?

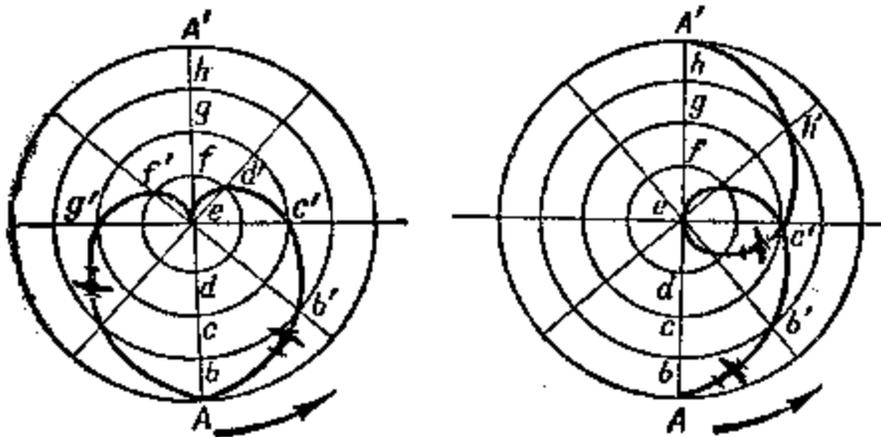
Vamos a facilitar la tarea. La región polar de nuestro planeta la imaginaremos como un disco plano, cuya superficie se sitúa perpendicularmente al eje terrestre. Sea esta superficie imaginaria aquel "cuerpo" respecto al cual se mueve el disco alrededor del eje terrestre, y a lo largo de un diámetro del disco regularmente corre una carreta mecánica: La imagen del avión, volando a lo largo de meridiano a través del Polo. ¿Qué línea del camino va a presentar nuestra carreta en la superficie (mejor dicho, por un punto de la carreta, de su centro de gravedad)?

El tiempo, durante cual ella recorre desde un extremo del diámetro hasta otro, dependerá de su velocidad.

Vamos a ver tres casos:

1. La carreta recorre su camino durante 12 horas;
2. El mismo camino recorre durante 24 horas y
3. Recorre durante 48 horas.

En cualquier caso el disco haga una vuelta durante 24 horas.



*Figuras 134 – 135 Las curvas, las cuales inscribe un punto sobre una superficie inmóvil, participando durante dos movimientos.*

Primer caso (figura 134). La carreta recorre el diámetro del disco durante 12 horas. El disco hará durante este tiempo media vuelta, es decir dará vuelta de  $180^\circ$ , los puntos A y A' se intercambiarán a los sitios. En la figura 134 el diámetro está dividido en ocho partes iguales, cada una de ellas, la carreta las recorre durante  $12 / 8 = 1,5$  hora.

Observaremos dónde va estar la carreta después de 1,5 hora de empezar la movida. Si el disco no da vueltas, la carreta, saliendo del punto A, alcanza el punto b durante 1,5 hora. Pero el disco se gira y durante 1,5 hora seguirá sobre  $180^\circ / 8 = 45^\circ$ . Por esto el punto b del disco se trasladará al punto b'. Un observador, estado en el mismo disco y dando vuelta junto con él no notará su giro y verá, que la carreta cambia el sitio desde el punto A al punto b. Pero observador, el que se encuentra fuera del disco y no participa en su giro, notará otra cosa: La carreta se movió sobre una línea curva desde el punto A al punto b'. A través de otra 1,5 hora el observador, estado fuera del disco, se veía la carreta en el punto c'. A lo largo de otra 1,5 hora la carreta se moverá sobre el arco c'd, luego de otra 1,5 hora alcanzará el centro e.

Siguiendo observando el movimiento de la carreta, el observador que está afuera del disco, notará algo inexpresable: la carreta inscribirá la curva ef'gf' A, y el movimiento, extrañamente, se terminará no en el punto opuesto de diámetro, sino en el punto principal.

La clave de este enigma es siguiente: Durante seis horas de viaje sobre la otra mitad del diámetro el radio consigue dar vuelta junto con el disco sobre  $180^\circ$  y tomar la posición de primera mitad del diámetro. La carreta se gira con el disco también en aquel momento, cuando pasa por encima de su centro. Toda carreta no podrá entrar en el centro; ella se une con el centro solamente con un solo punto y en un momento dado él se gira junto con el disco alrededor de este punto. Lo mismo tiene que pasar con un avión en este momento, cuando vuela por encima del Polo. Entonces el camino de la carreta sobre el diámetro del disco desde un punto final hasta otro para dos distintos observadores se presentaran las formas distintas del camino. Aquel, quien esta encima del disco y gira junto con él, ese camino aparece como una línea recta. Pero para el observador inmóvil, no estado encima del disco, vería el movimiento de la carreta sobre una curva, reflejada en el figura 134 y recordara el contorno del corazón.

La misma curva la podrá ver cualquiera de Uds., observándola desde el centro de la Tierra el vuelo de avión con respecto de superficie imaginario, perpendicularmente al eje terrestre, con una condición fantástica, que la Tierra sea transparente, Ud. y la superficie no participan en el giro de la Tierra, y si el vuelo a través del Polo duraba 12 horas.

Aquí tiene un ejemplo curioso sumando las dos movidas.

En realidad el vuelo a través del Polo desde Moscú hasta el punto apuesto diametralmente del mismo paralelo duraba 12 horas, por eso quedaremos examinando otra tarea en el mismo sentido.

Segundo caso (figura 135). La carreta recorrerá el diámetro durante 24 horas. Durante este tiempo el disco cumple la vuelta completa, y por lo tanto para un observador inmóvil proporcionalmente al disco, el camino va a tener la forma de una curva, reflejada en el figura 135.

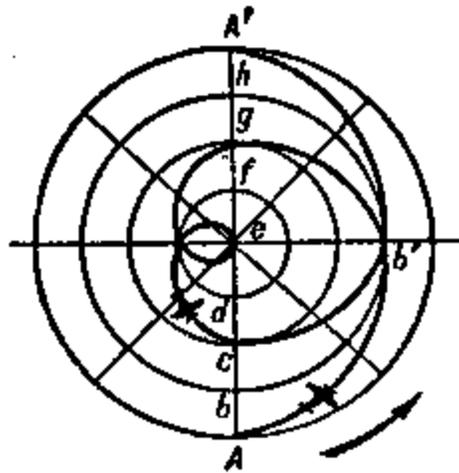
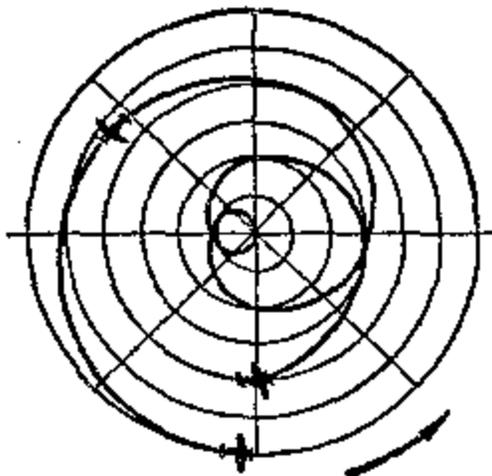


Figura 136. Una línea más curva saliendo en resultado al sumar dos movidas.



*Figura 137. El camino Moscú – San Jacinto como iba a presentarse para observador, sin Participando en vuelo, ni tampoco en giro de Tierra.*

Tercer caso (figura 136) El disco como de antes cumple el giro completo durante 24 horas, pero la carreta viaja sobre el diámetro desde el fin hasta el fin durante 48 horas.

En este caso  $1/8$  de diámetro la carreta recorre durante  $48 : 8 = 6$  horas.

Durante aquellas seis horas el disco dará la cuarta de su vuelta completa, de  $90^\circ$ . Por eso después de seis horas desde el principio de movimiento la carreta se trasladará sobre el diámetro (figura 136) en el punto b, pero el giro del disco trasladare ese punto en el punto b'. Después de otras seis horas la carreta pasara en el punto g y etc. Durante 48 horas la carreta recorrerá todo el diámetro, y el disco hace dos vueltas completas. En vez de sumar estos dos movimientos para un observador inmóvil el camino le aparece como una curva recreativa, reflejada en el figura 136 por la línea continua.

Viendo este caso nosotros estamos acercándose a los verdaderos condiciones del vuelo a través del Polo. El vuelo duró desde Moscú hasta el Polo, aproximadamente, 24 horas; por ese observador, estando en el centro de la Tierra, se vería esta parte del camino como una línea, casi parecida a la primera mitad de la línea curva (figura 136). Que depende de otra parte del vuelo de M. M. Gromov, pues, ella duraba un y medio veces mas, además, el trayecto desde el Polo hasta San Jacinto también es una y media veces mas larga, que la distancia desde Moscú hasta el Polo Norte. Por eso el camino se representará por la misma línea curva, únicamente en un y medio veces mas larga.

La mayoría de Uds., posiblemente, le confunda el obstáculo, donde el punto principal y final figura se refleja como los vecinos cercanos.

Pero no tenemos que perder de vista, que la figura le indica posición no simultáneamente de Moscú y San Jacinto, sino separado por el lapso de  $2 \frac{1}{2}$  del periodo de veinte cuatro horas.

Pues así ha tenido la forma un camino por el Polo Norte, si podemos observar el vuelo, por ejemplo, desde el centro de la Tierra. ¿Pero si tenemos derecho de llamar este bucle difícil como un camino verdadero a través del Polo en diferencia de relativo, reflejado en las cartas? No, ese movimiento también es relativo: El movimiento esta relacionando con un tal cuerpo, el que no participa en el giro de la Tierra alrededor de su eje, lo mismo que el figura del camino relativo a la superficie de la Tierra giratoria.

Si nosotros podemos observar el mismo vuelo desde la Luna o del Sol, el camino del vuelo tendría otro aspecto.

La Luna no comparte el giro terrestre de veinte cuatro horas, pero ella da la vuelta alrededor de nuestro planeta durante un mes. Durante 62 horas del vuelo desde Moscú a San Jacinto, la Luna ha podido inscribir alrededor de Tierra un arco de  $30^\circ$ , y esto no podría no depender del trayecto del vuelo para un observador de la Luna. En el camino de avión, observado con respecto del Sol, aparecía el tercer movimiento, el giro de Tierra alrededor del Sol.

"El movimiento del cuerpo aislado no existe, únicamente existe movimiento relativo", - dijo F. Engels en la "Dialéctica de la naturaleza".

La tarea examinada ahora asegúranos en esto.

[Volver](#)

### 13. Longitud de la correa de transmisión

Cuando los alumnos de escuela profesional terminaron su trabajo, el maestro al despedirse propuso solucionar un

#### Problema

"Para una de las nuevas instalaciones de nuestro taller, dijo el maestro, se necesita ensamblar la correa de transmisión, pero no sobre dos poleas, como era normalmente, sino sobre las tres, y el maestro les enseñó el esquema de la transmisión (figura 138).

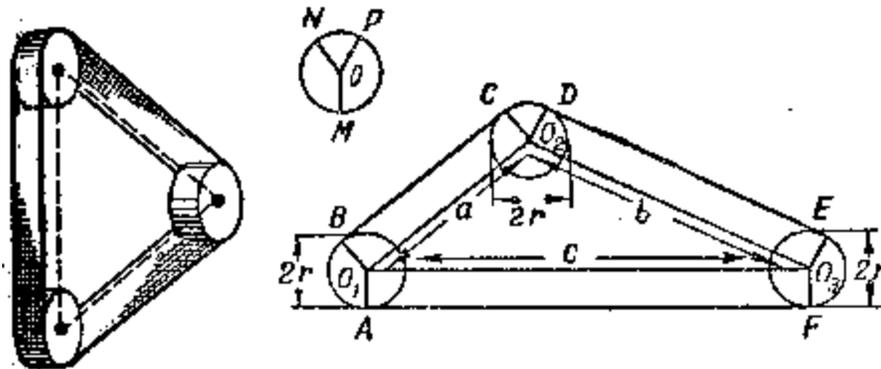


Figura 138. El esquema de transmisión. ¿Cómo encontrar la longitud de la correa de transmisión, utilizando solamente las medidas dadas?

Las tres poleas, continuaba él, tienen las mismas medidas. Sus diámetros y las distancias entre sus ejes son indicadas en el esquema.

¿Cómo, sabiendo estas medidas y sin hacer mediciones suplementarias, encontrar rápido la longitud de la correa de transmisión?"

Los alumnos empezaron a pensar. De pronto alguno de ellos dijo:

"Penso, que toda dificultad es, que no están indicadas las medidas de los arcos AB, CD, EF, sobre cual la correa enarca cada uno de rodillos. Para encontrar la longitud de cada arco necesitamos saber el valor de ángulo central y, a mí me parece, sin transportador no se arreglará."

"Los ángulos, de los que estas hablando, contestaba el maestro, podemos calcular sobre las medidas indicadas en el figura con ayuda de las fórmulas y tablas trigonométricas, pero este camino es muy largo y difícil. También no necesitaremos aquí el transportador, por que no hace falta saber longitud de cada uno arco, es suficiente saber..."

"Su suma, dijeron los chicos, dando cuenta de qué se trata".

"Bueno, pero ahora os vais a casa y mañana traerais vuestras soluciones."

No tengáis la prisa de conocer la solución, la cual trajeron los chicos.

Después de todo, con lo que ha dicho el maestro no es difícil solucionar por si mismo.

#### Solución.

En realidad, la longitud de la correa se encuentra muy fácil: A la suma de la distancia entre ejes de rodillos hay que añadir la longitud de la circunferencia de una polea. Si la longitud de la correa es  $l$ , entonces

$$l = a + b + c + 2\pi r$$

Sobre aquello, que la suma de las longitudes de arcos, con los cuales esta en contacto la correa, forma la longitud total de una polea, encontraron la clave todos los alumnos, pero demostrar una solución ha sido difícil para algunos.

De las todas soluciones el maestro ha preferido la mas corta el siguiente.

Sea BC, DE, FA, son tangentes a las circunferencias (figura 138). Pasaremos los radios en los puntos del contacto. Como las circunferencias de las poleas tienen mismos radios, entonces las figuras  $O_1BCO_2$ ,  $O_2DEO_3$  y  $O_1O_3FA$ , son rectángulos, por lo tanto,

$$BC + DE + FA = a + b + c.$$

Deja enseñar, que la suma de las longitudes de arcos  $AB + CD + EF$  se forman la longitud completa de circunferencia.

Para esto construiremos la circunferencia O con el radio r (figura 138 arriba). Pasamos  $OM \parallel O_1A$ ,  $ON \parallel O_1B$  y  $OP \parallel O_2D$ , luego  $\angle MON = \angle AO_1N$ ,  $\angle NOP = \angle CO_2D$ ,  $\angle POM = \angle EO_2F$ , como los ángulos con lados paralelos.

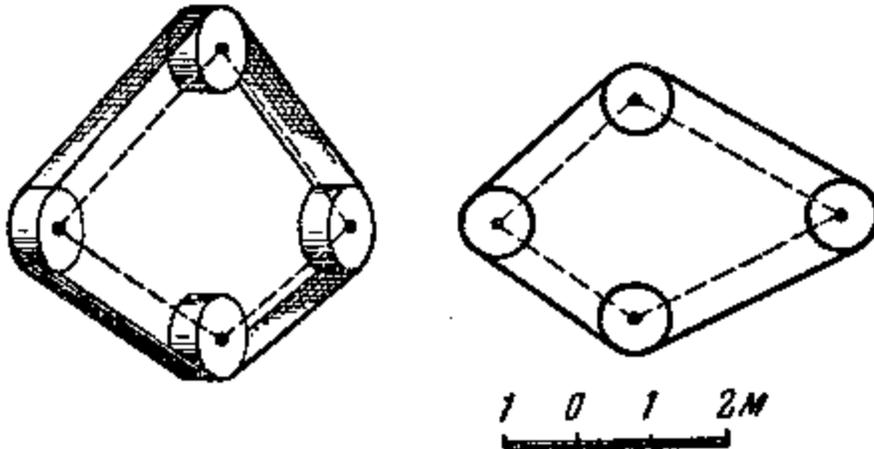


Figura 139. Necesito traducir del figura a las medidas necesarias y calcular la longitud de la cinta de transmisión.

De aquí se deduce, que

$$AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r.$$

Entonces la longitud de la correa es  $l = a + b + c + 2\pi r$ .

Con el mismo modo podemos enseñar, que no solamente para tres, sino para cualquier cantidad de las poleas iguales, la longitud de la correa de transmisión será equivalente a la suma de los intervalos entre sus ejes mas la longitud de la circunferencia de una polea.

### Problema.

En el figura 139 hay un esquema de la transmisión a cuatro ruedas (también hay ruedas intermedias, pero el esquema no incluye, como no tiene gran influencia para solución). Utilizando la escala, indicada en el figura, introduzcan las medidas necesarias y calculen la longitud de la cinta.

[Volver](#)

## 14. Una tarea sobre la corneja prudente

Nuestros manuales escolares tienen una historia de "una corneja muy prudente". Esta historia antigua cuenta de una corneja, muerta de sed ha encontrado un jarro con agua.

Había muy poca agua en el jarro, y con el pico no ha sido posible conseguirla, pero la corneja cayó en la cuenta como ayudarse a sí misma. Comenzó a tirar los pedruscos en el jarro. En resultado de esta argucia hizo subir el nivel de agua hasta los bordes, y la corneja ha podido tomar el agua.

No vamos a entrar en este asunto, si puede haber una corneja tan inteligente. El caso nos interesa de parte geométrica. Deja motivo para examinar la siguiente

**Problema.**

*¿Si pudiera la corneja tomar, si el agua estaba en la mitad del jarro?*

**Solución.**

Examinando esta tarea nos asegurará, que el modo de corneja, se acerca a la respuesta, pero no sobre cualquier nivel principal de agua en el jarro.

Para facilitar, admitiremos, que el jarro tiene la forma de una prisma rectangular, y pedruscos son unas pelotillas del mismo tamaño. Es fácil de comprender, que el agua se sube sobre nivel de los pedruscos en aquel caso, cuando el ahorro del agua ocupa el mayor volumen, que espacio entre pedruscos: Luego el agua llenará los espacios y saldrá por encima de pedruscos. Vamos a calcular cuál volumen ocupan estos espacios. Más fácil hacer el calculo sobre aquella disposición de los pedruscos, cuando el centro de cada uno esta situado sobre una línea recta vertical con los centros de pelotillas de arriba y de abajo. Sea  $d$  – diámetro de la pelotilla y por lo tanto, su volumen es  $1/6 \times \pi d^3$ , el volumen del inscrito a su rededor cubico  $d^3$ . La diferencia de sus volúmenes  $d^3 - 1/6 \pi d^3$  es el volumen de la parte vacía del cubo, y la proporción es

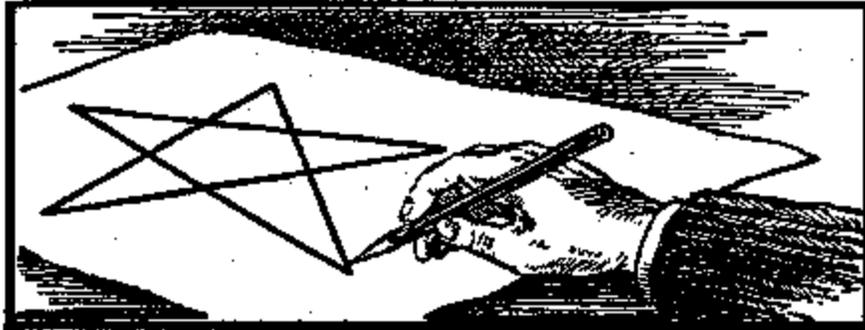
$$\frac{d^3 - \frac{1}{6} \pi d^3}{d^3} = 0,48$$

significa, que la parte vacía de cada cubo forma 0,48 de su volumen. La misma parte, es decir un poco menos de la mitad, forma la suma de los volúmenes de todas vacuidades sobre el volumen del jarro. La cosa no se cambiara, si el jarro no tiene la forma prismática, y los pedruscos no tienen la forma esférica. En cualquier caso podemos afirmar, si principalmente el jarro lleno de agua al menos de la mitad, la corneja no podrá subir el nivel hasta los bordes, tirándole pedruscos.

Será la corneja mas fuerte, tanto, que era capaz de reducir al menor volumen y conseguir un estado compacto de los pedruscos, ella pudiera subir en dos veces mas, del nivel principal. Pero ella no es capaz de hacer esto, y permitiendo la colocación friable de los pedruscos, nosotros estamos de acuerdo de acuerdo con las condiciones reales. Además los jarros, habitualmente, en la parte del centro son más anchos; Esto también tiene que disminuir la subida de agua y se apoya nuestra conclusión correcta: Si el agua estaba mas bajo de la mitad, la corneja no ha podido tomar agua.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
SEGUNDA PARTE  
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA**



**CAPITULO DÉCIMO  
GEOMETRÍA SIN MEDICIONES Y SIN CÁLCULOS**

**Contenido:**

1. [Construcción sin compás](#)
2. [El centro de gravedad de una placa](#)
3. [Una tarea de Napoleón](#)
4. [Un simple trisector \(trisección\)](#)
5. [El reloj – trisector](#)
6. [La división de una circunferencia](#)
7. [La dirección del golpe](#)
8. [La bola "inteligente"](#)
9. [Con un solo plumazo](#)
10. [Siete puentes del Kaliningrado](#)
11. [Una broma geométrica](#)
12. [Comprobación de una forma](#)
13. [Un juego](#)

**1. Construcción sin compás**

Cuando necesitamos solucionar las tareas geométricas de construcción habitualmente aprovechan la regla y compás. Sin embargo, ahora vamos a ver que algunos casos se solucionan sin instrumentos suplementarios.

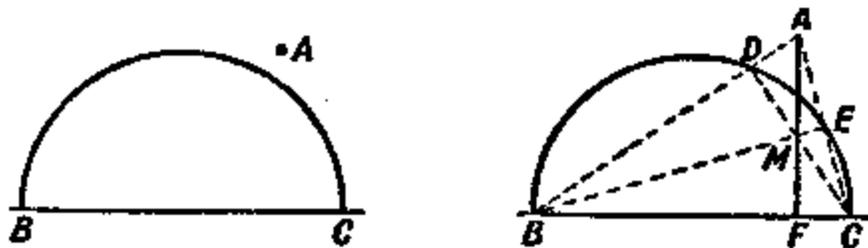


Figura 140. El primer caso. La tarea de construcción y su solución

**Problema:**

Desde el punto  $A$  (figura 140, a la izquierda), estando fuera de la semicircunferencia dada, bajar la perpendicular sobre su diámetro sin utilizar el compás. La ubicación del centro de semicircunferencia no está indicada.

**Solución:**

Para nosotros va bien aquella característica del triángulo que todas sus alturas se cruzan en un punto. Uniendo  $A$  con  $B$  y  $C$ : obtendremos los puntos  $D$  y  $E$  (figura 140, a la derecha). Las rectas  $BE$  y  $CD$ , evidentemente, las alturas del triángulo  $ABC$ . La tercera altura es la perpendicular de  $BC$  buscada, tendrá que pasar a través del punto de intersección de las otras dos, es decir a través del punto  $M$ . Pasando con la regla a través de los puntos  $A$  y  $M$  una recta, nosotros respondemos a las exigencias de la tarea, sin utilizar el compás.

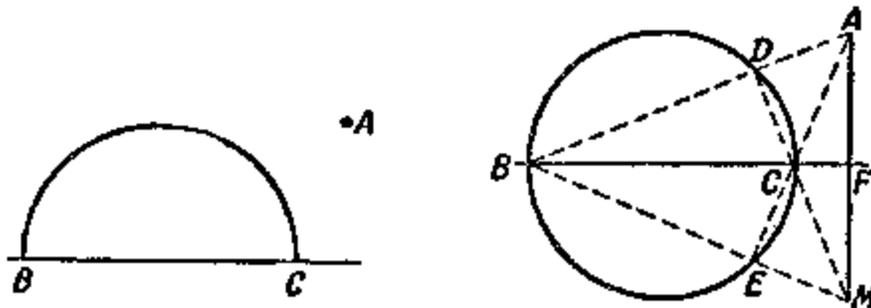


Figura 141. La misma tarea. El caso siguiente

Si el punto está situado de modo que la perpendicular buscada baja a la continuación del diámetro (figura 141), entonces la tarea podrá ser solucionada con una condición, que tengamos no una semicircunferencia, sino la circunferencia completa. La figura 141 indica, que la solución no es distinta de aquella, la cual ya conocemos; solamente las alturas del triángulo  $ABC$  se cruzan no dentro, sino fuera de él.

[Volver](#)

## 2. El centro de gravedad de una placa

**Problema:**

Quizás, Uds. saben, que el centro de gravedad de una placa fina, teniendo la forma rectangular o la forma del rombo, está en el punto de intersección de sus diagonales, y si la placa es triangular, entonces esta en el punto de intersección de sus medianas, si es un círculo, en el centro de este círculo.

Prueben ahora adivinar, cómo encontrar el centro de gravedad por el camino de la construcción de una placa, formada por dos rectángulos cualquiera, unidos en una figura, presentada en el figura 142.

Las condiciones son usar únicamente la regla, nada más, sin cálculos ni mediciones.

**Solución:**

Continuaremos lado  $DE$  hasta intersección con  $AB$  en el punto  $N$  y el lado  $FE$  hasta intersección con  $BC$  en el punto  $M$  (figura 143). Desde el principio la figura actual vamos a examinar como construida por dos rectángulos  $ANEF$  y  $NBCD$ . El centro de gravedad de cada uno está en los puntos de intersección de sus diagonales –  $O_1$  y  $O_2$ .

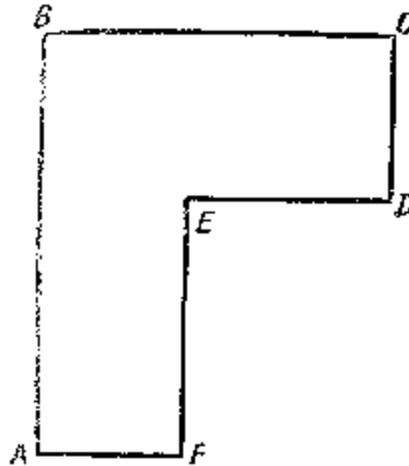


Figura 142. Aprovechando la regla, encuentren el centro de gravedad de la placa.

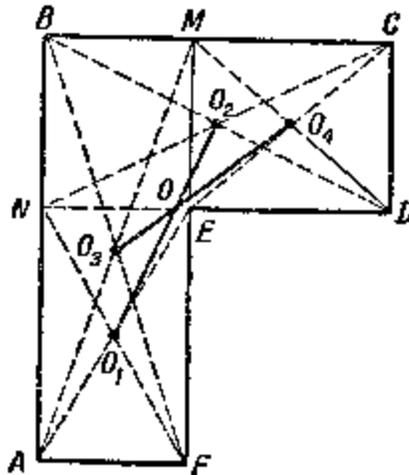


Figura 143. El centro de gravedad de la placa está encontrada

Por lo tanto, el centro de gravedad de figura completa esta sobre la recta  $O_1O_2$ . Ahora la misma figura vamos a ver como esta constituida por dos rectángulos  $ABMF$  y  $EMCD$ , donde los centros de gravedad están en los puntos de intersección de sus diagonales  $O_2$  y  $O_4$ . El centro de gravedad de toda la figura está sobre la recta  $O_3O_4$ . Entonces, él esta situado en el punto  $O$  de intersección de las rectas  $O_1O_2$  y  $O_3O_4$ . En realidad todas estas construcciones se hacen únicamente con ayuda de regla.

[Volver](#)

### 3. Una tarea de Napoleón

Nosotros dedicábamos el tiempo a las construcciones, hechas con la ayuda de una sola regla, sin compás (con una condición: la circunferencia está dada al principio). Ahora vamos a examinar un par de tareas, donde se introduce un límite inverso: está prohibido utilizar la regla, y todas las construcciones las deberemos hacer con solo el compás. Por una de estas tareas estuvo interesado el Napoleón I (como sabemos, fue un admirador de la matemática). Recitando un libro sobre estas construcciones de un científico italiano Macceroni, él propone a los matemáticos franceses lo siguiente:

**Problema:**

La circunferencia dada hay que dividirla en cuatro partes equivalentes entre sí, sin usar la regla, La ubicación de su centro está dado.

**Solución:**

Es necesario dividir en cuatro partes la circunferencia  $O$  (figura 144). Desde un punto  $A$  arbitrario sobre la circunferencia tomamos tres veces el radio del círculo: obtenemos los puntos  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Es fácil de ver, que la distancia  $AC$  es la cuerda del arco, formada por  $\frac{1}{2}$  de circunferencia, es el lado del triángulo equilátero inscrito y, por lo tanto, es equivalente al  $r\sqrt{3}$  donde  $r$  es el radio de circunferencia.  $AD$ , evidentemente, es el diámetro de la circunferencia. Desde los puntos  $A$  y  $D$  con un radio equivalente a  $AC$ , localizaremos los arcos, cruzados en el punto  $M$ . Enseñaremos, que la distancia  $MO$  es equivalente a un lado del cuadrado, inscrito en nuestra circunferencia. En el triángulo  $AMO$  el cateto

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

es decir al lado del cuadrado inscrito. Nos queda ahora con una sola abertura de compás, equivalente a  $MO$ , reservar en la circunferencia sucesivamente a los siguientes cuatro puntos, para tener las alturas del cuadrado inscrito, las que, evidente, dividen la circunferencia en cuatro partes iguales.

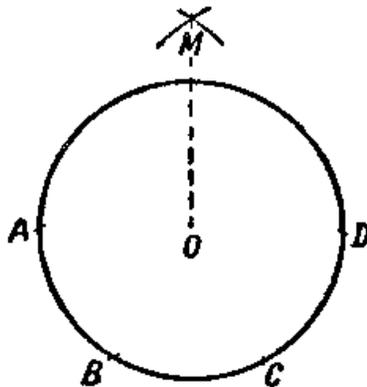


Figura 144. Dividir la circunferencia sobre cuatro Partes iguales, usando el compás.

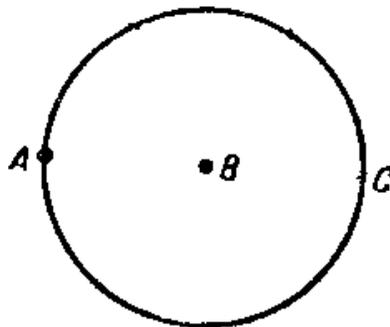


Figura 145. ¿Cómo aplicar la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$  en  $n$  veces ( $n$  es el numero entero), usando el compás?

**Problema:**

El siguiente es más fácil y en el mismo sentido. Sin regla, ampliar el triángulo entre los puntos dados  $A$  y  $B$  (figura 145) en cinco veces la cantidad actual.

**Solución:**

Desde el punto  $B$  con el radio  $AB$  circunscribimos la circunferencia (figura 145). Sobre esta circunferencia medimos desde el punto  $A$  la distancia  $AB$  tres veces: Obtendremos el punto  $C$ , evidentemente, diametralmente opuesto a  $A$ . La distancia  $AC$  representa por si mismo el doble de la distancia  $AB$ . Pasando la circunferencia desde el punto  $C$  con el radio  $BC$ , podemos de esta manera encontrar el punto, diametralmente opuesto al  $B$  y, por lo tanto, alejado de  $A$  sobre el triple trayecto  $AB$  y etc.

[Volver](#)

**4. Un simple trisector (trisección)**

Aplicando solo el compás y una regla sin ningún tipo de divisiones y marcas, es posible dividir un ángulo dado en tres partes iguales. Por el contrario, la matemática no niega la posibilidad de cumplir la división con ayuda de otros tal instrumentos.

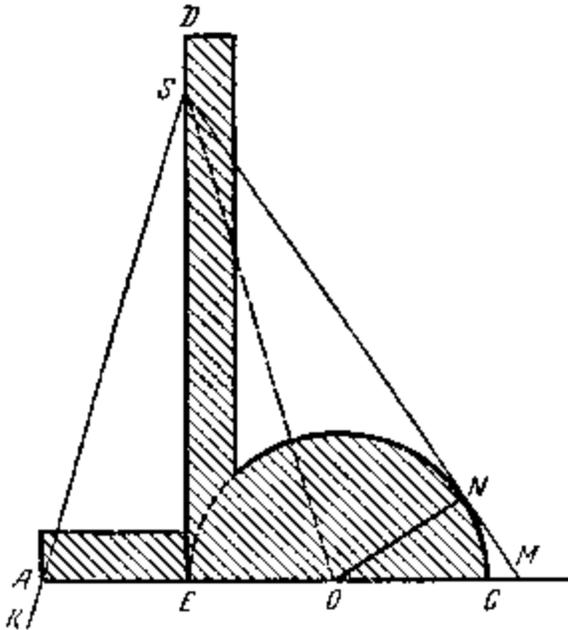


Figura 146. El trisector y el esquema de su uso

Se han inventado muchos aparatos mecánicos para lograr este asunto. Estos aparatos se llaman trisectores (trisecciones). Un simple trisector Uds. podrán preparar de un papel denso, de cartón o de una lata fina. Él va a servir como un aparato lineal y auxiliar. En el figura 146 un trisector esta presentado en su tamaño natural (la figura sombreada). Rayada con semicírculo la cinta  $AB$  es equivalente a la longitud de su radio. El extremo  $BD$  de la cinta forma un ángulo recto con la línea recta  $AC$ ; La toca medio círculo en el punto  $B$ ; Longitud de esta cinta es arbitraria. En la misma figura estamos viendo el uso del trisector. Sea, por ejemplo que es necesario dividir  $\angle KSM$  sobre tres partes equivalentes (figura 146). El trisector se coloca de modo que la altura del ángulo  $S$  esta en la línea  $BD$ , uno de los lados del ángulo pasará a través del punto  $A$ , y el otro lado tocara el semicírculo<sup>1</sup>. Luego

<sup>1</sup> La posibilidad de esa colocación del nuestro trisector en ángulo dado es la consecuencia de una simple característica de los puntos de las rayas, divididas el ángulo sobre las tres partes equivalentes: Si desde cualquier punto  $O$  de la raya  $SO$  pasarlo segmentos  $ON \perp SN$  y  $OA \perp SB$  (figura 147), entonces vamos a tener:  $AB = OB = ON$ . El lector mismo podrá examinar.

pasaran las rectas  $SB$  y  $SO$ , y la división del ángulo sobre las tres partes iguales se ha terminado. Para asegurarnos uniremos con el segmento de la recta el centro del semicírculo  $O$  con el punto del toque  $N$ . Es fácil verlo, que el triángulo  $SBO$  es equivalente al  $OSN$ . La igualdad de estos triángulos se demuestra ya que los ángulos  $ASB$ ,  $BSO$  y  $OSN$  son equivalentes entre sí, que lo necesitaba demostrar.

[Volver](#)

## 5. El reloj – trisector

### Problema:

¿Es posible con ayuda del compás, la regla y el reloj, dividir un ángulo en tres partes iguales?

### Solución:

Es posible. Se traspasa el ángulo dado sobre un papel transparente y en el mismo momento, cuando ambas agujas del reloj se juntan, colocan el figura sobre la esfera de modo que el vértice del ángulo coincida con el centro del giro de las agujas y la otra parte del ángulo pase a lo largo de las agujas (figura 147).

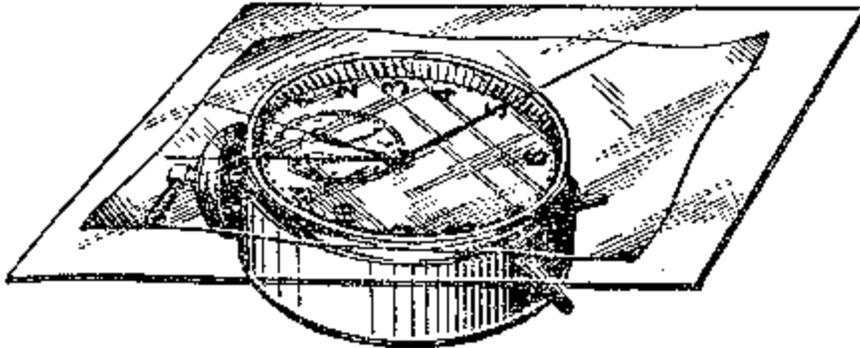


Figura 147. El reloj – trisector

Por el momento, cuando el minutero traspase hasta unión con el sentido de otra parte del ángulo dado, pasen desde la cima del ángulo una raya sobre el sentido del reloj. Se aparezca el ángulo, equivalente el ángulo del giro de las agujas. Ahora con ayuda del compás y la regla se duplican ese ángulo, y el ángulo duplicado otra vez duplicaran (el modo de duplicación se conoce de geometría).

Obtenido de esta manera el ángulo va a ser  $1/3$  del ángulo dado.

En realidad, tal vez, cuando la aguja de minutos circunscribe un tal ángulo  $\alpha$ , la aguja del reloj durante ese tiempo traspasare en el ángulo, en 12 veces menor:  $\alpha/12$ , después de ampliación de este ángulo  $4 \times \alpha / 12 = \alpha / 3$

[Volver](#)

## 6. La división de una circunferencia

Los radioaficionados, constructores, creadores de cualquier tipo de modelos y además aficionados de construir a mano a veces se quedaran pensativos sobre un

### Problema:

Cortar de una placa un polígono justo con una cantidad dada de los lados. La tarea tiene su expresión en la siguiente forma:

Dividir la circunferencia en  $n$  partes iguales, donde  $n$  es el numero entero.

\* \* \*

Dejaremos por un tiempo aparte la solución de esta tarea con ayuda del transportador, además es la solución "al ojo" y por lo tanto, pensaremos en la solución geométrica: con ayuda del compás y la regla.

Antes de todo aparece una pregunta: ¿En cuántas partes equivalentes es posible teóricamente dividir exactamente una circunferencia con ayuda del compás y la regla? Esta tarea había solucionada por matemáticos completamente, pero no sobre tal cantidad de partes.

Es posible en 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, ..., 257, ... partes.

No es posible en 7, 9, 11, 13, 14, ... partes.

Además, no existe un único modo de construcción; El modo de división en 15 partes no es lo mismo, como en 12 partes, y etc., todos modos no serán posibles de recordar.

Hay un modo geométrico práctico preciso, aunque aproximado, pero bastante fácil para la división de circunferencia en cualquier cantidad de arcos equivalentes.

Por desgracia los manuales de geometría no ponen a la atención este asunto, por eso hemos preparado un modo aproximado y curioso de la solución geométrica de esa tarea.

Sea, por ejemplo, se necesita dividir la circunferencia actual (figura 148) en nueve partes iguales.

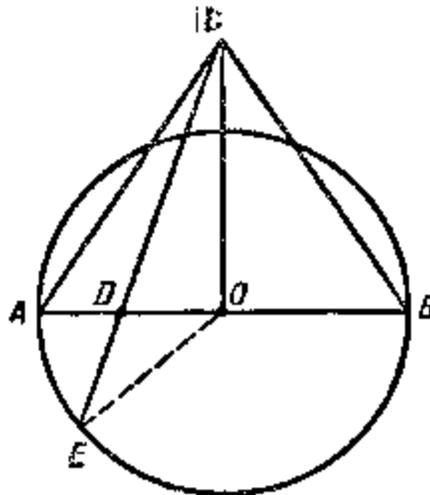


Figura 148. El modo aproximadamente geométrico de la división a la circunferencia sobre  $n$  partes equivalentes.

Construiremos sobre un diámetro  $AB$  de la circunferencia un triángulo equilátero  $ACB$  y dividiremos ese diámetro por el punto  $D$  de forma que  $AD : AB = 2 : 9$  (en el caso general  $AD : AB = 2 : n$ ).

Uniremos los puntos  $C$  y  $D$  por un segmento y continuaremos hasta intersección con la circunferencia en el punto  $E$ . Luego el arco  $AE$  formará aproximadamente  $1/9$  de la circunferencia ( en el caso general  $AE = 360^\circ/n$  o la cuerda  $AE$  será el lado del  $n$ -polígono inscrito ( $n$  – angular).

El error relativo es  $\approx 0,8\%$ .

\* \* \*

Si expresamos la dependencia entre cantidad del ángulo  $AOE$  central, formado por la construcción actual, y con la cantidad  $n$  de división, entonces obtendremos la fórmula siguiente:

$$\text{tg}(\angle \text{AOC}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4}$$

la cual para  $n$  grande, es posible sustituir con una fórmula aproximada

$$\text{tg}(\angle \text{AOE}) \cong 4\sqrt{3} \times (n^{-1} - 2n^{-2})$$

Por otra parte la división justa de la circunferencia en  $n$  partes iguales del ángulo central tiene que ser  $360^\circ/n$ . Comparando el ángulo  $360^\circ/n$  con el ángulo  $\text{AOE}$ , obtendremos la cantidad del error cometido, viendo el arco  $AE$  como parte de circunferencia.

Acá tenemos la tabla para algunos  $n$  significativos:

$n$	3	4	5	6	7	8	10	20	60
$360^\circ/n$	$120^\circ$	$90^\circ$	$72^\circ$	$60^\circ$	$51^\circ 26'$	$45^\circ$	$36^\circ$	$18^\circ$	$6^\circ$
$\angle \text{AOE}$	$120^\circ$	$90^\circ$	$71^\circ 57\epsilon$	$60^\circ$	$51^\circ 31\epsilon$	$45^\circ 11\epsilon$	$36^\circ 21\epsilon$	$18^\circ 38\epsilon$	$6^\circ 26\epsilon$
error (%)	0	0	0,07	0	0,17	0,41	0,97	3,5	7,2

Como vemos en la tabla, con el modo indicado es posible dividir la circunferencia en 5, 7, 8 o 10 partes con una equivocación no mayor de 0,07 hasta 1%; Esta equivocación es admisible para mayoría obras prácticas. Con el crecimiento de cantidad  $n$  de las divisiones la exactitud del método va bajando, es decir el error relativo crecerá, pero, como lo dice la investigación, con tal  $n$  el error no supera al 10%.

[Volver](#)

**7. La dirección del golpe (una tarea sobre la bola de billar)**

Mandar la bola de billar en la tronera no con el golpe directo, sino que a dos o tres bandas, esto significa, antes del todo, solucionar "mentalmente" una tarea geométrica " sobre la construcción".

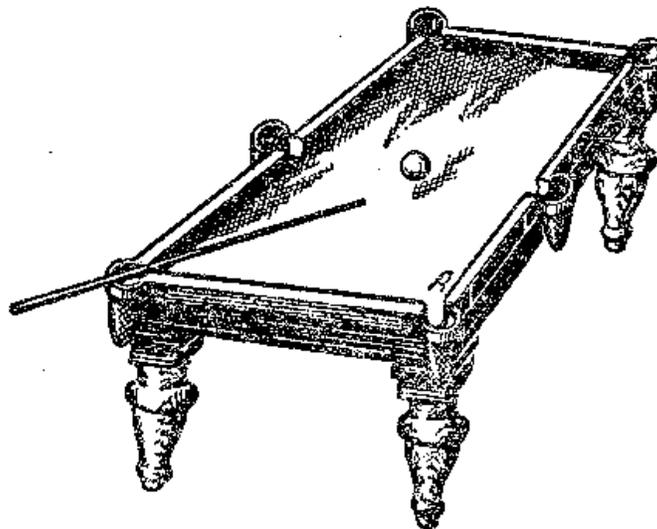


Figura 149. Una tarea geométrica encima de mesa de billar

Lo importante es "a ojo" encontrar el primer punto del golpe a la banda; de ahí en adelante el camino de la bola en la mesa está determinado por la ley de la reflexión ("el ángulo de incidencia es equivalente al ángulo reflexión")

**Problema.**

¿Qué construcciones geométricas podrán ayudarnos a encontrar la dirección del golpe, para que la bola, estado en el centro de la mesa, después de tres bandas entre en la tronera A? (figura 149)

**Solución:**

Imagínense, en el lado corto de la mesa se colocan junto tres mesas iguales de billar, y apuntaran al sentido de una tronera más lejana desde la tercera mesa imaginada. La figura 150 ayudará comprender esta aseveración. Sea  $OabcA$  el camino de la bola. Si damos vuelta a " la mesa"  $ABCD$  entorno al  $CD$  en  $180^\circ$ , su posición será I, luego dar vuelta también entorno al  $AD$  y otra vez en torno al  $BC$ , entonces ella tomara la posición III. En resultado la tronera A aparecerá en el punto, en el punto marcado por letra  $A_1$ .

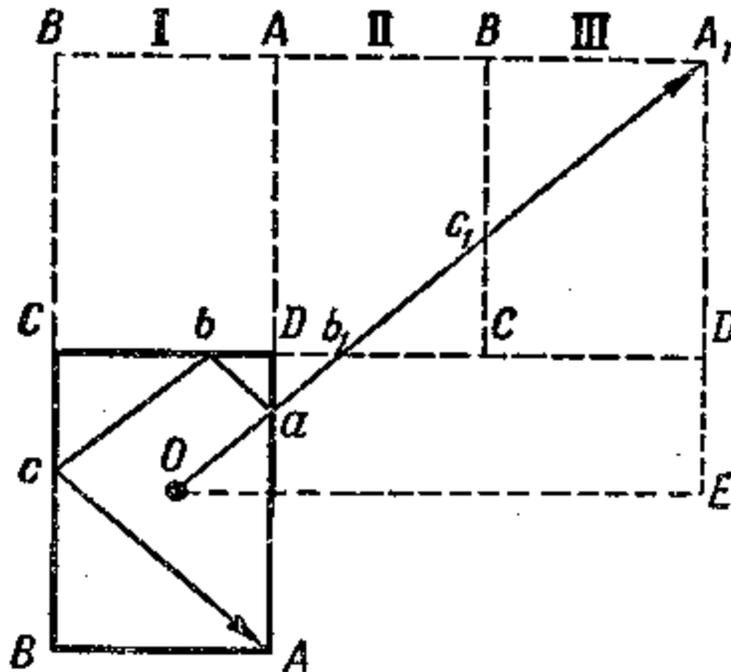


Figura 150. Imagínense, que junto a la mesa de billar están colocadas tres mas de estas mesas y apuntan en la dirección de la tronera más lejana.

Procediendo de la igualdad evidente de los triángulos, Uds. fácilmente podrán demostrarlo, que

$$ab_1 = ab, \quad b_1c_1 = bc \quad \text{y} \quad c_1A = cA,$$

es decir, que la longitud de la recta  $OA_1$  es equivalente a la longitud de la línea quebrada  $OabcA$ , y ella alcanzara la tronera A. Vamos a ver otra pregunta aun más: ¿Bajo cuál condición serán los lados  $OE$  y  $A_1E$  del triángulo rectángulo  $A_1EO$  equivalentes?

Es fácil de establecer, que  $OE = 5/2 \cdot AB$  y  $A_1E = 3/2 \cdot BC$ . Si  $OE = A_1E$ , entonces  $AB = 3/2 \cdot BC$  o  $AB = 3/5 \cdot BC$ .

Por lo tanto, si el lado más corto de la mesa de billar forma  $3/5$  del lado largo, entonces  $OE = EA_1$ , en este caso el golpe, estando de bola por el medio de la mesa, podrán apuntar sobre ángulo de  $45^\circ$  al borde.

[Volver](#)

### 8. La bola "inteligente"

No tan complicadas construcciones geométricas nos ayudaban a solucionar la tarea sobre la bola de billar, y ahora será mejor si la misma bola solucionara una tarea muy antigua y curiosa.

¿Esto es posible? – una bola no puede pensar. Es cierto, pero en aquellos casos, cuando es necesario hacer cálculos, además sabiendo, cuales son operaciones sobre cantidades y en que orden deberemos cumplir, este calculo puede hacer la maquina, la que cumpliera a todas las ordenes rápido y correctamente.

Por eso hay inventados muchos mecanismos, comenzando por un simple aritmómetro hasta una calculadora eléctrica.

Durante el tiempo de ocio a menudo se ocupen por una tarea: Como verter una parte de liquido, que contiene un recipiente de una capacidad dada con ayuda de otros dos vasos vacíos, también con una capacidad dada.

Aquí tienen una tarea del mismo sentido:

**Problema:**

¿Cómo verter la misma cantidad de un tonel con capacidad de 12 cántaros<sup>2</sup> con ayuda de dos cubos con capacidad de nueve cántaros y de cinco cántaros?

**Solución.**

Para solucionar esta tarea, por supuesto, no hace falta hacer experimentos con estos cubos. Todos lo "trasiegos" necesarios los podemos hacer en el papel, con la ayuda de este esquema.

9 Cántaros	9-ведерн.	0	7	7	2	2	0	9	6	6
5 Cántaros	5-ведер.	5	5	0	5	0	2	2	5	0
12 Cántaros	12-ведерн.	7	0	5	5	10	10	1	1	6

Cada columna esta marcada por un resultado de trasiego actual.

1. La primera: Llenaron el tonel de 5 cántaros, de 9 cántaros esta todavía vacía (0), de 12 cántaros le queda siete cántaros.
2. La segunda: Hay que verter siete cántaros del tonel de 12 cántaros al de 9 cántaros y etc.

El esquema tiene nueve columnas; Entonces se necesita de nueve trasiegos Uds. podrán probar encontrar su propia solución de este problema, teniendo su propio orden de los trasiegos.

Después que hagan Uds. sus pruebas, verificarán que el esquema propuesto no es único, sin embargo en otro orden, salen más de nueve trasiegos.

Además es curioso de establecer lo siguiente:

1. No es posible de establecer un tal orden fijo de trasiegos, el que podrá corresponder al cualquier caso, independientemente de capacidad de los cubos;
2. Es posible con ayuda de dos cubos vacíos verter desde un tercero una cantidad de liquido, es decir, por ejemplo, desde el tonel de 12 cántaros con ayuda de cubos de 9 y 5 cántaros trasiegan un cántaro o dos, o tres, cuatro y etc., hasta 11.

<sup>2</sup> Antigua medida rusa de capacidad, equivalente a unos 12 litros

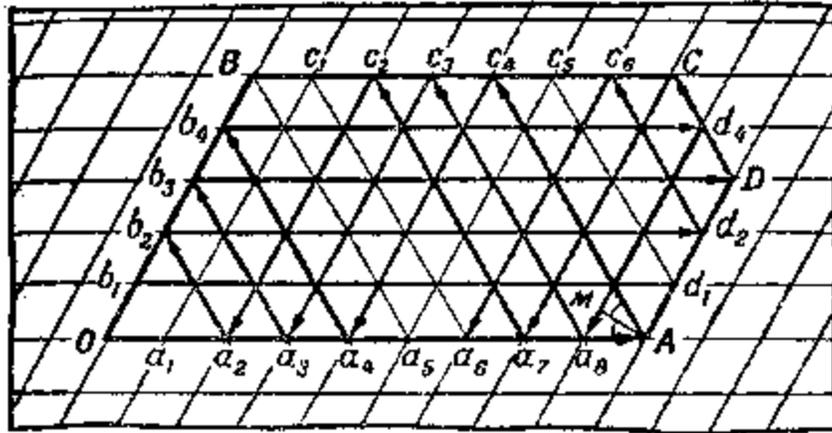


Figura 151. El "mecanismo" de la bola "inteligente".

A todas estas preguntas contestará la bola "inteligente", si nosotros ahora construimos para ella una "mesa de billar" muy especial.

Encima del papel dibujamos cuadros inclinados (rombos) iguales con ángulos agudos de  $60^\circ$ , y se construye una figura  $OABCD$ , como en el figura 151.

Esto sería "la mesa de billar". Si empujáramos la bola de billar a lo largo de  $OA$ , entonces, chocando al borde  $AD$  y de acuerdo a la ley "El ángulo de incidencia es equivalente al ángulo reflejado" ( $\angle OAM = \angle Mac_4$ ), correrá sobre la recta  $Ac_4$  uniendo los vértices de los rombos pequeños; se separa en el punto  $c_4$  del borde  $BC$  y correrá sobre la recta  $c_4 a_4$  luego sobre las rectas  $a_4 b_4$ ,  $b_4 d_4$ ,  $d_4 a_8$  y etc.

Por condiciones del problema tenemos tres cubos: de 9, 5, 12 cántaros. De acuerdo con esto construiremos la figura de modo que el lado  $OA$  mantenga los nueve cuadros,  $OB$ , cinco cuadros,  $AD$  tres cuadros ( $12 - 9 = 3$ ),  $BC$  son siete cántaros<sup>3</sup> ( $12 - 5 = 7$ ).

Tomaremos la nota, que cada un punto sobre los lados de la figura esta separado con una cantidad de cuadros dados desde los lados  $OB$  y  $OA$ . Por ejemplo, desde el punto  $c_4$ , hay cuatro cuadros hasta  $OB$  y cinco cuadros hasta  $OA$ ; Desde el punto  $a_4$  son cuatro cuadros hasta  $OB$  y 0 cuadros hasta  $OA$  (porque el mismo esta en la  $OA$ ), desde el punto  $d_4$  son ocho cuadros hasta  $OB$  y cuatro cuadros hasta  $OA$  y etc.

Por lo tanto, cada un punto sobre los lados de figura, al que se choca la bola, señala dos números.

El primero de ellos, es decir la cantidad de cuadros, separando el punto de  $OB$ , significa la cantidad de cántaros de un cubo de 9 cántaros, y el otro, es decir la cantidad de cuadros, separando el mismo punto de  $OA$ , significa la cantidad de cántaros con liquido dentro de cubo de 5 cántaros. Resto del liquido, evidentemente, será en el cubo de 12 cántaros.

Ahora tenemos todo listo para solución con ayuda de bola.

Dejamos pasar a lo largo de  $OA$  y traduciendo el cada un punto de su golpe al borde así, como esta indicando, observándola su camino hasta el punto  $a_6$  (figura 151).

El primer punto del choque:  $A(9; 0)$ ; Esto significa, primer trasiego tiene que dar esta distribución del liquido:

9 cántaros	9
5 cántaros	0
12 cántaros	3

<sup>3</sup> Un cubo lleno siempre es mayor de tres. La capacidad de los cubos vacíos  $a$  y  $b$ , del cubo lleno  $- c$ . Si  $c \approx a + b$ , entonces "la mesa de billar" la tenemos que construir como un paralelogramo con los lados  $a$  y  $b$  de cuadros.

Esto esta realizado.

El segundo punto del choque:  $c_4 (4; 5)$ ; Esto significa, la bola entrega el siguiente resultado de trasiego:

9 cántaros	9	4
5 cántaros	0	5
12 cántaros	3	3

Esto también es real.

El tercer punto del choque:  $a_4 (4; 0)$ ; con tercer trasiego la bola recomienda devolver cinco cántaros al cubo de 12 cántaros:

9 cántaros	9	4	4
5 cántaros	0	5	0
12 cántaros	3	3	8

El cuarto punto:  $b_4 (0; 4)$ ; es el resultado de cuarto trasiego:

9 cántaros	9	4	4	0
5 cántaros	0	5	0	4
12 cántaros	3	3	8	8

El quinto punto:  $d_4 (8; 4)$ , la bola recomienda llenar con ocho cántaros al cubo vacío de 9 cántaros.

9 cántaros	9	4	4	0	8
5 cántaros	0	5	0	4	4
12 cántaros	3	3	8	8	0

Siguen observando la bola, y recibiremos la tabla:

9 cántaros	9	4	4	0	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 cántaros	0	5	0	4	4	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
12 cántaros	3	3	8	8	0	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Entonces, después de la serie de trasiegos la tarea esta lograda: Dentro de dos cubos hay seis cántaros del liquido. ¡La bola ha solucionado el problema!

Pero la bola no parece muy inteligente.

Ella ha solucionado la tarea haciendo 18 pasos, y nosotros necesitábamos solamente 9 pasos (ver la primera tabla).

Sin embargo la bola también podrá abreviar la serie de trasiegos. Primero empujando sobre el  $OB$ , pararlo en el punto  $B$ , luego otra vez empujen sobre  $BC$ , y luego lo mejor que se mueva con acuerdo con la ley de "el ángulo de incidencia es equivalente al ángulo reflejado"; obtenemos la serie mas corta de trasiegos.

Permitiendo a la bola su movida después del punto  $a_6$ , entonces no es difícil de comprobar, que en el caso examinado ella repasará todos los puntos marcados de la figura (y en principio, todos los vértices del rombo) y solamente luego volverá al punto principal  $O$ . Esto significa, que desde el cubo de 12 cántaros pueden llenar al cubo de 9 cántaros cualquiera

cantidad entera de los cántaros desde el uno hasta nueve, y al de 5 cántaros, desde uno hasta cinco.

Pero la tarea del mismo sentido podrá sin tener la solución exigida.

¿Cómo se ve todo eso la bola?

Muy fácil: en este caso ella volverá en el punto principal *O*, sin chocar el punto fijo.

En el figura 152 se presenta el mecanismo de solución para los cubos de nueve, siete y doce cántaros.

9 cántaros	9	2	2	0	9	4	4	0	8	8	1	1	0	9	3	3	0	9	5	5	0	7	7	0
7 cántaros	0	7	0	2	2	7	0	4	4	0	7	0	1	1	7	0	3	3	7	0	5	5	0	7
12 cántaros	3	3	10	10	1	1	8	8	0	4	4	11	11	2	2	9	9	0	0	7	7	0	5	5

“El mecanismo” le indica, que desde un cubo lleno de 12 cántaros con ayuda de cubos vacíos de 9 cántaros y 7 cántaros es posible verter cualquier cantidad de los cántaros, menos la mitad de su contenido, es decir menos de seis cántaros.

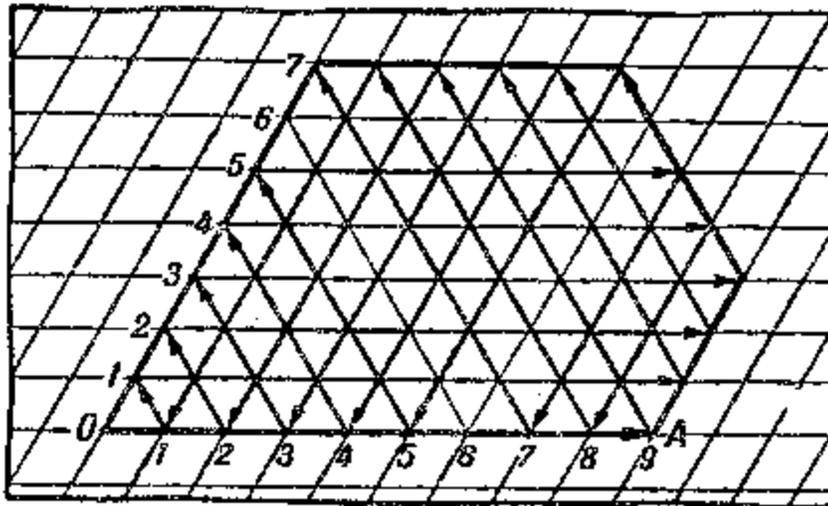


Figura 152. “El mecanismo” le indica, que el cubo lleno de 12 cántaros no son posibles de verter por la mitad con ayuda de dos cubos de 9 y 7 cántaros.

En el figura 153 se presenta el mecanismo de solución para cubos de tres, seis y ocho cántaros. Aquí la bola hace cuatro saltos y vuelve al punto principal *O*.

6 cántaros	6	3	3	0
3 cántaros	0	3	0	3
8 cántaros	2	2	5	5

La tabla le enseña que en este caso no es posible verter cuatro cántaros o un solo cántaro de un cubo de 8 cántaros.

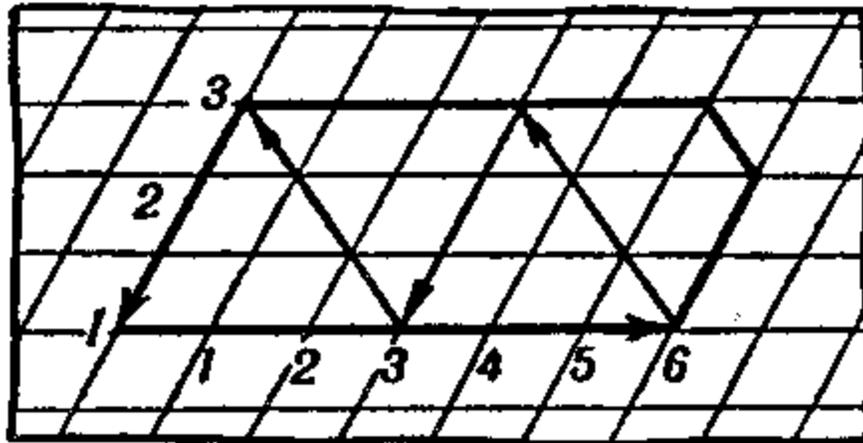


Figura 153. "El mecanismo" de solución de una tarea más.

De esta manera nuestro "billar con una bola inteligente" en realidad es una calculadora original, excelente para solucionar los problemas de trasiegos.

[Volver](#)

### 9. Con un solo plumazo

**Problema:**

Copien encima de un papel las cinco figuras presentadas en el figura 154, y prueben con un solo plumazo dibujar una de ellas, es decir sin levantar la pluma y sin pasar mas de una vez sobre la misma línea.

La mayoría de aquellos, a quienes les hemos propuesto la tarea, empiezan por la figura d, a primera vista más fácil, sin embargo, todas las pruebas de dibujar esta figura han fracasado. Disgustados y la menor certeza lo harían otras figuras y, por sorpresa, sin grandes dificultades lograron a las dos primeras figuras y también han podido con la tercera, presentada por la tachada palabra "Ä Î Ì". Pero la quinta figura e, como la cuarta d, nadie no había podido solucionarlo.

¿Por qué para algunas figuras resulta fácil encontrar la solución, para otros no? ¿Podría ser, solo porque en unos casos hace falta tener la ingeniosidad, o podría se, que la tarea por si misma es insoluble para algunas figuras? ¿No se puede en este caso dejar una señal, sobre cual podemos justificar: ¿Existe una probable solución de dibujar la figura con un solo plumazo o no existe?

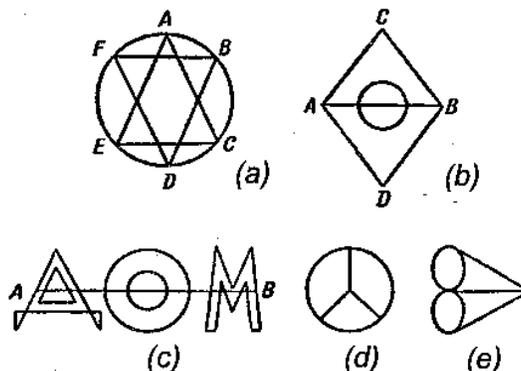


Figura 154. Prueban dibujar cada una de estas figuras con un solo plumazo, sin pasar mas de una vez sobre la misma línea.

**Solución:**

Cada una intersección, donde se unen las líneas de la figura, se van a llamar los nodos. Además llamaremos el nodo par, si en él se juntan un número par de las líneas, e impar, si la cantidad de las líneas unidas es impar. La figura *a* tiene todos los nodos pares, la figura *b*, dos nodos son impares (los puntos *A* y *B*); la figura *c*, los nodos impares son fines del segmento, tachados de la palabra; Las figuras *d* y *e* tienen cuatro nodos impares.

Vamos mirar atentamente la figura, donde todos nodos son pares, por ejemplo, la figura *a*. Empezaremos nuestro camino desde cualquier punto *S*. Pasando, por ejemplo, por el nodo *A*, nosotros dibujamos dos líneas: se acerca a *A* y se aleja de *A*. Como desde cada nodo par hay tantas salidas, cuantas entradas en él, entonces sobre movimiento de nodo al nodo cada vez menos dos líneas no dibujadas, por lo tanto, principalmente es posible, contornear (dejar atrás, dar una vuelta alrededor de todos), volver en el punto principal *S*.

Pero, supongamos, que habíamos vuelto en el punto principal, y no existe la salida de él, y sobre la figura falta una línea, saliendo de tal nodo *B*, donde nosotros ya estuvimos. Entonces, hay que corregir nuestro camino: Llegando hasta el nodo *B*, antes de dibujar las líneas dejadas, volviendo al punto *B*, caminar adelante por el camino remoto.

Supongamos que decidimos repasar la figura *a* así: Al principio a lo largo de los lados del triángulo *ACE*, luego volviendo al punto *A*, sobre la circunferencia *ABCDEF* (figura 154). Como nos queda dibujar el triángulo *BDF*, entonces, antes de dejar el nodo, por ejemplo *B* y siguiéremos sobre el arco *BC*, tenemos que pasar el triángulo *BDF*.

Pues, si todos los nodos de la figura dada son pares, entonces, saliendo del cualquier punto de figura, siempre es posible de dibujar la figura con un solo plumazo, además la vuelta por la figura tiene que terminar en el mismo punto, donde comenzábamos.

Ahora vamos a ver la figura donde hay dos nodos impares.

La figura *b*, por ejemplo, tiene dos nodos impares *A* y *B*. Entonces también es posible de dibujar con un solo plumazo. En realidad es mejor empezar la vuelta desde el nodo impar  $N_1$  y pasando sobre una tal línea hasta el nodo impar  $N_2$ , por ejemplo, desde *A* hasta el *D* sobre *ACB* (figura 154).

Dibujando esta línea, por aquello mismo excluirémos cada una línea de los nodos impares, como si no existiera esa línea. Ambos nodos impares luego se convierten en pares. Como otros nodos impares no existen en la figura, entonces, ahora tenemos una figura solamente con nodos pares; En la figura *b*, por ejemplo, después de pasando la línea *ACB* le queda el triángulo con circunferencia.

A esta figura, como ha sido enseñado, podemos dibujar con un solo plumazo, por lo tanto, podemos dibujar la figura completa.

Una advertencia suplementaria: Comenzando la vuelta desde un nodo impar  $N_1$ , se necesita el camino, llevado al nodo impar  $N_2$ , tenemos que elegir así, que no aparezcan las figuras aisladas de figura dada<sup>4</sup>. Por ejemplo, dibujando la figura *b* (figura 154) ha sido sin éxito la prisa trasladarse desde un nodo impar *A* al nodo impar *B* sobre la recta *AB*, como sobre esto la circunferencia quedaba aislada de la figura completa y cerrada.

Entonces, si una figura tiene dos nodos impares, el plumazo acertado tiene que comenzar sobre uno de ellos y terminarse en otro.

Entonces, los fines del plumazo son separados. De aquí se deduce, si la figura tiene cuatro nodos impares, entonces es posible de dibujar con un solo plumazo, sino con dos, pero esto no corresponde a las condiciones de nuestra tarea. Así son figures *d* y *e* (figura 154).

Como ven, si comprendemos correctamente, entonces muchas cosas podemos prevenir y con esto librarnos de un trabajo innecesario, el que necesita fuerzas y tiempo; Pues, a motivarnos correctamente nos enseña también y la geometría.

Puede ser, que nuestras explicaciones son muy pesadas para Uds., pero todas las fuerzas podrán ser cubiertas por ventaja, la de conocimiento sobre la ignorancia.

<sup>4</sup> Los detalles sobre este asunto, los lectores podrán encontrar en los manuales de topología.

Uds. siempre podrán con antelación resolver, si el problema se soluciona o no sobre las figuras dadas, y Uds. saben también, desde cuál nodo hay que empezar su vuelta. Además Uds. ahora pueden inventar mismos a las figuras complejas para sus compañeros. Finalmente, doy dos figuras más para entretención (figura 155).

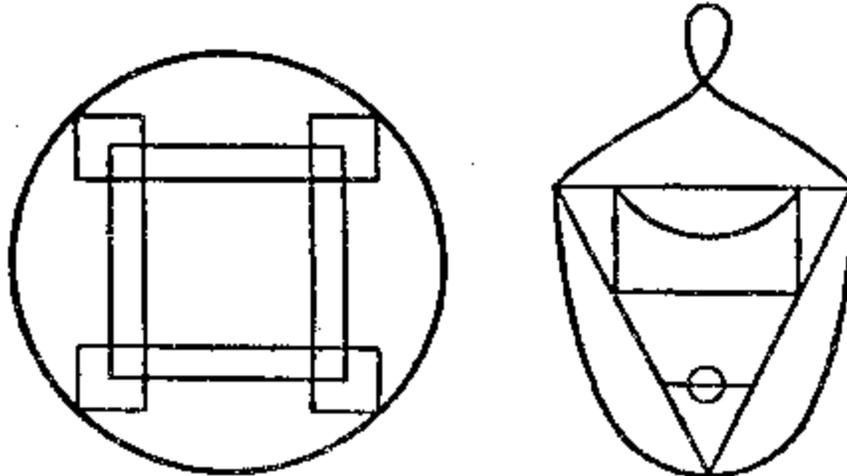


Figura 155. Dibuja cada figura con un solo plumazo.

[Volver](#)

### 10. Siete puentes del Kaliningrado

Hace doscientos años el ciudad Kaliningrado (antes se llamaba Quenigsberg) había siete puentes, los que unieron las orillas del río Pregel (figura 156).

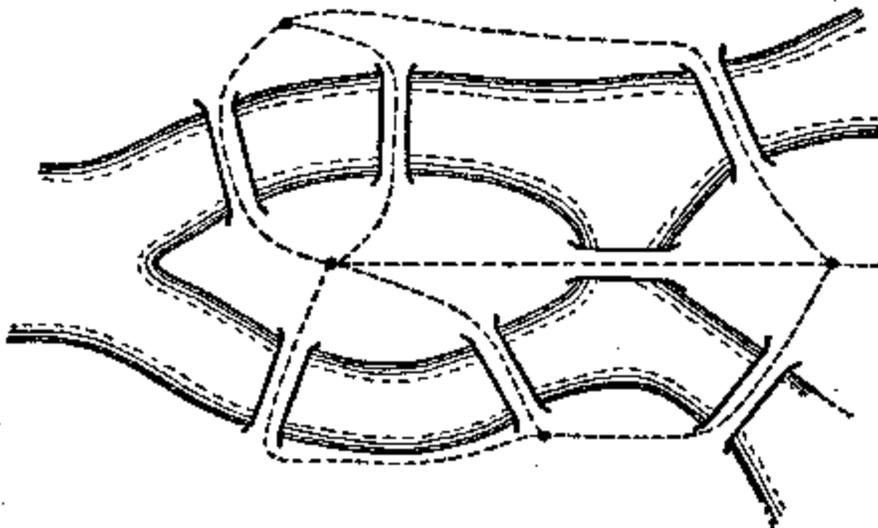


Figura 156. No era posible dar la vuelta por todos puentes, estando en cada uno de ellos por una sola vez.

En año 1736 un matemático famoso de aquel tiempo o L. P. Eyller (teniendo 30 años de edad) estuvo interesado por una tarea: ¿Era posible pasear por la ciudad, pasando por todos los puentes, pero cada uno por una sola vez?

Es fácil de comprender, que esta tarea es parecida a la anterior, sobre figuras dibujadas.

Vamos a presentar el esquema de los caminos posibles (figura 156, la línea puntual). Obtendremos una de las figuras con cuatro nodos impares (figura 154, figura e). Con un solo plumazo, como Uds. saben, es imposible de dibujarlo y, por lo tanto, es imposible dar vuelta por todos los siete puentes, pasando por cada uno de una sola vez. Eýler en aquel tiempo le demostró.

[Volver](#)

### 11. Una broma geométrica

Después de que Uds. ya saben el secreto de la figura dibujada con éxito con un solo plumazo, díganse a sus amigos, que sabe cómo dibujar la figura con cuatro nodos impares, por ejemplo, la circunferencia con dos diámetros (figura 157), sin separar el lápiz del papel y sin pasarla una línea dos veces.

Uds. perfectamente saben, que es imposible, pero pueden hacer un anuncio sensacional. Ahora os enseño un pequeño truco.



Figura 157. Una broma geométrica.

Empezamos a dibujar la circunferencia desde el punto  $A$  (figura 157). Cuando acercándose a un cuarto de circunferencia, el arco  $AB$ , colocaran un papel por encima, en el punto  $B$  (o doblando parte de abajo, donde se hace la construcción) y siguen con lápiz pasando la parte de debajo de la media circunferencia hasta el punto  $D$ , inverso al punto  $B$ .

Ahora quiten el papel colocado. En la parte facial del papel aparece solamente el arco  $AB$ , pero el lápiz está en el punto  $D$  (¡además Uds. no separaron el lápiz del papel!).

Terminar la figura no es difícil: Al principio pasen el arco  $DA$ , luego el diámetro  $AC$ , al arco  $CD$ , al diámetro  $DB$  y por fin, el arco  $BC$ . Podemos elegir otro camino desde el punto  $D$ ; Prueben encontrarlo.

[Volver](#)

### 12. Comprobación de una forma

**Problema:**

*Deseando comprobar, si tiene el trozo de la tela cortada la forma del cuadrado, la costurera nos asegura, que doblando sobre diagonales, los bordes del trozo se unen. ¿Es suficiente esta comprobación?*

**Solución:**

De esta manera la costurera se asegura solamente en que todas las partes de tela cuadrada son equivalentes entre sí. De los cuadrados convexos esta propiedad la tiene no solo el cuadrado, sino cualquier rombo, y el rombo se presenta como cuadrado únicamente en el caso, cuando sus ángulos son rectos. Por lo tanto, la comprobación, utilizada por costurera, es insuficiente. Tenemos que, aunque "a ojo" asegurarse en aquello, que los ángulos sobre los vértices del trozo son rectos. Con esta razón podemos, por ejemplo, otra vez, si se juntan los ángulos, estado junto a un lado.

[Volver](#)

**13. Un juego**

Para ese juego necesitamos el papel rectangular y algunas figuras de la misma forma simétrica, por ejemplo, las placas de dominó, monedas, etc. La cantidad de figuras debe ser suficiente para cubrir todo el papel. Juegan los dos. Los jugadores por turnos colocan las figuras en cualquier posición, en cualquier sitio libre del papel hasta aquel punto, cuando no se queda el sitio.

No es admisible mover las figuras, ya colocadas, encima de papel. Gana el partido aquel, quien ponga el ultimo objeto.

**Problema:**

*Encontrar el modo de dirigir el juego, donde el jugador que empieza el juego gane.*

**Solución:**

El jugador que empieza el juego, debe como primer paso, ocupar el centro de plazoleta, colocando la figura de modo que su centro de simetría, si es posible, uniera con el centro del papel y los próximos veces colocar las figuras en la postura simétrica a la figura del enemigo (figura 158).

Siguiendo esa regla, el jugador que empieza el juego siempre encontrará en el papel un sitio para su figura y sin dudada ganara.

El fondo geométrico del modo indicado de llevar el juego es lo siguiente: Un rectángulo tiene el centro de simetría, es decir, un punto, donde todos segmentos pasados a través del, se divide por la mitad, y dividen la figura sobre los partes iguales.

Por eso al cada punto o sitio del rectángulo corresponde el punto simétrico o el sitio simétrico, perteneciendo a la misma figura, y solamente el centro no tiene el punto simétrico a sí mismo.



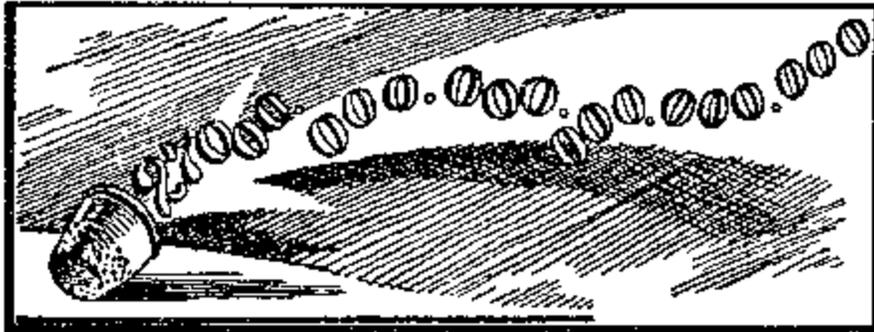
*Figura 158. Un juego geométrico. Le gana aquella persona, quien ponga el ultimo objeto.*

De aquí se deduce que si el primer jugador invade el sitio central, entonces, cualquier sitio del papel rectangular elegido por el enemigo no faltara una plazoleta libre y simétrica para otro jugador.

Como elegir el sitio debe siempre el jugador segundo, entonces, al final no quedara el sitio para sus figuras, y el juego gana el primero.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
SEGUNDA PARTE  
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA**



**CAPÍTULO UNDÉCIMO  
GRANDE Y PEQUEÑO EN GEOMETRÍA**

**Contenido:**

1. [27 000 000 000 000 000 000 dentro de un dedal](#)
2. [Volumen y presión](#)
3. [Más fina, que una tela araña, pero más fuerte, que el acero](#)
4. [Dos botes](#)
5. [Un cigarro gigantesco](#)
6. [Huevo de avestruz](#)
7. [Huevo de epiornis](#)
8. [Los huevos de las aves rusas](#)
9. [Encontrar el peso de cáscara sin romper el huevo](#)
10. [Los tamaños de nuestras monedas](#)
11. [Una moneda de mil rublos](#)
12. [Las imágenes didácticas](#)
13. [Nuestro peso normal](#)
14. [Los gigantes y enanos](#)
15. [Geometría de Gulliver](#)
16. [¿Porque el polvo y las nubes flotan en el aire?](#)

**1. 27 000 000 000 000 000 000 dentro de un dedal**

El número veintisiete con dieciocho ceros, escrito en el título, lo podemos leer de varias maneras. Unos dicen: *27 mil veces mil millones*; otros, por ejemplo, funcionarios de hacienda leen como *27 quintilliones*, terceros anotan todavía más corto:  $27 \cdot 10^{18}$  y se leen como 27 multiplicado por diez a la decimoctava potencia.

¿Qué podrá caber con tanta cantidad increíble dentro de un dedal?

Se trata de partículas de aire ambiental, como todas las sustancias del mundo, el aire se forma por moléculas. Los físicos establecieron, que cada centímetro cúbico (quiere decir dentro de un dedal) de aire con temperatura de  $0^\circ\text{C}$  contiene *27 mil veces mil millones* de moléculas. Es un gigante numérico. Imaginar ese número en concreto es superior a las fuerzas de cualquier ser humano. ¿En realidad con qué podemos comparar esta multitud? ¿Con la población en el mundo? Pero en todo el mundo solamente dos mil millones de habitantes ( $2 \cdot 10^9$ ), es decir, en trece millones de veces menos, que a las moléculas dentro de un dedal. ¡Si todas las estrellas del universo estuvieran rodeadas por planetas, como nuestro Sol, y si cada planeta estuviera poblado como el nuestro, entonces no habría

posibilidad de tener la cantidad de habitantes, equivalente a la población molecular de un dedal! Si Uds. alguna vez probaron calcular esa población invisible, entonces, calculando continuamente, por ejemplo cien moléculas por un minuto, pues Uds. deberían calcular no menos que 500 mil millones de años.

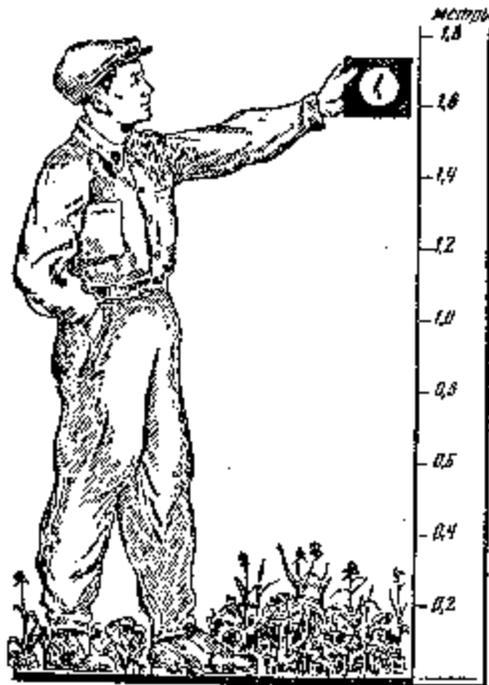


Figura 159. Un joven está mirando atentamente una bacteria de tifus, ampliada en 1000 veces.

No necesariamente de manera precisa, imaginen además cantidades simples. ¿Qué imaginan Uds. cuando hablan, por ejemplo, de un microscopio, ampliando en 1000 veces? No era tan grande la cantidad, un mil, sobre toda la ampliación en un sinfín de veces interpretamos no como debemos. A menudo no sabemos valorar poca cosa verdadera de aquellos objetos, los que vemos en el microscopio con ampliación semejante. Una bacteria de tifus, ampliada en 1000 veces, tiene el tamaño de una mosca (dibujo 159), viéndola desde la distancia clara visual, es decir, 25 cm. ¿Pero, en realidad, cuán pequeña es esa bacteria? Imagínense, que junto con la ampliación de la bacteria Uds. se están ampliándose también en 1000 veces.

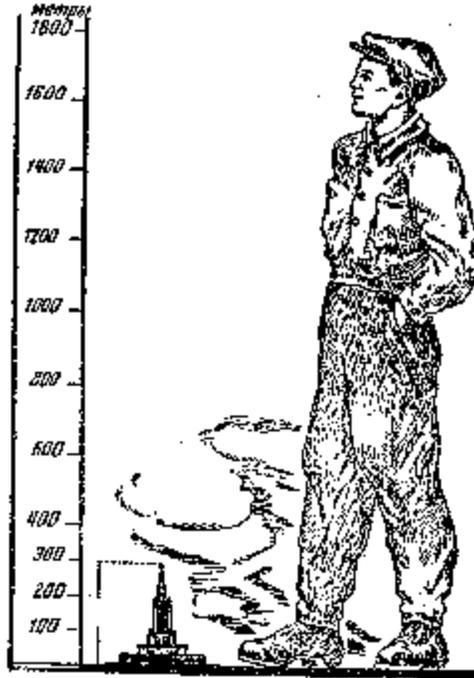


Figura 160. El joven, ampliado en 1000 veces.

¡Esto significa, que la estatura alcanzará 1.700 m! La cabeza estará mas alta que las nubes, cualquier edificio de Moscú esta mas bajo de la rodilla (dibujo 160). En cuantas veces nosotros somos menores que ese gigante imaginario, en tantas veces el bacilo es menor que una mosca.

[Volver](#)

## 2. Volumen y presión

Podemos pensar, cómo están, no muy apretadas, 27 mil veces mil millones de moléculas dentro de un dedal. ¡En absoluto! Una molécula de oxígeno o nitrógeno tiene diámetro de  $3/10.000.000$  mm (ó  $3 \cdot 10^{-7}$  mm). Suponiendo que el volumen de la molécula equivale al cubo de su diámetro, entonces obtenemos:

$$\left(\frac{3}{10^7} \text{ mm}\right)^3 = \frac{27}{10^{21}} \text{ mm}^3$$

Dentro de un dedal hay  $27 \cdot 10^{18}$  moléculas. Entonces el volumen ocupado por todos habitantes del dedal, aproximadamente

$$\frac{27}{10^{21}} \times 27 \times 10^{18} = \frac{729}{10^3} \text{ mm}^3$$

es decir, mas o menos  $1 \text{ mm}^3$ , que forma únicamente la milésima parte del centímetro cúbico. Los espacios entre las moléculas son mucho mayores que sus diámetros, tienen sitio donde jugar. En realidad, como Uds. saben, las partículas del aire no son inmóviles, sino continua y caóticamente se mueven de un sitio a otro, corren dentro de su espacio ocupado. Oxígeno, gas carbónico, hidrógeno, nitrógeno y otros gases tienen gran importancia industrial, pero para conservación de grandes cantidades necesitamos unos depósitos enormes. Por ejemplo, una tonelada (1 000 kg) del nitrógeno sobre presión regular ocupa el

volumen de  $800 \text{ m}^3$ , es decir, para conservación de una sola tonelada del nitrógeno precisa una cisterna con capacidad de  $10\,000 \text{ m}^3$ .

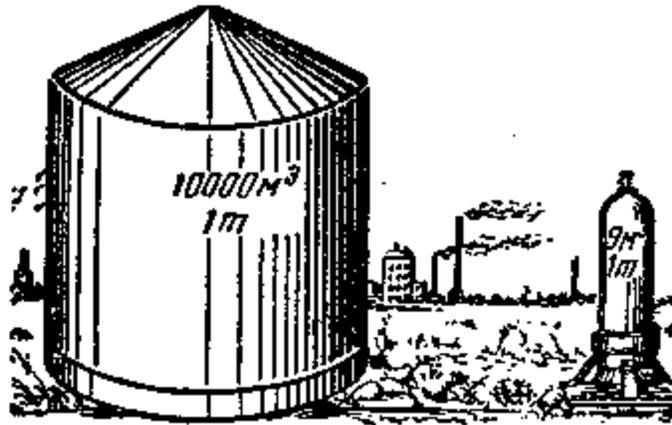


Figura 161. Una tonelada de nitrógeno a presión atmosférica (a la izquierda) y con la presión de 5 atm. (a la derecha). (El dibujo convencional; sin respeto a las proporciones).

¿No podemos obligar a las moléculas del gas apretarse un poco? Los ingenieros hacen lo mismo con ayuda de una prensa, las obligan a acercarse un poco. Pero eso no es tan fácil. No olviden, que con la fuerza que aprietan el gas, con la misma fuerza el gas prensa sobre paredes del cubo. Se necesitan paredes muy sólidas, donde el gas no reacciona químicamente.

Sólo la más moderna instalación química, fabricada por la industria nacional del acero, es capaz de alcanzar muy altas presiones, altas temperaturas e impedir la reacción química de los gases.

Ahora nuestros ingenieros aprietan el hidrógeno en 1163 veces, por lo tanto una tonelada del hidrógeno, ocupando el volumen de  $10\,000 \text{ m}^3$  a la presión atmosférica, cabe en una bombona con capacidad de  $9 \text{ m}^3$  (dibujo 161).

¿Qué piensan Uds., qué presión habrá que exponer al hidrógeno, para disminuir su volumen en 1163 veces? Acordándonos de la física, que el volumen del gas se *disminuye* en tantas veces, en cuantas veces se aumenta la presión, supongamos la respuesta: La presión sobre hidrógeno aumenta también en 1163 veces. ¿En realidad es así? No. La verdad es, que al hidrógeno había que someterlo a la presión de 5000 atmósferas, es decir aumentar la presión en 5000 veces, y no en 1163 veces. Lo que pasa es que el volumen del gas se cambia inversamente proporcional a la presión para no muy altas presiones. A muy altas presiones esta regla no se observa. Así, por ejemplo, cuando en nuestras factorías químicas una tonelada del hidrógeno se somete a la presión de mil atmósferas, entonces una tonelada de ese gas se disminuye a  $1,7 \text{ m}^3$  del volumen, en vez de  $800 \text{ m}^3$ , ocupado por hidrógeno a la presión atmosférica normal, y a continuación de aumentar la presión hasta 5000 atmósferas o en cinco veces el volumen del hidrógeno se disminuye solamente al  $1,1 \text{ m}^3$ .

[Volver](#)

### 3. Más fina, que una tela araña, pero más fuerte, que el acero

Un corte transversal de un hilo, o de un cable, además de telaraña, aunque muy pequeño, tiene su forma geométrica, frecuentemente tiene la forma de circunferencia. Sobre eso el diámetro del corte transversal  $\sigma$ , vamos a decir, la anchura de una telaraña tiene mas o menos 5 micrones ( $5/1000 \text{ mm}$ ). ¿Hay algo mas fino que telaraña? ¿Quién es la "Maestra de hilado" más hábil, una araña o un quizás un gusano de seda?

No. El diámetro del hilo de la seda natural es 18 micrones, es decir el hilo en  $3 \frac{1}{2}$  más grueso que una tela araña.

Desde la antigüedad la gente soñaba superar la maestría de una araña y del gusano de seda. Todos nosotros conocemos una leyenda vieja de una tejedora generosa, la griega Ariadna. Ella era una dueña de oficio de tejidos en el extremo de la perfección, que sus telas eran tan finas, como las telas de una araña, transparentes, como el cristal y tan ligeras como el aire. Con ella pudo competir la misma Atenas, la Diosa de la prudencia y la protectora de oficios.

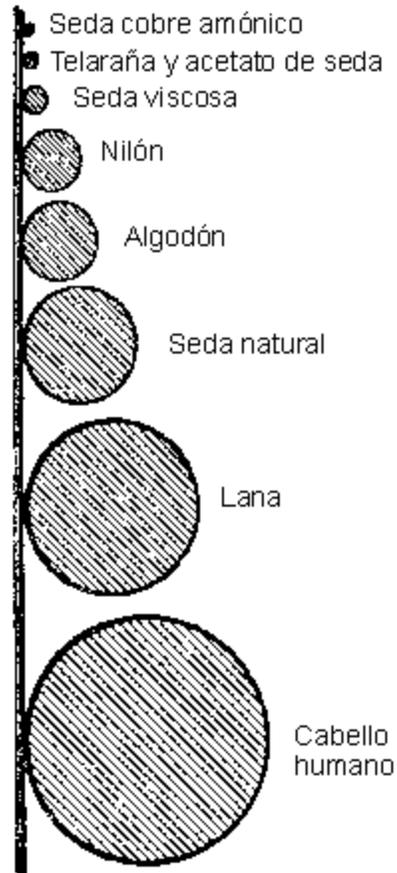


Figura 162. La anchura comparable de fibras

Esa leyenda, como muchas otras fantasías antiguas, en nuestro tiempo era narraciones de un hecho real. La Ariadna contemporánea, la más perfecta "maestra de hilado" son los ingenieros químicos, crearon de una simple madera la fibra artificial extraordinariamente fina y extremadamente sólida. Los hilos de seda, obtenidos son de  $2^{1/2}$  veces más finos que la telaraña, y su solidez no cede a los hilos de seda natural. La seda natural soporta la carga de  $30 \text{ kg/mm}^2$  de sección, y la seda cobre - amónico, hasta  $25 \text{ kg/mm}^2$ .

El modo de fabricación de la seda cobre - amónico es muy curioso. La madera se convierte en celulosa, la celulosa se disuelve en solución amónica de cobre. Los chorrillos de solución se vierten a través de aberturas finas al agua, el agua le quita el disolvente, después de todo los hilos aparecidos se enrollan sobre unos aparatos especiales.

Anchura de hilo de seda cobre - amónica es de  $2 \text{ micrones}$ . Un micrón más ancha la seda acetato, también es la seda artificial. ¡Es sorprendente, que unas clases de la seda acetato son más fuertes de un hilo de cobre! Si el hilo de cobre supera la carga de  $110 \text{ kg/mm}^2$  de sección, entonces el hilo de seda acetato superara  $126 \text{ kg/mm}^2$ .

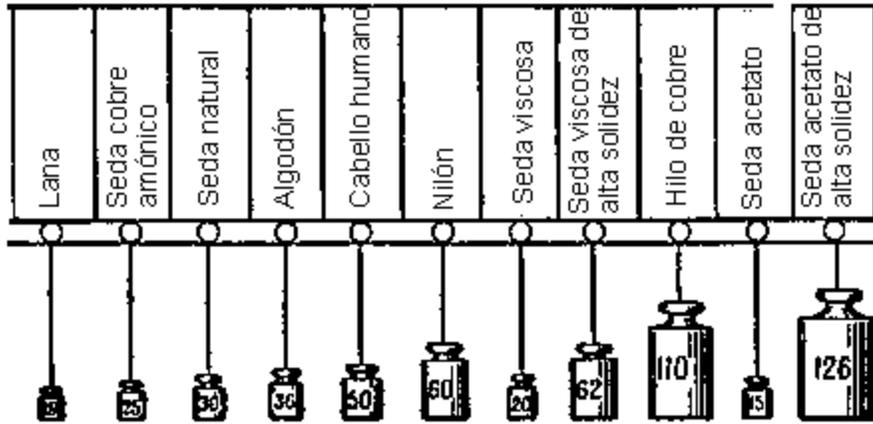


Figura 163. La solidez máxima de las fibras (en  $\text{kg}/\text{mm}^2$ )

Todos nosotros sabemos muy bien, que la seda viscosa tiene espesor del hilo sobre 4 *micrones*, y la solidez máxima de 20 hasta 62  $\text{kg}/\text{mm}^2$ . Veamos en el dibujo 162 la anchura comparativa de telaraña, pelo del hombre, otras fibras artificiales, también la fibra de lana y algodón; y en el dibujo 163, su solidez en  $\text{kg}/\text{mm}^2$ . La fibra artificial u otro nombre sintético, uno de los más grandes descubrimientos contemporáneos y que tiene un gran valor económico. Así cuéntanos el ingeniero Buyanov: " El algodón crece muy lento, y su cantidad depende del clima y la cosecha. Productos de seda natural, es el gusano de seda, limitado dentro de sus posibilidades. Durante toda su vida él hilará un capullo, donde hay solamente 0,5 gr del hilo seda...

La cantidad de seda artificial, obtenida por el camino de elaboración química de 1  $\text{m}^3$  de madera, substituye 320 000 capullos de seda o la cantidad de lana esquilada anual de 30 ovejas, o la cosecha media de algodón de 1/2 hectáreas.

Es la cantidad suficiente de la fibra para fabricar cuatro mil medias o 1 500 m de tejido de seda. "

[Volver](#)

#### 4. Dos botes

Lo peor que nosotros imaginamos, lo más grande y lo más pequeño de la geometría, donde tenemos que comparar no ya las cantidades, sino las superficies y volúmenes. Cada uno, sin pensar demasiado, contesta, que 5 kg de mermelada es mas que 3 kg de la misma, pero no siempre contestamos, cual de los dos botes encima de la mesa es más espacioso.

#### Problema:

¿Cuál de los dos botes (dibujo 164) es más espacioso, de la derecha o de la izquierda, mas alta pero doble estrecha?

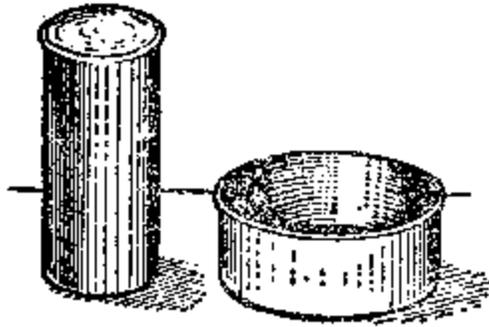


Figura 164. ¿Cuál bote es más espacioso?

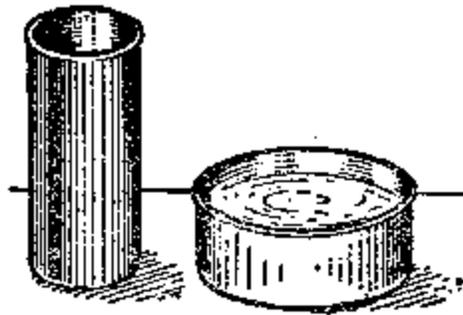


Figura 165. Resultado de trasiego del contenido del bote alto al bote ancho.

### Solución

Para la mayoría, posiblemente, era inesperado, que en nuestro caso el bote alto fuese menos espacioso, que el ancho. Sin embargo podemos asegurarnos con un cálculo. La superficie de la base del bote ancho es  $2^2$ , es decir, en cuantas veces mas, que el estrecho; Su altura al triple menor. Entonces, el volumen del bote ancho es  $\frac{4}{3}$  veces mayor, que el estrecho. Si el contenido del alto se vierte al estrecho, él llenará solamente su  $\frac{3}{4}$  (dibujo 165).

[Volver](#)

### 5. Un cigarro gigantesco.

#### Problema

En un escaparate de una tienda de tabaco hay un cigarro gigantesco, 15 veces mas largo y en 15 veces más ancho que uno normal. Si para rellenar un cigarro de un tamaño normal se precisa de medio de gramo del tabaco, entonces ¿cuánto tabaco se necesita para rellenar a este cigarro gigantesco?

#### Solución

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 15 = 1700 \text{ gr}$$

quiere decir mas de  $1 \frac{1}{2}$  Kg

[Volver](#)

### 6. Huevo de avestruz

#### Problema:

El dibujo 166 representa a la misma escala un huevo de gallina, a la derecha y un huevo de avestruz, a la izquierda. (Por el medio, un huevo del epiornis desaparecido, sobre el que hablaremos un poco más tarde.)

Fíjense bien y díganme, en cuantas veces el contenido del huevo de avestruz es más que del huevo de gallina. En primera vista parece, que la diferencia no es tan grande. Lo más sorprendente es el resultado del cálculo geométrico.

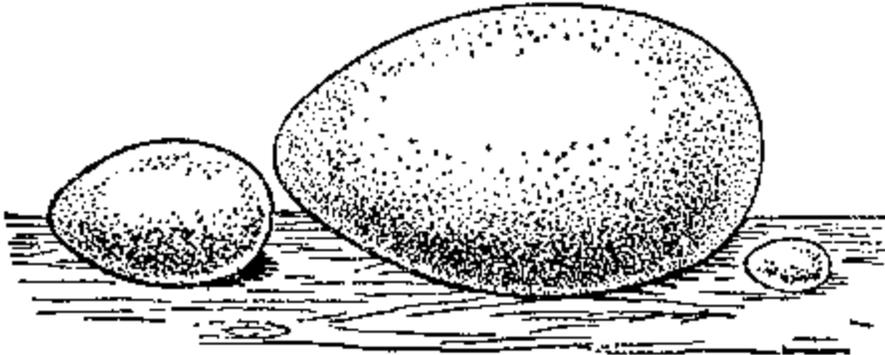


Figura 166. Los tamaños de los huevos de avestruz, del epiornis y de gallina.

Midiendo directamente sobre el dibujo comprobamos que el huevo de avestruz es más largo en  $2 \frac{1}{2}$  veces que el de gallina. Por lo tanto, el volumen del huevo de avestruz es mayor del volumen del de gallina en

$$2 \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{2} = \frac{125}{8}$$

quiere decir, más o menos en 15 veces.

Con un solo huevo de avestruz podría ser desayunado una familia entera de cinco personas, calculando, que cada uno quedará satisfecho con tres huevos.

[Volver](#)

## 7. Huevo de epiornis

### Problema:

Mucho tiempo antes vivieron unos avestruces gigantescos en la isla Madagascar, se llamaban epiornices, ponían huevos de 28 cm de longitud (la figura del medio en el dibujo 166). Sin embargo un huevo de gallina tiene longitud de 5 cm. ¿A los cuantos huevos de gallina corresponde un huevo de avestruz de Madagascar en volumen?

### Solución

Multiplicando  $\frac{25}{8} \times \frac{25}{8} \times \frac{25}{8}$  obtenemos más o menos 170. ¡Un huevo de epiornis equivalente

casi a los 200 huevos de gallina! Más de un centenar de personas podrían estar contentas con un solo huevo, el peso del que es 8 a 9 kg. (Recordaremos a los lectores, que existe una historia fantástica sobre el huevo de epiornis escrita por el Gerbert Hueles)

[Volver](#)

## 8. Los huevos de las aves rusas

### Problema:

El contraste más intenso de los tamaños lo obtenemos, sin embargo, cuando volveremos hacia nuestra propia naturaleza y comparemos los huevos del cisne con el huevo de regulo amarillo, él más pequeño de todas las aves rusas. Los contornos de estos huevos presentan el

dibujo 167 de un tamaño natural (no en este dibujo). ¿Cuál es la proporción de sus volúmenes?

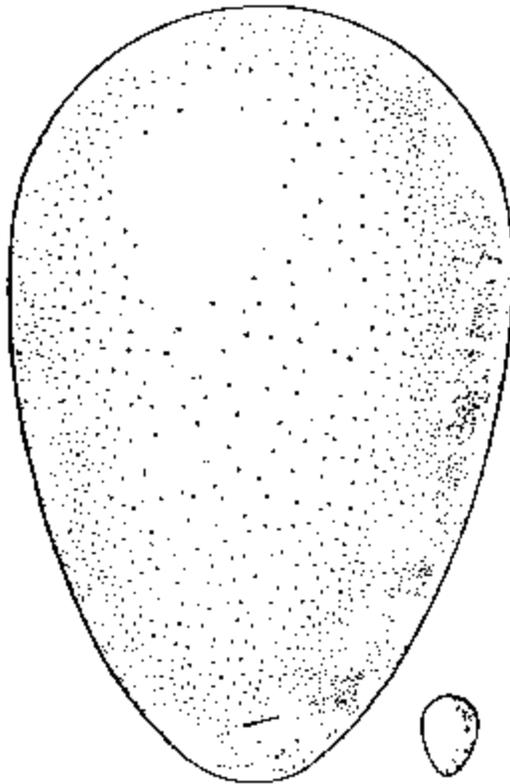


Figura 167. Un huevo de cisne y del regulo (no en su tamaño natural) ¿En cuantas veces es uno mas que el otro sobre sus volúmenes?

### Solución.

Midiendo la longitud de ambos huevos, obtenemos  $125\text{ mm}$  y  $13\text{ mm}$ . Midiendo también sus anchuras obtenemos  $80\text{ mm}$  y  $9\text{ mm}$ . Es fácil de ver, que estas cantidades casi son proporcionales; Verificando la proporción

$$\frac{125}{80} \approx \frac{13}{9}$$

comparando los productos de sus miembros extremos y medios, tenemos  $1125$  y  $1040$ , los números con muy poca diferencia. De aquí se deduce que tomando esos huevos por cuerpos geométricos semejantes, no cometeremos un gran error. Por esto la proporción de sus volúmenes aproximadamente es

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{512000}{729} \approx 700$$

¡Entonces, el huevo de cisne es  $700$  veces más volumétrico, que el huevo de regulo!

[Volver](#)

### 9. Encontrar el peso de cáscara sin romper el huevo.

**Problema:**

Tenemos dos huevos de la misma forma, pero de tamaños distintos. Se necesita, sin romper los huevos, encontrar el peso de la cáscara. ¿Cuáles son las mediciones, peso y cálculos que se necesita hacer para resolver la tarea?

**Solución.**

Medimos la longitud del eje más grande del cada un huevo, tenemos  $D$  y  $d$ . El peso de la cáscara del primer huevo le llamaremos  $x$ , del segundo,  $y$ . El peso de la cáscara es proporcional a su superficie, quiere decir la cuadratura de sus medidas lineales. Por eso, tomando la anchura de cáscara de ambos huevos igual, construimos la proporción

$$x : y = D^2 : d^2$$

Pesaremos los huevos: obtenemos  $P$  y  $p$ . El peso del contenido del huevo podemos tomar como proporcional a su volumen, quiere decir, al cubo de sus medidas lineales:

$$(P - x) : (p - y) = D^3 : d^3$$

Tenemos un sistema de las dos ecuaciones con dos incógnitas; Solucionando, encontramos:

$$x = \frac{pD^3 - Pd^3}{d^2(D - d)}$$

$$y = \frac{pD^3 - Pd^3}{D^2(d - D)}$$

[Volver](#)

**10. Los tamaños de nuestras monedas**

El peso de nuestras monedas es proporcional a su valor, esto quiere decir, una moneda de dos copecs pesa el doble mas que la de un copec, de tres copecs, el triple mas y etc. Lo mismo es justo y para la plata de cambio; Una pieza de 20 copecs (moneda), por ejemplo, pesa el doble de 10 copecs. Y como las monedas similares habitualmente tienen la forma geométrica semejante, entonces, sabiendo el diámetro de una moneda, podemos calcular los diámetros de otras similares con ella. Vamos a dar un ejemplo de estos cálculos.

**Problema:**

El diámetro de cinco copecs es 25 mm. ¿Cuál es el diámetro de una moneda de tres copecs?

**Solución**

El peso y por lo tanto el volumen de una moneda de tres copecs, forma  $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ , quiere decir  $0,6$  del volumen de cinco copecs. Entonces, sus medidas lineales tienen que ser menos de  $\sqrt[3]{0,6}$  veces, es decir forma  $0,84$  del tamaño de una moneda de cinco copecs.

[Volver](#)

**11. Una moneda de mil rublos**

**Problema:**

Imaginen una moneda fantástica de plata de un mil rublos, la que tiene la misma forma, que de 20 copecs, pero conforme a peso mayor. ¿Cuál sería su diámetro? ¿si colocamos a ella al lado de un coche, entonces en cuantas veces ella será mas alta, que el coche?

**Solución.**

Los tamaños de moneda no son tan grandes, como podemos imaginar. Su diámetro era solamente mas o menos  $3,8$  m, un poco mas alto que el primer piso. En realidad, si su

volumen es de 5.000.000 veces mayor del volumen de 20 copecs, entonces el diámetro (y también la anchura) es mayor en  $\sqrt[3]{5.000.000}$ , quiere decir en 172 veces. Multiplicando 22 mm por 172, obtenemos mas o menos 3,8 m, tamaño bastante moderado para una moneda con este valor.

**Problema:**

Se necesita calcular, a qué moneda del mismo valor corresponde una moneda de 20 copecs, ampliada al tamaño de un edificio a 4 pisos de altura (dibujo 168).



Figura 168. ¿A qué moneda corresponda esta gigantesca moneda de 20 copecs?

[Volver](#)

## 12. Las imágenes didácticas

A un lector, teniendo la experiencia de ejemplos anteriores de comparación a los volúmenes de los geoméricamente semejantes sobre sus tamaños lineales, ya no puedes sorprender con preguntas del mismo sentido. Fácilmente puede evitar el error de algunas imágenes didácticas, que a veces aparecen en las revistas ilustrativas.

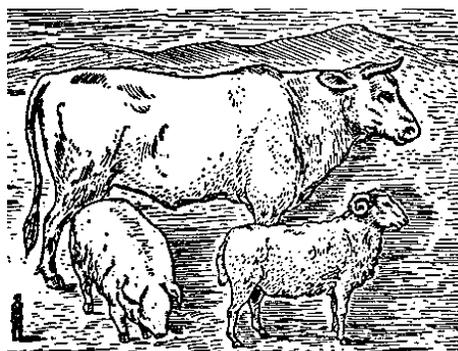


Figura 169. ¿Cuánta carne se comerá una persona durante la vida? (Encuentra el error de la imagen)

**Problema**

Aquí tenemos un ejemplo con imagen. Si una persona come al día, sobre un calculo redondo y mediano, 400 gr de carne, entonces durante 60 años de vida se calcula, aproximadamente, 9 toneladas. Como el peso de un toro @<sup>1</sup>/<sub>2</sub> tonelada, entonces el hombre podrá decir, que hasta el final de su vida, ha comido 18 toros.

El dibujo 169 reproducido de una revista inglesa, representa ese toro gigantesco al lado de un hombre. ¿El dibujo es correcto? ¿Cuál escala seria la mas justa?

**Solución**

El dibujo no es cierto. El toro, presentado aquí, es mas alto de lo normal en 18 veces y, evidentemente, en tantas veces es más grande y más largo. Por lo tanto, sobre el volumen él es más grande del mismo en  $18 \cdot 18 \cdot 18 = 5\,832$  veces. Así de grande un toro podría comer una persona durante dos mil años.

El toro tiene que ser presentado mas alto, más largo y más ancho de un toro normal solamente de  $\sqrt[3]{18}$ , es decir en 2,6 veces; no es tan dramático como lo muestra el dibujo

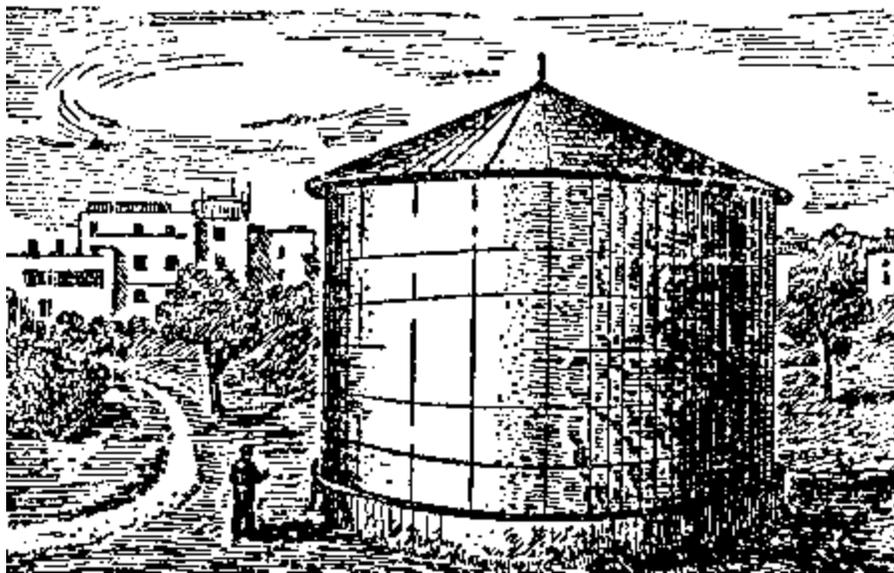


Figura 170. ¿Cuánta agua tomará una persona durante la vida? (¿Dónde está el error del pintor?)

**Problema:**

El dibujo 170 representa la siguiente imagen en el mismo sentido. Una persona toma durante el día 11/2 litros de líquidos (7 - 8 vasos). Durante 70 años de vida importa como 40 000 litros. Como un cántaro mantiene 12 litros, entonces el pintor tendría que dibujar un cubo, que es mayor de un cántaro en 3 300 veces. Él suponía, que lo hizo lo mismo en el dibujo 170. ¿Tiene razón?

**Solución**

Los tamaños del dibujo están muy exagerados. El cubo tiene que ser más ancho y más alto de un cántaro normal en  $\sqrt[3]{3300} = 14,9$ , con cálculo redondo en 15 veces. Si altura y la anchura de un cántaro es 30 cm, entonces para contener toda el agua tomada durante toda la vida, será suficiente un cántaro con altura de 4,5 metros y del mismo ancho. El dibujo 171 presenta ese cubo dentro de una escala justa.

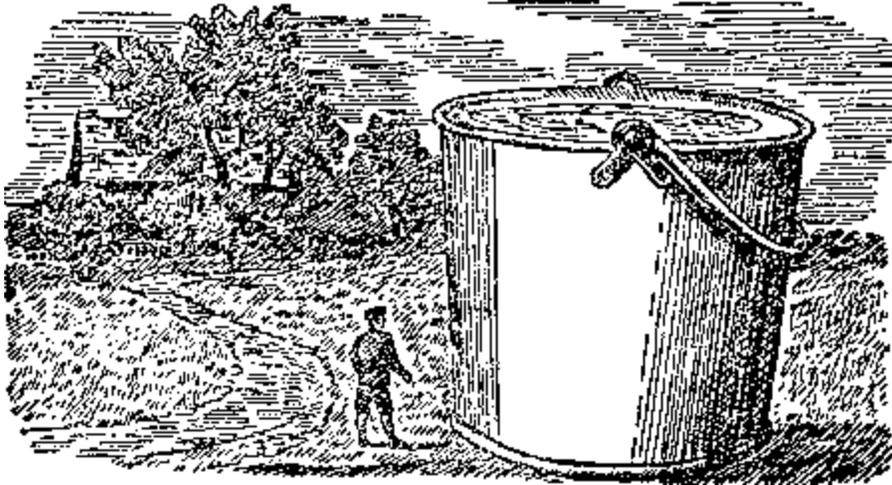


Figura 171. Lo mismo (veamos el dibujo 170) pero la imagen correcta.

Ejemplos estudiados le indican, además, que la representación de los números estáticos en aspecto de los cuerpos *volumétricos* es insuficiente práctico, no producen la impresión, la que esperan. Las diagramas de columnas en este sentido tienen la presencia indudable.

[Volver](#)

### 13. Nuestro peso normal

Si aceptamos que todos los cuerpos humanos son semejantes del punto de vista de geometría (es exacto en general), entonces podemos calcular el peso humano sobre su estructura (la estatura media de una persona es  $1,75\text{ cm}$ , el peso del mismo  $65\text{ kg}$ ). Los resultados sobre estos cálculos aparecen bastante sorprendentes.

Supongamos, que Ud. tiene estatura mas baja de la mediana a  $10\text{ cm}$ . ¿Qué peso sería normal para Ud.?

Habitualmente la tarea se solucionaría así: Se quitan del peso normal un tal por ciento, el que  $10\text{ cm}$  forman la estatura normal. En el caso actual, por ejemplo,  $65\text{ kg}$  se disminuyen sobre  $^{10}/_{175}$  y el peso obtenido,  $62\text{ kg}$ , lo tomaran como normal.

Es calculo es equivocado.

El peso aproximado se obtiene con la ayuda de una proporción

$$65 : x = 175^3 : 1,65^3,$$

de donde

$$x = \text{aproximadamente, } 54\text{ kg.}$$

La diferencia con el resultado obtenido anteriormente es bastante importante, es  $8\text{ kg}$ .

Al contrario, para una persona, con estatura de  $10\text{ cm}$  mas alto de mediana, su peso normal se obtendrá de proporción

$$65 : x = 1,75^3 : 1,85^3.$$

De aquí  $x = 78\text{ kg}$ , es decir, sobre  $13\text{ kg}$  mas del medio. Este suplemento es bastante significativo.

Evidentemente, los cálculos similares, bien hechos, tienen gran importancia médica para buscar el peso justo con que poder de calcular la dosis de medicamentos y etc.

[Volver](#)

#### 14. Los gigantes y enanos

¿Cuál debería ser la proporción entre el peso de un gigante y de un enano? La mayoría de gente piensa, estoy seguro de eso, que es inverosímil, un gigante podría ser 50 veces más pesado que un enano. Pero asegurémonos con un cálculo geométrico.

Uno de los hombres más altos, existencia de la que esta identificada, era un austriaco Vinquelmeyer, 278 cm de altura; El otro, era alsaciano Kron de 275 cm; El tercer era ingles O' Brik, dijeron que él podría encender un cigarro de las farolas callejeras, alcanzaba 268 cm.

Todos ellos eran mas altos de una persona normal sobre un metro. Al contrario, los enanos adolescentes tienen estatura mas o menos 75 cm, de un metro mas bajo de la estatura normal. ¿Cuál es la proporción del volumen y del peso de un gigante sobre el volumen y estatura de un enano? Es

$$275^3 : 75^3, \text{ ó } 11^3 : 3^3 = 49$$

¡Entonces, un gigante con su peso es equivalente a un medio centenar de los enanos! Si creemos a los ultimas noticias de una enana árabe Aguiba de 38 cm de altura, entonces la proporción será más sorprendente: El gigante mas alto es siete veces mas alto de esa enana y por lo tanto pesa mas en 343 veces. La noticia mas cierta de Bufón, un enano con estatura de 43 cm de altura: Este enano era más ligero de un gigante en 260 veces.

Además esta valuación de correlación entre pesos de un enano y un gigante son bastante exagerados: Están hechos sobre suposiciones, que los proporciones de los cuerpos es los mismos. Si Uds. alguna vez han visto a un enano, entonces sabrán, que una persona de poca altura tiene un aspecto diferente que una persona con altura normal, a pesar de tamaños de cuerpo, brazos y cabeza para un enano son otros. Lo mismo pasa con gigantes. Probablemente, que la proporción del peso del ultimo caso estudiado es el menos de 50.

[Volver](#)

#### 15. Geometría de Gulliver

El autor de los «Viajes de Gulliver» con mucho cuidado ha podido evitar el peligro de enmarañarse entre los proporciones geométricas. Los lectores, sin duda, se acordarán, que en el mundo de liliputienses nuestro pie (30,5 cm) era equivalente a la pulgada (2,54 cm); Y en el mundo de gigantes, lo contrario, una pulgada al pie. De otra manera, para el liliputiense toda la gente, todas las cosas, todas las criaturas de naturaleza eran sobre 12 veces son menores de lo normal, para los gigantes, sobre tantas veces mayores. A primera vista estas simples proporciones, sin embargo, a veces dificultaron algunas soluciones como estas:

1. ¿En cuantas veces el Gulliver había comido mas, que un liliputiense?
2. ¿En cuantas veces mas el Gulliver necesitaba el tejido para un traje, que un liliputiense?
3. ¿Cuánto pesa una manzana del mundo de gigantes?

El autor de «Los viajes» ha solucionado estos problemas en la mayoría de casos. Él calculaba correctamente que la estatura de un liliputiense es 12 veces menor que la de Gulliver, entonces el volumen de su cuerpo es menor en  $12 \cdot 12 \cdot 12$ , quiere decir en 1728 veces; Por lo tanto, para quedarse satisfecho con la comida, Gulliver necesitaba 1728 veces comida mas que un liliputiense. Leemos una descripción de comida de Gulliver:

*“Trescientos cocineros preparaban mi comida. Alrededor de mi casa estaban montadas cabañas, donde vivieron los cocineros con sus familias. Cuando se acercaba la hora de comer, cogí las 20 personas del servicio y las puse encima de la mesa, y otras cien personas estaban sirviendo desde el suelo: Unos sirvieron la comida, otros trajeron latas con vino y otras bebidas colgadas en las pértigas encima*

*de los hombros. Todos aquellos quienes estuvieron arriba, sirvieron la mesa usando las cuerdas y bloques..."*

Un cálculo justo lo hace el autor (Swift) sobre la cantidad del tejido necesario para el traje de Gulliver. La superficie de su cuerpo es mayor que la de un liliputiense  $12^2 = 144$  veces: De tantas veces él necesitaba mas tejido, sastres y etc.

Todo eso el Swift tenia en cuenta contando la historia de Gulliver, que con él «habían agregado a los 300 sastres liliputienses (dibujo 172) con la orden de hacer un par de trajes sobre un modelo regional». (La prisa del trabajo necesitaba la doble cantidad de los sastres.)



Figura 172. Sastres - liliputienses hacen medidas de Gulliver.

Una necesidad de hacer los cálculos aparece casi en cada pagina. Y desde el principio Swift lo hizo correctamente. Si Pushkin en el libro «Evgeniy Onegin» asegura, que «el tiempo se calcula sobre el calendario» entonces en «Los viajes» de Swift, todas las medidas están de acuerdo con normas geométricas. Solamente de vez en cuando la escala no alcanza, además donde describe el mundo de los gigantes. Aquí a veces podemos encontrar errores.

*“Un día, - cuenta el Gulliver - se fue con nosotros pasear por el jardín un liliputiense del palacio. Encontrando un momento cómodo, cuando yo paseaba y encontrare bajo de un árbol él cogió un ramo y zarandó encima de mi cabeza. La lluvia de manzanas con tamaño de una buena lata, empezó a caer; una golpeo a mi espalda y derivó a mí...”*

El Gulliver con éxito se levanto después de este golpe. Sin embargo, es fácil de calcular, que el golpe de una manzana tenia que ser verdaderamente exterminador: Además una manzana pesa más 1728 veces, que la nuestra, esto quiere decir, peso de 80 kg ha caído de la altura 12 veces mayor que la nuestra. La energía del golpe tenia que superar a 20.000 veces la energía de caída de una manzana normal y podría ser comparada con la energía de al menos que de un proyectil...

Un error no muy gran cometió el Swift sobre la fuerza muscular de los gigantes. Nosotros ya conocemos desde el capítulo primero, que la capacidad de los animales grandes no es proporcional a sus tamaños. Si empleamos aquellos pensamientos sobre los gigantes de Swift, entonces resulta, que aunque su fuerza muscular era 144 veces más de fuerza de Gulliver, peso de su cuerpo era más de 1728 veces. Y si Gulliver sería capaz de levantar incluso el peso de su propio cuerpo, además de la carga misma, pues los gigantes no son capaces de levantar incluso el peso de su cuerpo. Ellos tenían que estar quietos en el mismo sitio todo el rato, impotentes de hacer ningún movimiento significativo. Su poder, en el escrito era muy bonito, pero su resultado es un cálculo injusto.

[Volver](#)

### 16. ¿Porque el polvo y las nubes flotan en el aire?

Porque ellos son más ligeros, que el aire, es la respuesta habitual e indiscutible, de que no queda el sitio para las dudas. Pero esta explicación sobre su simplicidad es absolutamente errónea. Partículas del polvo no solo no son más ligeras del aire, pesan cien e incluso mil veces más.

¿Qué es una partícula de polvo? Son pequeñas partículas de otros cuerpos pesados: Los cascotes de piedra o de cristal, granos pequeños de carbón, madera, metales, fibras, de los tejidos y etc. ¿Es posible, que todos esos materiales sean más ligeros que el aire? Un simple dato de la tabla del peso específico nos asegurará a nosotros, que cada una de ellas pesa más que el agua, en dos o tres veces. El agua pesa más que el aire en 800 veces; Por lo tanto, las partículas de polvo pesan más de cien o lo mejor en mil veces. Ahora está clara toda la incongruencia de punto de vista sobre la causa de flotación a las partículas en el aire. ¿Cuál es la verdadera causa? Antes de todo hay que anotar, que habitualmente nosotros imaginaremos incorrecto este fenómeno, viéndolo como un fenómeno de flotación. Flotan en el aire (o en agua) solamente aquellos cuerpos cuyo peso no supera el peso equivalente al volumen del aire (o al líquido) desplazado. Las partículas superan este peso en muchas veces, por eso, no pueden *flotar* en el aire. Ellas no flotan, sino «están en las nubes» quiere decir poquito a poco están bajando, contenidas por la resistencia del aire. Cada partícula cayendo tiene que abrirse camino entre las partículas del aire, empujándolas a ellas o llevándolas tras sí. Para uno y otro se gasta la energía de caída. A mayor superficie del cuerpo, más significativo es el gasto comparando con el peso. Sobre caída de cuerpos mayores y pesados nosotros no notamos la marcha disminuida por la resistencia del aire, como su peso significativamente supera sobre esta fuerza.

Pero vamos a ver, que pasará cuando minimizamos el cuerpo. La Geometría ayudará a resolver este asunto. No es difícil darse cuenta que con la disminución del volumen de un cuerpo el peso se minimizará bastante más que la superficie del corte transversal: Disminución del peso es proporcional al *tercer* grado de reducción lineal, pero la debilitación de resistencia es proporcional a la superficie, es decir, al segundo grado de disminución lineal.

Del siguiente ejemplo veremos más claro, que significación tiene eso para nuestro caso. Cogemos la bola de croqueta con diámetro de 10 cm y una bola pequeña hecha del mismo material de 1 mm. La proporción de sus medidas lineales es equivalente a 100, por que 10 cm son más de 1 mm en 100 veces. La bola pequeña es más ligera de mayor en 100<sup>3</sup> veces, es decir en mil veces; La resistencia encontrada por ella durante el camino en el aire, más débil solamente en 100<sup>2</sup> veces, es decir en diez mil veces.

Es evidente, que la bola pequeña tiene que bajar más despacio, que la mayor. Más breve, la causa de que las partículas «floten» en el aire, es su «velaje» condicionada por los tamaños menores, y no era aquello, que parezcan más ligeros del aire. Una gota de agua con su radio de 0,001 mm cae en el aire regularmente con velocidad de 0,1 mm/seg; es suficiente la menor corriente de aire, para poner obstáculos a su caída libre.

Por eso, una habitación donde circula gente se precipita menos polvo durante el día que por la noche, aunque parezca que tiene que suceder lo contrario: A la precipitación estorban las

corrientes de torbellino aparentes en el aire, los que nunca hay en el aire calmoso dentro de habitaciones casi no visitadas.

Si un cubo de piedra de  $1\text{ cm}$  de altura lo deshacemos en unos pedazos como partículas cúbicas de  $0,0001\text{ mm}$  de lado, entonces la superficie general del mismo peso de la piedra se amplíe en  $10\ 000$  veces y en tantas veces se crece la resistencia del aire a su movimiento. A menudo las partículas alcanzan estos tamaños y está claro, que si la resistencia crece, cambiará totalmente la vista de caída.

Por la misma razón «flotan» en el aire las nubes. Hace tiempo, que el tema de las nubes, como burbujas llenadas por el vapor de agua, está negado. La nube es una aglomeración de una gran cantidad de partículas pequeñas de agua, pero sólo una aglomeración. Estas partículas, aunque pesan más que el aire como  $800$  veces, casi no caen; ellas bajan con apenas velocidad muy baja. Su caída tan lenta se explica igual como para las partículas, por la mayor superficie, comparando con el peso.

La corriente del aire más débil es capaz no sólo de suspender la caída lenta de las nubes, manteniéndolas sobre el mismo nivel, pero también subirlas.

La causa principal, común a todos esos fenómenos, es la presencia del aire: dentro del vacío las partículas y las nubes (si pudieran existir) caerán como las piedras.

Es útil agregar que la caída despacio de un hombre paracaidista ( $\approx 5\text{ m/segundo}$ ) pertenece a los fenómenos de orden semejante.

[Volver](#)

**GEOMETRÍA RECREATIVA  
SEGUNDA PARTE  
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA**



**CAPITULO DUODÉCIMO  
ECONOMÍA GEOMÉTRICA**

**Contenido:**

1. [Como Pajom compraba la tierra.](#)
2. [Trapezio o rectángulo](#)
3. [Una propiedad excelente del cuadrado](#)
4. [Los terrenos de otra forma](#)
5. [Las figuras con mayor superficie](#)
6. [Los clavos](#)
7. [Un cuerpo de mayor volumen](#)
8. [El producto de multiplicadores equivalentes](#)
9. [Un triángulo con mayor superficie](#)
10. [La viga más pesada](#)
11. [De un triángulo de cartón](#)
12. [Problema del tornero](#)
13. [¿Cómo se prolonga una tabla?](#)
14. [Un camino más corto](#)

**1. Como Pajom compraba la tierra.** (una problema del León Tolstoi)

- ¿A que precio será? - dice Pajom.
- El precio que tenemos es único: 1000 rublos por un día.  
Pajom no había entendido.
- ¿Cómo es esta medida, un día? ¿Cuántos diezmos<sup>1</sup> en un día serán?
- Nosotros, dice, no sabemos contar esto. Nosotros vendemos al día; Cuánta tierra dejarás atrás durante el día, toda será tuya, y el precio es 1000 rublos.  
Se extrañó Pajom.
- Pero esto, dice, durante el día seria mucha tierra.  
El jefe sonríe.
- Toda tuya, pero a condición de que, si no vuelves antes de la puesta del sol al sitio de donde comenzaste la vuelta, pierdes tu dinero.

<sup>1</sup> Diezmo; Diesiatina - es la antigua media rusa de los terrenos, equivalente a 109 Ha

- ¿Pero como, dice Pajom, voy a marcar, por donde voy a pasar?
  - Nosotros estaremos en el sitio que te guste más; nosotros estaremos quietos y tu caminas, hazlo en círculo, y coge contigo un rascador y, marcas donde sea necesario, en las esquinas haz los agujeros; luego nosotros de una esquina a otra pasaremos con el arado. Cualquier círculo es tuyo, lo único, hasta la puesta del sol tendrás que volver al sitio de donde empezaste. Todo lo que dejes atrás será tuyo.
- Los *baskirios* se fueron. Prometieron volver mañana con el amanecer al mismo sitio.

\* \* \*

Vinieron todos al amanecer. El jefe se acercó e indicó con la mano a Pajom.

- Aquí esta, le dice, todo alrededor es mío. Elige cualquier lugar.

El jefe puso su gorra zorruna en la tierra.

- Aquí estaré esperándote, dice, esta será la primera marca. Desde aquí vete y vuélvete por aquí. Todo lo que dejes atrás, todo tuyo será.



Figura 173. «Corre Pajom al máximo de sus fuerzas, y el sol está acercándose al horizonte».

Con el primer rayo del sol cogió al hombro el rascador y comenzó su viaje Pajom por la estepa.

Aun se alejó a una *vierst*, se paró e hizo un agujero. Se alejó todavía mas e hizo otro agujero.

Se había pasado cinco *vierst*. Miró al sol, era hora de desayuno. "Dejé como un atelaje, pensó Pajom. Durante el día hay cuatro, aun es pronto para girar» y se fue recto.

«Ahora, piensa, en este lado he cogido demasiado; Tengo que girar» Se paró, excavó otra vez un agujero y tomó a la izquierda.

Se alejó bastante por el mismo lado, tomó la otra esquina. Echó un vistazo a la colina; se mareaba por el calor que hacía, a lo lejos se dejaba ver la gente. «Ahora, piensa, he cogido demasiado de largo, este lado lo voy a tomar mas corto». Inició el tercer lado. Miró al sol, se acerca el mediodía, el tercer lado lo dejo solamente en dos *verst*. Y hasta el sitio inicial

los mismos 15 *verst*. «No, piensa, aunque salga un terreno torcido, tengo que llegar al tiempo».

Excavó un agujero Pajom e hizo el último giro, caminando hacia la colina.

Camina recto hasta la colina y de pronto empezó sentirse mal. Necesitaba tomar un descanso, pero no puede, no llegará antes de la puesta de sol. El sol está acercándose al horizonte.

Camina Pajom; difícil es para él, pero se apura aún más. Camina, camina, aun está lejos el fin; trotó... corrió, la camisa, el pantalón se pegan al cuerpo por el sudor y la boca está seca. El pecho se hincha como fuelle de fragua, el corazón latía como martillo.

Corre Pajom, gastando a las últimas fuerzas, y el sol más y más se acerca al horizonte.

Ahora mismo desaparecerá (dibujo 173).

El sol está cerca y el sitio tampoco está lejos. Ve la gorra zorruna encima de la tierra y el jefe está sentado en el suelo.

Miró Pajom al sol, cómo el sol estaba tocando la tierra, y poco a poco desapareciéndose.

Aumentó sus fuerzas Pajom, le dio un suspiro, se subió a la colina. Ve la gorra. Se le doblaron las piernas y se ha caído al suelo, con manos traspiradas, toca la gorra.

- ¡ Qué muchacho! - grito el jefe: - ¡ Cuanta tierra ha ganado!

Se acercó un trabajador, quiso ayudar a levantarse, pero ve la sangre en la boca, el hombre está muerto..."

### **Problema (de León Tolstoi):**

*Dejaremos aparte el triste fin de la historia y vamos a examinar la parte geométrica de esa historia. Podemos encontrar sobre datos dispersos en la historia, ¿cuantos diezmos de tierra se ha recorrido Pajom? La tarea a primera vista se parece incumplida, se solucionará, sin embargo, bastante fácil.*

### **Solución**

Con mucha atención otra vez leemos la historia y obteniendo los datos geométricos, es fácil de asegurarse, que los datos obtenidos son suficiente para responder a esa pregunta.

Podemos dibujar un plano del terreno echo por Pajom.

En primer lugar, está claro, que Pajom ha recorrido sobre lados de un rectángulo. Sobre primer lado leemos:

"He dejado atrás cinco *verst*... Voy a pasar a otros cinco más; Luego tomare a la izquierda..."

Entonces, el primer lado del rectángulo tenía una longitud de mas o menos 10 *verst*.

Sobre el segundo lado, marcado el ángulo recto con el primer lado, no se dice nada.

La longitud de tercer lado, evidentemente, perpendicularmente al otro, se dice a

continuación: «Sobre tercer lado había recorrido solamente dos *verst*».

Esta dada, por supuesto, la cuarta parte del rectángulo: «Hasta el fin los mismos cinco *verst*»<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Aunque aquí no está claro como ha podido el Pajom distinguir la gente de aquella distancia

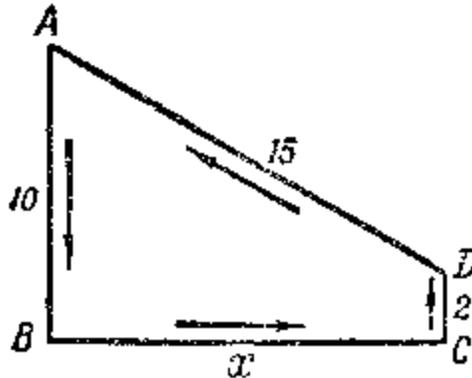


Figura 174. El camino de Pajom

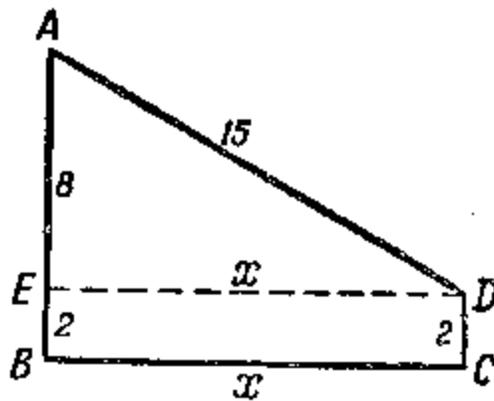


Figura 175. Especificación del camino.

Con estos datos podemos dibujar un plano del terreno recorrido por Pajom (figura 174). En el rectángulo obtenido  $ABCD$  en lado  $AB = 10$  verst;  $CD = 2$ ;  $AD = 15$  verst; Los ángulos  $B$  y  $C$  - son rectos. La longitud  $x$  del lado incógnito  $BC$  es fácil de calcular, si pasamos desde  $D$  una perpendicular  $DE$  hacia  $AB$  (figura 175). Luego en el triángulo rectángulo  $AED$  nosotros ya sabemos un cateto  $AE = 8$  verst y hipotenusa  $AD = 15$  verst. El cateto incógnito

$$ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 13 \text{ verst}$$

Entonces el segundo lado tenía la longitud de  $13$  verst. Evidentemente, Pajom se había equivocado, tomando el segundo lado más corto, que el primero. Como vemos, con la certeza dibujar el plano de aquel terreno, el que ha recorrido el Pajom. Es cierto, Tolstoi había tenido delante un dibujo semejante al dibujo 174, cuando estuvo escribiendo esa historia.

Ahora resulta fácil a encontrar la superficie del trapecio  $ABCD$ , formado por el rectángulo  $EBDC$  y por el triángulo rectángulo  $AED$ . Ella es:

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ verst}^2$$

El cálculo sobre la formula del trapecio nos arroja el mismo resultado:

$$\frac{AB + CD}{2} \times BC = \frac{10 + 2}{2} \times 13 = 78 \text{ verst}^2$$

Habíamos encontrado, que Pajom ha recorrido un terreno espacioso con una superficie de 78 *verst cuadrados*, más o menos 8.000 diezmos. Una diezma era equivalente a 12 *copecs*.

[Volver](#)

## 2. Trapecio o rectángulo

### Problema:

*Durante el día más fatídico en su vida Pajom había recorrido  $10 + 13 + 2 + 15 = 40$  verst, caminando sobre los lados de un trapecio. Su intención principal era caminar sobre los lados de un rectángulo; el trapecio le ha salido por la causalidad, es el resultado de un cálculo mal hecho. Es curioso: ¿Ha ganado o ha perdido, cuando su terreno ha resultado como un trapecio? ¿En qué caso él podría haber recibido el mayor terreno?*

### Solución

A los rectángulos con un contorno de 40 *verst* podrá ser mucho, y cada uno tiene su superficie distinta. Aquí están los ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 14 \cdot 6 = 84 & \text{verst cuadrados} \\ 13 \cdot 7 = 91 & \gg \\ 12 \cdot 8 = 96 & \gg \\ 11 \cdot 9 = 99 & \gg \end{array}$$

Vemos, que para todas estas figuras, con el mismo perímetro de 40 *verst*, la superficie es mayor, que para nuestro trapecio.

Sin embargo, son evidentes y otros rectángulos con perímetro de 40 *verst*, cuya superficie es menor, que para el trapecio:

$$\begin{array}{ll} 18 \cdot 2 = 36 & \text{verst cuadrados} \\ 19 \cdot 1 = 19 & \gg \\ 19 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 9 & \gg \end{array}$$

Por lo tanto, no podemos dar la respuesta justa para este problema. Hay rectángulos con superficie mayor, que el trapecio, pero hay también con la menor superficie, con el mismo contorno. Aunque podemos dar una respuesta justa para la pregunta: ¿Cuál de todas figuras rectangulares con el perímetro dado tendrá la superficie más grande? Comparando nuestros rectángulos, anotamos, que cuando hay menor diferencia entre los lados, entonces la superficie del rectángulo es la mayor. A continuación terminando, que cuando esa diferencia no existe, es decir, cuando el rectángulo se convierte al cuadrado, la superficie alcanzara la mayor cantidad. Luego ella será equivalente a  $10 \cdot 10 = 100$  *verst cuadrados*. Es fácil de ver, que el cuadrado realmente supera por su superficie al cualquier otro rectángulo del mismo perímetro. Pajom tenía que caminar sobre los lados de un cuadrado para conseguir un terreno de una superficie más grande posible, sobre 22 *verst cuadrados* mas, que él había logrado.

[Volver](#)

## 3. Una propiedad excelente del cuadrado

La excelente propiedad del cuadrado es incluir dentro de sus límites la mayor superficie en comparación con otros rectángulos del mismo perímetro. Haremos una demostración justa de esta posición.

Llamaremos  $P$  el perímetro de la figura rectangular. Si el cuadrado tiene el mismo perímetro  $P$ , entonces cada uno de sus lados tendría que ser equivalente a  $P/4$ .

Demostremos, que acortando unos de sus lados sobre tal cantidad  $b$  sobre la misma prolongación del lado próximo, nosotros obtendremos un rectángulo con el mismo perímetro, pero con la menor superficie. Dicho de otra manera, demostraremos, que la superficie  $\left(\frac{P}{4}\right)^2$  del cuadrado es mayor de la superficie  $\left(\frac{P}{4} + b\right)\left(\frac{P}{4} - b\right)$  del rectángulo:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4} + b\right)\left(\frac{P}{4} - b\right)$$

Como el lado de derecho de esa desigualdad  $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$ , entonces, todas las formulas tomaran el aspecto

$$0 > -b^2 \text{ ó } b^2 > 0.$$

Pero es evidente la ultima desigualdad: El cuadrado de cualquier cantidad, negativa o positiva, es mayor que  $0$ . Por lo tanto, es correcta la desigualdad principal, la que conducía a nosotros hasta aquí.

O sea, el cuadrado tiene la mayor superficie de todos rectángulos con el mismo perímetro. De aquí se deduce, además, entre todas figuras rectangulares con las mismas superficies, un cuadrado tiene la *menor superficie*. Podemos convencernos por el siguiente razonamiento. Supongamos, que no es cierto y que existe un tal rectángulo  $A$ , el que con la superficie equivalente al cuadrado  $B$  tiene el perímetro menor, que él. Luego, dibujando un tal cuadrado  $C$  con mismo perímetro como tiene rectángulo  $A$ , obtenemos el cuadrado, que tiene la superficie mayor que  $A$  y, por lo tanto, mayor que el cuadrado  $B$ . ¿Entonces, que tenemos? Que el cuadrado  $C$  tiene el perímetro menor que el cuadrado  $B$ , pero la superficie es mayor que él. Esto, naturalmente, es imposible: Como un lado de cuadrado  $C$  es menor, de un lado de cuadrado  $B$ , entonces la superficie tiene que ser menor. Entonces, no es posible la existencia del rectángulo  $A$ , el que con la misma superficie tiene el perímetro menor que del cuadrado. Dicho de otra manera, de todos los rectángulos con la misma superficie, el menor perímetro la tiene el cuadrado.

Los conocimientos de esta propiedad del cuadrado podrían ser una buena ayuda para Pajom, poder calcular sus fuerzas y conseguir un terreno rectangular de mayor superficie.

Sabiendo, que pudo caminar durante todo el día, sin ningún esfuerzo, digamos  $36 \text{ verst}$ , podría seguir por el lado de  $9 \text{ verst}$  del cuadrado y a tardecer seria el poseedor de un terreno de  $81 \text{ verst cuadrados}$ , - es como  $3 \text{ verst cuadrados}$  mas que el que había conseguido con un final mortal. Y, al contrario, si él había tenido un limite definido de la superficie para un terreno rectangular, por ejemplo, a  $36 \text{ verst cuadrados}$ , entonces él podría lograr el resultado con esfuerzo mínimo, andando sobre los lados del cuadrado, de un lado a  $6 \text{ verst}$ .

[Volver](#)

#### 4. Los terrenos de otra forma

Puede ser, que para Pajom fuera más rentable conseguir un terreno no de una forma rectangular, sino cualquiera otra, quizás triangular, pentagonal, cuadrado y etc.

Esta pregunta tiene que ser examinada por la matemática; pero, por ciertas razones, no vamos a entrar en esto, solamente vamos a demostrar a los resultados.

En primer lugar, podemos demostrar, que de *todos cuadriláteros* con el mismo perímetro la más mayor superficie pertenecerá al cuadrado. Por eso, deseando tener un terreno cuadrilateral, con ningún artificio Pajom no podría alcanzar más de  $100 \text{ verst cuadrados}$  (calculando, que su carrera diaria máxima es -  $40 \text{ verst}$ ).

En segundo lugar: Podemos demostrar, que el cuadrado tiene la mayor superficie, de cualquier triángulo con el mismo perímetro. Un triángulo equilátero con el mismo

$$40/3 = 13 \frac{1}{3} \text{ verst}$$

perímetro tiene un lado y la superficie (con la formula  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$  (S es la superficie, a es el lado)

$$\frac{1}{4} \left( \frac{40}{3} \right)^2 \sqrt{3} = 77 \text{ verst cuadrados}$$

Es decir, es menor de aquel trapezio que había recorrido Pajom. A continuación (ver «Un triángulo con mayor superficie») será demostrado, que de todos triángulos con el mismo perímetro, el triángulo *equilátero* tiene la mayor superficie. Entonces, si además este mayor triángulo tiene la superficie menor que la superficie del cuadrado, entonces todos otros triángulos del mismo perímetro son menores de superficie, que el cuadrado. Pero si vamos a comparar la superficie de cuadrado con superficie del pentágono, hexágono y etc. con el mismo perímetro, entonces aquí su propiedad se terminará: un pentágono regular tiene mayor superficie, un hexágono aun mayor y etc. Fácil de convencerse teniendo como ejemplo un hexágono regular. Con el perímetro de *40 verst* su es lado  $40/6$  y

superficie (por la formula  $S = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$ ) es  $S = \frac{3}{2} \left( \frac{40}{6} \right)^2 \sqrt{3}$  verst cuadrados

Sabiendo y eligiendo para su terreno la forma de hexágono regular, él con el mismo esfuerzo podría alcanzar la superficie de *115 - 78*, es decir de *37 verst cuadrados* mas, que en realidad, y de *15 verst cuadrados* mas, que da el terreno cuadrado (pero para esto tendría que haber empezado el viaje con un instrumento goniométrico).

### **Problema:**

*Cogiendo las seis cerillas necesita hacer una figura con mayor superficie.*

### **Solución.**

Con seis cerillas podemos construir varias figuras distintas: un triángulo equilátero, un rectángulo, hexágonos irregulares y por fin - un hexágono regular. Un geómetra, sin comparar entre si las superficies de estas figuras, sabe muy bien, cual figura tiene la mayor superficie es hexágono regular.

[Volver](#)

## **5. Las figuras con mayor superficie**

Podemos demostrar geoméricamente, que la mayor cantidad de los lados de un polígono regular, formara la mayor superficie con la misma longitud de los lados. Y la mayor superficie con un perímetro dado inscribe la circunferencia. Si Pajom hubiera caminando sobre una circunferencia, entonces, recorriendo los mismos *40 verst*, él pudiera conseguir la superficie de

$$P \times \left( \frac{40}{2P} \right)^2 = 127 \text{ verst cuadrados}$$

Con la mayor superficie sobre un perímetro dado no puede ganar ninguna otra figura mas, es igual, la rectilínea o curvilínea.

Permítanme detenerme un poco más en esta propiedad sorprendente del círculo, como es la de formar dentro de sus límites la mayor superficie, que cualquiera otra figura, teniendo el mismo perímetro. Puede ser, que algunos lectores tengan curiosidad de saber de qué manera se demuestran las situaciones semejantes. Luego vamos a demostrar, la verdad es que la demostración no es clásica, esta propiedad del círculo, presentada por el matemático Yakov Shteyner. El texto es bastante largo, y si Uds. encuentran demasiado molesto, pueden dejar pasar, sin preocuparse de no entender la siguiente parte. Se necesita demostrar, que la figura, teniendo la mayor superficie con un perímetro dado, será el círculo. Antes de todo estableceremos, que la figura buscada tiene que ser convexa. Esto significa, cualquier cuerda debe estar situada totalmente en dentro de la figura. Tenemos una figura  $AaBC$  (figura 176), teniendo la cuerda externa  $AB$ . Cambiaremos la cuerda  $a$  por la cuerda  $b$ , simétricamente con ella. Con este cambio el perímetro de figura  $ABC$  no se cambia, pero la superficie claramente se amplía. Entonces, todas las figuras como  $AaBC$  no pueden ser las que tienen mayor superficie con el mismo perímetro.

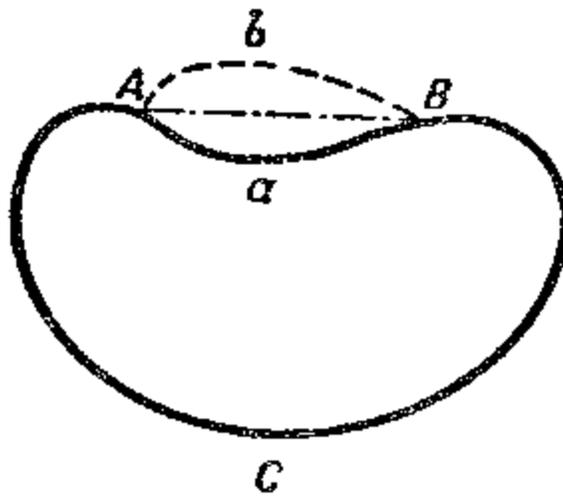


Figura 176. Ordenamos, que la figura con mayor superficie debe ser convexa también y la superficie

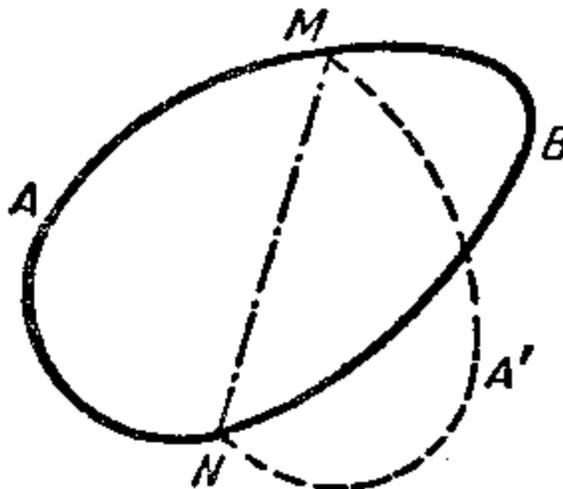


Figura 177. Si la cuerda divide por la mitad del perímetro de una figura convexa de mayor superficie, entonces ella corta por la mitad también a la superficie.

O sea, la figura buscada es *convexa*. Luego podemos adelantar, establecer otra propiedad mas de esta figura: Cualquier cuerda, la que divide por la mitad su perímetro, le corta por la mitad también a la superficie. Sea la figura  $AMBN$  (figura 177) la buscada, y sea la cuerda  $MN$  divide su perímetro por la mitad. Demostraremos, que superficie  $AMN$  es equivalente a la superficie  $MBN$ . En realidad, si alguna de estas partes fuera mayor de superficie, que la otra, por ejemplo,  $AMN > MBN$ , entonces, doblando la figura  $AMN$ , la superficie que es mayor que de la figura principal  $AMBN$ , donde el perímetro es mismo con ella. Entonces, la figura  $AMBN$ , donde la cuerda corta el perímetro por la mitad, divide la superficie en dos partes de diferente área, lo que no puede ser posible ( es decir, no puede tener la *mayor* superficie con un perímetro dado).

Antes de seguir adelante, demostraremos el siguiente teorema secundario: De todos los triángulos con dos lados conocidos, la mayor superficie la tendrá el que forma con sus lados un ángulo recto. Para demostrar esto, acordamos una expresión trigonométrica de superficie  $S$  del triángulo con los lados  $a$  y  $b$  y el ángulo  $C$  entre ellos.

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times \text{sen}(C)$$

Este termino será, evidentemente, el mayor (sobre los lados conocidos) cuando el  $\text{sen}(C)$  tome su mayor valor, es decir, será equivalente a uno. Pero el ángulo cuyo seno es 1, es el recto. Es todo lo que deberíamos de demostrar.

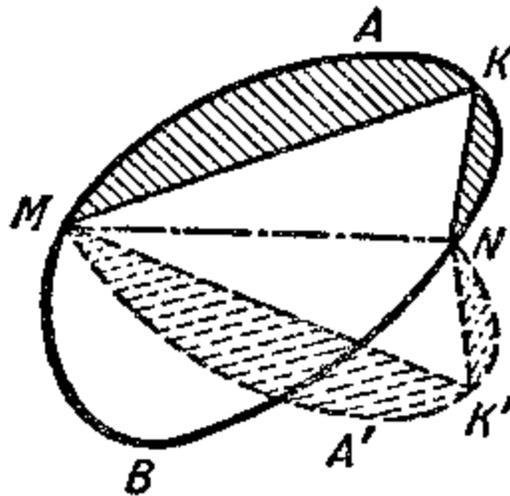


Figura 178. Supongamos la existencia de una figura convexa, que no es un círculo, con la mayor superficie.

Ahora podemos empezar a solucionar el problema principal, demostrando que de todas figuras con el perímetro  $p$  la de mayor superficie es la circunferencia. Para convencerse, probaremos admitir la existencia de una figura convexa  $MANB$  y no sea circular (figura 178), la que domina esta propiedad. Pasaremos hasta ella una cuerda  $MN$ , con la posición simétrica al ( $MKN$ ). Anotamos, que figura  $MKNM$  tiene el mismo perímetro y la misma superficie, que la figura principal  $MKNM$ .

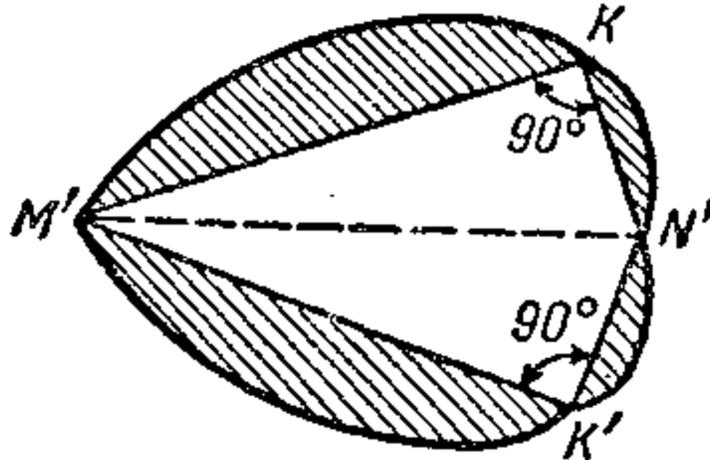


Figura 179. Establecemos que de todas las figuras con el perímetro dado, la mayor superficie es la circunferencia

Como la cuerda  $MKN$  no es la mitad de circunferencia, entonces encima de ella tendrán que ser situados unos puntos, donde el segmento  $MN$  se ve no sobre un ángulo recto. Sea bien,  $K$  - es un punto,  $K'$  - es el simétrico al, es decir, los ángulos  $K$  y  $K'$  no son rectos. Separando (o uniendo) a los lados  $MK$ ,  $KN$ ,  $MK'$  y  $NK'$  podemos formar entre ellos un ángulo recto y luego obtendremos los triángulos rectángulos equivalentes. Estos triángulos los colocaremos sobre sus hipotenusas como en la figura 179, y unimos en unos sitios correspondientes a los segmentos sombreados. Obtenemos la figura  $M'KN'K'$  teniendo el mismo perímetro, que la principal, pero, evidente, con la mayor superficie (por que los triángulos rectángulos  $M'KN'$  y  $M'K'N'$  tienen la mayor superficie, que los no rectángulos  $MKN$  y  $MKN'$ ). Entonces, ninguna otra figura, si no es círculo, no puede tener la mayor superficie con un perímetro dado.

De esta manera sustentado, podemos demostrar que el círculo es la figura que tiene mayor superficie, con un perímetro dado.

Es fácil de demostrar la equidad de una posición: De todas figuras de igual superficie, el círculo es el que tiene el menor perímetro. Observándola, podemos aplicar para el círculo todos los argumentos que antes usamos para el cuadrado (ver «Una propiedad excelente del cuadrado»)

[Volver](#)

## 6. Los clavos

### Problema:

¿Qué clavo es más difícil de sacar, el redondo, cuadrado o triangular, si ellos estuviesen clavados a la misma profundidad y tienen la misma superficie del corte transversal?

### Solución

Intuitivamente sabemos que el clavo que tiene mayor resistencia a la extracción es aquél que tiene mayor superficie de contacto con la madera ¿Cuál clavo de los tres, tiene la mayor superficie de contacto? Nosotros sabemos, que con las mismas superficies, el perímetro del cuadrado es menor que el perímetro de triángulo, y la circunferencia es menor que el perímetro del cuadrado. Si un lado del cuadrado le asignamos el valor 1, entonces el cálculo deja para estas tres cantidades los valores de 4,53; 4; 3,55. Por lo tanto, el que se mantiene más fuerte de todos es el clavo triangular.

Sin embargo, estos clavos no fabrican, por lo menos no están a la venta. La causa es que estos clavos son fáciles de doblar y de romper.

[Volver](#)

## 7. Un cuerpo de mayor volumen

Una propiedad semejante al círculo, la tiene la superficie esférica: ella tiene el mayor volumen con una cantidad dada de superficie. Y al contrario, de todos los cuerpos del mismo volumen, el de menor superficie es la esfera.

Estas características juegan el gran papel en la vida práctica. El samovar esférico tiene menor superficie, que el cilindro o de cualquier otra forma, conteniendo la misma cantidad de vasos, y como el cuerpo pierde el calor en función de su superficie, entonces el samovar esférico se enfría mas lento que cualquier otro del mismo volumen. Al contrario, el receptáculo del termómetro se calienta y se enfría más rápido (es decir, cogiendo la temperatura del medio ambiente), cuando tiene la forma de un cilindro y no de esfera.

Por la misma razón el globo terrestre, formado por una capa sólida y el núcleo, debe de reducir su volumen, es decir, endurecerse, estrecharse, por todas causas, transformando la forma de su superficie: Su contenido profundo debe ser estrecho cada vez, cuando su forma inferior sobrevive algún cambio, saliéndose de la esfera. Es posible, que este asunto geométrico esté en una relación estrecha con los terremotos y generalmente con los fenómenos tectónicos; pero sobre eso deben que dar su opinión los geólogos.

[Volver](#)

## 8. El producto de multiplicadores equivalentes

Las tareas, a las que ahora estábamos dedicando el tiempo, se pueden analizar desde su aspecto económico: Sobre el consumo del esfuerzo dado (por ejemplo, caminando 40 verst), y ¿cómo conseguir el mayor resultado (rodeando el terreno más grande posible)? De aquí viene el título de una parte del libro: «Economía geométrica». Pero esto es la voluntad de vulgarizador; en matemática los problemas del mismo sentido tienen otro nombre:

Problemas sobre «mínimo y máximo». Ellos pueden ser variados por su asunto y por su nivel de dificultad. La mayor parte de los problemas se solucionan únicamente con matemáticas especiales; Pero hay algunos, donde para solucionarlos es suficiente algunos conocimientos elementales. A continuación vamos a examinar un par de problemas semejantes, los que vamos a solucionar, usando una propiedad curiosa, como hacer derivar multiplicadores equivalentes.

Para casos de dos multiplicadores con esta propiedad ya se conoce. Nosotros sabemos, que la superficie del cuadrado es mayor que la superficie de cualquier rectángulo del mismo perímetro. Si traducimos esa situación geométrica a la lengua aritmética, va a significar lo siguiente: Cuando es necesario dividir el número sobre dos partes, donde su producto será el mayor, entonces hay que dividir por la mitad. Por ejemplo, de todos productos

$$13 \cdot 17$$

$$16 \cdot 14$$

$$12 \cdot 18$$

$$11 \cdot 19$$

$$10 \cdot 20$$

$$15 \cdot 15$$

y etc., la suma de los multiplicadores es 30, el mayor será  $15 \cdot 15$ , aun si comparamos los productos de números fraccionarios ( $14 \frac{1}{2} \cdot 15 \frac{1}{2}$  y etc.).

Es correcto también para los productos de tres multiplicadores, teniendo la suma constante: Su producto alcanzara la mayor cantidad, cuando multiplicadores son equivalentes entre si. Eso se deduce del precedente. Sean tres multiplicadores  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , su suma es  $a$ ;

$$x + y + z = a.$$

Supongamos, que  $x$  e  $y$  no son equivalentes entre si. Si cambiamos cada uno de ellos por

media suma  $\frac{x+y}{2}$ , entonces la suma de multiplicadores no cambiará:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a$$

Con acuerdo con anterior

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} > x \times y$$

Entonces el producto de tres multiplicadores

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} \times z$$

es el mayor del producto de  $xyz$ :

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} \times z > x \times y \times z$$

en general, si entre multiplicadores  $xyz$  hay algunos que son desiguales, entonces, siempre podemos encontrar a los números, los que sin cambiar la suma total, den el mayor producto, de  $xyz$ . Y solamente cuando todos tres multiplicadores son equivalentes, cumplir el mismo cambio no es posible. Por lo tanto, sobre  $x + y + z = a$ , el producto  $xyz$  será el mayor cuando

$$x = y = z$$

Aprovecharemos el conocimiento de esta propiedad de multiplicadores equivalentes, para resolver problemas muy interesantes.

[Volver](#)

## 9. Un triángulo con mayor superficie

### **Problema:**

*¿Qué forma debe de tomar el triángulo, para que tenga la mayor superficie con la suma de sus lados dados?*

Nosotros ya tenemos anotado anteriormente (ver «Terrenos de otra forma»), que esta propiedad es sostenida por el triángulo equilátero. ¿Pero como podemos demostrarlo?

Solución.

La superficie  $S$  del triángulo con lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y con el perímetro  $a + b + c = 2p$  se expresa, como sabemos del curso de geometría, así

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

de donde

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c)$$

La superficie  $S$  del triángulo será mayor, cuanto mayor sea la cantidad su cuadrado  $S^2$ ,

o expresión  $S^2/p$ , donde  $p$ , es el semiperímetro, y de acuerdo con la condición del problema, es constante. Pero como ambas partes de igualdad reciben la mayor significativo simultáneamente, entonces la pregunta tiene su expresión en cuál condición del producto

$$(p - a) (p - b) (p - c)$$

será el mayor. Anotando, que la suma de estos tres multiplicadores es la cantidad constante,

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p,$$

terminaremos, que su producto alcanzara la mayor cantidad cuando los multiplicadores sean equivalentes, es decir, cuando se cumple la igualdad

$$p - a = p - b = p - c$$

de donde

$$a = b = c.$$

Entonces un triángulo tendrá la mayor superficie con el perímetro dado, cuando sus lados serán equivalentes entre si.

[Volver](#)

## 10. La viga más pesada

### Problema:

*De un madero de forma cilíndrica necesita aserrar una viga de mayor peso. ¿Cómo vamos a actuar?*

### Solución

La tarea, evidentemente, se expresa inscribiendo un rectángulo con mayor superficie dentro de un círculo. Aunque, antes de todo dicho nuestros lectores estén preparados a contestar, que ese rectángulo debe ser un cuadrado, pero hay que demostrarlo. Llamaremos un lado del rectángulo buscado (figura 180) a través de  $x$ ; Luego el otro se expresa a través de  $\sqrt{R^2 - x^2}$ , donde  $R$  es el radio del corte circular del madero.

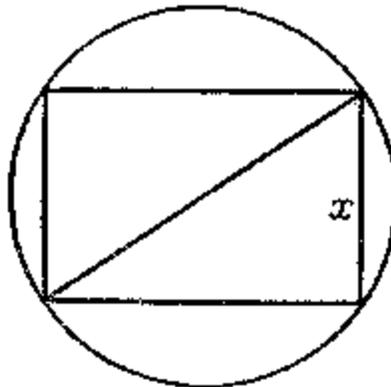


Figura 180. Para la tarea sobre una viga de mayor peso

La superficie del rectángulo

$$S = x \times \sqrt{R^2 - x^2}$$

de donde

$$S^2 = x^2 \times (4R^2 - x^2)$$

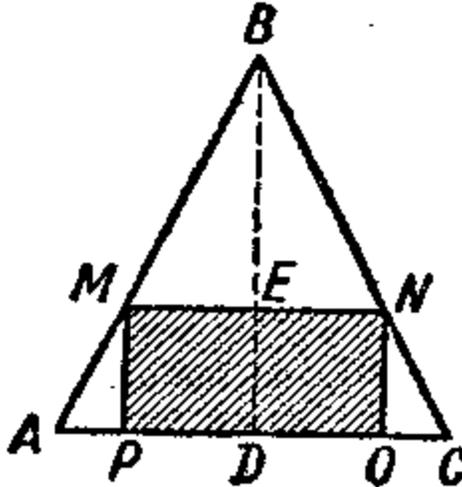


Figura 181. Dentro del triángulo hay que inscribir un rectángulo de mayor superficie.

Como la suma de los multiplicadores  $x^2$  y  $4R^2 - x^2$  es la cantidad constante ( $x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2$ ), entonces su producto  $S^2$  será el mayor sobre  $x^2 = 4R^2 - x^2$ , es decir sobre  $x = R\sqrt{2}$ . Entonces, luego alcanzara la mayor cantidad de  $S$ , es la superficie del rectángulo buscado. O sea, un de los lados del rectángulo con la mayor superficie es  $R\sqrt{2}$ , es decir al lado del cuadrado inscrito. La viga tiene el mayor volumen, cuando su corte es cuadrado, inscrito en el corte del madero cilíndrico.

[Volver](#)

## 11. De un triángulo de cartón

### Problema:

Tenemos un pedazo de cartón de forma triangular. Necesita cortarlo paralelamente a su base y a la altura, un rectángulo de mayor superficie.

### Solución.

Sea  $ABC$  ese triángulo (figura 181), y  $MNOP$  - es aquel rectángulo, el debe quedar después del corte.

Por semejanza de los triángulos  $ABC$  y  $NBM$  tenemos

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM}$$

De donde

$$NM = \frac{BE \times AC}{BD}$$

Llamando uno de los lados  $NM$  del rectángulo buscado a través de  $y$ , su distancia  $BE$  desde el vértice del triángulo a través de  $x$ , la base  $AC$  del triángulo dado a través de  $a$ , y su altura  $BD$  a través del  $h$ , escribimos la formula anteriormente recibida en esta presencia

$$y = \frac{ax}{h}$$

La superficie  $S$  del rectángulo buscado  $MNOP$  es:

$$S = MN \times NO = MN \times (BD - BE) = (h - x) \times y = (h - x) \times \frac{ax}{h}$$

Por lo tanto

$$\frac{Sh}{a} = (h - x) \times x$$

La superficie  $S$  será la mayor, cuando el producto  $Sh/a$  sea mayor también, por lo tanto cuando alcance la mayor cantidad el producto de los multiplicadores  $(h - x)$  y  $x$ . Pero la suma  $h - x + x = h$ , es la cantidad constante. Entonces, su producto es máximo, cuando

$$h - x = x,$$

donde

$$x = h/2$$

Ahora sabemos, que el lado  $NM$  del rectángulo buscado pasa a través de la mitad de altura del triángulo y, por lo tanto, se une los medios de sus lados. Entonces, esta parte del rectángulo es  $a/2$ , y la otra es  $h/2$ .

### **Problema:**

Un hojalatero tuvo que prepararlo de un pedazo cuadrado de hojalata de 60cm de anchura, a una caja con el fondo cuadrado sin la tapa y con una condición: La caja tendrá que ser de mayor espaciosidad. Hojalatero tardó bastante tiempo, buscando de que anchura deben de ser los bordes, pero al final no encontró la solución justa (dibujo 182).

¿Puede ser, que el lector era capaz de sacar nuestro hojalatero de esa dificultad?



Figura 182. Problema de hojalatero

### **Solución.**

Sea que la anchura de bandas dobladas es  $x$  (dibujo 183). Luego la anchura del fondo cuadrado será  $60 - 2x$ ; el volumen  $v$  de la caja se expresará por el producto

$$v = (60 - 2x)(60 - 2x)x.$$

¿Cuál  $x$  dará a este producto el mayor valor? Si la suma de los tres multiplicadores fuera constante, el producto será mayor en el caso de su igualdad. Pero aquí la suma de multiplicadores es

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

no es la cantidad constante, porque varía con  $x$ . Sin embargo no es difícil conseguir aquello para que la suma de los tres multiplicadores sea constante: Para esto es suficiente multiplicar ambas partes de la igualdad por 4. Obtenemos:

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x)4x.$$

La suma de los multiplicadores es equivalente a

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

a la cantidad constante. Entonces, el producto de estos multiplicadores consigue la mayor cantidad cuando

$$60 - 2x = 4x,$$

de donde

$$x = 10.$$

Entonces el volumen  $v$  alcanza su máximo su máximo. Entonces, la caja saldrá de mayor volumen, si doblamos  $10 \text{ cm}$  de hojalata. Este mayor volumen es  $40 \cdot 40 \cdot 10 = 16.000 \text{ cm}^3$ . Doblando sobre un centímetro menos o más, nosotros en ambos casos disminuimos el volumen de la caja. Es cierto,

$$\begin{aligned} 9 \cdot 42 \cdot 42 &= 15900 \text{ cm}^3, \\ 11 \cdot 38 \cdot 38 &= 15900 \text{ cm}^3, \end{aligned}$$

como vemos, es menos de  $16.000 \text{ centímetros cúbicos}^3$

---

<sup>3</sup> 1 Solucionando este problema, encontraremos que con la anchura  $a$  de la hoja cuadrada necesita, para obtener la caja de mayor volumen, doblar las barras con anchura de  $x = a/6$ , porque el producto

$$(a - 2x)(a - 2x)x, \text{ o } (a - 2x)(a - 2x)4x - \text{ es el mayor sobre } a - 2x = 4x$$

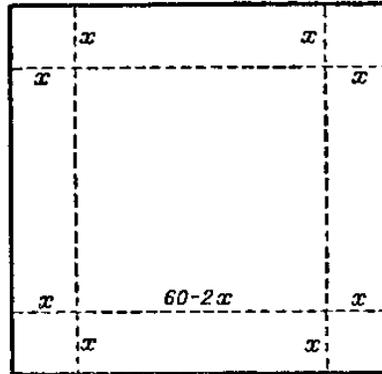


Figura 183. Solución de problema del hojalatero

[Volver](#)

## 12. Problema del tornero

### Problema:

A un tornero le han dado un cono y le han encargado de tornear un cilindro, gastando la menor cantidad del material (figura 184). El tornero comenzó meditar sobre la forma del cilindro buscado: haciendo mas alto, pero estrecho (figura 185, a la izquierda), o al contrario, ancho, pero más bajito (figura 185, a la derecha). Al final no pudo resolver el problema. ¿Cómo debería actuar el tornero?

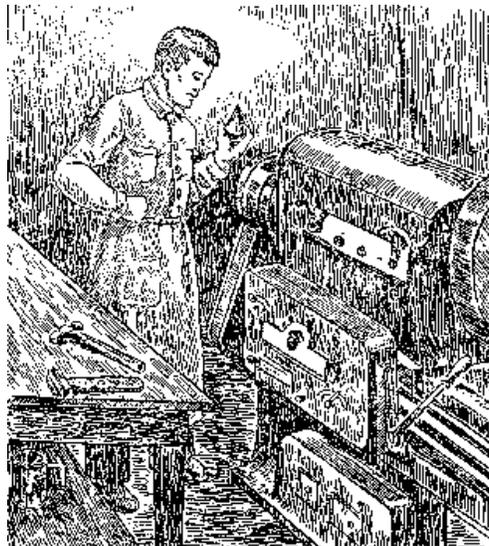


Figura 184. Problema del tornero

### Solución

La tarea necesita atención geométrica. Sea bien  $ABC$  (figura 186), es la sección cónica,  $BD$  - es su altura, la que llamaremos  $h$ ; El radio de su base  $AD = DC$  le llamaremos  $R$ . El cilindro, que podamos tornear del cono, tiene la sección  $MNOP$ . Encontraremos, a qué distancia  $BE = x$  del vértice  $B$  debe de estar la base encima del cilindro, para que su volumen fuere el mayor.

El radio del cilindro ( $PD$  o  $ME$ ) es fácil de encontrar a través de proporción

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \text{ es decir } \frac{r}{R} = \frac{x}{h}$$

de donde

$$r = \frac{Rx}{h}$$

La altura  $ED$  del cilindro  $h - x$ . Por lo tanto su volumen es

$$v = \pi \left( \frac{Rx}{h} \right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h^2} (h - x)$$

de donde

$$\frac{vh^2}{\pi R^2} = x^2 (h - x)$$

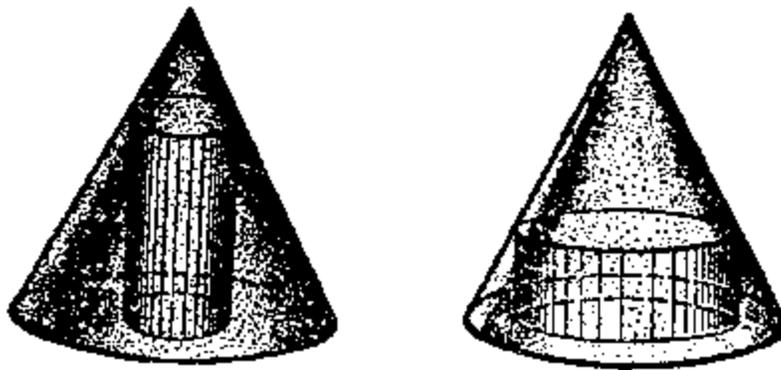


Figura 185. De un cono es posible tornearse un cilindro alto pero estrecho, o ancho pero bajo. ¿En qué caso se gastará menos material?

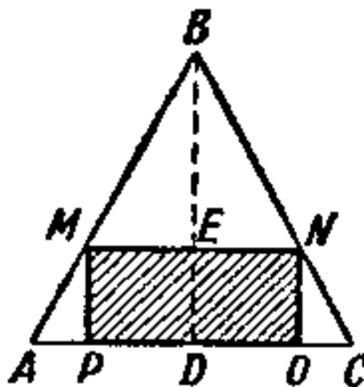


Figura 186. Sección cónica y cilíndrica

En la expresión  $\frac{vh^2}{\pi R^2}$ , las cantidades  $h$ ,  $\pi$  y  $R$  son constantes y solamente  $v$  es la cantidad variable. Deseamos encontrar aquel  $x$ , con el cual  $v$  se hace el mayor. Pero, evidentemente, que  $v$  será mayor en el mismo tiempo con  $\frac{vh^2}{\pi R^2}$ , es decir con  $x^2 (h - x)$ .

¿Cuándo será mayor esta última expresión? Aquí tenemos a los tres multiplicadores variables  $x$ ,  $x$  y  $(h - x)$ . Si su suma fuera constante, entonces el producto sería mayor,

cuando los multiplicadores sean equivalentes entre si. Esta constancia de la suma es fácil de conseguir, si ambas partes de la última igualdad la multiplicamos por 2. Vamos a ver que obtendremos:

$$2 \frac{vh^2}{pR^2} = 2x^2(h - x)$$

Ahora tres multiplicadores de la parte derecha tienen la suma constante

$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$

Por lo tanto, su producto será el mayor, cuando todos los multiplicadores son equivalentes, es decir

$$x = 2h - 2x$$

$$x = 2h/3$$

Luego la expresión  $\frac{vh^2}{pR^2}$  sería mayor con ella el volumen del cilindro  $v$  también sería mayor.

Ahora sabemos, como tendría que ser torneado el cilindro: su base encima tiene que distar desde la cima,  $2/3$  de su altura.

[Volver](#)

### 13. ¿Cómo se prolonga una tabla?

A veces en un taller o en casa, cuando queremos preparar una u otra cosa, las medidas del material, que tenemos a mano no coinciden a las que necesitamos.

Entonces tenemos que cambiar las medidas del material con un tratamiento, que le corresponda, y podamos conseguirlo con ayuda de viveza geométrica y del calculo.



Figura 187. Como se alarga una tabla por el medio de tres cortes y una encoladura.

Imaginen un caso: Uds. para preparación de un estante para los libros necesitan una tabla de las medidas definidas, exactamente 1 m de longitud, 20 cm de ancho, pero Uds. tienen una tabla de menor longitud, pero más ancha: Por ejemplo, 75 cm de longitud y 30 cm de anchura (figura 187 a la izquierda).

¿Cómo vamos a actuar?

Es posible que a lo largo de esta tabla podamos cortar un listón de tres trozos iguales con longitud de 25 cm cada una y con dos de ellas alargar la tabla (figura 187 abajo).

Esta solución de problema no es ahorrible de punto de vista de cantidad de operaciones (tres cortes y tres pegas) y no responde a las exigencias de solidez (allí donde las tabletas están pegadas a la tabla).

**Problema:**

Encontrar un modo de prolongar una tabla dada por medio de tres cortes y solamente una encoladura.

**Solución.**

Tenemos que aserrar la tabla (figura 188)  $ABCD$  diagonalmente ( $AC$ ) y acercar una mitad (por ejemplo,  $ABC$ ) a lo largo de diagonal paralelamente a si mismo sobre cantidad  $C_1E$ , igualmente a la longitud faltante, es decir 25 cm; La longitud total de las dos mitades será equivalente a 1 m. Ahora estas dos partes hay que pegar sobre la línea  $AC_1$  y los que sobra (los triángulos sombreados) hay que cortarlos.

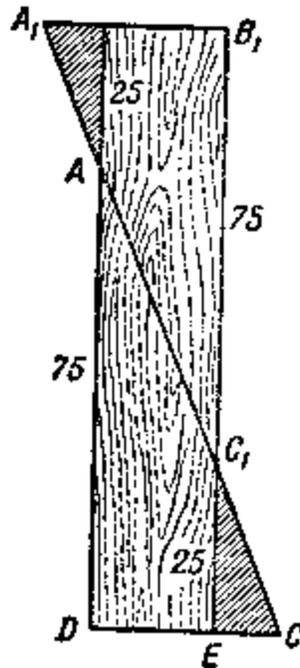


Figura 188. Solución de un problema sobre la prolongación de una tabla

En realidad por la semejanza de los triángulos  $ADC$  y  $C_1EC$  tenemos:

$$AD : DC = C_1E : EC$$

de donde

$$EC = \frac{DC}{AD} \times C_1E$$

$$EC = \frac{30}{75} \times 25 = 10 \text{ cm}$$

$$DE = DC - EC = 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$

[Volver](#)

#### 14. Un camino más corto

Resumiendo vamos a ver como se soluciona un problema sobre «máximo y mínimo», con ayuda de una simple construcción geométrica.

##### Problema:

En la orilla de un río necesita construir un deposito de agua, desde el que agua correría por tuberías a los pueblos A y B (figura. 189).

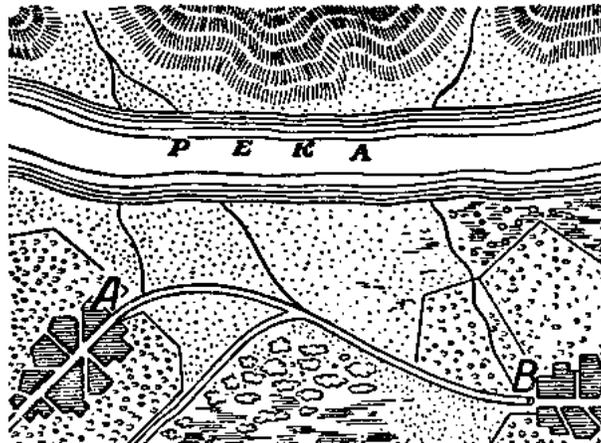


Figura 189. Para el problema sobre deposito de agua.

¿En que sitio hay que construir, para que la longitud total de las tuberías desde el deposito hasta ambos pueblos sea la mínima?

##### Solución

El problema tiene su expresión en búsqueda del camino mas corto desde el punto A hasta orilla y luego hasta el punto B.

Supongamos, que el camino buscado es ACB (figura 190). Doblaremos el dibujo sobre CN. Obtendremos el punto B'. Si el ACB es camino mas corto, entonces, como  $CB' = CB$ , el camino ACB' tendrá ser mas corto de cualquier otro (por ejemplo, de ADB').

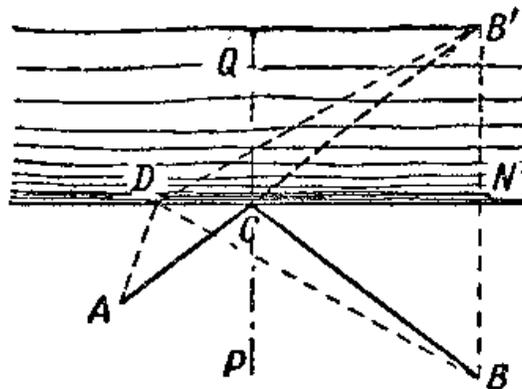


Figura 190. La solución geométrica de un problema sobre elección del camino más corto.

Entonces, para la búsqueda del camino mas corto tenemos que encontrar un punto  $C$  de intersección de una recta  $AB$  con la línea de la orilla. Luego, uniendo  $C$  con  $B$ , encontraremos ambas partes del camino mas corto desde el  $A$  hacia el  $B$ . Pasando en el punto  $C$  una perpendicular hacia  $CN$ , es fácil de ver, que los ángulos  $ACP$  y  $BCP$ , formados por ambas partes del camino más corto con esta perpendicular, son equivalentes entre sí

$$\angle ACP = \angle BCP = \angle BCP$$

Eso es, como sabemos, la Ley de un rayo de la luz, el que se refleja en un espejo: Ángulo de incidencia es equivalente al ángulo de reflexión. De aquí se deduce, que un rayo de luz, reflejado elige el camino *más corto*, la conclusión conocida hace dos mil años, por un físico y geómetra, quien se llamaba Herón de Alejandría.

[Volver](#)