У.Гибсон, Б.Поллард

ПРИНЦИПЫ СИММЕТРИИ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Дана полная и современная картина основных принципов симметрии— вращение, лоренц-преобразование, четность, унитарная симметрия. Книга написана достаточно просто. В ее основе лежит курс лекций для аспирантов, который авторы несколько лет читали в. Бристольском университете, Великобритания. Изложение каждого вопроса начинается от установления основных принципов и заканчивается конкретными применениями.

Книга предназначена для физиков, занимающихся изучением атомного ядра и элементарных частиц, студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей, преподавателей вузов, Она будет полезна также тем математикам и физикам, которые интересуются применением общих принципов симметрии.

Содержание

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	6
Глава 1. Введение в физику элементарных частиц	7
§ 1.1. Перспективы	7
§ 1.2. Частицы	7
§ 1.3. Виды взаимодействий	9
§ 1.4. Законы сохранения	10
Глава 2. Квантовая механика и принципы инвариантности	**12**
§ 2.1. Принципы квантовой механики	12
§ 2.2. Принципы инвариантности и сохраняющиеся величины в квантовой механике	20
§ 2.3. Трансляционная инвариантность	28
Глава 3. Момент количества движения	**32**
§ 3.1. Элементарная квантовая механика момента количества движения	32
§ 3.2. Матричные элементы операторов момента количества движения	37
§ 3.3. Инвариантность относительно вращений	42
§ 3.4. Представление конечных поворотов	47
§ 3.5. Векторное сложение моментов количества движения	56
Глава 4. Лоренц-инвариантность	**64**
§ 4.1. Преобразования Лоренца и алгебра четырехмерных векторов	64
§ 4.2. Релятивистская кинематика	68
§ 4.3. Лоренцева инвариантность в квантовой механике. Бесспиновые частицы	70
§ 4.4. Частицы со спином	77
§ 4.5. Безмассовые частицы	80
§ 4.6. Разложение двухчастичных спиральных состояний по собственным состояниям момента количества движения	83
§ 4.7. Анализ двухчастичного рассеяния в терминах парциальных волн	88
§ 4.8. Пион-нуклонное рассеяние	90
§ 4.9. Двухчастичные распады	97
§ 4.10. Другие свойства спиральных состояний относительно	103

преобразований Лоренца
Глава 5. Четность **110**
§ 5.1. Элементарная теория оператора четности 111
§ 5.2. Четность в атомной и ядерной физике 117
§ 5.3. Четность в физике элементарных частиц 122
§ 5.4. Пространственная инверсия и описание спиральности 126
§ 5.5. Определение внутренних четностей 136
§ 5.6. Нарушение четности в слабых взаимодействиях 147
§ 5.7. Проверка закона сохранения четности 158
§ 5.8. Слабые нейтральные токи и нарушение четности в атомах (дополнение к русскому изданию) 160
Глава 6. Обращение времени **162**
§ 6.1. Обращение времени в классической механике 162
§ 6.2. Обращение времени в нерелятивистской квантовой механике 164
§ 6.3. Обращение времени и спиральность 174
§ 6.4. Следствия из инвариантности относительно обращения времени 180
§ 6.5. Проверка инвариантности относительно обращения времени в сильных взаимодействиях 186
§ 6.6. Проверка инвариантности относительно обращения времени в электромагнитных взаимодействиях 190
§ 6.7. Проверка инвариантности относительно обращения времени в слабых взаимодействиях 192
Глава 7. Зарядовая независимость, изотопический спин и странность **194**
§ 7.1. Факты, свидетельствующие о зарядовой независимости сильных взаимодействий 194
§ 7.2. Понятие изоспина 195
§ 7.3. Законы сохранения изоспина 199
§ 7.4. Применение закона сохранения изоспина к странным частицам 201
§ 7.5. Пион-нуклонное рассеяние 203
§ 7.6. Группа изоспиновой инвариантности — группа $SU(2)$ 20S
Глава 8. Зарядовое сопряжение **208**
§ 8.1. Симметрия относительно зарядового сопряжения 208
§ 8.2. Проверка инвариантности относительно зарядового сопряжения 210
§ 8.3. Инвариантность относительно CP 213
§ 8.4. CPT-инвариантность 216
§ 8.5. Нарушение CP-инвариантности 221
Глава 9. Адронные распады мезонов **227**
§ 9.1. G-четность 227
§ 9.2. Обобщенный принцип Паули 229
§ 9.3. Нормальный и аномальный операторы C 230
§ 9.4. Конечные состояния 231
§ 9.5. Реально существующие мезоны 232
Глава 10. $SU(3)$-симметрия **233**
§ 10.1 Понятие высшей симметрии 233

§ 10.2. Консервативный подход к $SU(3)$ 237
§ 10.3. Супермультиплеты $SU(3)$ 242
§ 10.4. Размещение частиц и резонансов по супермультиплетам $SU(3)$ 255
§ 10.5. Нарушенная симметрия: массовые формулы и перемешивание состояний 258
§ 10.6. Распады декуплетов 266
§ 10.7. Коэффициенты Клебша — Гордана для $SU(3)$-симметрии 269
§ 10.8. Электромагнитные эффекты в $SU(3)$ 275
Глава 11. Модель кварков **280**
§ 11.1. Кварки 280
§ 11.2. Кварковая модель мезонов 282
§ 11.3. Кварковая модель барионов 285
§ 11.4. Введение спина в кварковую модель: $SU(6)$ 291
§ 11.5. Магнитные моменты барионов 307
§ 11.6. Очарование и SU (4) (дополнение к русскому изданию) 309
§ 11.7. Свободные кварки 311
§ 11.8. Дальнейшие исследования 312
Приложение А. Сечения и элементы $\mathcal{T}$-матрицы 313
§ А.1. Определение сечения 313
§ А.2. Вероятность перехода в релятивистском случае 314
§ А.3. Взаимный поток 315
§ А.4. Сечение 316
§ А.5. Скорости распада 317
Приложение Б. Описание поляризации с помощью матрицы плотности 318
§ Б.1. Определение матрицы плотности 318
§ Б.2. Матрица плотности для спина 1/2 320
§ Б.3. Обобщения 323
§ Б.4. Матрица плотности и рассеяние 323
Приложение В. Изоспин и фазовые условия для $SU(3)$ 324
§ В.1. Фазовые условия для изоспина и зарядового сопряжения 324
§ В.2. G-четность 328
§ В.3. Фазовые условия в $SU(3)$ 329
Приложение *Г*. Коэффициенты Клебша— Гор дана для 8X8 331
Список литературы 333
Дополнение к русскому изданию 337
Алфавитно-предметный указатель 338

Алфавитно-предметный указатель

Адрон 9
Аксиальный вектор 115
Активная интерпретация преобразования 22, 42, 73, 105
Алгебра Ли 235
Амплитуда вероятности 14, 18
Амплитуды парциальных волн 96
— перехода 31, 90, 170
— реакции 16
Анализ по парциальным волнам 88
Анализ Эдера 100
Антинейтрино 150, 151; см. также Нейтрино
Антиунитарный оператор 168—217

Асимметрия лево-право 143, 189
Ассоциированное рождение 201
Базис 13
Бозон 9
Барионные резонансы в кварковой модели 294-303
— — в схеме $SU(3)$ 255-257
Барионное число 199—203
— — и группа $SU(3)$ 238
— — и зарядовое сопряжение 208, 227
— — и модель Сакаты 252
— — и обобщенный принцип Паули 230
Безмассовые частицы, квантовое описание 73
Бета-распад и несохранение четности 149
— кварков 311
— симметрии 217
Бра-вектор 15
Буст 67, 105
Валентные кварки 311
Вектор поляризации 320
Вес 242—253, 269—271
Весовая диаграмма 242
Взаимодействие гравитационное 10
— сверхслабое 221
— сильное 10, 11
— слабое 10, 11
— очень сильное 258
— умеренно сильное 258, 279
— электромагнитное 10, 11
— в конечном состоянии 171, 183, 220
Вигнеровское вращение 103—108
Волновая функция в импульсном пространстве 31, 315
Восьмеричный путь 236; см. также Группа $SU(3)$
V-спин 242—252
Вырожденное собственное значение 13
Генератор 27, 30
Гиперзаряд 11, 202, 203, 229
— в схеме $SU(3)$ 239, 250, 252, 253, 255, 264
Гипотеза аддитивности 300
Гиромагнитное отношение 221
Глобальная симметрия 234
Гравитационное взаимодействие 10
Группа, аксиомы 25
— вращений 53
— дискретная 26
— Лоренца неоднородная 71
— непрерывная 26, 27
— перестановок 290
— представление 26, 54, 71, 242
— Пуанкаре 71
— $SU(2)$ 203—207, 294, 298
— $SU(3)$ 15, 21, 32, 205, 233-285, 313-317
— $SU(6)$ 291, 293, 300
— теория 52
G-четность 11, 28, 227, 228
— в распадах мезонов 212, 227—232
Двойное рассеяние протона на ядре 158
Двузначность спиновых волновых функций 52
Декуплет барионов 3/2+ 266
— в кварковой модели 289
— в схеме $SU(3)$ 255
— массовая формула 263—291
— распады 266
— фогорождение 278
Детального равновесия принцип 181
— — проверка 186, 187
d-функции определение 49
— свойства 56, 57
D-функции 49—52, 54—56
Единичный оператор 17, 26
Загадка τ—θ 147

Закон параллелограмма 279
Законы сохранения вероятности 18, 94
— — изоспина 201
— — лептонного числа 150
— — момента количества движения 45
— — четырехмерного импульса 69
Зарядовая независимость 194, 199, 200
Зарядовая симметрия 194
Зарядовое сопряжение 12, 21, 27, 208—225
— — и CPT 216—218
— — и G-четность 227, 228, 329, 330
— — оператор 208, 209, 325, 328
— четность 208, 209, 295
— — нормальная и аномальная 230
Зеркальное отражение 125, 148, 149
Зеркальные ядра 194
Изоскалярный фактор 272
Изоспин 12, 15, 21, 32, 194—207
— в схеме $SU(3)$ 240—243, 259—263
Изотопическая четность 227; см. также G-четность
Инвариантность относительно вращений 46
— — — в гамильтониане 46
— — — оператора рассеяния 46
Инвариантность относительно обращения времени проверка: в электромагнитном взаимодействии 190, в слабых взаимодействиях 192
— — — — в процессах первого порядка 172—174
— — — — в процессах рассеяния 169—173
— — — — в реакциях 178
— — — — в реакциях частиц спина 0
— — — — с частицами спина 1/2 179
— — — — в πN-рассеянии 179
Инвариантность относительно трансляции во времени 27
Инвариантное подпространство 54
Интервал 66
Интеграл перекрытия 13, 15, 76, 77
Каноническое преобразование 116
Квантовая теория поля 20
Квантовая электродинамика 173, 176, 190, 211
Кварк 229, 230, 236, 280—312
— экспериментальные факты 33
— свободный 311
Кварковая модель симметричного осциллятора для барионов 300—303
Кет-вектор 15
Комптоновская длина волны 10, 11
Коэффициенты векторного сложения 58; см. также Момент количества движения
— Клебша—Гордана для группы $SU(3)$ 269—275
— — — — применение 273
— — — — расчет 271
— — — — таблицы для 8X8 331, 332
Кратность веса 242, 247
K^0_1 и K^0_2 214
K_L и K_S 223
$K^{\pm}_{l_4}$-распады 220
Лэмбовский сдвиг 211
Лептой 10, 11, 150, 151, 221
Лептонный распад K-мезона 220, 222, 223
Лептонное число 12, 150
Лоренцев скаляр 65
Магнитный (дипольный) момент 211, 220, 221
— — барионов в схеме 5f/(3) 275—279

— — электрона 221
— — μ-мезона 221
Магнитное дипольное излучение 121
Массовая формула Гелл-Мана—Окубо 234, 263, 264, 283
— Коулмана — Глешоу 279
Матричный элемент 20, 31
Матрица плотности 155, 188
— — применения 140—142, 151—157, 187-189
— — общий формализм 318—324
Мезонные резонансы в модели кварков 281—284, 293—295
— — в схеме *SU*(3) 257, 258, 264—266
Минимальная электромагнитная связь 275, 278
Модель Сакаты 235, 239, 252
Момент количества движения 231
— — — векторное сложение 56—62
— — — инвариантность относительно вращений 27, 42—46, 205
— — — коэффициент Клебша—Гордана 56—62
— — — матричные элементы 40—42
— — — полный 36, 37
— — — симметрия 142—232
— — — сохранение 45—49
— — — спин 35, 36
— — — собственные значения 37—40
Модель Ферми—Янга 235
Мультиплет по моменту количества движения 34, 40
Мультиплетное излучение 117, 118, 120—122
μ-Мезон 10, 148—152, 221
Наблюдаемые 13
— полный коммутирующий набор 38
Нарушенная симметрия 257
Нарушение симметрии, гипотеза 259
— — в модели кварков 290
— — в схеме *SU*(3) 280
Нейтральный *K*-мезон 212—216, 219—221, 226
Нейтрино 10, 12, 82, 148—152, 213
— и нарушение четности 149, 150
— и CP-преобразование 213
— определение спиральности 152
Несохранение четности 225, 217
— — в β-распаде ^{60}Co 148
— — в распаде Λ° 125
— — в распаде μ-мезона 148
— — в распаде π-мезона 148
— — и нейтрино 135, 136, 149
— — эксперименты 124, 148
Неприводимое подпространство 54
Неприводимое представление 55
— — группы *SU*(3) 241
Неприводимый супермультиплет 241
Нормировка спирального состояния 76, 77, 87, 88
— на δ-функцию 76
— сферических гармоник 34
— волновых функций 13
Нормальная четность 230
Нуклон-нуклонные силы, зарядовая независимость 199—201
— — — несохранение четности 121, 139, 160
Обращенное во времени движение 162
Обращение времени 24, 162—193
— — в классической физике 162, 164
— — для безмассовых частиц 180

— — оператор 167—169
— — преобразование спирального состояния 174
— — преобразование для бесспиновых частиц 164
— — — частиц со спином 1/2 166
Обобщенный принцип Паули 197, 229, 273, 274
Обращение времени оператора 167
Октетная модель 236; см. также Группа $SU(3)$
ω-Мезон 232, 233
— в модели кварков 282—284
— в схеме $SU(3)$ 257, 264, 265
ω-φ-Смешйвание 264, 274
— — в модели кварков 284
Ω-Гиперон 257, 289, 290
Оператор антилинейный 167
— антиунитарный 167, 217
— гамильтониан 16—20, 26, 27
— единичный 17, 18
— импульса 15
— поворота 44, 45
— положительный полуопределенный 38
— перехода 19, 88, 108, 116, 136, 172, 173, 186, 266, 274, 278, 314
— унитарный 21—30
— эрмитов 13, 14, 26, 27
— — для момента количества движения 37—39
— — для изоспина 196, 240, 241
— — для U — спина 239—241
— — для V — спина 240, 241
Ортогонализация по Шмидту 14
Ортогональная матрица 52
Относительная четность Σ—Λ 144
Параметры A и R 143
Пассивная интерпретация преобразования 22, 43, 103
Позитроний 16, 209, 210
Полнота 22
— d-функций 56
Полный ортонормированный набор 13, 17
Полярный вектор 115
Поляризация 89, 140, 154, 160, 187—190, 191
— нейтронов 122
— нуклонов в распаде гиперона 155
— описание с помощью матрицы плотности 318—324
— параметры A и R 143
— циркулярная γ-излучения 121, 135
— эксперименты по определению четности 139-143
Правило $|\Delta I|=1/2$ 184, 311
— Лапорта 111, 117, 119
Представление группы вращений, 54, 55
Преобразование зарядового сопряжения 208
— инфинитезимальное 26—28
—каноническое 116
— координат 21—23
— Лоренца 21, 24, 63—69
— обращения времени 174
— симметрии 23—26
— $SU(3)$ 235-237
— четности 22, 26, 111—114, 127
— — оператора 114
— — состояния спиральности 127—130
— — состояния частицы 127—130
— — состояния фотона 135
Принцип суперпозиции 13, 31
— Паули 197
— — обобщенный 197, 229, 273, 274
Процесс первого порядка 172, 179—180
Псевдовектор 115
Псевдоскаляр 115, 118

Равенство поляризация—асимметрия в рассеянии частиц спина 1/2 на частицах спина 0 143
— — —в рассеянии частиц спина 1/2 на частицах спина S 187
Распад двухчастичный 96—99
— декуплета 266—269
— гиперона 152—158, 182, 193, 220
— скорости и элементы $\mathcal{S}$-матрицы 317— 318
— $\pi^{\pm}$-мезонов 148—151, 211
— и зарядовое сопряжение 209
— $\Sigma^{\pm}$ 158
— $\Sigma \to \Lambda^{\circ}\gamma$ 144
— π°-мезона
— в схеме $SU(3)$ 278
Распады гиперонов (нелептонные) 153— 158, 182—184, 193, 220
— декуплета 266—269
Рассеяние 16, 31
— оператор 17—20, 108, 169, 182
— S-матрица
— с обменом зарядом 203—205
— π-мезонов на нуклоне 90, 203—205
Регенерация 215
Релятивистская кинематика 69, 70
Ряд Клебша—Гордана для группы $SU(3)$ 269—272
ρ-Мезон 232, 233
Связанное состояние 16
Связь барионов с мезонами в схеме $SU(3)$ 333
Сечения и элементы ρ-матрицы 313—317
Сильное взаимодействие 10, 11
— — инвариантность относительно обращения времени 173, 186—190, 229
— — сохранение четности 136, 159, 161, 217
— — сохранение G-четности 229, 232
— — C-инвариантность 209, 210, 217
Симметрия лево—право 189
— оператор 26
— перестановочная 287—289
— преобразования 23, 26, 27
Симметризаторы Юнга 289
Скамер истинный 115
— лоренцев 65
— псевдо 115
Скалярное произведение четырехмерных векторов 69
Слабые взаимодействия 9, 11, 124, 149, 172
— — нарушение J-инвариантности 192, 217
— — несохранение C 211—214, 217
— — несохранение G-четности 229
— — несохранение четности 109, 122, 161, 217
Следствие из инвариантности относительно зарядового сопряжения 208—210, 229—232
— — — в позитронием распаде 209
— — — нарушение в слабых взаимодействиях 211
— — — справедливость: в электромагнитных взаимодействиях 211; в сильных взаимодействиях 210, 211
Случайное вырождение 34
Смешивание частиц векторных мезонов 264, 274, 284
— масс 264
— мезонов со спином 2, 266
— — псевдоскалярных мезонов 266, 284
Событие 63
Соотношение унитарности Белла—Штейнбергера 226
Сопряженный супермультиплет

257
Сохранение четности 98, 99, 116—125
— — в распадах 98, 130
— — в реакциях 114—118, 130—135
— — в электромагнитных взаимодействиях 161
— — в πN-рассеянии 92
— — проверка: в атомной физике 119
— — в ядерной физике 120; в сильных взаимодействиях 159
Спин 16, 35
— безмассовых частиц 82
— и статистика 7, 304
— релятивистских частиц 77
Спиральность 78—80
— оператор 79
— система отсчета 80, 81
Спиральные амплитуды для распадов 97
— — для рассеяния 89
— — π-мезона на нуклоне 90, 91
Спиральные состояния двух частиц 83, 84
— — лоренц-преобразование 102, 105
— — нормировка 76, 77, 87, 88
— — одной частицы 77—79
— — преобразование четности 126—130
— — преобразование обращения времени 174-178
— — фотона 83
— — преобразование четности 174
Среднее значение 23
Старший вес 245
Статистика 99, 130, 151
— Бозе—Эйнштейна 7, 99, 307
— пара-ферми 304
— Ферми—Дирака 7, 99, 151, 302
Странность 11, 202, 203
— в модели Сакаты 235
— в схеме *SU*(3) 236, 263
— и зарядовое сопряжение 227, 228
— мезонов 212, 232
Супермультиплет 233, 240
—сопряженный 257
Сферические гармоники 33, 35
— — четность 111
Схема *LS*-связи 100
Схемы Юнга 288
S-матрица 16—20, 83, 94, 181
— и сохранение импульса 31
— и сохранение момента количества движения 47
CP 212—216, 221—225
— инвариантность 213
— нарушение 192, 193, 221—226
— оператор 212
— собственное значение 212, 214, 230
CPT 216—221
— оператор 217
— теорема 136, 192, 193, 216
CPT-инвариантность в распаде нейтральных *K*-мезонов 225, 226
— и времена жизни частицы—античастицы 218
— и магнитные моменты 220, 221
— и массы частиц—античастиц 217, 257, 263
— и процессы первого порядка 220
— справедливость: в электромагнитных и сильных взаимодействиях 219
Теория Кабиббо 279—311
Теорема взаимности 172, 180, 181
— о конечном состоянии 182, 183
— об отражении 243
— о сдвиге 242

— о старшем весе 245
— Эйлера 53
Трансляционная инвариантность 24, 28. 31
Г-матрица; см. Оператор перехода
Угол перемешивания 265
Углы Эйлера 48
Умеренно сильное взаимодействие 257—279
Унитарность оператора рассеяния или
S-матрицы 18, 94, 182
Унитарное представление 26, 54, 71, 76, 77, 241, 242
— преобразование 21, 26, 43, 76, 77
Унитарная симметрия; см. Группа *SU*(3)
Уравнение Дирака 70, 263
— Клейна—Гордона 70, 263, 315
— Шредингера 16, 28 £/-
спин 236-1254, 259-267
Фазовые сдвиги 95
Фактор неупругости '95
Фермион 7, 10, 11, 229
Формула Гелл-Мана—Нишиджимы 202, 229
Фоторождение 184
— в схеме *SU*(3) 278
φ-мезон 232, 233
φ—ω-смешивание 264, 274
— в модели кварков 284
Характерные состояния в схеме SU(3) 247-249
Четность 11, 27, 109—161, 209
— аномальная 204
— бариона 256, 257
— безмассовых частиц 135
— внутренняя 121
каскадного гиперона 147
— заряженного π-мезона 137
— — — определения 136
— *K*-мезона 147
— нейтрального π-мезона 137
— Σ-гиперона 147
— Ω -гиперона 147
— фотона 136
— странных частиц 139 .
— инвариантность; см. Сохранение четности
— мезонов 230—232, 257, 295
— нормальная 230
— оператор 112, 113
—состояния 113
Четырехмерный вектор 68
— импульс 70
—скорость 69
Экзотические состояния 290
Электрон-протонное рассеяние 191
Электрический дипольный момент и инвариантность относительно обращения времени 184—186
— — — и сохранение четности 118, 160
— — —нейтрона 184, 185
— — — перехода 118
— — — статический 118
— — — электрона 185
Электрическое дипольное излучение 120
Электромагнитное взаимодействие в модели кварков 307
— — и группа *SU*(3) 275—279
— — и инвариантность относительно обращения времени 190—192
— — и изотоп-спин 200, 257
— — и *G*-четность 229
— — и зарядовое сопряжение 209, 211, 21Т
— — и сохранение четности 117—122, 161
— — и фотоны 83
Эрмитов оператор 13, 14, 26, 27
Эрмитово сопряжение 14
Эффект Зеемана 258
— Штарка 119

η–мезон 232, 233
— в смешивании с η' 266—284
— в схеме *SU*(3) 234, 256
η—>γγ-Распад 278

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

С момента выхода в свет английского издания этой книги в физике элементарных частиц произошло много волнующих событий. Мы воспользовались возможностью, появившейся при подготовке русского издания, и добавили ряд замечаний, связанных с цветом и очарованием в модели кварков (см. гл. 11) и с последними экспериментами по проверке сохранения четности в атомной физике (см. гл. 5), постановка которых была стимулирована едиными калибровочными теориями слабых и электромагнитных взаимодействий.

У. М. Гибсон
Б. Л. Поллард

Бристоль, ноябрь 1977 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение элементарных частиц и их взаимодействий привело к рассмотрению симметрий и различных соотношений, которые в последнее время стали объектом исследования. В этой книге сделана попытка сформулировать принципы симметрии элементарных частиц и законы сохранения, из них вытекающие, как ряд общих физических принципов, выраженных в простейших подходящих математических терминах. Мы старались избежать математического углубления в более абстрактные аспекты предмета, в частности не использовали явно формальный аппарат теории групп. По той же причине опущены все описания экспериментальных методов, с помощью которых получены обсуждаемые результаты.

Уровень такой книги должен удовлетворить тех студентов, изучающих физику элементарных частиц, которые будут искать точное, но не слишком абстрактное объяснение принципов, обычно рассматриваемых в литературе по данному вопросу. Надеемся, что многие из наших читателей не остановятся на этом и обратятся к специальной литературе.

При написании книги мы в основном придерживались лекций, прочитанных в Бристоле для аспирантов, в результате чего углубилось и расширилось наше собственное понимание и объяснение материала.

Благодарим наших многочисленных коллег и друзей, в дискуссиях с которыми в течение нескольких лет рождалось объяснение наиболее трудных проблем. Мы весьма признательны мисс Элме Доуэс, мисс Маргарет Джеймс, мисс Энн Лав и миссис Нэнси Торп, которые печатали наши труды, а также доктору Дж. В. Алкоку за ценные указания и всему штату редакции издательства Кембриджского университета за помощь на всех этапах подготовки книги.

У. М. Гибсон
Б. Р. Поллард

Бристоль, август 1974 г.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 1.1. ПЕРСПЕКТИВЫ

Область физики, которой посвящена эта книга, известна как физика элементарных частиц, или физика высоких энергий; в последнее время к этим названиям добавилось еще название субъядерной физики.

В этих определениях, являющихся почти синонимами, отражена необходимость исследования основных компонент материи, использования для изучения внутреннего строения материи частиц высоких энергий, а также необходимость проводить исследования за пределами атомов и ядер.

Во многих учебниках, посвященных этой области, описаны элементарные частицы и их свойства, от хорошо известных до пока не завершенной теории фундаментальных взаимодействий. В этой книге объектом исследования являются не сами частицы, а принципы симметрии и законы сохранения, которым эти частицы подчиняются. Понимание этих законов и принципов, естественно, идет от экспериментального изучения реальных частиц. Поэтому, разрабатывая сугубо математический аппарат принципов симметрии и законов сохранения, надо все время проверять его действие результатами наблюдений.

§ 1.2. ЧАСТИЦЫ

Чисто эмпирически элементарные частицы можно классифицировать соответственно их массам, а именно барионы с массой того же порядка, что и протон, лептоны с небольшой или нулевой массой покоя и мезоны с промежуточной массой. Однако не масса, а другие свойства могут привести к более фундаментальной классификационной схеме. Прежде всего это спин и статистика: важную роль здесь играет различие между частицами с полуцелым спином, подчиняющимися статистике Ферми — Дирака, и частицами с нулевым или целым спином, подчиняющимися статистике Бозе — Эйнштейна. Первые из упомянутых выше частиц известны как фермионы, они могут рождаться только парами с соответствующими античастицами, так что общее число фермионов данного типа сохраняется (см. § 1.4). Не объясненным пока остается тот экспериментальный факт, что все фермионы имеют отличное от нуля барионное или лептонное число и отли-

чаются от своих античастиц противоположным значением этих чисел. С другой стороны, число рожденных бозонов ограничено лишь косвенно другими законами сохранения. Например, протон-нейтронное рассеяние при высокой энергии может сопровождаться рождением одного, двух, трех и более пионов. Все барионы и лептоны являются фермионами, а все сильно взаимодействующие мезоны — бозонами. Мюон, отнесенный сначала из-за своей массы к мезонам, с учетом спина 1/2 и слабого взаимодействия (см. ниже) классифицируется теперь как лептон.

Как отмечалось выше, частицы можно классифицировать по природе их взаимодействия. Это приводит к группе барионов и мезонов, объединенных в группу адронов (с учетом того, что они являются сильно взаимодействующими частицами, см. § 1.3), в то время как лептоны остаются вне этой группы как слабо взаимодействующие и легкие частицы.

В табл. 1.1—1.3 перечислены все известные в настоящее время частицы, отвечающие изложенным выше принципам. Здесь же указаны значения квантовых чисел, которые рассматриваются в § 1.4.

Так как электрон и мюон мы рассматриваем как слабовзаимодействующие частицы, то нейтрино (имеющее нулевую массу покоя) классифицируется как лептон, в то время как обладающий

Таблица 1.1

Барионы и антибарионы

Частица	I_3	I	J	P	S	Y	B
N $\begin{cases} p \\ n \end{cases}$	$\begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	1/2	1/2	+	0	+1	+1
Λ^0	0	0	1/2	+	−1	0	+1
Σ $\begin{cases} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{cases}$	$\begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$	1	1/2	+	−1	0	+1
Ξ $\begin{cases} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{cases}$	$\begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	1/2	1/2	+	−2	−1	+1
$\overline{N}$ $\begin{cases} \overline{p} \\ \overline{n} \end{cases}$	$\begin{matrix} -1/2 \\ +1/2 \end{matrix}$	1/2	1/2	−	0	−1	−1
$\overline{\Lambda}^0$	0	0	1/2	−	+1	0	−1
$\overline{\Sigma}$ $\begin{cases} \overline{\Sigma}^+ \\ \overline{\Sigma}^0 \\ \overline{\Sigma}^- \end{cases}$	$\begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$	1	1/2	−	+1	0	−1
$\overline{\Xi}$ $\begin{cases} \overline{\Xi}^+ \\ \overline{\Xi}^0 \end{cases}$	$\begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix}$	1/2	1/2	−	+2	+1	−1

Таблица 1.2

Мезоны ($B=0$)

Частица	I_3	I	G	J	P	C_n	$S=Y$
$\pi+$	$+1$	1	—	0	—	+	0
π^0	0						
$\pi-$	-1						
K^+	$+1/2$	$1/2$		0	—		1
K^0	$-1/2$						
$\overline{K}^0$	$+1/2$	$1/2$		0	—		-1
K^-	$-1/2$						
η	0	0	+	0	—	+	0
$\rho+$	$+1$	1	+	1	—	—	0
ρ^0	0						
$\rho-$	-1						
ω	0	0	—	1	—	—	0
φ	0	0	—	1	—	—	0

Таблица 1.3

Лептоны и антилептоны ($J=1/2$)

Частица	L	Спиральность	Частица	L	Спиральность
e^-	$+1$	$\pm 1/2$	μ^-	$+1$	$\pm 1/2$
ν_e	$+1$	$-1/2$	ν_μ	$+1$	$-1/2$
e^+	-1	$\pm 1/2$	$\mu+$	-1	$\pm 1/2$
$\overline{\nu}_e$	-1	$+1/2$	$\overline{\nu}_\mu$	-1	$+1/2$

нулевой массой покоя фотон приходится выделять в качестве кванта электромагнитного поля в отдельный класс.

§ 1.3. ВИДЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Разные виды взаимодействий между частицами могут характеризоваться значением соответствующей константы связи — безразмерным числом, определяющим как силу взаимодействия, так и типичное значение поперечного сечения для процессов, связанных с этим взаимодействием.

В приписывании разным типам взаимодействия констант связи есть элемент условности, но цель одна — выразить энергию взаимодействия на расстоянии, равном радиусу взаимодействия, в виде доли энергии покоя.

Сильное взаимодействие. При сильном взаимодействии энергию взаимодействия двух частиц, разделенных расстоянием r, можно выразить формулой

$$E = (g^2/r)\exp(-r/a),$$

где g — величина, аналогичная электрическому заряду; a — радиус взаимодействия, выраженный в единицах комптоновской длины волны частицы (на практике это пион) с массой m, т. е. $a = \hbar/mc$. Таким образом, при $r=a$ энергия взаимодействия имеет вид $E=g^2mc/\hbar$, откуда $E/mc^2=g^2/\hbar c\sim 15$. Эта величина и используется обычно в качестве постоянной связи в случае сильного взаимодействия.

Электромагнитное взаимодействие. Сила электромагнитного взаимодействия характеризуется величиной $e^2/\hbar c \simeq 1/137$, известной как постоянная тонкой структуры. Эту величину можно было бы попытаться описать с помощью аргумента, аналогичного использованному выше для сильного взаимодействия. Но так как радиус действия сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния, не определен, приходится говорить, что $e^2/\hbar c$ есть энергия взаимодействия двух электронных зарядов, отстоящих друг от друга на расстояние r, отнесенная к энергии покоя объекта, комптоновская длина которого равна r.

Слабое взаимодействие. Для слабого взаимодействия мы вынуждены воспользоваться тем фактом, что скорость распада определяет размерность силы взаимодействия: $G=1{,}4\cdot 10^{-49}$ *эрг·см*^{3}. Так как радиус взаимодействия неизвестен, то для того чтобы получить безразмерную величину, надо ввести стандартную длину, такую, как комптоновская длина волны пиона или протона ($\hbar/m_pc$). Это приводит к постоянной связи $G/\hbar c(m_pc/\hbar)^2$ порядка 10^{-5} (или $2\cdot 10^{-7}$, если использовать $\hbar/m_\pi c$). В действительности же радиус взаимодействия может быть гораздо меньше, чем $\hbar/m_pc$. В этом случае энергия взаимодействия стала бы больше, чем предполагаемое число 10^{-5}.

Гравитационное взаимодействие. Интересно сравнить три наиболее важных для физики элементарных частиц вида взаимодействия с гравитационным взаимодействием, довольно слабым для того, чтобы иметь какое-то значение в этой области. Обозначим гравитационную постоянную G'. Рассмотрим два электрона, получим численное выражение гравитационной постоянной связи: $G'm^2/\hbar c\sim 10^{-45}$, которое убедительно демонстрирует разницу в порядках величин гравитационных и электромагнитных или ядерных эффектов.

§ 1.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Многие закономерности, наблюдаемые в физике, можно представить в виде законов сохранения, каждый из которых утверждает, что значение некоей величины остается постоянным. Наиболее известны законы сохранения энергии и импульса, справед-

ливые как в квантовой, так и в классической механике. Так же универсальны законы сохранения момента количества движения и электрического заряда. Законы сохранения подобного типа должны отличаться от тех, которые применимы к идеализированным системам, не всегда хорошо аппроксимирующим реальные ситуации. С такими законами встречаются при квантовомеханическом описании взаимодействий между элементарными частицами. Они-то и составят основу при рассмотрении принципов симметрии.

Сначала обратим внимание на квантовые числа отдельных частиц, приведенные в табл. 1.1—1.3. Барионы, которые могут переходить друг в друга, имеют барионное число $B=+1$, а их античастицы — число $B=-1$. Тот факт, что барионы, являясь фермионами, могут рождаться и аннигилировать только в виде пар частица — античастица, выражается законом сохранения полного числа барионов B. Этот закон, по-видимому, всегда должен выполняться.

Другой тип фермионов — лептоны — подчиняется аналогичному, но независимому закону сохранения полного числа. Поэтому припишем частицам e^+, μ^+, ν лептонное число $L=+1$, а частицам e^-, μ^-, $\bar{\nu}$ — лептонное число $L=-1$. Закон сохранения числа лептонов, выражеиный таким образом, справедлив в той же мере, что и закон сохранения числа барионов.

Оказывается, далее, что лептоны и антилептоиы можно разделить на электронные (e^+, ν, e^-, $\bar{\nu}$) и мюонные (μ^+, ν_μ, μ^-, $\bar{\nu}_\mu$), числа которых сохраняются по отдельности. Таким образом, можно рассмотреть отдельио электронные и мюонные лептонные числа и считать, что эти полные числа во всех известных процессах сохраняются отдельно.

Чтобы подсчитать полную четность системы, надо учесть внутреннюю четиость P частиц и четность $P_l=(-1)^l$, обусловлениую орбитальным моментом количества движения l при относительном движении частиц. Закон сохраиения полной четности справедлив для процессов, обусловленных сильным ядерным или электромагнитным взаимодействием, ио нарушается при слабом взаимодействии.

В последующих главах рассмотрены такие квантовые числа, как I (изоспин), C (зарядовое сопряжение), G (G-четность), а также S (странность) или Y (гиперзаряд), для которых закон сохранения ие является абсолютным.

Глава 2

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

Вспомним принципы квантовой механики, с основами которой читатель, вероятно, хорошо знаком. Для этого прежде всего выделим из нерелятивистской квантовой механики Шредингера те аспекты, которые справедливы и в релятивистском случае. Введем также понятие S-матрицы. Установим связь между симметрией или принципами инвариантности и законами сохранения в квантовой механике.

Каждому преобразованию пространственно-временных координат системы соответствует унитарное преобразование волновых функций этой же системы. Если преобразование координат зависит непрерывно от параметра, как в важных случаях трансляций и вращений в пространстве, то соответствующий унитарный оператор можно выразить через эрмитову наблюдаемую величину, называемую генератором. Такие важные физические наблюдаемые, как импульс и момент количества движения, можно интерпретировать как генераторы. И, наконец, если после преобразования координат система остается инвариантной, то соответствующий генератор коммутирует с гамильтонианом системы. Следовательно, этот генератор и есть константа движения.

§ 2.1. ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

2.1.1. Состояния и наблюдаемые. Рассмотрим систему, состоящую из фиксированного числа частиц. В квантовой механике состояние такой системы в каждый момент времени полностью определяется нормированной волновой функцией $\Psi(x, y, z)$ координат всех частиц. Для простоты здесь указаны лишь координаты одной частицы. Условие нормировки имеет вид

$$\int\int\int d\tau \mid \Psi(x, y, z) \mid^2 = 1, \tag{2.1}$$

где $d\tau$ означает произведение $dxdydz$ дифференциалов координат всех частиц системы.

Эксперименты, подобные интерференции электронов, приводят к постулату о том, что волновые функции удовлетворяют принципу суперпозиции. Он состоит в том, что если функции $\Psi(x, y, z)$ и $\Phi(x, y, z)$ описывают возможные состояния системы, то их линейная комбинация

$$a\Psi(x, y, z) + b\Phi(x, y, z),$$

где a и b — комплексные числа, также описывает возможное состояние системы. Математически это выражается в том, что состояния системы образуют комплексное линейное векторное пространство типа так называемого гильбертова пространства. По этой причине волновую функцию называют также вектором состояния.

Можно выбрать *полный ортонормированный набор векторов состояний* в гильбертовом пространстве, обозначив его ψ_1, ψ_2, ..., обладающий следующими свойствами:

а) каждый вектор ψ_n *нормирован*

$$\int d\tau \mid \psi_n(x, y, z) \mid^2 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

б) векторы состояния ортогональны друг другу, т. е.

$$\int d\tau \psi_n^*(x, y, z)\, \psi_m(x, y, z) = 0, \quad n \neq m;$$

в) набор векторов *полный*, т. е. каждый возможный вектор состояния системы можно представить в виде линейной суперпозиции базисных состояний ψ_n с соответственно выбранными коэффициентами c_n. Таким образом,

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x, y, z),$$

где

$$c_n = \int d\tau \psi_n^*(x, y, z)\, \Psi(x, y, z),$$

а знак * означает комплексное сопряжение. Такой полный ортонормированный набор функций назовем *базисом*.

Выражение для c_n называется *интегралом перекрытия* или скалярным произведением ψ_n и Ψ: правую часть его обычно обозначают (ψ_n, Ψ).

В квантовой механике каждой наблюдаемой соответствует эрмитов оператор. В литературе используют как понятие наблюдаемой, так и понятие представляющего ее оператора. Для эрмитова оператора

$$\int d\tau \Psi^* A \Phi = \int d\tau (A\Psi)^* \Phi, \tag{2.2}$$

т. е. $(\Psi, A\Phi) = (A\Psi, \Phi)$, что справедливо для любой пары векторов состояния Φ и Ψ.

Вообще *любому* оператору A соответствует эрмитово сопряженный A^+. Он определяется так, что для любых двух волновых функций φ и ψ справедливо равенство $(\psi, A^+\varphi) = (A\psi, \varphi)$.

Таким образом, эрмитов оператор — это оператор, равный сопряженному к нему, т. е. $A^+ = A$.

Собственным значением A называется величина a, для которой уравнение $A\varphi = a\varphi$ имеет решение. Соответствующее решение φ называется *собственной функцией*. В общем случае существует много решений, обозначаемых φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$A\varphi_n = a_n\varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Свойства эрмитовости (2.2) достаточно для того, чтобы показать, что все a — действительные числа. Из формулы (2.2) следует также, что собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.

В отдельных случаях несколько собственных функций могут соответствовать одному и тому же собственному значению; таким образом, некоторые из a_n могут оказаться равными. Если r разных собственных функций соответствуют одному и тому же собственному значению, то собственное значение называется r-кратно вырожденным. Линейная суперпозиция двух собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, сама соответствует этому значению.

Следовательно, применив, например, процесс ортогонализации Шмидта, можно сделать так, чтобы разные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, были взаимно ортогональны.

Предположим также, что собственные функции наблюдаемой образуют полный набор, т. е. так называемый базис. Согласно постулату интерпретации квантовой механики, единственно возможным результатом измерения наблюдаемой A является одно из ее собственных значений a_n. Более того, если система находится в состоянии Ψ, вероятность получения a в результате измерения A определяется формулой

$$P(a) = \sum_n |c_n|^2, \tag{2.4}$$

где c_n — коэффициент при φ_n в разложении данного нормированного состояния Ψ по собственным функциям A:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_n c_n \varphi_n(x, y, z). \tag{2.5}$$

Суммирование в (2.4) проводится по всем n, для которых $a_n = a$. В невырожденном случае

$$P(a_n) = |c_n|^2,$$

и можно считать, что амплитуда вероятности [квадрат модуля которой равен $P(a_n)$] того, что система находится в состоянии $\varphi_n(x, y, z)$, задается интегралом перекрытия

$$(\varphi_n, \Psi) = \int d\tau \varphi_n^*(x, y, z)\, \Psi(x, y, z).$$

Предположим, что в результате измерения A получена величина a_n. Если собственному значению a_n соответствует только одна собственная функция φ_n, система сразу же после измерения будет находиться в состоянии, описываемом функцией φ_n. Этот вывод справедлив для большого класса измерений.

В более общем случае r собственных функций $\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_r}$ соответствуют собственному значению a_n, следовательно, система будет находиться в состоянии

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \varphi_{n_i}.$$

2.1.2. Одновременное измерение двух наблюдаемых. Операторы в общем случае не коммутируют. Например, оператор координаты x и оператор импульса

$$P_x = -i\hbar\partial/\partial x \tag{2.6}$$

удовлетворяют соотношению

$$[x, P_x] = xP_x - P_x x = i\hbar.$$

Здесь и в дальнейшем операторные уравнения следует интерпретировать как утверждения, что обе части уравнения дают один и тот же результат после их применения к произвольному вектору состояния системы.

Часто удобно характеризовать векторы состояний собственными значениями наблюдаемых, для которых они являются собственными состояниями. Так, плоскую волну

$$\Psi_p(x) = \exp(i\,px/\hbar) \tag{2.7}$$

можно считать собственной функцией оператора импульса (2.6), соответствующей собственному значению p. В этом случае одна наблюдаемая полностью характеризует состояние. В более общих случаях может возникнуть необходимость характеризовать состояние собственными значениями дополнительных операторов. Поэтому рассмотрим случай, когда две наблюдаемые A и B могут одновременно обладать определенными значениями.

Будем считать, что A и B можно измерить одновременно, если, измеряя A, получаем a, а измеряя затем B, получаем b, и далее, снова измеряя A, получаем a, и т. д. Например, можно измерить импульс частицы по времени ее полета, а затем измерить компоненту спина, пользуясь устройством Штерна — Герлаха. Таким образом, измерение B не должно выводить систему из состояния, в которое она попадает при измерении A. Это означает, что состояние есть собственный вектор как A, так и B. Если этот результат справедлив для любого состояния, то можно найти полный орготональный базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, каждый член которого будет одновременно собственным состоянием A и B:

$$A\varphi_n = a_n\varphi_n; \quad B\varphi_n = b_n\varphi_n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Можно показать, что это возможно, если A и B коммутируют, т. е.

$$[A, B] = 0. \tag{2.8}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в любом учебнике по квантовой механике.

В заключение сделаем несколько замечаний о системе обозначений. Характеризуя состояние собственными значениями наблюдаемых, для которых оно является собственным состоянием, как, например, в случае плоской волны $\psi_p(x)$, иногда удобно опустить зависимость от координат. Дирак пошел еще дальше, обозначив состояние с собственным значением импульса p символом $|p>$ и назвав его *кет-вектором*. Произвольное состояние $\psi(r)$ он обозна-

чил $|\psi>$ или еще проще $|>$. В этих обозначениях базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ принимает вид $|1>$, $|2>$, ... Вектор, комплексно сопряженный кет-вектору $|n>$, обозначается $<n|$ и называется *бра-вектором* [в прежних обозначениях $\varphi_n^*(\mathbf{r})$]. Интегралы перекрытия $\psi(\mathbf{r})$ и $\varphi_n(\mathbf{r})$, обозначаемые ранее (φ_n, ψ), теперь принимают вид

$$\langle n \mid \psi \rangle = \int d\tau \varphi_n^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}),$$

а величина, комплексно сопряженная ему, $<n|\psi>^* = <\psi|n>$.

Матричный элемент оператора A, являющийся интегралом перекрытия $A\psi(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$, теперь запишется в виде $<\varphi|A|\psi>$.

В основном обозначения Дирака будут использованы для описания внутренних состояний частиц, в частности для изоспина и группы $SU(3)$.

2.1.3. Развитие системы во времени и S-матрица. Изложенные в двух предыдущих разделах понятия относились к любому определенному моменту времени. На практике же мы наблюдаем непосредственно или косвенно, как система развивается во времени. Развитие во времени волновой функции описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \partial\psi/\partial t = H\psi, \tag{2.9}$$

где H — оператор Гамильтона этой системы. В нерелятивистской квантовой механике H — полная энергия системы, выраженная через координаты и импульсы, причем для импульса $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\hat{\nabla}$.

Область применения уравнения Шредингера можно разбить на две части: связанные состояния и процессы рассеяния. Почти всю информацию об элементарных частицах мы получаем, изучая процессы рассеяния. Пока успешно разрешена только одна релятивистская проблема связанного состояния для связи пары электрон — позитрон в позитроний. Поэтому ограничимся рассмотрением квантовомеханического описания процессов рассеяния.

При обычном рассеянии или реакции между элементарными частицами $a+b \to c+d+e$ можно выделить три стадии. Сначала a и b обладают определенными импульсами и, возможно, определенными спиновыми ориентациями, затем они взаимодействуют в некоторой области с радиусом порядка 10^{-13} *см*. Наконец, возникают продукты реакции c, d, e, ..., которые детектируются с помощью счетчиков и других приборов, когда частицы достаточно отделены друг от друга и движутся свободно.

В результате такого эксперимента мы получаем непосредственно вероятное распределение $W(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d, \mathbf{p}_e, \ldots)$ импульсов (и спинов, если они наблюдаемы) конечных частиц относительно начальных.

Так как уравнение Шредингера (2.9) дает полную информацию о развитии во времени волновой функции системы, то мы получаем в принципе возможность вычислить $W(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d, \mathbf{p}_e)$. В нерелятивистской квантовой механике этот расчет можно провести для упругого рассеяния $a+b \to a+b$ (см., например, [134]). В релятивистском случае, когда частицы могут также аннигилировать

и рождаться, еще справедливо уравнение Шредингера (2.9) (см. п. 2.2.3), но ψ не является уже просто функцией положения частиц, и решить уравнение можно только в рамках теории возмущений. Оказалось, что в качестве базисных переменных теории, в особенности при изучении сильных взаимодействий, удобно выбирать амплитуды рассеяния или реакций, подобные амплитудам, описанным выше, квадраты модулей которых равны вероятности W.

Амплитуду реакции называют также элементом S-матрицы. Дадим теперь прямое определение этой величины. Как мы уже видели, в условиях эксперимента по рассеянию начальное и конечное состояния представляют собой по существу свободные частицы. Такие состояния можно полностью определить, если знать для каждой частицы импульс, проекцию спина и другие внутренние квантовые числа, например изоспин. Обозначим все эти параметры вместе индексом a, который и будет характеризовать состояние. Для простоты предположим, что a принимает дискретный ряд значений.

Пусть φ_a означает начальное состояние системы. Состояние системы после взаимодействия описывается определенным вектором состояния ψ. В общем случае этот вектор ψ имеет компоненты, относящиеся как к разным неупругим конечным состояниям, так и к упругому рассеянию. Однако принцип суперпозиции и линейность уравнения (2.9) требуют, чтобы ψ можно было записать в виде

$$\psi = S\varphi_a, \tag{2.10}$$

где S — оператор рассеяния.

Если система находится в состоянии $\varphi_{a'}$, а соответствующее конечное состояние ее есть ψ', то начальное состояние $\alpha\varphi_a + \beta\varphi_{a'}$ перейдет в конечное $\alpha\psi + \beta\psi'$. Значит, ψ и φ_a должны быть связаны уравнением вида (2.10).

Мы не будем рассматривать здесь временную зависимость состояний φ_a и ψ. Для этого читатель может обратиться к учебникам по теории рассеяния. Однако в некотором смысле S является функцией гамильтониана H.

Пусть φ_b — состояние свободно движущихся частиц определенного вида с хорошо определенными импульсами, которое можно определить с помощью счетчиков. Амплитуда вероятности того, что состояние ψ находится в состоянии φ_b, по общему принципу квантовой механики равна (φ_b, ψ), или в соответствии с равенством (2.10) $(\varphi_b, S\varphi_a) = S_{ba}$. Здесь S_{ba} — элемент S-матрицы.

Предположим, что, когда a принимает все возможные значения внутренних квантовых чисел, состояния φ_a являются ортонормированными и образуют полный набор. Это предположение выражается формулами

$$(\varphi_b, \varphi_a) = \delta_{ba}; \tag{2.11}$$

$$\sum_a \varphi_a \varphi_a^* = 1, \tag{2.12}$$

где 1 означает единичный оператор.

Любое нормированное начальное состояние можно представить в виде $\varphi = \sum_a c_a \varphi_a$, где величины c_a соответственно удовлетворяют условию

$$\sum_a |c_a|^2 = 1. \tag{2.13}$$

В соответствии со сказанным выше система, находящаяся в таком состоянии, придет в конечное состояние φ_b с амплитудой вероятности

$$(\varphi_b, S\varphi) = \sum_a c_a (\varphi_b, S\varphi_a) = \sum_a S_{ba} c_a$$

и, следовательно, с вероятностью

$$\left| \sum_a S_{ba} c_a \right|^2 = \sum_a \sum_a S_{ba} S^*_{ba'} c_a c^*_{a'}.$$

Так как начальное состояние нормировано и общая вероятность нахождения системы в некотором конечном состоянии равна единице, то, суммируя по b, получим

$$1 = \sum_b \sum_a \sum_{a'} S_{ba} S^*_{ba'} c_a c^*_{a'}. \tag{2.14}$$

Если закон сохранения вероятности выполняется для каждого начального состояния φ, равенство (2.14) справедливо для всех возможных значений коэффициентов c_a, удовлетворяющих условию (2.13). Из этого следует, что равенство

$$\sum_b S_{ba} S^*_{ba'} = \delta_{aa'} \tag{2.15}$$

должно выполняться.

В развернутом виде выражение (2.15) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\sum_b (\varphi_{a'}, S^+\varphi_b)(\varphi_b, S\varphi_a) = \delta_{aa'} \\ \text{или} \quad &(\varphi_{a'}, S^+S\varphi_a) = \delta_{aa'}. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

В последнем случае использовалось условие полноты (2.12). Уравнение (2.16) эквивалентно операторному соотношению

$$S^+S = 1. \tag{2.17}$$

Можно показать, что соотношение

$$SS^+ = 1 \tag{2.18}$$

вытекает из менее очевидного условия, заключающегося в том, что каждое нормированное конечное состояние должно возникать из некоторого нормированного начального состояния. Оператор, удовлетворяющий (2.17) и (2.18), называют унитарным. Унитарность S выражает закон сохранения вероятности.

Если рассматривать систему невзаимодействующих частиц, конечное состояние по существу окажется тем же, что и начальное,

т. е. в нем присутствуют частицы того же вида и с теми же импульсами. В таком случае имеем $S=1$.

Далее, удобно ввести *оператор перехода* $\mathcal{T}$, определяемый равенством $S=1+i\mathcal{T}$. Матричные элементы $\mathcal{T}$ описывают взаимодействие между компонентами системы.

В последующих главах покажем, как принципы инвариантности приводят к условиям для элементов S- и $\mathcal{T}$-матриц. Экспериментальная проверка этих условий будет также проверкой предполагаемого принципа инвариантности.

В квантовой электродинамнке и теории слабого взаимодействия показано, как можно найти элементы S-матрицы из более фундаментальных величин, а именно из гамильтониана взаимодействия и операторов квантованного поля, входящих в него.

С этими операциями, которыми мы не имеем возможности воспользоваться, читатель может познакомиться в специальной литературе.

Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом H. Прежде всего надо определить наблюдаемые Q, которые коммутируют с H, т. е.

$$[H, Q]=0, \tag{2.19}$$

и для которых, как уже говорилось выше, собственные состояния H также являются собственными состояниями Q. Таким образом, стационарные состояния системы можно характеризовать собственными значениями Q. Для атомной и ядерной физики это типичная ситуация. Оператор Q, удовлетворяющий условию (2.19), называется интегралом движения.

Подобные величины продолжают играть важную роль при рассмотрении S-матрицы. Точнее, это выражается следующей теоремой.

Если Q есть наблюдаемая, которая коммутирует с гамильтонианом H системы $[Q, H]=0$, то Q коммутирует и с S-матрицей этой системы $[Q, S]=0$. Предположим, что S является в некотором смысле функцией H. Тогда доказательство следует из математической теоремы о том, что если наблюдаемая Q коммутирует с H, то она коммутирует и с любой функцией H.

Рассмотренная теорема имеет одно полезное физическое следствие. Если начальное состояние φ_a системы есть собственное состояние Q, соответствующее собственному значению q_a, так что $Q\varphi_a=q_a\varphi_a$, то конечное состояние также есть собственное состояние Q, для которого при $\psi=S\varphi_a$ справедливо соотношение

$$Q\psi = QS\varphi_a = SQ\varphi_a = q_aS\varphi_a = q_a\psi.$$

То же самое можно представить в более удобной форме.

Рассмотрим матричный элемент равенства $QS=SQ$ между состояниями φ_b и φ_a:

$$(\varphi_b, QS\varphi_a) = (\varphi_b, SQ\varphi_a).$$

Действуя Q на φ_b с левой стороны равенства и на φ_a с правой, получаем

$$q_b(\varphi_b, S\varphi_a) = (\varphi_b, S\varphi_a)\, q_a.$$

Отсюда следует, что $(\varphi_b, S\varphi_a) = 0$, если $q_b \neq q_a$.

Таким образом, если Q сохраняется и система первоначально находится в собственном состоянии оператора Q с собственным значением q_a, то она может перейти только в такие конечные состояния, которые обладают таким же собственным значением Q.

2.1.4. Релятивистская квантовая механика. Посмотрим, надо ли модифицировать рассмотренные выше принципы квантовой механики при переносе их из области атомных явлений ($\sim 10^{-8}$ *см*) в область элементарных частиц ($< 10^{-13}$ *см*). При скоростях, характерных для элементарных частиц, необходимо учитывать принципы специальной теории относительности. Первое волновое уравнение, удовлетворяющее этим условиям, получено Шредингером (его работу продолжили Клейн и Гордон) и Дираком. Однако волновые функции, удовлетворяющие этим уравнениям, уже не являются амплитудами вероятности положения одной частицы. Приходится интерпретировать их как уравнения поля, которые должны быть «вторично квантованными». Таким образом, попытка синтезировать квантовую механику и специальную теорию относительности приводит к квантовой теории поля и к описанию процессов аннигиляции и рождения частиц. В этой книге мы не будем использовать концепции и методы квантовой теории поля, что избавит нас от подробного обсуждения гамильтониана слабого взаимодействия и его симметрий.

Следует отметить, что в обширной области явлений, связанных с элементарными частицами, мы сталкиваемся с процессами взаимодействия, которые сильно локализованы и недоступны для непосредственного изучения. Экспериментальному исследованию доступны только начальные и конечные частицы, свободно перемещающиеся на таком большом расстоянии друг от друга, что их взаимодействием можно пренебречь.

Из сказанного выше ясно, насколько удобно введение понятия S-матрицы. В этом случае можно ограничиться релятивистским описанием свободно перемещающихся частиц, в основе которого, как мы увидим ниже, лежат фундаментальные принципы инвариантности пространства — времени.

§ 2.2. ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрим следствия принципов инвариантности в квантовой механике. Подобным же образом можно обсудить все принципы инвариантности, которые будут рассматриваться ниже, за исключением симметрии обращения времени, для которой многие утверждения настоящего раздела придется модифицировать. Этому посвящена гл. 6.

Для описания использованы общие и, следовательно, довольно абстрактные термины. При чтении последующих глав читатель может обращаться к этому разделу за справками.

Принципы инвариантности физики элементарных частиц делятся на два больших класса: а) пространственно-временные симметрии, такие, как, например, трансляции, вращения, преобразования Лоренца; они связаны с существованием эквивалентных пространственно-временных систем отсчета; б) внутренние симметрии, такие, как изоспин, $SU(3)$, зарядовое сопряжение.

В первый класс входят преобразования двух типов: связанные с временной координатой и не связанные с ней. Последний тип преобразований самый простой, поэтому наше обсуждение начнем с преобразования одной системы отсчета в другую, а затем распространим его на другие типы. Сначала рассмотрим случай волновой механики Шредингера, затем определим, какие особенности имеют место в общем случае.

2.2.1. Преобразования координат и вектора состояния. При использовании квантовомеханического формализма выберем сначала систему отсчета Σ, в которой измеряются координаты. Волновые функции и операторы при переходе от одной системы отсчета к другой меняют свой вид. Проследим, как это получается. Переход от одной системы отсчета Σ к другой Σ' задается уравнениями преобразования, с помощью которых определяются координаты (x', y', z') точки P в новой системе Σ' через координаты (x, y, z) точки P в системе Σ:

$$x \to x' = f(x, y, z); \quad y \to y' = g(x, y, z); \quad z \to z' = h(x, y, z). \tag{2.20}$$

Например, если преобразование представляет собой трансляцию на вектор (a_x, a_y, a_z), то (2.20) принимает вид

$$x \to x' = x + a_x; \quad y \to y' = y + a_y; \quad z \to z' = z + a_z. \tag{2.21}$$

Второй пример — поворот в плоскости xy на угол θ. В этом случае уравнения преобразования выглядят следующим образом:

$$x \to x' = x\cos\theta - y\sin\theta; \quad y \to y' = x\sin\theta + y\cos\theta; \quad z \to z' = z. \tag{2.22}$$

Третий пример — инверсия системы координат или преобразование четности:

$$x \to x' = -x; \quad y \to y' = -y; \quad z \to z' = -z. \tag{2.23}$$

Пусть состояние системы характеризуется волновой функцией $\psi(x, y, z)$ в системе отсчета Σ. Преобразованной волновой функцией $\psi'(x', y', z')$ в новых координатах системы отсчета Σ' будем считать такую функцию, которая в той же точке пространства имеет такое же значение, что и функция $\psi(x, y, z)$, т. е.

$$\psi'(x', y', z') = \psi(x, y, z). \tag{2.24}$$

Следовательно, амплитуда вероятности нахождения частицы в определенной точке пространства остается неизменной, какая бы система координат ни использовалась.

Для того чтобы выразить обе стороны равенства (2.24) через одни и те же переменные (со штрихом или без штриха), надо воспользоваться системой уравнений (2.20). Таким образом, выразив с помощью системы (2.20) x, y, z через x', y', z':

$$x=\overline{f}(x', y', z'); \quad y=\overline{g}(x', y', z); \quad z=\overline{h}(x', y', z'), \qquad (2.25)$$

получим равенство

$$\psi(x', y', z')=\psi(\overline{f}(x', y', z'), \ \overline{g}(x', y', z'), \ \overline{h}(x', y', z')), \qquad (2.26)$$

из которого определим ψ'. Так, в случае трансляции (2.21)

$$\psi'(x', y', z')=\psi(x'-a_x, \ y'-a_y, \ z'-a_z).$$

С помощью данного уравнения можно на этой стадии опустить штрихи у x', y', z':

$$\psi'(x, y, z)=\psi(\overline{f}(x, y, z), \ \overline{g}(x, y, z), \ \overline{h}(x, y, z)). \qquad (2.27)$$

Это потребует иной интерпретации преобразования: мы считаем $\psi'(x, y, z)$ новой волновой функцией в исходной системе отсчета Σ, т. е. ψ в той же системе отсчета переходит в новое состояние ψ'. Такая интерпретация называется *активной*, в отличие от первой, которую называют *пассивной* интерпретацией преобразования (2.20). На рис. 2.1 показана связь этих двух интер-

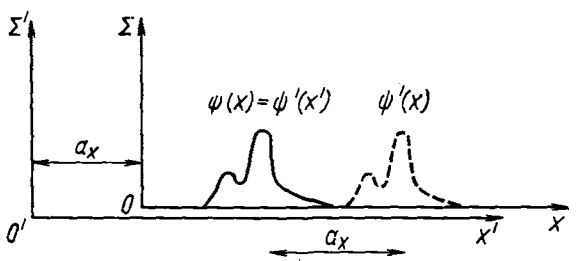


Рис. 2.1. Связь между преобразованием координат (трансляция на a_x) и преобразованием волновой функции $\psi(x)\to\psi'(x)$. Функция $\psi'(x)$ имеет такой же вид относительно Σ, что и функция $\psi'(x')$ относительно Σ'

претаций для случая трансляции в одном измерении. Обе интерпретации не совсем эквивалентны. Активная очень удобна в применении, но она не имеет силы, когда преобразование (2.20) не является свойством симметрии системы.

Чтобы подчеркнуть, что ψ' возникает из ψ, запишем это в виде $U\psi$, где U — оператор, зависящий от рассматриваемого преобразования (2.20). Преобразование суперпозиции двух состояний эквивалентно преобразованию этих состояний отдельно с последующей суперпозицией результатов. Из этого следует, что U — линейный оператор. Более того, для преобразований, которые мы будем рассматривать, функция ψ' нормирована, если нор-

мирована ψ. Это можно явно доказать для случая трансляции (2.21). Отсюда следует, что U — унитарный оператор. Таким образом, равенства

$$\int d\tau (U\psi)^* U\psi = \int d\tau \psi^* \psi,$$

или

$$(U\psi, U\psi) = (\psi, \psi)$$

справедливы для любой ψ. Следовательно,

$$U^+U = 1, \tag{2.28}$$

что означает

$$U^{-1} = U^+. \tag{2.29}$$

Посмотрим, как преобразуются наблюдаемые при переходе от системы отсчета Σ к системе Σ'. Для каждой наблюдаемой A можно определить преобразованную наблюдаемую A' с помощью условия, что ожидаемое значение A' в состоянии ψ' численно равно значению A в состоянии ψ. Таким образом, должно выполняться условие

$$(\psi', A'\psi') = (\psi, A\psi),$$

где ψ' и ψ связаны соотношением (2.27). Теперь

$$(\psi', A'\psi') = (U\psi, A'U\psi) = (\psi, U^+A'U\psi).$$

Это условие выполняется для всех ψ:

$$(\psi, U^+A'U\psi) = (\psi, A\psi).$$

Следовательно,

$$(U^+A'U) = A$$

или с учетом (2.29)

$$A' = UAU^+. \tag{2.30}$$

В случае, когда наблюдаемая A инвариантна относительно рассматриваемых преобразований, $A' = A$, так что

$$UAU^+ = A, \tag{2.31}$$

или

$$UA = AU.$$

Последнее равенство означает, что U коммутирует с A.

2.2.2. Преобразования симметрии. Пусть системы отсчета Σ и Σ' одинаково подходят для формулирования законов, описывающих поведение системы. Преобразование (2.20) системы отсчета Σ в систему Σ' будем называть в этом случае *преобразованием симметрии* данной системы.

Преобразования геометрической симметрии, не затрагивающие временной координаты, и преобразования внутренней симметрии

можно определить иначе. Гамильтониан системы позволяет определить собственные состояния и собственные значения, т. е. стационарные состояния системы и их энергии. Вообще он управляет развитием системы во времени и такими ее свойствами, как, например, рассеяние.

Поэтому будем считать преобразованием симметрии такое преобразование, которое оставляет гамильтониан системы H инвариантным. С помощью равенства (2.30) это можно представить следующим образом:

$$UHU^{-1} = H, \tag{2.32}$$

где U — оператор преобразования, соответствующий (2.20). В случае преобразований, затрагивающих и временную координату (сюда входят как преобразования Лоренца, так и обращение времени), соответствующий оператор U не коммутирует с H. Однако эти преобразования симметрии приводят к ограничениям на вид H- и S-матрицы (см. гл. 4 и 6).

Для используемых ниже преобразований симметрии характерно то, что они образуют семейства или группы преобразований. Это объясняется тем, что мы часто имеем не две, а несколько эквивалентных систем отсчета. Так например, трансляционная инвариантность заключается в наличии бесконечно большого числа эквивалентных систем отсчета, отличающихся только выбором начала координат. В этом случае мы имеем множество преобразований вида (2.21), параметры которых (a_x, a_y, a_z) принимают любые значения. В общем случае семейство преобразований характеризуется несколькими параметрами α_1, α_2, ..., α_n, совокупность которых мы обозначим просто α.

Общее преобразование запишем в виде

$$\xi \to \xi' = T_\alpha(\xi). \tag{2.33}$$

Здесь буквой ξ обозначена совокупность всех координат сразу.

Чтобы определить, образуют ли преобразования (например, множество всех трансляций) группу, достаточно установить, что это семейство обладает определенными свойствами, которые с математической точки зрения являются аксиомами, характеризующими любую группу вообще.

В настоящей книге мы не будем явно использовать формальный аппарат теории групп. Однако многие рассматриваемые здесь положения представляют собой специальные случаи этой теории, поэтому время от времени мы будем делать краткие замечания по поводу терминологии.

Рассмотрим три эквивалентные системы отсчета Σ, Σ' и Σ''. Пусть происходит преобразование координат от ξ к ξ':

$$\xi \to \xi' = T_\alpha(\xi) \tag{2.34}$$

и от ξ' к ξ'':

$$\xi' \to \xi'' = T_\beta(\xi'). \tag{2.35}$$

Подставляя (2.34) в (2.35), получаем уравнение преобразования, связывающее ξ'' и ξ: $\xi'' = T_\beta [T_\alpha(\xi)]$, которое записывается в виде

$$\xi'' = T_\beta T_\alpha(\xi). \tag{2.36}$$

Это составное преобразование называется *произведением преобразований* T_β и T_α. С другой стороны, так как Σ и Σ'' — эквивалентные системы отсчета, существует уравнение преобразования, непосредственно связывающее ξ и ξ'' для некоторых соответствующих значений параметра γ:

$$\xi'' = T_\gamma(\xi). \tag{2.37}$$

Из уравнений (2.36) и (2.37) следует, что

$$T_\gamma = T_\beta T_\alpha. \tag{2.38}$$

Таким образом, получена первая аксиома группы.

Аксиома 1. Произведение любых двух преобразований семейства также принадлежит к этому семейству.

Остальные две аксиомы группы в этом случае выполняются тривиально.

Аксиома 2. Существует тождественное преобразование $\xi' = \xi$, которое само принадлежит к семейству преобразований, т. е. при некотором значении α_0 параметра α выполняется равенство $\xi' = T_{\alpha_0}(\xi) = \xi$. Обычно всегда можно сделать $\alpha_0 = 0$, как, например, в случае трансляции (2.21).

Аксиома 3. Для каждого преобразования $\xi' = T_\alpha(\xi)$ обратное ему преобразование $\xi = T_\alpha^{-1}(\xi')$ также принадлежит к семейству преобразований, т. е. для соответствующих параметров $\bar{\alpha}$ выполняется равенство $T_\alpha^{-1} = T_{\bar{\alpha}}$.

Например, обратная трансляция T_{a_x, a_y, a_z}

$$T: \begin{cases} x' = x + a_x, \\ y' = y + a_y, \\ z' = z + a_z \end{cases}$$

представляет собой трансляцию $T_{-a_x, -a_y, -a_z}$. Далее, каждому преобразованию координат T_α соответствует оператор преобразования волновых функций, который мы обозначим U_α. Рассмотрим преобразование волновой функции при преобразовании координат T_α от системы отсчета Σ к системе Σ' и затем при преобразовании T_β от системы Σ' к системе Σ'':

$$\xi' = T_\alpha(\xi); \quad \psi' = U_\alpha \psi; \tag{2.39}$$

$$\xi'' = T_\beta(\xi'); \quad \psi'' = U_\beta \psi'. \tag{2.40}$$

Волновые функции ψ'' и ψ связаны с соотношением $\xi'' = T_\gamma(\xi)$, $\psi'' = U_\gamma \psi$. Комбинируя уравнения (2.39) и (2.40), получаем

$$\xi'' = T_\beta T_\alpha(\xi); \quad \psi'' = U_\beta U_\alpha \psi. \tag{2.41}$$

Таким образом, для любой ψ

$$\psi'' = U_\gamma \psi = U_\beta U_\alpha \psi$$

и, следовательно *,

$$U_\gamma = U_\beta U_\alpha . \qquad (2.42)$$

Итак, мы показали, что произведению двух преобразований координат соответствует произведение унитарных операторов преобразований. Множество операторов U_α образует группу операторов в гильбертовом пространстве состояний. В силу соответствия между равенствами (2.42) и (2.38) говорят, что множество U_α образует представление группы симметрии системы унитарными операторами.

В случае преобразования четности (2.23) существуют всего две эквивалентные системы отсчета: исходная и обращенная. Соответственно есть только одно нетривиальное преобразование симметрии P (2.23). Это и тождественное преобразование образуют группу симметрии. Параметр, характеризующий это преобразование, принимает только два дискретных значения. Такая группа называется дискретной группой симметрии.

Если параметры меняются непрерывно, то группа симметрии называется непрерывной: пример — группа вращений.

2.2.3. Инфинитезимальные преобразования и интегралы движения. Если U_α — оператор симметрии, соответствующий преобразованию, не затрагивающему время, то U_α коммутирует с гамильтонианом

$$U_\alpha H = HU_\alpha \qquad (2.43)$$

и является интегралом движения системы. Однако оператор U_α нельзя считать наблюдаемой, так как он не является эрмитовым. Более того, как мы уже видели, этот оператор унитарен: $U_\alpha^{-} U_\alpha = 1$. Тем не менее из группы операторов симметрии U_α, зависящих от одного непрерывного параметра (т. е. происходящих из непрерывной группы преобразований симметрии), можно получить соответствующую эрмитову наблюдаемую. Если U_α зависит от n действительных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то можно получить n наблюдаемых.

Предположим, что $\alpha = 0$ соответствует тождественному преобразованию. Применив соответствующий оператор к волновым функциям, получим $U_0 = 1$, где 1 означает единичный оператор. Метод получения наблюдаемых состоит в рассмотрении инфинитезимальных значений параметра: мы ожидаем, что ψ' будет отличаться на бесконечно малую величину от ψ и U также будет инфинитезимально отличаться от единичного оператора. Запишем

$$U_{\delta\alpha} = 1 + i\delta\alpha G + O(\delta\alpha^2). \qquad (2.44)$$

---

* Так как волновые функции ψ и $\exp(i\alpha)\psi$ определяют одно и то же состояние, обе части уравнения (2.42) могут отличаться на фазовый множитель. Единственный такой случай, с которым мы встретимся, — преобразование поворота волновых функций для полуцелого спина, для которого это заведомо имеет место. В дальнейшем мы будем считать, что равенство (2.42) справедливо во всех случаях.

Здесь G — оператор, а мнимая единица i введена для удобства. Символом $O(\delta\alpha^2)$ обозначены члены более высокого порядка по $\delta\alpha$, которыми далее будем пренебрегать. Теперь учтем условие унитарности оператора $U_{\delta\alpha}$. Сначала получим $U^+_{\delta\alpha} = 1 - i\delta\alpha G^+$. Подставив это выражение в равенство $U^+_{\delta\alpha} U_{\delta\alpha} = 1$, получим

$$(1 - i\,\delta\alpha G^+)(1 + i\,\delta\alpha G) = 1.$$

Таким образом,

$$1 - i\,\delta\alpha\,(G^+ - G) = 1$$

и

$$G^+ = G. \tag{2.45}$$

Итак, оператор G является эрмитовым. Он называется *генератором* преобразования U_α.

Так как U_α коммутирует с H, то и G коммутирует с H:

$$HG = GH. \tag{2.46}$$

В соответствии с преобразованием симметрии T_α эрмитов оператор G коммутирует с гамильтонианом, следовательно, он постоянен во времени. Это квантовомеханический аналог классической сохраняющейся величины. Далее увидим, что в специальных случаях наблюдаемая G есть обычная наблюдаемая.

В случае дискретной симметрии, такой, как четность, приведенные выше аргументы неприменимы. Но этот унитарный оператор U_P удовлетворяет соотношению

$$U_P^2 = 1, \tag{2.47}$$

которое следует из условия, что, если операцию четности (2.23) выполнить дважды, получится тождественное преобразование, т. е. $P^2 = 1$. Однако U_P является также унитарным оператором

$$U_P^+ U_P = 1, \tag{2.48}$$

и из равенств (2.47) и (2.48) следует, что $U_P = U_P^+$.

Таким образом, в этом случае оператор U_P является эрмитовым и его можно интерпретировать как наблюдаемую. Можно характеризовать состояния и собственными значениями U_P.

Подобный ход рассуждений применим к любому преобразованию симметрии, квадрат которого является тождественным преобразованием. Для примера можно привести преобразования зарядового сопряжения, G-четности, операцию обмена двух тождественных частиц (симметрия относительно перестановок).

Ниже приведены некоторые группы преобразований симметрии и соответствующие этим группам сохраняющиеся генераторы G:

Преобразования симметрии	*Сохраняющийся генератор*
Пространственные трансляции	Импульс
Вращения	Момент количества движения
Пространственная инверсия	Четность
Трансляция по времени	Гамильтониан (полная энергия)

Три первых преобразования рассмотрены соответственно в § 2.3 и в гл. 3 и 5. Последнее преобразование включает в себя координату времени, которую мы раньше все время исключали. Покажем, что в этом частном случае применимы предыдущие методы рассмотрения.

Из инвариантности относительно трансляций по времени следует, что описание системы не зависит от выбора начала отсчета времени — начала измерения. Преобразование от одного начала отсчета к другому есть $t \to t' = t + \tau$. Соответствующий унитарный оператор определяется равенством

$$U_\tau \psi(\mathbf{r}, t + \tau) = \psi(\mathbf{r}, t). \tag{2.49}$$

С обеих сторон равенства использована одна и та же координата положения, чтобы подчеркнуть, что она одинакова. Введя $t' = t + \tau$, получим

$$U_\tau \psi(t) = \psi(t - \tau). \tag{2.50}$$

В этом равенстве опущены штрихи.

Соответствующую эрмитову наблюдаемую можно определить, взяв вместо τ его инфинитезимальное значение $\delta\tau$ и записав в первом порядке по $\delta\tau$:

$$U_{\delta\tau} = 1 + i\,\delta\tau G.$$

Тогда

$$U_{\delta\tau}\psi(t) = (1 + i\delta\tau \cdot G)\psi(t) = \psi(t - \delta\tau) = \psi(t) - \delta\tau\partial\psi/\partial t.$$

Здесь мы воспользовались разложением Тейлора до первого порядка по $\delta\tau$. Следовательно, оператор G удовлетворяет уравнению $iG\psi = -\partial\psi/\partial t$, а так как $H = \hbar G$, то

$$H\psi = i\hbar\partial\psi/\partial t. \tag{2.51}$$

Теперь это уравнение выглядит совершенно так же, как уравнение Шредингера для развития во времени волновой функции, и потому оператор H можно отождествить с гамильтонианом системы.

Можно сказать, что гамильтониан H есть инфинитезимальный оператор, связанный с инвариантностью системы относительно трансляций по времени:

$$U_\tau = 1 + i\tau H/\hbar. \tag{2.52}$$

§ 2.3. ТРАНСЛЯЦИОННАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Применим развитые в § 2.2 концепции к частному случаю трансляционной инвариантности, обладающему некоторыми упрощающими особенностями.

2.3.1. Трансляции и импульс. Пространственная трансляционная инвариантность требует, чтобы две системы отсчета, различающиеся трансляцией $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, являлись эквивалентными для описания поведения системы. В нерелятивистской квантовой механике можно проверить, будет ли гамильтониан системы инвариант-

ным относительно преобразования (2.21), и найти соответствующие преобразования импульса. Для этого случая преобразование тривиально:

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p}' = \mathbf{p}. \tag{2.53}$$

Уравнение (2.53) следует из выражения для оператора $\mathbf{p}$ в координатном представлении: $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$.

В случае нескольких частиц уравнения (2.21) и (2.53) надо применить к координатам каждой частицы:

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}; \quad \mathbf{p}_i \to \mathbf{p}_i' = \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

Оператор симметрии $U_\mathbf{a}$ определяется теперь равенством

$$U_\mathbf{a}\,\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{r}_N - \mathbf{a}). \tag{2.54}$$

Следуя общим методам предыдущего раздела, будем считать все смещения инфинитезимальными, что дает нам эрмитову наблюдаемую. Пусть $\delta\mathbf{a} = (0, 0, \delta a)$. Тогда с точностью до членов порядка δa

$$U(0, 0, \delta a)\,\psi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) =$$

$$= \psi(x_1, y_1, z_1 - \delta a, \ldots, x_N, y_N, z_N - \delta a) = \psi(x_1, \ldots, z_n) -$$

$$- \delta a\,(\partial\psi/\partial z_1 + \ldots + \partial\psi/\partial z_N).$$

Пользуясь равенством

$$U(0, 0, \delta a) = 1 - i\,\delta a P_z/\hbar, \tag{2.55}$$

определяем эрмитов оператор:

$$P_z = \sum_{i=1}^{N} (-i\hbar\partial/\partial z_i). \tag{2.56}$$

Следовательно, соответствующая наблюдаемая есть z-компонента *полного* импульса. Аналогичным образом можно рассмотреть трансляции вдоль других координатных осей. В более общем виде

$$U_{\delta\mathbf{a}} = 1 - i\,\delta\mathbf{a}\mathbf{P}/\hbar, \tag{2.57}$$

где $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} (-i\hbar\nabla_i)$.

Можно найти более точное соотношение между унитарными операторами $U_\mathbf{a}$ и эрмитовыми операторами P_x, P_y и P_z. Ограничимся смещением вдоль оси z и для краткости вместо $U(0, 0, a)$ будем писать $U(a)$.

Если за трансляцией $(0, 0, b)$ следует трансляция $(0, 0, a)$, то получается трансляция $(0, 0, a+b)$. Отсюда

$$U(b)\,U(a) = U(b + a). \tag{2.58}$$

Пусть теперь в уравнении (2.58) $b = \delta a$. Подставляя выражение (2.55), получаем

$$U(a + \delta a) = (1 - i\delta a P_z/\hbar)\,U(a).$$

Перепишем это выражение в виде

$$(1/\delta a)\,[U(a+\delta a)-U(a)] = -\mathrm{i}\,P_z U(a)/\hbar. \qquad (2.59)$$

Пусть в левой части уравнения $\delta a \to 0$, тогда получим производную dU/da оператора $U(a)$ по скалярному параметру a. В результате соотношение (2.59) превратится в дифференциальное уравнение для $U(a)$:

$$dU/da = -\mathrm{i}\,P_z U(a)/\hbar. \qquad (2.60)$$

Если бы $U(a)$ и P_z были обычными функциями, то мы бы сразу получили решение

$$U(a) = \exp(-\mathrm{i}\,P_z a/\hbar). \qquad (2.61)$$

Здесь для определения постоянной интегрирования использовалось условие $U(0)=1$. В случае операторов правая часть (2.61) есть просто сокращенное обозначение ряда

$$1-(\mathrm{i}/\hbar)\,P_z a + (1/2!)\,(-\mathrm{i}\,P_z a/\hbar)^2 + \ldots$$

Можно показать, что этот ряд удовлетворяет уравнению (2.60).

Уравнение (2.61) показывает, что оператор, представляющий собой конечную трансляцию на вектор **a** в направлении оси z, можно выразить через оператор z-компоненты импульса. Понятие оператора импульса иногда заменяют понятием *генератора трансляций.*

Аналогичный расчет можно проделать для трансляций вдоль осей x и y и получить формулы

$$U(a, 0, 0) = \exp(-\mathrm{i}\,aP_x/\hbar); \quad U(0, b, 0) = \exp(-\mathrm{i}\,bP_y/\hbar).$$

Три оператора P_x, P_y, P_z коммутируют друг с другом. Это легко увидеть в формализме волновой механики Шредингера для приведенного выше вывода уравнения (2.56); различные пространственные координаты соответствуют этим трем случаям. Однако для противопоставления другим группам преобразований симметрии, генераторы которых не коммутируют, интересно показать, на чем основан этот результат.

Если рассматривать трансляции в двух разных направлениях, скажем a_x вдоль оси x и a_z вдоль оси z, то очевидно, что порядок, в котором эти трансляции имеют место, не существен. Значит,

$$U(a_x, 0, 0)\,U(0, 0, a_z) = U(0, 0, a_z)\,U(a_x, 0, 0)$$

для всех a_x и a_z.

Будем считать a_x и a_z инфинитезимальными. Используем выражение (2.55) и соответствующее уравнение для δa_x:

$$U(\delta a_x) = 1 - \mathrm{i}\,\delta a_x P_x/\hbar.$$

Результирующее уравнение справедливо в первом порядке по величинам δa_x и δa_z:

$$P_x P_z - P_z P_x = 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$[P_y, P_z] = 0; \quad [P_x, P_y] = 0.$$

2.3.2. Закон сохранения импульса. Трансляционная инвариантность служит первой простой, но важной иллюстрацией того, как принцип инвариантности налагает условия на гамильтониан и S-матрицу.

При анализе трансляционной инвариантности в рамках обычной волновой механики Шредингера предполагалось, что вектор состояния является функцией координат положения. Однако в релятивистской теории, как известно, понятие координаты положения не используется. Вместо этого можно стать на более абстрактную точку зрения, введя вектор состояния, полностью описывающий состояние системы. Но функцией каких величин он является? Как мы уже знаем, из трансляционной инвариантности следует существование эрмитовых операторов P_x, P_y, P_z, которые по аналогии с нерелятивистской теорией отождествляются с компонентами импульса. Таким образом, рассматриваемые состояния мы будем характеризовать собственными значениями импульса.

Если система состоит из одиой частицы, то в импульсном представлении полный иабор состояиий представляет собой множество собственных состояний импульса, обозначаемых $\varphi_{\mathbf{p}}$ и удовлетворяющих уравнениям $\mathbf{P}\varphi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\varphi_{\mathbf{p}}$. Общее состояние частицы можно представить в виде суперпознции таких состояний:

$$\Psi = \int d^3p f(\mathbf{p})\, \varphi_{\mathbf{p}},$$

представляющей собой не сумму, а интеграл, так как $\mathbf{p}$ пробегает непрерывную область. Функция $f(\mathbf{p})$ есть волновая функция в импульсиом представлении. Вероятность того, что импульс частицы находится в интервале $(\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p})$, есть $|f(\mathbf{p})|^2 d^3p$. Полный набор состояний двух и более частиц получим, взяв произведение состояний $\varphi_{\mathbf{p}}$.

Таким образом, $\varphi^{(12)}_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} = \varphi^{(1)}_{\mathbf{p}_1}\varphi^{(2)}_{\mathbf{p}_2}$ представляет собой состояние частицы 1 с импульсом $\mathbf{p}_1$ и частицы 2 с импульсом $\mathbf{p}_2$. Подобные состояния образуют подходящий базис для определения элементов S-матрицы в описаниых выше процессах рассеяния.

Рассмотрим двухчастичную реакцию $a+b\to c+d$. Амплитуда перехода из начального состояния $\varphi_{\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b}$ в конечное $\varphi_{\mathbf{p}_c,\mathbf{p}_d}$ есть $(\varphi_{\mathbf{p}_c,\mathbf{p}_d}, S\varphi_{\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b})$.

Из трансляциоиной инвариантности, выражаемой формулой $U_a S = S U_a$, следует $PS = SP$.

Для матричного элемента этого уравнения между состояниями $\varphi_{\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b}$ и $\varphi_{\mathbf{p}_c,\mathbf{p}_d}$, являющимися собственными состояниями $\mathbf{P}$, получим

$$(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d)(\varphi_{\mathbf{p}_c,\mathbf{p}_d}, S\varphi_{\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b}) = (\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b)(\varphi_{\mathbf{p}_c,\mathbf{p}_d}, S\varphi_{\mathbf{p}_a,\mathbf{p}_b}).$$

Из этого равенства следует, что амплитуда перехода между рассматриваемыми состояниями равна нулю, если полный импульс обоих состояний не остается тем же самым, т. е. не сохраняется.

Глава 3

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим квантовую теорию момента количества движения и покажем, как он связан с трансформационными свойствами системы относительно вращений.

Вопросы, о которых пойдет речь в этой главе, особенно важны, так как, во-первых, вытекающие из них выводы имеют большую практическую ценность, а во вторых, алгебра момента количества движения является прототипом той, которая используется для любой непрерывной группы преобразований симметрии. Таким образом, алгебру $SU(3)$ и другие высшие симметрии можно лучше понять по аналогии с моментом количества движения. Например, алгебра изотопического спина и алгебра момента количества движения полностью совпадают.

§ 3.1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Из элементарной квантовой механики хорошо известно, что для системы, обладающей сферической симметрией, можно выбрать такие состояния с определенной энергией, которые будут собственными функциями оператора момента количества движения. Коротко остановимся на этом.

3.1.1. Операторы момента количества движения и их коммутационные соотношения. Компоненты векторного оператора момента количества движения $\mathbf{L}$ можно получить из классического выражения

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{3.1}$$

подставляя в него

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla, \tag{3.2}$$

что дает

$$\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r} \times \nabla. \tag{3.3}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\,(y\partial/\partial z - z\partial/\partial y);\\ L_y &= -i\hbar\,(z\partial/\partial x - x\partial/\partial z);\\ L_z &= -i\hbar\,(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x). \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Стандартные правила преобразования частных производных позволяют выразить эти операторы в сферических координатах:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= i\hbar\,(\sin\varphi\,\partial/\partial\theta + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,\partial/\partial\varphi);\\ L_y &= i\hbar\,(-\cos\varphi\,\partial/\partial\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial/\partial\varphi);\\ L_z &= -i\hbar\,\partial/\partial\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Квадрат полного момента количества движения

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{3.6}$$

запишем в виде

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{3.7}$$

Для гамильтониана

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V(|\mathbf{r}|), \tag{3.8}$$

где V — функция только радиального расстояния от начала координат, все три компоненты $\mathbf{L}$, а следовательно, и $\mathbf{L}^2$, коммутируют с H:

$$[H, \mathbf{L}] = 0; \quad [H, \mathbf{L}^2] = 0.$$

Однако компоненты $\mathbf{L}$ не коммутируют друг с другом. С помощью выражения (3.4) находим, что

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z; \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x; \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что невозможно найти базис состояний, для которых две или большее число компонент $\mathbf{L}$ одновременно диагонализуются (см. § 2.1). Однако с помощью (3.9) можно показать, что $\mathbf{L}^2$ коммутирует с L_x, L_y и L_z отдельно. Таким образом, в лучшем случае можно диагонализовать $\mathbf{L}^2$ и одну из компонент $\mathbf{L}$ (обычно выбирают L_z, так как в сферической системе координат она имеет простой вид). Поэтому любую собственную функцию энергии H можно записать в виде

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где R_{nl} — радиальная волновая функция, а $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферическая гармоника. Разные радиальные функции, обладающие одним и тем же значением l, отличаются разными квантовыми числами n. Функция $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathbf{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1)\,\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \varphi); \tag{3.10}$$

$$L_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{3.11}$$

где l — положительное целое число, а m пробегает все целые числа от $-l$ до l. Краткая сводка свойств сферических гармоник дана в п. 3.1.2.

Несмотря на то, что нельзя выбрать операторы L_x и L_y так, чтобы они были диагональными, они являются сохраняющимися величинами, т. е. коммутируют с H. Их линейные комбинации

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \tag{3.12}$$

тоже коммутируют с H и обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &L_+Y_{lm}(\theta, \varphi) = \rho_+(l, m)\, Y_{l,m+1}(\theta, \varphi) \text{ для } -l \leqslant m \leqslant l-1; \\ &L_+Y_{ll}(\theta, \varphi) = 0; \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

$$\left.\begin{aligned} &L_-Y_{lm}(\theta, \varphi) = \rho_-(l, m)\, Y_{l,m-1}(\theta, \varphi) \text{ для } -l+1 \leqslant m \leqslant l; \\ &L_-Y_{l,-l}(\theta, \varphi) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$

где $\rho_+(l, m)$ и $\rho_-(l, m)$ — численные множители, которые будут вычислены после того, как равенства (3.13) и (3.14) будут доказаны (см. п. 3.2.2). Предположим, что они уже доказаны с помощью системы уравнений (3.5) и формул для $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Используем эти уравнения для доказательства того, что собственные функции

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

с одинаковыми n и l, но *разными* m соответствуют одному и тому же собственному значению энергии. Разумеется, это же можно получить непосредственно из решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (3.8) для частного случая (например, для атома водорода).

Предположим, что выполняется уравнение Шредингера $H\psi_{nlm} = E\psi_{nlm}$, и применим H к функции $L_+\psi_{nlm}$:

$$HL_+\psi_{nlm} = L_+H\psi_{nlm} = EL_+\psi_{nlm}.$$

Отсюда следует, что $L_+\psi_{nlm}$ есть собственная функция H, соответствующая тому же собственному значению E, что и ψ_{nlm}. Так как L_+ не действует на радиальную часть волновой функции, то по существу $L_+\psi_{nlm}$ не отличается от $\psi_{nl,m+1}$. Следовательно, мы уже показали, что $H\psi_{nl,m+1} = F\psi_{nl,m+1}$.

Повторение этой операции доказывает, что все собственные функции с одними и теми же значениями n и l и любыми m в интервале от $-l$ до $+l$ соответствуют одному и тому же значению энергии. Таким образом, для сферически-симметричного гамильтониана каждый энергетический уровень должен иметь $(2l+1)$-кратное вырождение, где l есть квантовое число полного орбитального момента количества движения. Говорят, что собственные состояния образуют *мультиплеты уровней*. Для определенных потенциалов $V(r)$ может получиться так, что два мультиплета с разными l (или даже с одним и тем же l) будут иметь одинаковую энергию. Это называется *случайным вырождением*, так как вырождение не является здесь результатом сохранения момента количества движения.

3.1.2. Свойства сферических гармоник. Зависимость Y_{lm} от θ и φ можно разделить:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\theta)\, \Phi_m(\varphi), \quad (3.15)$$

где

$$\Phi_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} \exp(im\varphi),$$

а

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{1/2} P_l^m(\cos\theta).$$

Здесь $m \geqslant 0$. Для $m < 0$

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m \Theta_{l,-m}(\theta),$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра (см. п. 2.5.17 из [63]).

Численные коэффициенты обеспечивают нормировку Θ и Φ:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m'}^*(\varphi)\,\Phi_m(\varphi)\,d\varphi = \delta_{m'm};$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \Theta_{l'm}(\theta)\,\Theta_{lm}(\theta) = \delta_{l'l} = \delta_{l'l}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi)\, Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}. \qquad (3.16)$$

При $m=0$ имеем особый случай, когда P_l^m сводится к обычному полиному Лежандра: $P_l^0(\cos\theta) = P_l(\cos\theta)$.

В табл. 3.1 представлены выражения для Y_{lm} при $l=0$, 1 и 2.

Таблица 3.1

Сферические гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

Y_{lm}	Выражение для Y_{lm}
Y_{00}	$(4\pi)^{-1/2}$
Y_{10}	$(3/4\pi)^{1/2}\cos\theta$
$Y_{1\pm1}$	$\mp(3/8\pi)^{1/2}\sin\theta\exp(\pm i\varphi)$
Y_{20}	$2^{-1}(5/4\pi)^{1/2}(3\cos^2\theta - 1)$
$Y_{2\pm1}$	$\mp(15/8\pi)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\exp(\pm i\varphi)$
$Y_{2\pm2}$	$4^{-1}(15/2\pi)^{1/2}\sin^2\theta\exp(\pm 2i\varphi)$

3.1.3. Спиновый момент количества движения. Из атомной и ядерной физики известно, что электрон, протон и нейтрон кроме момента количества движения, возникающего при пространственном движении, обладают еще и внутренним, или спиновым, моментом количества движения. Не имеет смысла выражать этот спиновый момент количества движения через внутренние координаты, как мы делаем в случае молекул, когда внутренний момент количества движения обусловлен вращением молекулы вокруг ее центра масс. Если мы пойдем по пути создания модели «элементар-

ных» частиц, построенных из таких еще «более элементарных» составных частей, как кварки, то это представление надо модифицировать. В настоящее время существует более консервативная точка зрения, заключающаяся в следующем.

Для частицы, обладающей спином, постулируем наличие трех спиновых операторов S_x, S_y, S_z, подчиняющихся коммутационным соотношениям:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z; \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x; \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y, \tag{3.17}$$

образованным по аналогии с системой уравнений (3.9); такая зависимость характерна именно для операторов момента количества движения. Далее, на них наложено условие

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = s(s+1)\hbar^2, \tag{3.18}$$

где s — спин частицы, выраженный в единицах $\hbar$. Для протона, электрона и нейтрона $s = 1/2$.

Спин и операторы орбитального момента количества движения коммутируют. Обозначив $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$, можно записать это так: $[\mathbf{S}, \mathbf{L}] = 0$. Это означает, что спин и орбитальный момент количества движения можно в принципе измерять одновременно, даже несмотря на то, что они могут быть связаны в атомах спин-орбитальным взаимодействием.

То, что многие нестабильные элементарные частицы и открытые недавно короткоживущие резонансные состояния обладают определенным спиновым моментом количества движения, является эмпирическим фактом. Установлено, что короткоживущей частице, существующей в виде промежуточного состояния или резонанса в конечном состоянии, можно приписать определенный момент количества движения независимо от способа ее рождения или распада. Это частично подтверждает правильность трактовки таких частиц на равных основаниях со стабильными.

Спиновый формализм можно применить при анализе по парциальным волнам рассеяния частиц, обладающих спином. Этим мы займемся после рассмотрения свойств преобразований Лоренца для состояний, после того как убедимся, что анализ по парциальным волнам инвариантен относительно преобразований Лоренца.

3.1.4. Полный момент количества движения. Чтобы рассмотреть случаи, когда момент количества движения обусловлен спином или орбитальным движением или и тем и другим вместе, введем оператор $\mathbf{J}$ полного момента количества движения, компоненты которого:

$$J_x = L_x + S_x;$$

$$J_y = L_y + S_y;$$

$$J_z = L_z + S_z,$$

причем $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$,

Компоненты $\mathbf{J}$ подчиняются коммутационным соотношениям (3.19), аналогичным соотношениям (3.9) и (3.17) для $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$:

$$\left.\begin{aligned}[J_x, J_y] &= i\hbar J_z;\\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x;\\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y.\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

§ 3.2. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРОВ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Покажем, что допустимые собственные значения j и m для полного момента количества движения и любой из его компонент и соотношение между ними вытекают из *одних* лишь коммутационных соотношений (3.19) и не зависят от явных выражений для дифференциальных операторов (3.4) или (3.5). Это важно, так как при рассмотрении спина необходимо разрешить полуцелые значения j и m. В этом случае операторы не могут считаться дифференциальными, так как для описания частиц, обладающих спином, мы не вводим внутренних переменных.

3.2.1. Собственные значения момента количества движения. Введем неэрмитовы операторы сдвига $J_\pm$, определенные выражением

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y, \tag{3.20}$$

и эрмитово сопряженные друг другу:

$$J_\pm^\dagger = J_\mp. \tag{3.21}$$

Коммутационные соотношения (3.19) можно выразить с помощью $J_\pm$ следующим образом:

$$[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm; \tag{3.22}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z. \tag{3.23}$$

Квадрат полного момента количества движения $\mathbf{J}^2$, выраженный через $J_\pm$ и J_z, имеет вид

$$\mathbf{J}^2 = J_-J_+ + J_z^2 + \hbar J_z; \tag{3.24}$$

$$\mathbf{J}^2 = J_+J_- + J_z^2 - \hbar J_z. \tag{3.25}$$

Поскольку оператор $\mathbf{J}^2$ коммутирует с J_x и J_y, то он коммутирует также и с $J_\pm$: $[\mathbf{J}^2, J_\pm] = 0$ и, конечно,

$$[\mathbf{J}^2, J_z] = 0.$$

Рассмотрим систему с операторами момента количества движения $\mathbf{J}$. Выберем $\mathbf{J}^2$ и J_z диагональными, обозначив их собственные значения для общего состояния $k^2\hbar^2$ и $m\hbar$. Собственное значение $\mathbf{J}^2$ запишем в виде $k^2\hbar^2$ на основании того, что так как $\mathbf{J}^2$ есть сумма квадратов эрмитовых операторов, то его собственные значения должны быть не отрицательными (т. е. положительными или равными нулю).

Доказательство. Для любого состояния ψ (оно может и не быть собственным состоянием Q):

$$(\psi, Q^2\psi) = (\psi, Q^+Q\psi) = \sum_n (\psi, Q^+\varphi_n)(\varphi_n, Q\psi) = \sum_n |(\varphi_n, Q\psi)|^2 \geqslant 0.$$

Здесь введен полный набор состояний ψ_n, удовлетворяющих условию $\sum_n \varphi_n\varphi_n^* = 1$. Такой оператор называется *положительным полуопределенным.*

Из всех операторов системы выберем те, которые коммутируют с J_x, J_y и J_z и, следовательно, с $\mathbf{J}^2$ и J_z. Выбранные операторы обозначим A, а их собственные значения a. Таким образом, состояние системы полностью характеризуется собственными значениями a, k^2 и m. Состояние системы обозначим $\psi(a, k^2, m)$, где для ясности собственные значения записаны не в виде индексов, а в виде аргументов. Величины A, $\mathbf{J}^2$ и J_z Дирак назвал *полным набором коммутирующих наблюдаемых* системы.

Мы не охарактеризовали систему подробно, так как приведенный аргумент справедлив в общем случае. Сконцентрируем свое внимание на состояниях с фиксированными значениями a и k^2. Сначала покажем, что возможные значения m для таких состояний ограничены.

Состояния $\psi(a, k^2, m)$ — собственные состояния оператора $J_x^2 + J_y^2 = \mathbf{J}^2 - J_z^2$ с собственным значением $(k^2 - m^2)\hbar^2$. С другой стороны, оператор $J_x^2 + J_y^2$ является положительным полуопределенным оператором, он не имеет отрицательных собственных значений. Следовательно, $k^2\hbar^2 - m^2\hbar^2 \geqslant 0$ или

$$|m| \leqslant k. \tag{3.26}$$

Векторы состояния $J_\pm\psi(a, k^2, m)$ — собственные состояния J_z с собственными значениями $m \pm 1$, так как с помощью (3.22) получаем

$$J_zJ_\pm\psi(a, k^2, m) = (J_\pm J_z \pm \hbar J_\pm)\psi(a, k^2, m) =$$
$$= (J_\pm m\hbar \pm \hbar J_\pm)\psi(a, k^2, m) = (m \pm 1)\hbar J_\pm\psi(a, k^2, m). \tag{3.27}$$

С другой стороны, операторы $J_\pm$ коммутируют с $\mathbf{J}^2$ и A, следовательно, состояния $J_\pm\psi(a, k^2, m)$ принадлежат к тем же собственным значениям k^2 и a этих операторов:

$$AJ_\pm\psi(a, k^2, m) = aJ_\pm\psi(a, k^2, m) \tag{3.28}$$

и аналогично

$$J^2J_\pm\psi(a, k^2, m) = \hbar^2k^2J_\pm\psi(a, k^2, m). \tag{3.29}$$

Применяя $J_\pm$ к состоянию $\psi(a, k^2, m)$ повторно, получаем новые состояния с теми же значениями a, $k^2\hbar^2$, но с новыми собственными значениями J_z: $(m+1)\hbar$, $(m+2)\hbar$, ... В силу условия (3.26) эту операцию можно повторять ограниченное число раз.

Это может быть лишь тогда, когда для некоторого значения m, обозначенного m_0,

$$J_+\psi(a, k^2, m_0) = 0. \tag{3.30}$$

Повторное применение оператора J_- дает состояния с собственными значениями $(m-1)\hbar$, $(m-2)\hbar$, ..., поэтому m должно иметь минимальное значение (обозначим его m_1), причем будет выполняться равенство

$$J_-\psi(a, k^2, m_1) = 0. \tag{3.31}$$

Из выражения (3.30) следует, что $J_-J_+\psi(a, k^2, m_0) = 0$, но с учетом (3.24) можно переписать это равенство в виде

$$(J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)\,\psi(a, k^2, m_0) = 0.$$

Следовательно,

$$(k^2 - m_0^2 - m_0)\,\hbar^2\psi(a, k^2, m_0) = 0,$$

т. е.

$$k^2 = m_0(m_0+1). \tag{3.32}$$

Аналогичным образом из равенства (3.31) с учетом (3.25) находим, что

$$k^2 = m_1(m_1-1). \tag{3.33}$$

Из (3.32) и (3.33) получим уравнение $m_0(m_0+1) = m_1(m_1-1)$, решая которое найдем, что $m_1 = -m_0$ или $m_1 = m_0+1$. Второе решение следует отбросить, так как предполагалось, что $m_0\hbar$ — наибольшее собственное значение J_z. Чтобы обозначения соответствовали стандартным, заменим m_0 на j.

Таким образом, показано, что возможные собственные значения J_z, соответствующие фиксированному для $\mathbf{J}^2$ собственному значению $j(j+1)$, пробегают область целых чисел от $+j$ до $-j$. Так как общее число таких значений $(2j+1)$ есть положительное целое число, то ограничение, накладываемое на j, есть j — целое, полуцелое или нуль.

В дальнейшем будем характеризовать состояния преимущественно числом j, а не $j(j+1)$. Множество состояний $\psi(a, j, m)$ с $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ называется *мультиплетом* с моментом количества движения j.

Отметим, что хотя $j(j+1)\,\hbar^2$ есть собственное значение $\mathbf{J}^2$, произведение $j\hbar$ имеет больший смысл, так как это наибольшее значение J_z в мультиплете.

3.2.2. Матричные элементы операторов момента количества движения. Найдем теперь матричные элементы операторов $\mathbf{J}$ в базисе состояний $\psi(a, j, m)$. Выше мы показали, что состоянию $J_+\psi(a, j, m)$ соответствуют собственные значения a, $j(j+1)\,\hbar^2$ и $(m+1)\,\hbar$ операторов A, $\mathbf{J}^2$ и J_z. Если предположить, что операторы A выбираются так, чтобы дополнять $\mathbf{J}^2$ и J_z, то любое состояние с этими собственными значениями должно быть со-

стоянием $\psi(a, j, m+1)$ с точностью до мультипликативной постоянной. Следовательно,

$$J_+\psi(a, j, m) = \rho_+(j, m)\psi(a, j, m+1). \tag{3.34}$$

Аналогично имеем

$$J_-\psi(a, j, m) = \rho_-(j, m)\psi(a, j, m-1). \tag{3.35}$$

Это можно записать иначе:

$$(\psi(a, j, m+1),\ J_+\psi(a, j, m)) = \rho_+(j, m)$$

или, так как $J_- = J_+^\dagger$,

$$(J_-\psi(a, j, m+1),\ \psi(a, j, m)) = \rho_+(j, m).$$

Следовательно,

$$(\psi(a, j, m),\ J_-\psi(a, j, m+1)) = \rho_+(j, m)^*.$$

Заменяя m в равенстве (3.35) $m+1$, получаем

$$(\psi(a, j, m),\ J_-\psi(a, j, m+1)) = \rho_-(j, m+1).$$

Следовательно,

$$\rho_-(j, m+1) = \rho_+(j, m)^*. \tag{3.36}$$

Отсюда получаем

$$J_+J_-\psi(a, j, m) = |\rho_+(j, m-1)|^2\psi(a, j, m);$$
$$J_-J_+\psi(a, j, m) = |\rho_+(j, m)|^2\psi(a, j, m).$$

Используя коммутационное соотношение $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$, получаем

$$|\rho_+(j, m-1)|^2 - |\rho_+(j, m)|^2 = 2m\hbar. \tag{3.37}$$

Это уравнение позволяет подсчитать $|\rho_+(j, m)|^2$ рекуррентно, начиная с $m = +j$.

В соответствии с уравнением (3.34) для $m = +j$ должно выполняться соотношение

$$\rho_+(j, +j) = 0, \tag{3.38}$$

чтобы не противоречить условию (3.30). Используя формулу для суммы арифметической прогрессии и уравнения (3.37) и (3.38), получаем

$$|\rho_+(j, m)|^2 = [j(j+1) - m(m+1)]\hbar^2.$$

Стандартный способ выбора фазы, называемый фазовым условием Кондона и Шортли, состоит в извлечении действительного положительного квадратного корня из этого выражения:

$$\rho_+(j, m) = \hbar[j(j+1) - m(m+1)]^{1/2} = \hbar[(j-m)(j+m+1)]^{1/2}. \tag{3.39}$$

Из равенства (3.36) следует

$$\rho_{-}(j, m) = \hbar [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2} = \hbar [(j+m)(j-m+1)]^{1/2}. \tag{3.40}$$

Из уравнения (3.40) видно, что условие $\rho_{-}(j, -j)=0$ необходимо для того, чтобы уравнение (3.35) было совместимо с уравнением (3.31).

Опуская знак a, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{J}^2\psi(j, m) = j(j+1)\hbar^2\psi(j, m); \\ &\mathbf{J}_z\psi(j, m) = m\hbar\psi(j, m); \\ &J_{\pm}\psi(j, m) = \hbar [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}\psi(j, m \pm 1). \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Следует подчеркнуть, что вывод этих уравнений основывается только на коммутационных соотношениях для J_x, J_y и J_z.

Можно проверить, что для целых j и m сферические гармоники $Y_{jm}(\theta, \varphi)$ удовлетворяют системе уравнений (3.41).

С математической точки зрения j и m могут быть полуцелыми. В действительности, когда этот случай осуществляется, операторы $\mathbf{J}$ выражаются матрицами.

Матричные элементы $\mathbf{J}^2$, J_z и $J_{\pm}$ относительно функций $\psi(j, m)$ получить легко. Эти операторы после применения к состоянию с заданным j дают состояние с тем же значением j, но, возможно, с другим значением m (или линейную комбинацию таких состояний). Следовательно, остается рассмотреть матричные элементы между состояниями с одним и тем же значением j. В этом случае будем считать, что состояния $\psi(j, m)$ нормированы каждое в отдельности на единицу, в то время как состояния с различными j или m ортогональны, так как принадлежат к разным собственным значениям эрмитова оператора ($\mathbf{J}^2$ или J_z). Таким образом, имеем

$$(\psi(j', m'), \quad \psi(j, m)) = \delta_{j'j}\,\delta_{m'm}.$$

Взяв скалярное произведение уравнений (3.41) и состояния $\psi(j, m')$, получим матричные элементы операторов $\mathbf{J}^2$, J_z и $J_{\pm}$. Из последнего уравнения найдем матричные элементы операторов J_x и J_y. Результат запишем в следующем виде:

$$(\psi(j, m), \mathbf{J}^2\psi(j, m)) = j(j+1)\hbar^2;$$

$$(\psi(j, m), \quad J_z\psi(j, m)) = m\hbar;$$

$$(\psi(j, m \pm 1), \quad J_x\psi(j, m)) = (\hbar/2)[(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2};$$

$$(\psi(j, m \pm 1), \quad J_y\psi(j, m)) = (i\hbar/2)[(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2}.$$

Для случая $j=1/2$ матричные элементы J_x, J_y и J_z относительно базисных состояний можно записать в виде 2×2 матриц:

$$(\psi(1/2, m'), \quad J_x\psi(1/2, m)) = (S_x)_{m'm} \text{ и т. д.}$$

Теперь используем так называемые матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $S_i = \hbar\sigma_i/2$, где индекс i принимает значения x, y и z. Матрицы Паули подчиняются коммутационным соотношениям

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad \text{и т. д.}, \tag{3.42}$$

выполняющимся в силу условия (3.19), и правилам перемножения

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \quad \text{и т. д.}, \tag{3.43}$$

из которых также следует соотношение (3.42).

§ 3.3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим теперь связь момента количества движения с инвариантностью относительно вращений. Чтобы правильно сориентироваться, опять начнем со случая из волновой механики.

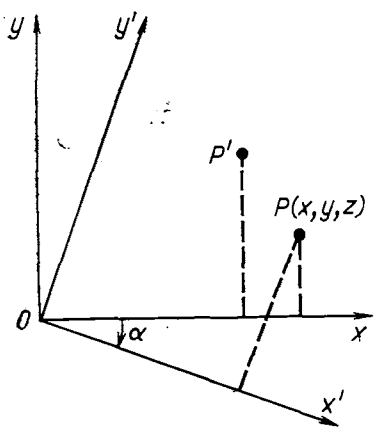


Рис. 3.1. Определение вращения Z_α

3.3.1. Операторы конечных поворотов. Рассмотрим поворот по часовой стрелке на угол α относительно оси z. Этот поворот описывается преобразованием координат:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha; \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha; \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Обозначим этот поворот Z_α и будем иногда ссылаться на него как на стандартный.

Поворот в плоскости xy показан на рис. 3.1. При пассивной интерпретации (см. § 2.2) система уравнений (3.44) дает координаты точки P в новой системе координат. С активной точки зрения уравнения (3.44) дают координаты новой точки P', полученной из точки P, но отнесенной к той же самой (нештрихованной) системе координат. При таком активном подходе действие поворота Z_α на заданную волновую функцию $\psi(x, y, z)$ дает новую волновую функцию $\psi'(x, y, z)$, определяемую соотношением

$$\psi'(x, y, z) = \psi[Z_\alpha^{-1}(x, y, z)].$$

Активный поворот функции ψ, определенный таким образом, происходит против часовой стрелки по отношению к осям x, y, z. Вектор, обозначаемый $\mathbf{Z}_\alpha^{-1}(x, y, z)$, имеет компоненты

$$(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha, z), \tag{3.45}$$

полученные в результате обращения уравнений (3.44) и опускания в них штрихов.

Из общего анализа следует, что функции ψ' и ψ связаны унитарным оператором, зависящим от рассмотренного выше поворота Z_α. Обозначим его $U(Z_\alpha)$:

$$\psi'(x, y, z) = U(Z_\alpha)\psi(x, y, z).$$

Тогда получим соотношение

$$U(Z_\alpha)\psi(x, y, z) = \psi(Z_\alpha^{-1}(x, y, z)), \tag{3.46}$$

которое определяет $U(Z_\alpha)$.

Перейдем к идентификации генератора поворотов вокруг оси z, считая, что поворот происходит на инфинитезимальный угол $\delta\alpha$. Подставив компоненты (3.45) в уравнение (3.46) и разложив его до первого порядка по $\delta\alpha$, получим

$$\psi'(x, y, z) = \psi(x, y, z) + y\delta\alpha\partial\psi/\partial x - x\delta\alpha\partial\psi/\partial y. \tag{3.47}$$

Определим генератор Q уравнением

$$U(Z_{\delta\alpha}) = 1 - i\,\delta\alpha Q/\hbar. \tag{3.48}$$

Подставляя (3.48) в (3.46) и сравнивая результат с (3.47), находим

$$Q = -i\hbar(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x) = L_z.$$

Теперь уравнение (3.48) принимает вид

$$U(Z_{\delta\alpha}) = 1 - i\delta\alpha L_z/\hbar. \tag{3.49}$$

Таким образом, генератор поворота вокруг оси z есть z-компонента момента количества движения. Из аналогичных расчетов следует, что операторы L_x и L_y — генераторы поворотов вокруг осей x и y.

Как и в случае трансляционной инвариантности, оператор $U(Z_\alpha)$, соответствующий конечному повороту, можно выразить через соответствующий генератор:

$$U(Z_\alpha) = \exp(-i\alpha L_z/\hbar). \tag{3.50}$$

Подобным же образом, если Y_β означает поворот на угол β вокруг оси y, то

$$U(Y_\beta) = \exp(-i\beta L_y/\hbar).$$

Аналогичная формула существует и для поворота вокруг оси x.

Можно показать, что поворот на угол ω вокруг произвольной оси, определенной единичным вектором $\hat{\mathbf{n}}$, представляется оператором

$$U(\hat{\mathbf{n}}, \omega) = \exp(-i\,\omega\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{L}/\hbar).$$

В отличие от трансляций, повороты вокруг разных осей не коммутируют, соответственно в общем случае не коммутируют и представляющие их операторы. Правила перемножения для конечных поворотов, как можно показать, приводят к коммутационным соотношениям (3.9) для генераторов L_x, L_y и L_z (подробнее об этом можно прочесть в книгах по групповой теории момента количества движения).

Для иллюстрации свойств операторов поворота и приведенных выше формул рассмотрим применение оператора $U(Z_\alpha)$ к собственному состоянию импульса $\psi = \exp(ipx/\hbar)$, соответствующему импульсу $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$.

С помощью соотношения (3.46) найдем состояние после поворота:

$$U(Z_\alpha)\psi = \exp[i(px\cos\alpha + py\sin\alpha)/\hbar],$$

которое, как мы и ожидали, является состоянием с импульсом $(p\cos\alpha, p\sin\alpha, 0)$.

Для иллюстрации применения операторов поворота покажем, как собственное состояние z-компоненты момента количества движения можно охарактеризовать его свойствами относительно поворотов.

Прежде всего отметим, что если мы перейдем к сферическим координатам (r, θ, φ), то уравнение (3.46) для $U(Z_\alpha)$ примет простой вид:

$$U(Z_\alpha)\psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi - \alpha). \tag{3.51}$$

Пусть теперь ψ_{nlm} (индексом n обозначены другие квантовые числа) есть собственное состояние момента количества движения:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Из вида сферической гармонической функции (в частности, из ее зависимости от φ) следует, что

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi - \alpha) = \exp(-im\alpha)\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi).$$

Уравнение (3.51) принимает теперь вид

$$U(Z_\alpha)\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \exp(-im\alpha)\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi). \tag{3.52}$$

Это можно также получить с помощью формулы (3.50). Таким образом, для собственного состояния J_z поворот относительно оси z означает умножение вектора состояния на фазовый множитель, т. е. ψ_{nlm} — собственное состояние оператора $U(Z_\alpha)$ с собственным значением $\exp(-im\alpha)$, имеющим единичный модуль в соответствии с тем фактором, что $U(Z_\alpha)$ является унитарным оператором.

Если уравнение (3.52) выполняется для состояния ψ, можно сказать, что ψ есть собственное состояние J_z с собственным значением m. (В гл. 4 еще представится случай использовать этот более общий метод для характеристики собственного состояния момента количества движения.)

Все сказанное до сих пор относилось к одной частице. Если частиц несколько, то волновая функция содержит координаты всех этих частиц. При повороте системы координат координаты всех частиц также испытывают вращение. Ясно, что уравнение (3.46), определяющее оператор поворота, теперь надо заменить на

$$U(Z_\alpha)\,\psi(x_1y_1z_1;\quad x_2y_2z_2;\quad \ldots) = \psi\left(Z_\alpha^{-1}(x_1y_1z_1),\ Z_\alpha^{-1}(x_2y_2z_2),\ \ldots\right).$$

Расчет, который привел раньше к формуле (3.49), дает

$$U(Z_\alpha) = 1 - (\mathrm{i}\,\alpha/\hbar)\left(L_z^{(1)} + L_z^{(2)} + \ldots\right) + O(\alpha^2), \qquad (3.53)$$

где $L_z^{(n)}$ означает z-компоненту момента количества движения частицы с номером n:

$$L_z^{(n)} = -\mathrm{i}\hbar\,(x_n\partial/\partial y_n - y_n\partial/\partial x_n).$$

Таким образом, теперь генератор поворота вокруг оси z есть сумма z-компонент момента количества движения или, другими словами, является z-компонентой полного момента количества движения.

В случае одной частицы со спином оператор вращения для поворота Z есть

$$U(Z_\alpha) = \exp\left[-\mathrm{i}\,\alpha\,(L_z + S_z)/\hbar\right], \qquad (3.54)$$

а для поворота Y

$$U(Y_\beta) = \exp\left[-\mathrm{i}\,\beta\,(L_y + S_y)/\hbar\right]. \qquad (3.55)$$

Так как операторы **L** и **S** коммутируют друг с другом, эти выражения можно переписать в следующем виде:

$$U(Z_\alpha) = \exp(-\mathrm{i}\,\alpha L_z/\hbar)\exp(-\mathrm{i}\,\alpha S_z/\hbar);$$

$$U(Y_\beta) = \exp(-\mathrm{i}\beta L_y/\hbar)\exp(-\mathrm{i}\beta S_y/\hbar).$$

Эти выражения становятся понятными, если обратить внимание на следующий факт: чтобы выделить из заданного состояния состояние, правильно преобразующееся при поворотах, мы должны подвергать повороту как пространственные, так и спиновые компоненты вектора состояния (см. § 3.4).

3.3.2. Инвариантность относительно вращения и закон сохранения момента количества движения. В элементарной квантовой механике можно проверить, остается ли оператор гамильтона инвариантным относительно вращения. В ядерной физике или физике элементарных частиц проблема часто возникает при нахождении гамильтониана или оператора рассеяния из экспериментальных данных. Поэтому предположим, что инвариантность относительно вращения существует, и посмотрим, какие ограничения она накладывает, например, на оператор рассеяния. Проиллюстрируем коротко оба эти подхода.

Инвариантность гамильтониана H относительно вращений выражается соотношением

$$U(R)\,H = HU(R), \qquad (3.56)$$

где R — любой поворот системы координат. Выбирая в качестве R инфинитезимальный поворот вокруг оси z, можно показать, что $J_zH=HJ_z$ аналогично $J_xH=HJ_x$, $J_yH=HJ_y$. Объединяя эти уравнения, имеем

$$[\mathbf{J}, H] = \mathbf{J}H - H\mathbf{J} = 0. \tag{3.57}$$

Следовательно, можно сказать, что инвариантность относительно вращения требует, чтобы три оператора $\mathbf{J}$ момента количества движения коммутировали с гамильтонианом H. Тогда все собственные состояния H можно считать собственными состояниями $\mathbf{J}^2$ и J_z.

Отсюда вытекают все обычные следствия, связанные с моментом количества движения. Отметим, что $\mathbf{J}$ здесь является суммой орбитальных моментов количества движения и спинов всех частиц системы.

Теперь рассмотрим процесс рассеяния или реакции. Согласно п.2.1.3, из соотношения (3.56) следует, что оператор $U(R)$ коммутирует с оператором рассеяния S:

$$U(R)\,S = SU(R). \tag{3.58}$$

Можно считать это основным постулатом инвариантности относительно вращений. Аналогично соотношение (3.58) требует, чтобы

$$\mathbf{J}S = S\mathbf{J}, \tag{3.59}$$

следовательно,

$$\mathbf{J}^2S = S\mathbf{J}^2. \tag{3.60}$$

Рассмотрим определенную реакцию, обозначив ее $a \to b$. Если начальное состояние есть φ_a, а конечное состояние φ_b, то амплитуда этого процесса задается элементом S-матрицы $(\varphi_b, S\varphi_a)$.

Какие требования налагает инвариантность относительно вращения на элемент S-матрицы? Для матричного элемента φ_b—φ_a выражения (3.59) получим $(\varphi_b, \mathbf{J}S\varphi_a) = (\varphi_b, S\mathbf{J}\varphi_a)$.

Если состояния φ_a и φ_b являются собственными состояниями $\mathbf{J}^2$ и J_z и имеют различные полные моменты количества движения или их проекции на ось z, то можно сделать вывод, что амплитуда процесса $a \to b$ равна нулю. Зафиксируем наличие этих собственных значений, представив состояния в виде φ_{ajm}. Тогда

$$(\varphi_{bj'm'}, S\varphi_{ajm}) = \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}\,(\varphi_{bjm}, S\,\varphi_{ajm}).$$

Далее из инвариантности относительно вращения следует, что выражение (φ_{bjm}, S_{ajm}) не должно зависеть от m. Если говорить полуклассическим языком, то m описывает ориентацию вектора момента количества движения относительно соответственно выбранного направления z, но инвариантность относительно вращения запрещает любую зависимость вероятности перехода $|(\varphi_b, S\varphi_a)|^2$ от этой ориентации.

Формально это можно доказать, заметив, что операторы $J_\pm$ коммутируют с S. Так, в частности, $J_+S=S_+J$. Взяв матричный элемент этого уравнения между собственными состояниями $\varphi_{bjm} - \varphi_{aj,m-1}$ момента количества движения, найдем

$$(\varphi_{bjm},\ J_+S\varphi_{aj,m-1}) = (\varphi_{bjm},\ SJ_+\varphi_{aj,m-1}).$$

Так как $J_+^\dagger = J_-$, то

$$(J_-\varphi_{bjm},\ S\varphi_{aj,m-1}) = (\varphi_{bjm},\ SJ_+\varphi_{aj,m-1})$$

или с помощью (3.47) получим

$$[(j+m)(j-m+1)]^{1/2}(\varphi_{bj,m-1},\ S\varphi_{aj,m-1}) =$$

$$= [(j-m+1)(j+m)]^{1/2}(\varphi_{bjm},\ S\varphi_{ajm}).$$

Отсюда видно, что матричный элемент имеет одинаковые значения для разных m при одном и том же j. Запишем это в общем виде:

$$(\varphi_{bj'm'},\ S_-\varphi_{ajm}) = \delta_{j'j}\,\delta_{m'm}\,S^j_{ba}. \qquad (3.61)$$

Ранее мы уже предположили, что состояния a и b есть собственные состояния полного момента количества движения. Однако начальное состояние и состояние, детектируемое в эксперименте по рассеянию, не являются собственными состояниями полного момента количества движения. Как правило, они представляют собой собственные состояния импульса (плоские волны).

Процесс, связывающий состояния типа плоских волн с собственными состояниями момента количества движения и по этой причине использующий следствия из инвариантности относительно вращения в рассеянии и реакциях, называется анализом по парциальным волнам. Он будет рассмотрен в следующей главе. Для этого потребуется описание действия конечного поворота R на собственное состояние φ_{jm} момента количества движения.

§ 3.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ПОВОРОТОВ

Выше мы ввели понятие унитарных операторов $U(R)$, представляющих собой действие конечного поворота R на векторы состояния системы. Теперь рассмотрим подробно, как этот оператор действует на собственные состояния операторов J^2 и J_z.

3.4.1. Матричные элементы конечных поворотов. Первый этап заключается в том, чтобы найти для описания наиболее общих поворотов координат подходящий набор параметров. Эта проблема ничем не отличается от описания с помощью углов Эйлера движения твердого тела с одной жестко закрепленной точкой.

Используем вращения для того, чтобы описать преобразование поворота волновой функции с активной точки зрения. По аналогии с вращением твердого тела этот процесс можно предста-

вить наглядно: будем считать, что волновая функция описывает пространство, заполненное твердым телом с переменной плотностью. Активный поворот волновой функции соответствует повороту твердого тела в пространстве вокруг начала координат. Представим себе множество систем декартовых координат, расположенных в этом теле, и соответствующее ему множество систем, расположенных в пространстве. При положительном повороте вокруг оси Ox ось Oy будет двигаться по направлению к оси Oz. Аналогично определяется положительный поворот вокруг двух других осей.

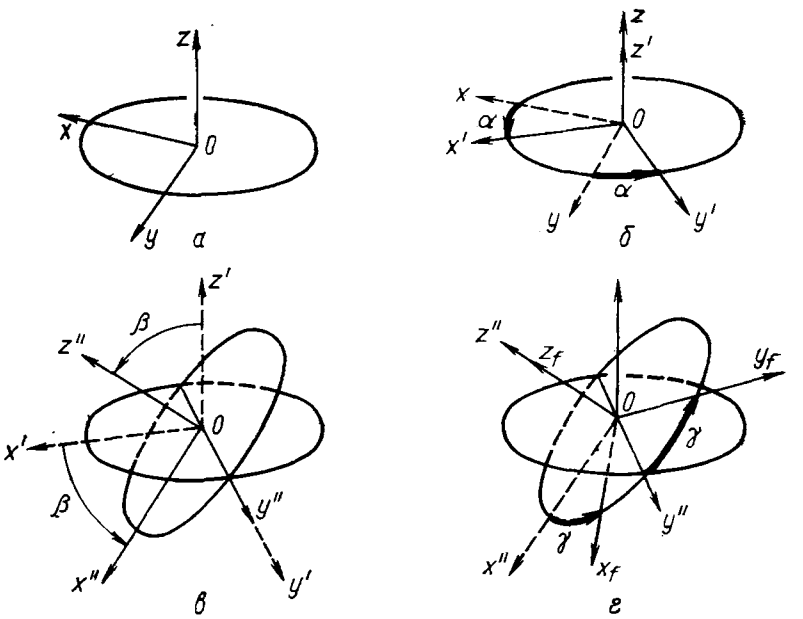


Рис. 3.2. Последовательность поворотов, с помощью которых осуществляется общий поворот системы координат с углами Эйлера (α, β, γ)

Поворот на углы Эйлера α, β, γ есть преобразование из системы координат Σ (рис. 3.2, *а*) в систему Σ_f (см. рис. 3.2, *б—г*). Этот поворот определяется положительным поворотом:

1) на угол α вокруг оси z, переводящим систему $\Sigma(x, y, z)$ в $\Sigma'(x', y', z')$;

2) на угол β вокруг оси y', переводящим $\Sigma'(x', y', z')$ в $\Sigma''(x'', y'', z'')$;

3) на угол γ вокруг оси z'', переводящим $\Sigma''(x'', y'', z'')$ в $\Sigma_f(x_f, y_f, z_f)$.

Существуют и другие определения углов Эйлера, но приведенное выше универсально именно для квантовой механики. Углы α, β, γ являются теми тремя параметрами, которые характеризу-

ют окончательную ориентацию связанной с телом системы координат Σ_f относительно осей, связанных, в свою очередь, с пространством. Обозначим поворот на эти углы $R(\alpha, \beta, \gamma)$. Данные углы меняются в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$; $0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$. Если $\beta = 0$, то общий поворот является поворотом вокруг исходной оси z на угол $\alpha + \gamma$. В этом случае имеет значение только сумма углов α и γ.

Оператор, соответствующий повороту $R(\alpha, \beta, \gamma)$, задается выражением

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) = U(Z''_\gamma)\, U(Y'_\beta)\, U(Z_\alpha) =$$

$$= \exp(-iJ''_z\gamma) \exp(-iJ'_y\beta) \exp(-iJ_z\alpha), \qquad (3.62)$$

где штрих означает, что второй и третий повороты относятся к повернутым системам координат.

Второй этап расчета заключается в преобразовании формулы таким образом, чтобы можно было отнести все величины к исходной системе осей (без штрихов), связанной с пространством. Проделаем это следующим образом.

Оператор J'_y есть генератор поворотов относительно оси y', получающейся из оси y в результате поворота Z_α. Таким образом, генератор J'_y и остальные компоненты J'_z и J'_x имеют точно такие же свойства в штрихованной системе координат Σ', какие имели компоненты J_y, J_z и J_x в системе Σ. Значит, в частности,

$$J'_y = U(Z_\alpha)\, J_y U(Z_\alpha)^+. \qquad (3.63)$$

Это пример преобразования (2.30).

Из формулы (3.63) следует, что

$$\exp(-i\beta J'_y) = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(i\alpha J_z). \qquad (3.64)$$

Аналогично, так как J''_z относится к оси, полученной последовательными поворотами Z_α и Y'_β вокруг оси z, имеем

$$\exp(-i\gamma J''_z) = \exp(-i\beta J'_y) \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\gamma J_z) \times$$

$$\times \exp(i\alpha J_z) \exp(i\beta J'_y). \qquad (3.65)$$

Подставляя (3.65) и (3.64) в (3.62) и еще раз используя выражение (3.64), находим

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(-i\gamma J_z). \qquad (3.66)$$

Этот простой, но важный результат интерпретируется следующим образом: последовательность поворотов, описанных выше, эквивалентна повороту на угол γ вокруг оси z, следующему за ним на угол β вокруг оси y и затем на угол α вокруг оси z. В этой последовательности все повороты относятся к осям *исходной, фиксированной в пространстве системы отсчета* $\Sigma(x, y, z)$.

Применим теперь унитарный оператор вращения $U(R(\alpha, \beta, \gamma))$ к собственной функции момента количества движения $\psi(j, m)$,

свойства которой по отношению к операторам J_x, J_y и J_z изучены в § 3.2.

Так как $\psi(j, m)$ есть собственное состояние J_z, то имеем

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma))\psi(j, m) = \exp(-i\alpha J_z)\exp(-i\beta J_y)\exp(-i\gamma J_z)\psi(j, m) =$$
$$= \exp(-i\alpha J_z)\exp(-i\beta J_y)\exp(-im\gamma)\psi(j, m). \qquad (3.67)$$

Теперь оператор J_y уже не диагонален по отношению к базису $\psi(j, m)$. Однако отличны от нуля матричные элементы J_y только между состояниями с одним и тем же j, так что в наиболее общем случае $\exp(-i\beta J_y)\ \psi(j, m)$ есть линейная комбинация состояний $\psi(j, m)$. Коэффициенты этой линейной комбинации обозначим $d^j_{m'm}(\beta)$. Таким образом,

$$\exp(-i\beta J_y)\psi(j, m) = \sum_{m'=-j}^{j} \psi(j, m') d^j_{m'm}(\beta). \qquad (3.68)$$

Коэффициенты здесь записаны так, чтобы подчеркнуть порядок индексов. Комбинируя уравнения (3.67) и (3.68), получаем

$$U(R(\alpha, \beta, \gamma))\psi(j, m) = \sum_{m'=-j}^{j} \psi(j, m') D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma), \qquad (3.69)$$

где

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(-im'\alpha) d^j_{m'm}(\beta)\exp(-im\gamma). \qquad (3.70)$$

Эти функции называются D-функциями Вигнера (или спиральными D-функциями). Для их вычисления удобнее всего использовать методы теории групп. Существуют таблицы этих функций.

Взяв скалярное произведение обеих сторон уравнения (3.69) и состояния $\psi(j, m')$, получим

$$(\psi(j, m'),\ U(R(\alpha, \beta, \gamma))\psi(j, m)) = D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Это соотношение показывает, что D-функции есть матричные элементы оператора вращения относительно базиса $\psi(j, m)$.

Функции $d^j_{m'm}(\beta)$ — это матричные элементы оператора $\exp(-i\beta J_y)$ в базисе собственных состояний момента количества движения. В § 3.2 показано, что в этом базисе J_y имеет чисто мнимые матричные элементы, так что iJ_y и, следовательно, $\exp(-i\beta J_y)$ имеют чисто вещественные матричные элементы. Для данного j функции $d^j_{m'm}(\beta)$ образуют $(2j+1)\times(2j+1)$ матрицу с действительными коэффициентами, являющимися функциями β. Например, для $j=1/2$ и $j=1$

$$d^{1/2}_{m'm}(\beta) = \begin{matrix} m=+1/2 & -1/2 \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} m'=+1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \qquad (3.71)$$

$$d^{1}_{m'm}(\beta) = \begin{matrix} & m=+1 & 0 & -1 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} (1+\cos\beta)/2 & -\sin\beta/\sqrt{2} & (1-\cos\beta)/2 \\ \sin\beta/\sqrt{2} & \cos\beta & -\sin\beta/\sqrt{2} \\ (1-\cos\beta)/2 & \sin\beta/\sqrt{2} & (1+\cos\beta)/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} m'=+1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \quad (3.72)$$

Чтобы на простом примере проиллюстрировать использование этих величин, рассмотрим преобразование спиновых собственных функций частицы со спином 1/2. Предположим, что частица находится в начале координат, так что нет необходимости рассматривать ее орбитальное движение.

Введем специальные обозначения для спиновых собственных функций, ранее обозначаемых $\psi(j, m)$: $\varphi_+ = \psi(1/2, +1/2)$; $\varphi_- = \psi(1/2, -1/2)$. Они удовлетворяют соотношениям

$$S_z\varphi_+ = +\hbar\varphi_+/2; \quad S_z\varphi_- = -\hbar\varphi_-/2. \quad (3.73)$$

Матрица S_z относительно базиса $\varphi_\pm$ есть просто матрица Паули σ_z, умноженная на $(1/2)\hbar$. Поэтому можно записать $\varphi_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\varphi_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ и соотношения (3.73) рассматривать как матричные уравнения. Общее спиновое состояние частицы с $S=1/2$ запишем в виде

$$\psi = a\varphi_+ + b\varphi_- = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}.$$

Оно называется *спинором* и является нормированным, если $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Можно показать, что собственные функции спина, соответствующие одной частице с проекцией спина $\pm\hbar/2$ на произвольное направление в пространстве, определяемое полярными углами (θ, φ), получаются в результате действия на $\varphi_\pm$ соответствующего оператора поворота $U(R)$. Поворот, который переводит ось z в направление (θ, φ), через углы Эйлера записывается в виде $R(\varphi, \theta, 0)$, а это и есть вращение на угол θ вокруг оси y и последующий поворот на угол φ вокруг оси z. Можно выбрать и другие варианты.

Для $\lambda = \pm 1/2$ теперь имеем

$$U(R(\varphi, \theta, 0))\varphi_\lambda = \sum_{\mu=\pm 1/2} \varphi_\mu D^{(1/2)}_{\mu\lambda}(\varphi, \theta, 0) =$$
$$= \sum_\mu \varphi_\mu \exp(-i\mu\varphi)\, d^{1/2}_{\mu\lambda}(\theta).$$

Обозначив состояние после поворота φ'_λ, с помощью явных формул (3.71) получим

$$\varphi'_+ = \cos(\theta/2)\exp(-i\varphi/2)\varphi_+ + \sin(\theta/2)\exp(i\varphi/2)\varphi_-;$$
$$\varphi'_- = -\sin(\theta/2)\exp(-i\varphi/2)\varphi_+ + \cos(\theta/2)\exp(i\varphi/2)\varphi_-.$$

В обозначениях векторных столбцов это выглядит так:

$$\varphi'_{+} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)\exp(-i\varphi/2) \\ \sin(\theta/2)\exp(i\varphi/2) \end{bmatrix}; \tag{3.74}$$

$$\varphi'_{-} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta/2)\exp(-i\varphi/2) \\ \cos(\theta/2)\exp(i\varphi/2) \end{bmatrix}. \tag{3.75}$$

Эти выражения есть нормированные собственные функции спина в направлении (θ, φ).

Наличие в формулах половинных углов характерно для системы со спином 1/2. Отсюда следует, что если сделать поворот на угол 2π вокруг некоторой оси (например, оси y, что соответствует подстановке $\theta=2\pi$, $\varphi=0$ в приведенных выше формулах), то $\varphi'_{\pm}=-\varphi_{\pm}$. Хотя поворот на угол 2π означает отсутствие каких-либо геометрических изменений, поворот собственных функций со спином 1/2 на 2π приводит к изменению знака. Этот фазовый множитель является общим для обоих спиновых состояний и не приводит ни к каким наблюдаемым следствиям. Обычно поворот на 2π никак не фиксируется, и если применить два или несколько поворотов к собственной функции со спином 1/2, то эффективный поворот может в сумме составить более чем 2π радиан, в случае чего вектор состояния изменит знак. Поэтому говорят, что собственные функции для спина 1/2 двузначны. Поворот на угол 4π при этом знака не меняет. Замечания по поводу двузначности применимы ко всем состояниям с полуцелыми j, что следует из вида матрицы поворота $D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$. Для полуцелого j зависимость от α и γ выражается через $\alpha/2$ и $\gamma/2$, а $d^{j}_{m'm}(\beta)$ включает в себя нечетные или четные степени $\cos(\beta/2)$ и $\sin(\beta/2)$ в зависимости от того, является ли j полуцелым или целым соответственно.

3.4.2. Теория групп и повороты. Для описания поворотов введем некоторую терминологию из теории групп. Раньше мы определяли поворот углами Эйлера, но здесь лучше использовать 3×3-матрицы коэффициентов, задающих координаты преобразованной точки $\mathbf{r}'$ через координаты исходной точки $\mathbf{r}$. Используя (x_1, x_2, x_3) вместо (x, y, z), получаем $x'_i = \sum_j R_{ij}x_j$, где, как обычно, все индексы в суммах пробегают значения от 1 до 3. Стандартный поворот (3.48) обозначается матрицей

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица ортогональна, т. е. удовлетворяет соотношению

$$RR^T = R^TR = 1, \tag{3.76}$$

где R^T означает матрицу, транспонированную к матрице R с компонентами $(R^T)_{ij}=R_{ji}$, а 1 означает единичную матрицу δ_{ij}. Отметим также, что определитель R положителен:

$$\det(R) = +1. \tag{3.77}$$

Из теоремы Эйлера (из механики твердого тела) следует, что любая матрица, удовлетворяющая условиям (3.76) и (3.77), соответствует повороту вокруг некоторой оси на некоторый угол. Уравнение (3.76) означает, что при таком повороте расстояния от начала координат сохраняются и ортогональные направления остаются ортогональными.

Уравнение (3.77) исключает преобразование

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

являющееся операцией пространственной инверсии, и все произведения P с поворотами. Без потери общности их можно рассмотреть отдельно.

Набор всех 3×3-матриц вращений образует группу вращений. Это доказывается проверкой аксиом § 2.2 для этого случая.

Предположим, что с помощью поворота R мы переводим x в x': $x'_j = \sum_i R_{ji} x_i$, затем вторичным поворотом S переводим x' в x'': $x''_k = \sum_j S_{kj} x'_j$. В этом случае результирующее преобразование можно записать в виде $x''_k = \sum_i T_{ki} x_i$, где матрица преобразования имеет вид

$$T_{ki} = \sum_j S_{kj} R_{ji}. \tag{3.78}$$

Но T — ортогональная матрица, если ортогональны R и S. Действительно, по правилу транспонирования имеем

$$(SR)^T = R^T S^T \quad \text{и} \quad T^T T = (SR)^T SR = R^T S^T SR = R^T R = 1.$$

Аналогично $TT^T = 1$. Подобным же образом из полезной теоремы о детерминанте произведения матриц

$$\det(SR) = \det(S) \cdot \det(R)$$

следует, что $\det(T) = +1$.

Таким образом, поворот R и следующий за ним поворот S эквивалентны одному-единственному повороту T, параметры которого можно в принципе получить из параметров поворотов R и S с помощью уравнения (3.78). Уравнение (3.76) показывает, что матрица поворота, обратного повороту R, просто задается матрицей R^T, так как их произведение есть единичная матрица, соответствующая отсутствию вращения (тождественное преобразование группы вращений).

Согласно § 2.2, унитарные операторы $U(R)$, соответствующие поворотам R, удовлетворяют условию $U(S)U(R) = U(T)$, если $SR = T$.

Следовательно, можно сказать, что множество $U(R)$ образует *представление* группы вращений унитарными операторами. Эти операторы действуют в гильбертовом пространстве состояний, ко-

торое бесконечномерно. Если выбрать полный ортонормированный базис состояний в гильбертовом пространстве, то относительно этого базиса $U(R)$ определяется бесконечной матрицей (как и в случае любого оператора в матричном представлении квантовой механики).

Теперь введем для операторов $U(R)$ понятия инвариантного и неприводимого подпространств. Эти общие определения применимы к любой группе.

Может оказаться, что при соответствующем выборе базиса подмножество V базисных функций будет обладать тем свойством, что если оператор произвольного вращения $U(R)$ применить к любой из базисных функций ψ пространства V, то результирующая функция $U(R)\psi$ будет линейной комбинацией базисных функций этого подмножества. Геометрически множество базисных функций V образует подпространство всего гильбертова пространства состояний. При этом только что описанное условие означает, что если $U(R)$ (для любого R) применить к какому-нибудь вектору этого подпространства, то результирующий вектор также будет (целиком) лежать внутри этого подпространства. Такое подпространство называется *инвариантным подпространством* операторов $U(R)$-группы. Посмотрим, можно ли найти еще меньшее подпространство для подпространства V, обладающее теми же свойствами. Если да, то исходное подпространство V называется *приводимым*. Если нет, то подпространство V называется *неприводимым*.

Проиллюстрируем эту терминологию с помощью результатов для группы вращений. Предположим, что мы выбрали базис состояний таким, чтобы он был образован собственными состояниями полного момента количества движения и его z-компоненты. Обозначим эти состояния $\psi(a, j, m)$. Здесь a представляет собой другие числа, характеризующие состояние. Мы уже видели, что если произвольный поворот применить к $\psi(a, j, m)$, то результирующее состояние будет линейной комбинацией состояний с теми же значениями a и j:

$$U(R)\psi(a, j, m) = \sum_{m'} \psi(a, j, m') D^{(j)}_{m'm}(R). \tag{3.79}$$

Таким образом, множество $(2j+1)$-состояний $\psi(a, j, m)$, $-j \leqslant m \leqslant +j$ образует базис инвариантного подпространства для операторов $U(R)$. Это верно для каждого j. С помощью математического аппарата теории групп можно показать, что такое множество состояний образует базис неприводимого подпространства. Это означает, что нельзя образовать новые комбинации состояний с числом меньшим чем $(2j+1)$, которые при всех поворотах преобразовывались бы только друг через друга.

Для иллюстрации рассмотрим все собственные функции связанных состояний для бесспинового электрона в кулоновском потенциале. Множество всех собственных функций $\psi(n, l, m)$ имеет с фиксированным значением n одну и ту же энергию. Множество таких состояний образует инвариантное подпространство для груп-

пы вращения, но это подпространство не является неприводимым. С другой стороны, $(2l+1)$-состояние $\psi(n, l, m)$, соответствующее фиксированным значениям n и l, образует базис неприводимого подпространства.

Теперь определим неприводимое прсдставление. Применяя оператор поворота $U(R)$ к каждому элементу базиса $\psi(a, j, m)$ для неприводимого подпространства, получаем такую же матрицу коэффициентов $D^{(j)}_{m'm}(R)$, как и в выражении (3.79).

Применив далее к (3.69) вращение S, получим

$$U(S)\,U(R)\,\psi(a, j, m) = U(S)\sum_{m'}\psi(a, j, m')\,D^{(j)}_{m'm}(R) =$$

$$= \sum_{m'} U(S)\,\psi(a, j, m')\,D^{(j)}_{m'm}(R) = \sum_{m'}\sum_{m''}\psi(a, j, m'')\,D^{(j)}_{m''m}(S)\,D^{(j)}_{m'm}(R), \tag{3.80}$$

где введена матрица $D^{(j)}_{m''m'}(S)$, соответствующая вращению S. Но оператор в левой части уравнения есть просто $U(T)$, где $T=SR$, а

$$U(T)\,\psi(a, j, m) = \sum_{m''}\psi(a, j, m'')\,D^{(j)}_{m''m}(T). \tag{3.81}$$

Сравнивая два последних уравнения, получаем

$$D^{(j)}_{m''m}(T) = \sum_{m'} D^{(j)}_{m''m'}(S)\,D^{(j)}_{m'm}(R). \tag{3.82}$$

Отсюда ясно, что для заданного j матрица, соответствующая произведению двух вращений, равна произведению матриц, соответствующих этим двум вращениям. В связи с этим принято говорить, что матрицы $D^{(j)}_{m'm}(R)$ образуют *представление* группы вращений, причем состояния $\psi(a, j, m)$ образуют базис этого представления. Если, как в этом случае, линейная оболочка базиса образует неприводимое подпространство, то представление называется *неприводимым*.

Если R и S — вращения вокруг оси z, то из (3.70) при $\beta=\gamma=0$ следует, что уравнение (3.82) выполняется. Если R и S — вращения вокруг оси y на углы β и β' соответственно, то из уравнения (3.82) получаем тождество, которому удовлетворяют матрицы $d^{j}_{m'm}$:

$$d^{j}_{m''m}(\beta' + \beta) = \sum_{m'} d^{j}_{m''m'}(\beta')\,d^{j}_{m'm}(\beta). \tag{3.83}$$

3.4.3. Свойства функций $d^{j}_{m'm}(\beta)$. Протабулируем свойства функций вращения $d^{j}_{m'm}(\beta)$, которые, как мы уже видели, являются единственными нетривиальными составляющими в определении функций $D^{j}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$. Дополнительные свойства и вывод приведенных ниже соотношений можно найти в стандартных учебниках по квантовой теории момента количества движения [63, 152].

Симметрии:

$$d^j_{\mu\lambda}(\beta) = d^j_{-\lambda,\,-\mu}(\beta); \tag{3.84а}$$

$$= (-1)^{\mu-\lambda} d^j_{\lambda\mu}(\beta); \tag{3.84б}$$

$$= (-1)^{\mu-\lambda} d^j_{-\mu,\,-\lambda}(\beta); \tag{3.84в}$$

$$d^j_{\mu\lambda}(\pi-\beta) = (-1)^{j+\mu} d^j_{\mu,\,-\lambda}(\beta); \tag{3.85а}$$

$$d^j_{\mu\lambda}(-\beta) = d^j_{\lambda\mu}(\beta); \tag{3.85б}$$

$$d^j_{\mu\lambda}(\pi+\beta) = (-1)^{j+\mu} d^j_{-\mu,\,\lambda}(\beta). \tag{3.85в}$$

Отметим, что $j \pm \mu$ и $\mu \pm \lambda$ — всегда целые числа.

Специальные значения:

$$d^j_{\mu\lambda}(0) = \delta_{\mu\lambda}; \tag{3.86а}$$

$$d^j_{\mu\lambda}(\pi) = (-1)^{j-\lambda}\delta_{\mu,\,-\lambda}, \tag{3.86б}$$

$$d^j_{\mu\lambda}(-\pi) = (-1)^{j+\lambda}\delta_{\mu,\,-\lambda}; \tag{3.86в}$$

$$d^j_{\mu\lambda}(2\pi) = (-1)^{2j}. \tag{3.86г}$$

Если $j = l$ — целое число, то

$$d^l_{m0}(\beta) = (-1)^m [(l-m)!/(l+m)!]^{1/2} P^m_l(\cos\beta); \tag{3.87а}$$

$$d^l_{0m}(\beta) = [(l-m)!/(l+m)!]^{1/2} P^m_l(\cos\beta); \tag{3.87б}$$

$$d^l_{00}(\beta) = P_l(\cos\beta), \tag{3.87в}$$

где P_l и P^m_l — полином Лежандра и присоединенная функция Лежандра соответственно. Из этих формул и выражения (3.15) получим

$$D^{(l)*}_{m0}(\alpha, \beta, 0) = [4\pi/(2l+1)]^{1/2} Y_{lm}(\beta, \alpha). \tag{3.87г}$$

Ортогональность и полнота:

$$\int_0^\pi d^{j_1}_{\mu\lambda}(\beta)\, d^{j_2}_{\mu\lambda}(\beta) \sin\beta d\beta = [2/(2j_1+1)]\,\delta_{j_1 j_2}; \tag{3.88а}$$

$$\sum_j [(2j+1)/2]\, d^j_{\mu\lambda}(\beta)\, d^j_{\mu\lambda}(\beta') = \delta(\cos\beta - \cos\beta'). \tag{3.88б}$$

§ 3.5. ВЕКТОРНОЕ СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

3.5.1. Коэффициенты Клебша — Гордана. Предположим, что система состоит из двух частей a и b, момент количества движения каждой из которых описывается оператором момента количества движения $\mathbf{J}_a$ или $\mathbf{J}_b$. Эти части a и b могут быть, например, спинами двух частиц или спином и орбитальным моментом количества движения одной частицы. В этих случаях можно считать

моменты количества движения кинематически независимыми. Это выражается равенством

$$[\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_b] = 0,$$

означающим, что можно задавать собственные значения J_a^2 и J_{az}, J_b^2 и J_{bz} по отдельности. Возможное состояние всей системы, являющееся собственным состоянием этих четырех операторов, в этом случае имеет вид $\psi_a(j_a, m_a)\psi_b(j_b, m_b)$. Определив полный момент количества движения

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_a + \mathbf{J}_b, \tag{3.89}$$

z-компонента которого $J_z = J_{az} + J_{bz}$, увидим, что $\psi_a(j_a, m_a)\psi_b(j_b, m_b)$ — собственное состояние J_z с собственным значением $m_a + m_b$. Функция $\psi_a\psi_b$ может не быть собственной функцией квадрата полного момента количества движения

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_a + \mathbf{J}_b)^2 = \mathbf{J}_a^2 + \mathbf{J}_b^2 + 2\mathbf{J}_a\mathbf{J}_b \tag{3.90}$$

из-за его последнего члена. В общем случае это состояние будет линейной комбинацией собственных функций $\psi(j, m)$ для J^2 и J_z с разными значениями j, но всегда с одним и тем же значением $m = m_a + m_b$. Это выражается формулой

$$\psi_a(j_a, m_a)\psi_b(j_b, m_b) = \sum_j G^{jm}_{j_a m_a j_b m_b}\psi(j, m). \tag{3.91}$$

И наоборот, вектор состояния $\psi(j, m)$ всей системы, являющийся собственной функцией $\mathbf{J}^2$ и J_z, будет содержать компоненты, для которых m_a и m_b пробегают все пары значений, составляющие в сумме нужное m. Таким образом,

$$\psi(j, m) = \sum_{m_a} C^{jm}_{j_a m_a j_b m_b}\psi_a(j_a, m_a)\psi_b(j_b, m_b). \tag{3.92}$$

Здесь m_b полностью определяется m и m_a, и поэтому отдельного суммирования по m_b не требуется. Если предположить, что все волновые функции нормированы и ортогональны, то

$$\sum_j |G|^2 = 1 \text{ для данных } j_a, j_b, m_a, m_b;$$

$$\sum_{m_a} |C|^2 = 1 \text{ для данных } j_a, j_b, j, m.$$

Коэффициент C можно считать интегралом перекрытия в пространстве волновых функций всей системы. Взяв скалярное произведение уравнения (3.91) и функции $\psi(j, m)$, получим

$$G^{jm}_{j_a m_a j_b m_b} = (\psi(j, m), \psi_a(j_a, m_a)\psi_b(j_b, m_b)).$$

Аналогично

$$C^{jm}_{j_a m_a j_b m_b} = (\psi_a(j_a, m_a)\psi_b(j_b, m_b), \psi(j, m)).$$

Из общего правила

$$(\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1)^*$$

следует, что $G=C^*$.

Ниже покажем, что C можно сделать действительной величиной. Тогда $G=C$, и символ G можно вообще опустить. Величины $C^{jm}_{j_a m_a j_b m_b}$ называются коэффициентами Клебша—Гордана (КГ) или коэффициентами векторной связи.

Подставив (3.92) в (3.91) и (3.91) в (3.92), получим два соотношения, которые пригодятся в дальнейшем:

$$\sum_j C^{jm}_{j_a m_a j_b m_b} C^{jm}_{j_a m_a' j_b m_b'} = \begin{cases} 1, & \text{если } m_a = m_a', \\ 0, & \text{если } m_a \neq m_a'; \end{cases} \tag{3.93}$$

$$\sum_{m_a} C^{jm}_{j_a m_a j_b m_b} C^{j'm}_{j_a m_a j_b m_b} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j', \\ 0, & \text{если } j \neq j'. \end{cases} \tag{3.94}$$

3.5.2. Метод расчета коэффициентов Клебша — Гордана. Покажем, как можно в принципе рассчитать коэффициенты КГ. Это поможет понять их смысл. Для больших значений j это довольно трудоемкий процесс. Однако существуют таблицы коэффициентов КГ, а Вигнером с помощью методов теории групп выведена формула для расчета общего коэффициента КГ.

Существует два подхода к расчету. Первый заключается в том, что для связи состояний с одинаковыми j и разными m используются операторы сдвига. Напомним, что при рассмотрении момента количества движения одной частицы мы пользовались операторами сдвига $J_\pm$. В частности, отметим, что

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{J}_- \psi(j, m) = \rho_-(j, m)\psi(j, m-1); \\ &\rho_-(j, m) = \hbar[(j+m)(j-m+1)]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.95}$$

Полный момент количества движения определим формулой (3.89). Тогда полный оператор сдвига связан с операторами сдвига отдельных частей простым соотношением

$$\mathbf{J}_- = J_{a-} + J_{b-}. \tag{3.96}$$

Второй подход основан на выборе определенного начального состояния. Рассмотрим состояние $\psi(j, m)$ с наибольшим возможным значением $m=m_a+m_b$. В этом случае m_a и m_b принимают максимально возможные значения j_a и j_b. Для того чтобы это было возможно, j должно равняться j_a+j_b. Используя соотношение (3.92), видим, что в этом случае сумма может содержать лишь один член:

$$\psi(j_a+j_b, j_a+j_b) = C^{j_a+j_b, j_a+j_b}_{j_a j_a j_b j_b} \psi_a(j_a j_a)\psi_b(j_b j_b). \tag{3.97}$$

Условие нормировки требует, чтобы $|C|^2=1$. Фазу можно выбрать так, чтобы $C=1$. Тогда

$$\psi(j_a+j_b, j_a+j_b) = \psi_a(j_a, j_a)\psi_b(j_b, j_b). \tag{3.98}$$

Теперь применим оператор сдвига (3.96) к обеим частям равенства (3.98). Используя (3.95), которое в этом случае дает

$$\rho_-(j, j) = (2j)^{1/2},$$

получаем

$$[2(j_a + j_b)]^{1/2}\psi(j_a + j_b, j_a + j_b - 1) = (2j_b)^{1/2}\psi_a(j_a, j_a)\psi_b(j_b, j_b - 1) + \\ + (2j_a)^{1/2}\psi_a(j_a, j_a - 1)\psi_b(j_b, j_b). \quad (3.99)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (3.92) для $j = j_a + j_b$, $m = j_a + j_b - 1$, находим коэффициенты Клебша—Гордана:

$$C^{j_a+j_b,\, j_a+j_b-1}_{j_a j_a,\, j_b j_b-1} = \left(\frac{j_b}{j_a + j_b}\right)^{1/2}; \quad C^{j_a+j_b,\, j_a+j_b-1}_{j_a j_a-1,\, j_b j_b} = \left(\frac{j_a}{j_a + j_b}\right)^{1/2}.$$

Можно доказать, что соотношения (3.94) при этом выполняются.

Рассмотренный процесс можно использовать, чтобы получить весь мультиплет $j = j_a + j_b$, оканчивающийся состоянием

$$\psi(j_a + j_b, -j_a - j_b) = \psi_a(j_a, -j_a)\psi_b(j_b, -j_b), \quad (3.100)$$

Как же найти комбинации $\psi_a\psi_b$, отвечающие условию $j = j_a + j_b - 1$? Уравнение (3.99) определяет одно состояние с $m = j_a + j_b - 1$, которое выражается линейной комбинацией двух состояний. Поскольку полное число состояний при переходе от схемы нумерации типа (m_a, m_b) к схеме типа (j, m) должно сохраняться, то должна существовать независимая линейная комбинация этих двух состояний, для которой опять $m = j_a + j_b - 1$.

Рассмотрим выражение

$$[2(j_a + j_b)]^{1/2}\psi(j_a + j_b - 1, j_a + j_b - 1) = (2j_a)^{1/2}\psi_a(j_a, j_a)\psi_b(j_b, j_b - \\ - 1) - (2j_b)^{1/2}\psi_a(j_a, j_a - 1)\psi_b(j_b, j_b). \quad (3.101)$$

Коэффициенты в правой части равенства и знак гарантируют, что это состояние ортогонально к состоянию (3.99), а коэффициент в левой части обеспечивает нормировку ψ.

Не будем доказывать, что для этого состояния в действительности $j = j_a + j_b - 1$. Применив к нему оператор сдвига J_-, получим цепочку состояний с $j = j_a + j_b - 1$. Коэффициенты КГ каждого звена этой цепочки можно вычислить.

Выбор отрицательного знака в равенстве (3.101) является условным. Не будем пытаться определить фазовое условие, но отметим, что равенство (3.101) находится в соответствии с фазовыми условиями Кондона и Шортли, которые теперь стали почти универсальными для квантовой теории момента количества движения. Обычно используемый «Обзор свойств частиц» также согласуется с этим условием Кондона и Шортли.

Не будем обсуждать общий случай, когда формулы не поддаются контролю, заметим лишь, что таким путем можно получить собственные функции полного момента количества движения, когда j принимает все значения вплоть до наименьшего, т. е. $|j_a - j_b|$.

Наконец, заметим, что коэффициенты КГ являются действительными величинами, так как они возникают по существу из матричных элементов $\rho_-(j, m)$ операторов сдвига J_{a-}, J_{b-} и J_-, которые по определению § 3.2 являются тоже действительными.

3.5.3. Случай $j_a=1/2$, $j_b=1$. Применим метод к указанному случаю. Полученные коэффициенты КГ можно свести в квадратную таблицу, каждый столбец которой соответствует паре значений квантовых чисел j и m, а каждая строка — паре значений m_a и m_b. Это показано в табл. 3.2. В этом случае соотношение (3.98) принимает вид

$$\psi(3/2, +3/2) = \psi_a(1/2, +1/2)\,\psi_b(1, +1),$$

а (3.99) дает

$$\sqrt{3}\,\psi(3/2, +1/2) = \sqrt{2}\,\psi_a(1/2, +1/2)\,\psi_b(1, 0) + \\ + \sqrt{1}\,\psi_a(1/2, -1/2)\,\psi_b(1, +1). \qquad (3.102)$$

Необходимо всегда добавлять к значениям m знак (если они отличны от нуля), который поможет отличать их от j.

Применив оператор $J_-=J_{a-}+J_{b-}$ к уравнению (3.102), получим в правой части в принципе четыре состояния, но $J_{a-}\psi(1/2,-1/2)=0$, так что

$$2\sqrt{3}\,\psi(3/2, -1/2) = \sqrt{1\cdot 2}\,\psi_a(1/2, -1/2)\,\psi_b(1, 0) + \\ + \sqrt{2\cdot 2}\,\psi_a(1/2, +1/2)\,\psi_b(1, -1) + \sqrt{1\cdot 2}\,\psi_a(1/2, -1/2)\,\psi_b(1, 0), \qquad (3.103)$$

и, следовательно,

$$\psi(3/2, -1/2) = \sqrt{1/3}\,\psi_a(1{,}2, +1/2)\,\psi_b(1, -1) + \\ + \sqrt{2/3}\,\psi_a(1/2, -1/2)\,\psi_b(1, 0). \qquad (3.104)$$

Таблица 3.2

Коэффициенты Клебша—Гордана для $j_a=1/2$, $j_b=1$

m_a	m_b	$j=3/2$	3/2	3/2	3/2	1/2	1/2
		$m=+3/2$	$+1/2$	$-1/2$	$-3/2$	$+1/2$	$-1/2$
$+1/2$	$+1$	1					
$+1/2$	0		$(2/3)^{1/2}$			$(1/3)^{1/2}$	
$+1/2$	-1			$(1/3)^{1/2}$			$(2/3)^{1/2}$
$-1/2$	$+1$		$(1/3)^{1/2}$			$-(2/3)^{1/2}$	
$-1/2$	0			$(2/3)^{1/2}$			$-(1/3)^{1/2}$
$-1/2$	-1				1		

И, наконец, для проверки применим оператор J_- еще раз к равенствам (3.103) или (3.104), чтобы получить $\psi(3/2, -3/2) = \psi_a(1/2, -1/2)\psi_b(1, -1)$. Соответствующие ортогональные комбинации пар состояний к состояниям (3.102) и (3.103) дают состояния с $j=1/2$:

$$\sqrt{3}\,\psi(1/2, +1/2) = \sqrt{1}\,\psi_a(1/2, +1/2)\psi_b(1, 0) - \sqrt{2}\,\psi_a(1/2, -1/2)\psi_b(1, +1); \quad (3.105)$$

$$\sqrt{3}\,\psi(1/2, -1/2) = \sqrt{2}\,\psi_a(1/2, +1/2)\psi_b(1, -1) - \sqrt{1}\,\psi_a(1/2, -1/2)\psi_b(1, 0), \quad (3.106)$$

дополняющие табл. 3.2.

Результаты расчета можно проверить с помощью соотношений ортогональности (3.94) и (3.93).

Так как $[\rho_-(j, m)]^2$ — целое число, даже если j — полуцелое, то коэффициенты КГ являются квадратными корнями из отношений целых чисел, поэтому иногда табулируют квадраты коэффициентов КГ (см., например, «Обзор свойств частиц»). Здесь же табулирование проводится сначала по m, затем по j, так что не равные нулю элементы располагаются в квадратных блоках ниже диагонали.

Следует отметить, что коэффициенты КГ зависят от порядка, в котором j_a и j_b связаны друг с другом. Если взять $j_a=1$ и $j_b=1/2$, то некоторые знаки изменятся в процессе тех промежуточных вычислений, которые приведут к уравнениям (3.105) и (3.106).

Можно показать, что в общем случае

$$C^{jm}_{j_b m_b j_a m_a} = (-1)^{j_a+j_b-j} C^{jm}_{j_a m_a j_b m_b}. \quad (3.107)$$

3.5.4. Случай $j_a=j_b=1/2$ или 1. В табл. 3.3. и 3.4 приведены результаты расчетов, аналогичных тем, которые даны в предыдущем примере. В рассматриваемом случае складываются только два одинаковых момента количества движения, равные 1/2 или 1.

Таблица 3.3

Коэффициенты Клебша—Гордана для $j_a=j_b=1/2$

m_a	m_b	$j=1$	1	1	0
		$m=+1$	0	−1	0
+1/2	+1/2	1			
+1/2	−1/2		$(1/2)^{1/2}$		$(1/2)^{1/2}$
−1/2	+1/2		$(1/2)^{1/2}$		$-(1/2)^{1/2}$
−1/2	−1/2			1	

Таблица 3.4

Коэффициенты Клебша—Гордана для $j_a=j_b=1$

m_a	m_b	$j=2$	2	2	2	2
		$m=+2$	$+1$	0	-1	-2
$+1$	$+1$	1				
$+1$	0		$(1/2)^{1/2}$			
0	$+1$		$(1/2)^{1/2}$			
$+1$	-1			$(1/6)^{1/2}$		
0	0			$(2/3)^{1/2}$		
-1	$+1$			$(1/6)^{1/2}$		
0	-1				$(1/2)^{1/2}$	
-1	0				$(1/2)^{1/2}$	
-1	-1					1

Продолжение табл. 3.4

m_a	m_b	$j=1$	1	1	0
		$+1$	0	-1	0
$+1$	$+1$				
$+1$	0	$(1/2)^{1/2}$			
0	$+1$	$-(1/2)^{1/2}$			
$+1$	-1		$(1/2)^{1/2}$		$(1/3)^{1/2}$
0	0		0		$-(1/3)^{1/2}$
-1	$+1$		$-(1/2)^{1/2}$		$(1/3)^{1/2}$
0	-1			$(1/2)^{1/2}$	
-1	0			$-(1/2)^{1/2}$	
-1	-1				

В случаях, когда $j_a=j_b$, соображения симметрии могут облегчить расчет или послужить проверкой рассмотренного выше метода. Из описанного в п. 3.5.2 метода возникает следующее правило симметрии. Если $j=2j_a$, то все знаки положительны и, следовательно, $\psi(2j_a, m)$ является *симметричной* комбинацией компонент векторов состояний $\psi_a^{(1)}$ и $\psi_a^{(2)}$.

При переходе к состоянию $\psi(2j_a-1, m)$ возникают отрицательные знаки [ср. с уравнением (3.101)], и это состояние является *антисимметричным* по компонентам векторов состояний $\psi_a^{(1)}$ и $\psi_a^{(2)}$.

Характер симметрии меняется, когда j пробегает все возможные значения:

четные состояния: $2j_a$, $2j_a-2$, $2j_a-4$, ...

нечетные состояния: $2j_a-1$, $2j_a-3$, $2j_a-5$, ...

Это правило проиллюстрировано табл. 3.3 и 3.4. Оно будет особенно полезным тогда, когда мы применим всю алгебру связей к изоспину и при обсуждении распадов мезонов в гл. 8.

Глава 4
ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬ

Предположим, что читатель уже знаком с основными идеями специальной теории относительности и с их применением к макроскопическим явлениям. Важное место среди этих идей занимает понятие лоренц-инвариантности, т. е. инвариантности относительно релятивистских преобразований между системами отсчета, двигающимися одна относительно другой равномерно и прямолинейно. Предположим, что основные постулаты теории справедливы и для микроскопических явлений. Причин для изменения этого предположения пока нет.

Начнем с обзора математического формализма преобразований Лоренца и четырехмерных векторов, а затем рассмотрим лоренц-инвариантность в квантовой механике.

§ 4.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И АЛГЕБРА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ВЕКТОРОВ

4.1.1. Уравнения для преобразований Лоренца. Вспомним формулы преобразования Лоренца, связывающие пространственную и временную координаты события, например столкновения двух точечных частиц, причем эти координаты измерены в двух инерциальных системах отсчета, движущихся одна относительно другой равномерно и прямолинейно. Инерциальной называют такую систему отсчета, в которой выполняется закон инерции Галилея.

Если оси x, y, z и x', y', z' двух систем отсчета Σ и Σ' соответственно параллельны и движутся одна относительно другой вдоль оси z со скоростью u, то уравнения для преобразования Лоренца имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= y; \\ z' &= (1-u^2)^{-1/2}(z+ut); \\ t' &= (1-u^2)^{-1/2}(t+uz). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Это преобразование обладает тем свойством, что квадратичная комбинация

$$s^2 \equiv t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{4.2}$$

принимает одно и то же значение как в штрихованной, так и в нештрихованной системе координат.

Если (t_A, x_A, y_A, z_A) и (t_B, x_B, y_B, z_B) — пространственно-временные координаты двух событий, то

$$\Delta s = [(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2]^{1/2} \quad (4.3)$$

называется *интервалом* между двумя событиями. Его значение в любой инерциальной системе отсчета одинаково. Величина, которая обладает одним и тем же значением в любой инерциальной системе отсчета, называется *лоренцевым скаляром.* Уравнения (4.1) иногда называют стандартным преобразованием Лоренца. С помощью этого специального случая можно понять многие результаты релятивистской инвариантности. Однако для того, чтобы расширить область понимания, надо определить общее преобразование Лоренца, а затем дать понятие группы Лоренца. Чтобы дать компактное определение общего преобразования Лоренца, воспользуемся следующим утверждением для квадрата интервала:

Любое линейное преобразование величин t, x, y, z, оставляющее величину s^2 инвариантной, является преобразованием Лоренца, связывающим две системы отсчета. (4.4)

То, что это утверждение разумно, видно из следующего. Если мы имеем две системы отсчета Σ и Σ', причем относительная скорость движения одной системы относительно другой направлена произвольно, то уравнения для лоренц-преобразования, связывающего эти системы, имеют более общий вид по сравнению с (4.1). Не будем приводить эти уравнения, так как они громоздки и их можно найти в стандартных учебниках. Однако уравнения общего преобразования можно привести к виду (4.1) путем такого поворота двух систем отсчета, в результате которого их соответствующие пространственные оси становятся параллельными, а вектор $\mathbf{v}$ — направленным вдоль общей оси z. Из этого следует, что преобразования Лоренца и вращения надо рассматривать вместе.

Характеристическое свойство вращения системы координат заключается в том, что величина $x^2+y^2+z^2$ остается инвариантной, а временная координата при этом не изменяется (см. п. 3.4.2). Таким образом, вращения системы координат входят в класс преобразований, которые оставляют интервал инвариантным.

Введем более компактные обозначения. Положим $x_0=t$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ и обозначим множество четырех координат (x_0, x_1, x_2, x_3) символом x_μ. Здесь и далее греческие индексы пробегают значения от 0 до 3. Величину s^2 теперь можно записать более компактно $s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$, где символ $g_{\mu\nu}$, называемый *метрическим тензором,* принимает следующие значения:

$$g_{\mu\nu} = 0, \text{ если } \mu \neq \nu,$$

$$g_{00} = +1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Следует иметь в виду, что существуют и другие системы обозначений индексов. Обычно используются мнимая координата времени $x_4 = it$ и интервал $\sigma = is$, так что комбинация (4.2) заменяется на $\sigma^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, все знаки которой уже положительны. Однако мы предпочитаем работать с чисто вещественными величинами.

Квадрат интервала между двумя событиями (4.3) в новых обозначениях принимает вид

$$\Delta s^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} (x_{B\mu} - x_{A\mu}) (x_{B\nu} - x_{A\nu}) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} (x_{B\mu} x_{B\nu} + x_{A\mu} x_{A\nu} - 2x_{B\mu} x_{A\nu}).$$

Вводя обозначения

$$x_B \cdot x_A = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} x_{B\mu} x_{A\nu};$$

$$x_A^2 = x_A \cdot x_A,$$

получаем

$$\Delta s^2 = x_B^2 + x_A^2 - 2x_B \cdot x_A.$$

Общее преобразование Лоренца (4.4) запишем в виде

$$x'_\mu = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} x_\nu. \tag{4.5}$$

Коэффициенты $\Lambda_{\mu\nu}$ образуют вещественную 4×4-матрицу, действующую на столбец x_ν. Таким образом, стандартное преобразование Лоренца (4.1) представляется матрицей

$$\begin{bmatrix} (1-u^2)^{-1/2} & 0 & 0 & u(1-u^2)^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ u(1-u^2)^{-1/2} & 0 & 0 & (1-u^2)^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Преобразование (4.5) является преобразованием Лоренца (4.4) при условии, что

$$s^2 = x' \cdot x' = x \cdot x. \tag{4.6}$$

Это налагает условие на матрицу $\Lambda_{\mu\nu}$. Подставляя (4.5) в (4.6), получаем

$$\sum_{\mu\nu} \sum_{\rho\sigma} g_{\mu\nu} (\Lambda_{\mu\rho} x_\rho) (\Lambda_{\nu\sigma} x_\sigma) = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \tag{4.7}$$

Сравнивая коэффициенты при $(x_1)^2$, $x_1 x_2$ и т. д., получаем набор условий, которые можно компактно записать в виде

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \Lambda_{\mu\rho} \Lambda_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma}. \tag{4.8}$$

Это и есть условия на Λ для того, чтобы Λ являлось преобразованием Лоренца. Уравнение (4.8) можно записать в матричных обозначениях. Пусть Λ представляет собой матрицу $\Lambda_{\nu\sigma}$. Введем матрицу

Тогда (4.8) будет матричным элементом $\rho\sigma$ уравнения

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \tag{4.9}$$

где Λ^T означает матрицу, транспонированную матрице Λ.

4.1.2. Группа Лоренца. Преобразования Лоренца между инерциальными системами образуют группу, называемую *группой Лоренца*. Используем общий аргумент п. 2.2.2. Если Σ, Σ' и Σ'' — три системы отсчета, а $\Lambda^{(1)}_{\nu\sigma}$ означает преобразование, связывающее координаты в системах Σ и Σ', $\Lambda^{(2)}_{\mu\nu}$ — соответствующее преобразование для систем Σ' и Σ'', то матрица преобразования, связывающая координаты в системах Σ и Σ'', имеет вид

$$\Lambda^{(3)}_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} \Lambda^{2}_{\mu\sigma} \Lambda^{(1)}_{\sigma\nu} \tag{4.10}$$

и называется *произведением преобразований* $\Lambda^{(1)}_{\nu\sigma}$ и $\Lambda^{(2)}_{\mu\nu}$. Если системы отсчета Σ и Σ' эквивалентны относительно физических законов и аналогично эквивалентны системы Σ' и Σ'', то должны быть эквивалентны и системы Σ и Σ'', поэтому преобразование, связывающее их, является преобразованием Лоренца. Математически можно показать, что $\Lambda^{(3)}_{\mu\nu}$ удовлетворяют условию (4.8) и, следовательно, преобразования Лоренца образуют группу.

Как отмечалось выше, обычные вращения пространственных координат в математическом смысле должны быть включены в группу Лоренца. Критерий преобразования Лоренца (4.8) допускает также включение более общих преобразований координат, соответствующих пространственной инверсии и обращению времени. В координатных обозначениях операция пространственной инверсии имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_0 \to x_0' = +x_0; \quad x_1 \to x_1' = -x_1; \\ x_2 \to x_2' = -x_2; \quad x_3 \to x_3' = -x_3 \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

и соответственно обращение времени

$$\left.\begin{aligned} x_0 \to x_0' = -x_0; \quad x_1 \to x_1' = +x_1; \\ x_2 \to x_2' = +x_2; \quad x_3 \to x_3' = +x_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Ясно, что оба эти преобразования оставляют инвариантной величину $(x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2$.

Пока эти преобразования не нужны. Так как инвариантность относительно этих преобразований и следствия из нее детально рассмотрены в гл. 5 и 6, их можно не рассматривать в настоящей главе.

Рассматривая преобразование Лоренца между пространственными системами без вращения системы координат, мы говорим о *чистом преобразовании Лоренца или бусте.* Уравнение (4.1) есть уравнение буста.

4.1.3. Четырехмерные векторы. Дадим теперь определение понятия четырехмерного вектора. Оно полностью аналогично определению «обычного» трехмерного вектора [77]. Четырехмерный вектор, обозначаемый V_μ, в системе Σ характеризуется четырьмя компонентами V_0, V_1, V_2, V_3. При переходе ко второй системе Σ' его компоненты преобразуются точно так же, как координаты x_μ, т. е.

$$V'_\mu = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} V_\nu . \tag{4.13}$$

Применяют также обозначение $V_\mu = (V_0, \mathbf{V})$. Существуют величины и с более сложными трансформационными свойствами (тензоры), но мы пока обойдемся без них. Из (4.8) следует, что квадрат четырехмерного вектора V, определенного как

$$V \cdot V = V_0^2 - V_1^2 - V_2^2 - V_3^2 , \tag{4.14}$$

имеет одно и то же значение во всех системах Лоренца. Аналогично можно показать, что если V_μ и W_μ — два четырехмерных вектора, то их произведение

$$V \cdot W = V_0 W_0 - V_1 W_1 - V_2 W_2 - V_3 W_3 = V_0 W_0 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \tag{4.15}$$

также имеет одно и то же значение во всех системах Лоренца и называется скалярным произведением векторов V_μ и W_μ.

Ценность установления трансформационных свойств величины относительно преобразований Лоренца, т. е. определения того, является ли рассматриваемая величина скаляром, четырехмерным вектором или тензором, заключается в том, что в этом случае можно систематически в лоренц-инвариантном виде формулировать такие физические законы, как законы механики. Кроме того, алгебра четырехмерных векторов служит мощным вычислительным средством в релятивистской кинематике.

§ 4.2. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

При своем движении классическая частица описывает мировую линию в пространстве — времени. *Интервал ds* между двумя бесконечно близкими точками на мировой линии связан с разностями координат формулой

$$ds^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 . \tag{4.16}$$

Так как ds — скаляр Лоренца, то ds имеет одинаковое значение во всех системах отсчета. Поэтому для точек (событий) вдоль мировой линии приращение ds величины s — переменная, которая их характеризует.

Четырехмерная скорость частицы в произвольной точке определяется как отношение приращения координат к приращению s вдоль мировой линии

$$w_\mu = dx_\mu/ds. \tag{4.17}$$

Поскольку s — скалярная величина, то w_μ — четырехмерный вектор, подобный dx_μ. Разделив уравнение (4.16) на ds^2, получим, что компоненты w_μ удовлетворяют условию

$$w \cdot w = 1. \tag{4.18}$$

Обычная скорость $\mathbf{v}$ с компонентами dx_1/dx_0, dx_2/dx_0, dx_3/dx_0 связана с w соотношением

$$w_0 = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}(1 - v^2)^{-1/2} \tag{4.19}$$

или

$$\mathbf{v} = w_0^{-1}(w_1, w_2, w_3).$$

Четырехмерный импульс определяется соотношением

$$p_\mu = m w_\mu, \tag{4.20}$$

где m — лоренцевский скаляр, называемый массой покоя частицы.

В соответствии с условием (4.18) четырехмерный импульс удовлетворяет соотношению

$$p^2 = p \cdot p = m^2. \tag{4.21}$$

Релятивистская энергия E и трехмерный импульс $\mathbf{p}$ входят в виде составных частей в p_μ: $p_\mu = (E, \mathbf{p})$. Из соотношения (4.21) получаем хорошо известное соотношение $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Выражая энергию с помощью трехмерной скорости, получаем

$$E = m(1 - v^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 - v^2)^{-1/2}. \tag{4.22}$$

Как известно, с помощью этих формул можно связать E и $\mathbf{p}$ с соответствующими нерелятивистскими выражениями, положив $|\mathbf{v}| \ll \ll 1$. Заметим, что скорость $\mathbf{v}$ можно выразить с помощью E и $\mathbf{p}$ по формуле

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}/E = \mathbf{p}/p_0. \tag{4.23}$$

В релятивистской механике два отдельных закона сохранения энергии и трехмерного импульса объединяются в один закон сохранения четырехмерного импульса. Таким образом, для изолированной системы из N частиц имеем

$$\sum_{r=1}^{N} p_\mu^{(r)} = \text{const}. \tag{4.24}$$

Так же, как в классической механике, этот закон сохранения можно вывести из принципа инвариантности: из инвариантности относительно смещения начала координат в пространстве и смещения во времени. Важное применение закона сохранения четы-

рехмерного импульса — кинематика рассеяния, процессы реакций и распадов.

Причина возможности чисто классического рассмотрения заключается в том, что в типичном эксперименте, как уже отмечалось выше, частицы, наблюдаемые до и после взаимодействия, являются почти точными собственными состояниями импульса и энергии. Таким образом, кинематическая проблема оказывается эквивалентной классической.

Применение лоренцевой инвариантности к кинематике подробно разобрано в других работах, и мы не будем возвращаться к этому в дальнейшем. Вместо этого обратим внимание на лоренцеву инвариантность в квантовой механике.

§ 4.3. ЛОРЕНЦЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. БЕССПИНОВЫЕ ЧАСТИЦЫ

Дадим квантовомеханическое описание процессов, происходящих с элементарными частицами, совместно с принципом лоренцевой инвариантности. До недавнего времени почти универсальным методом для этого являлось использование таких специальных релятивистских волновых уравнений, как уравнение Клейна—Гордона для частиц с нулевым спином или уравнение Дирака для частиц со спином, равным 1/2. Уравнение Дирака описывает только взаимодействие классических элементарных частиц (электрона, протона, нейтрона) друг с другом через электромагнитное поле. Оно является существенной составной частью при более точной трактовке электродинамики. Изучение таких волновых уравнений сохраняет свое значение именно для этих целей.

Однако в последние годы был открыт богатый спектр адронных резонансов с высокими спинами, которые часто желательно рассматривать феноменологически на равных основаниях со стабильными частицами, например Ω^--гиперон со спином 3/2, стабильный относительно сильных распадов. Метод волновых уравнений для высоких спинов становится громоздким. С другой стороны, в рамках S-матричной формулировки необходимо лишь детальное квантовое описание свободно движущихся частиц. Все это можно полностью вывести из принципов инвариантности, и возникающий в результате формализм, который будет изложен ниже, одинаково хорошо описывает частицы произвольной массы (включая нулевую массу) и произвольного спина.

Этот подход основан на математической статье Вигнера [183], посвященной представлениям неоднородной группы Лоренца (группа смещений в пространстве и времени и преобразований Лоренца). Жакоб и Вик [108] разработали стандартный формализм, придавший строгому и общему анализу Вигнера удобную для практического применения форму. Его часто называют формализмом спиральности. Попытаемся достаточно подробно объяс-

нить, как пользоваться этой теорией в некоторых простых случаях. Для более строгого разбора отошлем читателя к другим работам.

Для базиса собственных состояний импульса характерны простые свойства при трансляциях. Рассмотрим сначала соотношения между операциями симметрии: трансляциями во времени и пространстве и преобразованиями Лоренца. Трансляция системы отсчета в пространстве и времени характеризуется четырехмерным вектором смещения a_μ. Ему соответствует преобразование координат

$$T_{a_\mu}: \quad x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + a_\mu. \tag{4.25}$$

Таким образом, a_0 есть смещение начала отсчета координаты времени, в то время как a есть вектор смещения пространства.

Комбинация специального преобразования Лоренца с матрицей $\Lambda_{\mu\nu}$ и последующее смещение на вектор a_μ соответствуют преобразованию координат

$$x'_\mu = a_\mu + \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \tag{4.26}$$

от системы отсчета Σ к системе Σ'. Это наиболее общее изменение системы отсчета, по отношению к которому все законы физики остаются инвариантными. Обозначим преобразование (4.26) символом $\{a, \Lambda\}$.

Все преобразования (4.26), вместе взятые, образуют группу, которая называется неоднородной группой Лоренца или *группой Пуанкаре*. Инверсии пространства и времени пока исключены.

Согласно общей теории, каждому преобразованию (4.26) соответствует унитарный оператор, действующий на векторы состояния системы. Обозначим унитарный оператор, соответствующий трансляции a_μ, символом $U(a_\mu)$, а оператор, соответствующий лоренцеву преобразованию $\Lambda_{\mu\nu}$, символом $U(\Lambda_{\mu\nu})$. Общему преобразованию $\{a, \Lambda\}$ соответствует оператор

$$U(\{a, \Lambda\}) = U(a)\, U(\Lambda),$$

так как операторы U должны перемножаться таким же путем, что и соответствующие преобразования координат, т. е. операторы U образуют представление группы Пуанкаре унитарными операторами.

Рассмотрим трансляции во времени и пространстве $U(a_\mu)$. Ранее были рассмотрены трансляции пространства (см. § 2.3) и смещение во времени (см. § 2.2). Остается только объединить полученные результаты в релятивистской формулировке.

Из преобразования координат (4.25) ясно, что чисто пространственная трансляция на вектор a и чисто временная трансляция на a_0 коммутируют друг с другом, так как они действуют на совершенно разные координаты. Значит, соответствующие унитарные операторы, обозначаемые $U(\mathbf{a})$ и $U(a_0)$, тоже коммутируют друг с другом:

$$U(a_0)\,U(\mathbf{a}) = U(\mathbf{a})\,U(a_0). \tag{4.27}$$

Теперь введем генератор инфинитезимальных смещений в пространстве и времени, записав с точностью до первого порядка по a_μ выражение

$$U(a_\mu) = 1 + ia\cdot P. \tag{4.28}$$

Здесь

$$a\cdot P = \Sigma g_{\mu\nu} a_\mu P_\nu = a_0 P_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{P}. \tag{4.29}$$

Сравнивая (4.28) с (2.57) и (2.52), находим, что $\mathbf{P}$ есть оператор импульса, а P_0 — гамильтониан или оператор энергии H. Подставляя (4.28) в (4.27), получаем

$$(1 + ia_0 H)(1 - i\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{P}) = (1 - i\mathbf{a}\cdot\mathbf{P})(1 + ia_0 H).$$

Таким образом,

$$H\mathbf{P} = \mathbf{P}H, \tag{4.30}$$

откуда следует, что гамильтониан и операторы импульса коммутируют друг с другом. Значит, базисные состояния можно выбрать так, чтобы они одновременно были собственными состояниями и энергии, и импульса. Запишем базисные состояния в виде φ_{Ep}, тогда

$$H\varphi_{Ep} = E\varphi_{Ep}; \tag{4.31а}$$

$$\mathbf{P}\varphi_{Ep} = \mathbf{p}\varphi_{Ep}. \tag{4.31б}$$

В случае составной системы (например дейтон) операторы H и P являются операторами *полной* энергии и *полного* импульса, а E и $\mathbf{p}$ — их собственные значения. При этом состояния можно характеризовать еще и дополнительными числами, описывающими внутренние свойства системы.

Теперь соотношения (4.31а) и (4.31б) верны как для нерелятивистской, так и для релятивистской квантовой теории. Покажем, что если теория инвариантна относительно преобразований Лоренца, то собственные значения E и $\mathbf{p}$ каждого состояния системы должны удовлетворять условию

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \tag{4.32}$$

где m — константа системы, которую в дальнейшем отождествим с массой частицы, для составной же системы она является полной энергией в системе центра масс. Рассмотрим сначала специальный случай стандартного преобразования Лоренца (4.1) от системы отсчета Σ к Σ':

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= (1 - v^2)^{-1/2}\{x_0 + vx_3\};\\ x_1' &= x_1;\\ x_2' &= x_2;\\ x_3' &= (1 - v^2)^{-1/2}\{x_3 + vx_0\}, \end{aligned}\right\} \tag{4.1а}$$

которое обозначим Λ_0.

Теперь рассмотрим состояние системы, вектор φ_{Ep} которой соответствует наблюдателю системы отсчета Σ. По аналогии с классической свободной частицей можно ожидать, что для наблюдателя в системе отсчета Σ' это состояние таково, что его энергия E' и импульс P' преобразуются так же, как и координаты:

$$\left.\begin{aligned} E' &= (1-v^2)^{-1/2}(E+vp_3); \\ p_1' &= p_1; \quad p_2' = p_2; \\ p_3' &= (1-v^2)^{-1/2}(p_3+vE). \end{aligned}\right\} \tag{4.1б}$$

В этом случае в системе отсчета Σ' вектор состояния будет $\varphi_{E'p'}$. Учитывая это обстоятельство и руководствуясь активной точкой зрения, получаем, что состояние $\varphi_{E'p'}$ — *новое* состояние системы, отнесенное к *исходной* системе отсчета Σ, а соотношение между φ_{Ep} и $\varphi_{E'p'}$ есть $\varphi_{E'p'} = U(\Lambda_0)\varphi_{Ep}$.

Отметим при доказательстве этого результата, что общий случай произвольного преобразования Лоренца так же легко трактовать, как и любой частный. Потребуем выполнения формулы

$$U(\Lambda)^{-1}P_\mu U(\Lambda) = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu}P_\nu, \tag{4.33}$$

отражающей тот факт, что четыре оператора P_μ преобразуются так же, как и четырехмерный вектор при преобразованиях Лоренца. Уравнение (4.33) справедливо, так как общее преобразование Пуанкаре (4.26) можно получить, выполнив сначала смещение $a'_\mu = \sum_\nu \Lambda^{-1}_{\mu\nu}a_\nu$, а затем преобразование Лоренца $\Lambda_{\mu\nu}$:

$$x'_\mu = \sum_\sigma \Lambda_{\mu\sigma}\left(\sum_\nu (\Lambda^{-1})_{\sigma\nu}a_\nu + x_\sigma\right) = a_\mu + \sum_\sigma \Lambda_{\mu\sigma}x_\sigma.$$

Отсюда $T_a\Lambda = \Lambda T_{a'}$, а для операторов

$$U(a)U(\Lambda) = U(\Lambda)U(a'). \tag{4.34}$$

Подставляя $U(a) = 1 + ia\cdot P$, $U(a') = 1 + ia'\cdot P$, используя лоренцеву инвариантность для обозначенного точкой произведения, чтобы записать

$$a'\cdot P = (\Lambda a')(\Lambda P) = a\cdot \Lambda P,$$

и сравнивая коэффициенты при a_μ в равенстве (4.34), приходим к (4.33).

С помощью уравнения (4.33) теперь можно показать, что состояние, полученное в результате применения оператора $U(\Lambda)$ к φ_{Ep}, есть собственное состояние H и $\mathbf{P}$ с собственными значениями E' и $\mathbf{p}'$, которые связаны с E и $\mathbf{p}$ преобразованием Лоренца $\Lambda_{\mu\nu}$.

Уравнение (4.33) перепишем в виде

$$P_\mu U(\Lambda) = U(\Lambda)\left\{\sum_\nu \Lambda_{\mu\nu}P_\nu\right\}.$$

Применяя его к $\varphi_{E\mathbf{p}}$, получаем

$$P_\mu U(\Lambda)\varphi_{E\mathbf{p}} = U(\Lambda)\left\{\sum_\nu \Lambda_{\mu\nu}p_\nu\right\}\varphi_{E\mathbf{p}} = \left\{\sum_\nu \Lambda_{\mu\nu}p_\nu\right\}U(\Lambda)\varphi_{E\mathbf{p}}, \quad (4.35)$$

так как число, заключенное в фигурные скобки, можно прокоммутировать с оператором $U(\Lambda)$.

Уравнение (4.35) показывает, что $U(\Lambda)\varphi_{E\mathbf{p}}$ является состоянием $\varphi_{E'\mathbf{p}'}$, для которого $(E', \mathbf{p}') = p'_\mu = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu}p_\nu$. Полагая возможную нормировочную постоянную равной 1, получаем

$$U(\Lambda)\varphi_{E\mathbf{p}} = \varphi_{E'\mathbf{p}'}. \quad (4.36)$$

Поскольку E' и $\mathbf{p}'$ связаны с E и $\mathbf{p}$ преобразованием Лоренца с матрицей $\Lambda_{\mu\nu}$, то из свойств преобразования Лоренца следует

$$E'^2 - p'^2 = E^2 - p^2 = m^2, \quad (4.37)$$

где m отождествляется с массой частицы.

Остается согласиться, что m не может иметь значений, равных нулю, иначе бы пришлось обращаться к релятивистскому квантовому описанию безмассовых частиц. Отложим дальнейшее рассмотрение безмассовых частиц до § 4.5.

Если взять множество всех состояний $\varphi_{E\mathbf{p}}$, для которых E и $\mathbf{p}$ удовлетворяют условию

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \quad (4.38)$$

и считать его множеством базисных состояний, то получим квантовое описание одной частицы с массой m, согласующееся с лоренцевой инвариантностью. Ниже покажем, что спин этой частицы равен нулю. Общее состояние частицы описывается, конечно, суперпозицией этих базисных состояний.

То, что предлагаемое описание является инвариантным относительно преобразований Лоренца, видно из следующего. Рассмотрим систему отсчета Σ и состояние системы, которое наблюдатель Σ описывает вектором состояния $\varphi_{E\mathbf{p}}$. Во второй системе отсчета Σ', связанной с первой матрицей преобразования Лоренца $\Lambda_{\mu\nu}$, вектор состояния $\varphi_{E'\mathbf{p}'}$ будет задаваться выражением (4.36). Если обе системы отсчета полностью эквивалентны, состояние $\varphi_{E'\mathbf{p}'}$ должно являться *возможным* состоянием системы для наблюдателя из первой системы Σ. При предложенном описании состояния $\varphi_{E\mathbf{p}}$ для всех E и $\mathbf{p}$ [удовлетворяющих только (4.38)] являются допустимыми. Следовательно, такое состояние существует для системы отсчета Σ и лоренц-инвариантность можно считать доказанной.

С помощью уравнения (4.36) можно связать состояния с разными значениями E и $\mathbf{p}$ (все относительно системы отсчета Σ). В частности, можно связать все базисные состояния с фиксированным состоянием, которым может быть состояние покоя с $E=m$, $\mathbf{p}=0$, т. е. φ_{m0}.

Прежде чем проиллюстрировать этот процесс, несколько изменим введенные обозначения. Так как E выражается через $\mathbf{p}$ и m, этот индекс в векторе состояния можно опустить. Далее, в качестве характеристики выделим массу, но в дальнейшем ее тоже опустим. Кроме того, иногда будем выражать вектор импульса в полярных координатах в виде $\mathbf{p}=(p, \theta, \varphi)$, т. е. можно будет писать или $\varphi_{\mathbf{p}}$, или $\varphi_{p\theta\varphi}$.

Теперь получим состояние, в котором частица движется вдоль положительного направления оси z с импульсом p, применяя операцию буста к состоянию покоя φ_{000}. Таким образом,

$$\varphi_{p00} = U(\Lambda)\,\varphi_{000}. \tag{4.39}$$

В качестве Λ возьмем чистое преобразование Лоренца вдоль оси z. Такое преобразование задается уравнением (4.32), в котором проведена замена $(E, \mathbf{p})\to(m, 0)$ и $(E', \mathbf{p}')\to(E, \mathbf{p})$. Скорость $\mathbf{v}$ надо взять равной $\mathbf{p}/E$. На это преобразование Лоренца мы будем часто ссылаться, имея дело с его следствиями, поэтому обозначим его $\mathscr{L}_p$.

Таким образом, уравнение (4.39) принимает вид

$$\varphi_{p00} = U(\mathscr{L}_p)\,\varphi_{000}. \tag{4.40}$$

Чтобы получить состояние, в котором импульс $\mathbf{p}$ имеет направление (θ, φ), просто применим обычный поворот к состоянию φ_{p00}. Влияние поворота на собственные состояния импульса рассматривалось в п. 3.3.1. Поворот должен переводить вектор импульса, направленный вдоль оси z, в направление (θ, φ). В обозначениях углов Эйлера соответствующий поворот есть $R(\varphi, \theta, 0)$.

Чистое вращение не меняет p, поэтому

$$\varphi_{p\theta\varphi} = U(R(\varphi, \theta, 0)\,\varphi_{p00} = U(R(\varphi, \theta, 0))\,U(\mathscr{L}_p)\,\varphi_{000}. \tag{4.41}$$

Заметим, что можно взять и другое вращение. Например, вращение $R(\varphi, \theta, \gamma)$ с произвольным γ привело бы к тому же результату, так как состояние φ_{p00} инвариантно при поворотах вокруг оси z. Однако это уже неверно, когда мы имеем дело с частицами, обладающими спином.

Покажем, что это описание применимо для бесспиновых частиц. Предположение о том, что мы имеем дело с частицей, спин которой равен нулю, было сделано в тот момент, когда мы стали считать, что покоящаяся частица обладает одним-единственным состоянием φ_{000}. Однако для частицы со спином s существует $2s+1$-состояний покоя, различающихся собственным значением S_z. При поворотах эти состояния преобразуются друг через друга. Для состояния покоя бесспиновой частицы имеем

$$U(R)\,\varphi_{000} = \varphi_{000} \tag{4.42}$$

для всех R. Описание частицы со спином дано в § 4.4.

Мы еще не проверили, унитарны ли операторы $U(\Lambda)$. Точная форма условия унитарности связана с нормировкой состояний

$\varphi_{E\mathbf{p}}$. Множество базисных состояний выберем так, чтобы выполнялись следующие условия ортогональности и нормировки:

$$(\varphi_{\mathbf{p}'}, \varphi_{\mathbf{p}}) = (2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}). \tag{4.43}$$

Здесь для сокращения введено обозначение $E_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Как и ожидалось, условие нормировки включает δ-функцию, так как собственное значение импульса пробегает непрерывную область значений.

В нерелятивистской теории левая часть равенства (4.43) интерпретируется как интеграл по конфигурационному пространству от произведения двух волновых функций (одна из них комплексно сопряженная), являющихся функциями переменных конфигурационного пространства. В рассматриваемом случае такой смысл мы придаем равенству, только если это необходимо, и по-прежнему можно рассматривать такую величину как интеграл перекрытия.

Покажем, что при выполнении условия ортонормированности (4.43) оператор, удовлетворяющий условию (4.36), унитарен. Рассмотрим опять стандартное преобразование Лоренца (4.32), но результат этого рассмотрения справедлив для любого преобразования Лоренца $\Lambda_{\mu\nu}$.

Возьмем два состояния $\varphi_{\mathbf{p}}$ и $\varphi_{\mathbf{q}}$. Тогда

$$U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{p}} = \varphi_{\mathbf{p}'};\quad U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{q}} = \varphi_{\mathbf{q}'},$$

где

$$p_1' = p_1;\quad p_2' = p_2;\quad p_3' = \Lambda_{33}p_3 + \Lambda_{30}E_{\mathbf{p}};\quad E_{\mathbf{p}'} = \Lambda_{00}E_{\mathbf{p}} + \Lambda_{03}p_3$$

и $\Lambda_{33} = \Lambda_{00} = (1 - v^2)^{-1/2}$; $\Lambda_{30} = \Lambda_{03} = v\,(1 - v^2)^{-1/2}$ с аналогичной системой уравнений для $\mathbf{q}'$.

Оператор $U(\Lambda)$ унитарен, если

$$(U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{q}},\ U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{p}}) = (\varphi_{\mathbf{q}}, \varphi_{\mathbf{p}}). \tag{4.44}$$

Левая часть этого уравнения есть просто

$$(\varphi_{\mathbf{q}'}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = (2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p}'}\delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}');$$

$$\delta^{(3)}(\mathbf{q}' - \mathbf{p}') = \delta(q_1' - p_1')\,\delta(q_2' - p_2')\,\delta(q_3' - p_3') =$$

$$= \delta(q_1 - p_1)\,\delta(q_2 - p_2)\cdot\delta([E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}}]\,\Lambda_{30} + [q_3 - p_3]\,\Lambda_{33}),$$

причем δ-функция в последнем уравнении упрощается, если воспользоваться следующим правилом: пусть $f(x)$ — некая непрерывная функция от x, которая обращается в нуль при $x = a$: $f(a) = 0$. Тогда

$$\delta(f(x)) = |(df/dx)_{x=a}|^{-1}\,\delta(x - a).$$

Аргумент последней δ-функции обращается в нуль при

$$p_3 = q_3 \text{ и } (\partial/\partial p_3)\{(\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_p)\,\Lambda_{30} + (q_3 - p_3)\,\Lambda_{33}\} =$$

$$= -p_3E_{\mathbf{p}}^{-1}\Lambda_{30} - \Lambda_{33} = -E_{\mathbf{p}'}/E_{\mathbf{p}},$$

так что δ-функция принимает вид $E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}^{-1}\delta(q_3 - p_3)$. Следовательно,

$$(\varphi_{\mathbf{q}'}, \varphi_{\mathbf{p}'}) = (2\pi)^3 (2E_{\mathbf{p}'}) E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}^{-1}\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

Это выражение равно правой части равенства (4.44). Таким образом, оператор $U(\Lambda)$, удовлетворяющий (4.36), унитарен и при условии, что состояния нормированы с помощью (4.43).

Закончим раздел определением нормировки и интегралов перекрытия для произвольного одночастичного состояния. Общее состояние Ψ — суперпозиция базисных состояний, его можно записать в виде

$$\Psi = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, [(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2}] \, a(\mathbf{p}) \, \varphi_{\mathbf{p}}. \tag{4.45}$$

Здесь опять для удобства и упрощения других формул введены множители 2π и $2E_{\mathbf{p}}$.

Запишем уравнение, комплексно сопряженное к (4.45):

$$\Psi^* = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, [(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2}] \, a^*(\mathbf{p}) \, \varphi_{\mathbf{p}}^*, \tag{4.46}$$

и нормировочный интеграл

$$(\Psi, \Psi) = (2\pi)^{-3} \int d^3p \, [(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2}] \, a^*(p) \int d^3p' \, [(2E_{\mathbf{p}'})^{-1/2}] \, a(\mathbf{p}') \, (\varphi_{\mathbf{p}}, \varphi_{\mathbf{p}'}).$$

Подставляя (4.43) в правую часть уравнения, получаем

$$(\Psi, \Psi) = \int d^3p \, |a(\mathbf{p})|^2. \tag{4.47}$$

Если интеграл в правой части уравнения нормирован на единицу, то $|a(\mathbf{p})|^2 d^3p$ можно интерпретировать как вероятность того, что в состоянии Ψ находится частица с импульсом в интервале $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d^3p)$.

§ 4.4. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ

Все сказанное в предыдущем параграфе оказывается справедливым и для частиц со спином. Однако вектор состояния для частиц со спином должен иметь дополнительную характеристику λ, описывающую ориентацию спина.

В тех случаях, когда спин имеет определенное значение, опустим характеризующий его индекс и запишем базисные состояния в виде $\varphi_{p\lambda}$ или $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$.

Рассмотрим состояние покоя $\mathbf{p}=0$ (речь идет о частицах с отличной от нуля массой). Для базисных состояний покоя $\varphi_{000\lambda}$ в качестве λ возьмем компоненту спина вдоль направления z в рабочей системе отсчета Σ. Введем оператор $\mathbf{J}$ полного момента количества движения. В состоянии покоя нет вклада от орбитального движения, так что $\varphi_{000\lambda}$ удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{J}^2\varphi_{000\lambda} &= s(s+1)\,\varphi_{000\lambda}; \\ J_3\varphi_{000\lambda} &= \lambda\varphi_{000\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

Операторы сдвига $J_\pm$ связывают состояния с разными значениями λ:

$$J_\pm \varphi_{000\lambda} = [(s \mp \lambda)(s \pm \lambda + 1)]^{1/2} \varphi_{000\lambda\pm1}. \tag{4.49}$$

Здесь принято стандартное фазовое условие, описанное в гл. 3. $2s+1$-состояний $\varphi_{000\lambda}$ образуют полный набор состояний покоя.

Следуя процедуре, использованной в § 4.3 для бесспиновых частиц, определим состояния $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$ с произвольным импульсом. Так, применяя чистое преобразование Лоренца $\mathscr{L}_p$, получим состояние $\varphi_{p00\lambda}$, в котором импульс направлен вдоль оси z.

Таким образом,

$$\varphi_{p00\lambda} = U(\mathscr{L}_p)\varphi_{000\lambda}. \tag{4.50}$$

Это выражение определяет состояние $\varphi_{p00\lambda}$, а λ все еще означает собственное значение z-компоненты спина. Чтобы доказать это, заметим, что поворот Z_α *вокруг оси* z коммутирует с преобразованием Лоренца $\mathscr{L}_p$ *вдоль оси* z:

$$Z_\alpha \mathscr{L}_p = \mathscr{L}_p Z_\alpha, \tag{4.51}$$

так как оператор Z_α действует только на координаты x и y, а $\mathscr{L}_p$ — на координаты z и t. Обычным способом получим

$$U(Z_\alpha)U(\mathscr{L}_p) = U(\mathscr{L}_p)U(Z_\alpha).$$

Теперь $U(Z_\alpha) = \exp(-i\alpha J_3)$. Следовательно,

$$J_3 U(\mathscr{L}_p) = U(\mathscr{L}_p) J_3. \tag{4.52}$$

С помощью уравнения (4.48) получим

$$J_3\varphi_{p00\lambda} = J_3 U(\mathscr{L}_p)\varphi_{000\lambda} = U(\mathscr{L}_p) J_3 \varphi_{000\lambda} = \lambda U(\mathscr{L}_p)\varphi_{000\lambda}.$$

Таким образом,

$$J_3\varphi_{p00\lambda} = \lambda\varphi_{p00\lambda}. \tag{4.53}$$

Заметим, что состояние с импульсом p, направленным вдоль оси z, не имеет компоненты орбитального момента количества движения вдоль оси z, так что J_3 имеет то же собственное значение, что и спиновая компонента.

Спиральность частицы определяется как проекция полного момента количества движения частицы на направление движения, т. е. она является собственным значением оператора

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}/|\mathbf{P}|, \tag{4.54}$$

который для собственных состояний оператора $\mathbf{P}$ имеет вид $\mathbf{I}\cdot\hat{\mathbf{p}}$, где $\hat{\mathbf{p}}$ — единичный вектор в направлении импульса. Таким образом, по приведенному выше определению, собственное состояние $\varphi_{p00\lambda}$ имеет спиральность λ. Отметим, что оператор спиральности является инвариантом относительно вращений, будучи скалярным произведением двух векторных операторов.

Чтобы определить $2s+1$-спиновых состояния частицы с импульсом в произвольном направлении (θ, φ), просто применим к состояниям $\varphi_{p00\lambda}$ поворот $U(R(\varphi, \theta, 0))$. В результате получим

$$\varphi_{p\theta\varphi\lambda} = U(R(\varphi, \theta, 0))\, U(\mathscr{L}_p)\, \varphi_{000\lambda}. \tag{4.55}$$

Так как оператор спиральности есть скаляр, то определенное таким образом состояние $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$ имеет такое же собственное значение спиральности, что и неповернутое состояние $\varphi_{p00\lambda}$, т. е. λ. Значит, характеристику λ для вектора состояния $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$ можно отождествить с компонентой спина в направлении движения.

Итак, мы определили полный набор состояний $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$ для одной частицы с массой $m \neq 0$ и спином s. Для каждого импульса характеристика λ является компонентой спина по направлению движения, которая принимает значения от $-s$ до s. Для частицы в состоянии покоя λ есть проекция спина в направлении оси z. Нормировка базисных состояний имеет вид

$$(\varphi_{\mathbf{p}'\lambda'}, \varphi_{\mathbf{p}\lambda}) = (2\pi)^3\, 2E_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\, \delta_{\lambda'\lambda} \tag{4.56}$$

и общее состояние частицы есть

$$\Psi = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, [(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2}] \sum_{\lambda=-s}^{s} a_\lambda(p)\, \varphi_{\mathbf{p}\lambda}. \tag{4.57}$$

Здесь $a_\lambda(\mathbf{p})$ — амплитуда вероятности нахождения частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и спиральностью λ в состоянии Ψ.

В результате отождествление квантового числа λ со спиральностью для базисного состояния $\varphi_{p\lambda}$ вытекает из последовательного применения преобразования $\mathscr{L}_p$ и поворота $R(\varphi, \theta, 0)$, с помощью которых из состояния покоя генерируется общее состояние. Например, для образования состояния $\varphi_{p\lambda}$ можно применить к состоянию $\varphi_{000\lambda}$ чистое преобразование Лоренца в направлении $\mathbf{P}$. В этом случае λ уже нельзя интерпретировать просто как спиральность, несмотря на то, что в результате получается полный набор $2s+1$-состояний частицы с импульсом $\mathbf{P}$. Использованный выше метод принадлежит Жакобу и Вику [108], а общее описание состояний частицы известно как формализм спиральности.

Мы слегка отклонились от первоначального формализма Жакоба и Вика, применивших поворот $R(\varphi, \theta, -\varphi)$. Преобразования (4.55) интерпретированы нами в активном смысле для образования состояния $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$ из состояния $\varphi_{000\lambda}$. Но, задав состояние частицы $\varphi_{p\theta\varphi\lambda}$, можно перейти к системе покоя Σ_0 этой частицы, что сопровождается обращением выражения (4.55). При таком преобразовании λ не меняется и поэтому иногда трактуется как z-проекция спина в системе отсчета покоящейся частицы.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно спина, которые послужат иллюстрацией к развитому выше формализму. В последующих разделах этот математический аппарат используем для описания процессов рассеяния и распада.

Иногда возникает необходимость описать частицу, обладающую определенным собственным значением спина в направлении, отличном от направления движения. В формализме спиральности это тоже можно сделать путем записи суперпозиции состояний с различной спиральностью.

Рассмотрим частицу со спином $s=1/2$. Покоящаяся частица имеет два состояния $\varphi_{0\pm 1/2}$, которые обозначим $\varphi_{0\pm}$.

Спиновые операторы S_x, S_y, S_z в базисе этих состояний даются матрицами Паули

$$\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2.$$

Собственные состояния оператора S_x с собственными значениями $\pm\hbar/2$ даются суперпозициями базисных состояний

$$2^{-1/2}(\varphi_{0+} \pm \varphi_{0-}).$$

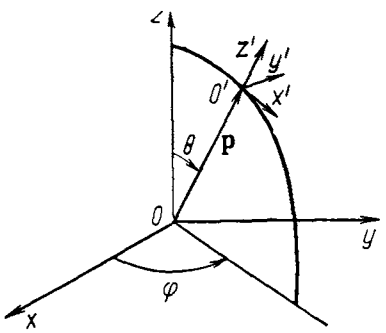


Рис. 4.1. Определение спиральной системы $O'x'y'z'$ для частицы с импульсом $\mathbf{p}$. Для простоты спиральная система помещена на конец соответствующего вектора импульса

Применив стандартное преобразование спиральности (4.55), получим состояния

$$2^{-1/2}(\varphi_{p+} \pm \varphi_{p-}), \tag{4.58}$$

которые можно интерпретировать как состояния частицы, являющиеся собственными состояниями оператора S_x в *системе покоя этой частицы*. Другими словами, можно считать, что на набор осей x, y и z, связанных с состоянием частицы (оси фиксированы относительно тела), действует сначала оператор буста $\mathscr{L}_p$, а затем оператор поворота $R(\varphi, \theta, 0)$, после чего получается система осей x', y', z'. Состояния (4.58) — это собственные состояния оператора $S_{x'}$ (рис. 4.1).

§ 4.5. БЕЗМАССОВЫЕ ЧАСТИЦЫ

Проведенное выше исследование свойств состояний частиц относительно преобразований Лоренца можно легко распространить и на частицы с нулевой массой. Это позволяет понять особенности этого случая.

Во-первых, разница заключается в том, что для безмассовой частицы нет системы покоя; в любой системе отсчета скорость

частицы равна c. Следовательно, из всех состояний безмассовой частицы состояние покоя нельзя взять в качестве опорного, как это делали для частицы, обладающей массой. Необходимо выбрать некоторое другое простое состояние, например такое, в котором импульс частицы направлен вдоль оси z и равен по величине значению $\overset{\circ}{p}$. Состояния, в которых импульс направлен по оси z, но имеет другие значения, получаются путем применения к состоянию с импульсом $\overset{\circ}{\mathbf{p}}$ лоренцева буста. Таким образом,

$$\varphi_{p00} = U(\mathscr{L})\,\varphi_{\overset{\circ}{p}00}.$$

Состояние, импульс которого имеет направление (θ, φ), получается поворотом

$$\varphi_{p\theta\varphi} = U(R(\varphi, \theta, 0))\,U(\mathscr{L})\,\varphi_{\overset{\circ}{p}00}; \tag{4.59}$$

в этом случае, чтобы преобразовать четырехмерный импульс $(\overset{\circ}{p}, 0, 0, \overset{\circ}{p})$ в четырехмерный импульс $(p, 0, 0, p)$, надо выбрать соответствующим образом параметр в преобразовании Лоренца $\mathscr{L}$.

Обратимся теперь к спину. Единственными известными безмассовыми частицами являются фотон и нейтрино. Они несут спиновый момент количества движения. Для нас наиболее важна следующая особенность таких частиц: безмассовая частица спина s имеет вместо ожидаемых $2s+1$-состояний только *одно* или при специальных обстоятельствах *два* состояния момента количества движения. Чтобы понять причину, зададим вслед за Вигнером вопрос: почему частица с массой имеет $2s+1$-состояний момента количества движения?

Ответ на этот вопрос можно найти в последнем разделе. Лоренц-инвариантность требует существования физически эквивалентной системы отсчета, в которой частица покоится, а инвариантность относительно вращений в этой системе требует существования $2s+1$-состояний (см. гл. 3). Для безмассовой частицы никакой системы покоя нет, поэтому этот аргумент неприменим. Вместо этого начнем с исходного состояния $\varphi_{\overset{\circ}{p}00\lambda}$ и охарактеризуем спиновые состояния спиральностью λ, т. е. собственным значением оператора спиральности $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P}/|\mathbf{P}|$.

Тогда состояния, получаемые в результате применения буста $\mathscr{L}$ к этому состоянию будут иметь ту же спиральность, а любое состояние, получаемое путем поворота импульса в общее направление, будет по-прежнему иметь то же собственное значение спиральности:

$$\varphi_{p00\lambda} = U(\mathscr{L})\varphi_{\overset{\circ}{p}00\lambda}; \tag{4.60}$$

$$\varphi_{p\theta\varphi\lambda} = U(R(\varphi, \theta, 0))\,U(\mathscr{L})\,\varphi_{\overset{\circ}{p}00\lambda}. \tag{4.61}$$

Таким образом, для безмассовой частицы *спиральность является инвариантом относительно преобразований Лоренца*, т. е.

имеет одно и то же значение для всех наблюдателей. Это означает, что из лоренцевой инвариантности и инвариантности относительно вращений в случае безмассовой частицы не следует необходимость существования $2s+1$-спиновых состояний. Аргумент, который мы только что привели, можно перевести на математический язык, но пока делать этого не будем.

Следует заметить, что в случае безмассовой частицы, движущейся вдоль оси $+z$ в системе отсчета Σ, мы не можем перейти в новую систему Σ' таким образом, чтобы перегнать эту частицу. Но для частицы с массой это возможно. В результате в системе Σ' частица кажется движущейся вдоль отрицательной оси z. Если спин частицы направлен вдоль оси $+z$, то он остается таким же и в системе Σ'. Поэтому при такой связи систем Σ и Σ' положительной спиральности $+\lambda$ в системе Σ соответствует отрицательная спиральность $-\lambda$ в системе Σ'. Это рассуждение нельзя использовать для того, чтобы изменить спиральность безмассовой частицы. Однако существует другой аргумент, из которого следует, что безмассовая частица должна иметь больше одного состояния спиральности. Он основан на операции пространственной инверсии или четности, и, следовательно, воспользоваться им можно только в том случае, если взаимодействия, в которых частица участвует, сохраняют четность.

Фотон обладает только электромагнитным взаимодействием, которое, по-видимому, сохраняет четность. Соответственно существуют два спиральных состояния фотона $\lambda=\pm 1$, взаимодействие которых с заряженными частицами одинаково. Поскольку $|\lambda|=1$, то мы говорим, что спин фотона равен единице. Состояния фотона

$$\varphi^{\nu}_{p00,\pm 1} \tag{4.62}$$

описывают кванты плоской электромагнитной волны с двумя состояниями поляризации с векторным потенциалом

$$\mathbf{A}_{\pm} = \mp 2^{-1/2}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)\exp(ipz - ipt), \tag{4.63}$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — единичные векторы вдоль координатных осей. Уравнение (4.63) с верхним знаком характеризует волну, в которой вектор напряженности электрического поля вращается вокруг направления движения по часовой стрелке. Такая волна называется правой циркулярно поляризованной. Соответственно состояние $\varphi^{\nu}_{p00,+1}$ называется правым циркулярно поляризованным. Такие обозначения не согласуются с классической оптикой, где волна типа $\mathbf{A}_+$ называется левой циркулярно поляризованной.

Нейтрино, по-видимому, может обладать только слабым взаимодействием, которое не сохраняет четности. Соответственно мы находим только одно спиральное состояние нейтрино. Но картину усложняет то, что нейтрино несет обобщенный заряд (лептонное число), поэтому приведенное выше рассуждение применимо только к нейтрино с определенным лептонным числом (подробнее см. п. 5.4.3).

§ 4.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СПИРАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ СОСТОЯНИЯМ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Применим спиральный формализм к таким реакциям, как $a+b\to c+d$, и распадам $A\to a+b$, в которых частицы могут иметь спин. Ранее мы видели, что, как следствие инвариантности относительно вращений, S-матрица в представлении момента количества движения диагональна.

Чтобы иметь возможность использовать это, надо уметь разлагать собственные состояния импульса двух частиц по собственным состояниям полного момента количества движения.

4.6.1. Двухчастичные состояния. Состояние двух свободных частиц a и b с импульсами $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{p}_b$ и спиральностями λ_a и λ_b представим в виде произведения двух состояний

$$\varphi^{a}_{\mathbf{p}_a\lambda_a}\varphi^{b}_{\mathbf{p}_b\lambda_b}, \tag{4.64}$$

относящихся к отдельным частицам, тип которых мы уже обсудили раньше. Особенно нас интересуют состояния с нулевым полным импульсом, т. е. состояния двух частиц в системе центра масс (с. ц. м.). Состояния двух частиц в с. ц. м. аналогичны состояниям одной частицы в системе покоя, а более общие состояния можно получить из состояния в с. ц. м., используя операторы лоренц-преобразования.

Состояние в с. ц. м. можно характеризовать величиной и полярными углами импульса какой-либо частицы, например частицы a: $\mathbf{p}=\mathbf{p}_a=-\mathbf{p}_b$, а также спиральностью λ_a и λ_b. Обозначим это состояние $\varphi^{ab}_{p\theta\varphi\lambda_a\lambda_b}$ и выразим его через произведение состояний (4.64).

Для импульса $\mathbf{p}$, направленного вдоль положительной оси z, имеем

$$\varphi^{ab}_{p00\lambda_a\lambda_b}=\varphi^{a}_{p00\lambda a}\widehat{\varphi}^{b}_{p\pi0\lambda_b}. \tag{4.65}$$

Состояния в правой части равенства по существу определены уравнением (4.55), однако следует обратить внимание и на фазовые множители.

Для частицы a, движущейся вдоль оси $+Oz$, примем в уравнении (4.55) $\theta=\varphi=0$. К частице b, движущейся вдоль оси $-Oz$, сначала применим буст, использовав при этом оператор $U(\mathscr{Z}_p)$, затем повернем вектор импульса в отрицательное z-направление. Положив $\theta=\pi$, условимся в выборе φ. Различные значения φ приводят лишь к умножению рассматриваемого состояния на фазовый множитель. Следуя Вику, выберем

$$\widehat{\varphi}^{b}_{p\pi0\lambda_b}=\exp(-i\pi s_b)\,U(R(\pi,\ \pi,\ 0))\,U(\mathscr{Z}_p)\,\varphi^{b}_{000\lambda_b}. \tag{4.66}$$

Это равенство определяет состояние $\widehat{\varphi}$. Причина такого выбора заключается в том, что, как можно показать, в случае $p \to 0$ состояние $\widehat{\varphi}^b_{p\pi 0\lambda_b}$ переходит в $\varphi^b_{000,-\lambda_b}$:

$$\lim_{p\to 0} \widehat{\varphi}^b_{p\pi 0\lambda_b} = \varphi^b_{000,-\lambda_b}. \tag{4.67}$$

Знак минус можно понять из рис. 4.2. Знак $\wedge$ напоминает о том, что, когда вектор $\mathbf{p}$ направлен вдоль отрицательной оси z, мы пользуемся не уравнением (4.55) с $\theta=\pi$, $\varphi=0$, а уравнением (4.66).

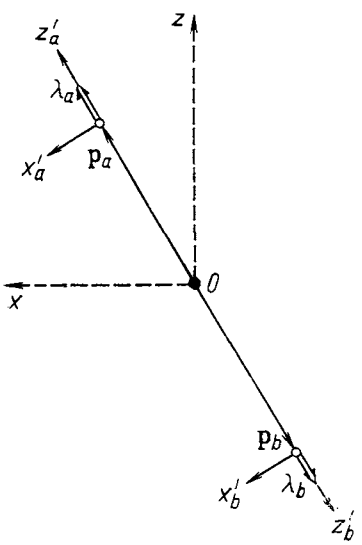


Рис. 4.2. Двухчастичное спиральное состояние, относительный импульс которого имеет общее направление в плоскости xz. Спиральная система для частицы b соответствует условию (4.66)

Если $\mathbf{p}\neq 0$, то имеем

$$J_z \varphi^{ab}_{p00\lambda_a\lambda_b} = (\lambda_a - \lambda_b)\, \varphi^{ab}_{p00\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.68}$$

Состояние в с. ц. м. с импульсом p вдоль направления (θ, φ) получаем с помощью поворота $R(\varphi, \theta, 0)$. Таким образом,

$$\varphi^{ab}_{p\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = U(R(\varphi, \theta, 0))\, \varphi^{ab}_{p00\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.69}$$

Следует заметить, что в этом формализме трактовка двух частиц асимметрична, поскольку на практике мы должны установить, которая из частиц первая (a), а которая вторая (b). Разумеется, никакой физический результат не может зависеть от этого выбора.

4.6.2. Разложение по собственным состояниям момента количества движения. Рассмотрим теперь разложение двухчастичного состояния с определенным импульсом в с. ц. м. по состояниям с определенным полным моментом количества движения. Необхо-

димо отметить, что λ_a и λ_b, подобно p, являются скалярными величинами, инвариантными относительно вращений. В силу этого одновременно с определенным значением импульса в с. ц. м. могут существовать состояния с полным моментом количества движения и его проекцией и спиральностями частиц a и b. Обозначим эти собственные состояния

$$\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.70}$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$J^2\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b} = J(J+1)\,\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b}; \tag{4.71}$$

$$J_z\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b} = M\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.72}$$

Для фиксированных p, λ_a и λ_b эти состояния образуют полный набор состояний в с. ц. м. Таким образом, появляется возможность выразить с их помощью собственное состояние импульса. В связи с этим запишем

$$\varphi^{ab}_{p\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = \sum_{JM} C_{JM\lambda_a\lambda_b}(\theta,\ \varphi)\,\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b} \tag{4.73}$$

и постараемся определить коэффициенты разложения $C_{JM\lambda_a\lambda_b}(\theta, \varphi)$. Сначала рассмотрим особый случай $\theta=\varphi=0$. Опустив те характеристики, которые не меняются, получаем

$$\varphi_{00\lambda_a\lambda_b} = \sum_{JM} C_{JM\lambda_a\lambda_b}(0,\ 0)\,\psi_{JM\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.74}$$

Применим к обеим частям равенства оператор $U(Z_\alpha) = \exp(-i\alpha J_z)$, соответствующий повороту на угол α вокруг оси z. Используя (4.68) и (4.72), получаем

$$\exp(-i(\lambda_a-\lambda_b)\alpha)\,\varphi_{00\lambda_a\lambda_b} = \sum_{JM} C_{JM\lambda_a\lambda_b}(0,\ 0)\exp(-iM\alpha)\,\psi_{JM\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.75}$$

Так как это равенство должно выполняться для всех α, то делаем вывод, что

$$C_{JM\lambda_a\lambda_b}(0,\ 0) = 0, \quad \text{если} \quad M \neq \lambda_a - \lambda_b. \tag{4.76}$$

Запишем

$$C_{JM\lambda_a\lambda_b}(0,\ 0) = C_J\delta_{M,\,\lambda_a-\lambda_b}.$$

Коэффициент C_J определим из условий нормировки, в соответствии с которыми он должен быть равен

$$C_J = [(2J+1)/4\pi]^{1/2}. \tag{4.77}$$

Таким образом, для $\theta=\varphi=0$ получаем

$$\varphi^{ab}_{p00\lambda_a\lambda_b} = \sum_J C_J\psi^{ab}_{pJ,\lambda_a-\lambda_b,\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.78}$$

В соответствии с уравнением (4.69) общее состояние в с. ц. м. получается из левой части равенства (4.78) с помощью поворота $U(\hat{R}(\varphi, \theta, 0))$. Опуская индексы p и ab, имеем

$$\varphi_{\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = U(R(\varphi, \theta, 0))\,\varphi_{00\lambda_a\lambda_b} = \sum C_J U(R(\varphi, \theta, 0))\,\psi_{J,\lambda_a-\lambda_b,\lambda_a\lambda_b}$$

и, следовательно,

$$\varphi_{\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = \sum_J C_J \sum_M \psi_{JM\lambda_a\lambda_b} \mathcal{D}^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi, \theta, 0). \tag{4.79}$$

Здесь для определения собственной функции полного момента количества движения, возникающей в результате действия конечного поворота, мы воспользовались формулой (3.69).

Сравнивая (4.79) с (4.73), находим

$$C_{JM\lambda_a\lambda_b}(\theta, \varphi) = C_J \mathcal{D}^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi, \theta, 0). \tag{4.80}$$

Полученный результат определяет область значений J и M. Свойства $\mathcal{D}^J_{M'M}(\alpha, \beta, \gamma)$ требуют, чтобы J и M принимали целые или полуцелые значения тогда, когда разность $\lambda_a-\lambda_b$ и соответственно разность S_a-S_b является целой или полуцелой. Кроме того, J не может быть меньше M или M'. Следовательно, в разложении $J \geqslant |\lambda_a-\lambda_b|$.

Уже показано, что

$$\varphi^{ab}_{p\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = \sum_{J \geqslant |\lambda_a-\lambda_b|} \sum_{M=-J}^{J} C_J \mathcal{D}^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi, \theta, 0)\,\psi^{ab}_{pJM\lambda_a\lambda_b}, \tag{4.81}$$

где

$$\mathcal{D}^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi, \theta, 0) = \exp(-iM\varphi)\, d^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\theta).$$

Уравнение (4.81) — ключ к формализму спиральности для двухчастичных состояний.

Если обе частицы a и b имеют нулевой спин, то $\lambda_a-\lambda_b=0$ и с помощью тождества (3.87г)

$$\mathcal{D}^L_{M0}(\varphi, \theta, 0) = [4\pi/(2L+1)]^{1/2} Y^*_{LM}(\theta, \varphi)$$

можно представить (4.81) в виде

$$\varphi^{ab}_{p\theta\varphi} = \sum_{LM} Y^*_{LM}(\theta, \varphi)\,\psi^{ab}_{pLM}. \tag{4.82}$$

Так как J — целое, то мы написали L вместо J. По сути дела (4.82) есть формула для разложения плоской волны в нерелятивистской теории рассеяния, которая обычно записывается в виде математического тождества:

$$\exp(i\mathbf{pr}) = 4\pi \sum_{LM} i^L Y^*_{LM}(\theta, \varphi)\, j_L(pr)\, Y_{LM}(\theta_r, \varphi_r), \tag{4.83}$$

где (θ, φ) и (θ_r, φ_r) — полярные углы векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ соответственно.

Равенство (4.81) отличается от обычного только появлением новой функции $\mathcal{D}^J_{M'M}$ и легко доказывается для произвольных спинов s_a и s_b. Так как спины всех частиц относятся к общей оси z, то в случае двух спиновых частиц уравнение (4.83) должно

включать два коэффициента Клебша—Гордана. Чтобы получить состояние с определенным полным моментом количества движения j, эти коэффициенты должны связать спины s_a и s_b с орбитальным моментом количества движения l.

4.6.3. Нормировка состояний. Из условия нормировки (4.43) для одночастичных состояний следует, что двухчастичные состояния удовлетворяют условию нормировки

$$(\varphi^{ab}_{\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b\mu_a\mu_b},\quad \varphi^{ab}_{\mathbf{p}_a\mathbf{p}_b\lambda_a\lambda_b}) = (2\pi)^6\, 2E_a 2E_b \delta^{(3)}(\mathbf{q}_a - \mathbf{p}_a)\,\delta^{(3)} \times \\ \times (\mathbf{q}_b - \mathbf{q}_b)\,\delta_{\mu_a\lambda_a}\delta_{\mu_b\lambda_b}, \tag{4.84}$$

где

$$E_a = (\mathbf{p}_a^2 + m_a^2)^{1/2}; \qquad E_b = (\mathbf{p}_b^2 + m_b^2)^{1/2}.$$

Двухчастичное состояние удобно описывать с помощью полного четырехмерного импульса P и относительного трехмерного импульса $\mathbf{p}$, определенных выражениями

$$P_\mu = \mathbf{p}_{a\mu} + \mathbf{p}_{b\mu}; \quad (m_a + m_b)\,\mathbf{p} = m_b\mathbf{p}_a - m_a\mathbf{p}_b.$$

В основном нас интересует с. ц. м., в которой полный трехмерный импульс равен нулю, так что $P_\mu = (W, 0)$. В этом случае значение относительного импульса в с. ц. м. однозначно определяется полной энергией в этой системе, так что полный набор переменных, характеризующих состояние в с. ц. м., состоит из W и двух полярных углов θ, φ, необходимых для определения ориентации вектора относительного импульса.

Можно показать, что в с. ц. м. состояния, определенные выражением

$$\Phi_{W\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = (2\pi)^{-1}\,(p/4W)^{1/2}\varphi_{p_a=p,\ p_b=-p,\ \lambda_a,\ \lambda_b}, \tag{4.85}$$

удовлетворяют следующему условию нормировки:

$$\left(\Phi_{W\theta'\varphi'\lambda'_a\lambda'_b},\quad \Phi_{W\theta\varphi\lambda_a\lambda_b}\right) = \delta(\cos\theta' - \cos\theta) \times \\ \times \delta(\varphi' - \varphi)\,\delta_{\lambda'_a\lambda_a}\,\delta_{\lambda'_b\lambda_b}. \tag{4.86}$$

Параллельно с уравнением (4.85) можно определить собственные состояния момента количества движения двух частиц:

$$\Psi_{MJM\lambda_a\lambda_b} = (2\pi)^{-1}\,(p/4P_0)^{1/2}\psi_{MJM\lambda_a\lambda_b}.$$

Таким образом, формула разложения по парциальным волнам сохраняет свой вид:

$$\Phi_{W\theta\varphi\lambda_a\lambda_b} = \sum_{JM} C_J \mathcal{D}^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi,\ \theta,\ 0)\Psi_{WJM\lambda_a\lambda_b}. \tag{4.87}$$

С помощью тождеств для $\mathcal{D}$-функций можно показать, что стандартная нормировка для собственных состояний момента количества движения

$$\left(\Psi_{WJ'M'\lambda'_a\lambda'_b},\quad \Psi_{WJM\lambda_a\lambda_b}\right) = \delta_{J'J}\delta_{M'M}\delta_{\lambda'_a\lambda_b}\,\delta_{\lambda'_b\lambda_b} \tag{4.88}$$

согласуется с нормировкой (4.86) и разложением (4.87) при условии, что $C_J = [(2J+1)/4\pi]^{1/2}$.

И, наконец, отметим, что условие ортонормированности (3.88а) можно использовать для обращения уравнения (4.87). Умножая обе части на $\mathscr{D}^{J*}_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi, \theta, 0)$ и интегрируя по φ и θ, получаем формулу

$$\Psi_{WJM\lambda_a\lambda_b} = [(2J+1)/4\pi]^{1/2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \mathscr{D}^{J*}_{M,\,\lambda_a-\lambda_b}(\varphi,\ \theta,\ 0)\,\Phi_{W\theta\varphi\lambda_a\lambda_b}, \tag{4.89}$$

которая выражает собственное состояние полного момента количества движения в виде (непрерывной) суперпозиции спиральных плоских волн. Эта оригиниальная форма разложения по состояниям с определенным моментом количества движения принадлежит Жакобу и Вику.

§ 4.7. АНАЛИЗ ДВУХЧАСТИЧНОГО РАССЕЯНИЯ В ТЕРМИНАХ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

В приложении А показаио, что дифференциальное сечение в с. ц. м. для бинарной реакции $a+b\to c+d$ между определеиными спиральными состояниями задается с помощью матричных элемеитов оператора перехода $\mathscr{T}$ выражением

$$d\sigma/d\Omega = (8\pi W)^{-2}\,(p_{cd}/p_{ab})\;|\;\mathscr{T}_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W,\ \theta,\ \varphi)\;|^2, \tag{4.90}$$

где матричный элемент оператора $\mathscr{T}$ определяется формулой

$$\begin{aligned}(\varphi^{cd}_{\mathbf{p}_c\mathbf{p}_d\lambda_c\lambda_d},\quad \mathscr{T}\varphi^{ab}_{\mathbf{p}_a\mathbf{p}_b\lambda_a\lambda_b}) &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_c+p_d-p_a-p_b)\times\\ &\times\mathscr{T}_{\lambda_c\lambda_d,\,\lambda_a\lambda_b}(W,\ \theta,\ \varphi).\end{aligned} \tag{4.91}$$

В этой формуле начальный и конечный импульсы имеют следующий вид:

$$\mathbf{p}_{ab} = \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b \text{ с полярными углами } (0,\ 0);$$
$$\mathbf{p}_{cd} = \mathbf{p}_c = -\mathbf{p}_d \text{ с полярными углами } (\theta,\ \varphi).$$

Если вместо этих состояний использовать Φ, заданное формулой (4.85) с более простой иормировкой (4.86), то выражение для дифференциального сечения в с. ц. м. приобретает вид

$$d\sigma/d\Omega = (2\pi/p_{ab})^2\;|\;(\Phi_{W\theta\varphi\lambda_c\lambda_d},\quad \mathscr{T}\Phi_{W00\lambda_a\lambda_b})\;|^2. \tag{4.92}$$

Разложение по парциальным волнам для матричного элемента оператора $\mathscr{T}$ проводят путем использования разложения по собственным состояниям момента количества движения (4.87) для начального и конечного состояний:

$$\left(\Phi^{cd}_{W\theta\varphi\lambda_c\lambda_d},\ \mathcal{T}\Phi^{ab}_{W00\lambda_a\lambda_b}\right)=\sum_{JM}\sum_{J'M'}C^{*}_{J}\mathcal{D}^{J*}_{M,\lambda_c-\lambda_d}(\varphi,\ \theta,\ 0)\times$$
$$\times C_{J'}\mathcal{T}^{J'}_{M',\lambda_a-\lambda_b}(0,\ 0,\ 0)\left(\Psi^{cd}_{WJM\lambda_c\lambda_d},\ \mathcal{T}\Psi^{ab}_{WJ'M'\lambda_a\lambda_b}\right).$$

Как уже было показано в п. 3.3.2, из инвариантности относительно вращений следует, что матричный элемент оператора $\mathcal{T}$ в базисе момента количества движения имеет вид

$$\left(\Psi^{cd}_{WJM\lambda_c\lambda_d},\ \mathcal{T}\Psi^{ab}_{WJ'M'\lambda_a\lambda_b}\right)=\mathcal{T}^{J}_{\lambda_c\lambda_d\lambda_a\lambda_b}(W)\,\delta_{JJ'}\delta_{MM'},\qquad(4.93)$$

где $\mathcal{T}^J$ не зависит от M. Вводя это выражение в предыдущее разложение и замечая, что

$$\mathcal{D}^{J'}_{M',\lambda_a-\lambda_b}(0,\ 0,\ 0)=\delta_{M',\lambda_a-\lambda_b},$$

получаем

$$\left(\Phi^{cd}_{W\theta\varphi\lambda_c\lambda_d},\ \mathcal{T}\Phi^{ab}_{W00\lambda_a\lambda_b}\right)=\sum_{J}(4\pi)^{-1}(2J+1)\,\mathcal{D}^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,\lambda_c-\lambda_d}\times$$
$$\times(\varphi,\ \theta,\ 0)\,\mathcal{T}^{J}_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W).\qquad(4.94)$$

Так как $\mathcal{D}^J_{mn}$ определено только для $|m|$ и $|n|$, меньших или равных J, то сумма по J начинается с меньшего из двух значений $|\lambda_a-\lambda_b|$ или $|\lambda_c-\lambda_d|$.

Определять спиральную амплитуду рассеяния можно по формуле

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W,\ \theta,\ \varphi)=(2p_{ab})^{-1}\sum_{J}(2J+1)\ \times$$
$$\times D^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,\lambda_c-\lambda_d}(\varphi,\ \theta,\ 0)\,\mathcal{T}^{J}_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b},\qquad(4.95)$$

с помощью которой сечение можно записать так:

$$d\sigma/d\Omega=|\,f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W,\ 0,\ \varphi)\,|^2.\qquad(4.96)$$

Уравнения (4.95) и (4.96) — это основные формулы разложения по спиральным парциальным волнам для реакции между частицами с произвольными спинами.

Из формы функций $\mathcal{D}^J$ следует, что можно выделить зависимость f от φ и представить ее в виде

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W,\ \theta,\ \varphi)=\exp[i(\lambda_a-\lambda_b)\varphi]\,f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta,\ 0).$$

Как и ожидалось при обсуждении основ инвариантности относительно вращений, зависимость от φ из выражения для дифференциального сечения исчезает. Обычно за плоскость рассеяния выбирают плоскость xz ($\varphi=0$). Величина $d\sigma/d\Omega$ задается формулой (4.96) и является дифференциальным сечением для частиц с определенной спиральностью. Если состояния поляризации конечных частиц не обнаруживаются, то необходимо просуммировать выражение (4.96) по λ_c и λ_d. Если не поляризованы начальный пучок

и мишень, то необходимо усреднить выражение (4.96) по всем возможным значениям λ_a и λ_b соответственно.

Следовательно, «неполяризованное» сечение

$$\overline{d\sigma/d\Omega} = [(2s_a+1)\,(2s_b+1)]^{-1} \sum_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b} |f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W, \theta, \varphi)|^2. \quad (4.97)$$

Общее представление о поляризации в формализме спиральности читатель может найти в работе Жакоба и Вика [108].

При рассмотрении следствий из дискретных симметрий — пространственной инверсии и обращения времени для реакций и распадов — необходимо знать, как действуют эти операции на состояния спиральности. Этот вопрос будет обсуждаться в главах, посвященных четности и обращению времени.

Наконец, отметим, что любая из частиц a, b, c, d может быть безмассовой и для нее остается справедливым разложение по парциальным волнам. Но (см. § 4.5) выбор возможных значений спиральности в этом случае ограничен.

§ 4.8. ПИОН-НУКЛОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Здесь для иллюстрации формализма спиральности рассматривается важный случай упругого рассеяния частиц со спинами — 0 и $1/2$. Этот случай включает πN- и KN-рассеяние и реакции типа

$$\overline{K} + N \to \pi + \Lambda; \quad \overline{K} + N \to \pi + \Sigma.$$

Найдем связь формул анализа спиральности с формулами анализа, проводимого по аналогии с нерелятивистской теорией рассеяния. Это покажет, что прежний анализ действительно совместим с требованиями лоренц-инвариантности, хотя это и не всегда очевидно.

Для определенности выберем случай πN-рассеяния. Пусть частица $a\,(c)$ — нуклон, а $b\,(d)$ — пион, т. е. $s_a = s_c = 1/2$; $s_b = s_d = 0$. Индексы λ_b и λ_d соответственно опустим, а значения $\pm 1/2$ для λ_a и λ_c обозначим просто $\pm$.

Геометрия рассеяния в с. ц. м. показана на рис. 4.3. Здесь падающий нуклон (а не пион) направлен вдоль положительной оси z, а конечный нуклон направлен под полярными углами (θ, φ).

Дифференциальное сечение в с. ц. м. между состояниями с определенной спиральностью

$$d\sigma/d\Omega = |f_{\mu\lambda}(\theta, \varphi)|^2;$$

$$f_{\mu\lambda}(\theta, \varphi) = (2p)^{-1} \sum_J (2J+1) \exp(i\lambda\varphi)\, d^J_{\lambda\mu}(\theta)\, \mathcal{T}^J_{\mu\lambda}(W). \quad (4.98)$$

Как отмечалось выше, зависимость дифференциального сечения от φ выделяется в формуле в виде множителя, и ее следует учесть в дальнейшем при обсуждении отдельных вопросов поляри-

зации. Амплитуду рассеяния для $\varphi=0$ обозначим просто $f(\theta)$, так что

$$f_{\mu\lambda}(\theta, \varphi) = \exp(i\lambda\varphi) f_{\mu\lambda} f_{\mu\lambda}(\theta).$$

Априори можно сказать, что существует четыре спиральных амплитуды, но благодаря закону сохранения чегности они связаны

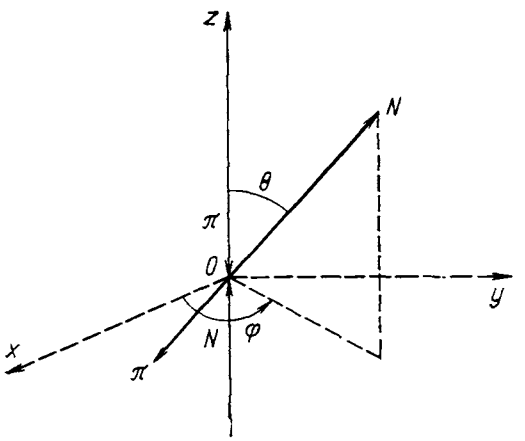


Рис. 4.3. Геометрия πN-рассеяния

друг с другом. В гл. 5 показано, что как следствие из закона сохранения четности

$$f_{\mu\lambda}(\theta) = (-1)^{\mu-\lambda} f_{-\mu,-\lambda}(\theta),$$

а значит

$$\left.\begin{aligned} f_{--}(\theta) &= f_{++}(\theta); \\ f_{+-}(\theta) &= -f_{-+}(\theta). \end{aligned}\right\} \qquad (4.99)$$

Эти соотношения сокращают число независимых амплитуд до двух. В гл. 6 доказано, что обращение времени не приводит к каким-либо дополнительным ограничениям амплитуд в этом процессе.

Амплитуды f_{-+} и f_{++} называют соответственно *спиральными флип-* (т. е. с изменением знака спиральности) и *нонфлип-* (без изменения знака) амплитудами.

Для $\theta=0$ множитель $d^J_{\lambda\mu}(\theta)$ равен нулю, если не выполнено условие $\mu=\lambda$, так что амплитуда рассеяния вперед является чистой нонфлип-амплитудой. При $\theta=\pi$ множитель $d^J_{\lambda\mu}(\theta)$ отличен от нуля только для $\mu=-\lambda$ и рассеяние назад является чистым флипом спиральности. В обоих случаях направление спина нуклона остается неизменным.

Из закона сохранения четности для амплитуд парциальных волн следует, что

$$\mathcal{T}^J_{--} = \mathcal{T}^J_{++}; \quad \mathcal{T}^J_{+-} = \mathcal{T}^J_{-+}, \tag{4.100}$$

и можно еще раз показать, что инвариантность обращения времени не приводит к каким-либо новым ограничениям.

Спиральные амплитуды можно записать в виде матрицы

$$f = \begin{bmatrix} f_{++} & f_{+-} \\ f_{-+} & f_{--} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{++} & -f_{-+} \\ f_{-+} & f_{++} \end{bmatrix}.$$

Вторая форма матрицы — результат применения закона сохранения четности. Матрица f есть матрица в представлении спиральности. Это означает, что индекс столбца относится к проекции спина исходного нуклона на ось z, а индекс строки — к проекции спина конечного нуклона на направление, определяемое полярными углами (θ, φ).

При подходе, опирающемся на нерелятивистский анализ парциальных волн, спин конечного нуклона относят к той же оси, что и спин начального нуклона, т. е. в данном случае к оси z. Рассмотрим теперь, как связаны эти подходы.

Функцию $f_{\mu\lambda}(\theta, \varphi)$ можно считать матричным элементом

$$f_{\mu\lambda} = (\chi^{(h')}_{\mu}, f\chi^{(h)}_{\lambda})$$

оператора перехода между состояниями спиральностн начального нуклона

$$\chi^{(h)}_{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \chi^{(h)}_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. спинором с осью z в качестве оси квантования и спиральным спинором для конечного нуклона

$$\chi^{(h')}_{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \chi^{(h')}_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ось квантования которого совпадает с направлением (θ, φ) конечного нуклона.

Посмотрим, какова амплитуда рассеяния в состоянии, в котором конечный нуклон имеет проекцию спина m на направление Oz. Такое состояние спина для конечного нуклона (обозначим его $\chi^{(f)}_{m}$) получается из спирального состояния путем поворота

$$R(\varphi, \theta, 0)^{-1} = R(0, -\theta, -\varphi)$$

(см. рис. 4.3). Следовательно,

$$\chi^{(f)}_{m} = U(R(\varphi, \theta, 0)^{-1})\, \chi^{(h')}_{m'} = U(Y_{-\theta})\, U(Z_{-\varphi})\, \chi^{(h')}_{m'} = \sum_{\mu} \chi^{(h')}_{\mu} d^{(1/2)}_{\mu m'}(-\theta) \exp(im'\varphi).$$

Введя явные выражения для элементов d-матрицы, получим

$$\chi^{(f)}_{+} = \chi^{(h')}_{+} \cos(\theta/2) \exp(i\varphi/2) - \chi^{(h')}_{-} \sin(\theta/2) \exp(i\varphi/2);$$

$$\chi^{(f)}_{-} = \chi^{(h')}_{+} \sin(\theta/2) \exp(-i\varphi/2) + \chi^{(h')}_{-} \cos(\theta/2) \exp(-i\varphi/2).$$

Для начального нуклона спиральное состояние уже является состоянием с определенной проекцией спина на ось Oz. Следовательно, $\chi_m^{(i)} = \chi_m^{(h)}$. Так как конечное спиновое состояние $\chi_m^{(f)}$ является суперпозицией спиральных состояний, то можно представить амплитуду рассеяния в базисе спиновых состояний, отнесенных к общей оси z, в следующем виде:

$$(\chi_+^{(f)},\ f\chi_m^{(i)}) = \cos(\theta/2)\exp(-i\varphi/2)\,(\chi_+^{(h')},\ f\chi_m^{(h)}) - \sin(\theta/2)\times$$
$$\times \exp(i\varphi/2)\,(\chi_-^{(h')},\ f\chi_m^{(h)}) = \cos(\theta/2)\exp(-i\varphi/2)\,f_{+m}(\theta,\ \varphi) -$$
$$- \sin(\theta/2)\exp(-i\varphi/2)\,f_{-m}(\theta,\ \varphi).$$

Аналогично

$$(\chi_-^{(f)},\ f\chi_m^{(i)}) = \sin(\theta/2)\exp(i\varphi/2)\,f_{+m}(\theta,\ \varphi) +$$
$$+ \cos(\theta/2)\exp(i\varphi/2)\,f_{-m}(\theta,\ \varphi).$$

С учетом закона сохранения четности (4.99) амплитуду перехода в нерелятивистском спиновом представлении можно записать в виде матрицы

$$F_{m'm} = g(\theta)\,\delta_{m'm} + h(\theta)\begin{bmatrix} 0 & \exp(-i\varphi) \\ -\exp(i\varphi) & 0 \end{bmatrix}_{m'm}.$$

Здесь зависимость от φ выделена в виде множителей и определены новые амплитуды:

$$\left.\begin{aligned} g(\theta) &= f_{++}(\theta)\cos(\theta/2) - f_{-+}(\theta)\sin(\theta/2); \\ h(\theta) &= -f_{++}(\theta)\sin(\theta/2) - f_{-+}(\theta)\cos(\theta/2). \end{aligned}\right\} \qquad (4.101)$$

Введем единичный вектор $\hat{\mathbf{n}}$, нормальный к плоскости рассеяния и имеющий следующее направление:

$\mathbf{p}$ (начального нуклона) $\times \mathbf{p}$ (конечного нуклона).

В этом случае

$$\hat{\mathbf{n}} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0)$$

и

$$i\sigma\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(-i\varphi) \\ -\exp(i\varphi) & 0 \end{bmatrix},$$

так что матрицу F можно представить в виде

$$\mathbf{F}(\theta,\ \varphi) = g(\theta)\,1 + ih(\theta)\,\sigma\hat{\mathbf{n}}. \qquad (4.102)$$

Здесь $\mathbf{F}$ — матрица в спиновом пространстве, в котором все спины относятся к общей оси z.

Диагональные и недиагональные элементы $g(\theta)$ и $h(\theta)$ называют амплитудами без опрокидывания и с опрокидыванием спина соответственно. Относительно простую форму (4.102) матрицы $\mathbf{F}$ можно объяснить на основе инвариантности относительно

вращений и отражений в пространстве и времени (см. гл. 5 и 6).

Анализ по парциальным волнам заключается в разложении функции $f_{\mu\nu}(W, \theta, \varphi)$ по амплитудам $\mathcal{T}^J_{\mu\nu}$ таким способом, который совместим с инвариантностью относительно вращений и лоренц-инвариантностью. Однако существует еще одно общее ограничение, которое мы пока не рассматривали, — унитарность оператора рассеяния S, выражающая закон сохранения вероятности.

Напомним, что в базисе состояний φ_n, когда элементы S-матрицы выражаются формулой $S_{mn} = (\varphi_m, S\varphi_n)$, условие унитарности имеет вид (2.15)

$$\sum_m S^*_{mn} S_{mn'} = \delta_{nn'}.$$

Применим это условие к πN-системе. При энергиях ниже порога образования дополнительного пиона упругое рассеяние представляет собой единственный допустимый процесс сильного взаимодействия. Пренебрежем рассеянием с излучением одного или более низкоэнергетических фотонов. Тогда единственные отличные от нуля матричные элементы S-матрицы — это элементы между различными состояниями одного π и одного N. Если выбрать в качестве базисных собственные состояния Ψ_{WJM} момента количества движения в с. ц. м., то оператор рассеяния S будет диагональным:

$$(\Psi_{WJ'M'\mu},\ S\Psi_{WJM\lambda}) = \delta_{J'J}\delta_{M'M} S^J_{\mu\lambda}. \tag{4.103}$$

В этом случае условие унитарности (2.15) дает соотношения

$$\left.\begin{aligned} |S^J_{++}|^2 + |S^J_{+-}|^2 &= 1; \\ S^{J*}_{++}S^J_{+-} + S^{J*}_{+-}S^J_{++} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

в которых использованы равенства

$$S^J_{++} = S^J_{--}; \qquad S^J_{-+} = S^J_{+-}, \tag{4.105}$$

вытекающие из закона сохранения четности.

Уравнения (4.104) можно упростить еще больше, выражая S в базисе собственных состояний четности.

Запишем закон преобразования для спирального собственного состояния πN-момента количества движения при действии оператора четности P (см. гл. 5):

$$U(P)\,\Psi_{JM\lambda} = -(-1)^{J-1/2}\Psi_{JM,-\lambda}.$$

Отсюда для JM можно построить собственные состояния оператора четности. Состояния

$$\Psi^{(\pm)}_{JM} = 2^{-1/2}\{\Psi_{JM+} \mp \Psi_{JM-}\} \tag{4.106}$$

имеют четность $(-1)^{J\mp 1/2}$. Вычисляя матричные элементы S в базисе $\Psi^{(\pm)}_{JM}$ находим, что матрица S полностью диагональна.

Запишем два диагональных элемента для заданного J:

$$\left.\begin{aligned} S^{J+} &= (\Psi^{(+)}_{JM},\ S\Psi^{(+)}_{JM}) = S^J_{++} - S^J_{+-}; \\ S^{J-} &= (\Psi^{(-)}_{JM},\ S\Psi^{(-)}_{JM}) = S^J_{++} + S^J_{+-}. \end{aligned}\right\} \tag{4.107}$$

В то же время справедливо равенство

$$(\Psi^{(+)}_{JM},\ S\Psi^{(-)}_{JM}) = (\Psi^{(-)}_{JM},\ S\Psi^{(+)}_{JM}) = 0,$$

показывающее, что матрица S не имеет матричных элементов между состояниями с одним и тем же J, но с противоположной четностью.

Теперь, когда S-матрица диагональна, условие унитарности принимает простой вид:

$$|\, S^{J+}\,|^2 = |\, S^{J-}\,|^2 = 1.$$

Следовательно, можно параметризовать S-матрицу, полагая

$$S^{J\pm} = \exp(2i\delta_{J\pm}), \tag{4.108}$$

где *фазовые сдвиги* $\delta_{J\pm}(W)$ — вещественные функции полной энергии в с. ц. м.

Выше порога образования дополнительного пиона в матрице рассеяния появляются недиагональные элементы. Для этого случая из условия (2.15) получаем более слабое условие, накладываемое на диагональные элементы S-матрицы:

$$|\, S_{nn}\,|^2 = 1 - \sum_{m \neq n} |\, S_{mn}\,|^2,$$

или

$$|\, S_{nn}\,| \leqslant 1.$$

В базисе $\Psi^{(\pm)}_{JM}$ это выглядит как

$$|\, S^{J\pm}\,| \leqslant 1 \tag{4.109}$$

и параметризация (4.108) заменяется на

$$S^{J\pm} = \eta_{J\pm} \exp(2i\delta_{J\pm}), \tag{4.110}$$

где *факторы неупругости* $\eta_{J\pm}(W)$ — вещественные функции энергии в с. ц. м.

Сделаем комментарии относительно орбитального момента количества движения. В анализе по парциальным волнам в формулировке спиральности орбитальный момент количества движения не участвует как таковой, однако спиральные амплитуды можно связать с амплитудами между состояниями с определенным орбитальным моментом количества движения. Для общего знакомства с этим вопросом читатель может обратиться к статье Жакоба и Вика [108]. Мы же установим эту связь для πN-системы.

Состояние πN-системы с орбитальным моментом количества движения L является собственным состоянием четности с собственным значением четности $-(-1)^L$. Дополнительный знак воз-

никает здесь из-за отрицательной относительной внутренней четности π и N. Теперь состояние с определенным L дает вклад в состояния с полным моментом количества движения $J=L\pm 1/2$. И наоборот, в состояние πN с определенным J дают вклад следующие значения L:

$$J+\colon\ L=J+1/2 \text{ с четностью } -(-1)^{J+1/2}=(-1)^{J-1/2};$$

$$J-\colon\ L=J-1/2 \text{ с четностью } -(-1)^{J-1/2}=(-1)^{J+1/2}.$$

Две эти возможности соответствуют в формуле (4.106) собственным состояниям момента количества движения и четности $\Psi^{(+)}_{JM}$ и $\Psi^{(-)}_{JM}$ соответственно. Нетрудно видеть, что верхний индекс $(\pm)$ означает, что орбитальный момент количества движения $L=J\pm 1/2$. Иногда эти состояния записывают в виде $\Psi_{J\pm,M}$. Именно эти обозначения и используются для диагональных матричных элементов $S^{J\pm}$, а также для фазовых сдвигов и факторов неупругости.

Теперь определим соотношение между элементами матрицы перехода и фазовыми сдвигами. Операторы S и $\mathcal{T}$ связаны формулой $S=1+i\mathcal{T}$. Таким образом, для упругого рассеяния соотношение между матричными элементами в базисе спиральности имеет вид

$$S^{J}_{\mu\lambda}=\delta_{\mu\lambda}+i\mathcal{T}^{J}_{\mu\lambda}.$$

С помощью (4.107) и (4.108) получаем

$$\mathcal{T}^{J}_{++}(W)=i^{-1}\left(S^{J}_{++}-1\right)=i^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\exp\left(2i\delta_{J-}\right)+\exp\left(2i\delta_{J+}\right)\right)-1\right\},$$

так что

$$\mathcal{T}^{J}_{++}(W)=a_{J-}+a_{J+}, \tag{4.111}$$

где введены новые значения амплитуды рассеяния парциальных волн:

$$a_{J\pm}=\left(\exp\left(2i\delta_{J\pm}\right)-1\right)/2i. \tag{4.112}$$

Аналогично находим, что

$$\mathcal{T}^{J}_{+-}(W)=i^{-1}S^{J}_{+-}=a_{J-}-a_{J+}. \tag{4.113}$$

Используя выражения (4.98), (4.111) и (4.113), можно записать амплитуду рассеяния $f_{\mu\lambda}(W,\theta,\varphi)$ через $a_{J\pm}$. Ограничимся случаем $\varphi=0$ и используем следующие явные формулы для функции $d^{J}_{\mu\lambda}(\theta)$:

$$d^{J}_{++}(\theta)=2(2J+1)^{-1}\cos(\theta/2)\left(P'_{J+1/2}-P'_{J-1/2}\right);$$

$$d^{J}_{-+}(\theta)=2(2J+1)^{-1}\sin(\theta/2)\left(P'_{J+1/2}+P'_{J-1/2}\right),$$

где

$$P'_{L}=d\left\{P_{L}(\cos\theta)\right\}/d(\cos\theta)$$

означает производную полинома Лежандра [108]. Отсюда получаем

$$f_{++}(\theta) = p^{-1} \sum_J \cos(\theta/2) \left(P'_{J+1/2} - P'_{J-1/2}\right) \left(a_{J-} + a_{J+}\right);$$

$$f_{+-}(\theta) = p^{-1} \sum_J \sin(\theta/2) \left(P'_{J+1/2} + P'_{J-1/2}\right) \left(a_{J-} - a_{J+}\right).$$

§ 4.9. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ РАСПАДЫ

4.9.1. Общий формализм. Формализм спиральности очень удобен для анализа распадов частиц со спином $A \to a + b + c + \ldots$. Сосредоточимся на случае двухчастичного распада $A \to a + b$, где масса и спин обозначены соответственно $m_A J$; m_a, s_a и m_b, s_b.

В приложении А показано, что ширина распада A связана с элементом S-матрицы между спиральными состояниями плоской волны в с. ц. м., т. е. в системе отсчета A, следующим образом:

$$\Gamma = \sum_{\lambda_a \lambda_b} (2m_A)^{-1} \int d\Omega \left| f_{\lambda_a \lambda_b M}(\theta, \varphi) \right|^2,$$

где

$$f_{\lambda_a \lambda_b M}(\theta, \varphi) = \left(\Phi^{ab}_{W=m_A, \theta\varphi\lambda_a\lambda_b}, S\varphi^A_{OM}\right). \qquad (4.114)$$

Здесь M — проекция спина A на выбранную ось z, относительно которой измерены углы θ и φ.

Начальное состояние есть собственное состояние J^2 и J_z с собственными значениями $J(J+1)$ и M. Закон сохранения момента количества движения требует выполнения этого же условия и для конечного состояния $S\varphi^A_{OM}$. Следовательно, амплитуда нахождения продуктов распада a и b в состоянии плоской волны $\Phi^{ab}_{m_A \theta\varphi\lambda_a\lambda_b}$ есть просто коэффициент при $\Psi^{ab}_{m_A JM\lambda_a\lambda_b}$ в разложении $\Phi^{ab}_{m_A \theta\varphi\lambda_a\lambda_b}$ (4.87) по парциальным волнам для этого состояния, умноженный на амплитуду распада.

Подставляя (4.87) в (4.114), получаем

$$f_{\lambda_a\lambda_b M}(\theta, \varphi) = C_J \mathcal{D}^{J*}_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\varphi, \theta, 0)\, a_{\lambda_a\lambda_b}. \qquad (4.115)$$

Воспользуемся законом сохранения момента количества движения:

$$\left(\Psi^{ab}_{m_A J'M'\lambda_a\lambda_b}, S\Phi^A_{OM}\right) = \delta_{JJ'}\, \delta_{MM'}\, a_{\lambda_a\lambda_b}.$$

Индекс J в амплитуде распада $a_{\lambda_a\lambda_b}$ опущен, так как он полностью зафиксирован. Уравнение (4.115) дает угловую зависимость амплитуды распада на состояния с определенной спиральностью. Из этого уравнения можно получить с помощью $a_{\lambda_a\lambda_b}$ любые данные по угловому распределению или поляризации, которые только возможно найти при сравнении с экспериментом или из подробной динамической теории распада.

Ширина распада получается суммированием по всем конечным спиновым состояниям и интегрированием по всем углам:

$$\Gamma = \sum_{\lambda_a \lambda_b} (4\pi)^{-1} (2J+1) \int d\Omega \left| \mathcal{D}^J_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\varphi, \theta, 0) \right|^2 \left| a_{\lambda_a \lambda_b} \right|^2,$$

где некоторые множители вошли в $a_{\lambda_a \lambda_b}$. Интегрируя по углам с учетом свойств $\mathcal{D}$-функций, находим, что

$$\Gamma = \sum_{\lambda_a \lambda_b} \left| a_{\lambda_a \lambda_b} \right|^2.$$

Иногда удобнее работать с амплитудами $A_{\lambda_a \lambda_b}$, нормализованными согласно условию

$$\sum_{\lambda_a \lambda_b} \left| A_{\lambda_a \lambda_b} \right|^2 = 1.$$

Дифференциальное распределение распада в определенные спиновые состояния имеет вид

$$W_{\lambda_a \lambda_b M}(\theta)\, d\Omega = (4\pi)^{-1} (2J+1) \left[d^J_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\theta) \right]^2 \left| A_{\lambda_a \lambda_b} \right|^2 d\Omega. \quad (4.116)$$

Оно нормируется условием

$$\sum_{\lambda_a \lambda_b} \int d\Omega W_{\lambda_a \lambda_b M}(\theta) = 1.$$

Этот формализм использован в гл. 5 при обсуждении следствий из нарушения сохранения четности в распадах гиперонов. Здесь же коротко опишем лишь некоторые общие свойства процессов распада.

В гл. 5 показано, что если при двухчастичном распаде четность сохраняется, то амплитуды $a_{\lambda_a \lambda_b}$ (или $A_{\lambda_a \lambda_b}$) удовлетворяют уравнению

$$a_{\lambda_a \lambda_b} = \eta_A \left[\eta_a \eta_b \right]^{-1} (-1)^{J - s_a - s_b} a_{-\lambda_a, -\lambda_b}, \quad (4.117)$$

где η_A, η_a и η_b — внутренние четности частиц.

Если неполяризованный образец частиц типа A находится в состоянии покоя, то угловое распределение в процессе распада изотропно, так как невозможно выделить какое-то предпочтительное направление в системе отсчета покоящейся частицы A. Покажем, что этот результат следует из формализма.

В случае неполяризованного образца частиц типа A необходимо провести усреднение по магнитному квантовому числу M. Получим следующее угловое распределение для состояний с определенной спиральностью:

$$\overline{W_{\lambda_a \lambda_b}(\theta)} = (2J+1)^{-1} \sum_M (4\pi)^{-1} (2J+1) \left[d^J_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\theta) \right]^2 \left| A_{\lambda_a \lambda_b} \right|^2.$$

Записав одну d^J в виде

$$d^J_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\theta) = d^J_{\lambda_a - \lambda_b, M}(-\theta),$$

можно использовать свойство мультипликативности (3.83) для вычисления суммы по M:

$$\overline{W_{\lambda_a\lambda_b}(\theta)} = (4\pi)^{-1}\sum_M d^J_{\lambda_a-\lambda_b,M}(-\theta)\,d^J_{M,\lambda_a-\lambda_b}(\theta)\,|A_{\lambda_a\lambda_b}|^2 =$$

$$= (4\pi)^{-1}\,d^J_{\lambda_a-\lambda_b,\,\lambda_a-\lambda_b}(0)\,|A_{\lambda_a\lambda_b}|^2\,,$$

отсюда

$$\overline{W_{\lambda_a\lambda_b}(\theta)} = (4\pi)^{-1}\,|A_{\lambda_a\lambda_b}|^2\,,$$

так что $|A_{\lambda_a\lambda_b}|^2$ — относительная скорость распада неполяризованного образца в состояние со спиральностями $(\lambda_a,\ \lambda_b)$.

Необходимо уметь рассчитать число независимых амплитуд для процесса распада. С помощью данного формализма это можно сделать довольно прямо. Априори существует $(2s_a+1)(2s_b+1)$ амплитуд $a_{\lambda_a\lambda_b}$, необходимых для описания распада $A\to a+b$, если обе частицы a и b обладают массой.

Это число может быть меньше по причинам, которые перечислены ниже. Частица со спином J не может, распадаясь, попасть в состояние системы a—b, для которого компонента полного момента количества движения в каком-либо направлении оказывается больше J. Таким образом, λ_a—λ_b, являясь компонентой момента количества движения вдоль направления относительного импульса в с. ц. м., не должна превышать J. Если спины a и b частиц A таковы, что $s_a+s_b>J$, то амплитуды $a_{\lambda_a\lambda_b}$, для которых справедливо неравенство

$$|\lambda_a-\lambda_b|>J,$$

равны нулю. Формально это условие следует из свойств функции $\mathcal{D}^J_{MM'}$: в выражении (4.115) — она не определена (нуль) для M или M', больших J.

Интересный случай имеет место при радиационном распаде мезона на бесспиновый мезон и фотон. Пусть, например, $X\to\gamma+\pi$. Покажем, что это запрещено, если X имеет нулевой спин. В выражении амплитуды распада

$$f_{\lambda M}(\theta) = C_J\,d^J_{M\lambda}(\theta)\,a_\lambda$$

имеем для фотона $\lambda=\pm1$, но $\neq0$, а это несовместимо с $J=0$. На физическом языке компонента момента количества движения вдоль направления распада равна ±1 в конечном состоянии и нулю в начальном.

В соответствии с общим правилом переход из состояния с $J=0$ в состояние с $J=0$ с излучением фотона строго запрещен.

Таким образом, ненаблюдение радиационного распада K-мезона $K\to\pi+\gamma$ — первое свидетельство того, что K-мезон имеет нулевой спин. Если при распаде четность сохраняется, то выражение (4.117) приводит к соотношению между разными амплиту-

дами и еще больше ограничивает число независимых амплитуд. Если и конечные частицы оказываются безмассовыми, то существует не больше двух состояний спиральности $\lambda = \pm s$.

И, наконец, если две конечные частицы тождественны, то существуют ограничения, связанные со статистикой Ферми или Бозе.

Инвариантность относительно обращения времени не ограничивает число амплитуд, но может привести к соотношениям между амплитудами распада и амплитудой рассеяния a—b (см. теорему о конечном состоянии, гл. 6).

Рассмотрим несколько примеров, принимая, что $J \to s_a + s_b$.

1) $1/2 \to 1/2 + 0$. Использование закона сохранения четности P приводит к уменьшению числа амплитуд от двух до одной. Это иллюстрирует виртуальный процесс Юкавы $N \to N + \pi$, в котором P сохраняется; существует одна постоянная связи πN. В распаде $\Lambda \to N\pi$ четность не сохраняется, следовательно, существуют две амплитуды. Этот пример подробно рассмотрен в гл. 5.

2) $3/2 \to 1/2 + 0$. Опять в общем случае имеет две амплитуды и уменьшение их до одной из-за сохранения P. Следовательно, для описания слабых процессов $\Omega^- \to \Lambda K^-$ или $\Omega^- \to \Xi^- \pi^0$, $\Xi^0 \pi^-$ нужны две амплитуды.

3) $0 \to 1/2 + 1/2$. В этом случае две амплитуды сводятся к одной в случае сохранения P: $K_2^0 \to e^+ + e^-$.

4) $1 \to 1$ (фотон) $+ 0$. Фотон имеет два состояния спиральности, следовательно, существуют две амплитуды, которые сводятся к одной в случае сохранения P, например $\omega^0 \to \gamma\pi^0$.

5) $1/2 \to 1/2 + 1$ (фотон), например $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$. Существуют две амплитуды (спиральности Λ^0 и γ должны быть или обе положительными, или обе отрицательными), которые сводятся к одной из-за сохранения P.

Читателю представляется возможность самому убедиться в том, что в любом частном случае в схеме LS-связи получается то же самое число амплитуд, что и выше.

Таким образом, в случае $3/2 \to 1/2 + 1$ существует шесть спиральных амплитуд $a_{\lambda_a \lambda_b}$, которые сводятся к трем в случае сохранения четности. При LS-связи полный спин может быть равен 3/2 или 1/2. Возможные значения L должны быть такими, чтобы векторное сложение L и S могло дать $J = 3/2$. Так, для $S = 3/2$, $L = 0$, 1, 2 или 3; для $S = 1/2$, $L = 1$ или 2, т. е. опять мы имеем шесть амплитуд a_{LS}.

4.9.2. Анализ Эдера. Для иллюстрации использования развитого выше формализма опишем на языке спиральности метод Эдера [4] для определения спинов гиперонов.

Используя Λ^0-гипероны, полученные в результате реакции

$$p + \pi^- \to \Lambda^0 + K^0, \tag{4.118}$$

постараемся определить спин Λ^0 из углового распределения в последующем распаде: $\Lambda^0 \to N + \pi$. Спины других частиц при этом считаются известными.

Суть метода заключается в том, чтобы выбрать кинематическим путем события из процесса рассеяния, ограничив при этом популяцию спиновых состояний Λ^0. Кроме того, необходимо определить, какое действие это окажет на распределение распада.

Будем считать, что ось z в с. ц. м. совпадает с направлением падающего протона. Тогда для Λ^0, движущегося по направлению падающего протона $\theta \approx 0$, орбитальный момент количества движения не может иметь компоненты в направлении Λ^0, и, следовательно, спиральности начального p и конечного Λ^0 должны быть равны $\mu_\Lambda = \mu_p$ при $\theta \approx 0$. (В этом разделе спиральность обозначается μ.) Аналогично для Λ^0, движущихся в противоположном направлении ($\theta \approx \pi$), компоненты момента количества движения Λ^0 и p в направлении оси $+z$ должны быть равны, а так как их импульсы имеют противоположное направление, спиральности должны удовлетворять условию $\mu_\Lambda = -\mu_p$ при $\theta \approx \pi$.

Проведя несколько формальных операций, находим с учетом § 4.6, что амплитуду реакции (4.118) можно записать в виде

$$f_{\mu_\Lambda \mu_p}(\theta) = (2p)^{-1} \sum (2j+1)\, d^j_{\mu_p \mu_\Lambda}(\theta)\, \mathcal{T}^j_{\mu_\Lambda \mu_p}(W).$$

Теперь для всех j $d^j_{\mu\mu'}(\theta = 0) = \delta_{\mu\mu'}$. Следовательно, $f_{\mu_\Lambda \mu_p}(\theta = 0) = 0$ до тех пор, пока $\mu_\Lambda \neq \mu_p$.

Аналогично $d_{\mu\mu'}(\theta = \pi) = \text{const}\, \delta_{\mu, -\mu'}$, следовательно, $f_{\mu_\Lambda \mu_p}(\theta = \pi) = 0$, пока $\mu_\Lambda \neq -\mu_p$.

В случае, когда Λ^0 рождается на образце неполяризованных протонов, состояния $\mu_p = \pm 1/2$ одинаково вероятны, следовательно, для Λ^0, движущихся по направлению движения протона или против него, состояния спиральности $\mu_\Lambda = \pm 1/2$ тоже одинаково вероятны.

Вернемся к рассмотрению процесса распада. Необходимо такое распределение при распаде образца Λ^0 спина J (обязательно полуцелого) на частицы спина 1/2 и спина 0, чтобы подуровни $M = \mu_\Lambda = \pm 1/2$ оказались одинаково заполненными, а остальные — незаполненными. Распад легче описывать в с. ц. м. Λ^0. Эта система получается из с. ц. м., в которой рождается Λ^0, путем применения к ней преобразования Лоренца вдоль линии полета. Как мы уже видели, это не изменит спиральности частицы, так что в формализме распада равенство μ_Λ и M доказано.

Угловое распределение протонов в с. ц. м. Λ^0 задается выражением

$$W(\theta) = \sum_{\lambda = \pm 1/2} 2^{-1} \sum_{M = \pm 1/2} (4\pi)^{-1} (2J+1) [d^J_{M\lambda}(\theta)]^2 |A_\lambda|^2,$$

в котором по спиральности протона распада λ проводится суммирование (ненаблюдаемая величина).

Из свойств функций d^J видно, что выражение

$$\sum_{M = \pm 1/2} [d^J_{M\lambda}(\theta)]^2 = [d^J_{+1/2, \lambda}(\theta)]^2 + [d^J_{-1/2, \lambda}(\theta)]^2$$

имеет одно и то же значение для $\lambda = \pm 1/2$ (два слагаемых поменялись местами). Следовательно, можно выделить множитель $|A_\lambda|^2$ и затем с помощью

$$\sum_\lambda |A_\lambda|^2 = 1$$

записать

$$W(\theta) = \sum_{M=\pm 1/2} (4)^{-1} (2J+1) [d^J_{M,\lambda}(\theta)]^2,$$

где $\lambda = \pm 1/2$ и проведено тривиальное интегрирование по φ. Остается только рассчитать $W(\theta)$ для разных значений J.

Для $J = 1/2$ детальная формулировка не является необходимой, так как *все* спиральные состояния $M = \pm 1/2$ одинаково заполнены, поэтому, как отмечалось выше, распределение распада может быть только изотропным.

Для бо́льших значений J подстановка явных выражений для функций $d^J_{M\lambda}$ приводит к следующим результатам:

$$W(\theta) = 1/2 \text{ при } J = 1/2;$$

$$W(\theta) = (1 + 3\cos^2\theta)/4 \text{ при } J = 3/2;$$

$$W(\theta) = 3(1 - 2\cos^2\theta + 5\cos^4\theta)/8 \text{ при } J = 5/2;$$

$$W(\theta) = (9 + 45\cos^2\theta - 165\cos^4\theta + 175\cos^6\theta)/32 \text{ при } J = 7/2.$$

Отметим, что для спина J наибольшая степень по $\cos\theta$ есть $(2J-1)$. Симметрия $\theta \to \pi - \theta$ распределения распада вытекает из того факта, что два подуровня с противоположными значениями M заполнены одинаково. Наблюдаемое распределение можно проверять с точки зрения этих возможностей.

Этот метод применен к распаду Λ^0 Эйслером и др. [64]. Было получено значение $J = 1/2$. Следует отметить, что в этом случае не делалось никаких предположений относительно сохранения четности, т. е. результаты анализа остаются справедливыми, несмотря на то, что, как теперь уже известно, четность при слабом распаде не сохраняется.

Дефект метода состоит в слишком непроизводительном применении данных, так как можно использовать только события с рождением частиц вперед и назад. В усовершенствованном методе определения спина Ли и Янга [123] можно использовать все события распада. Для данного J авторы вводят определенные тест-функции по $\cos\theta$, средние значения которых для того, чтобы спин был равен J, должны удовлетворять установленным неравенствам. Дальнейшие тесты сформулированы Байерсом и Фенстером [36]. Обзор этих и других подобных методов можно найти в работах Коха [112] и Триппа [173].

Уэда и Окубо [174] рассмотрели с помощью формализма спиральности каскадные распада типа $\Xi \to \Lambda + \pi$, $\Lambda \to N + \pi$.

§ 4.10. ДРУГИЕ СВОЙСТВА СПИРАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА *

Используем формализм спиральности при рассмотрении влияния произвольного преобразования Лоренца на состояния спиральности и спиральные матричные элементы. Это важно, так как часто оказывается необходимым преобразовывать величины, например, из л. с. к. в с. ц. м., в которой проще проводить теоретический анализ.

4.10.1. Вигнеровское вращение. Основной результат, который получен в этом параграфе, сформулируем следующим образом. Пусть частица со спином 1/2 находится в системе отсчета Σ в состоянии $\varphi_{\mathbf{p}\lambda=+1/2}$, т. е. полностью поляризована в направлении движения. Во второй системе отсчета Σ', движущейся относительно первой, частица будет иметь импульс $\mathbf{p}'=\Lambda\mathbf{p}$, где Λ — преобразование Лоренца от системы Σ к системе Σ'. В общем случае, однако, частица в системе Σ' не будет находиться в собственном состоянии спиральности, а будет описываться суперпозицией состояний спиральности $C_+\varphi_{\mathbf{p}',+1/2}+C_-\varphi_{\mathbf{p}',-1/2}$, где $C_\pm$ зависит как от $\mathbf{p}$, так и от Λ. Эту ситуацию можно охарактеризовать так: спин испытывает поворот, называемый поворотом Вигнера, в том случае, когда мы наблюдаем за ним из движущейся системы отсчета. При определенных обстоятельствах этот поворот может быть равен нулю, как, например, при лоренц-преобразованиях из системы Σ в систему Σ' вдоль направления движения частицы. В этом случае (см. § 4.4) спиральность не меняется.

Рассмотрим влияние лоренц-преобразования Λ на спиральное состояние $\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$ частицы с массой $m\neq 0$ и спином s. Преобразованное состояние $U(\Lambda)\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$, полученное с помощью унитарного оператора $U(\Lambda)$, соответствующего Λ, можно трактовать как новое состояние в исходной системе отсчета Σ (активная точка зрения) или как описание той же системы в новой системе отсчета Σ', причем координаты в системах Σ и Σ' связаны преобразованием Λ (пассивная точка зрения).

До сих пор мы пользовались активной интерпретацией, но вторая, пассивная, точка зрения подходит больше для рассмотрения таких переходов, как, например, от л.с.к. к с.ц.м.

В обоих случаях одни и те же формулы интерпретируются по-разному.

Выше показано [см. (4.35)], что состояние $U(\Lambda)\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$ имеет импульс $\mathbf{p}'$, для которого

$$p'_\mu=\Sigma\Lambda_{\mu\nu}p_\nu;\quad p_\mu=((\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2},\ \mathbf{p});\quad p'_\mu=((\mathbf{p}'^2+m^2)^{1/2},\ \mathbf{p}').$$

Соответствующее соотношение между трехмерными импульсами запишем в виде

$$\mathbf{p}'=\Lambda\mathbf{p}. \tag{4.119}$$

* Материал этого параграфа не является необходимым для понимания последующих глав.

Доказательство было проведено для случая спина, равного нулю. Если имеется индекс спиральности, то результат все равно остается справедливым, но спиральность преобразованного состояния не обязательно должна оставаться такой же, как в исходном состоянии. Тем не менее можно разложить преобразованное состояние по состояниям $\varphi_{\mathbf{p}'\lambda'}$ $(-s \leqslant \lambda' \leqslant s)$, которые образуют полный набор состояний частицы с импульсом $\mathbf{p}'$. Таким образом, имеем

$$U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{p}\lambda} = \sum_{\lambda'} M_{\lambda'\lambda}\,\varphi_{\mathbf{p}'\lambda'}\,. \tag{4.120}$$

Здесь для удобства коэффициенты разложения записаны в виде матрицы.

Введем более сжатую форму записи уравнений, определяющих спиральные состояния (4.55):

$$\varphi_{\mathbf{p}\lambda} = U(H_{\mathbf{p}})\,\varphi_{0\lambda}\,, \tag{4.121}$$

где $H_{\mathbf{p}}$ — преобразование Лоренца, состоящее в последовательном применении буста вдоль оси z и последующем повороте:

$$H_{\mathbf{p}} = R(\varphi,\ \theta,\ 0)\,\mathscr{Z}_p. \tag{4.122}$$

Соответствующие этим преобразованиям операторы удовлетворяют соотношению

$$U(H_{\mathbf{p}}) = U(R(\varphi,\ \theta,\ 0))\,U(\mathscr{Z}_p).$$

Аналогично для каждого состояния с импульсом $\mathbf{p}'$ справедливо выражение

$$\varphi_{\mathbf{p}'\lambda'} = U(H_{\mathbf{p}'})\,\varphi_{0\lambda'}\,. \tag{4.123}$$

Подставляя эти выражения в (4.120), получаем

$$U(\Lambda)\,U(H_{\mathbf{p}})\,\varphi_{0\lambda} = \sum_{\lambda'} M_{\lambda'\lambda}\,U(H_{\mathbf{p}'})\,\varphi_{0\lambda'}\,.$$

Умножая на $U^{-1}(H_{\mathbf{p}'}) = U(H_{\mathbf{p}'}^{-1})$ и используя групповое свойство унитарных операторов (2.42), находим

$$U(H_{\mathbf{p}'}^{-1}\,\Lambda H_{\mathbf{p}})\,\varphi_{0\lambda} = \sum_{\lambda'} \varphi_{0\lambda'}\,M_{\lambda'\lambda}\,. \tag{4.124}$$

Согласно этому уравнению, преобразование $H_{\mathbf{p}'}^{-1}\,\Lambda H_{\mathbf{p}}$ связывает два состояния покоя частицы. Следовательно, оно представляет собой чистый поворот R_W:

$$R_W = H_{\mathbf{p}'}^{-1}\,\Lambda H_{\mathbf{p}}\,, \tag{4.125}$$

который называют вигнеровским вращением.

Важно, что Λ, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ в этом выражении связаны соотношением (4.119). Ось и величина угла поворота R_W зависят от $\mathbf{p}$ и Λ. Расчет R_W для частного случая приведен в следующем параграфе.

Возвращаясь к анализу, отметим, что в левой части уравнения (4.124) имеем чистый оператор вращения, действующий на

один член стандартного набора собственных состояний момента количества движения $\varphi_{0\lambda}$ [см. (4.48)]; следовательно, выражение (4.124) можно записать в виде

$$U(R_W)\,\varphi_{0\lambda} = \sum_{\lambda'} \varphi_{0\lambda'}\,\mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}(R_W),$$

где $\mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}$—матрица поворота.

Для вывода общего закона преобразования спирального состояния объединим полученные результаты:

$$U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{p}} = U(\Lambda)\,U(H_{\mathbf{p}})\,\varphi_{0\lambda} = U(\Lambda H_{\mathbf{p}})\,\varphi_{0\lambda} = U(H_{\mathbf{p}'}\,H_{\mathbf{p}'}^{-1}\,\Lambda H_{\mathbf{p}})\,\varphi_{0\lambda} =$$
$$= U(H_{\mathbf{p}'})\left\{\sum_{\lambda'} \varphi_{0\lambda'}\,\mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}(R_W)\right\} = \sum_{\lambda'} U(H_{\mathbf{p}'})\,\varphi_{0\lambda'}\,\mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}(R_W).$$

(Здесь повторно использованы групповые свойства и введен оператор $1 = H_{\mathbf{p}'}H_{\mathbf{p}'}^{-1}$, который ничего не меняет.)

Таким образом, окончательно получаем желаемый закон преобразования:

$$U(\Lambda)\,\varphi_{\mathbf{p}\lambda} = \sum_{\lambda'} \varphi_{\mathbf{p}'\lambda'}\,\mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}(R_W), \tag{4.126}$$

где [см. (4.125)] $R_W = H_{\mathbf{p}'}^{-1}\,\Lambda H_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p}' = \Lambda\mathbf{p}$. Этот закон, впервые выведенный Вигнером [183], достаточно прост. Действие преобразования Лоренца Λ на переменную импульса очевидно, а действие на индексы спиральности описано обычно $\mathscr{D}$-функцией. Вращение R_W не зависит от массы частицы и ее спина: это кинематический эффект, зависящий только от мультипликативных свойств преобразований Лоренца. Он станет яснее после того, как рассмотрим специальный случай и выведем выражение для R_W.

4.10.2. Вигнеровский поворот в частном случае. Пусть $\mathbf{p}$ лежит в плоскости xz, образуя с осью z угол θ:

$$\mathbf{p} = (p\sin\theta,\ 0,\ p\cos\theta)$$

и Λ есть чистое преобразование Лоренца в z-направлении, так что $\mathbf{p}'$, задаваемое выражение (4.119), также лежит в плоскости xz:

$$\mathbf{p}' = (p'\sin\theta',\ 0,\ p'\cos\theta').$$

Таким образом, координаты y остаются все время неизменными и вращение Вигнера должно быть поворотом вокруг оси y. Обозначим угол поворота ω.

Записывая преобразование Лоренца $H_{\mathbf{p}}$ (4.122) (при $\varphi=0$), удобно параметризовать буст вдоль оси z с помощью гиперболического параметра $\varkappa$ (иногда называемого быстротой).

Определим $\varkappa$ с помощью выражения

$$1:\operatorname{ch}\varkappa:\operatorname{sh}\varkappa = m:(\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}:|\,\mathbf{p}\,|\,.$$

Отсюда получим

$$H_{\mathbf{p}} = R(0,\ \theta,\ 0)\,\mathscr{L}(\varkappa),$$

где

$$\mathscr{L}(\varkappa) = \begin{array}{c} \begin{matrix} t & x & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\varkappa & 0 & \operatorname{sh}\varkappa \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\varkappa & 0 & \operatorname{sh}\varkappa \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} t \\ x \\ z \end{matrix} \tag{4.127}$$

и

$$R(0,\ \theta,\ 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{4.128}$$

Здесь опущена строка и столбец матрицы лоренц-преобразования, соответствующие оси y, потому что, как отмечалось выше, координата y не меняется.

Матрицу $H_{\mathbf{p}'}$, соответствующую преобразованному импульсу $\mathbf{p}'$, запишем в виде

$$H_{\mathbf{p}'} = R(0,\ \theta',\ 0)\,\mathscr{L}(\varkappa'), \tag{4.129}$$

где $\mathscr{L}(\varkappa')$ и $R(0,\ \theta',\ 0)$ выражаются аналогичными матрицами, в которых $\varkappa$ и θ заменены на $\varkappa'$ и θ', а $\varkappa'$ определяется из соотношений

$$1 : \operatorname{ch}\varkappa' : \operatorname{sh}\varkappa' = m : (\mathbf{p}'^2 + m^2)^{1/2} : |\ \mathbf{p}'\ |\ .$$

Преобразование Лоренца Λ имеет вид

$$\Lambda = (1-u^2)^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & (1-u^2)^{1/2} & 0 \\ u & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.130}$$

Вигнеровское вращение R_ω определяется формулой

$$H_{\mathbf{p}'} R_\omega = \Lambda H_{\mathbf{p}}\ . \tag{4.131}$$

Представим R_ω в виде

$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \tag{4.132}$$

и подставим выражения (4.127)—(4.130) и (4.132) в (4.131), получим уравнения, которых вполне достаточно для определения $\varkappa'$ и θ' (параметров, определяющих $\mathbf{p}'$), ω через $\varkappa$ и θ и скорость u в преобразовании Лоренца.

Пусть $v_{\mathbf{p}}$ — скорость частицы в состоянии $\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$:

$$v_{\mathbf{p}} = |\ \mathbf{p}\ |/E_{\mathbf{p}} = \operatorname{th}\varkappa.$$

Тогда выражение для ω можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\omega = [u\sin\theta\,(1-v_{\mathbf{p}}^2)^{1/2}]/(v_{\mathbf{p}} + u\cos\theta)\,. \tag{4.133}$$

Уравнение (4.126) в этом случае принимает вид

$$U(\Lambda)\varphi_{\mathbf{p}\lambda} = \sum_{\lambda'=-s}^{s} \varphi_{\mathbf{p}'\lambda'} \cdot d^{s}_{\lambda'\lambda}(\omega).$$

Можно сказать, что для преобразованного состояния спин повернут на угол ω вокруг направления импульса $\mathbf{p}'$, так что, в то время как действие Λ эквивалентно бусту $\mathbf{p}$ вдоль оси $z(\theta'<\theta)$, спин отстает от него на угол ω (рис. 4.4).

Можно отметить следующие специальные случаи уравнения (4.133). Если $\theta=0$, то $\operatorname{tg}\omega=0$ и, следовательно, $\omega=0$: этому случаю соответствует преобразование Лоренца вдоль направления движения частицы. При этом, как мы уже видели, спиральность не меняется, так что спин не преобразуется. Утверждение неверно, если преобразование Лоренца изменяет направление движения, так как при этом знаменатель в выражении (4.133) проходит через нуль.

В случае ультрарелятивистской частицы $|\mathbf{p}|\gg m$, для которой $v_{\mathbf{p}}\approx 1$, согласно уравнению (4.133) $\omega\approx 0$. Таким образом, для ультрарелятивистской частицы спиральность почти инвариантна относительно преобразования Лоренца. Это согласуется с поведением частицы с нулевой массой, для которой спиральность действительно является лоренц-инвариантной величиной.

Исследуем теперь нерелятивистский предел, для которого $u\ll 1$ и $v_{\mathbf{p}}\ll 1$. В этом случае

$$\operatorname{tg}\omega \approx u\sin\theta/(v_{\mathbf{p}}+u\cos\theta)\,. \quad (4.134)$$

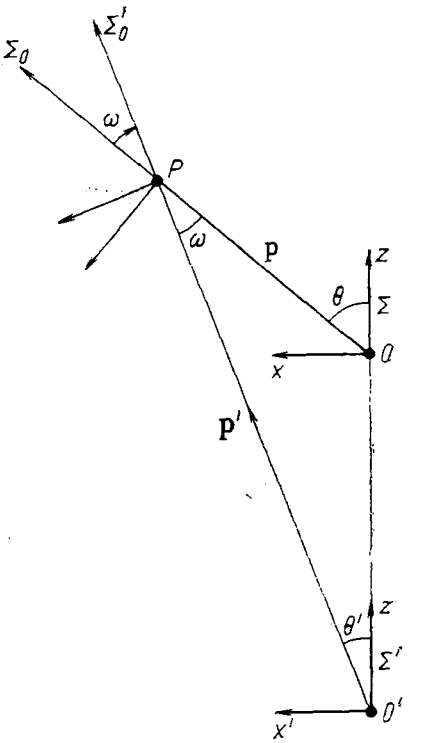


Рис. 4.4. Вигнеровское вращение R_ω, соответствующее преобразованию Лоренца от системы Σ к системе Σ' $(\omega<\theta-\theta')$, примененное к спиновому состоянию частицы p

Представим себе трансляционное движение классического нерелятивистского вращающегося объекта с импульсом $\mathbf{p}$ в системе Σ. Относительно второй системы Σ' ось спина имеет ту же самую абсолютную ориентацию, тогда как импульс становится равным $\mathbf{p}'=\mathbf{p}+m\mathbf{u}$. Если ось спина первоначально параллельна $\mathbf{p}$, то угол между осью и $\mathbf{p}'$ равен углу между $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$, обозначаемому ранее $(\theta-\theta')$. Нетрудно показать, что правая часть равенства (4.134) равна $\operatorname{tg}(\theta-\theta')$.

Итак, в результате использования преобразования Лоренца вместо преобразования Галилея угол ω становится меньше величины $(\theta-\theta')$. Это отклонение ω от нерелятивистского значения обусловлено прецессией Томаса [168, 169], известной в атомной физике. Общее происхождение этих эффектов связано с тем, что результат двух чистых преобразований Лоренца вдоль различных направлений сам не является чистым преобразованием Лоренца, а есть комбинация преобразования Лоренца и поворота.

4.10.3. Преобразование элементов S-матрицы. Из общего закона преобразования спиральных состояний (4.126) можно вывести закон преобразования матричных элементов любого оператора A в базисе спиральности, если известны его трансформационные свойства относительно преобразований Лоренца. Рассмотрим только случай, когда оператор рассеяния S инвариантен относительно преобразований Лоренца:

$$S = U^{-1}(\Lambda)\, SU(\Lambda).$$

Следовательно, оператор перехода $\mathcal{T}$, определенный формулой

$$S = 1 + i\mathcal{T},$$

также является инвариантным оператором

$$\mathcal{T} = U^{-1}(\Lambda)\, \mathcal{T} U(\Lambda). \tag{4.135}$$

Рассмотрим далее πN-рассеяние и используем обозначения § 4.8. Амплитуда рассеяния $f_{\mu\lambda}(\theta)$ является матричным элементом оператора перехода $\mathcal{T}$ между состояниями $\varphi_{p\lambda}$ и $\varphi_{q\lambda}$ системы πN с определенной спиральностью, а угол θ — это угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Возьмем матричный элемент соотношения (4.135) между состояниями $\varphi_{q\mu}$ и $\varphi_{p\lambda}$ и используем закон преобразования (4.126), тогда получим

$$(\varphi_{q\mu},\ \mathcal{T}\varphi_{p\lambda}) = (\varphi_{q\mu},\ U^{-1}(\Lambda)\,\mathcal{T}U(\Lambda)\,\varphi_{p\lambda}) = (U(\Lambda)\,\varphi_{q\mu},\ \mathcal{T}U(\Lambda)\,\varphi_{p\lambda}) =$$

$$= \sum_{\mu'\lambda'} \mathcal{D}^{(1/2)*}_{\mu'\mu}(R_2)\,(\varphi_{q'\mu'},\ \mathcal{T}\varphi_{p'\lambda'})\,\mathcal{D}^{(1/2)}_{\lambda'\lambda}(R_1). \tag{4.136}$$

Здесь R_2 и R_1 — вигнеровские вращения, соответствующие импульсам $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ и преобразованию Лоренца Λ.

Если $\varphi_{p\lambda}$ — состояние πN в с. ц. м., то $\varphi_{p'\lambda'}$ — состояние с относительным импульсом $\mathbf{p}'$ и ненулевым полным импульсом, например состояние в л. с. к. Таким образом, выражение (4.136) есть соотношение между матричными элементами перехода в с. ц. м. и л. с. к. В некоторых случаях нет необходимости знать вигнеровское вращение. Например, если рассматривается квадрат

матричного элемента, усредненный по спину, то матрицы $\mathcal{D}$ пропадают после использования стандартного свойства

$$\sum_{\lambda} |\mathcal{D}^{s}_{\lambda'\lambda}(R_1)|^2 = 1,$$

так что мы получаем

$$(1/2)\sum_{\lambda\mu} |(\varphi_{q\mu}, \mathcal{T}\varphi_{p\lambda})|^2 = (1/2)\sum_{\lambda'\mu'} |(\varphi_{q'\mu'}, \mathcal{T}\varphi_{p'\lambda'})|^2 . \qquad (4.137)$$

Это уравнение выражает равенство вероятностей перехода, усредненных по спину, в двух системах отсчета.

Глава 5

ЧЕТНОСТЬ

Рассмотрим следующую симметрию — пространственную инверсию, которая хотя и применима к классическим системам, однако полностью раскрывает свое значение лишь при изучении систем, описываемых квантовой механикой. С пассивной точки зрения пространственная инверсия заключается в замене правой пространственной системы отсчета на левую. Следовательно, инвариантность относительно пространственной инверсии эквивалентна «неразличимости» правого и левого.

В отличие от принципов инвариантности относительно вращений и лоренц-инвариантности, описанных в предыдущих главах, пространственная инверсия, как мы знаем, не является универсальной симметрией природы на микроскопическом уровне. Открытие в 1956 г. нарушения инвариантности относительно пространственной инверсии в слабых взаимодействиях привело к критическому пересмотру всех принципов симметрии как на экспериментальном, так и на теоретическом уровне. Этот критический пересмотр продолжается и сейчас. В отличие от предыдущих глав, задача которых заключалась в создании разработанного формализма для объяснения принципов инвариантности относительно вращений и лоренц-инвариантности, сконцентрируем здесь свое внимание на проверке инвариантности относительно пространственной инверсии и на следствиях из предположения об этой инвариантности. Разумеется, эти вопросы тесно связаны.

Интересно отметить, что понятие симметрии левого и правого возникает при рассмотрении химических и биологических процессов. Например, определенные сложные молекулы существуют в виде двух типов изомеров, химические формулы которых одинаковы, но структуры связаны друг с другом операцией пространственной инверсии. Растворы таких веществ, содержащие избыток молекул одного типа, оптически активны, поэтому два изомера можно различить по тому, будут ли они обладать правым или левым вращением (П или Л). К этому типу веществ относятся аминокислоты живой материи. Обнаружено, что в живых системах присутствуют только Л-аминокислоты, в то время как при лабораторном синтезе получаются П- и Л-типы в одинаковых количествах. Это говорит о том, что асимметрия лево—право связана не с химическим законом, а с каким-то иным свойством природы,

по которому предпочтение отдается одному из изомеров. Это предпочтение тесно связано с вопросом происхождения жизни.

§ 5.1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРА ЧЕТНОСТИ

5.1.1. Четность волновых функций. Изучая в 1924 г. спектр железа, Лапорт заметил, что энергетические уровни атома железа можно таким образом разбить на два типа, чтобы наблюдаемые переходы имели место только между уровнями противоположных типов. Вскоре после открытия квантовой механики Вигнер показал [180], что правило Лапорта в радиационных процессах является следствием инвариантности относительно пространственной инверсии.

Рассмотрим случай одного электрона в центральном силовом поле. Волновые функции $\psi(\mathbf{r})$ уравнения Шредингера, описывающие собственные энергетические состояния, являются или четными, или нечетными функциями координаты $\mathbf{r}$. Действительно, для гамильтониана этого типа

$$H = -\hbar^2\nabla^2/2m + V(|\mathbf{r}|)$$

собственные функции энергии имеют вид

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(\mathbf{r})\,Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Преобразование инверсии относительно начала координат $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ в сферических координатах имеет вид

$$r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \varphi \to \varphi + \pi.$$

Из свойств сферических гармоник (см. п. 3.1.2) находим

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

так что

$$\psi_{nlm}(-\mathbf{r}) = (-1)^l \psi_{nlm}(\mathbf{r}). \tag{5.1}$$

Здесь $(-1)^l$ — четность состояния, в рассматриваемом случае четность определяется орбитальным моментом количества движения. Принято говорить, что состояния, для которых

$$\psi(-\mathbf{r}) = +\psi(\mathbf{r}),$$

имеют положительную четность или четны, а состояния, для которых

$$\psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r}),$$

имеют отрицательную четность или нечетны.

Четность системы в некий момент времени нельзя определить по пространственному распределению массы или заряда, так как они задаются величиной $|\psi|^2$. Однако для состояния с определенной четностью функция $|\psi|^2$ должна быть симметрична относительно инверсии в начале координат.

Гамильтониан многоэлектронного атома более сложен. В частности, если учитывать электрон-электронные взаимодействия, точные расчеты вообще невозможны. Тем не менее, как установил Лапорт, каждому стационарному состоянию можно приписать определенную четность. В этом случае необходимо опираться на более общую теорию.

5.1.2. Формальная теория оператора четности. Гипотеза об инвариантности относительно пространственной инверсии требует, чтобы левая система координат Σ', полученная из системы Σ изменением знака всех трех координат

$$P: \mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \tag{5.2}$$

одинаково подходила для описания всех законов физики.

Состояние, описываемое в системе Σ функцией $\psi(\mathbf{r})$, в системе Σ' имеет волновую функцию $\psi'(\mathbf{r}')$, определяемую равенством

$$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}), \tag{5.3}$$

в котором $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ связаны формулой (5.2). Таким образом, рассматриваемое состояние обозначается в системе Σ' волновой функцией $\psi'(\mathbf{r}') = \psi(-\mathbf{r})$.

В этих выводах мы просто следуем общей теории § 2.3.

При активной интерпретации $\psi(-\mathbf{r})$ есть новое состояние системы в старой системе отсчета Σ.

Определим унитарный оператор U_P формулой

$$U_P \psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}). \tag{5.4}$$

Если оператор U_P применить к какой-либо волновой функции, то получается пространственно-обращенная волновая функция. Свойство унитарности U_P легко доказать. Для любых двух функций φ и ψ имеем

$$(U_P\psi,\ U_P\varphi) = \int d^3r \varphi^*(-\mathbf{r})\,\varphi(-\mathbf{r}) = \int d^3r' \varphi^*(\mathbf{r}')\,\varphi(\mathbf{r}') = (\varphi,\ \varphi).$$

Так как $(U_P\psi,\ U_P\varphi) = (\psi,\ U_P^+ U_P\varphi)$, то

$$U_P^+ U_P = 1. \tag{5.5}$$

Геометрическая операция пространственной инверсии обладает специфическим свойством: если ее совершить дважды, то результат будет эквивалентен тождественному преобразованию, т. е. никаких изменений не произойдет. В символическом виде это записывается так:

$$P^2 = 1. \tag{5.6}$$

Отсюда следует, что

$$U_P^2 = 1, \tag{5.7}$$

где 1 означает единичный оператор. Из уравнений (5.5) и (5.7) следует, что U_P есть эрмитов оператор, равный обратному оператору:

$$U_P^{+} = U_P = U_P^{-1}\,. \tag{5.8}$$

Поэтому U_P может представлять наблюдаемую величину.

Собственная функция оператора U_P удовлетворяет уравнению

$$U_P\psi(\mathbf{r}) = \eta\psi(\mathbf{r}),$$

а собственное значение η называется четностью состояния, U_P иногда называют оператором четности. Применяя U_P дважды, получаем $U_P^2\psi(\mathbf{r}) = \eta^2\psi(\mathbf{r})$, но в силу (5.7) имеем $U_P^2\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$. Таким образом, $\eta^2 = 1$ и, следовательно, $\eta = \pm 1$. Отсюда видно, что четные и нечетные функции вектора $\mathbf{r}$ — собственные функции U_P с собственными значениями $+1$ и -1 соответственно.

Такая система, как атом или ядро, обладает инвариантностью относительно пространственных отражений, если гамильтониан инвариантен относительно операции четности (5.2). В случае одного атома гамильтониан равен сумме кинетических энергий всех электронов и кулоновских взаимодействий электронов друг с другом и с ядром. Формальная подстановка $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ оставляет такой гамильтониан инвариантным. Это выражается равенством

$$U_P H U_P^{-1} = H. \tag{5.9}$$

Оператор в левой части равенства можно считать гамильтонианом для наблюдателя, использующего обращенную систему координат Σ'. Уравнение (5.9) утверждает, что гамильтониан для двух наблюдателей в системах Σ' и Σ одинаков, и, следовательно, уравнение Шредингера в равной мере справедливо для обеих систем.

Существует и более частное следствие. Уравнение (5.9) можно записать в виде

$$[U_P, H] = 0, \tag{5.10}$$

что означает, что U_P и H коммутируют. Согласно общей теореме, энергетические собственные функции можно выбрать такими, чтобы они были собственными функциями U_P, т. е. имели определенную четность. Подчеркнем, что это именно так, даже если не удается найти в явном виде энергетические собственные функции. Этот результат — один из этапов доказательства правила Лапорта.

5.1.3. Преобразование операторов. Преобразование четности для оператора A определяется выражением

$$A^P = U_P A U_P^{-1}\,. \tag{5.11}$$

Оператор A^P имеет такой же смысл в обращенной системе отсчета Σ', что и оператор A в системе Σ. Как уже было показано в общем виде (см. гл. 2), A^P имеет то же самое среднее значение для состояния $U_P\psi$, что и оператор A для состояния ψ. Таким образом, получаем

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}^P = U_P \mathbf{r} U_P^{-1}\,;$$

здесь $\mathbf{r}'$ заменено $\mathbf{r}^P$, так что

$$U_P \mathbf{r} U_P^{-1} = -\mathbf{r}. \tag{5.12}$$

Аналогично $\mathbf{p} \to \mathbf{p}^P = U_P \mathbf{p} U_P^{-1}$. Так как $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, то

$$U_P \mathbf{p} U_P^{-1} = -\mathbf{p}. \tag{5.13}$$

Проиллюстрируем сказанное на следующем примере. Для состояния плоской волны $\varphi_{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$ преобразование четности дает

$$U_P \varphi_{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{k}(-\mathbf{r})) = \varphi_{-\mathbf{k}}.$$

Здесь $\varphi_{\mathbf{k}}$ — собственное состояние оператора импульса $\mathbf{p}\varphi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}$, а $U_P\psi_{\mathbf{k}}$ — собственное состояние пространственно-обращенного оператора импульса $\mathbf{p}^P = -\mathbf{p}$, имеющего то же самое собственное значение $\mathbf{k}$, что и исходное состояние:

$$\mathbf{p}^P U_P \varphi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} U_P \varphi_{\mathbf{k}}.$$

Пользуясь выражениями (5.12) и (5.13), можно определить закон преобразования других величин при преобразовании четности. Например,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \to U_P \mathbf{L} U_P^{-1} = \mathbf{L}, \tag{5.14}$$

откуда следует, что U_P и орбитальный момент количества движения коммутируют друг с другом. Это соответствует нашим прежним наблюдениям, а именно тому, что собственные состояния момента количества движения в задаче центрального поля являются одновременно и собственными состояниями четности.

До сих пор мы пренебрегали спином. Зависимость атомного или ядерного гамильтониана от спина определяется спин-орбитальным взаимодействием, имеющим вид

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} (f(|\mathbf{r}|)), \tag{5.15}$$

так что необходимо знать свойства преобразования четности для спиновых переменных. Так как $\mathbf{S}$ есть момент количества движения, то равенство (5.14) предполагает выполнение требования

$$U_P \mathbf{S} U_P^{-1} = \mathbf{S}. \tag{5.16}$$

Тогда полный момент количества движения $\mathbf{J}$ также удовлетворяет уравнению

$$U_P \mathbf{J} U_P^{-1} = \mathbf{J}. \tag{5.17}$$

Видим, что спин-орбитальное взаимодействие (5.15) согласуется с инвариантностью относительно преобразования четности.

Из предыдущего материала следует, что оператор спиральности

$$\mathcal{H} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{p} / |\mathbf{p}|$$

удовлетворяет уравнению

$$U_P \mathcal{H} U_P^{-1} = -\mathcal{H}, \tag{5.18}$$

так что в результате пространственной инверсии его собственные значения меняют знак.

Классификацию величин на скалярные, векторные и др., основанную на их поведении при поворотах, можно дополнить классификацией на основе их поведения при пространственных инверсиях. Скалярные величины называют истинно скалярными или псевдоскалярными в зависимости от того, меняют они знак или нет при инверсиях (например, энергия и спиральность соответственно).

Аналогично *истинным* или *полярным вектором* называют такой вектор, который, подобно координате **r**, меняет при инверсии свой знак, в то время как *псевдо-* (*или аксиальный*) *вектор*, например момент количества движения **L**, знака при инверсии не меняет.

Такая классификация одинаково хорошо применима как к операторам, представляющим величины, так и к их собственным значениям.

5.1.4. Замечание по поводу определения преобразований симметрии. Теория оператора четности сформулирована нами с помощью координатного представления квантовой механики. Можно вообще не прибегать ни к какому представлению, если сделать законы преобразования **r** и **p** исходным пунктом дальнейшего обсуждения. Этот более фундаментальный подход к проблеме состоит в записи преобразования пространственной инверсии по аналогии с классическим случаем в виде

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}^P = -\mathbf{r}; \quad \mathbf{p} \to \mathbf{p}^P = -\mathbf{p}. \tag{5.19}$$

Заметим, что основные коммутационные соотношения

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{5.20}$$

остаются справедливыми и для преобразованных операторов:

$$[r_i^P, p_j^P] = (-1)^2 i\hbar\delta_{ij} = i\hbar\delta_{ij}.$$

Преобразование, обладающее этим свойством, называют *каноническим*. Из теории квантовомеханических преобразований следует, что существует унитарный оператор U_P, обладающий свойствами

$$U_P \mathbf{r} U_P^{-1} = \mathbf{r}^P; \quad U_P \mathbf{p} U_P^{-1} = \mathbf{p}^P. \tag{5.21}$$

Уравнения (5.19) и (5.21) соответствуют выведенным ранее уравнениям (5.12) и (5.13).

С изложенной точки зрения пространственная инверсия является симметрией системы, если в обращенной системе отсчета коммутационные соотношения (5.20) и гамильтониан $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ не меняют своего вида.

При предыдущем рассмотрении коммутационные соотношения были удовлетворены следующей подстановкой в выражение для H:

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla.$$

5.1.5. Сохранение четности в реакциях. Мы рассмотрели четность стационарных состояний. Теперь рассмотрим четность в процессах рассеяния и в реакциях. Если исходное состояние какого-либо процесса является собственным состоянием четности, а взаимодействие инвариантно относительно пространственной инверсии, то конечное состояние должно иметь такую же четность. Докажем это. Инвариантность относительно пространственной инверсии выражается следующим образом:

$$U_P \mathcal{T} U_P^{-1} = \mathcal{T}. \tag{5.22}$$

Здесь $\mathcal{T}$ — оператор перехода, являющийся функцией гамильтониана, так что соотношение (5.22) следует из уравнения (5.9).

Преобразуя (5.22), получаем для матричного элемента φ_b—φ_a

$$(\varphi_b, U_P \mathcal{T} \varphi_a) = (\varphi_b, \mathcal{T} U_P \varphi_a).$$

Если φ_a и φ_b — собственные состояния четности, то справедливо равенство

$$\eta_b (\varphi_b, \mathcal{T} \varphi_a) = \eta_a (\varphi_b, \mathcal{T} \varphi_a).$$

Это значит, что амплитуда перехода от φ_a к φ_b равна нулю, если φ_a и φ_b не имеют одновременно одну и ту же четность.

Состояния рассеяния не являются собственными состояниями четности. Они ближе к состояниям плоской волны и представляют собой суперпозицию состояний с разными значениями l, т. е. суперпозицию состояний с противоположной четностью.

Исключения имеют место для реакции при достаточно низких энергиях, для которых дает вклад только наименьшее значение l. Однако в общем случае необходим иной подход.

Типичным является измерение вероятности W перехода между состояниями φ_a и φ_b. Вероятность W зависит от импульсов и спинов частиц в начальном и конечном состояниях. Представим эту зависимость в виде $W(\mathbf{p}, \mathbf{S})$, где $\mathbf{p}$ символизирует все импульсы (начальные и конечные), а $\mathbf{S}$ — все спины. Вероятно, лучше заменить $\mathbf{S}$ матрицей плотности или вектором поляризации каждой частицы, обладающей спином, но результат будет один и тот же. Таким образом, имеем

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{S}) = |(\varphi_b, \mathcal{T} \varphi_a)|^2.$$

Оператор перехода $\mathcal{T}$ в этом выражении выводится из формулы для H, что разработано технически подробно. Тот же результат получим, если в правой части равенства заменим φ_a, φ_b и $\mathcal{T}$ на $U_P \varphi_a$, $U_P \varphi_b$ и $U_P \mathcal{T} U_P^{-1}$, где U_P — оператор четности. Фактически это справедливо для любого унитарного оператора.

Теперь действие оператора U_P на φ_a и φ_b сводится к преобразованию импульса и момента количества движения в соответствии

с правилами $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\mathbf{S} \to +\mathbf{S}$. Отсюда следует, что

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{S}) = W^P(-\mathbf{p}, \mathbf{S}).$$

Зависимость

$$W^P(\mathbf{p}, \mathbf{S}) = |(\varphi_b, U_P \mathcal{T} U_P^{-1} \varphi_a)|^2$$

выводится из преобразованного оператора перехода (или окончательно из преобразованного гамильтониана $U_P H U_P^{-1}$) так же, как W из $\mathcal{T}$ или H.

Если четность — операция симметрии, то $U_P H U_P^{-1} = H$. Следовательно, $U_P \mathcal{T} U_P^{-1} = \mathcal{T}$. Это значит, что W^P есть такая же функция своих аргументов, как и W. Следовательно,

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{S}) = W(-\mathbf{p}, \mathbf{S}). \tag{5.23}$$

Для проверки справедливости равенства (5.23) достаточно определить, как W зависит от таких величин, как $[\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2] \cdot \mathbf{p}_3$ и $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$, меняющих знак в результате пространственной инверсии. Уравнение (5.23) можно интерпретировать как утверждение о том, что число событий, для которых эта величина положительна, равно числу событий, для которых она отрицательна. Для проверки выполнения закона сохранения четности надо провести эксперимент и посмотреть, как W зависит от псевдоскаляров, образованных с помощью соответствующих импульсов и векторов спинов. При этом предполагается, что по всем другим (ненаблюдаемым) спинам и импульсам проводятся суммирование и интегрирование соответственно.

§ 5.2. ЧЕТНОСТЬ В АТОМНОЙ И ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Обсудим применение понятия четности в атомной и ядерной физике, так как некоторые из изложенных методов и результатов получили более широкое практическое использование. Кроме того, именно в этих областях физики можно провести чувствительные эксперименты по проверке закона сохранения четности.

5.2.1. Некоторые следствия из закона сохранения четности. Начнем с приведенного Вигнером доказательства правила Лапорта.

Вероятность того, что атом в единицу времени осуществит переход из состояния ψ_a в состояние ψ_b, сопровождаемый электрическим дипольным излучением, пропорциональна квадрату матричного элемента

$$(\psi_b, \mathbf{d}\psi_a), \tag{5.24}$$

где $\mathbf{d}$ — оператор электрического дипольного момента:

$$\mathbf{d} = \sum_i e\mathbf{r}^i, \tag{5.25}$$

в котором суммирование проводится по всем электронам.

Дипольное излучение характерно тем, что квант этого излучения уносит единицу момента количества движения. Если матричный элемент (5.24) обращается в нуль, то радиационный переход $\psi_a \to \psi_b$ называют *запрещенным*. Однако может иметь место переход, сопровождающийся магнитным дипольным излучением (или излучением более высокой мультипольности). При этом матричный элемент будет уменьшаться в $(ka)^{-1}$ раз, где k — волновое число излучения, а a — характерная длина излучающей системы. Для оптического излучения атомов $ka \sim 10^{-3}$.

Как следствие из инвариантности гамильтониана для одного атома, относительно преобразования четности видим, что каждому энергетическому собственному состоянию можно приписать четность, т. е. оно может быть или четным, или нечетным. Обозначим четность состояний ψ_a и ψ_b соответственно η_a и η_b. Формально имеем

$$U_P \psi_a = \eta_a \psi_a; \tag{5.26а}$$

$$U_P \psi_b = \eta_b \psi_b. \tag{5.26б}$$

Непосредственно из выражения (5.12) следует, что оператор $\mathbf{d}$ является полярным вектором, и для него

$$U_P \mathbf{d} U_P^{-1} = -\mathbf{d}. \tag{5.27а}$$

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{d} = -U_P^{-1} \mathbf{d} U_P^{+1} \tag{5.27б}$$

и возьмем матричный элемент ψ_b—ψ_a. С помощью уравнений (5.26) найдем

$$(\psi_b, \mathbf{d}\psi_a) = -\eta_b \eta_a (\psi_b, \mathbf{d}\psi_a).$$

Отсюда следует, что дипольный момент перехода $(\psi_b, \mathbf{d}\psi_a)$ равен нулю, если условие $\eta_a \eta_b = -1$ не выполняется, т. е. пока ψ_a и ψ_b имеют одинаковую четность. Этот вывод точно соответствует правилу Лапорта: дипольные переходы разрешены только между состояниями с противоположной четностью.

Изложенное доказательство справедливо и для ядер. В этом случае координаты $\mathbf{r}^i$ в уравнении (5.25) относятся к протонам ядра. Для γ-квантов, испускаемых ядрами ($a \sim 10^{-13}$ *см*) с энергией порядка несколько мегаэлектронвольт, $ka \sim 10^{-3}$ и мультипольное излучение более высокого порядка обычно менее интенсивно по сравнению с электрическим дипольным излучением. Мультипольное излучение ядер рассмотрено в монографии Блатта и Вайскопфа [27].

Исследуя вместо дипольного момента перехода статический дипольный момент какой-нибудь квантовомеханической системы (атома, ядра, элементарной частицы), находящейся в стационарном состоянии, делаем следующий вывод. Если гамильтониан системы инвариантен относительно пространственной инверсии, то в любом стационарном состоянии ψ электрический дипольный мо-

мент равен нулю при условии, что состояние ψ не вырождено по четности. Состояние ψ вырождено по четности, если существует второе стационарное состояние ψ', вырожденное по энергии и такое, что ψ и ψ' обладают противоположными четностями. Таким образом, вырождение, связанное со спином или величиной L_z, можно не рассматривать. Это утверждение доказать легко. Если состояние ψ не вырождено и имеет четность η, то следует взять среднее значение от обеих частей уравнения (5.27б), так же как и при рассмотрении переходов: $(\psi, \mathbf{d}\psi) = -\eta^2(\psi, \mathbf{d}\psi)$, а так как $\eta = \pm 1$, то $(\psi, \mathbf{d}\psi) = 0$.

Необходимость вырождения можно понять из квантовомеханического рассмотрения атома водорода в электрическом поле E (эффект Штарка). Линейный по E сдвиг энергии соответствует ненулевому электрическому дипольному моменту. Такой сдвиг в $1s$-состоянии отсутствует: $2s$- и $2p$-состояния вырождены (с точки зрения простой теории) и для них имеется линейный сдвиг энергии. Это легко понять, заметив, что волновая функция $\Psi = \alpha\psi_{2s} + \beta\psi_{2p}$ может соответствовать асимметричному распределению заряда с не равным нулю дипольным моментом. Форма выражения для Ψ как раз совпадает с формой волновой функции системы при расчете эффекта Штарка с помощью теории возмущения для вырожденного случая (см. гл. 8 [159]).

5.2.2. Экспериментальная проверка закона сохранения четности в атомной физике. Справедливость закона сохранения четности в атомах можно проверить, рассматривая переходы, запрещенные правилом Лапорта. Эта типичная проверка принципа симметрии или закона сохранения заключается в экспериментальном поиске какого-либо процесса или эффекта, строго запрещенного в случае справедливости закона сохранения. В дальнейшем мы встретим много подобных примеров. Во всех этих случаях попытаемся выразить результаты экспериментов количественно. Для этого необходимо представить себе, что произойдет, если будет нарушен закон сохранения. В рассматриваемом случае потребуется дополнительное (весьма малое) взаимодействие между электронами и ядром атома, которое нарушает закон сохранения четности. В результате энергетические собственные состояния этого атома не могут быть истинными собственными состояниями четности, которая не является больше хорошим квантовым числом. Однако волновую функцию стационарного состояния можно представить в виде

$$\Psi = \psi_\eta + F\psi_{-\eta}, \tag{5.28}$$

где состояния ψ_η и $\psi_{-\eta}$ имеют противоположную четность.

Если предполагаемое взаимодействие было малым, то коэффициент F тоже мал. Этот коэффициент определяет относительную амплитуду состояния с «неправильной» четностью в состоянии, имеющем «большей частью» четность η. Даже в случае несохранения четности остается справедливым вывод о том, что матричные элементы дипольного оператора не равны нулю только между волновыми функциями с противоположной четностью. Та-

ким образом, запрещенный переход $\psi_a \to \psi_b$ может иметь место из-за электрического дипольного перехода (E1), например между состоянием Ψ_a и частью состояния Ψ_b с «неправильной» четностью (и наоборот).

Итак, такой переход имеет относительную амплитуду порядка F, а вероятность порядка $|F|^2$. Заметим, что правило отбора для электрических дипольных переходов является приближенным, т. е. переходы между состояниями с одной и той же четностью могут иметь место, например, в результате магнитных дипольных переходов (M 1), но, как уже отмечалось, их интенсивность будет в $(a/\lambda)^{-2}$ раз меньше. Здесь λ — длина волны излучения, a — размер излучающей системы. Экспериментальные данные об электрических дипольных переходах в атомах свидетельствуют о том, что правило Лапорта не имеет исключений, кроме ожидаемых отклонений из-за мультипольных переходов более высокого порядка. Отсюда делаем вывод, что если присутствует какая-либо нарушающая четность примесь, ее величина ограничена сверху $|F|^2 \leqslant \leqslant (a/\lambda)^2$.

Из этого выражения находим верхний предел несохранения четности в электромагнитном взаимодействии, лежащем в основе атомной структуры: $|F|^2 \leqslant 10^{-6}$.

5.2.3. Проверка закона сохранения четности в ядерной физике. Общие принципы сохранения четности и способы их проверки одинаковы как в ядерной, так и в атомной физике. Установлено, что ядерные энергетические уровни можно характеризовать определенной четностью, что свидетельствует о том, что четность с высокой степенью точности сохраняется при сильных взаимодействиях, т. е. $U_P H_{St} U_P^{-1} = H_{St}$. Чтобы проверить это, рассмотрим переход, запрещенный в силу инвариантности относительно пространственной инверсии. Первая такая проверка была выполнена Таннером [167], но мы для иллюстрации рассмотрим другой случай [184].

Второе возбужденное состояние ^{6}Li имеет энергию около 3,6 *Мэв* и спин и четность 0^+. Оно образует триплет по изоспину с ^{6}He и ^{6}Be. Развал

$$^6\mathrm{Li}^* \to {}^4\mathrm{He} + \mathrm{d} \tag{5.29}$$

энергетически разрешен, но запрещен по закону сохранения четности, тогда как радиационный распад

$$^6\mathrm{Li}^* \to {}^6\mathrm{Li} + \gamma,$$

как оказалось, имеет гораздо большую вероятность. Спин и четность J^P для ^{4}He и d равны 0^+ и 1^+ соответственно, так что конечное состояние должно иметь орбитальный момент количества движения $l=1$, а значит, и отрицательную четность. Если четность не сохраняется, то волновая функция ^{6}Li* имеет небольшую примесь компоненты с отрицательной четностью (0^-). В этом случае реакция (5.29) может идти с относительной амплитудой F в обозначениях формулы (5.28).

Можно было бы приготовить $^6Li^*$ и исследовать небольшое количество тяжелых излученных частиц в реакции (5.29), конкурирующей с радиационным распадом, но это представляет известные экспериментальные трудности. Рассмотрим вместо этого реакцию

$$^4He + d \rightarrow {}^6Li^* \rightarrow {}^6Li + \gamma,$$

скорость которой определяется относительно малой скоростью (шириной) $\Gamma_{\alpha d}$ образования возбужденного состояния. По скорости этой реакции Уилкинсон установил, что экспериментальный предел $\Gamma_{\alpha d}$ равен 0,2 *эв*. Типичная ширина ядерных уровней равна 1 *Мэв*. Отсюда можно сделать вывод, что для сильного взаимодействия $|F|^2 \leq 10^{-7}$.

Другой способ проверки сохранения четности заключается в исследовании круговой поляризации γ-излучения ядер, находящихся в возбужденном состоянии. Круговая поляризация соответствует среднему значению $\langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \rangle$ спиральности фотона. Как мы видели в п. 5.1.5, вследствие инвариантности относительно пространственной инверсии эта величина должна исчезать. Это имеет место в случае усреднения по всем другим спинам, так что возбужденные состояния должны получаться при действии неполяризованного пучка на неполяризованную мишень.

В. М. Лобашов и др. [127] провели очень чувствительный эксперимент по изучению γ-излучения с энергией 400 *кэв*, возникающего при переходе из возбужденного состояния $9/2^-$ в основное состояние $7/2^+$ ^{175}Lu. Этот электрический дипольный переход подобен атомным оптическим переходам. Примеси с противоположной четностью, добавленные в эти два состояния, приводят к γ-излучению в результате магнитных переходов (M 1), происходящих без изменения четности. Амплитуду γ-излучения с энергией 400 *кэв* можно представить в виде $A = A_{E1} + FA_{M1}$. Ее интенсивность с точностью до первого порядка по F: $|A|^2 \approx |A_{E1}|^2 (1 + FR)$ Интерференция между излучением типа E1 и M1 приводит к круговой поляризации. Таким образом, ожидаемая поляризация равна RF, где

$$R = 2\mathrm{Re}\,(A_{E1} A^*_{M1}) / |A_{E1}|^2 \sim |A_{M1}/A_{E1}|.$$

Множитель усиления R можно оценить с помощью теории мультипольного излучения при условии знания структуры ядра. В рассматриваемом случае $R \approx 50$. Поляризация фотона определялась по рассеянию в намагниченном железе и оказалась равной $P_\gamma = (4 \pm 1)\, 10^{-3}$. Отсюда найдем относительную амплитуду взаимодействия, несохраняющего четность: $|F| \sim 0{,}8\, 10^{-6}$. Аналогичные эксперименты проведены Бемом и Канкелейтом [32], Боком и Шоппером [29].

Еще один из способов проверки выполнения закона сохранения четности заключается в поиске угловой асимметрии γ-излучения, испускаемого поляризованными ядрами: если четность сохраняется, то угловое распределение, измеренное относительно направ-

ления поляризации, не может содержать нечетные степени $\cos\theta$, в противном случае величина $\langle \mathbf{S}_{\text{яд}} \cdot \mathbf{p}_\gamma \rangle$ должна иметь ненулевое значение. Гродзинс и Женовез [95] пытались найти асимметрию «вперед — назад» фотонов, испускаемых поляризованным ^{57}Fe. В пределах точности эксперимента обнаружить ее не удалось.

В аналогичном эксперименте для образования поляризованных ядерных уровней использовались поляризованные нейтроны. Изучая реакцию

$$n_{\text{тепл}} + {}^{113}\text{Cd} \rightarrow {}^{114}\text{Cd}^*(1^+) \rightarrow {}^{114}\text{Cd}(0^+) + \gamma,$$

Ю. Г. Абов и др. [2, 3] использовали преимущество изолированного резонансного уровня, делающего кадмий хорошим поглотителем медленных нейтронов. Появление члена $\cos\theta$ в реакции распада есть результат интерференции между доминирующим M1-переходом $1^+ \rightarrow 0^+$ и нерегулярным E1-переходом.

Итак, в приведенных выше обозначениях коэффициент при $\cos\theta$ имеет порядок RF. Ю. Г. Абов и его коллеги обнаружили асимметрию $\varepsilon = -(3{,}7 \pm 0{,}9)\,10^{-4}$, из которой следует, что $|F| \approx 4 \cdot 10^{-7}$.

Причиной, побудившей провести рассмотренные здесь эксперименты, явилось открытие нарушения закона сохранения четности в слабых взаимодействиях (этот вопрос обсуждается ниже). Теория слабых взаимодействий Фейнмана и Гелл-Мана [75], основанная на взаимодействии токов, предсказывает наличие нуклон-нуклонного потенциала с несохранением четности порядка 10^{-7} по отношению к сильному взаимодействию. Степень проявления эффекта, открытого Ю. Г. Абовым, В. М. Лобашовым и их коллегами, согласуется с эффектом слабого взаимодействия. При этом в сильных ядерных взаимодействиях не обнаружено никакого несохранения четности.

Природа несохранения четности в слабых взаимодействиях теперь настолько понятна, что основное значение описанных здесь экспериментов заключается в проверке теории строения ядра. Дальнейшее обсуждение этого вопроса и критический разбор проведенных экспериментов можно найти в работе Гамильтона [99].

Итак, мы имеем хорошее подтверждение выполнения закона сохранения четности как в электромагнитных, так и в сильных взаимодействиях. Переходя к обсуждению сохранения четности в физике элементарных частиц, предположим, что этот закон остается справедливым, и вернемся к нему лишь в конце главы, где наметим некоторые дальнейшие пути проверки инвариантности.

§ 5.3. ЧЕТНОСТЬ В ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

При рассмотрении процессов физики элементарных частиц, в которых частицы могут и рождаться, и разрушаться, сразу обнаруживаются новые аспекты понятия четности. Первый из них — понятие внутренней четности частицы.

Это понятие можно описать с помощью следующей идеализированной ситуации. Предположим, что система частиц, находя-

щихся в состоянии A с определенной четностью, переходит в другое состояние B, излучая нейтральный пион, *но все другие виды частиц при этом остаются без изменения*, т. е.

$$A \to B + \pi^0,$$

например,

$$p + n \to p + n + \pi^0.$$

Установлено, что, за исключением слабых процессов или β-распада, четность конечного состояния $B\pi^0$ всегда противоположна четности состояния A. Это наблюдение не противоречит закону сохранения четности, если предположить, что π^0 имеет внутреннюю или собственную четность, а общая четность конечного состояния $B\pi^0$ есть произведение четности, обусловленной движением, и внутренней четности пиона. Таким образом,

$$\eta_{\text{кон}} = \eta_{\text{орб}}\eta_{\pi^0},$$

где $\eta_{\text{орб}}$ — орбитальная четность, обусловленная относительным движением. Полагая $\eta_{\pi^0} = -1$, можно восстановить закон сохранения четности:

$$\eta_{\text{нач}} = \eta_{\text{кон}}. \tag{5.30}$$

Формально если частицы описываются волновыми функциями, то внутренняя четность η_P определяется при обобщении закона преобразования (5.4):

$$U_P\psi(\mathbf{r}) = \eta_P\psi(-\mathbf{r}).$$

Если делать все последовательно, то надо ввести множители внутренней четности для всех других частиц, находящихся в состояниях A и B. Однако в этом случае, чтобы эти множители в выражении (5.30) сократились, не должны меняться типы других присутствующих частиц. Это возможно только потому, что π^0 не заряжен. Заряженный пион мог бы возникнуть только в результате изменения заряда в каком-нибудь другом месте системы, например

$$p + p \to p + n + \pi^+;$$

внутренние четности $A(pp)$ и $B(pn)$ при этом не сокращаются. Поэтому, несмотря на то, что все частицы можно характеризовать собственными четностями, некоторые из них должны быть фиксированы определением. Мы еще вернемся к этому вопросу при обсуждении способа определения некоторых внутренних четностей.

Другая особенность симметрии пространственной инверсии заключается в том, что эта симметрия не универсальна, так как слабое взаимодействие нарушает закон сохранения четности. Опишем эксперимент, который однозначно подтверждает это.

В результате сильного взаимодействия в реакции

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$$

появляются Λ^0-гипероны. В распаде Λ^0-гиперона в основном доминируют моды

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-; \quad \Lambda^0 \to n + \pi^0.$$

Время жизни Λ^0, равное $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ *сек*, указывает на то, что это слабый процесс.

Для типичного события «рождение — распад», происходящего в пузырьковой камере, известно направление падающего пиона, представленное его импульсом $\mathbf{p}_{\pi 1}$, а по импульсам $\mathbf{p}_P$ и $\mathbf{p}_{\pi 2}$ частиц p и π^- в распаде

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-$$

можно восстановить $\mathbf{p}_\Lambda$. Аксиальный вектор $\mathbf{p}_{\pi 1} \times \mathbf{p}_\Lambda$ определяет положительную нормаль к плоскости рождения (рис. 5.1).

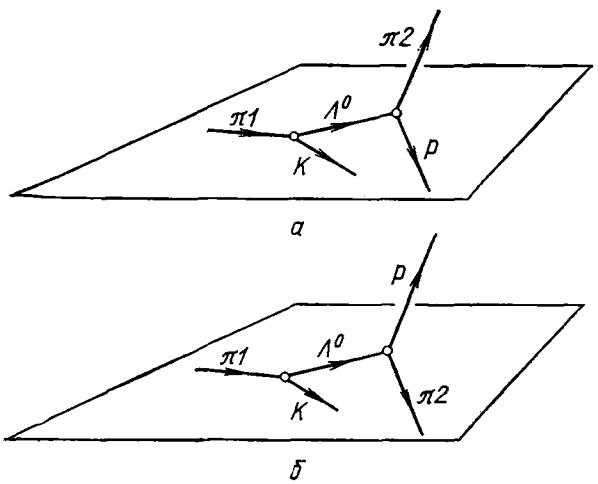


Рис. 5.1. Последовательность рождения и распада Λ^0:
а — распад «вверх»; *б* — распад «вниз»

Согласно п. 5.1.5, если в процессе реакции четность сохраняется, то должно иметь место одинаковое число распадов, при которых пион выходит с положительной стороны плоскости реакции («вверх») и распадов, при которых пион выходит с отрицательной стороны («вниз»). Этим двум возможностям соответствует псевдоскалярная величина

$$[\mathbf{p}_{\pi 1} \times \mathbf{p}_\Lambda] \cdot \mathbf{p}_{\pi 2},$$

которая может быть как положительной, так и отрицательной. Закон сохранения четности требует, чтобы среднее значение псевдоскалярной величины было равно нулю.

По предложению Ли и Янга группа ученых в Беркли в 1957 г. исследовала асимметрию «вверх — вниз» и обнаружила,

что пионы, получившиеся в результате распада, испускаются в основном вверх:

$$[\mathbf{p}_{\pi 1} \times \mathbf{p}_{\Lambda}] \cdot \mathbf{p}_{\pi 2} > 0.$$

Кроуфорд и др. [51] наблюдали 353 события в пузырьковой камере и установили, что $N_{\text{вверх}} = 215$, $N_{\text{вниз}} = 138$. Эти результаты в дальнейшем были подтверждены работами других групп.

Таким образом, имеем естественный процесс, позволяющий однозначно определять правую систему координат. Для того чтобы перейти к наблюдателю, находящемуся в удаленной от нас Галактике в правой системе координат, достаточно научить его* выполнять эксперимент по рождению и распаду Λ^0 и наблюдать три импульса: $\mathbf{p}_{\pi 1}$, $\mathbf{p}_{\Lambda}$ и импульс $\mathbf{p}_{\pi 2}$, направленный в сторону преимущественного вылета пионов распада. Эти три вектора, взятые по порядку, и определяют правую систему координат.

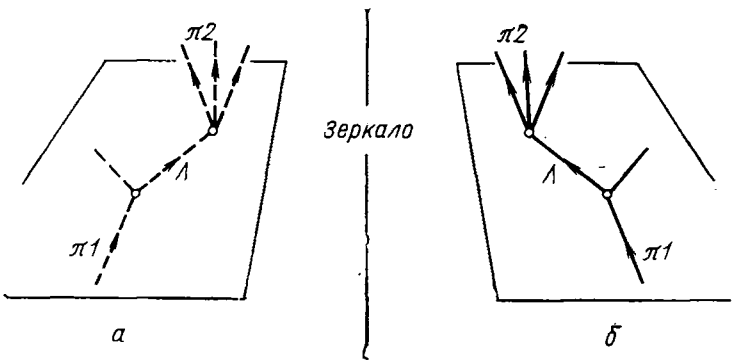


Рис. 5.2. Зеркальное изображение эксперимента по рождению и Λ^0-распаду (*а*) и событие, не реализуемое в природе (*б*)

Другой способ выявления природы несохранения четности при помощи наблюдений — отразить реальный эксперимент в зеркале (рис. 5.2). Операция пространственной инверсии эквивалентна отражению в плоскости и последующему повороту на угол π относительно нормали к плоскости зеркала. При этом предполагается существование инвариантности относительно вращений, так что проверка симметрии относительно зеркального отражения эквивалентна проверке симметрии относительно пространственной инверсии.

В реальном эксперименте частицы Λ^0, рассеянные налево, испускают пионы распада «вверх», а Λ^0, рассеянные направо, испускают пионы «вниз» (на рис. 5.2 они не показаны). В воображаемом зеркальном эксперименте Λ^0, рассеянные направо, излучали бы пионы «вверх», что противоречит нашим наблюдениям.

* Если только он не является антинаблюдателем, использующим антипротоны для получения антигиперонов. В этом случае он получит левую систему координат (см. п. 8.3.1).

Таким образом, зеркальное изображение эксперимента по распаду Λ^0 — физически не реализуемая ситуация.

При таком наглядном способе изображения сохранение четности требует, чтобы зеркально отраженное событие происходило с той же квантовомеханической вероятностью, что и рассматриваемое событие. В данном случае это означало бы, что $N_{\text{вверх}} = N_{\text{вниз}}$.

§ 5.4. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ИНВЕРСИЯ И ОПИСАНИЕ СПИРАЛЬНОСТИ

Обсудим свойства преобразования относительно пространственной инверсии спиральных состояний, описанных в предыдущей главе. Это позволит получить следствия из закона сохранения четности для амплитуд реакций и распадов. Мы уже ссылались на эти результаты без доказательства их, когда обсуждали эти процессы (см. гл. 4).

Воспользуемся следующим методом: из геометрического определения операции четности P получим свойства коммутации P с поворотами и преобразованиями Лоренца, использованными для определения спиральных состояний одной частицы. Из этих коммутационных правил определим, как действует унитарный оператор четности на спиральные состояния одной частицы, от чего зависят свойства относительно преобразования четности для плоской волны и для собственных состояний момента количества движения двух частиц.

5.4.1. Преобразование четности одно- и двухчастичных состояний. Операция пространственной инверсии P в четырехмерных обозначениях записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{5.31}$$

откуда видно, что оператор P оставляет неизменной временную координату и его можно считать обобщенным преобразованием Лоренца. Имеем

$$P^2 = 1. \tag{5.32}$$

Здесь и в дальнейшем P означает 4×4-матрицу в правой части равенства (5.31). Поскольку P изменяет знак пространственных координат, то P не коммутирует с пространственными трансляциями.

Для трансляции пространства — времени a_μ

$$T_{a_\mu}: \quad x_\mu \to x_\mu' = x_\mu + a_\mu$$

получаем

$$PT_{(a_0,\mathbf{a})} = T_{(a_0,-\mathbf{a})}P. \tag{5.33}$$

Оператор P коммутирует с вращениями, следовательно,

$$PR = RP, \tag{5.34}$$

где R означает вращение:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ 0 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, пространственная инверсия не коммутирует с преобразованиями Лоренца. Например, в случае чистого буста вдоль направления z, представленного в виде

$$\mathscr{L}_v = \begin{pmatrix} (1-v^2)^{-1/2} & 0 & 0 & v(1-v^2)^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v(1-v^2)^{-1/2} & 0 & 0 & (1-v^2)^{-1/2} \end{pmatrix},$$

находим

$$P\mathscr{L}_v = \mathscr{L}_{-v}P. \tag{5.35}$$

В общем случае чистое преобразование Лоренца со скоростью $\mathbf{v}$ после преобразования четности $P\Lambda P^{-1}$ опять имеет вид чистого преобразования Лоренца со скоростью $-\mathbf{v}$.

Для квантовомеханической системы оператору P соответствует унитарный оператор $U(P)$*, действующий на векторы состояния системы. Согласно общей теории, каждому уравнению (5.32)—(5.35) соответствуют уравнения для операторов:

$$U(P)^2 = 1; \tag{5.36}$$

$$U(P)\,U(a_0, \mathbf{a}) = U(a_0, -\mathbf{a})\,U(P); \tag{5.37}$$

$$U(P)\,U(R) = U(R)\,U(P); \tag{5.38}$$

$$U(P)\,U(\mathscr{L}_v) = U(\mathscr{L}_{-v})\,U(P). \tag{5.39}$$

Вместо того чтобы определить $U(P)$ непосредственно по его действию на волновую функцию (см. § 5.1), выберем для определения действия $U(P)$ на одночастичные состояния такое условие, чтобы уравнения (5.36)—(5.39) выполнялись.

Прежде всего преобразуем (5.37) к более удобному виду, считая смещение бесконечно малым.

С помощью четырехмерного импульса $P_\mu = (P_0, \mathbf{P})$ по аналогии с уравнением (4.28) запишем

$$U(a_0, \mathbf{a}) = 1 + i(a_0P_0 - \mathbf{aP}).$$

Подставляя это соотношение в (5.37), получаем

$$U(P)\{1 + ia_0P_0 - i\mathbf{aP}\} = \{1 + ia_0P_0 + i\mathbf{aP}\}\,U(P).$$

---

* В дальнейшем воспользуемся обозначением $U(P)$, а не U_P, так как это удобнее для других унитарных операторов $U(\mathbf{a})$ и т. д.

Сравнивая коэффициенты при параметрах a_0 и $\mathbf{a}$, находим

$$P_0 U(P) = U(P) P_0; \tag{5.40}$$

$$\mathbf{P} U(P) = -U(P) \mathbf{P}. \tag{5.41}$$

Таким образом, $U(P)$ коммутирует с оператором энергии (гамильтонианом) и антикоммутирует с трехмерным импульсом $\mathbf{P}$.

Рассмотрим одну частицу с массой m и спином s, спиральные состояния которой $\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$ определены процедурой, описанной в § 4.3 и 4.4.

Состояние $\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$ — собственное состояние операторов P_0 и $\mathbf{P}$ с собственными значениями $(p^2+m^2)^{1/2}$ и $\mathbf{p}$. Применяя к этому состоянию последовательно соотношения (5.40) и (5.41), получаем

$$P_0 U(P) \varphi_{\mathbf{p}\lambda} = U(P) P_0 \varphi_{\mathbf{p}\lambda} = (\mathrm{p}^2 + m^2)^{1/2} U(\mathrm{P}) \varphi_{\mathbf{p}\lambda};$$

$$\mathbf{P} U(P) \varphi_{\mathbf{p}\lambda} = -\mathbf{p} U(P) \varphi_{\mathbf{p}\lambda}.$$

Видно, что состояние $U(P)\varphi_{\mathbf{p}\lambda}$ является собственным состоянием энергии — импульса с энергией $(\mathrm{p}^2+m^2)^{1/2}$ и трехмерным импульсом $-\mathbf{p}$, что и следовало ожидать.

Рассмотрим множество состояний покоя $\varphi_{0\lambda}$ $(-s \leqslant \lambda \leqslant s)$, преобразование которых относительно вращений определено стандартным способом в § 4.4. Состояния, к которым применено преобразование четности $U(P)\varphi_{0\lambda}$, являются и состояниями покоя; это следует из только что проделанных выкладок. Из (5.38) следует, что при вращениях эти состояния также преобразуются стандартным способом:

$$U(R) U(P) \varphi_{0\lambda} = U(P) U(R) \varphi_{0\lambda} = U(P) \left\{ \sum_{\lambda'} \varphi_{0\lambda'} \mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}(R) \right\} =$$

$$= \sum_{\lambda'} U(P) \varphi_{0\lambda'} \mathscr{D}^s_{\lambda'\lambda}(R).$$

Таким образом, можно сделать вывод, что состояния $U(P)\varphi_{0\lambda}$ и $\varphi_{0\lambda}$ пропорциональны друг другу, т. е.

$$U(P) \varphi_{0\lambda} = \eta \varphi_{0\lambda}, \tag{5.42}$$

где η_P — фазовый множитель.

Более тщательный анализ, который мы здесь проводить не будем, показывает, что единственная альтернатива уравнения (5.42) состоит в том, что для покоящейся частицы существуют два различных набора из $2s+1$ состояний каждый. Но это отличается от того, что мы наблюдали в действительности.

Если принять условие (5.42), то из (5.36) следует, что

$$\eta_P^2 = 1; \quad \eta_P = \pm 1, \tag{5.43}$$

где η_P — внутренняя четность частицы. Рассмотрим теперь действие $U(P)$ на состояние с импульсом p, направленным вдоль оси z.

С помощью соотношений (4.50) и (5.39) получаем

$$U(P)\,\varphi_{p00\lambda} = U(P)\,U(\mathscr{L}_p)\,\varphi_{000\lambda} = U(\mathscr{L}_{-p})\,U(P)\,\varphi_{000\lambda}. \qquad (5.44)$$

Следовательно,

$$U(P)\,\varphi_{p00\lambda} = \eta_P U(\mathscr{L}_{-p})\,\varphi_{000\lambda}.$$

Здесь $\mathscr{L}_{-p}$ — буст в отрицательном направлении оси z. Таким образом, состояние в правой части отличается от состояния, определенного в (4.66), лишь фазовым множителем. Однако прежде чем вычислять по этой формуле, проведем следующую операцию.

Поворот Y_π на угол π вокруг оси y переводит направление $+z$ в направление $-z$. Следовательно, преобразования Лоренца удовлетворяют условию $Y_\pi^{-1}\mathscr{L}_p Y_\pi = \mathscr{L}_{-p}$. Соответственно

$$U(Y_\pi)^{-1}U(\mathscr{L}_p)\,U(Y_\pi) = U(\mathscr{L}_{-p}). \qquad (5.45)$$

Подставляя это выражение в (5.44) и используя известные трансформационные свойства состояний покоя относительно поворотов

$$U(Y_\pi)\,\varphi_{000\lambda} = \sum_{\lambda'} \varphi_{000\lambda'}\, d^s_{\lambda'\lambda}(\pi) = (-1)^{s-\lambda}\,\varphi_{000,\,-\lambda},$$

получаем

$$U(P)\,\varphi_{p00\lambda} = \eta_P U(Y_{-\pi})\,U(\mathscr{L}_p)\,(-1)^{s-\lambda}\,\varphi_{000,-\lambda}.$$

Таким образом,

$$U(P)\,\varphi_{p00\lambda} = \eta_P\,(-1)^{s-\lambda} U(Y_{-\pi})\,\varphi_{p00,-\lambda}. \qquad (5.46)$$

Из этого уравнения следует, что действие оператора четности на одночастичное состояние аналогично действию определенного поворота $Y_{-\pi}$. Но из него нельзя сделать вывод о том, что операторы равны, так как это верно не для всех состояний.

Уравнение (5.46) есть наиболее полезная форма выражения закона преобразования четности для спиральных состояний. Представим этот закон в другом виде, перенеся оператор поворота в левую часть равенства:

$$U(Y_\pi)\,U(P)\,\varphi_{p00\lambda} = \eta_P\,(-1)^{s-\lambda}\varphi_{p00,-\lambda}. \qquad (5.47)$$

Ясно, что комбинированная операция $Y_\pi P$ есть отражение в плоскости xz. Обозначив ее I_y, имеем

$$U(I_y)\,\varphi_{p00\lambda} = \eta_P\,(-1)^{s-\lambda}\varphi_{p00,-\lambda}. \qquad (5.48)$$

Но вращение в плоскости xz коммутирует с отражением в этой плоскости, так что, применяя $U(Y_\theta)$ к обеим частям равенства (5.48), получаем

$$\left.\begin{aligned} U(I_y)\,U(Y_\theta)\,\varphi_{p00\lambda} &= \eta_P\,(-1)^{s-\lambda}\,U(Y_\theta)\,\varphi_{p00,-\lambda}, \\ U(I_y)\,\varphi_{p\theta 0\lambda} &= \eta_P\,(-1)^{s-\lambda}\varphi_{p\theta 0,-\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.49)$$

Аналогичный расчет можно проделать и для состояния $\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda}$, определенного согласно (4.66), когда импульс p направлен вдоль оси $-z$. В результате получим

$$U(P)\,\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda} = \eta_P (-1)^{s+\lambda} U(Y_\pi)\,\widehat{\varphi}_{p\pi 0,-\lambda}. \tag{5.50}$$

Это равенство можно переписать в виде

$$U(I_y)\,\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda} = \eta_P (-1)^{s+\lambda}\,\widehat{\varphi}_{p\pi 0,-\lambda}. \tag{5.51}$$

Наконец, применяя $U(Y_\theta)$, получаем

$$U(I_y)\,U(Y_\theta)\,\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda} = \eta_P (-1)^{s+\lambda} U(Y_\theta)\,\widehat{\varphi}_{p\pi 0,-\lambda}. \tag{5.52}$$

Для двухчастичного состояния

$$\varphi^{ab}_{W\theta 0\lambda_a\lambda_b} = U(Y_\theta)\left\{\varphi^{a}_{p00\lambda_a}\,\widehat{\varphi}^{b}_{p\pi 0\lambda_b}\right\}.$$

С учетом уравнений (5.49) и (5.52) имеем

$$U(I_y)\,\varphi^{ab}_{W\theta 0\lambda_a\lambda_b} = \eta_a\eta_b (-1)^{s_a-\lambda_a+s_b+\lambda_b}\,\varphi^{ab}_{W\theta 0,-\lambda_a,-\lambda_b}, \tag{5.53}$$

где η_a и η_b — внутренние четности a и b.

Для двухчастичных реакций и распадов плоскостью реакции можно выбрать плоскость xz. Закон преобразования (5.53) для тех состояний, импульс которых лежит в этой плоскости, позволяет вывести следствия из закона сохранения четности в таких процессах.

Теперь обсудим закон преобразования четности собственного состояния момента количества движения двух частиц

$$U(P)\,\Psi^{ab}_{WJM\lambda_a\lambda_b} = \eta_a\eta_b (-1)^{J-s_a-s_b}\Psi^{ab}_{WJM,-\lambda_a,-\lambda_b}. \tag{5.54}$$

Доказательство, начатое уравнением (4.89), приведено в работе Жакоба и Вика [108].

Уравнение (5.54) показывает, что собственные состояния момента количества движения не являются собственными состояниями четности, за исключением случая бесспиновых частиц. Однако собственные состояния четности легко построить с помощью этого уравнения. Рассмотрим два примера.

1. Случай системы πN уже рассматривался в § 4.8. Известно, что произведение четностей π и N нечетно: $\eta_\pi\eta_N = -1$, так что

$$U(P)\,\Psi^{\pi N}_{JM\lambda} = -(-1)^{J-1/2}\Psi^{\pi N}_{JM,-\lambda}.$$

Следовательно, нормированные состояния

$$\Psi^{(\pm)}_{JM} = 2^{-1/2}\left\{\Psi^{\pi N}_{JM,+1/2} \mp \Psi^{\pi N}_{JM,-1/2}\right\}$$

имеют четность $(-1)^{J\mp 1/2}$.

2. Для двух частиц со спином 1/2, например pn, произведение внутренних четностей которых $\eta_p\eta_n = +1$, имеем

$$U(P)\,\Psi^{pn}_{JM\lambda_a\lambda_b} = (-1)^{J-1}\,\Psi^{pn}_{JM,-\lambda_a,-\lambda_b}.$$

Таким образом, состояния

$$2^{-1/2}\{\Psi_{JM++} \pm \Psi_{JM--}\}$$

имеют четность $\mp(-1)^J$, а состояния

$$2^{-1/2}\{\Psi_{JM+-} \pm \Psi_{JM-+}\}$$

имеют четность $\mp(-1)^J$.

Для случая двух тождественных частиц, например двух протонов, имеются дополнительные ограничения, вытекающие из статистики.

5.4.2. Следствия из закона сохранения четности для реакций и распадов. Амплитуда рассеяния в с. ц. м. для двухчастичной реакции $a+b \to c+d$ есть матричный элемент $\mathcal{T}$-оператора между состояниями плоской волны в с. ц. м.:

$$f_{\lambda_c\lambda_d\lambda_a\lambda_b}(W\theta,\ \varphi=0) \sim \left(\Phi^{cd}_{W\theta0\lambda_c\lambda_d},\ \mathcal{T}\Phi^{ab}_{W00\lambda_a\lambda_b}\right),$$

где

$$\Phi^{ab}_{W00\lambda_a\lambda_b} \sim \varphi^{a}_{p00\lambda_a}\,\widehat{}\,\varphi^{b}_{p\pi0\lambda_b}; \tag{5.55}$$

$$\Phi^{cd}_{W\theta0\lambda_c\lambda_d} \sim U(Y_\theta)\left\{\varphi^{c}_{p00\lambda_c}\,\widehat{}\,\varphi^{d}_{p\pi0\lambda_d}\right\}. \tag{5.56}$$

Знак приблизительного равенства означает пренебрежение кинематическими множителями (см. § 4.7). Этот знак не влияет на приведенные аргументы.

Инвариантность относительно пространственной инверсии выражается соотношением $U(P)^{-1}\mathcal{T}U(P) = \mathcal{T}$. Так как предполагается, что оператор $\mathcal{T}$ инвариантен относительно вращений, то можно вместо $\mathcal{T}$ в левую часть уравнения подставить $U(Y_\pi)^{-1}\times$ $\times\mathcal{T}U(Y_\pi)$ и получить

$$U(I_y)^{-1}\,\mathcal{T}\,U(I_y) = \mathcal{T}.$$

Возьмем матричный элемент этого уравнения между состояниями (5.55) и (5.56) и используем законы преобразования (5.53), (5.48) и (5.51); тогда получим

$$\frac{\eta_a\eta_b\,(-1)^{s_a-\lambda_a+s_b+\lambda_b}}{\eta_c\eta_d\,(-1)^{s_c-\lambda_c+s_d+\lambda_d}}\left(\Phi^{cd}_{W\theta0,-\lambda_c,-\lambda_d},\quad \mathcal{T}\Phi^{ab}_{W00,-\lambda_a,-\lambda_b}\right) =$$

$$= \left(\Phi^{cd}_{W\theta0\lambda_c\lambda_d},\quad \mathcal{T}\Phi^{ab}_{W00\lambda_a\lambda_b}\right).$$

Несмотря на то, что η и $(-1)^{s\pm\lambda}$ — действительные величины (фактически равные ±1), будем обращаться с ними как с комплексными фазовыми множителями, для которых $\eta^* = \eta^{-1}$. Таким

образом, когда они связаны с комплексно сопряженными волновыми функциями, их пишут в знаменателе. Запишем этот результат с помощью спиральной амплитуды рассеяния:

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W,\theta,0)=\frac{\eta_a\eta_b(-1)^{s_a-\lambda_a+s_b+\lambda_b}}{\eta_c\eta_d(-1)^{s_c-\lambda_c+s_d+\lambda_d}}f_{-\lambda_c,-\lambda_d,-\lambda_a,-\lambda_b}(W,\theta,0). \tag{5.57}$$

Это и есть следствие из закона сохранения четности для амплитуды реакции. В случае упругого рассеяния πN ($s_a=s_c=1/2$, $s_b=s_d=0$) получаем следующий результат [см. § 4.8, формулу (4.99)]: $f_{--}(\theta)=f_{++}(\theta)$; $f_{+-}(\theta)=-f_{-+}(\theta)$.

Запишем теперь условие сохранения четности для амплитуды рассеяния в представлении момента количества движения. С помощью уравнения (5.54) можно показать, что

$$\frac{\eta_a\eta_b(-1)^{J-s_a-s_b}}{\eta_c\eta_d(-1)^{J-s_c-s_d}}\mathcal{T}^J_{-\lambda_c,-\lambda_d,-\lambda_a,-\lambda_b}(W)=\mathcal{T}^J_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W). \tag{5.58}$$

Для того чтобы выяснить роль закона сохранения четности в реакциях типа $\bar{K}+N\to\pi+\Lambda$, полезно рассмотреть общий случай реакции частиц со спином 0 с частицами со спином 1/2. Пусть $s_a=s_c=1/2$; $s_b=s_d=0$. Здесь индексы λ_b и λ_d опущены, а значения $\pm1/2$ для λ_a и λ_c обозначены просто $\pm$. Из уравнения (5.57) следует, что

$$f_{\mu\lambda}(W,\theta)=\eta_p(-1)^{\mu-\lambda}f_{-\mu,-\lambda}(W,\theta), \tag{5.59}$$

где четность реакции

$$\eta_p=\eta_a\eta_b/\eta_c\eta_d. \tag{5.60}$$

Восстанавливая зависимость от φ, преобразуем уравнение (5.59) к виду

$$f_{\mu\lambda}(W,\theta,\varphi)=\eta_p(-1)^{\mu-\lambda}\exp(2i\lambda\varphi)f_{-\mu,-\lambda}(W,\theta,\varphi).$$

Таким образом, матрица $f_{\mu\lambda}$ в базисе спиральности имеет вид

$$f(W,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}f_{++}, & -\eta_p\exp(-i\varphi)f_{-+}\\ f_{-+}, & \eta_p\exp(-i\varphi)f_{++}\end{bmatrix}.$$

Чтобы сравнить этот результат с нерелятивистским подходом, преобразуем конечные состояния спиральности к той же оси квантования z, что и для начальной частицы со спином 1/2. Это преобразование описано в § 4.8. Для рассмотренного здесь более общего выражения имеем

$$F(W,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}f_{++}-\sin\frac{\theta}{2}f_{-+},\\ \left(\sin\frac{\theta}{2}f_{++}+\cos\frac{\theta}{2}f_{-+}\right)\exp(i\varphi),\end{bmatrix}$$

Спиральные амплитуды правой части (5.61) приведены при $\varphi=0$, поэтому мы имеем здесь явную зависимость от φ. Случай $\eta_p=+1$ соответствует πN-рассеянию и рассмотрен выше, где показано, что F можно представить в виде

$$F = g(\theta)\,1 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}h(\theta), \tag{5.62}$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — нормаль к плоскости рассеяния. В случае $\eta_p=-1$

$$F(W, \theta, \varphi) = j(\theta)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}_i + k(\theta)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}_f. \tag{5.63}$$

Здесь $\hat{\mathbf{p}}_i$ и $\hat{\mathbf{p}}_f$ — единичные векторы вдоль направления движения начальной и конечной частиц со спином 1/2, причем

$$\hat{\mathbf{p}}_i = (0,\ 0,\ 1);$$

$$\hat{\mathbf{p}}_f = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta).$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}_f = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\exp(-i\varphi) \\ \sin\theta\exp(i\varphi) & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Уравнение (5.63) согласуется с (5.61), если амплитуды $j(\theta)$ и $k(\theta)$ определяются выражениями

$$k(\theta)\sin\theta = \sin\frac{\theta}{2}f_{++} + \cos\frac{\theta}{2}f_{-+};$$

$$j(\theta) + k(\theta)\cos\theta = \cos\frac{\theta}{2}f_{++} - \sin\frac{\theta}{2}f_{-+}.$$

Таким образом, если общая внутренняя четность не меняется ($\eta_p=+1$), то амплитуда рассеяния имеет вид

$$F = g(\theta)\,1 + ih(\theta)\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot[\hat{\mathbf{p}}_i\times\hat{\mathbf{p}}_f]}{|\,[\hat{\mathbf{p}}_i\times\hat{\mathbf{p}}_f]\,|}. \tag{5.64}$$

Если же общая внутренняя четность меняется ($\eta_p=-1$), то

$$F = j(\theta)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}_i + k(\theta)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}_f, \tag{5.65}$$

Эти формулы можно вывести, пользуясь элементарными аргументами инвариантности, следующим образом. Поскольку F есть 2×2-матрица в спиновом пространстве, то ее можно образовать из единичного оператора в спиновом пространстве $\mathbf{1}$ и вектора спиновых матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$. Инвариантность относительно враще-

ний требует, чтобы матрица F была скалярной. Векторы, которые годятся для образования скаляра с вектором σ, образуются из импульсов в с. ц. м. Такими векторами могут быть единичные векторы $\hat{\mathbf{p}}_i$, $\hat{\mathbf{p}}_f$ и $\hat{\mathbf{n}}$, где

$$\hat{\mathbf{n}} = [\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_f]/|[\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_f]|.$$

Если в конечном состоянии произведение внутренних четностей такое же, что и в начальном состоянии, то матрица F должна быть истинным скаляром относительно отражений. Таким образом, так как $\hat{\mathbf{p}}_i$ и $\hat{\mathbf{p}}_f$ меняют знак при отражении, а $\hat{\mathbf{n}}$ — нет, то мы приходим к формуле (5.64). С другой стороны, если общая внутренняя четность меняется, F должна быть псевдоскаляром относительно отражений и, следовательно, может содержать только $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}_i$ и $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}_f$. В этом случае справедлива формула (5.65).

Эти элементарные аргументы нелегко обобщить для спинов более высокого порядка. В подобных случаях, а также в случае безмассовых частиц предпочтительно описывать свойства последних, используя спиральность.

Наконец, вернемся к распадам, при которых четность сохраняется. Амплитуда распада $A \to a+b$ в состоянии покоя есть

$$f_{\lambda_a\lambda_b M}(\theta) = \left(\Phi^{ab}_{m_A \theta 0 \lambda_a \lambda_b},\ S\varphi^A_{0M}\right).$$

Здесь мы ограничились рассмотрением уравнения (4.114) в плоскости xz, $\varphi = 0$. Как и раньше, возьмем матричный элемент

$$U(I_y)^{-1} S U(I_y) = S$$

между состояниями A и ab. Для состояния покоя A имеем

$$U(I_y)\,\varphi_{0M} = U(Y_\pi)\,U(P)\,\varphi_{0M} = \eta_A U(Y_\pi)\,\varphi_{0M} = \eta_A (-1)^{J-M} \varphi_{0,-M},$$

в то время как для состояния ab с помощью уравнения (5.53) находим

$$\frac{\eta_A (-1)^{J-M}}{\eta_a \eta_b (-1)^{s_a - \lambda_a + s_b + \lambda_b}} f_{-\lambda_a, -\lambda_b, -M}(\theta) = f_{\lambda_a \lambda_b M}(\theta). \tag{5.66}$$

Введя в уравнение (5.66) явный вид угловой зависимости $f(\theta)$ [см. формулу (4.115а)]

$$f_{\lambda_a\lambda_b M}(\theta) = C_J d^J_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\theta)\, a_{\lambda_a \lambda_b},$$

получим

$$\frac{\eta_A (-1)^{J-M}}{\eta_a \eta_b (-1)^{s_a - \lambda_a + s_b + \lambda_b}} d^J_{-M, -\lambda_a + \lambda_b}(\theta)\, a_{-\lambda_a - \lambda_b} = d^J_{M, \lambda_a - \lambda_b}(\theta)\, a_{\lambda_a \lambda_b}.$$

Используя в правой части равенства тождество для d-функции

$$d^J_{MM'}(\theta) = (-1)^{M'-M} d^J_{-M, -M'}(\theta),$$

после сокращения функции d^J имеем уравнение [см. формулу (4.117а)]

$$\eta_A(\eta_a\eta_b)^{-1}(-1)^{J-s_a-s_b}a_{-\lambda_a,-\lambda_b}=a_{\lambda_a\lambda_b},$$

которое представляет собой условие сохранения четности для упомянутой выше амплитуды распада.

5.4.3. **Четность и безмассовые частицы.** В § 4.5 обсуждались некоторые особенности лоренц-инвариантного описания безмассовых частиц. При этом мы опирались на то, что из лоренц-инвариантности следует, что безмассовая частица со спином s может существовать только в состоянии спиральности $\lambda=s$ или $\lambda=-s$. Иными словами, проекция спина на направление движения при $m=0$ является лоренц-инвариантной величиной.

Теперь потребуем, чтобы оператор четности можно было применить к состояниям безмассовой частицы. Мы не можем начать с состояния покоя такой частицы. Вместо этого рассмотрим, например, состояние, в котором частица движется вдоль оси $+z$. Рассмотрим также операцию отражения $I_y=Y_\pi P$ и $U(I_y)\varphi_{p00}{}^{\lambda}$, причем здесь I_y оставляет плоскость xz инвариантной. Следовательно, для этого состояния импульс также направлен вдоль оси $+Oz$. Оператор спиральности $\mathcal{H}$ является псевдоскаляром относительно инверсии, так что рассматриваемое состояние имеет спиральность $-\lambda$. Формально из уравнения (5.18) и инвариантности $\mathcal{H}$ относительно вращений (относительно Y_π) следует, что

$$U(I_y)\mathcal{H}=-\mathcal{H}U(I_y).$$

Таким образом, с помощью обычной аргументации

$$\mathcal{H}U(I_y)\varphi_{p00\lambda}=-U(I_y)\mathcal{H}\varphi_{p00\lambda}=-\lambda U(I_y)\varphi_{p00\lambda}.$$

Это доказывает положение § 4.5 о том, что применимость оператора четности к состояниям безмассовой частицы требует существования двух состояний спиральности $\pm\lambda(=\pm s)$. Пусть

$$U(I_y)\varphi_{p00\lambda}=\eta_p\varphi_{p00,-\lambda}, \tag{5.67}$$

где $\eta_p=\pm1$ и не зависит от p, так как I_y коммутирует с лоренц-преобразованиями в направлении z, меняющими p в обеих частях равенства. Преобразование I_y коммутирует также с Y_θ, следовательно, так же, как и для частицы, обладающей массой, можно обобщить проведенное рассмотрение и на случай состояния движения в плоскости xz:

$$U(I_y)\varphi_{p00\lambda}=\eta_p\varphi_{p\theta0,-\lambda}. \tag{5.68}$$

Отметим, что это уравнение в случае $\lambda=s$ согласуется с уравнением (5.49) для массивной частицы. Четность η_p называют внутренней четностью.

Полностью понять значение сделанных выше выводов можно только после рассмотрения взаимодействия частиц. Для того что-

бы построить взаимодействие частиц, сохраняющее четность с безмассовой частицей, необходимо, чтобы она могла существовать в обоих состояниях спиральности $\lambda = \pm s$.

В качестве примера можно привести две известные безмассовые частицы — фотон и нейтрино. Мы уже отмечали, что существуют состояния спиральности фотона $\lambda = \pm 1$ со спином $+1$. Они соответствуют квантам плоских волн с правой и левой круговыми поляризациями [см (4.63а)]

$$A_{\pm} = \mp i 2^{-1/2} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \exp(ipz).$$

Для более детального исследования этого соответствия необходимо рассмотреть квантование поля излучения, что выходит за рамки данной книги.

Из формулы (4.63а) видно, что так как I_y меняет знак $\mathbf{e}_y$, но не $\mathbf{e}_x$, то I_y преобразует $A_{\pm}$ в $-A_{\mp}$. Сравнивая этот классический аргумент с правилом соответствия (5.67) для квантовых состояний, делаем вывод, что внутренняя четность фотона есть -1. Этот результат зависит от общего знака правой части равенства (4.63а), определенного, однако, другими условиями ранее. Например, поворот Y_π должен переводить состояние фотона $\varphi_{p00,+1}$ в $\varphi_{p\pi 0,+1}$ (знак Λ отсутствует).

Соответственно классическая волна

$$A_+ \xrightarrow{Y_\pi} -2^{-1/2} (-\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \exp(-ipz) = 2^{-1/2} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \exp(-ipz)$$

имеет спиновую компоненту -1 вдоль оси $+z$ и, следовательно, положительную спиральность.

Известно, что нейтрино имеет спин 1/2 и обладает лишь одним состоянием спиральности $\lambda = -1/2$. Соответственно взаимодействия, в которых участвует нейтрино, не сохраняют инвариантность относительно пространственной инверсии. Это не объясняет полностью явления несохранения четности в природе, так как слабые процессы, не включающие лептонов, также нарушают закон сохранения четности. Более того, ситуация для нейтрино усложняется тем, что они несут обобщенный лептонный заряд (лептонное число), так что приведенный выше аргумент применим только к нейтрино с определенным лептонным числом. В природе обнаружено и антинейтрино с противоположной спиральностью. Как мы увидим дальше, это согласуется с общим аргументом (CPT-теорема).

§ 5.5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ЧЕТНОСТЕЙ

5.5.1. Общие замечания. Для определения внутренних четностей частиц и резонансов используются самые разные методы. Некоторые из них описаны ниже при обсуждении конкретных примеров сильного и электромагнитного взаимодействий, при которых, как мы уже видели, четность сохраняется. Определить внутреннюю четность с помощью реакций, ее нарушающих, однозначно невозможно.

Введя в § 5.3 понятие внутренней четности, мы рассмотрели процесс $A \to B + \pi^0$, в результате которого частица π^0 рождалась без изменения числа и вида других присутствующих частиц. Для некоторых частиц это условие никогда не может выполняться в силу действия других законов сохранения. Например, протоны никогда не могут рождаться поодиночке, так как реакция, при которой в результате взаимодействия двух протонов образуются только три протона и ничего больше, нарушила бы закон сохранения электрического заряда, которому, как мы полагаем, в природе подчиняется абсолютно все. Фактически независимо от этого такая реакция запрещена в силу действия закона сохранения момента количества движения, а именно: можно считать, что полный момент количества движения J в начальном состоянии принимает целые значения, в то время как орбитальный момент количества движения обязательно целый и в конечном состоянии J полуцелое. Последнее правило также запрещает образоваиие одного иейтрона при взаимодействии протона с протоном, сохраняющим электрический заряд.

Подобные рассуждения показывают, что внутреннюю четность нельзя приписать всем частицам. Однако если формально ввести для каждой частицы множитель внутренней четности η, то некоторые четности можно произвольио считать положительными (к примеру), а другие зафиксировать относительно их иа основании экспериментов. Это положение проиллюстрировано в оставшейся части раздела.

5.5.2. Четность нейтрального π-мезона и фотона. Естественно было бы начать с π^0-мезона, внутренняя четность которого не зависит ни от каких условий. Однако использовать реакцию

$$p + p \to p + p + \pi^0$$

неудобно, так как в результате ее получаются три частицы. Анализ моды распада

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma \to (e^+e^-) + (e^+e^-)$$

позволяет однозначно определить четность π^0-мезона и показывает, что она отрицательна.

Абсолютно определяется также четность фотона, которая, как теоретически обосновано в п. 5.4.3, равна $\eta_\gamma = -1$.

5.5.3. Четность заряженного π-мезона. Виутренняя четность отрицательного π-мезона была определена из аиализа его захвата в состоянии покоя в мишени из жидкого дейтерия. При этом происходили реакции, относительная частота которых составляла:

$$\pi^- + d \to n + n \qquad 70\%; \qquad (5.69а)$$

(покоящийся)

$$\to n + n + \gamma \qquad 30\%; \qquad (5.69б)$$

$$\to n + n + \pi^0 \qquad \sim 0. \qquad (5.69в)$$

Последняя реакция не наблюдается, хотя и энергетически допустима, так как разность масс π^- и π^0 превышает энергию связи дейтона примерно на 2,4 *Мэв*.

Отрицательный π-мезон замедляется из-за ионизации до тех пор, пока не захватится на атомную орбиту вокруг дейтона. Анализ относительных скоростей процессов показывает, что прежде чем π-мезон будет захвачен дейтоном, он попадает в результате радиационных переходов в $1s$-состояние. Поскольку дейтон имеет спин 1, делаем вывод, что захват происходит из начального состояния с полным моментом количества движения $J=1$.

Теперь конечное состояние содержит две тождественные частицы со спином 1/2, а статистика Ферми требует, чтобы состояния с полным спином 0 или 1 при перестановке пространственных координат были нечетными или четными, т. е. обладали нечетным или четным орбитальным моментом количества движения соответственно. Поэтому конечное состояние с $J=1$ может быть только триплетным p-состоянием, т. е. $^3P_1$, в спектроскопических обозначениях $^{2s+1}L_J$. Поскольку это состояние имеет нечетную пространственную четность, в то время как состояние дейтона четно, реакция (5.69а) может идти с сохранением четности только в том случае, если внутренняя четность π^- отрицательна: $\eta_{\pi^-}=-1$.

Действуя более формально, можно приписать внутренние четности всем частицам. Тогда четность начального состояния можно представить в виде

$$\eta_{\pi^-}\eta_p\eta_n\eta_{\text{орб}} = \eta_{\pi^-}\eta_p\eta_n.$$

Здесь четность орбитального состояния дейтона равна $+1$, так как в основном состоянии дейтон обладает главным образом $l=0$ с небольшой примесью $l=2$. Четность конечного состояния равна

$$\eta_n^2\eta_{\text{орб}} = -\eta_n^2 = -1.$$

Приравнивая эти два выражения друг другу, получаем

$$\eta_{\pi^-}\eta_p\eta_n = -1.$$

Таким образом, можно сказать, что относительная четность системы $pn\pi^-$ отрицательна.

Обычно выбирают по определению

$$\eta_p = +1 \tag{5.70}$$

$$\eta_n = +1. \tag{5.71}$$

Этот выбор естествен с точки зрения изотопической симметрии, так как в этом случае протон и нейтрон рассматриваются как различные зарядовые состояния одной и той же частицы. Затем определяем четность π^--мезона и находим, что она отрицательна. После этого утверждение о том, что четности нейтрального и отрицательного π-мезонов одинаковы, приобретает смысл.

5.5.4. Внутренние четности странных частиц. При изучении странных частиц было отмечено, что они не могут рождаться поодиночке, а рождаются только парами (ассоциированное рождение). Отсюда следует, что не существует абсолютного способа приписать странным частицам внутреннюю четность. Выражаясь более точно, мы имеем закон сохранения странности S (или гиперзаряда, что эквивалентно), которому подчиняются сильные взаимодействия. Таким образом, одна частица, несущая единицу S, не может родиться при столкновении π-мезонов и (или) нуклонов, имеющих нулевую странность. Хотя сохранение странности не является абсолютным в таких слабых распадах, как Σ, $\Lambda \to \pi N$, $\Xi \to \pi\Lambda$ или $K \to \mu\nu$, это не дает возможности независимо определить четности странных частиц, так как слабое взаимодействие не инвариантно относительно пространственной инверсии. Это утверждение иллюстрировалось в § 5.3 для нелептонного процесса — распада гиперона. Нарушение четности в лептонных распадах рассмотрим в § 5.6.

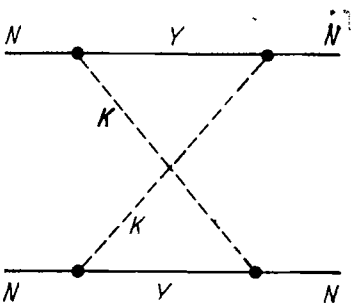


Рис. 5.3. Вклад во взаимодействие нуклона с нуклоном в результате обмена двумя K-мезонами

Реакции со странными частицами определяются частью гамильтониана сильных взаимодействий, отличной от той его части, которая отвечает за взаимодействия нестранных частиц, например π-мезонов и нуклонов. Возникает вопрос, сохраняет ли это новое взаимодействие четность. Косвенные указания на то, что это именно так, следуют из ядерной физики низких энергий. Можно ожидать, что странные частицы вносят свой вклад во взаимодействие между нуклонами в результате процесса Юкавы второго порядка из-за обмена двумя K-мезонами (рис. 5.3).

Таким образом, любое несохранение четности при взаимодействии странных частиц проявляется в нуклон-нуклонном взаимодействии. Высокая степень сохранения четности в ядерной физике низких энергий, как уже отмечалось, показывает, что любая величина, не сохраняющая четность в сильном взаимодействии странных частиц, мала. Таким образом, приходим к предположению о том, что четность в этих процессах сохраняется. Определение четности странных частиц описано в работе [55].

Четность одной странной частицы зависит от определения, так что положим по определению

$$\eta_\Lambda = +1. \tag{5.72}$$

Остальные четности $\eta_{K^\pm}, \eta_{\Sigma^\pm}, \ldots$ определяются из эксперимента. Из экспериментов по рождению и распаду гиперядер найдено [28], что

$$\eta_K = -1. \tag{5.73}$$

5.5.5. Эксперименты на поляризованной мишени по определению четности странных частиц. Относительные четности $KN\Lambda$ и $KN\Sigma$ можно определить, изучая реакции с поляризованной протонной мишенью

$$\pi + p \to K + Y; \quad \bar{K} + p \to \pi + Y$$

(Y означает Λ или Σ). Это определение покоится на соотношении между: асимметрией «лево — право» для углового распределения в реакции с поляризованной мишенью и поляризацией частицы 1/2, рождающейся в той же реакции на неполяризованной мишени. Выведем это соотношение.

Предположим, что π и K имеют спин 0, а Λ и Σ — спин 1/2. Рассмотрим поляризацию, которая возникает в реакции на неполяризованной мишени. Из общих соображений можно показать, что ненулевая продольная поляризация запрещена. Отличное от нуля среднее значение $\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_f \rangle \neq 0$, где $\mathbf{p}_f$ — конечный импульс в с. ц. м., соответствует ненулевому ожиданию псевдоскалярной величины, запрещенной в силу инвариантности относительно пространственной инверсии. С другой стороны, чистая поляризация, перпендикулярная плоскости реакции, соответствует условию

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}_f] \rangle \neq 0,$$

где $\mathbf{p}_i$ — начальный импульс в с. ц. м. Отсюда не следует, однако, что эта величина является истинным скаляром. Для определенности рассмотрим реакцию $\pi^- p \to \Sigma^+ K^-$. Действуя формально, можно считать неполяризованную протонную мишень смесью, в которой в одинаковых количествах представлены состояния с положительной и отрицательной спиральностью. Если амплитуду реакции обозначить, как и в п. 5.4.2, $f_{\mu\lambda}$ (W, θ, φ), то в случае, когда начальный спин направлен вниз, конечное спиновое состояние Σ при той же энергии и том же угле, что и выше, имеет простой вид:

$$\chi_\mu = f_{\mu +}(W, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} f_{++} \\ f_{-+} \end{pmatrix}. \tag{5.74}$$

Конечное состояние поляризации определено средним значением спинового оператора Паули [см. формулу (Б.15) приложения Б]: $\mathbf{P}_+ = (\chi, \boldsymbol{\sigma}\chi)/(\chi, \chi)$. Отсюда с помощью выражения (5.74) получаем

$$(\chi, \sigma_x \chi) = (f^*_{++} f^*_{-+}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{++} \\ f_{-+} \end{pmatrix} = f^*_{++} f_{-+} + f^*_{-+} f_{++}.$$

Следовательно,

$$P_{x'+} = 2\mathrm{Re}\,(f_{++} f^*_{-+})/(|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2).$$

Аналогично находим

$$P_{y'+} = -2\,\mathrm{Im}\,(f_{++} f^*_{-+})/(|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2);$$
$$P_{z'+} = (|f_{++}|^2 - |f_{-+}|^2)/(|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2).$$

Для доли протонов с отрицательной спиральностью конечное спиновое состояние Σ^-

$$\chi = \begin{pmatrix} f_{+-} \\ f_{--} \end{pmatrix}.$$

Поляризация, обозначаемая в данном случае $\mathbf{P}_-$, имеет компоненты:

$$P_{x'-} = 2\mathrm{Re}\,(f^*_{+-}f_{--})/(|f_{+-}|^2 + |f_{--}|^2);$$
$$P_{y'-} = 2\,\mathrm{Im}\,(f^*_{+-}f_{--})/(|f_{+-}|^2 + |f_{--}|^2);$$
$$P_{z'-} = (|f_{+-}|^2 - |f_{--}|^2)/(|f_{+-}|^2 + |f_{--}|^2).$$

Так как мишень представляет собой некогерентную смесь спинов, направленных вверх, и спинов, направленных вниз, то наблюдаемый результат получается равным полусумме $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$. Воспользуемся сохранением четности в реакции

$$f_{+-}(W, \theta, \varphi) = -\eta_p \exp(-i\varphi) f_{-+}(W, \theta, \varphi); \qquad (5.75а)$$
$$f_{--}(W, \theta, \varphi) = \eta_p \exp(-i\varphi) f_{++}(W, \theta, \varphi). \qquad (5.75б)$$

Согласно п. 5.4.2, для четности реакции справедливо соотношение

$$\eta_p = \eta_a\eta_b/\eta_c\eta_d.$$

Заметив, что поперечное сечение реакции на неполяризованной мишени дается формулой

$$\overline{d\sigma/d\Omega} = (1/2)\sum_{\mu\lambda}|f_{\mu\lambda}|^2 = |f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2,$$

найдем для конечной поляризации Σ

$$P_{x'} = 0; \quad (\overline{d\sigma/d\Omega})\,P_{y'} = -2\,\mathrm{Im}\,(f_{++}f^*_{-+}); \quad P_{z'} = 0.$$

Таким образом, конечная поляризация нормальна к плоскости рассеяния (как и ожидалось из общей аргументации), равна

$$P_{y'} = -2\mathrm{Im}\,(f_{++}f^*_{-+})/(|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2) \qquad (5.76)$$

и не зависит от четности реакции η_p.

Теперь рассмотрим угловое распределение в той же самой реакции на поляризованной мишени. Расчеты удобнее всего проделать с помощью матрицы плотности *. Матрицы плотности начального и конечного состояний связаны соотношением

$$\rho^f = f\rho^i f^+,$$

где f — амплитуда рассеяния $f_{\mu\lambda}(W, 0, \varphi)$, представленная в виде матрицы. Матрицы ρ^i и ρ^f можно выразить с помощью

* См. в приложении Б краткое введение в теорию матрицы плотности.

векторов поляризации начальных и конечных частиц, обладающих спином 1/2:

$$\rho^i = (1/2)(1 + \mathbf{P}^i \cdot \boldsymbol{\sigma}); \tag{5.77а}$$

$$\rho^f = (1/2)(1 + \mathbf{P}^f \cdot \boldsymbol{\sigma}). \tag{5.77б}$$

Как отмечается в приложении Б, компоненты вектора $\mathbf{P}^f$ связаны с системой отсчета спиральности конечной Σ-частицы, т. е. с системой координат, образованной из начальной системы с помощью стандартного поворота спиральности $R(\varphi, \theta, 0)$. Подставим (5.77) в (Б.23) и используем условие сохранения четности (5.75). После некоторых алгебраических преобразований отождествим компоненты поляризации конечной частицы $\mathbf{P}^f = (1/2)\,\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{\sigma}\rho^f)$ с дифференциальным поперечным сечением для начального состояния с поляризацией $\mathbf{P}^i$, откуда следует:

$$d\sigma/d\Omega = \{|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2\} \mp 2\eta_p P_y^i \,\mathrm{Im}\,(f_{++}f_{-+}^*);$$

$$(d\sigma/d\Omega)\,P_{x'}^f = \pm\eta_p P_x^i \{|f_{++}|^2 - |f_{-+}|^2\} + 2P_z^i \,\mathrm{Re}\,(f_{++}f_{-+}^*);$$

$$(d\sigma/d\Omega)\,P_{y'}^f = -2\,\mathrm{Im}\,(f_{++}f_{-+}^*) \pm 2\eta_p P_y^i \{|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2\};$$

$$(d\sigma/d\Omega)\,P_{z'}^f = \mp 2\eta_p P_x^i \,\mathrm{Re}\,(f_{++}f_{-+}^*) + P_z^i \{|f_{++}|^2 - |f_{-+}|^2\}.$$

Здесь верхние и нижние знаки, как показано на рис. 5.4, относятся к рассеянию под азимутальными углами $\varphi=0$ и π

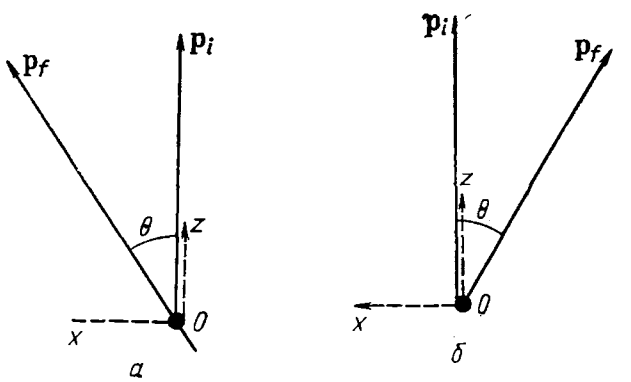


Рис. 5.4. Рассеяние в реакции $\pi^- p \to \Sigma^+ K^-$ влево ($\varphi=0$) (*а*) и вправо ($\varphi=\pi$) (*б*)

соответственно, т. е. к рассеянию влево и вправо. Амплитуды рассеяния с изменением знака спиральности f_{-+} и без изменения знака f_{++} в правой части равенства относятся к значению $\varphi = 0$. Отметим, что в силу принятого ранее соглашения векторы поляризации в этих двух случаях относятся к разным осям.

Эта система уравнений описывает поперечные сечения и векторы поляризации для реакции частиц со спином 0, которая

происходит на мишени из частиц спина 1/2, обладающих произвольной поляризацией. Коэффициенты P_z^i и P_x^i в $(d\sigma/d\Omega) \times \times P_{x'}^i/(\overline{d\sigma/d\Omega})$ называются параметрами A и R в с. ц. м. Вместе с $d\sigma/d\Omega$ они помогают определить комплексные амплитуды f_{++} и f_{-+} с точностью до ненаблюдаемой общей фазы. Наиболее интересный в данном случае результат заключается в том, что на дифференциальное поперечное сечение оказывает влияние именно поперечная компонента P_y^i начального вектора поляризации. Если определить функцию асимметрии «лево — право» процесса формулой

$$\varepsilon_{LR}(W, \theta) = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{\varphi=0} - (d\sigma/d\Omega)_{\varphi=\pi}}{(d\sigma/d\Omega)_{\varphi=0} + (d\sigma/d\Omega)_{\varphi=\pi}},$$

то получим

$$\varepsilon_{LR}(W, \theta) = -2\eta_p \operatorname{Im}(f_{++}f_{-+}^*) P_y^i/(|f_{++}|^2 + |f_{-+}|^2). \qquad (5.78)$$

Из сравнения формул (5.76) и (5.78) видим, что конечная поляризация Σ в реакции на неполяризованной протонной мишени для всех энергий и углов пропорциональна асимметрии «лево — право» в дифференциальном поперечном сечении Σ для той же реакции на поляризованной протонной мишени. Это соотношение впервые выведено Вольфенштейном и Ашкином [187] для нуклон-нуклонного рассеяния.

С. М. Биленький заметил [25], что в общем случае коэффициент пропорциональности содержит четность реакции. Таким образом, мы получаем метод определения произведения внутренних четностей

$$\eta_p = \eta_p\eta_\pi/\eta_\Sigma\eta_K.$$

Этим методом и воспользовались Дитерле и др. [58], определившие асимметрию «лево — право» в рождении Σ^+ на поляризованной протонной мишени

$$\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+.$$

Для улучшения статистики можно провести усреднение (5.78) по всем углам.

Все это было проделано для того, чтобы обнаружить частицу K^+, импульсы которой в лабораторной системе лежат в интервале, соответствующем углам $45° < \theta < 100°$ в с. ц. м. При изменении направления поляризации мишени на обратное геометрия рассеяния этой частицы меняется от левой до правой. Было проведено сравнение измеренного значения $\varepsilon_{\text{экс}}$ с асимметрией, предсказанной уравнением (5.78) и прежними экспериментальными результатами по измерению поляризации в случае неполяризованных мишеней. Значение $\varepsilon_{\text{экс}}$ оказалось лежащим в пределах 1,1 стандартного отклонения от величины, предсказанной уравнением (5.78) для четной η_p, и 2,7 стандартного

отклонения от величины, предсказанной для нечетной η_p. Следовательно, можно сделать вывод, что η_p четно и

$$\eta_K+\eta_{\Sigma+}=-1. \tag{5.79}$$

5.5.6. Распад $\Sigma^0\to\Lambda^0+\gamma$ и относительная четность $\Sigma\Lambda$. В электромагнитном распаде

$$\Sigma^0\to\Lambda^0+\gamma \tag{5.80}$$

четность сохраняется, что позволяет определить четность Σ^0 при условии, что $\eta_\Lambda=+1$. Корреляция между спином γ и спином частицы Λ^0, рожденной при распаде поляризованной частицы Σ^0, чувствительна к знаку η_Σ. Это трудно проверить экспериментально. Чтобы убедиться, что проще всего измерять поляризацию именно Λ^0, сначала рассчитаем ее для Λ^0, получающихся при распаде поляризованной Σ, в том случае, когда γ не наблюдается.

Амплитуда процесса (5.80) в с. ц. м. определяется выражением

$$f_{\lambda\gamma,M}(\theta)=(1/2\pi)\,d^{1/2}_{M,\lambda-\gamma}(\theta)\,A_{\lambda\gamma},$$

где M — проекция спина Σ, а γ и λ — спиральность фотона и Λ-гиперона соответственно. Сохранение четности в этом распаде требует, чтобы

$$A_{\lambda\gamma}=-\eta_\Sigma(\eta_\Lambda\eta_\gamma)^{-1}A_{-\lambda,-\gamma}.$$

Спиновая компонента в конечном состоянии вдоль направления относительного движения (λ—γ) может быть равна лишь $\pm1/2$, а поскольку для фотона $\gamma=\pm1$, то для пары (λ, γ) возможны только значения $(+1/2, +1)$ и $(-1/2, -1)$. Значит, A можно характеризовать одним λ и в дальнейшем заменить значения $\pm1/2$ просто знаком $\pm$. Закон сохранения четности теперь принимает вид $A_+=+\eta_\Sigma A_-$, и распад в данном случае описывается одной амплитудой.

Поляризация Λ^0, рождающихся в распаде Σ^0, спины которых направлены вверх ($M=+1/2$), задается средним значением σ в конечном состоянии:

$$\mathbf{P}_\Lambda=(f,\sigma f)=\sum_\gamma\sum_{\lambda'\lambda}f^*_{\lambda'\gamma,+1/2}(\sigma)_{\lambda'\lambda}f_{\lambda\gamma,+1/2}.$$

Здесь проводилось суммирование по спиральности фотона, которая не наблюдается.

Вспомнив, что $\mathbf{P}_\Lambda$ относится к системе отсчета спиральности конечной частицы Λ, находим, что этот вектор направлен вдоль импульса Λ^0 и равен

$$|P_\Lambda|=-|A_+|^2\cos\theta.$$

Если $M=-1/2$, то $\mathbf{P}_\Lambda$ имеет такое же значение, но противо-

положное направление. Отсюда находим поляризацию Λ при распаде образца из Σ с поляризацией $\mathbf{P}_\Sigma$. Направим ось z системы отсчета покоящейся частицы Σ вдоль вектора $\mathbf{P}$. В этом случае можно считать, что образец состоит из двух частей со спиновыми компонентами $M=\pm 1/2$, доли которых равны $(1/2)(1\pm|\mathbf{P}_\Sigma|)$. Следовательно, поляризацию Λ^0 можно записать в виде

$$\mathbf{P}_\Lambda| = (1/2)(1+|\mathbf{P}_\Sigma|)(-|A_+|^2\cos\theta)+(1/2)(1-|\mathbf{P}_\Sigma|)(+|A_+|^2\cos\theta) = \\ = -|\mathbf{P}_\Sigma||A_+|^2\cos\theta.$$

В данном случае она не зависит от относительной четности, так как в формулу входят только $|A_+|^2$ и $|A_-|^2$.

Вслед за Гатто [83] рассмотрим теперь поляризацию частицы Λ^0, рожденной одновременно с линейно поляризованным фотоном при распаде поляризованной частицы Σ.

Если состояния фотона подчиняются условиям § 4,5, то фотон, летящий вдоль оси z, с вектором поляризации, направленным вдоль оси y,

$$\mathbf{e}_y = i2^{-1/2}(\mathbf{e}_+ \mp \mathbf{e}_-),$$

можно описывать суперпозицией спиральных состояний

$$i2^{-1/2}(\varphi^\nu_{p00,+1} \mp \varphi^\nu_{p00,-1}).$$

Отсюда следует, что

$$F_\lambda = i2^{-1/2}\{f_{\lambda,+1,M}(\theta) \mp f_{\lambda,-1,M}(\theta)\}$$

является амплитудой распада Σ^0 со спиновой компонентой M на частицу Λ^0 со спиральностью λ и фотон, вектор поляризации которого в системе отсчета, связанной со спиральностью этой частицы, направлен вдоль оси y. Это направление противоположно направлению оси y в системе отсчета, связанной с распадом частицы Σ^0, в силу условий, которые накладываются на «вторичную» частицу (см. рис. 4.2). Следовательно, поляризация конечной частицы Λ^0

$$\mathbf{P}^\Lambda = \langle\sigma\rangle = \sum_{\lambda'\lambda} F^*_{\lambda'}\sigma_{\lambda'\lambda}F_\lambda.$$

Считая Σ^0 полностью поляризованной ($M=+1/2$), находим:

$$P^\Lambda_{x'} = -(2)^{-1}\eta_\Sigma|A_+|^2\sin\theta;$$
$$P^\Lambda_{y'} = 0;$$
$$P^\Lambda_{z'} = -(2)^{-1}|A_+|^2\cos\theta.$$

Интерпретируя векторы поляризации Σ^0, Λ^0 и фотона в той же системе координат, можем сказать, что в процессе распада вектор поляризации гиперона поворачивается на 180° вокруг $\mathbf{e}^\nu$, если $\eta_\Sigma = -1$, и на 180° вокруг $[\mathbf{p}_\Lambda \times \mathbf{e}^\nu]$, если $\eta_\Sigma = +1$.

Поляризацию частицы Λ^0 можно определить по угловой асимметрии при ее последующем распаде. Один из способов нахождения поляризации фотона заключается в том, что фотону предоставляют возможность превратиться в пару e^+—e^-, плоскость движения которой будет коррелирована с плоскостью поляризации. Байерс и Буркхардт [35] показали, что если фотон претерпевает внутреннюю конверсию

$$\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma_{\text{вирт}} \to \Lambda^0 + e^+ + e^-, \tag{5.81}$$

то нормаль к плоскости пары Далитца будет коррелирована с ε^ν. Никаких сообщений об успешном измерении η_Σ с помощью подобных экспериментов не было. Однако Фейнберг [68] и Фельдман и Фултон [171] показали, что распределение по эффективной массе пары e^+—e^- в (5.81) зависит от относительной четности Σ и Λ.

Курант и др. [50] и Алфф и др. [6] применили этот метод к частице Σ^0, рожденной в процессе $K^- + p \to \Sigma^0 + \pi^0$ при остановившихся K^-. Их результаты согласуются только с положительной четностью. Таким образом,

$$\eta_{\Sigma^0} = +1. \tag{5.82}$$

Если предположить, что другие зарядовые состояния Σ также имеют положительную четность, то с учетом полученных выше результатов (5.79) получаем $\eta_{K^+} = -1$. Следовательно, и K, и античастица $\bar{K}$ обладают отрицательной четностью.

5.5.7. Четность Ξ. Реакция

$$\Xi^- + p \to \Lambda^0 + \Lambda^0 \tag{5.83}$$

обусловлена сильным взаимодействием с сохранением странности. Присутствие двух частиц Λ^0 означает, что внутренняя четность Ξ определяется относительно четности протона независимо от условия $\eta_{\Lambda^0} = +1$.

Как указал Трейман [172], изучение реакции (5.83), в которой частица Ξ^- захватывается в состоянии покоя, можно использовать для определения четности этой частицы. Никаких сведений о таком способе измерения четности Ξ^- нет. Альтернативным методом определения η_Ξ было бы применение соотношения «поляризация — асимметрия», описанного в п. 5.5.5, к реакции

$$K^- + p \to K^+ + \Xi^-$$

на поляризованных протонах. Как было установлено выше, частицы p, n, Λ и Σ имеют положительную четность (если считать выполненными принятые ранее условия). В таком случае успех схемы симметрии SU (3), требующей, чтобы каскад частиц имел такую же четность, как и другие шесть барионов, в значительной степени свидетельствует о положительной четности частицы Ξ.

5.5.8. Четность Ω^-. По поводу определения четности частицы Ω^- уже были сделаны некоторые предложения [26]. Существование сильной реакции

$$K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$$

показывает, что четность η_Ω определяется относительно четности других частиц без каких-либо дополнительных условий.

Так как при рождении Ω^--частицы конечное состояние должно содержать три или большее число частиц, то определение четности Ω^- потребовало бы очень большой статистики.

§ 5.6. НАРУШЕНИЕ ЧЕТНОСТИ В СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

5.6.1. Загадка τ—θ. Причиной, побудившей провести эксперименты, которые привели к открытию нарушения четности, явилась «загадка τ—θ». До 1957 г. θ- и τ-мезоны опознавали по их модам распада:

$$\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0;$$

$$\tau^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^0.$$

Тщательное изучение показало, что в пределах точности эксперимента оба мезона имеют одинаковые массы и времена жизни.

Напрашивался естественный вывод, что обе частицы являются просто двумя различными модами распада одного и того же мезона. Однако Далитц, проанализировав спин и четность в этих распадах (в предположении, что четность сохраняется), пришел к заключению, что θ и τ должны иметь противоположную четность.

Рассмотрим сначала θ-распад. Спин θ пока неизвестен. Предположим, что он равен J. Тогда, так как оба пиона являются бесспиновыми частицами и имеют отрицательную четность, орбитальный момент количества движения в конечном состоянии равен J, а четность равна $(-1)^2(-1)^J$. Следовательно, спин и четность θ^+ могут принимать следующие значения: 0^+, 1^-, 2^+ и т. д.

τ-Распад сложнее, так как в конечном состоянии существуют три частицы. Полный момент количества движения в конечном состоянии представляет собой векторную сумму относительного орбитального момента количества движения $\mathbf{L}_1$ (например, двух π^+) и орбитального момента количества движения $\mathbf{L}_2$ частицы π^- относительно с. ц. м. двух π^+: $\mathbf{L}_{\text{полн}} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$.

Если предположить, что спин τ равен 0, то и собственное значение $\mathbf{L}_{\text{полн}}$ должно быть тоже равно нулю, что возможно только в том случае, если собственные значения, соответствующие $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$, равны друг другу, т. е. $l_1 = l_2$. Далее орбитальная чет-

ность трехчастичного состояния определяется орбитальными моментами количества движения и имеет вид $(-1)^{l_1+l_2}$. Значит, четность конечного состояния равна $(-1)^3(-1)^{l_1+l_2}$, т. е. отрицательна для нулевого спина частицы τ. Таким образом, если четность сохраняется, а θ и τ имеют нулевой спин, они не могут быть одной и той же частицей. Мы не будем обсуждать возможность существования для τ более высокого спина. Анализ распределения по энергии в 3π-состоянии показал, что наиболее вероятное значение спина и четности для τ есть 0^-. Это и есть загадка: две частицы имеют совершенно одинаковые свойства, за исключением противоположной внутренней четности.

5.6.2. Эксперимент Ву. Ясно, что если при распаде τ и θ четность не сохраняется, то приведенный выше анализ недействителен и никаких проблем не возникает. После нескольких пробных попыток Ли и Янг в своей знаменитой статье [120] провели систематический анализ сохранения четности в процессах с элементарными частицами. Они установили, что в то время как справедливость закона сохранения четности для электромагнитного и сильного взаимодействий доказана с избытком (в области атомной и ядерной физики, см. § 5.2), не было известно никаких экспериментальных данных в пользу сохранения четности в β-распаде или в слабых распадах мезонов и гиперонов.

На основе этого анализа Ву, Амблер, Хайвард, Хоппс и Хадсон [188] убедительно показали, что при β-распаде четность нарушается. Как мы уже видели, закон сохранения четности запрещает не равное нулю среднее значение $\langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\rangle$ (здесь $\mathbf{S}$ — спин, а $\mathbf{p}$ — импульс). Таким образом, проверкой может служить изучение углового распределения электронов при β-распаде поляризованных ядер. Ву и ее коллеги, использовав образец из поляризованных ядер ^{60}Co:

$$^{60}\mathrm{Co} \to {}^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \bar{\nu},$$

обнаружили, что угловое распределение электронов имеет вид

$$W(\theta) = 1 - \alpha P \cos\theta \quad (\alpha > 0{,}7),$$

где θ — угол испускания электрона относительно вектора поляризации $\mathbf{P}$ кобальтового образца. Было установлено также, что $\alpha \approx v/c$, где v — скорость электрона, что согласуется с теорией β-распада. Такие электроны испускаются преимущественно в направлении, противоположном направлению спина.

Так же, как и в случае Λ^0-распада, этот эксперимент можно отразить в зеркале (рис. 5.5). Корреляция между потоком соленоида, поляризующим образец ^{60}Co, и преимущественным направлением испускания электронов после зеркального отражения соответствует ситуации, не реализуемой в природе.

Впоследствии Фраунфельдером и др. [78] было показано, что электроны, испускаемые при β-распаде, имеют продольную поляризацию, т. е. $\langle \sigma\cdot\mathbf{p}_e\rangle \neq 0$, что также свидетельствует о нарушении четности.

5.6.3. Распад пиона и мюона. Объяснение формы слабого взаимодействия найдено благодаря информации, которая собрана по β-распадам ядер. Не будем обсуждать здесь этот аспект слабых взаимодействий, так как хорошие обзоры по этому вопросу можно найти во многих других литературных источниках. Чтобы выяснить особые свойства нейтрино по сравне-

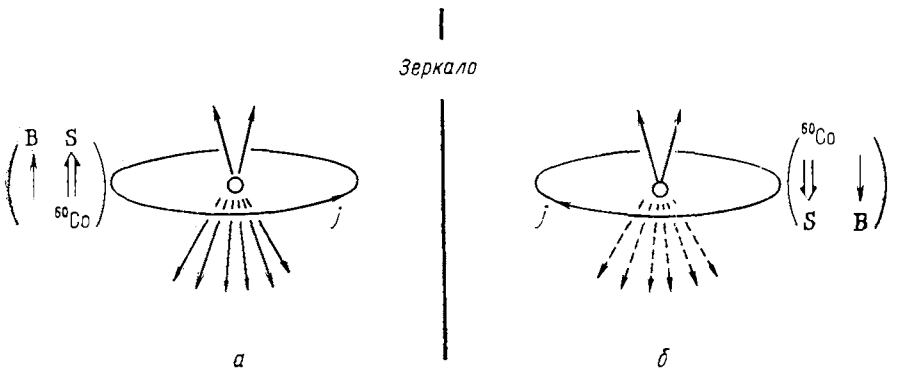


Рис. 5.5. Эксперимент Ву. Наблюдаемое распределение электронов относительно тока (положительного) в соленоиде, приводящего к поляризации (*а*), и нереализуемый воображаемый зеркальный эксперимент (*б*). Стрелками показано направление магнитного поля и ориентация спина ядра

нию с другими частицами и их связь с симметрией слабых распадов лептонов, рассмотрим некоторые элементарные свойства последовательности π—μ—*e*-распадов. Предположим, что масса нейтрино тождественно равна нулю.

Основной модой π^--распада является

$$\pi^- \to \mu^- + \nu. \tag{5.84}$$

Частица μ^-, в свою очередь, распадается на $\mu^- \to e^- + \nu + \nu'$. При этом испускаются два нейтрино, которые могут быть и тождественными друг другу. Далее увидим, что они фактически разные.

Из свойств мюона в мюонных атомах следует, что его спин равен 1/2, и так как пион имеет спин, равный 0, то из уравнения (5.84) следует, что нейтрино имеет полуцелый спин. Фактически μ и ν должны иметь антипараллельные спины, а точнее, одинаковые спиральности. Таким образом, $|\lambda_\nu| = 1/2$ (рис. 5.6).

Для измерения спиральности мюона в случае $\pi^- \to \mu^- + \nu$ были проведены некоторые эксперименты [7, 9, 14]. В последнем из упомянутых экспериментов (пионы распадались на лету) измерялась асимметрия «лево — право» $\varepsilon_{LR}(\theta)$ при перерассеянии мюонов распада на свинцовой мишени. Как мы уже видели, эта асимметрия позволяет измерить поперечную поля-

ризацию мюонов, связанную со спин-орбитальным взаимодействием μ^- в кулоновском поле ядра. Переход с помощью вигнеровского поворота в систему координат покоящегося пиона показывает, что μ^- всегда испускается с положительной спиральностью. Это свидетельствует, конечно, о том, что при распаде четность не сохраняется. В действительности она *максимально нарушена,* так как среднее значение спиральности μ^- не только не равно нулю, но достигает своего максимума $(+1/2)$.

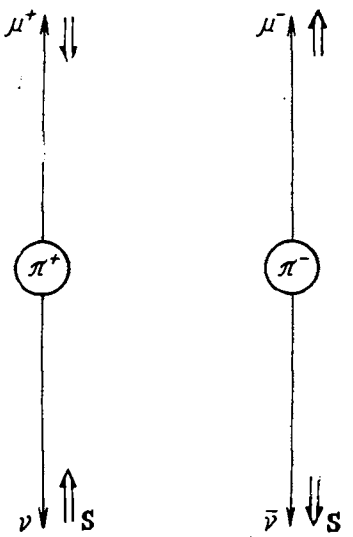


Рис. 5.6. $\pi^{\pm}$-распад.

Этот результат можно также скоррелировать с теоретическими возможностями, о которых шла речь при обсуждении безмассовых частиц: была выдвинута гипотеза о том, что нейтрино, связанное с μ^-, существует только в состоянии с положительной спиральностью, т. е. в качестве правого нейтрино. В § 4.5 и п. 5.4.3 мы уже видели, что эта гипотеза согласуется с лоренц-инвариантностью, но не с законом сохранения четности и дает естественный механизм максимального нарушения четности.

В случае π^+-распада

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu$$

μ^+, очевидно, всегда испускается с *отрицательной* спиральностью, что опять указывает на максимальное нарушение четности, а связанное с μ^+ нейтрино имеет отрицательную спиральность, т. е. является левым нейтрино.

Теперь нейтрино вроде бы имеет два состояния спиральности $\pm 1/2$. Однако возникает вопрос, почему оба эти состояния не связаны в каждом из процессов

$$\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu?$$

Ответ дается законом *сохранения лептонов,* который приписывает отличное от нуля лептонное число только электронам, мюонам и нейтронам, причем это число равно нулю для других частиц, и требует сохранения этого числа во всех взаимодействиях. Частицы μ^- и e^- имеют $L=+1$. Такие процессы, как рождение пары $\gamma \to e^+e^-$, требуют, чтобы *античастицы* μ^+ и e^+ имели $L=-1$. При распаде пионов безмассовая частица, испускаемая вместе с $\mu^+(\mu^-)$ или $\pi^+(\pi^-)$-распаде, должна быть нейтрино (антинейтрино). Таким образом, запишем

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}, \quad \pi^+ \to \mu^+ + \nu.$$

Итак, гипотеза заключается в том, что нейтрино существует только в состоянии отрицательной спиральности, а антиней-

трино — только в состоянии положительной спиральности. Эти предположения подтверждаются изучением $\mu^{\pm}$-распада. Чтобы лептонное число сохранялось, в распаде мюонов должны испускаться нейтрино и антинейтрино вместе:

$$\mu^+ \to e^+ + \nu + \bar{\nu}. \qquad (5.85)$$

Проверим с помощью наблюдений над мюонным распадом некоторые следствия, вытекающие из сделанного предположения о лептонных числах и спиральностях нейтрино.

Измеренный [15] энергетический спектр позитронов имеет резко выраженный максимум в верхней части области (максимальная кинематически разрешенная энергия есть $E_{\text{макс}} = (m_\mu^2 + m_e^2)/2m_\mu$). Конфигурация, соответствующая испусканию позитрона с максимальной энергией, показана на рис. 5.7, где две безмассовые частицы выходят в одном и том же направлении с одинаковыми импульсами. Если бы оба нейтрино были тождественными, эта конфигурация была бы невозможна из-за принципа запрета Паули, и спектр позитронов при $E_{\text{макс}}$ обращался бы в нуль (считаем, что нейтрино имеет спин 1/2 и подчиняется статистике Ферми). Итак, мы пришли к выводу, что эти нейтрино различны и представляют собой нейтрино и антинейтрино с отрицательной и положительной спиральностью соответственно. Более того, это электронное нейтрино ν_e и мюонное антинейтрино $\bar{\nu}_\mu$.

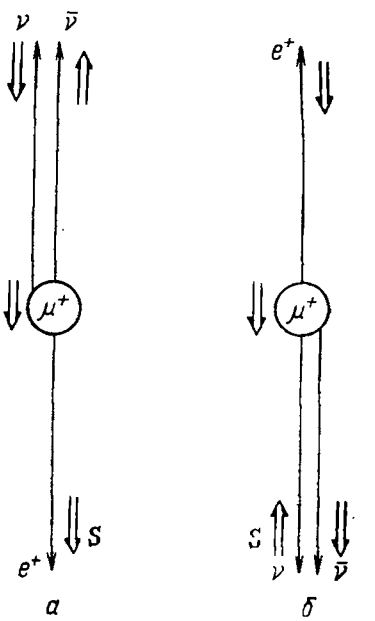


Рис. 5.7. Две конфигурации $\mu^{\pm}$-распада, в которых позитрон обладает максимальной энергией и испускается параллельно (*а*) или антипараллельно (*б*) спину μ-мезона

Как мы уже видели, распад мюонов — естественный источник поляризованных мюонов, которые могут останавливаться в некоторых материалах (например, в углероде), не деполяризуясь. Результирующее угловое распределение позитронов имеет максимум в направлении, противоположном линии полета остановившихся μ^+. Так как $\langle \sigma_\mu \cdot p_e \rangle \neq 0$, то асимметрия подтверждает нарушение четности при распаде мюонов (см. [80, 81]).

Итак, остановившиеся μ^+ имеют отрицательную спиральность, поэтому позитроны испускаются в основном в направлении спина μ^+. Эта благоприятная конфигурация показана на рис. 5.7, *а*. Два нейтрино не уносят момента количества движе-

ния вдоль вектора импульса, поэтому чтобы момент количества движения сохранился, спиральность позитрона должна быть положительной.

Попытаемся объяснить тот факт, что конфигурация *а* предпочтительнее конфигурации *б*, в которой позитрон испускается в направлении, противоположном спину, т. е. отрицательной спиральностью. Электроны с максимальной энергией являются в большой степени релятивистскими частицами. Если бы было можно совершенно пренебречь их массой, то они вели бы себя как нейтрино. Позитрон — это антилептон, поэтому он, подобно антинейтрино, предпочел бы состояние с положительной спиральностью. С учетом сказанного и закона сохранения момента количества движения мы убедились в предпочтительности конфигурации *а*.

Однако позитрон существует в двух состояниях спиральности. Более точные аргументы, использующие лоренц-инвариантное взаимодействие полей электрона и нейтрино, показывают, что амплитуды испускания позитронов в состояниях с положительной и отрицательной спиральностями находятся в отношении

$$[(E+p)/2E]^{1/2} : [(E-p)/2E]^{1/2}.$$

Если $E \gg m_e$, то $E \approx |\mathbf{p}|$, и мы опять приходим к сделанному выше выводу.

Это верно для любого состояния поляризации мюонов. Следовательно, можно предсказать, что позитроны от распада *неполяризованных* мюонов должны обладать положительной спиральностью. Проведенные эксперименты [53, 132] подтверждают это.

Таким образом, в случае отрицательных мюонов имеет место преимущественное испускание электронов от поляризованных μ^--мезонов в направлении, обратном поляризации (μ^--мезоны получаются в результате распада π^--мезона), и спиральность e^- должна быть отрицательной, что и наблюдалось в эксперименте [132].

В заключение этого раздела рассмотрим, как Гольдгабер, Гродзинс и Суньяр [90] прямым способом измерили спиральность нейтрино (см. также [89]).

Предположим, что бесспиновое ядро A испытывает K-захват и превращается в возбужденное состояние ядра B^* со спином, равным единице. Это возбужденное состояние ядра, в свою очередь, распадается в основное состояние B с нулевым спином:

$$e^- + A \to B^* + \nu, \quad B^* \to B + \gamma.$$

Для тех случаев, когда фотон испускается вдоль направления отдачи ядра B^* (противоположного направлению нейтрино), сохранение компоненты момента количества движения вдоль

этого направления приводит к корреляции спиральности фотона λ_γ и спиральности нейтрино λ_ν. Единственный вклад в начальный момент количества движения в этом случае дает спин электрона, поэтому $\pm 1/2 = \lambda_\gamma - \lambda_\nu$. Отсюда следует, что $\lambda_\gamma = 2\lambda_\nu$, так как спиральность $\lambda_\gamma = 0$ запрещена. Таким образом, фотоны, испускаемые вдоль направления отдачи ядра B^*, должны быть на 100% поляризованы. Хотя нейтрино и не наблюдается, желаемые события можно отобрать с помощью следующего остроумного метода. Можно показать, что если последовательность $A \to B^* \to B$ такова, что импульс отдачи ядра B^* (т. е. энергия нейтрино) приближенно равен разности энергий ΔMc^2 между B^* и B, то те фотоны, которые испускаются в направлении, противоположном направлению вылета нейтрино, обладают энергией, в точности равной энергии, необходимой для резонансного перерассеяния на вторичной мишени, состоящей из ядер B:

$$\gamma + B \to B^* \to B + \gamma.$$

Авторы работы [90] использовали ^{152}Eu ($J^P = 0^-$), который после K-захвата превращался в возбужденное состояние ^{152}Sm (1^-) и, в свою очередь, распадался в основное состояние 0^+. При этом энергия нейтрино $E_\nu = 840$ *кэв*, а $\Delta Mc^2 = 960$ *кэв*; таким образом, поляризация не была равна точно 100%. Однако резонансное перерассеяние отчетливо наблюдалось, а спиральность фотона детектировалась по селективному поглощению в намагниченном железе. Было найдено, что фотон, а следовательно, и нейтрино имеют отрицательную спиральность.

5.6.4. Феноменология распадов гиперонов. Проведем феноменологический анализ распада гиперонов. Для определенности рассмотрим распад

$$\Lambda \to p + \pi^-.$$

Этот формализм также применим к распадам Σ:

$$\Sigma^\pm \to n + \pi^\pm; \quad \Sigma^+ \to p + \pi^0.$$

Во всех упомянутых случаях частица со спином 1/2 распадается на частицы со спинами 1/2 и 0. Тот же формализм применим к обеим стадиям каскадного распада:

$$\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^- \to p + \pi^- + \pi^-.$$

При Λ^0-распаде система $p\pi^-$ в конечном состоянии может иметь орбитальный момент количества движения, равный 0 или 1. Если четность сохраняется, то только одна из этих возможностей разрешена. Однако, как мы уже видели, при Λ^0-распаде четность нарушается и процесс распада описывается s- и p-волнами с амплитудами a_s и a_p.

Используем для распадов (см. п. 4.9.1) формализм спиральности. Амплитуда распада находящегося в состоянии покоя гиперона со спином 1/2, сопровождающегося испусканием протона в направлении $\Omega=(\theta, \varphi)$,

$$f_{\lambda M}(\theta, \varphi) = (2\pi)^{-1/2}\mathscr{D}^{1/2}_{M\lambda}\ (\varphi, \theta, 0)\, a_\lambda, \tag{5.86}$$

где M и λ — проекция спина частицы Λ^0 и спиральность протона соответственно. Обозначим амплитуды распада a_+ и a_-. Закон сохранения четности требует, чтобы $a_-=-a_+$. Полная скорость распада

$$\Gamma = |a_+|^2 + |a_-|^2.$$

В своей работе [122] Ли и Янг проанализировали три типа экспериментов. Рассмотрим а) *угловое распределение протонов, получающееся в результате распада покоящихся поляризованных гиперонов*. Оно задается выражением $W_+(\theta, \varphi)d\Omega$, где

$$W_+(\theta, \varphi) = \Gamma^{-1}\sum_\lambda |f_{\lambda,+1/2}(\theta, \varphi)|^2 = (2\pi\Gamma)^{-1}\sum_\lambda |a_\lambda|^2\,[d^{1/2}_{+1/2,\lambda}\ (\theta)]^2 =$$

$$= (2\pi\Gamma)^{-1}\{|a_+|^2\cos^2(\theta/2) + |a_-|^2\sin^2(\theta/2)\}.$$

После преобразования формула приобретает вид

$$W_+(\theta, \varphi) = (4\pi)^{-1}(1 + \alpha\cos\theta),$$

где

$$\alpha = (|a_+|^2 - |a_-|^2)/(|a_+|^2 + |a_-|^2) \tag{5.87}$$

и равна нулю, если четность сохраняется. Возьмем гиперон, спин которого направлен вверх. Если $M=-1/2$, то

$$W_-(\theta, \varphi) = (4\pi)^{-1}(1 - \alpha\cos\theta).$$

Гиперон рождается в результате сильного взаимодействия и может быть поляризован только в направлении, перпендикулярном плоскости рождения. Поэтому в системе отсчета покоящейся частицы Λ^0 ось z направим вдоль нормали к плоскости рождения. Тогда образец, состоящий из Λ^0 с поляризацией P_Λ, соответствует двум образцам с $M=\pm 1/2$, доли которых равны $(1/2)(1\pm P_\Lambda)$ соответственно. Результирующее угловое распределение для такого образца

$$W(\theta, \varphi) = (1/2)(1 + P_\Lambda)W_+ + (1/2)(1 - P_\Lambda)W_- =$$

$$= (4\pi)^{-1}(1 + \alpha P_\Lambda\cos\theta). \tag{5.88}$$

Здесь P_Λ измеряется в системе отсчета покоящегося гиперона.

Такой образец получается экспериментально путем отбора частиц Λ^0, которые рождаются только в определенной плоскости. Однако, поскольку P_Λ при этом не находится независимо, для определения α требуется другой метод.

Теперь рассмотрим б) *продольную поляризацию нуклонов, испускаемых при распаде покоящихся неполяризованных гиперонов.* Среднее значение спиральности нуклонов, вылетающих из образца при распаде неполяризованных Λ^0,

$$P_N = (2\Gamma)^{-1} \sum_M d\Omega \{(1/2) |f_{+1/2, M}|^2 - (1/2) |f_{-1/2, M}|^2\} =$$

$$= (2\Gamma)^{-1} \sum_M \int d\Omega \sum_\lambda \lambda |f_{\lambda M}|^2 = (2\Gamma)^{-1} \sum_M \sum_\lambda \lambda |a_\lambda|^2 (2\pi)^{-1} \times$$

$$\times \int d\Omega |d^{1/2}_{M\lambda}(\theta)|^2 = \Gamma^{-1} \sum_\lambda \lambda |a_\lambda|^2.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\sum_{M'} (d^J_{MM'}(\theta))^2 = \sum_{M'} d^J_{MM'}(-\theta) d^J_{M'M}(\theta) = d^J_{MM}(0) = 1.$$

Таким образом,

$$P_N = (1/2)(|a_+|^2 - |a_-|^2)/(|a_+|^2 + |a_-|^2) = \alpha/2.$$

Итак, параметр асимметрии α одновременно является и степенью продольной поляризации (в единицах $\hbar/2$), а ненулевая спиральность непосредственно свидетельствует о нарушении четности.

Неполяризованный образец можно получать экспериментально, если рассматривать распады всех Λ^0, не принимая в расчет плоскость их рождения. Значение P_N, а следовательно, и α можно определить, если разрешить протонам распада перерассеиваться на ядрах, например на ^{12}C. Соотношение между азимутальной асимметрией и поперечной поляризацией нуклона должно быть известно из независимых экспериментов. Отметим, что в л. с. к. или, точнее, в с. ц. м. протона ^{12}C, продольная поляризация поворачивается в результате кинематического преобразования системы отсчета распада. Угол поворота ω задается выражением (4.133):

$$\operatorname{tg} \omega = u(1 - v^2)^{1/2} \sin\theta/(v + u\cos\theta),$$

где v — скорость нуклона распада в системе отсчета распада Λ^0, а u — скорость Λ^0 в л. с. к. В некоторых экспериментах с помощью этого метода было найдено значение α. Например, изучив 1156 распадов Λ^0, авторы работы [52] нашли, что $\alpha = +0{,}62 \pm 0{,}07$. Согласно результатам, полученным в 1974 г., среднее значение $\alpha = +0{,}647 \pm 0{,}013$ (см. «Данные группы по частицам», 1974 г.).

Таким образом, протон обладает преимущественно положительной спиральностью. Когда α уже известно, для определения P_Λ в процессе рождения можно использовать эксперимент типа а).

Если пренебречь общим фазовым множителем для двухкомплексных параметров распада $a_\pm$, то они будут содержать три действительных числа. Два из них определяются скоростью

распада Г и значением α. Определим третий параметр. Для этого необходимо провести в) *измерение поперечной поляризации нуклонов, испускаемых в заданном направлении при распаде поляризованного гиперона.* Вектор поляризации протона, рожденного при распаде частицы Λ^0 с поляризацией P_Λ, удобнее всего рассчитать с помощью матрицы плотности.

Как и раньше, будем считать, что нормаль рождения совпадает с осью z в системе отсчета Λ^0-распада. Тогда образец Λ^0 будет иметь матрицу плотности

$$\rho^i = (1/2)(1 + P_\Lambda \sigma_z).$$

Матрица плотности конечного протона задается выражением

$$\rho^f_{\lambda'\lambda} = \sum_{MM'} f_{\lambda' M'} \rho^i_{M'M} f^*_{\lambda M}, \tag{5.89}$$

где $f_{\lambda M}(\theta, \varphi)$ определяется формулой (5.86).

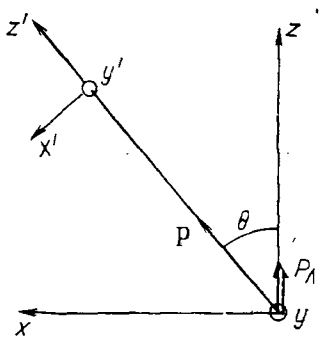


Рис. 5.8. Геометрия Λ^0-распада. x', y', z' — спиральная система распада нуклона

Вектор поляризации протона

$$\mathcal{J}\mathbf{P}_N = \mathrm{Tr}(\rho^f \sigma),$$

где $\mathcal{J}$ — интенсивность распада:

$$\mathcal{J} = \mathrm{Tr}(\rho^f).$$

Здесь мы использовали формализм спиральности, поэтому вектор $\mathbf{P}_N$ относится к системе покоя нуклона (x', y', z').

Зная форму функции $f_{\lambda M}(\theta, \varphi)$ и учитывая, что ρ^i диагональна, можно сделать вывод, что ρ^f не зависит от φ. Если начальное состояние является некогерентной суперпозицией состояний с разными M, т. е. в ρ^i нет недиагональных членов, то в распаде отсутствует азимутальная зависимость. Это всего лишь частный случай общего результата.

Рассмотрим теперь случай $\varphi = 0$ (рис. 5.8). С учетом выражений для f и ρ^i находим

$$4\pi\rho^f = \begin{bmatrix} (1 + P_\Lambda \cos\theta)\,|a_+|^2, & -(1/2) P_\Lambda \sin\theta a_+ a_-^* \\ -(1/2) P_\Lambda \sin\theta a_+^* a_-, & (1 - P_\Lambda \cos\theta)\,|a_-|^2 \end{bmatrix}.$$

Интенсивность распада равна

$$\mathcal{J}(\theta, \varphi) = \mathrm{Tr}(\rho^f) = (4\pi)^{-1}\Gamma(1 + P_\Lambda \alpha \cos\theta),$$

что является подтверждением правильности формулы (5.88).

Компоненты P_N задаются выражениями:

$$\mathcal{J}P_{Nx'} = -(4\pi)^{-1} P_\Lambda \sin\theta\, 2\mathrm{Re}(a_+ a_-^*);$$

$$\mathcal{J}P_{Ny'} = (4\pi)^{-1} P_\Lambda \sin\theta\, 2\mathrm{Im}(a_+ a_-^*);$$

$$\mathcal{J}P_{Nz'} = (4\pi)^{-1}\{(|a_+|^2 - |a_-|^2) + P_\Lambda(|a_+|^2 + |a_-|^2)\cos\theta\}.$$

Определим два других параметра распада

$$\beta = 2\mathrm{Im}(a_+ a_-^*)/(|a_+|^2 + |a_-|^2) \tag{5.90}$$

и

$$\gamma = 2\mathrm{Re}(a_+ a_-^*)/(|a_+|^2 + |a_-|^2). \tag{5.91}$$

В окончательном виде имеем:

$$P_{Nx'} = -\gamma P_\Lambda \sin\theta/(1 + \alpha P_\Lambda \cos\theta);$$

$$P_{Ny'} = \beta P_\Lambda \sin\theta/(1 + \alpha P_\Lambda \cos\theta);$$

$$P_{Nz'} = (\alpha + P_\Lambda \cos\theta)/(1 + \alpha P_\Lambda \cos\theta).$$

Три параметра α, β и γ удовлетворяют соотношению $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Третий независимый параметр (кроме Γ и α) есть фазовый угол φ, определяемый выражениями

$$\beta = (1-\alpha^2)^{1/2}\sin\varphi; \quad \gamma = (1-\alpha^2)^{1/2}\cos\varphi.$$

Измерения β и γ описаны в работе [52]. Среднее значение φ, согласно «Данным группы по частицам», 1974 г., для $\Lambda^0 \to p\pi^-$ равно $\varphi = -(6{,}5 \pm 3{,}5)^\circ$.

Соответствующее значение β мало или равно нулю. Оно является мерой разности фаз между a_+ и a_-. Ниже увидим (см. п. 6.4.2), что из инвариантности относительно обращения времени вытекают следствия для относительной фазы двух амплитуд распада.

Закончим этот раздел замечанием относительно связи между спиральными амплитудами распада $a_\pm$ и амплитудами a_s и a_p s- и p-волн. Соотношения между ними получаются так же, как и для πN-рассеяния (см. § 4.8). Конечное спиновое состояние нуклона надо повернуть с помощью поворота $R(\varphi, \theta, 0)^{-1}$ обратно к оси z квантования спина Λ^0.

Обозначив матричные элементы распада, в которых все спины относятся к общей оси z, $F_{m'm}$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} &(4\pi)^{1/2} F_{++} = a_s + a_p\cos\theta; \quad (4\pi)^{1/2} F_{--} = a_s - a_p\cos\theta; \\ &(4\pi)^{1/2} F_{+-} = a_p \sin\theta \exp(-i\varphi); \quad (4\pi)^{1/2} F_{-+} = a_p \sin\theta \exp(i\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{5.92}$$

где $a_s = 2^{-1/2}(a_+ + a_-)$; $a_p = 2^{-1/2}(a_+ - a_-)$ — амплитуды распада в конечное состояние с определенной четностью (следовательно, с определенным l).

В векторной форме уравнение (5.92) имеет вид

$$\Gamma = (4\pi)^{-1/2}(a_s + a_p \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}),$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ — единичный вектор, имеющий направление импульса нуклона в системе покоя Λ^0. Этот вид уравнения следует из инвариантности относительно вращений.

Параметры распада, выраженные с помощью a_s и a_p, имеют вид:

$$\alpha = 2\mathrm{Re}\,(a_s^* a_p)/(|a_s|^2 + |a_p|^2); \tag{5.93}$$

$$\beta = 2\mathrm{Im}\,(a_s^* a_p)/(|a_s|^2 + |a_p|^2); \tag{5.94}$$

$$\gamma = (|a_s|^2 - |a_p|^2)/(|a_s|^2 + |a_p|^2). \tag{5.95}$$

С помощью того же самого формализма можно проанализировать распады частиц $\Sigma^{\pm}$.

§ 5.7. ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЧЕТНОСТИ

Некоторые эксперименты по проверке закона сохранения четности в атомной и ядерной физике описаны в пп. 5.2.2 и 5.2.3. Здесь же мы обсудим последующие попытки проверки этого закона и подведем итог общему состоянию дел.

5.7.1. Сильные взаимодействия. Рациональность экспериментальной проверки объяснялась в п. 5.1.5. Исследуем псевдоскалярную величину с ненулевым средним значением. Например, $\langle \sigma_a \cdot \mathbf{p}_a \rangle$ — ненулевая продольная поляризация; $\langle [\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b] \cdot \mathbf{p}_c \rangle$ $\langle \sigma_a \cdot \mathbf{p}_b \rangle$ — угловое распределение b относительно спина a.

В случае двухчастичной реакции не существует достаточного числа независимых импульсов для проверки такой величины, как $\langle [\mathbf{p}_a \times \mathbf{p}_b] \cdot \mathbf{p}_c \rangle$, поэтому рассмотрим конечное состояние трех и более частиц или процесс двойного рассеяния.

Так, Пайс [144] показал, что при аннигиляции на лету

$$\bar{p} + p \to m_a + m_b + x$$

закон сохранения четности предсказывает равенство

$$W(\varphi_b) = W(-\varphi_b),$$

где φ_b — азимутальный угол мезона b относительно плоскости мезона a и протона p. Авторы работы [59] исследовали несколько тысяч аннигиляций при 1,2 *Гэв/с*. Полученные ими результаты соответствуют амплитуде нарушения четности, относительная величина которой $|F| = (0{,}1 \pm 1{,}0)\ 10^{-2}$. Так как при этом рождались

пионы и K-мезоны, то мы подвергли проверке части гамильтониана сильного взаимодействия, связанные как со странными, так и с нестранными частицами.

Прямая проверка закона сохранения четности в сильных взаимодействиях возможна в случае двойного рассеяния протонов на неполяризованных ядрах. В этом эксперименте пучок протонов с импульсом $\mathbf{p}_i$ бомбардирует первую мишень. Рассеянные протоны с импульсом $\mathbf{p}'$, падая на вторую мишень, выбивают вторичные рассеянные протоны с импульсом $\mathbf{p}'_f$. Закон сохранения четности требует, чтобы угловое распределение в этом случае не зависело от такой псевдоскалярной величины, как $[\mathbf{p}_i \times \mathbf{p}'] \cdot \mathbf{p}_f$. Это привело бы к асимметрии «вверх — вниз» вторичного рассеяния относительно плоскости первичного рассеяния. Чемберлен и др. [41], не найдя подтверждений этому эффекту, сделали вывод, что $|F|^2 < 10^{-4}$.

Более точная оценка значения вклада, который вносит нарушение четности в нуклон-нуклонное взаимодействие, проведена в работе [109], авторы которой исследовали продольную поляризацию нейтронов, рожденных в результате взаимодействия протонов в бериллии. Как обычно, любую продольную поляризацию надо сначала превратить в поперечную (в этом случае поляризация возникает из-за прецессии спина в магнитном поле), которую можно обнаружить по асимметрии «лево — право» вторичного рассеяния. Они нашли, что $|F|^2 < 4 \cdot 10^{-6}$.

Для проверки сохранения четности в сильных взаимодействиях странных частиц можно исследовать продольную поляризацию гиперонов в процессе $K^+ + p \to \pi^- + \Sigma^+$.

Удивительно, что нарушение четности в распаде Σ позволяет определить состояние ее поляризации. Воспользуемся аргументами п. 5.6.4. В качестве оси квантования выберем не нормаль к плоскости реакции, а направление импульса Σ^+, тогда угловое распределение в с. ц. м. Σ^+ можно представить в виде

$$W(\theta') = (4\pi)^{-1} (1 + \alpha P_\Sigma \cos\theta'),$$

где угол θ' измерен относительно оси квантования. В этом случае P_Σ — продольная поляризация, а $\alpha \neq 0$, так как при распаде четность нарушается. Лейтнер и др. [124] не обнаружили какой-либо заметной асимметрии, что согласуется с сохранением четности в процессе рождения. Лэндер, Пауэлл и Уайт [115] аналогичным образом исследовали реакцию $K^- p \to \pi^0 \Lambda^0$.

Хотя в этих экспериментах получены гораздо менее строгие ограничения на вид сильных взаимодействий с нарушением четности, чем в работах Ю. Г. Абова и В. М. Лобашова [2, 3, 127], тем не менее эти результаты имеют важное значение, так как эксперименты проводились при более высоких энергиях. Могло оказаться, что взаимодействие с нарушением четности проявляет себя только при высоких энергиях. Этого следовало бы ожидать, если бы, например, радиус этого взаимодействия был много меньше радиуса сильного взаимодействия с сохранением

четности. Поэтому так важна проверка закона сохранения четности в широком диапазоне энергий.

Другой способ проверки инвариантности относительно пространственной инверсии включает статические электрические дипольные моменты. В п. 5.2.1 мы видели, что если четность сохраняется, то статический электрический дипольный момент в любом собственном состоянии гамильтониана должен обращаться в нуль. Однако, как указал Л. Д. Ландау [114], если выполняется инвариантность относительно обращения времени, статический электрический дипольный момент должен обращаться в нуль даже в том случае, если четность не сохраняется.

5.7.2. Краткий итог. Подводя итог выполнению закона сохранения четности, рассмотрим последовательно разные классы взаимодействий.

Сильное взаимодействие. Эксперименты по угловой асимметрии [2, 3] и круговой поляризации [127] в ядерных γ-переходах показывают, что любая часть сильного взаимодействия с нарушением четности имеет наибольшую амплитуду ($F_{st} \sim 10^{-7}$).

Электромагнитное взаимодействие. Так как электронная структура атомов почти полностью определяется электромагнитным взаимодействием, отсутствие «запрещенных» оптических переходов в атомах является прямым подтверждением сохранения четности в электромагнитном взаимодействии. Предельное значение амплитуды нарушения четности $|F_{эм}| \sim 10^{-3}$.

Точный предел, ограничивающий амплитуду с нарушением четности в сильном взаимодействии, свидетельствует также о сохранении четности в электромагнитном взаимодействии. Любая часть электромагнитного взаимодействия с нарушением четности могла бы в результате виртуальных процессов привести к неправильным по четности примесям для ядерных уровней порядка постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. Таким образом, указанное выше значение F_{st} приводит к предельному значению $F_{эм} \sim 10^{-4}$.

Слабые взаимодействия. Их можно разделить на: 1) взаимодействия только адронов: распады гиперонов и распады $K \to 2\pi$, $K \to 3\pi$; 2) адрон-лептонные взаимодействия, т. е. классический β-распад и лептонные распады других адронов, например $\pi \to \mu\nu$; 3) чисто лептонное взаимодействие: распад μ-мезона. Во всех этих случаях получено однозначное доказательство нарушения инвариантности относительно пространственной инверсии.

§ 5.8. СЛАБЫЕ НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ И НАРУШЕНИЕ ЧЕТНОСТИ В АТОМАХ
(дополнение к русскому изданию)

После того как в экспериментах по рассеянию нейтрино было установлено существование слабых нейтральных токов, М. А. Бушэ и С. С. Бушэ в 1974 г. отметили, что наличие этих

токов должно проявляться в наблюдаемых эффектах в спектрах атомов. Единые теории слабых и электромагнитных взаимодействий предсказывают существование нарушающего четность электрон-нуклонного взаимодействия, обусловленного обменом нейтральным векторным бозоном Z^0, наряду с электромагнитным взаимодействием, вызванным обменом фотонами. Это взаимодействие приводит к появлению примеси неправильной четности в электронных состояниях атомов и, следовательно, к появлению круговой поляризации у фотонов, испускаемых при переходах (см. § 5.2). М. А. Бушэ и С. С. Бушэ показали, что в тяжелых атомах этот эффект может быть существенно усилен и становится уже наблюдаемым. Хриплович в своем докладе на Тбилисской конференции (1974) обратил внимание на то, что нарушение четности должно приводить к вращению плоскости поляризации (фарадеевское вращение) пучка света, проходящего через пары атомов, например, висмута. Величина ожидаемого эффекта зависит от методов расчета атомной структуры, а также от деталей расчетов по единой модели.

В последних экспериментах (Льюис и др., 1977; Бэард и др., 1977) было установлено, что величина фарадеевского вращения значительно меньше той, которая предсказывалась теорией к моменту написания данной книги. Остается открытым вопрос, требуется ли для устранения этого расхождения усовершенствование калибровочной теории слабых нейтральных токов или оно связано с недостатком наших знаний об электронной структуре тяжелых атомов.

Глава 6
ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Симметрия обращения времени, которой больше подходил бы термин «обращение движения», отличается по своей природе от других симметрий, рассмотренных в книге. Следовательно, и обсуждение некоторых моментов в принципе будет отличаться, например, от обсуждения пространственной инверсии в гл. 5.

Прежде чем рассматривать обращение времени в формуле спиральности и применение этого принципа к элементарным частицам, обратимся к механике Ньютона, а затем перейдем к волновой механике.

§ 6.1. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Рассмотрим движение точечной классической частицы в поле сил, зависящих только от положения частицы (и не зависящих от скорости). Движение подчиняется второму закону Ньютона, поэтому

$$m d^2\mathbf{r}(t)/dt^2 = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \tag{6.1}$$

где m — масса частицы.

Для фиксированного вида движения $\mathbf{r}(t)$ определим обращенное по времени движение $\mathbf{r}^T(t)$ как движение, при котором

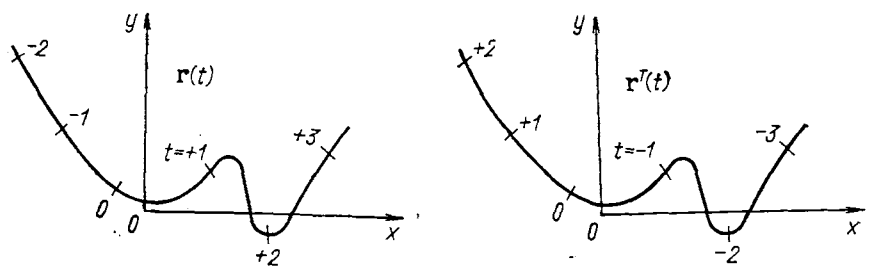


Рис. 6.1. Движение и его обращение во времени

положение частицы в момент времени t такое же, как при ее первоначальном движении в момент времени $-t$ (рис. 6.1), т. е.

$$\mathbf{r}^T(t) = -\mathbf{r}(-t). \tag{6.2}$$

Теперь покажем, что обращенное во времени движение есть возможное движение частицы в заданном поле сил $\mathbf{F}$, т. е. что $\mathbf{r}^T(t)$ удовлетворяет (6.1). Это становится очевидным, если в уравнении (6.1) заменить t на $-t$ и использовать соотношение (6.2). Важным моментом является наличие в (6.1) только второй производной $\mathbf{r}$ по t, а также предположение о том, что действующая сила зависит только от положения частицы и не зависит, например, от ее скорости.

Таким образом, при выполнении этих условий любое возможное движение, обращенное во времени, само по себе является возможным движением. В этом случае говорят, что уравнение движения (6.1) инвариантно относительно обращения во времени. При таком подходе понятие обращения направления течения времени не содержит в себе никакого метафизического смысла. Мы приходим к рассмотрению обращенных во времени процессов (см. п. 6.2.4), а не самого обращения времени. Хотя обращение движения и инвариантность относительно обращения движения являются более точными названиями, мы будем придерживаться общепринятых, хотя и менее точных терминов.

Проследим, как преобразуются различные физические величины при обращении времени. Известно, что ускорение частицы $\mathbf{a}=d^2\mathbf{r}/dt^2$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{a}^T(t) = \mathbf{a}(-t). \tag{6.3}$$

Кроме того, так как скорость частицы включает в себя первую производную по t, то

$$\mathbf{v}^T(t) = -\mathbf{v}(-t). \tag{6.4}$$

В механике все динамические величины можно получить из положения $\mathbf{r}$ и скорости $\mathbf{v}$, так что их свойства при обращении времени вытекают из уравнений (6.1) и (6.4).

Таким образом, импульс $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{p}^T(t) = -\mathbf{p}(-t), \tag{6.5}$$

а момент количества движения подчиняется соотношению

$$\mathbf{L}^T(t) = \mathbf{r}^T \times \mathbf{p}^T = -\mathbf{L}(-t). \tag{6.6}$$

Этот принцип рассмотрения можно распространить и на классический электромагнетизм, описываемый уравнениями Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\mathbf{j};\\ &\nabla\cdot\mathbf{B} = 0; \qquad \nabla\times\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

где ρ и $\mathbf{j}$ — плотность заряда и тока соответственно. Если предположить, что знак электрического заряда не меняется, то при

замене $t \to -t$ знак ρ тоже не изменится, в то время как $\mathbf{j}$ изменит знак, так как включает в себя скорости элементарных зарядов:

$$\rho^T(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, -t), \quad \mathbf{j}^T(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, -t). \tag{6.8}$$

Выполняя подстановку $t \to -t$ в уравнениях Максвелла, видим, что обращенные во времени электрическое и магнитное поля, определяемые выражениями

$$\mathbf{E}^T(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t); \quad \mathbf{B}^T(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{B}(\mathbf{r}, -t), \tag{6.9}$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла с ρ^T и $\mathbf{j}^T$ в качестве источников. Следовательно, они являются физически реализуемыми полями.

Это поведение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при обращении времени можно также вывести, рассматривая движение заряженной частицы в заданном электрическом и магнитном полях. В этом случае уравнение (6.1) заменяется на

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}\right\}, \tag{6.10}$$

где e — заряд частицы. Поскольку в правой части равенства в лоренцеву силу входит скорость, это уравнение остается инвариантным при подстановке $t \to -t$, если одновременно $\mathbf{B}$ заменяется на $-\mathbf{B}$. Таким образом, $\mathbf{r}^T(t)$ — возможное движение в полях $\mathbf{E}$ и $-\mathbf{B}$, если $\mathbf{r}(t)$ — возможное движение в полях $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$.

§ 6.2. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

6.2.1. Бесспиновые частицы. Попытаемся найти обращенную во времени волновую функцию для простой системы, описываемой гамильтонианом

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}),$$

являющимся квантовомеханическим аналогом описанного выше гамильтониана. Развитие состояния во времени описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t). \tag{6.11}$$

Заменяя t на $-t$, получаем уравнение

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, -t) = H\psi(\mathbf{r}, -t), \tag{6.12}$$

которое отличается от исходного знаком. Таким образом, $\psi(\mathbf{r}, -t)$ не является решением уравнения Шредингера (6.11).

Однако, переходя в (6.12) к комплексно сопряженным величинам, получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, -t) = H^* \psi^*(\mathbf{r}, -t). \tag{6.13}$$

Но $H^* = H$, и (6.13) приобретает вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, -t) = H \psi^*(\mathbf{r}, -t). \tag{6.14}$$

Из этого равенства следует, что естественно определить обращенную во времени волновую функцию равенством

$$\psi^T(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, -t). \tag{6.15}$$

Мы уже показали, что при таком определении уравнение Шредингера инвариантно относительно обращения времени. Например, если ψ описывает частицу, которая движется вдоль оси Oz с импульсом k и энергией $\omega = k^2/2m$, то

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(ikz - i\omega t)$$

и обращенное во времени состояние

$$\psi^T(\mathbf{r}, t) = \exp(-ikz - i\omega t),$$

т. е. состояние частицы, движущейся вдоль оси $-Oz$ с той же энергией.

Можно проверить, что это определение обращения времени согласуется с классическим, описываемым как предел с помощью принципа соответствия. Если обозначить нижним индексом момент времени, в который рассматриваются волновые функции, то среднее значение $\mathbf{r}$ в момент времени t в состоянии ψ^T равно среднему значению в момент $-t$ в состоянии ψ:

$$(\psi^T, \mathbf{r}\psi^T)_t = \int \psi^{T*}(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{r}\psi^T(\mathbf{r}, t)\, d^3r = \int \psi(\mathbf{r}, -t)\, \mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r}, -t)\, d^3r.$$

Таким образом,

$$(\psi^T, \mathbf{r}\psi^T)_t = (\psi, \mathbf{r}\psi)_{-t}. \tag{6.16}$$

Это согласуется с равенством (6.2).

Кроме того, среднее значение импульса находят интегрированием по частям:

$$(\psi^T, \mathbf{p}\psi^T)_t = -(\psi, \mathbf{p}\psi)_{-t}. \tag{6.17}$$

Таким образом, среднее значение импульса меняет знак [ср. с (6.5)]. Отсюда находим свойства при обращении времени других наблюдаемых. Так, для орбитального момента количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ имеем

$$(\psi^T, \mathbf{L}\psi^T)_t = -(\psi, \mathbf{L}\psi)_{-t}. \tag{6.18}$$

Наконец, отметим, что это преобразование сохраняет нормировку $(\psi^T, \psi^T)_t = (\psi, \psi)_{-t}$, что весьма существенно. Индекс можно опустить, так как нормировка во времени сохраняется.

6.2.2. Частицы со спином 1/2. В нерелятивистской теории Паули частица со спином 1/2 описывается двухкомпонентной волновой функцией ψ, $\sigma = \pm 1/2$, которую можно записать в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \psi_{+1/2}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{-1/2}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}.$$

Согласно уравнению (6.18), при обращении времени момент количества движения меняет знак. Потребуем, чтобы то же самое происходило со спиновым моментом количества движения. Таким образом, состояние со спином, направленным вверх, становится состоянием со спином, направленным вниз. Это означает, что равенство (6.15) надо обобщить, включив в него преобразование спиновых координат. Положим

$$\psi^T_\sigma(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma'} M_{\sigma\sigma'} \psi^*_{\sigma'}(\mathbf{r}, -t) \tag{6.19}$$

и постараемся определить 2×2-матрицу $M_{\sigma\sigma'}$, потребовав по аналогии с (6.18), чтобы

$$(\psi^T, S\psi^T)_t = -\widetilde{(\psi, S\psi)}_{-t}. \tag{6.20}$$

Для сохранения вероятности матрица $M_{\sigma\sigma'}$ должна быть унитарной; S есть спиновый оператор, компоненты которого задаются матрицами Паули $S = \sigma/2$.

Скобки означают теперь суммирование по спиновым координатам σ. Имеем

$$\begin{aligned}(\psi^T, S\psi^T)_t &= \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3r \psi^{T*}_{\sigma'}(\mathbf{r}, t) S_{\sigma'\sigma} \psi^T_\sigma(\mathbf{r}, t) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma\sigma' \\ \tau\tau'}} \int d^3r M^*_{\sigma'\tau'} \psi_{\tau'}(\mathbf{r}, -t) S_{\sigma'\sigma} M_{\sigma\tau} \psi^*_\tau(\mathbf{r}, -t) = \\ &= \sum_{\tau\tau'} \int d^3r \psi^*_\tau(\mathbf{r}, -t) (\widetilde{M} S M^*)_{\tau\tau'} \psi_{\tau'}(\mathbf{r}, -t),\end{aligned}$$

где волнистая черта сверху означает транспонирование матрицы.

Если выбрать матрицу M такой, чтобы

$$\widetilde{M} S M^* = -S, \tag{6.21}$$

то уравнение (6.20) будет удовлетворено.

Используем эрмитовость $S(\widetilde{S}^* = S)$ и унитарность $M(M^{-1} = \widetilde{M}^*)$, тогда (6.21) можно представить в виде $M^{-1} S M = -S^*$.

Следовательно,

$$M^{-1} \sigma M = -\sigma^*. \tag{6.22}$$

Так как σ_x и σ_z вещественны, а σ_y является чисто мнимой, то условие (6.22) требует, чтобы M коммутировала с σ_y и антиком-

мутировала с σ_x и σ_z. Любая матрица, отличающаяся множителем от σ_y, обладает этими свойствами. Пусть $M=\alpha\sigma_y$, унитарность которой обеспечена, если $|\alpha|=1$. Обычно полагают $\alpha=-i$, так что

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, состояние частицы со спином 1/2, обращенное во времени, есть

$$\psi_\sigma^T(\mathbf{r}, t)=\sum_\tau(-i\sigma_y)_{\sigma\tau}\psi_\tau^*(\mathbf{r}, -t). \tag{6.23}$$

Отметим, что вся аргументация вплоть до соотношения (6.22) справедлива и для частицы с произвольным спином: выбор спина 1/2 происходит при определении M.

6.2.3. Формальные свойства оператора обращения времени. Теперь определим оператор обращения времени, переводящий данное состояние в состояние, обращенное во времени:

$$\psi^T(\mathbf{r}, t)=O_T\psi(\mathbf{r}, t). \tag{6.24}$$

Мы уже показали, что для бесспиновой частицы

$$O_T\psi(\mathbf{r}, t)=\psi^*(\mathbf{r}, -t), \tag{6.25}$$

а для частицы со спином 1/2

$$O_T\psi(\mathbf{r}, t)=-i\sigma_y\psi^*(\mathbf{r}, -t). \tag{6.26}$$

Спиновые индексы здесь опущены.

Все рассмотренные выше операторы обладали тем свойством, что комплексные числа можно было коммутировать с этими операторами, т. е. $A(\alpha\psi)=\alpha(A\psi)$.

Так как в оператор O_T входит комплексное сопряжение, то данный оператор этим свойством не обладает. Поэтому, применяя O_T, необходимо обращать внимание на порядок численных множителей. Действуя оператором O_T на волновую функцию, умноженную на комплексное число, получаем

$$O_T(\alpha\psi)=\alpha^*O_T\psi. \tag{6.27}$$

В более общем виде это часто выражается так:

$$O_T\{c_1\psi_1+c_2\psi_2\}=c_1^*O_T\psi_1+c_2^*O_T\psi_2. \tag{6.28}$$

Обладающий этим свойством оператор называют *антилинейным*.

Рассмотрим теперь свойства O_T. Мы показали, что в случае нулевого спина и спина 1/2 само состояние и состояние, обращенное во времени, удовлетворяет соотношению $(\psi^T, \psi^T)=(\psi, \psi)$, и, следовательно, в терминах O имеем

$$(O_T\psi, O_T\psi)=(\psi, \psi). \tag{6.29}$$

В более общем случае для интеграла перекрытия двух состояний получаем

$$(O_T\chi, O_T\varphi)_t = (\varphi, \chi)_{-t} = (\chi, \varphi)^*_{-t}. \tag{6.30}$$

Оператор, обладающий этими свойствами, называют *антиунитарным.* Уравнение (6.30) можно вывести из уравнения (6.29), если воспользоваться подстановкой $\psi=\varphi+\chi$, $\psi=\varphi+i\chi$ и формулой (6.27).

Обращение во времени A^T оператора A можно определить выражением

$$A^T = O_T A O_T^{-1}. \tag{6.31}$$

Здесь O_T^{-1} — антиунитарный оператор, обладающий свойствами

$$O_T^{-1}O_T = O_T O_T^{-1} = 1.$$

Оператор A^T обладает следующим свойством: среднее значение его по обращенному во времени состоянию $O_T\psi$ в момент времени t равно комплексно сопряженной величине среднего значения A в исходном состоянии ψ в момент времени $-t$. Таким образом,

$$(\psi^T, A^T\psi^T)_t = (\psi, A\psi)^*_{-t}.$$

Если A — эрмитова наблюдаемая, то правая часть уравнения вещественна, так что

$$(\psi^T, A^T\psi^T)_t = (\psi, A\psi)_{-t}. \tag{6.32}$$

Сравнивая эту формулу с уравнениями (6.16)—(6.20), находим, что для обращения времени обычных наблюдаемых имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{r}^T = O_T \mathbf{r} O_T^{-1} = +\mathbf{r};$$

$$\mathbf{P}^T = -\mathbf{P}; \quad \mathbf{L}^T = -\mathbf{L}; \quad \mathbf{S}^T = -\mathbf{S},$$

а для спиральности $\mathcal{H} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}/|\mathbf{P}|$ получаем

$$\mathcal{H}^T = O_T \mathcal{H} O_T^{-1} = +\mathcal{H}. \tag{6.33}$$

Таким образом, применяя дважды оператор обращения времени $t \to -t$, приходим к исходному состоянию. Так, в классическом случае при обращении во времени траектории $\mathbf{r}^T(t)$ возвращаемся к исходной траектории $\mathbf{r}(t)$. Это следует из (6.2).

Аналогично и в случае квантовой механики бесспиновой частицы с помощью уравнения (6.15) получаем, что обращенное во времени состояние $\psi^T(\mathbf{r}, t)$ есть $\psi(\mathbf{r}, t)$. Формально

$$O_T^2\psi(\mathbf{r}, t) = O_T\{\psi^*(\mathbf{r}, -t)\} = \psi(\mathbf{r}, t).$$

Следовательно, для бесспиновых частиц

$$O_T^2 = 1. \tag{6.34}$$

Однако в случае частицы со спином 1/2 матрица $(-i\sigma_y)$ действительна и $(-i\sigma_y)^2=-1$, поэтому имеем

$$O_T^2\psi(\mathbf{r}, t) = O_T\{-i\sigma_y\psi^*(\mathbf{r}, -t)\} = (-i\sigma_y)^*(-i\sigma_y)\psi(\mathbf{r}, t) = -\psi(\mathbf{r}, t).$$

Таким образом, для частиц со спином 1/2

$$O_T^2 = -1. \tag{6.35}$$

Равенства (6.34) и (6.35) абсолютно разные, что обусловлено антилинейностью O_T. Можно попытаться переопределить O_T, умножив его на комплексное число ω, которое для сохранения антиунитарности должно иметь единичный модуль. Однако знак квадрата оператора не меняется:

$$(O_T')^2 = (\omega O_T)^2 = \omega O_T \omega O_T = \omega\omega^* O_T^2 = O_T^2,$$

потому что $|\omega|=1$. Очевидно, существенную роль при этом играет свойство антиунитарности O_T. Обычно *унитарный* оператор четности *выбирается* таким, чтобы $U(P)^2=1$. Однако мы имеем такое же право определить $U(P)'=\omega U(P)$, что приведет к соотношению

$$\{U(P)'\}^2 = \omega^2 U(P)^2 = \omega^2,$$

имеющему тот же физический смысл.

При обращении времени O_2^T должен быть обязательно равен ± 1. Выбор знака зависит от рассматриваемой системы. Далее мы увидим, что для состояния частицы со спином s

$$O(T)^2 = (-1)^{2s}.$$

Кроме того, для состояния N частиц со спином 1/2

$$O_T^2 = (-1)^N.$$

Результаты, приведенные в этом и двух предыдущих разделах, получены Вигнером [181].

6.2.4. Инвариантность относительно обращения времени в процессах рассеяния и реакциях. Докажем, что если система инвариантна относительно обращения времени, то оператор рассеяния удовлетворяет соотношению

$$O_T S O_T^{-1} = S^+.$$

Отсюда можно сделать вывод, что если существует инвариантность относительно обращения времени, то амплитуда перехода из состояния a в состояние b равна амплитуде перехода из обращенного во времени состояния b в обращенное во времени состояние a, т. е. начальное и конечное состояния должны поменяться местами, и каждое из них должно быть обращено во времени.

В § 6.3 обсудим свойства обращения во времени состояний спиральности. Результаты, полученные при обсуждении, вместе с только что сделанным утверждением позволят сделать выводы

из инвариантности относительно обращения времени для амплитуд перехода в формализме спиральности.

Для систем с локализованным взаимодействием был введен оператор рассеяния S, связывающий состояния до и после взаимодействия. Для того чтобы понять смысл операции обращения времени, необходимо более подробно рассмотреть временную зависимость этих состояний.

Для определенности рассмотрим двухчастичное рассеяние в с. ц. м., пренебрегая спином. Развитие состояния системы во времени описывается вектором состояния $\Phi(t)$. Он удовлетворяет некоторому уравнению движения, которое не будем записывать в явном виде.

Условия эксперимента по рассеянию предполагают, что $\Phi(t)$ имеет простую асимптотическую форму при $t \to \pm\infty$.

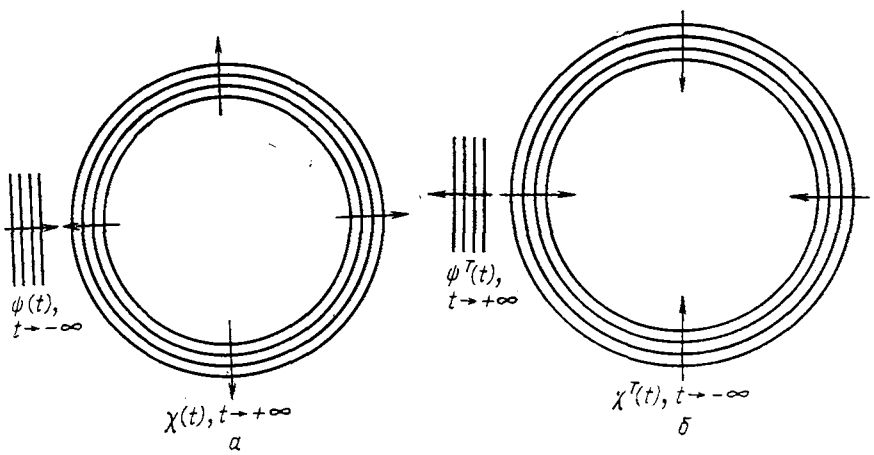


Рис. 6.2. Асимптотический вид состояния $\Phi(t)$ (*а*) и $\Phi^T(t)$ (*б*). Состояние $\Phi(t)$ соответствует условиям эксперимента по рассеянию

В случае $t \to -\infty$ $\Phi(t)$ стремится к плоской волне, а в случае $t \to +\infty$ — к расходящейся сферической волне (рис. 6.2):

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t) &\to \psi(t), \quad t \to -\infty; \\ \Phi(t) &\to \chi(t), \quad t \to +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Здесь χ и ψ — решения уравнений движения без учета взаимодействия. Их можно представить в виде суперпозиции состояний плоских волн $\varphi_{\mathbf{k}}$ с определенными импульсом и энергией, имеющих простую зависимость от времени. Таким образом,

$$\psi(t) = \int d^3k \widetilde{\psi}(\mathbf{k})\, \varphi_{\mathbf{k}} \exp[-i\omega(\mathbf{k})\, t], \tag{6.37а}$$

где $\widetilde{\psi}(\mathbf{k})$ — волновая функция в импульсном пространстве. Аналогично

$$\chi(t) = \int d^3k \widetilde{\chi}(\mathbf{k})\, \varphi_{\mathbf{k}} \exp[-i\omega(\mathbf{k})\, t]. \tag{6.37б}$$

Оператор рассеяния выражает линейную связь между состояниями системы ψ и χ при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$. Эту связь можно выразить и в терминах волновых функций в импульсном пространстве:

$$\tilde{\chi}(\mathbf{k}) = \int d^3k' S(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tilde{\psi}(\mathbf{k}'). \tag{6.38}$$

Так как практически ψ приближенно является плоской волной, то $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ имеет пик типа δ-функции, например при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$. Таким образом, амплитуда $\tilde{\chi}(\mathbf{k})$ пребывания системы в состоянии $\varphi_{\mathbf{k}}$ при $t \to +\infty$ как раз равна $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$. Иногда проще обойтись без интегрирования по импульсам и представить (6.38) в виде

$$\tilde{\chi} = S\tilde{\psi}. \tag{6.39}$$

Предположим, что рассматриваемая система инвариантна относительно обращения времени. Тогда

$$\Phi^T(t) = O_T \Phi(t) \Phi^*(-t)$$

является возможным состоянием системы, хотя его и трудно реализовать практически (см. рис. 6.2, *а*). При замене $t \to -t$ из (6.36) получаем асимптотический вид $\Phi^T(t)$:

$$\Phi^T(t) \to \chi^*(-t) = \chi^T, \quad t \to -\infty;$$
$$\Phi^T(t) \to \psi^*(-t) = \psi^T, \quad t \to +\infty.$$

Применяя операцию обращения времени к импульсному разложению (6.37а), получаем

$$\psi^*(-t) = \int d^3k \tilde{\psi}^*(\mathbf{k}) \varphi_{-\mathbf{k}} \exp[-i\omega(\mathbf{k}) t] =$$
$$= \int d^3k \tilde{\psi}^*(-\mathbf{k}) \varphi_{\mathbf{k}} \exp[-i\omega(\mathbf{k}) t],$$

так как обращение по времени состояния с определенным импульсом меняет знак $\mathbf{k}$. Вторая часть равенства получается из первой путем замены переменной.

Получен закон преобразования для волновой функции в импульсном пространстве при обращении времени

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) \to O_T \tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \tilde{\psi}^*(-\mathbf{k}).$$

Таким образом,

$$O_T \psi(t) = \int d^3k \{O_T \tilde{\psi}(\mathbf{k})\} \varphi_{\mathbf{k}} \exp[-i\omega(\mathbf{k}) t];$$
$$O_T \chi(t) = \int d^3k \exp[-i\omega(\mathbf{k}) t] \varphi_{\mathbf{k}} O_T \tilde{\chi}(\mathbf{k}).$$

Так как $O_T \Phi(t)$ есть допустимое состояние системы с асимптотической зависимостью $O_T \chi$ и $O_T \psi$ при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$ соответственно, то рассуждая так же, как и при выводе выражения (6.39), теперь получим

$$O_T \tilde{\psi} = S O_T \tilde{\chi}. \tag{6.40}$$

Искомое соотношение для оператора рассеяния можно получить из (6.39) и (6.40). Умножим (6.40) на S^+ и, используя свойство унитарности $S^+S=1$, получим

$$S^+O_T\tilde{\psi}=O_T\tilde{\chi}. \tag{6.41}$$

Кроме того, применяя оператор O_T к (6.39), получаем

$$O_T\tilde{\chi}=O_TS\tilde{\psi}=O_TSO_T^{-1}O_T\tilde{\psi}. \tag{6.42}$$

Сравнивая (6.41) и (6.42), делаем вывод, что условие инвариантности относительно обращения времени для оператора S имеет вид

$$O_TSO_T^{-1}=S^+, \tag{6.43}$$

Для оператора перехода, определяемого выражением $S=1+i\mathcal{T}$, оно означает, что

$$O_T\mathcal{T}O_T^{-1}=\mathcal{T}^+. \tag{6.44}$$

Предположим, что уравнения (6.43) и (6.44) являются общими выражениями инвариантности относительно обращения времени в случае наличия спинов, а также для распадов и реакций, в процессе которых могут измениться число и вид частиц.

Чтобы вывести условие для элементов $\mathcal{T}$-матрицы, преобразуем уравнение (6.44) и возьмем матричный элемент φ_n—φ_m. Тогда

$$(\varphi_n, O_T^{-1}\mathcal{T}^+O_T\varphi_m)=(\varphi_n, \mathcal{T}\varphi_m).$$

С помощью выражения (6.30) получаем

$$(\varphi_n, O_T^{-1}\mathcal{T}^+O_T\varphi_m)=(O_T\varphi_n, O_TO_T^{-1}\mathcal{T}^+O_T\varphi_m)^*=$$
$$=(\varphi_n^T, \mathcal{T}^+\varphi_m^T)^*=(\varphi_m^T, \mathcal{T}\varphi_n^T).$$

Следовательно, инвариантность обращения времени приводит к соотношению

$$(\varphi_m^T, \mathcal{T}\varphi_n^T)=(\varphi_n, \mathcal{T}\varphi_m), \tag{6.45}$$

которое означает, что амплитуда перехода из состояния m в состояние n равна амплитуде перехода из обращенного во времени состояния n в обращенное во времени состояние m. Это соотношение называют иногда *теоремой взаимности*. Ее следствия мы обсудим в § 6.4, после того как выведем версию этого уравнения в формализме спиральности.

За исключением случая упругого рассеяния, когда начальное и конечное состояния содержат одни и те же частицы, уравнение (6.45) связывает амплитуды двух разных процессов: $m\to n$ и $n\to m$. Однако существует такое приближение, при котором выражение (6.44) приводит к ограничению на амплитуду одного процесса.

6.2.5. Обращение времени в процессах первого порядка. Под процессом первого порядка мы подразумеваем такой процесс, когда квадраты элементов $\mathcal{T}$-матрицы пренебрежимо малы по сравнению с самими матричными элементами:

$$|\mathcal{T}|^2 \ll \mathcal{T}. \tag{6.46}$$

Это имеет следующий смысл. Из условия унитарности S-матрицы $S^+S=1$ следует, что $\mathcal{T}$-матрица, определенная соотношением $S=1+i\mathcal{T}$, удовлетворяет условию $\mathcal{T}-\mathcal{T}^+=i\mathcal{T}\mathcal{T}^+$. Таким образом, если взаимодействие слабо, правой частью равенства можно пренебречь и $\mathcal{T}$ является эрмитовым оператором. Следовательно,

$$(\varphi_m^T, \mathcal{T}\varphi_n^T) = (\varphi_n^T, \mathcal{T}\varphi_m^T)^*,$$

так что (6.45) приобретает вид

$$(\varphi_n^T, \mathcal{T}\varphi_m^T)^* = (\varphi_n, \mathcal{T}\varphi_m). \tag{6.47}$$

В квантовой электродинамике или теории слабых взаимодействий $\mathcal{T}$-оператор любого частного процесса или его матричный элемент достаточно точно задается первыми несколькими членами разложения в ряд по безразмерной константе связи $\mathcal{T}=g\mathcal{T}_1+g^2\mathcal{T}_2+\ldots$. В квантовой электродинамике роль g играет постоянная тонкой структуры.

Сформулированное здесь приближение первого порядка заключается в том, что при разложении берется только первый его член. Это приближение обычно называют борновским. При слабом взаимодействии первым членом разложения является сам гамильтониан взаимодействия $\mathcal{T}_1 = H_{сл}$.

Так как действие O_T на φ_m и φ_n заключается в преобразовании импульсов и спинов в соответствии с правилом $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\mathbf{S} \to -\mathbf{S}$, то из (6.47) следует, что

$$W(-\mathbf{p}, -\mathbf{S}) = W(\mathbf{p}, \mathbf{S}), \tag{6.48}$$

где, согласно обозначениям п. 5.1.5,

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{S}) = |(\varphi_n, \mathcal{T}\varphi_m)|^2.$$

Это равенство справедливо, пока справедливо приближение (6.46). Однако условие (6.46) очень хорошо выполняется для слабых взаимодействий, так что (6.48) можно использовать для проверки инвариантности относительно обращения времени для таких процессов. Например, при $K_{\mu 3}$-распаде

$$K^\pm \to \pi^0 + \mu^\pm + \nu(\bar{\nu}). \tag{6.49}$$

Соотношение (6.48) запрещает существование ненулевого среднего значения поперечной компоненты спина μ-мезона

$$\langle \mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{p}_\pi \times \mathbf{p}_\mu \rangle.$$

Этот распад является чисто слабым процессом, так что равенство (6.48) разрешено. Он используется для проверки T-инвариантности в слабых взаимодействиях (см. § 6.7).

Продукты распада, происходящего в результате слабого взаимодействия, например $\Sigma^- \to n + \pi^-$, могут взаимодействовать сильно. В таком случае приближение (6.46), которое относится к $\mathcal{T}$-матрице полного взаимодействия, не пригодно.

Однако при таких слабых распадах с сильным взаимодействием в конечном состоянии T-инвариантность приводит через теорему о конечном состоянии к дополнительным ограничениям (см. § 6.4 и [69]).

§ 6.3. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ И СПИРАЛЬНОСТЬ

Выведем свойства преобразования при обращении времени состояний спиральности и покажем, какие следствия вытекают из инвариантности относительно обращения времени для двухчастичного рассеяния и реакций.

Этот метод в общих чертах аналогичен тому, который применялся в гл. 5 для пространственной инверсии, но отличается от него в деталях из-за антиунитарности обращения времени.

Результаты расчета представлены соотношениями (6.63) и (6.66) и соотношениями (6.67) и (6.68) для двухчастичных состояний. Читатель, использующий в основном только результаты, может найти их в последующих подразделах.

6.3.1. Преобразование обращения времени одночастичных и двухчастичных состояний. Операция обращения времени T в четырехмерных обозначениях имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Матрицу в правой части равенства обозначим T. Имеем

$$T^2 = 1. \tag{6.50}$$

Так как матрица T оставляет пространственные координаты неизменными, она коммутирует с пространственными трансляциями и поворотами. В этом разделе обозначим трансляции D_{a_μ}, а не T_{a_μ}!

$$x_0 \to x'_0 = x_0 + a_0,$$

D_{a_μ}:

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a},$$

отсюда

$$TD_{(a_0, \mathbf{a})} = D_{(-a_0, \mathbf{a})}T. \tag{6.51}$$

Для произвольного поворота R

$$TR = RT. \tag{6.52}$$

С другой стороны, T не коммутирует с лоренц-преобразованиями. Для буста, направленного вдоль оси Oz,

$$T\mathscr{L}_v = \mathscr{L}_{-v}T, \tag{6.53}$$

В общем случае после преобразования обращения времени для буста со скоростью $\mathbf{v}$ получаем буст со скоростью $(-\mathbf{v})$:

$$TL(\mathbf{v})T^{-1} = L(-\mathbf{v}).$$

Таковы пространственно-временные свойства T. Для квантовомеханической системы, инвариантной относительно обращения времени, существует соответствующий оператор обращения времени, действующий на состояния системы. Предположив, что этот оператор $U(t)$ унитарен, и следуя ходу рассуждений п. 5.4.1 для унитарного оператора $U(P)$, мы должны получить в качестве следствия соотношения

$$P_0U(T) = -U(T)P_0 \qquad \text{(не справедливо)},$$
$$\mathbf{P}U(T) = +U(T)\mathbf{P} \qquad \text{(не справедливо)},$$

соответствующие соотношениям (5.40) и (5.41), где $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}$ — оператор энергии и импульса соответственно.

Из этих уравнений следует, что, если $\varphi_{E,\mathbf{p}}$ — собственное состояние энергии — импульса бесспиновой частицы, энергия состояния $U(T)\varphi_{E,\mathbf{p}}$ равна $(-E)$, а импульс $\mathbf{p}$. Таким образом, $U(T)$ не является приемлемым оператором обращения времени, так как переводит состояния с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией. Эту трудность можно разрешить с помощью элементарного рассуждения, приведенного выше: квантовомеханический оператор, соответствующий T, должен быть антиунитарным. Поэтому обозначим его не O_T, а $O(T)$.

Следовательно, операторные уравнения, соответствующие (6.51)—(6.53), принимают вид

$$U(-a_0, \mathbf{a})O(T) = O(T)U(a_0, \mathbf{a}); \tag{6.54}$$
$$U(R)O(T) = O(T)U(R); \tag{6.55}$$
$$U(\mathscr{L}_{-v})O(T) = O(T)U(\mathscr{L}_v). \tag{6.56}$$

Рассмотрим инфинитезимальное пространственно-временное смещение. Комбинируя (4.28) и (4.49), получаем

$$U(a_0, \mathbf{a}) = 1 + i(a_0P_0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{P}).$$

Подставляя это выражение в (6.54), приравняем коэффициенты при a_0 и $\mathbf{a}$. С учетом свойств антилинейности (6.28) имеем

$$\mathbf{P}_0O(T) = O(T)\mathbf{P}_0; \tag{6.57}$$
$$\mathbf{P}O(T) = -O(T)\mathbf{P}. \tag{6.58}$$

Используя прежние аргументы, находим, что $O(T)\varphi_{E,\mathbf{p}}$ есть состояние с энергией E и импульсом $(-\mathbf{p})$. Таким образом, $O(T)$ — оператор обращения времени.

Рассмотрим теперь массивную частицу со спином s. Начнем с набора $(2s+1)$-состояний покоя $\varphi_{0\lambda}$. Из (6.58) следует, что состояния $O(T)\varphi_{0,\lambda}$ также являются состояниями покоя. Однако они не преобразуются стандартным образом при поворотах. А именно, мы имеем

$$U(R)\,O(T)\,\varphi_{0\lambda} = O(T)\,U(R)\,\varphi_{0\lambda} =$$
$$= O(T)\left\{\sum_{\lambda'}\varphi_{0\lambda'}\mathcal{D}^{s}_{\lambda'\lambda}(R)\right\} = \sum_{\lambda'}\mathcal{D}^{s*}_{\lambda'\lambda}(R)\,O(T)\,\varphi_{0\lambda},$$

где вместо $\mathcal{D}$ в правой части равенства стоит $\mathcal{D}^*$.

Теперь из (3.70) и (3.84в) находим

$$\mathcal{D}^{s*}_{\lambda'\lambda}(R) = (-1)^{\lambda'-\lambda}\mathcal{D}^{s}_{-\lambda',-\lambda}(R).$$

Отсюда можно показать, что

$$U(R)\,(-1)^{-s-\lambda}O(T)\,\varphi_{0,-\lambda} = \sum_{\lambda'}\mathcal{D}^{s}_{\lambda'\lambda}(R)\,(-1)^{-s-\lambda'}O(T)\,\varphi_{0,-\lambda'},$$

т. е. набор $(2s+1)$-состояний покоя

$$(-1)^{-s-\lambda}O(T)\,\varphi_{0,-\lambda}$$

при поворотах преобразуется тоже стандартным путем. Отсюда можно сделать вывод, что $O(T)\varphi_{0,-\lambda}$ и $(-1)^{s+\lambda}\varphi_{0\lambda}$ пропорциональны. Подставляя $-\lambda$ вместо λ, получаем

$$O(T\ \varphi_{0\lambda} = \eta_T(-1)^{s-\lambda}\varphi_{0,-\lambda}. \tag{6.59}$$

Здесь η_T — фазовый множитель, не зависящий от λ.

В отличие от случая пространственной инверсии, мы не можем интерпретировать η_T как собственное значение, так как векторы состояния в обеих частях этого уравнения не одинаковы. Даже тот факт, что квадрат T есть тождественное преобразование (6.50), не приводит к ограничению η_T, так как, согласно (6.27),

$$O(T)^2\varphi_{0\lambda} = O(T)\{\eta_T(-1)^{s-\lambda}\varphi_{0,-\lambda}\} = \eta_T^*(-1)^{s-\lambda}\eta_T(-1)^{s+\lambda}\varphi_{0\lambda}.$$

Таким образом, так как $\eta_T = 1$,

$$O(T)^2\varphi_{0\lambda} = (-1)^{2s}\varphi_{0\lambda}. \tag{6.60}$$

Это обобщает результаты, установленные ранее для случаев $s=0$ и $s=1/2$. Фактически η_T можно изменить, умножив все состояния на общий фазовый множитель. Поэтому выберем

$$\eta_T = 1. \tag{6.61}$$

Как и в случае оператора четности, формулу (6.59) можно упростить, если заметить, что состояние $\varphi_{0,-\lambda}$ получается из

состояния $\varphi_{0\lambda}$ с помощью соответствующего поворота, например, на угол π относительно оси Oy:

$$U(Y_\pi)\varphi_{0\lambda} = (-1)^{s-\lambda}\varphi_{0,-\lambda}.$$

Выражение (6.59) при $\eta_T = 1$ принимает вид

$$O(T)\varphi_{0\lambda} = U(Y_\pi)\varphi_{0\lambda}. \tag{6.62}$$

Рассмотрим оператор $O(T)$, действующий на состояние, импульс которого направлен вдоль оси Oz. Используя (6.56), находим

$$O(T)\varphi_{p00\lambda} = O(T)U(\mathscr{L}_p)\varphi_{000\lambda} = U(\mathscr{L}_{-p})O(T)\varphi_{000\lambda} =$$
$$= U(\mathscr{L}_{-p})U(Y_\pi)\varphi_{000\lambda} = U(Y_\pi)U(\mathscr{L}_p)\varphi_{000\lambda}.$$

Таким образом,

$$O(T)\varphi_{p00\lambda} = U(Y_\pi)\varphi_{p00\lambda}. \tag{6.63}$$

Этого и следовало ожидать. Так как поворот не меняет спиральности, уравнение (6.63) утверждает, что T-преобразование состояния с определенными импульсом и спиральностью приводит к состоянию с противоположным импульсом, но с той же спиральностью (следовательно, с противоположной проекцией спина).

Аналогичный расчет можно проделать для состояния $\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda}$, определяемого уравнением (4.66). T-преобразование состояния, импульс которого направлен по отрицательной оси Oz, а спиральность равна λ, будет иметь импульс, направленный по оси $+Oz$, и противоположный спин (а следовательно, такую же спиральность). Это состояние также можно связать с исходным с помощью поворота Y_π. Подробные расчеты используют только для проверки фазовых множителей. Имеем

$$O(T)\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda} = [\exp(-i\pi s)]^* U(Z_\pi)U(Y_\pi)O(T)\varphi_{p00\lambda} =$$
$$= \exp(i\pi s)U(Z_\pi)U(Y_\pi)U(Y_\pi)\varphi_{p00\lambda} = \exp[i\pi(s-\lambda)](-1)^{2s}\varphi_{p00\lambda}, \tag{6.64}$$

так как Y_π^2 есть поворот на 2π, которому соответствует умножение на ± 1 для целого или полуцелого спина. Уравнение (4.66) можно обратить:

$$\varphi_{p00\lambda} = (-1)^{s-\lambda}(-1)^{2s}U(Y_\pi)\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda}. \tag{6.65}$$

Комбинируя последние два уравнения, получаем

$$O(T)\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda} = U(Y_\pi)\widehat{\varphi}_{p\pi 0\lambda}. \tag{6.66}$$

Формула (6.66) аналогична (6.63).

Чтобы определить свойства двухчастичного собственного состояния момента количества движения при обращении времени, объединим полученные ранее результаты с интегральным представлением (4.89).

Если не учитывать множители, двухчастичное состояние плоской волны в с. ц. м. имеет вид

$$\Phi_{W00\lambda_a\lambda_b} \sim \varphi_{p00\lambda_a}\hat{\varphi}_{p\pi0\lambda_b}.$$

Тогда из соотношений (6.63) и (6.66) получаем

$$O(T)\Phi_{W00\lambda_a\lambda_b} = U(Y_\pi)\Phi_{W00\lambda_a\lambda_b}. \tag{6.67}$$

Применяя $O(T)$ к обеим частям равенства (4.89) и используя (6.67), находим

$$O(T)\Psi_{WJM\lambda_a\lambda_b} = (-1)^{J-M}\Psi_{WJ,-M\lambda_a\lambda_b} \tag{6.68}$$

($J-M$ — целое число). За подробностями читатель может обратиться к работе Жакова и Вика [108].

6.3.2. Следствия из инвариантности относительно обращения времени для реакций. Перейдем к выводу следствий из инвариантности относительно обращения времени для элементов S-матрицы в базисе момента количества движения [см. (4.93)] и с помощью разложения по парциальным волнам (4.95) получим следствия для амплитуды плоской волны

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta, \varphi).$$

Выше было показано, что если система инвариантна относительно обращения времени, то операторы S и $\mathcal{T}$ удовлетворяют условиям (6.34а) и (6.44а)

$$O(T)SO(T)^{-1} = S^+;$$
$$O(T)\mathcal{T}O(T)^{-1} = \mathcal{T}^+.$$

Преобразуем последнее уравнение к виду

$$\mathcal{T} = O(T)^{-1}\mathcal{T}^+O(T)$$

и возьмем матричный элемент между собственными состояниями момента количества движения:

$$\left(\Psi^{cd}_{JM\lambda_c\lambda_d}, \mathcal{T}\Psi^{ab}_{JM\lambda_a\lambda_b}\right) = \left(\Psi^{cd}_{JM\lambda_c\lambda_d}, O(T)^{-1}\mathcal{T}^+O(T)\Psi^{ab}_{JM\lambda_a\lambda_b}\right) =$$

$$= \left(O(T)\Psi^{cd}_{JM\lambda_c\lambda_d}, \mathcal{T}^+O(T)\Psi^{ab}_{JM\lambda_a\lambda_b}\right)^*, \text{ согласно (6.30),}$$

или

$$= (-1)^{2J-2M}\left(\Psi^{cd}_{J,-M\lambda_c\lambda_d}, \mathcal{T}^+\Psi^{ab}_{J,-M\lambda_a\lambda_b}\right)^*, \text{ согласно (6.68),}$$

$$= \left(\Psi^{ab}_{J,-M\lambda_a\lambda_b}, \mathcal{T}\Psi^{cd}_{J,-M\lambda_c\lambda_d}\right).$$

Поскольку матричный элемент не зависит от M, а $(J-M)$ равно целому числу, то

$$\mathcal{T}^J_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b} = \mathcal{T}^J_{\lambda_a\lambda_b,\lambda_c\lambda_d}. \tag{6.69}$$

Важно отметить, что два разных процесса взаимосвязаны, если, конечно, мы не имеем дело с упругим рассеянием $a=b$, $c=d$.

Подставляя этот результат в уравнение (4.95) для случая $\varphi=0$ и используя (3.84б), получаем

$$p_{ab} f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta) = (-1)^{\lambda_a-\lambda_b-\lambda_c+\lambda_d}\, p_{cd} f_{\lambda_a\lambda_b,\lambda_c\lambda_d}(\theta). \qquad (6.70)$$

Это и есть следствие из инвариантности относительно обращения времени для амплитуды двухчастичной реакции.

Для πN-упругого рассеяния получаем

$$f_{\mu\lambda}(\theta) = (-1)^{\lambda-\mu} f_{\lambda\mu}(\theta). \qquad (6.71)$$

Сравнивая это выражение с (4.99), находим, что для рассматриваемого случая инвариантность относительно обращения времени не приводит к дополнительным ограничениям по сравнению с ограничениями, вытекающими из инвариантности относительно отражений в пространстве. Это остается справедливым и для более общего случая реакции частиц со спином 1/2 и нулевым спином, четность которых $\eta_a\eta_b/\eta_c\eta_d$ равна $+1$, так что это уравнение справедливо для рассеяния или реакции любых $1/2^+$-барионов с 0^--мезонами.

Для реакций в первом порядке инвариантность относительно обращения времени требует, чтобы выполнялось (6.47а)

$$(O(T)\varphi_n,\ \mathcal{T} O(T)\varphi_m)^* = (\varphi_n,\ \mathcal{T}\varphi_m).$$

Легко видеть, что спиральная амплитуда перехода в этом случае чисто вещественна. В качестве начального и конечного состояний в (6.47) возьмем собственные состояния момента количества движения в с. ц. м. Так как действие оператора $O(T)$ состоит в изменении знака M на обратный, в то время как элемент $\mathcal{T}$-матрицы от M не зависит (из-за инвариантности относительно вращений), то

$$\mathcal{T}^{J*}_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b} = \mathcal{T}^{J}_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b} = \text{действительное число}.$$

Из уравнения (4.95) при $\varphi=0$ следует, что

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta) = \text{действительное число}.$$

Таким образом, относительные фазы амплитуд состояний разной спиральности фиксированы и равны 0 или π.

Этот последний результат свидетельствует о том, что в тех реакциях, для которых приближение первого порядка является хорошим, конечные частицы не могут быть поляризованными. Это видно из явной формулы (5.84) для поляризации частиц в реакции частиц со спином 1/2 и нулевым спином, рожденных на неполяризованной мишени. Этот же результат получается, если заметить, что поляризация соответствует ненулевому значению $\langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}_{ab}\times\mathbf{p}_{cd}\rangle$, которое должно обращаться в нуль, если выполняются равенства (6.47) и (6.48).

Аналогично можно показать, что для процесса распада в первом порядке соотношение (6.47), примененное к (4.115), дает уравнение, из которого следует вывод:

$$a_{\lambda_a\lambda_b} = \text{действительное число}.$$

Можно сказать, что (6.47) фиксирует относительные фазы амплитуд распада для разных состояний спиральности, делая их равными нулю или π.

6.3.3. Инвариантность относительно обращения времени и безмассовые частицы. Законы преобразования состояний частиц в их окончательном виде (см. п. 6.3.1), а следовательно, и результаты последнего раздела справедливы и для безмассовых частиц.

При обсуждении четности в п. 5.4.3 пришлось начать со стандартного состояния $\varphi_{p00\lambda}$, для которого импульс направлен вдоль оси $+0z$.

Рассмотрим состояние $O(T)\varphi_{p00\lambda}$. Так как при обращении времени импульс изменяет знак, тогда как спиральность инвариантна [см. (6.33) и (6.58)], то оказывается, что импульс состояния $O(T)\varphi_{p00\lambda}$ направлен вдоль оси $-0z$, а спиральность равна λ. Таким образом, положим опять

$$O(T)\varphi_{p00\lambda} = \eta_T U(Y_\pi)\varphi_{p00\lambda},$$

где η_T — фазовый множитель. Применяя лоренцев буст к обеим частям равенства, можно показать, что η_T не зависит от p. Как и раньше, можно так выбрать фазы, что η_T будет равен $+1$. В этом случае уравнение будет таким же, как и (6.63), потому что дальнейший ход рассмотрения безмассовых частиц аналогичен рассуждениям, приведенным в п. 6.3.1. Однако имеется и существенное различие между этим анализом и анализом по четности, которое заключается в том, что из требования применимости оператора обращения времени к состояниям безмассовых частиц уже не следует необходимость существования обоих состояний спиральности ($\pm\lambda$) частицы. Таким образом, можно построить взаимодействия, инвариантные относительно обращения времени, в которые входят безмассовые частицы, существующие только в одном состоянии спиральности. Таким является случай слабых взаимодействий с участием нейтрино.

§ 6.4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ

6.4.1. Теорема взаимности для поперечных сечений. Соотношение (6.70) между спиральными амплитудами перехода для реакции $a+b\to c+d$ и обратной реакции $c+d\to a+b$ можно использовать для вывода соотношений между дифференциальными поперечными сечениями двух процессов.

Дифференциальное сечение первого процесса, происходящего между состояниями с определенной спиральностью, задается выражением (4.96)

$$d\sigma_{ab}/d\Omega = \left| f^{ab}_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(W,\theta)\right|^2.$$

Здесь σ и f характеризуются начальным состоянием процесса.

Аналогичное выражение справедливо и для обратной реакции. Следовательно, из (6.70) получаем соотношение

$$p_{ab}^2 d\sigma_{ab}/d\Omega = p_{cd}^2 d\sigma_{cd}/d\Omega. \tag{6.72}$$

Сечения в этом равенстве должны быть взяты в с. ц. м. при одних и тех же значениях энергии и угла.

Если первоначально пучок и мишень не поляризованы, а детекторы не чувствительны к конечным спинам, «неполяризованное» сечение дается формулой (4.97а) и связано с выражением для обратного процесса соотношением

$$(2s_a+1)(2s_b+1)\,p_{ab}^2\,\overline{\frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega}} = (2s_c+1)(2s_d+1)\,p_{cd}^2\,\overline{\frac{d\sigma_{cd}}{d\Omega}}. \tag{6.73}$$

Оно называется *принципом детального равновесия*. Параметр p_{ab}^2/p_{cd}^2 измеряет отношение фазового пространства двух реакций. Наблюдая реакцию $p+p \rightleftarrows \pi^+ + d$, Маршак [135] и Честон [43] сделали вывод, что спин заряженного π-мезона можно определить, применяя к этой реакции принципы детального равновесия, так как спины протона и дейтона известны. Реакции $pp \to \pi d$ и $\pi d \to pp$ изучены в работах [40, 62]. Авторы последней работы показали, что два множества дифференциальных сечений согласуются с (6.73) только для $S_\pi = 0$.

6.4.2. Теорема о конечном состоянии. В таком процессе, как $\Sigma^- \to n + \pi^-$, когда первичное взаимодействие, приводящее к распаду, слабо, но конечные частицы могут взаимодействовать сильно, амплитуда распада в случае инвариантности относительно обращения времени связана с амплитудой упругого рассеяния для конечного состояния частиц. Это соотношение называется теоремой о конечном состоянии [4а, 73, 177]. Докажем ее для только что рассмотренного частного случая. Таким образом, продолжим рассмотрение распадов гиперонов, начатое в п. 5.6.4, и используем введенные там обозначения.

Множество частиц, образующих начальное или конечное состояние реакции, иногда называют каналом. В рассматриваемом случае есть два канала: Σ^- и $n\pi^-$. Канал $n\pi^-$ можно разделить на два подканала с определенным моментом количества движения J и спиральностью λ. Так как в результате распада гиперонов может получаться только состояние $n\pi^-$ с $J = 1/2$, мы имеем три канала:

$$\Sigma,\ (\pi N)_{J=1/2,\,\lambda=+1/2},\ (\pi N)_{J=1/2,\,\lambda=-1/2}.$$

Соответствующие матричные элементы оператора S запишем в виде

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}, \tag{6.74}$$

где строка (столбец) относится к конечному (начальному) каналу.

Соотношение между S и $\mathcal{T}$ теперь принимает вид

$$S_{nm} = \delta_{nm} + i\mathcal{T}_{nm}.$$

Таким образом, для $n \neq m$ $S_{nm} = i\mathcal{T}_{nm}$ в точности является амплитудой перехода $m \to n$.

Рассмотрим приближение нулевого порядка, когда слабое взаимодействие, приводящее к распаду, «выключено», так что переходы $1 \to 2$ и $1 \to 3$ запрещены и $S_{21} = S_{31} = 0$. Аналогично $S_{12} = S_{13} = 0$. Однако переход $2 \leftrightarrow 3$ еще может иметь место. Он соответствует πN-рассеянию с изменением знака спиральности. Удобнее, если в приближении нулевого порядка S-матрица диагональна. В данном случае это будет иметь место, если вместо спиральных состояний πN использовать собственные состояния четности $\Psi^{(\pm)}_{JM}$ из выражения (4.106).

Таким образом, за каналы 2 и 3 примем состояния $\Psi^{(-)}_{1/2M}$ и $\Psi^{(+)}_{1/2M}$, соответствующие $L=0$ и $L=1$, и четности $\eta=-1$ и $\eta=+1$ соответственно.

Так как при сильном взаимодействии J и η сохраняются, то в нулевом порядке имеем

$$S^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2i\delta_s) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2i\delta_s) \end{bmatrix}, \tag{6.75}$$

где прежние обозначения $\delta_{1/2-}$ и $\delta_{1/2+}$ [см. (4.108)] заменены на δ_s и δ_p. Положим $S^{(0)}_{11} = 1$, так как в этом приближении частица Σ^- стабильна. Следовательно, если вначале амплитуда равна единице, то она останется такой и в конце. Заметим, что в любом случае S матрицу в силу ее унитарности при соответствующем выборе характеристик канала всегда можно привести к диагональному виду.

В случае «включенного» взаимодействия распада можно использовать приближение первого порядка

$$S = S^{(0)} + i\Sigma, \tag{6.76}$$

в котором матричные элементы Σ достаточно малы, чтобы можно было пренебречь их квадратами.

Амплитуды Σ_{21} и Σ_{31}, соответствующие переходам $1 \to 2$ и $1 \to 3$, те же самые, что и амплитуды a_s и a_p (см. п. 5.6.4).

Теперь используем унитарность и инвариантность относительно обращения времени. Унитарность требует, чтобы $SS^+ = S^+S = 1$, т. е.

$$1 = (S^{(0)} + i\Sigma)(S^{(0)+} - iS^+) \approx S^{(0)}S^{(0)+} + i(\Sigma S^{(0)+} - S^{(0)}\Sigma^+),$$

где мы пренебрегли членом $\Sigma\Sigma^+$.

Матрица $S^{(0)}$ в (6.75) заведомо унитарна: $S^{(0)}S^{(0)+}=1$, так что $\Sigma S^{(0)+}=S^{(0)}\Sigma^{+}$. Так как $S^{(0)}$ диагональна,

$$\Sigma_{nm}\exp(-2i\delta_m)=\exp(2i\delta_n)\Sigma^{*}_{mn}. \tag{6.77}$$

Инвариантность относительно обращения времени для оператора S приводит к соотношению, аналогичному (6.45):

$$(\varphi^{T}_{m}, S\varphi^{T}_{n})=(\varphi_n, S_m).$$

Так как в базисе с определенным моментом количества движения элементы S-матрицы не зависят от M, а оператор $O(T)$ просто заменяет M на $(-M)$ [см. (6.68)], инвариантность относительно обращения времени выражается равенством $S_{mn}=S_{nm}$. Следовательно,

$$\Sigma_{mn}=\Sigma_{nm}. \tag{6.78}$$

(Здесь опущен множитель $(-1)^{2J-2M}$, который всегда равен $+1$.) Комбинируя (6.77) с (6.78) и преобразуя, находим

$$\Sigma_{nm}\exp[-i(\delta_n+\delta_m)]=\Sigma^{*}_{nm}\exp[i(\delta_n+\delta_m)],$$

откуда следует, что эта величина действительна. Следовательно, можно записать

$$\Sigma_{nm}=R_{nm}\exp[i(\sigma_n+\delta_m)],$$

где R_{nm} — действительная матрица.

Это и есть *теорема о конечном состоянии.* Она связывает фазы амплитуд распада с фазами каналов упругого рассеяния 2→2 и 3→3. В этом случае

$$a_s=\Sigma_{21}=\pm|a_s|\exp(i\delta_s); \tag{6.79а}$$

$$a_p=\Sigma_{31}=\pm|a_p|\exp(i\delta_p) \tag{6.79б}$$

(R_{nm} не обязательно положительно).

Выше мы считали, что энергия фиксирована, поэтому фазовые сдвиги в правой части равенств (6.79) следует брать при полной энергии πN в с. ц. м., соответствующей Σ^{-}-массе.

Отметим, что если бы не было взаимодействия в конечном состоянии, то из T-инвариантности в приближении первого порядка следовало бы, что величины a_s и a_p действительны относительно друг друга (см. конец п. 6.3.2).

В § 5.6 показано, что поперечная поляризация P_y, распадающегося нуклона зависит от параметра β, определяемого выражением (5.94), и поэтому пропорциональна $2\mathrm{Im}(a^{*}_{s}a_p)$.

Таким образом, при отсутствии взаимодействия в конечном состоянии β было бы равно нулю.

Дополняя теорему о конечном состоянии соотношениями (5.94) и (6.79), получаем $\beta/\alpha=\mathrm{tg}(\delta_p-\delta_s)$. Это соотношение справедливо, пока можно не учитывать слабое взаимодействие второго

порядка; его можно использовать и для проверки инвариантности относительно обращения времени.

Однако для распада $\Sigma^- \to \pi^- n$ α мало, а отношение β/α точно не известно. Поэтому вместо него рассмотрим Λ^0-распад.

В Σ^--распаде имеем одно конечное зарядовое состояние, а для Λ^0-распада имеем

$$\Lambda^0 \to p + \pi^- \ (66\%); \quad \Lambda^0 \to n + \pi^0 \ (33\%).$$

Каждое из этих двух зарядовых состояний может существовать в виде s- или p-волн, образующих пять каналов (вместе с Σ). Рассеяние $p\pi^- \to n\pi^0$, сопровождающееся обменом зарядами, связывает различные каналы. Таким образом, для диагонализации S-матрицы в этом случае необходимо работать с собственными состояниями полного изоспина I.

Изоспин I может принимать значения 1/2 и 3/2. Обнаружено, что парциальная ширина Λ^0-распада в состоянии с $I=3/2$ почти равна нулю (это видно из отношения вероятностей двух мод), что соответствует правилу $|\Delta I| = 1/2$ для нелептонных слабых распадов. Таким образом, подходящими для данного случая фазовыми сдвигами в системе πN являются те, которые соответствуют $I = 1/2$ и, конечно, $J = 1/2$, т. е. фазовые сдвиги P_{11} и S_{11} в стандартных обозначениях $L_{2I,2J}$. Из фазового анализа πN-рассеяния [151] следует, что $\delta(P_{11}) - \delta(S_{11}) = +7{,}8^\circ$ при энергии в с. ц. м., соответствующей массе Λ^0. Используя средние значения параметров Λ^0-распада (см. «Данные группы по частицам», 1973 г.), получаем $\operatorname{arctg}(\beta/\alpha) = 7{,}5^\circ$ с погрешностью порядка 3°. Таким образом, соответствие экспериментальных данных теореме о конечном состоянии удовлетворительное.

Другое важное применение теоремы о конечном состоянии — связь фазовых сдвигов при фоторождении π-мезона

$$\gamma + N \to \pi + N$$

с фазовыми сдвигами в πN-рассеянии (здесь не рассмотрено).

6.4.3. Статические электрические дипольные моменты. Покажем сначала, что инвариантность относительно обращения времени приводит к тому, что в стационарном состоянии электрический дипольный момент исчезает. Система может представлять собой атом, ядро или, как в рассматриваемом случае, элементарную частицу.

Пусть φ_m обозначает состояние покоящейся частицы с проекцией спина на ось Oz, равной m (т. е. φ_{Om} в обозначениях § 6.3). Если спин частицы равен нулю, то стационарное состояние в системе покоя, конечно, инвариантно относительно вращений и все статические электрические и магнитные моменты частицы должны быть равны нулю. Рассмотрим среднее значение оператора дипольного момента $\mathbf{d}$. Согласно определению, $\mathbf{d} = \sum_i e\mathbf{r}^i$. Так как оператор координат не меняется при обращении времени, то $\mathbf{d}$ удовлетворяет соотношению

$$O(T)\,\mathbf{d}\,O(T)^{-1} = +\mathbf{d}.$$

Рассмотрим среднее значение этого уравнения относительно состояния $O(T)\varphi_m$. Используя (6.30) и свойство эрмитовости оператора $\mathbf{d}$, получаем

$$(O(T)\varphi_m,\ \mathbf{d}O(T)\varphi_m) = (O(T)\varphi_m,\ O(T)\,\mathbf{d}O(T)^{-1}O(T)\varphi_m) =$$
$$= (O(T)\varphi_m,\ O(T)\mathbf{d}\varphi_m) = (\varphi_m,\ \mathbf{d}\varphi_m)^* = -(\varphi_m,\ \mathbf{d}\varphi_m).$$

Согласно (6.62), действие оператора $O(T)$ на состояние покоя аналогично повороту на π, так что

$$(O(T)\varphi_m,\ \mathbf{d}O(T)\varphi_m) = (U(Y_\pi)\varphi_m,\ \mathbf{d}U(Y_\pi)\varphi_m) =$$
$$= (\varphi_m,\ U(Y_\pi)^{-1}\,\mathbf{d}U(Y_\pi)\varphi_m) = -(\varphi_m,\ \mathbf{d}\varphi_m),$$

потому что поворот на π меняет знак векторного оператора $\mathbf{d}$. Таким образом,

$$(\varphi_m,\ \mathbf{d}\varphi_m) = -(\varphi_m,\ \mathbf{d}\varphi_m) = 0.$$

В экспериментах, выполненных за последние годы, получены чрезвычайно низкие пределы электрического дипольного момента (ЭДМ) нейтрона. В работе [162] описан эксперимент, выполненный в 1950 г. на аппаратуре с резонансным пучком. Нейтроны, вылетающие из реактора, поляризуются при отражении от намагниченного железа. Они проходят через область однородного параллельного электрического и магнитного полей. Переходы между двумя спиновыми состояниями можно индуцировать, применив радиочастотное магнитное поле с ларморовской частотой прецессии, соответствующей энергии взаимодействия магнитного момента. Если при этом имеется также взаимодействие электрического момента, то частота, при которой индуцируется наибольшее число переходов, будет сдвинута. Таким образом, обнаружено, что ЭДМ $d = -(0{,}1 \pm 2{,}4)\cdot 10^{-20}\ e\cdot см$, где e — заряд электрона. Результаты, полученные экспериментальной группой Гарвардского университета и др., приведены в табл. 6.1. В работе [91] даны обзор техники эксперимента и ссылки на последующие публикации.

Таблица 6.1

Результаты измерений электрического дипольного момента нейтрона

Дипольный момент, $e\cdot см$	Литература
$(0{,}1\pm 2{,}4)\cdot 10^{-20}$	[162]
$(-2\pm 3)\cdot 10^{-22}$	[139]
$(2{,}4\pm 3{,}9)\cdot 10^{-22}$	[161]
$5\cdot 10^{-23}$	[11]
$(3{,}2\pm 7{,}5)\cdot 10^{-23}$	[61]

Возникает вопрос: каково значение этих малых пределов ЭДМ нейтрона? Так как существование ненулевого ЭДМ требует нарушения и P, и T, то теоретическая интерпретация его не ясна. Отметим, что в этом случае следует ожидать существования нуклон-нуклонного взаимодействия, сохраняющего странность и нарушающего четность, сила которого определяется константой связи Ферми G_F. Если предположить, что существует такое электромагнитное взаимодействие, нарушающее T-инвариантность, с матричными элементами порядка f, то ЭДМ может быть порядка [70]

$d \sim f G_F M_p/\hbar^2$. Это следует по крайней мере из соображений размерности, так как $G_F = 10^{-49}$ *эрг·см*$^3 = 10^{-5}\ M_p c^2\ (\hbar/M_p c)^3$, так что $d \sim 10^{-5} \hbar f/M_p c \sim 10^{-19}\ F$ *e·см*, где M_p — масса протона, а $F = f/e$ — отношение электромагнитных матричных элементов, нарушающих и сохраняющих T. Полученные к настоящему времени экспериментальные значения показывают, что $F < 10^{-3}$.

Аналогичный метод был использован для измерения ЭДМ нейтральных атомов со спином 1/2 с целью определения предельных значений ЭДМ электрона. Штейн и др. [164] использовали цезий и нашли, что $d(\mathrm{Cs}) < 3 \cdot 10^{-21}$ *e·см*. Если этот результат интерпретировать в терминах ЭДМ электрона, то, согласно расчетам [158], $d(e^-) < 2{,}5 \cdot 10^{-23}$ *e·см*. Авторы работы [148] для атома ксенона нашли, что $d(e^-) = (0{,}7 \pm 2{,}2)\ 10^{-24}$ *e·см*.

Интерпретация опять не ясна, так как для ненулевого значения ЭДМ требуется нарушение как P, как и T.

Полученные результаты подтверждают, что электродинамическое взаимодействие электрона сохраняет P и T. Этот вывод следует также из точного соответствия квантовоэлектродинамических расчетов с такими экспериментами, как лэмбовский сдвиг.

§ 6.5. ПРОВЕРКА ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ В СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Как и в случае четности, эксперименты по проверке инвариантности разделим соответственно той части гамильтониана взаимодействия частиц, инвариантность которой проверяется. В этом разделе рассмотрены сильные взаимодействия.

6.5.1. Проверка с помощью детального равновесия. Согласно принципу детального равновесия (6.73), если T-инвариантность справедлива, то дифференциальные сечения реакции и обратной к ней реакции относятся друг к другу как множители фазового объема. Чтобы представить результаты в количественном виде, предположим, что имеется небольшая примесь амплитуды с T-нарушением. Запишем элемент $\mathcal{T}$-матрицы в виде $\mathcal{T} = \mathcal{T}_e + \mathcal{T}_0$, где $\mathcal{T}_e$ удовлетворяет соотношению (6.44а), а $\mathcal{T}_0$ удовлетворяет $O(T)\,\mathcal{T}_0\,O(T)^{-1} = -\mathcal{T}_0^*$.

Легко видеть, что отклонения от формулы (6.73) происходят из-за наличия члена $2\mathrm{Re}(\mathcal{T}_e \mathcal{T}_0^*)$ в выражении для $|\mathcal{T}|^2$.

Таким образом, если L и R соответственно левая и правая части равенства (6.73), то

$$\frac{L-R}{L+R} \approx \frac{2\mathrm{Re}\,(\mathcal{T}_e \mathcal{T}_0^*)}{|\mathcal{T}_e|^2 + |\mathcal{T}_0|^2} \approx \left| \frac{\mathcal{T}_0}{\mathcal{T}_e} \right|.$$

Так можно оценить примесь амплитуды с T-нарушением.

Абсолютные дифференциальные сечения трудно измерить точно, поэтому можно провести относительное сравнение. В этом случае отношение дифференциальных сечений реакции $ab \to cd$ при двух разных энергиях или углах сравнивается с отношением двух

соответствующих сечений реакции $cd \to ab$. Для того чтобы эффект неинвариантности относительно обращения времени можно было обнаружить, он должен быть функцией энергии или угла.

Торнтон и др. [170], проведя абсолютное сравнение разных дифференциальных сечений процесса

$$d + {}^{16}\mathrm{O} \rightleftarrows {}^{14}\mathrm{N} + \alpha,$$

показали, что детальное равновесие соблюдается с точностью $\pm 0{,}5\%$. Разультаты других проверок представлены в табл. 6.2. В указанных в ней статьях можно найти критерий выбора реакции, чувствительной к T-нарушению.

Таблица 6.2

Результаты проверки детального равновесия

Вид проверки	Реакция $ab \to cd$	Энергия реакции, *Мэв*	$\lvert \mathcal{T}_0/\mathcal{T}_e \rvert$, %	Литература
Абсолютная	$p + t \to d + d$	6,3	2	[153]
Относительная по углу	$\alpha + {}^{12}\mathrm{C} \to d + {}^{14}\mathrm{N}$	40	3	[31]
То же	$\alpha + {}^{24}\mathrm{Mg} \to p + {}^{25}\mathrm{Mg}$	10	0,4	[30]
Относительная по энергии	$\alpha + {}^{24}\mathrm{Mg} \to p + {}^{27}\mathrm{Al}$	10—15	0,2—0,4	[176]
Относительная по углу	$\alpha + {}^{24}\mathrm{Mg} \to p + {}^{25}\mathrm{Mg}$	10	0,3	[178]
Абсолютная	$d + {}^{16}\mathrm{O} \to \alpha {}^{14}\mathrm{N}$	4	0,3	[170]

Авторы работы [102] провели исследование принципа детального равновесия как способа проверки T-инвариантности. Они отметили, что в определенных случаях соблюдение детального равновесия не связано с T-инвариантностью. Например, если $\mathcal{T}$ есть эрмитов оператор, как в приближении первого порядка п. 6.2.5., то

$$(\varphi_n, \mathcal{T}\varphi_m) = (\varphi_m, \mathcal{T}\varphi_n)^*.$$

В базисе $J\lambda$ это равенство дает

$$\mathcal{T}^{J(cd \leftarrow ab)}_{\lambda_c \lambda_d, \lambda_a \lambda_b} = \mathcal{T}^{J(ab \leftarrow cd)}_{\lambda_a \lambda_b^*, \lambda_c \lambda_d^*}.$$

Отсюда выражение (6.70) следует и без привлечения T-инвариантности. Таким образом, несмотря на то что нарушение детального равновесия требует нарушения T-инвариантности, обратное утверждение не всегда верно.

6.5.2. Равенство поляризации и асимметрии в рассеянии. Это равенство является обобщением результата, доказанного в п.5.5.5 для рассеяния частиц с нулевым спином на частицах со спином, равным 1/2, с использованием P-инвариантности. В том случае, когда частицы со спином 1/2 рассеиваются мишенью, состоящей из частиц со спином $s \neq 0$, равенство поляризации и асимметрии не следует из P-инвариантности. В этом случае оно следует, как мы увидим, из T-инвариантности.

Рассмотрим сначала асимметрию рассеяния «лево—право» полностью поперечно поляризованного протона на неполяризованной мишени. Амплитуда рассеяния имеет вид

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta, \varphi) = f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta) \exp[i(\lambda_a - \lambda_b)\varphi],$$

где λ_a (λ_c) и λ_b (λ_d) означают начальную (конечную) спиральность протона p и частицы мишени x, обладающей спином s. В правой части равенства зависимость амплитуды от φ представлена в явном виде.

Состояние $2^{-1/2}(\varphi_{p,\lambda_a=+1/2} + i\varphi_{p,\lambda_a=-1/2})$ описывает протон, полностью поляризованный в направлении Oy. Следовательно, вероятность рассеяния на неполяризованной мишени влево ($\varphi=0$)

$$\mathcal{I}_L(\theta) = \frac{1}{2(2s+1)} \sum_{\lambda_b\lambda_c\lambda_d} |f_{\lambda_c\lambda_d,+1/2,\lambda_b}(\theta) + if_{\lambda_c\lambda_d,-1/2,\lambda_b}(\theta)|^2. \quad (6.80)$$

Это можно записать короче:

$$\mathcal{I}_L(\theta) = \mathrm{Tr}\{f(\theta)\rho^i f(\theta)^+\},$$

где $f(\theta)$ — матрица, строки и столбцы которой нумеруются парами индексов спиральности (λ_c, λ_d) и (λ_a, λ_b) соответственно; ρ^i — это матрица плотности начального состояния

$$\rho^i_{\lambda_a\lambda_b,\lambda'_a\lambda'_b} = \rho_{\lambda_a\lambda'_a}\rho_{\lambda_b\lambda'_b}, \quad (6.81)$$

в которой

$$\left.\begin{aligned} \rho_{\lambda_b\lambda'_b} &= \frac{1}{2s_b+1}\delta_{\lambda_b\lambda'_b}; \\ \rho_{\lambda_a\lambda'_a} &= \frac{1}{2}(1+\sigma_y)_{\lambda_a\lambda'_a} \end{aligned}\right\} \quad (6.82)$$

соответствуют неполяризованной частице x и поперечно поляризованному протону.

Рассеяние вправо соответствует $\varphi=\pi$, и его выражение отличается от (6.80) тем, что $f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta)$ заменяется на $f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta) \times \times \exp[i(\lambda_a - \lambda_b)\pi]$. В матричной форме это можно представить так: $f(\theta, \varphi=\pi) = f(\theta)R$, где R — диагональная матрица

$$(R)_{\lambda_a\lambda_b,\lambda'_a\lambda'_b} = (-1)^{\lambda_a-\lambda_b}\delta_{\lambda_a\lambda'_a}\delta_{\lambda_b\lambda'_b}. \quad (6.83)$$

Таким образом,

$$\mathcal{I}_R(\theta) = \mathrm{Tr}\{fR\rho^i(fR)^+\} = \mathrm{Tr}\{fR\rho^iR^+f^+\}.$$

Асимметрия «лево—право» определяется выражением

$$\varepsilon(\theta) = [\mathcal{I}_L(\theta) - \mathcal{I}_R(\theta)]/\mathcal{I}_L(\theta) + \mathcal{I}_R(\theta).$$

Ее можно представить в виде

$$\varepsilon(\theta) = \mathrm{Tr}\{fNf^+\}/\mathrm{Tr}\{fDf^+\},$$

где $\left.\begin{matrix} D \\ N \end{matrix}\right\} = \rho^i \pm R\rho^iR^+$.

Из (6.81)—(6.83) находим

$$\rho^i \pm R\rho^i R^+ = \begin{cases} 1 \\ \sigma_y^a \end{cases},$$

где σ_y^a означает матрицу Паули для протона, т. е.

$$(\sigma_y^a)_{\lambda_a\lambda_b, \lambda_d'\lambda_b'} = (\sigma_y)_{\lambda_a\lambda_a'}\delta_{\lambda_b\lambda_b'}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon(\theta) = \frac{\Sigma f_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a\lambda_b}(\sigma_y)_{\lambda_a\lambda_a'} f^*_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a'\lambda_b}}{\Sigma \left| f_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a\lambda_b}\right|^2}. \tag{6.84}$$

Суммирование здесь проводится по всем индексам спиральности.

Представим поперечную поляризацию протона, рожденного при рассеянии на неполяризованной мишени x, формулой

$$\mathcal{J}(\theta) P_y' = \frac{1}{2(2s+1)} \sum_{\lambda_c\lambda_c'\lambda_a\lambda_b\lambda_d} (\sigma_y)_{\lambda_c'\lambda_c} f^*_{\lambda_c'\lambda_d, \lambda_a\lambda_b} f_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a\lambda_b}, \tag{6.85}$$

где $\mathcal{J}(\theta)$ есть дифференциальное сечение

$$\mathcal{J}(\theta) = \frac{1}{2(2s+1)} \sum_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a\lambda_b} \left| f_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a\lambda_b}(\theta)\right|^2. \tag{6.86}$$

Тогда из T-инвариантности для упругого рассеяния (6.70) имеем

$$f_{\lambda_c\lambda_d, \lambda_a\lambda_b}(\theta) = (-1)^{\lambda_a-\lambda_b-\lambda_c-\lambda_d} f_{\lambda_a\lambda_b, \lambda_c\lambda_d}(\theta).$$

Отметив, что фазовый множитель равен ± 1, и воспользовавшись тождеством

$$(-1)^{\lambda_c-\lambda_c'}(\sigma_y)_{\lambda_c'\lambda_c} = (\sigma_y)_{\lambda_c\lambda_c'},$$

преобразуем формулы (6.85) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\theta) P_{y'} &= \frac{1}{2(2s+1)} \Sigma (\sigma_y)_{\lambda_c'\lambda_c} f^*_{\lambda_a\lambda_b, \lambda_c'\lambda_d} f_{\lambda_a\lambda_b, \lambda_c\lambda_d} \times \\ &\times (-1)^{\lambda_a-\lambda_b-\lambda_c'-\lambda_d}(-1)^{-\lambda_a+\lambda_b+\lambda_c-\lambda_d} = \\ &= \frac{1}{2(2s+1)} \Sigma (\sigma_y)_{\lambda_c\lambda_c'} f^*_{\lambda_a\lambda_b, \lambda_c'\lambda_d} f_{\lambda_a\lambda_b, \lambda_c\lambda_d}. \end{aligned} \tag{6.87}$$

Сравнивая (6.87) и (6.84), получаем *равенство поляризация — асимметрия:*

$$P_{y'}(\theta) = \varepsilon(\theta). \tag{6.88}$$

Оригинальный вывод этого равенства для случая рассеяния частиц спина 1/2 на частицах спина 1/2 приведен в работах [187] и [54], в которых исследовался наиболее общий оператор перехода, инва-

риантный относительно вращений, пространственной инверсии и обращения времени. Авторы работ [20, 21] указали, что равенство выполняется независимо от инвариантности относительно пространственной инверсии. Если не использовать формализм спиральности, а квантовать спины вдоль нормали к плоскости рассеяния, то доказательство упростится.

Из замечаний, сделанных в начале этого раздела, следует, что для того чтобы использовать равенство (6.88) для проверки T-инвариантности, надо исследовать p—p-рассеяние или рассеяние протонов на ядрах с ненулевым спином. Равенство поляризация — асимметрия при p—p-рассеянии проверено уже различными авторами. Измерения, проведенные авторами работ [103, 1 и 104] в области энергий от 150 до 210 *Мэв*, и измерения [191] при энергии 600 *Мэв* показали, что оно справедливо в пределах погрешностей эксперимента. Амплитуда с T-нарушением, согласно оценке, проведенной в этих работах, не превышает нескольких процентов.

§ 6.6. ПРОВЕРКА ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Электромагнитные взаимодействия адронов и лептонов можно рассмотреть отдельно. Символически запишем это так:

$$H_{\text{эм}} = H_{\text{эм}}^{\text{адр}} + H_{\text{эм}}^{\text{лепт}}.$$

Точное описание электромагнитного взаимодействия заряженных лептонов (электрона и мюона) дает квантовая электродинамика. Гамильтониан в этой теории формально инвариантен относительно обращения времени. Это косвенное доказательство инвариантности относительно обращения времени гамильтониана $H_{\text{эм}}^{\text{лепт}}$.

Круг фактов, свидетельствующих в пользу инвариантностн относительно обращения времени при электромагнитном взаимодействии адронов, более ограничен. Малость величины $e^2/\hbar c$ означает, что электромагнитный процесс с достаточной точностью представляется процессом первого порядка, определенным в п.6.2.5. Следовательно, простая проверка с помощью детального равновесия в реакциях вида $\gamma + a \rightleftarrows b + c$ не дает результата, так как этот метод не чувствителен к T-нарушениям. Для проверки взаимности необходимо провести подробный анализ по спинам и импульсам.

Аналогично электрон-протонное рассеяние хорошо описывается процессом однофотонного обмена, показанным на рис. 6.3. Кружок, представляющий взаимодействие виртуального фотона с протоном, задается матричным элементом оператора электромагнитного тока j_μ между двумя состояниями протона. Из лоренц-инвариантности и закона сохранения четности следует, что этот элемент можно представить в виде

$$\langle \mathbf{p}' \mid j_\mu \mid \mathbf{p} \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}') \{\gamma_\mu F_1 + \sigma_{\mu\nu} q_\nu F_2 + q_\mu F_3\} u(\mathbf{p}).$$

Здесь $u(\mathbf{p})$ и $\bar{u}(\mathbf{p}')$ — спинорные волновые функции Дирака; Fs — форм-факторы, зависящие только от инвариантного квадрата четырехмерного импульса q^2; q_μ — импульс, передаваемый нуклону. Эрмитовость оператора тока требует, чтобы форм-факторы были действительны. Кроме того, можно показать, что инвариантность относительно обращения времени требует, чтобы F_1 и F_2 были вещественны, а F_3 — чисто мнимым. Таким образом, если T-инвариантность выполняется, то $F_3=0$. Однако из закона сохранения плотности заряда — тока $\sum_\mu \partial j_\mu/\partial x_\mu = 0$ также следует, что $F_3=0$, так что при e-рассеянии проверка T-инвариантности невозможна [24].

Можно избежать теоретического ограничения, если рассмотреть неупругие процессы [44].

Чен и др. [42], изучая процесс $e^- + N \to N^* + e^-$, наблюдали электроны, неупруго рассеянные мишенью из поляризованных протонов. В этом случае потери энергии соответствовали возбуждению

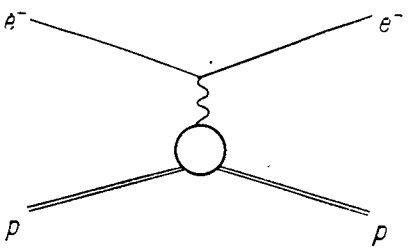


Рис. 6.3. Рассеяние электрона на протоне в однофотонном приближении

$N^*(1236)$ и более высоких резонансов. Теперь параметр F_3 не исключается законом сохранения тока и дает свой вклад в предсказанную интенсивность, меняющуюся при изменении знака поляризации мишени. В пределах погрешности эксперимента (5—10%) никаких изменений в интенсивности обнаружено не было, что соответствовало T-инвариантности.

Можно проверить T-инвариантность с большей точностью при более низких энергиях, если изучать ядерные γ-переходы. Обзор этих исследований был дан Хэнли [101]. Однако предельное значение T-нечетной части взаимодействия в лучшем случае меньше 10^{-3}.

Для электромагнитного распада $\Sigma^0 \to \Lambda^0 e^+ e^-$ можно применить другой способ проверки, подробно теоретически проанализированный Бернштейном, Фейнбергом и Ли [24].

Если $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{k}}_\pm$ означают единичные векторы, направленные вдоль импульсов частиц Λ и $e^\pm$, то нулевое среднее значение $\langle \boldsymbol{\sigma}_\Lambda \cdot \hat{\mathbf{p}} \times (\hat{\mathbf{k}}_+ + \hat{\mathbf{k}}_-)\rangle \neq 0$, представляющее собой поляризацию Λ^0, нормальную к плоскости распада, ясно означало бы T-нарушение [ср. с (6.48)], которое согласуется с сохранением P.

Глассер и др. [88], используя в качестве индикатора спина Λ

импульс протона, проанализировали 907 событий этого распада и обнаружили, что

$$\langle \mathbf{p}_N \cdot \hat{\mathbf{p}}_\Lambda \times (\hat{\mathbf{k}}_+ + \hat{\mathbf{k}}_-) \rangle = 0{,}02 \pm 0{,}02.$$

Значительный интерес представляет возможность T-нарушения в электромагнитном взаимодействии как причина нарушения CP, наблюдаемого в распадах нейтральных K-мезонов. В соответствии с CPT-теоремой часть гимильтониана $H_{эм}$, нарушающая T, но сохраняющая четность, требует нарушения C, а следовательно, и CP-нарушения. Если это взаимодействие было бы так же сильно, как и регулярное электромагнитное взаимодействие, виртуальные электромагнитные поправки к K-распадам могли бы дать CP-нарушение наблюдаемой величины. Однако соответствующее C-нарушение не наблюдалось. К этому вопросу мы еще вернемся при обсуждении нарушения CP.

§ 6.7. ПРОВЕРКА ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ В СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Мы можем написать

$$H_{сл} = H_{сл}^{лл} + H_{сл}^{ла} + H_{сл}^{аа}.$$

Три слагаемых здесь означают части слабого взаимодействия, соответствующие: 1) чисто лептонным процессам, например μ-распаду; 2) нелептонным распадам адронов, например β-распаду или $\pi \to \mu\nu$; 3) нелептонным распадам адронов, например $\Lambda \to N\pi$, $K \to 2\pi$, 3π. Способы проверки T-инвариантности можно различать по соответствующим частям оператора $H_{сл}$.

Хотя при известных обстоятельствах T-инвариантность можно проверить при рассеянии нейтрино, все описанные здесь способы проверки относятся к процессам распада и потому применимы результаты п. 6.2.5.

Распад мюона. Это чисто лептонный слабый процесс, так что радиационными поправками можно пренебречь. Наблюдения над мюонным распадом согласуются с формой взаимодействия типа ток — ток, которая явно T-инвариантна.

Лептонные распады адронов. Проверка T-инвариантности осуществляется с помощью корреляции электрон—нейтрино в распаде поляризованных нейтронов. Неравенство нулю величины $\langle \sigma_n \cdot \mathbf{p}_e \times \mathbf{p}_\nu \rangle$ означает наличие T-нарушения.

Бурги и др. [34] измерили величину $\langle \mathbf{p}_p \cdot \mathbf{p}_e \times \sigma_n \rangle$, которая в силу выполнения закона сохранения импульса эквивалентна предыдущему выражению. Результат можно выразить через фазовый угол между векторной и аксиально-векторной постоянными связи распада G_V и G_A, так как в случае T-инвариантности их отношение действительно, т. е. $\varphi = 0$ или 180°. Упомянутый выше эксперимент дает $\varphi < 8°$.

Калаприче и др. [37], измерив фазовый угол между G_V и G_A в распаде ^{19}Ne, обнаружили, что $\varphi = 180{,}2 \pm 1{,}6°$.

В распаде $K_{\mu 3}$ были проделаны измерения величины $<\sigma_\mu \cdot \mathbf{p}_\mu \times \times \mathbf{p}_e>$, которая должна исчезать в случае T-инвариантности. Камерини и др. [38] измерили эту корреляцию непосредственно в распаде $K^+ \to \pi^0 + \mu^+ + \nu$ остановившихся K^+-частиц в пузырьковой камере с тяжелой жидкостью. Они получили 690 событий, при которых оба γ-кванта от π^0 конвертируют в камере, а также видны e^+ от μ^+-распада. Они обнаружили, что $\langle \sigma_\mu \cdot \mathbf{n} \rangle = 0{,}04 \pm 0{,}35$, где $\mathbf{n} = (\mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_e)/ \mid \mathbf{p}_\mu \times \mathbf{p}_e \mid$.

Другие, более косвенные способы проверки этого распада заключаются в сравнении результатов, предсказанных обычной теорией с T-сохранением, с экспериментом. Все результаты сравнения собраны в работе Роу и Сквайрса [154].

Нелептонные распады адронов. Выше мы уже видели, что теорема о конечном состоянии, примененная к нелептонным распадам гиперонов, показывает, что T-инвариантность выполняется с довольно большой экспериментальной погрешностью.

Многие из описанных здесь способов проверки T-инвариантности подсказаны открытием в 1964 г. CP-нарушения. Если CPT-теорема выполняется, такое нарушение должно сопровождаться нарушением T-инвариантности.

Последующее изучение системы нейтральных K-мезонов показало, что независимо друг от друга инвариантность относительно обращения времени нарушается, а CPT-инвариантность выполняется. Это будет обсуждаться ниже, в § 8.5.

Глава 7

ЗАРЯДОВАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ, ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН И СТРАННОСТЬ

§ 7.1. ФАКТЫ, СВИДЕТЕЛЬСТВУЮЩИЕ О ЗАРЯДОВОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Ядра двух типов, для которых число протонов одного типа равно числу нейтронов другого и наоборот, иногда называют зеркальными ядрами.

Хорошо известны пары таких зеркальных ядер, отличающихся одним-единственным нуклоном, — это $^{7}_{4}Be$, $^{7}_{3}Li$ и $^{11}_{6}C$, $^{11}_{5}B$. На примере этих двух пар видно, что симметрия структуры отражается в соответствии их общих свойств. Например, энергия связи ^{11}C и ^{11}B в основных состояниях этих ядер отличается на величину, соответствующую кулоновской энергии лишнего протона в ^{11}C в пределах точности, обусловленной неопределенностью имеющихся сведений относительно точного распределения зарядов ядер.

Это соответствие распространяется на возбужденные состояния, энергии которых показывают заметное качественное, а иногда и количественное сходство. Например, энергия первых трех возбужденных состояний ^{11}B и ^{11}C в мегаэлектронвольтах, согласно работе [5]:

^{11}C	2,00	4,31	4,79
^{11}B	2,12	4,44	5,02

Несмотря на то что это сходство ничего не доказывает, и несмотря на большой разброс в соответствующих свойствах не связанных друг с другом ядер, взятые вместе, эти соответствия свидетельствуют о зарядовой симметрии ядерных сил, по крайней мере для сильных взаимодействий, ответственных за ядерные энергии связи. Под зарядовой симметрией мы подразумеваем эквивалентность протон-протонных и нейтрон-нейтронных сил. Для доказательства зарядовой независимости надо искать более широкую концепцию, в которую войдут и нейтрон-протонные силы.

Первое такое доказательство дает множество зеркальных ядер, отличающихся двумя нуклонами, например $^{14}_{6}C$ и $^{14}_{8}O$. В этом случае энергии связи основных состояний опять согласуются с зарядовой симметрией сильного взаимодействия, так как $^{14}_{6}C$ можно рассматривать как остов ядра $^{12}_{6}C$ с двумя лишними нейтронами, а $^{14}_{8}O$ — как тот же остов с двумя лишними протонами. Если же в рассмотрение включить и $^{14}_{7}N$ с нейтрон-протонной парой, присоединенной к тому же остову, соответствие становится менее оче-

видным. Основное состояние имеет более высокую энергию связи, т. е. меньшую потенциальную энергию. Фактически эта разница примерно равна энергии возбуждения (2,31 *Мэв*) первого возбужденного состояния $^{14}_{7}N$. Таким образом, это возбужденное состояние можно считать центром триплета ядерных состояний с эквивалентными энергиями связи (после поправки на различие их кулоновских энергий), остальные части которого представлены основными состояниями $^{14}_{6}C$ и $^{14}_{8}O$. Такая эквивалентность, если она действительно имеет место, требует в этих трех ядрах сходства нейтрон-протонных взаимодействий с протон-протонными и нейтрон-нейтронными взаимодействиями. Более низкую потенциальную энергию $^{14}_{7}N$ в его основном состоянии можно приписать разнице в состояниях нуклонов в ядрах этого типа.

Чтобы показать, что такая разница может быть ощутимой, отметим свойство уровня в $^{14}_{7}N$ с энергией 2,31 *Мэв* — свойство, отличающее его от основного состояния и от большинства других возбужденных состояний $^{14}_{7}N$. Этот уровень образуется чрезвычайно слабо, если вообще образуется в реакции

$$^{16}_{8}O + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He, \qquad (7.1)$$

хотя этот уровень и образуется наряду с другими состояниями $^{14}_{7}N$ в процессах:

$$^{14}_{7}N + p \rightarrow ^{14}_{7}N^{*} + p \text{ (неупругое рассеяние);} \qquad (7.2)$$

$$^{13}_{6}C + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{14}_{7}N + n \ [(d, n)\text{-реакция в } ^{13}_{6}C]; \qquad (7.3)$$

$$^{14}_{8}O \rightarrow ^{14}_{7}N + e^{+} \text{ (позитронный распад).} \qquad (7.4)$$

Прежде чем интерпретировать эти эффекты с помощью закона сохранения изоспина, дадим краткую оценку предпосылок, которые породили эту идею.

§ 7.2. ПОНЯТИЕ ИЗОСПИНА

Идея о том, что нейтрон и протон надо трактовать как два зарядовых состояния одной и той же частицы — нуклона, фактически впервые выдвинута Гейзенбергом в 1932 г. Сразу за этим предположением последовала реализация той его части, согласно которой нейтроны и протоны играют в структуре ядра аналогичную роль. Формализм этой идеи примерно на том же математическом языке, что и для обычного квантовомеханического спина, развит Вигнером [182], назвавшим изотопическим спином переменную, собственные значения которой должны были давать квантовые числа заряда.

Важность изотопического спина возросла с тех пор, как стала понятной его связь со свойствами легких ядер [107]. Спустя несколько лет оригинальному названию стали предпочитать более точный термин «изобарический спин», который теперь чаще всего заменяется сокращенным термином «изоспин» или i-спин. В насто-

ящее время, однако, концепция изоспина находит свое наиболее многообещающее применение в теории элементарных частиц, поэтому она и будет развита дальше на страницах этой книги.

Протон p и нейтрон n рассматриваются как два состояния одной и той же частицы — нуклона N. Можно провести математическую аналогию со спиновой степенью свободы частицы, спин которой равен 1/2. Однако физической связи между обычным спином и изоспином нет. Просто по воле случая для них используется одинаковый математический аппарат. Полная характеристика состояния нуклона должна давать его пространственные и спиновые координаты, а также указывать, протон это или нейтрон.

Обозначим протон в пространственно-спиновом состоянии $\psi(\mathbf{r}, \sigma)$ выражением $\psi(\mathbf{r}, \sigma)\,|p\rangle$, а нейтрон $\psi(\mathbf{r}, \sigma)\,|n\rangle$. Здесь $|p\rangle$ и $|n\rangle$ — базисные зарядовые состояния нуклона. Они аналогичны базисным спиновым состояниям частицы, спин которой равен 1/2, поэтому далее не будем рассматривать пространственно-спиновое состояние.

Общее нуклонное состояние можно записать в виде

$$|N\rangle = a\,|p\rangle + b\,|n\rangle,$$

где a и b — комплексные коэффициенты. В таком состоянии вероятность для нуклона быть протоном равна $|a|^2$, а вероятность быть нейтроном $|b|^2$. Можно принять матричные обозначения:

$$|p\rangle \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |n\rangle \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$|N\rangle \to a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Введем операторы изоспина, действующие на эти состояния, по аналогии с операторами момента количества движения для частицы со спином 1/2:

$$I_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (7.5)$$

Если отбросить коэффициент 1/2, то в правой части равенства получим просто спиновые матрицы Паули, обозначенные здесь τ_1, τ_2 и τ_3.

Величины I_1, I_2 и I_3 можно считать компонентами вектора $\mathbf{I}$ в изоспиновом пространстве. Как p, так и n являются собственными состояниями квадрата полного изоспина, определенного формулой

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2.$$

Соответствующее собственное значение есть $(1/2)\cdot(1/2+1) = 3/4$. Собственное значение $I_3 = 1/2$ для p и $-1/2$ для n.

Используем τ^2 и τ_3, собственные значения которых равны 3 и ± 1 соответственно. И, наконец, определим сдвиговые операторы τ_+ и τ_- по формулам

$$\tau_+ = 2^{-1/2}(\tau_1 + i\tau_2); \quad \tau_- = 2^{-1/2}(\tau_1 - i\tau_2). \qquad (7.6)$$

Отметим следующие свойства этих операторов:

$$\tau_+ \mid p\rangle = 0; \quad \tau_+ \mid n\rangle = 2^{1/2} \mid p\rangle;$$

$$\tau_- \mid p\rangle = 2^{1/2} \mid n\rangle; \quad \tau_- \mid n\rangle = 0.$$

Если добавить к набору τ_1, τ_2, τ_3 единичный оператор

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то любой оператор, действующий на общую однонуклонную волновую функцию $|N>$, можно выразить линейной комбинацией этих четырех операторов.

Таким образом, оператор электрического заряда Q, собственные состояния которого являются состояниями с определенным зарядом ($+1$ для p и 0 для n), задается выражением

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 1 + I_3 = \frac{1}{2}(1 + \tau_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Все сказанное выше имеет формальный смысл. Физическое значение оно приобретает в случае двух и более частиц и особенно при рассмотрении взаимодействий между ними.

Следует отметить, что $|p>$, $|n>$ и $|N>$ можно считать функциями зарядовой координаты q. Эта координата должна быть двузначной (дихотомической) переменной, так как единственно возможные состояния нуклона при измерении — это p и n. Таким образом, q принимает значения ± 1 (или 1 и 2), которые характеризуют первую и вторую строки в столбце (при использовании векторных обозначений).

Таким образом, однонуклонную волновую функцию можно характеризовать пространственной и спиновой координатами (обозначив их вместе ξ) и ввести еще зарядовую координату q:

$$\Psi(\xi, q) = \psi(\xi) \mid N(q)\rangle.$$

Для двух нуклонов естественно обобщить волновую функцию, представив ее в виде

$$\Psi(\xi_1, q_1; \xi_2, q_2), \tag{7.8}$$

включив в нее координаты обоих нуклонов 1 и 2. Соответственно введем операторы изоспинов двух частиц $\mathbf{I}_1$ и $\mathbf{I}_2$.

Рассмотрим некоторые частные случаи функции (7.8). Для состояния двух протонов

$$\Psi = \psi_1(\xi_1, \xi_2') \mid p_1\rangle \mid p_2\rangle, \tag{7.9}$$

для двух нейтронов

$$\Psi = \psi_2(\xi_1, \xi_2') \mid n_1\rangle \mid n_2\rangle. \tag{7.10}$$

Для системы протон — нейтрон можно записать

$$\Psi = \psi_3(\xi_1, \xi_2) \mid p_1\rangle \mid n_2\rangle, \tag{7.11}$$

или по-иному:

$$\Psi = \psi_4(\xi_1, \xi_2) \mid n_1\rangle \mid p_2\rangle. \tag{7.12}$$

Итак, считаем протон и нейтрон разными состояниями одной и той же частицы, характеризуемыми зарядовой координатой q. Теперь распространим принцип Паули на зарядовую координату.

Обобщенный принцип Паули. Волновая функция двух нуклонов Ψ должна быть антисимметричной при перестановке зарядовых, спиновых и пространственных координат, т. е.

$$\Psi(\xi_1, q_1; \xi_2, q_2) = -\Psi(\xi_2, q_2; \xi_1, q_1).$$

Что это означает для рассмотренных выше частных случаев? Для двухпротонной и двухнейтронной систем часть волновой функции, зависящая от заряда, симметрична относительно замены $q_1 \leftrightarrow q_2$. Следовательно, пространственно-спиновая волновая функция должна быть антисимметричной, что является обычным требованием принципа Паули для двух тождественных частиц. Ни одна из протон-нейтронных волновых функций (7.11) и (7.12) не обладает требуемой антисимметрией. Однако правильно симметризованную изоспиновую волновую функцию можно построить по аналогии с волиовымн функциями двух частиц со спином 1/2, например атома гелия.

Пусть волновые функции

$$|\chi_s\rangle = 2^{-1/2}\{|p_1n_2\rangle + |n_1p_2\rangle\}; \tag{7.13}$$

$$|\chi_a\rangle = 2^{-1/2}\{|p_1n_2\rangle - |n_1p_2\rangle\} \tag{7.14}$$

соответственно симметричны и антисимметричны относительно замены $q_1 \leftrightarrow q_2$. После умножения на пространственно-спиновые волновые функции — антисимметричную и симметричную соответственно — получим допустимые волновые функции Ψ. Таким образом, никаких существенных ограничений на пространственно-спиновую волновую функцию системы протон — нейтрон нет. Однако мы не можем больше считать первую частицу протоном, а вторую нейтроном. Это и не удивительно, если вспомнить, что из-за обменных потенциалов, обусловленных обменом заряженных мезонов, невозможно проследить в процессе взаимодействия, какой из треков относится к протону, а какой к нейтрону.

Определим полный изоспин $\mathbf{I}$ системы двух нуклонов формулой

$$\mathbf{I} = (1/2)\boldsymbol{\tau}_{(1)} + (1/2)\boldsymbol{\tau}_{(2)}.$$

Собственные состояния $\mathbf{I}^2$ и I_3 можно построить, пользуясь правилами сложения векторов момента количества движения. Таким образом, образованные выше двухнуклонные состояния соответствуют собственным значениям полного изоспина и третьей компоненты, что можно записать в виде

$$I = 1, \quad I_3 = +1: \quad |p_1p_2\rangle$$

$$I = 1, \quad I_3 = 0: \quad 2^{-1/2}(|p_1n_2\rangle + |n_1p_2\rangle)$$

$$I = 1, \quad I_3 = -1: \quad |n_1n_2\rangle$$

$$I = 0, \quad I_3 = 0: \quad 2^{-1/2}(|p_1n_2\rangle - |n_1p_2\rangle).$$

Для системы, содержащей B нуклонов, собственное значение I_3 связано с полным зарядом Q соотношением

$$Q = I_3 + (1/2)B, \tag{7.15}$$

причем I может принимать любые значения с шагом 1, начиная с $(1/2)B$ и кончая 1/2 или 0, что зависит от четности B.

Распространяя эту идею от положительных значений B на случай $B=-1$, видим, что к антинуклонам можно применить тот же формализм, если использовать собственные значения из табл. 7.1. С этой точки зрения формула (7.15) подходит ко всем системам нуклонов и антинуклонов, а также пионов, если пиону приписать барионное число $B=0$.

Три наблюдаемых типа пионов π^+, π^0 и π^- можно трактовать как три зарядовых состояния одной частицы — пиона с полным изоспином $I=1$. Заряды Q, равные ± 1 и 0, представляют собой три возможных собственных значения I_3, равных ± 1 и 0. Таким образом, свойства систем, содержащих пионы и нуклоны, можно описывать с помощью полного изоспина I, являющегося векторной суммой отдельных изоспинов, равных 1/2 для каждого нуклона или антинуклона и 1 для каждого пиона. Собственное значение I_3 связано с полным зарядом формулой (7.15).

Таблица 7.1

Нуклоны и антинуклоны

Частица	B	I	I_3	Q
p	1	1/2	1/2	1
n	1	1/2	−1/2	0
$\bar{n}$	−1	1/2	1/2	0
$\bar{p}$	−1	1/2	−1/2	−1

Правила векторного сложения изоспинов такие же, как и для векторного сложения моментов количества движения, рассмотренного в гл. 3. Следовательно, можно использовать те же таблицы коэффициентов Клебша — Гордана.

§ 7.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИЗОСПИНА

Для связи развитого выше формализма с экспериментальными данными выдвинем физическую гипотезу о том, что при сильном взаимодействии полный изоспин **I** сохраняется:

$$[H_{\text{сильн}}, \mathbf{I}] = 0. \tag{7.16}$$

Из закона сохранения изоспина можно по аналогии с законом сохранения момента количества движения сделать следующие выводы:

а) собственные состояния энергии системы можно характеризовать определенным значением полного изоспина и его третьей компоненты. Состояния с одним и тем же I, но разными I_3 энергетически вырождены;

б) полный изоспин и его третья компонента в процессе перехода остаются постоянными.

Для подтверждения гипотезы (7.16) Ферми [73] провел расчеты.

Напомним экспериментальный закон зарядовой независимости. Он заключается в том, что потенциалы p—p и n—n взаимодействий равны между собой и равны n—p-потенциалу в антисимметричных пространственно-спиновых состояниях. Последняя оговорка необходима, так как p—n-система может существовать и в симметричных пространственно-временных состояниях, запрещенных для p—p- и n—n-систем принципом Паули. Можно показать, что общая форма нуклон-нуклонного взаимодействия, обеспечивающая зарядовую независимость, есть

$$H_{\text{взаим}} = U + V(\boldsymbol{\tau}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(2)}), \tag{7.17}$$

где $\boldsymbol{\tau}_{(1)}$ и $\boldsymbol{\tau}_{(2)}$ означают удвоенные операторы изоспинов отдельных нуклонов, а U и V зависят только от пространственных и спиновых координат. Если бы оператор $H_{\text{взаим}}$ удовлетворял условию (7.16), он не мог бы зависеть от какой-либо компоненты $\mathbf{I}$ отдельно. Однако мы имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{I}^2 = (1/4)(\boldsymbol{\tau}_{(1)} + \boldsymbol{\tau}_{(2)})^2 = (1/4)(\boldsymbol{\tau}_{(1)}^2 + \boldsymbol{\tau}_{(2)}^2 + 2\boldsymbol{\tau}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(2)}) = \\ = (1/2)(3 + \boldsymbol{\tau}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(2)}),\end{aligned} \tag{7.18}$$

так как $\boldsymbol{\tau}_{(1)}^2 = \boldsymbol{\tau}_{(2)}^2 = 3$.

Таким образом, в формуле для H член типа $\boldsymbol{\tau}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(2)}$ должен коммутировать с $\mathbf{I}^2$, а следовательно, и с компонентами $\mathbf{I}$.

Две степени свободы в формуле (7.17), ассоциированные с двумя потенциалами в (7.17), связаны с двумя значениями $I=0$, 1 полного изоспина. Действительно, из выражения (7.18) видно, что в базисе, в котором $\mathbf{I}^2$ диагонален, диагонален и оператор $\boldsymbol{\tau}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(2)}$. Для состояний с $I=0$ или $I=1$ собственные значения

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{(1)} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(2)} = 2\mathbf{I}^2 - 3 = 2I(I+1) - 3 \\ = -3 \quad (I=0) \\ \text{или } 1 \quad (I=1)\end{aligned}$$

Таким образом, нуклон-нуклонное взаимодействие, представленное (7.17), имеет эффективные значения: $H_{\text{взаим}} = U - 3V$ в состоянии с $I=0$ или $U+V$ в состоянии с $I=1$.

Если не происходит никаких взаимодействий, кроме зарядовонезависимого сильного взаимодействия, полный изоспин должен сохраняться. Однако в случае двух протонов полное нуклон-нуклонное взаимодействие включает и кулоновское. Это дополнительное взаимодействие не входит в формализм изоспина и может привести к частичному несохранению изоспина. Если в ядерной реакции полный изоспин сохраняется, то полный конечный изоспин, полученный при векторном сложении изоспинов конечных частиц, будет таким же, что и полный начальный изоспин, являющийся аналогичной векторной суммой изоспинов начальных частиц. Примером может служить реакция (7.1), в которой, как мы уже за-

метили, уровень ^{14}N с энергией 2,31 *Мэв* образуется слабо или не образуется совсем.

Предположим, что начальные частицы ^{16}O (основное состояние) и ^{2}H, подобно α-частице, имеют нулевой спин. Тогда единственными состояниями ^{14}N, которые могут возникнуть вместе с α-частицей в реакции с сохранением изоспина, будут состояния с $I=0$. Если триплет ядерных состояний, описанный в § 7.1, является настоящим триплетом по изоспину, то уровень ^{14}N с энергией 2,31 *Мэв*, так же как основные состояния ^{14}C и ^{14}O, должен иметь $I=1$. Основное состояние ^{14}N более сильно связано, чем основные состояния ^{14}O и ^{14}C, поэтому для него более вероятно значение $I=0$, недопустимое для ядер с несбалансированной парой нуклонов.

Таким образом, можно ожидать, что основное состояние и любые возбужденные состояния с $I=0$ в реакции (7.1) будут образовываться свободно, в то время как уровень 2,31 *Мэв* или не образуется вовсе, или будет образовываться слабо, если изоспин сохраняется неполностью.

§ 7.4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИЗОСПИНА К СТРАННЫМ ЧАСТИЦАМ

Термин «странные» был применен к K-мезонам и гиперонам, чтобы подчеркнуть, что они не входят в семейство «нестранных» нуклонов и π-мезонов, которое считалось раньше достаточным для объяснения основных свойств ядра. Замечено, что странные частицы рождаются парами в результате взаимодействия π-мезонов и нуклонов при энергиях выше примерно 1 *Гэв*. Этим законом разрешены следующие реакции:

$$\pi^+ + p \to \Sigma^+ + K^+; \tag{7.19}$$

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0; \tag{7.20}$$

$$\pi^- + p \to K^- + K^+. \tag{7.21}$$

В результате реакций Σ- или Λ-гиперон возникает в сопровождении положительного или нейтрального K-мезона или рождается пара противоположно заряженных K-мезонов. С другой стороны, отрицательно заряженные K-мезоны не рождаются совместно с Σ- или Λ-гипероном.

Чтобы описать этот закон в терминах сохранения квантового числа, K^0- и K^+-мезонам была приписана странность $S=1$, а Σ- и Λ-гиперонам — странность $S=-1$. Частица K^-, являясь античастицей по отношению к K^+, тоже имеет $S=-1$. Для полноты картины (см. гл. 9) нужен четвертый K-мезон $\bar{K}^0$, который является античастицей по отношению к K^0 и имеет странность $S=-1$. π-Мезоны и протоны, не будучи странными в указанном выше смысле, имеют нулевую странность.

Странность сохраняется в реакциях рождения (7.19)—(7.21). Запрещая, например, рождение $\Sigma^+ + K^-$ в результате взаимодейст-

вия π^- с p, можно ссылаться на закон сохранения странности, считая его эквивалентным старому закону ассоциативного рождения. Таким образом, можно сказать, что странность сохраняется в сильных взаимодействиях, приводящих к рождению частиц. Но при этом надо сделать оговорку: странность не сохраняется в слабых процессах, в которых гипероны распадаются на нестранные частицы:

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-; \tag{7.22}$$

$$\Sigma^+ \to p + \pi^0, \tag{7.23}$$

$$\searrow \quad n + \pi^+. \tag{7.24}$$

Здесь можно напомнить о каскадных гиперонах Ξ^- и Ξ^0, которые должны характеризоваться странностью $S=-2$. Они образуются в следующих реакциях с сохранением странности:

$$K^- + p \to \Xi^- + K^+. \tag{7.25}$$

Полная странность частиц в начале реакции равна —1. Затем они распадаются в два этапа на нестранные частицы, каждый раз меняя странность на единицу, например

$$\begin{array}{l} \Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^- \\ \qquad\quad \downarrow \\ \qquad\quad p + \pi^- \end{array} \tag{7.26}$$

Приступая с помощью изоспина к описанию этих частиц и их разных зарядовых состояний, обнаруживаем, что каскадные гипероны и две пары K-мезонов образуют дублеты по изоспину, в то время как отдельные странные гипероны образуют изотриплет (Σ^+, Σ^0 и Σ^-) и изосинглет (Λ^0).

В табл. 7.2 приведен список частиц, классифицированных по их странности и изоспину. Барионное число B в формуле (7.15), которое до сих пор было просто числом нуклонов, в системах со странными частицами должно принимать нулевые значения для всех мезонов и 1 для нуклонов и гиперонов. При таких значениях B строго сохраняется во всех известных процессах, так же как и полный электрический заряд.

Из табл. 7.2 выводим соотношение, связывающее S, B, Q и I_3:

$$S + B = 2(Q - I_3). \tag{7.27}$$

Это соотношение означает, что формулу (7.15) можно распространить на странные частицы, записав ее в виде

$$Q = I_3 + Y/2. \tag{7.28}$$

Здесь $Y=S+B$ — гиперзаряд, а уравнение (7.28) известно как формула Гелл-Мана—Нишиджимы.

Таким образом, гиперзаряд — это средний заряд частиц, образующих изоспиновый мультиплет, а странность — это величина, на которую гиперзаряд отличается от барионного числа.

Таблица 7.2

Квантовые числа барионов и мезонов

Частица	Q	S	B	I	I_3	Y
p	1	0	1	1/2	1/2	1
n	0				−1/2	
Σ^+	1				1	
Σ^0	0	−1	1	1	0	0
Σ^-	−1				−1	
Λ_0	0	−1	1	0	0	0
Ξ^0	0	−2	1	1/2	1/2	−1
Ξ^-	−1				−1/2	
π^+	1				1	
π^0	0	0	0	1	0	0
π^-	−1				−1	
K^+	1	1	0	1/2	1/2	1
K^0	0				−1/2	
$\overline{K}^0$	0	−1	0	1/2	1/2	−1
K^-	−1				−1/2	

§ 7.5. ПИОН-НУКЛОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Векторное сложение изоспинов и сохранение полного изоспина создают основу для обсуждения свойств системы π-мезон-нуклон и процессов пион-протонного рассеяния. Необходимо описать следующие легко наблюдаемые процессы рассеяния: упругое рассеяние

$$\pi^+ + p \to \pi^+ + p; \tag{7.29}$$

$$\pi^- + p \to \pi^- + p \tag{7.30}$$

и рассеяние с обменом заряда

$$\pi^- + p \to \pi^0 + n. \tag{7.31}$$

Для всех трех процессов в § 4.8 рассчитаны дифференциальные сечения по методу амплитуд спиральности. В данный момент задача заключается в том, чтобы показать, как связаны между собой дифференциальные сечения этих трех процессов, если выполняется требование сохранения изоспина.

Дифференциальное сечение любого процесса рассеяния можно записать в виде

$$d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2. \tag{7.32}$$

Здесь опущены индексы, использованные в выражении (4.98) для обозначения состояния спиральности. Вместо этого состояние по изоспину опишем формулой

$$f(\theta) = \left(\psi\left(I_3^{N'}, I_3^{\pi'}\right), \mathcal{T}\psi\left(I_3^{N}, I_3^{\pi}\right)\right). \tag{7.33}$$

Начальное и конечное состояния по изоспину можно записать с помощью состояния с определенным полным изоспином $\varphi(I, I_3)$ с помощью коэффициентов Клебша — Гордана.

Гипотеза о сохранении изоспина в процессе взаимодействия $[\mathbf{I};\ \mathcal{T}]=0$ приводит к выводу о том, что: а) как I, так и I_3 сохраняются и б) матричный элемент перехода не зависит от I_3. Эти утверждения доказываются точно так же, как и в п. 3.3.2 для момента количества движения. По аналогии с (3.61) получаем

$$(\varphi(I',\ I_3'),\ \mathcal{T}\varphi(I,\ I_3)) = \delta_{I'I}\,\delta_{I_3'I_3}\,\mathcal{T}^I.$$

Полная величина I системы π-мезон—нуклон имеет два возможных значения: 3/2 и 1/2. Этим значениям соответствуют два независимых элемента матрицы перехода:

$$M_1 = (\varphi(1/2,\ I_3),\ \mathcal{T}\varphi(1/2,\ I_3)); \tag{7.34}$$

$$M_3 = (\varphi(3/2,\ I_3),\ \mathcal{T}\varphi(3/2,\ I_3)). \tag{7.35}$$

Процесс упругого рассеяния π^+p (7.29) может идти только через состояние с $I=3/2$. Таким образом, можно положить

$$(d\sigma/d\Omega)_{p\pi^+} = K\mid M_3\mid^2. \tag{7.36}$$

В процессы (7.30) и (7.31), включающие начальное состояние $p\pi^-$, свой вклад могут внести полные состояния обоих изоспинов, поэтому начальное и конечное состояния надо считать суперпозицией состояний с $I=3/2$ и $I=1/2$ в пропорциях, заданных коэффициентами Клебша — Гордана из табл. 3.2.

Для упругого рассеяния $p\pi^-$

$$\psi_{\text{нач}} = \psi_{\text{кон}} = (3)^{-1/2}\varphi(3/2,\ -1/2) + (2/3)^{1/2}\varphi(1/2,\ -1/2). \tag{7.37}$$

Следовательно, дифференциальное сечение

$$(d\sigma/d\Omega)_{p\pi^- el} = \mid(\psi_{\text{кон}},\ \mathcal{T}\psi_{\text{нач}})\mid^2 = K\mid(1/3)M_3 + (2/3)M_1\mid^2. \tag{7.38}$$

Для рассеяния с обменом зарядами (7.30) конечное состояние выражается другой суперпозицией:

$$\psi_{\text{кон}} = 2/3)^{1/2}\varphi(3/2,\ -1/2) - (1/3)^{1/2}\varphi(1/2,\ -1/2). \tag{7.39}$$

Из выражения для начального состояния (7.38) и соотношения (7.39) находим значение дифференциального сечения

$$(d\sigma/d\Omega)_{\text{зар.обм}} = K\mid 3^{-1}2^{1/2}M_3 - 3^{-1}2^{1/2}M_1\mid^2. \tag{7.40}$$

Из сказанного выше следует, что дифференциальные сечения этих процессов находятся в отношении

$$(d\sigma/d\Omega)_{p\pi^+} : (d\sigma/d\Omega)_{p\pi^- el} : (d\sigma/d\Omega)_{\text{зар.обм}} = \mid M_3\mid^2 : 3^{-2}\mid M_3 + 2M_1\mid^2 : 2\cdot 3^{-2}\mid M_3 - M_1\mid^2 = 9:1:2, \text{ если } M_3 \gg M_1,$$

$$\text{или } 9:3:0, \text{ если } M_3 = M_1,$$

$$\text{или } 9:1:8, \text{ если } M_3 = -M_1,$$

$$\text{или } 0:2:1, \text{ если } M_3 \ll M_1.$$

Если полная энергия равна примерно 1236 *Мэв*, наблюдаемое отношение близко к 9 : 1 : 2. Значит, в этом случае доминируют переходы по каналу $I=3/2$. Этот факт свидетельствует о том, что при этих энергиях резонанс приходится на изоспин 3/2. При более высоких энергиях важен вклад от обоих каналов.

§ 7.6. ГРУППА ИЗОСПИНОВОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ — ГРУППА SU(2)

В гл. 3 показана связь момента количества движения и инвариантности относительно вращения. Было бы полезно аналогичным образом в основу концепции изоспина положить принцип инвариантности или группу симметрии.

Так как само понятие изоспина введено по аналогии с моментом количества движения, можно было бы связать операторы изоспина **I** с группой вращений относительно трех осей трехмерного изоспинового пространства, отличающегося от реального пространства, но имеющего одинаковую с ним структуру. Однако вместо этого будем считать, что преобразование симметрии происходит в двумерном комплексном пространстве. Дадим здесь точное определение этого преобразования и установим его связь с формализмом изоспина. Причина такого более абстрактного определения группы симметрии изоспина заключается прежде всего в математическом удобстве. Кроме того, в этом случае более легко происходит обобщение на симметрии более высокого порядка, например SU (3).

Представим, что электромагнитное взаимодействие частиц «выключено». Тогда протон уже невозможно отличить от нейтрона и симметрия изоспина выполняется точно. Иными словами, вместо однопротонного и однонейтронного состояний в качестве основных состояний нуклона можно с равным успехом выбрать их новые линейные комбинации, например

$$\left.\begin{aligned} |\, p'\rangle &= a\,|\, p\rangle + b\,|\, n\rangle; \\ |\, n'\rangle &= -b^*\,|\, p\rangle + a^*\,|\, n\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

где a и b — два произвольных комплексных числа. Коэффициенты второго уравнения выбраны так, чтобы состояния $|n'>$ и $|p'>$ были ортогональны.

Таким образом,

$$\langle p'\,| = a^*\langle p\,| + b^*\langle n\,|\,,$$

значит,

$$\langle p'\,|\,n'\rangle = -a^*b^*\langle p\,|\,p\rangle + (a^*)^2\langle p\,|\,n\rangle - (b^*)^2\langle n\,|\,p\rangle + b^*a^*\langle n/n\rangle = 0$$

как следствие нормировки и ортогональности исходного базиса

$$\langle p\,|\,p\rangle = \langle n\,|\,n\rangle = 1;$$
$$\langle p\,|\,n\rangle = \langle n\,|\,p\rangle = 0.$$

Вычисляя аналогичным образом $<p'|p'>$, находим, что если потребовать, чтобы a и b удовлетворяли условию

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{7.42}$$

то преобразованные состояния будут нормированными:

$$\langle p' \mid p' \rangle = \langle n' \mid n' \rangle = 1.$$

В качестве базисных состояний в пределе точной изоспиновой симметрии можно использовать любую пару состояний, определенных уравнениями типа (7.41) с коэффициентами, удовлетворяющими (7.42). Таким образом, множество таких преобразований образует группу симметрии, лежащую в основе симметрии изоспина. Если это условие выполняется, то, согласно общему обсуждению (см. гл. 2), при рассмотрении инфинитезимальных преобразований симметрии можно получить сохраняющиеся эрмитовы генераторы, которые в рассматриваемом случае являются изоспиновыми операторами I_1, I_2 и I_3.

Но прежде надо определить унитарный оператор U, который, действуя на состояния $|p>$ и $|n>$, дает преобразование (7.41). Оператор U характеризуется параметрами преобразования a и b, так что имеем

$$U(a, b) \mid p\rangle = \mid p'\rangle = a \mid p\rangle + b \mid n\rangle;$$
$$U(a, b) \mid n\rangle = \mid n'\rangle = -b^* \mid p\rangle + a^* \mid n\rangle.$$

Тождественное преобразование изоспина получается подстановкой $a=1$, $b=0$, так что $U(1, 0)=1$ (единичный оператор).

Инфинитезимальное преобразование задается параметрами

$$a = 1 - 2^{-1} i\varepsilon_3; \quad b = 2^{-1}(\varepsilon_2 - i\varepsilon_1),$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 — вещественные инфинитезимальные параметры.

Пусть $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, рассмотрим результирующее инфинитезимальное преобразование

$$U(\varepsilon_3) \mid p\rangle = \mid p\rangle - 2^{-1} i\varepsilon_3 \mid p\rangle; \quad U(\varepsilon_3) \mid n\rangle = \mid n\rangle + 2^{-1} i\varepsilon_3 \mid n\rangle.$$

Эрмитов генератор G преобразования определяется формулой

$$U(\varepsilon_3) = 1 - i\varepsilon_3 G.$$

Подставляя ее в предыдущее уравнение, находим, что оператор G должен действовать следующим образом:

$$G \mid p\rangle = (1/2) \mid p\rangle; \quad G \mid n\rangle = -(1/2) \mid n\rangle,$$

т. е. $G=I_3$.

Если $\varepsilon_1=\varepsilon_3=0$, $U(\varepsilon_2)=1-i\varepsilon_2 G$, то для того чтобы получить преобразование

$$U(\varepsilon_2) \mid p\rangle = \mid p'\rangle = \mid p\rangle + 2^{-1}\varepsilon_2 \mid n\rangle;$$
$$U(\varepsilon_2) \mid n\rangle = \mid n'\rangle = \mid n\rangle - 2^{-1}\varepsilon_2 \mid p\rangle,$$

необходимо выполнение условия

$$G \mid p\rangle = 2^{-1}\mathrm{i} \mid n\rangle; \quad G \mid n\rangle = -2^{-1}\mathrm{i} \mid p\rangle,$$

т. е. $G = I_2$.

Наконец, можно установить, что генератор преобразования с ненулевым ε_1 есть I_1.

Подведем итог сказанному на языке теории групп. Дедуктивное изложение теории групп читатель может найти в других литературных источниках. Мы же идентифицировали группу симметрии изоспина с множеством всех комплексных матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \tag{7.43}$$

для которых выполнено условие

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Последовательность двух преобразований типа (7.41) соответствует перемножению соответствующих матриц (7.43). Матрицы A унитарны:

$$A^+ A = 1,$$

и их определитель равен 1:

$$\det A = 1.$$

Мультипликативная группа таких 2×2-матриц обозначается SU (2). Здесь U указывает унитарность (модуль определителя равен 1), а S — специальный случай, когда определитель равен $+1$.

Глава 8

ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

§ 8.1. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАРЯДОВОГО СОПРЯЖЕНИЯ

8.1.1. Оператор C. В предыдущих главах были рассмотрены такие симметрии, как пространственная инверсия P и обращение времени T. Теперь перейдем к симметрии зарядового сопряжения C. Оператор C был сначала введен как оператор, который изменяет знак электрических зарядов и осуществляет обмен электронов и позитронов. Затем в результате обобщения оператор C стал заменять все частицы античастицами, менять знаки всех внутренних квантовых чисел, т. е. барионного числа B, лептонного числа L, странности S, гиперзаряда Y, заряда Q и компоненты изоспина I_3. Действие зарядового сопряжения на состояние с импульсом $\mathbf{p}$ и спином λ можно выразить соотношением

$$U_C \varphi_{Q\mathbf{p}\lambda} = \varphi_{-Q\mathbf{p}\lambda}, \tag{8.1}$$

где U_C — унитарный оператор, соответствующий C, а Q — все аддитивные внутренние квантовые числа.

В результате зарядового сопряжения электрически заряженные системы переходят в системы противоположно заряженные. Таким образом, они не являются собственными состояниями оператора U_C. Фактически собственное состояние U_C должно иметь нулевые значения всех внутренних квантовых чисел. Оператор C может оказаться полезным, так как он связывает свойства исходной системы со свойствами системы зарядово-сопряженной.

8.1.2. Собственные состояния оператора C. Нейтральные мезоны с нулевой странностью могут быть собственными состояниями U_C с собственными значениями $\eta_C = +1$ или $\eta_C = -1$. Величину η_C иногда называют четностью относительного зарядового сопряжения. Значения ± 1 являются единственными разрешенными значениями этой величины, так как последовательно дважды примененный оператор U_C должен возвращать систему в начальное состояние, т. е. $U_C^2 = 1$.

Для системы из нескольких компонент, каждая из которых — собственное состояние C, общая четность относительно зарядового сопряжения равна произведению значений η_C для отдельных компонент системы, подобно тому как обычная общая четность получается перемножением отдельных четностей. Следует ожидать, что сильное и электромагнитное взаимодействия будут ин-

вариантны относительно зарядового сопряжения, т. е. что U_C и гамильтониан H удовлетворяют соотношению

$$U_C H U_C^{-1} = H.$$

Эта инвариантность требует, чтобы собственное значение η_C сохранялось при переходах между состояниями — собственными состояниями C и амплитуда перехода между состояниями X и Y, не являющимися собственными состояниями C, была бы равна амплитуде зарядово-сопряженного перехода между состояниями $\bar{X}$ и $\bar{Y}$.

Фотон должен иметь $\eta_C = -1$, так как все компоненты электромагнитного поля в результате зарядового сопряжения меняют знак, и произведение напряженности поля на ток должно быть инвариантным относительно C.

Таким образом, система из n фотонов имеет собственное значение $\eta_C = (-1)^n$. В частности, это приводит к тому, что мы полагаем $\eta_C = +1$ для нейтрального пиона, распадающегося в результате сильного и электромагнитного взаимодействия на два фотона. Важность C-инвариантности подтверждается тем, что распад $\eta^0 \to 3\gamma$ не наблюдается. Из аргументов, связанных с электромагнетизмом, следует лишь, что относительная вероятность этого распада равна 1/137.

8.1.3. Позитроний. Подобно тому, как электрон движется в атоме водорода по орбите вокруг протона, электрон и позитрон могут двигаться вокруг общего центра масс. Такая система известна под названием позитрония. Эта система имеет общий заряд, равный нулю, нулевые лептонное и барионное числа и странность, и поэтому может быть собственным состоянием оператора U_C.

Рассмотрим атом позитрония, состоящий из электрона и позитрона с общим спином S и орбитальным моментом количества движения l. Одновременная перестановка пространственных, спиновых и зарядовых координат эквивалентна перестановке двух частиц, относительно которой система двух фермионов должна быть антисимметричной. Перестановка отдельных координат обладает следующей симметрией: пространственная: $(-1)^l$; спиновая: $(-1)^S$; зарядовая: η_C.

Произведение этих симметрий должно быть равно (-1), откуда следует, что

$$\eta_C = (-1)^{l+S}.$$

Атом позитрония неизбежно проаннигилирует на два или более фотона (в случае одного фотона энергия и импульс не могут сохраняться одновременно). Конечное состояние n фотонов будет обладать симметрией относительно зарядового сопряжения $\eta_C = (-1)^n$, так что если при такой аннигиляции η_C сохраняется, то двухфотонная аннигиляция требует, чтобы $l+S$ было четным. В то же время состояния с нечетным $l+S$ могут аннигилировать только в состояние с нечетным числом фотонов.

Фактически наименьшим временем жизни обладает состояние позитрония $^1S_0$, имеющее $l+S=0$, и оно распадается в результате двухфотонной аннигиляции. Затем идет состояние $^3S_0$ с $l+S=1$, которое, по наблюдениям, дает три фотона.

§ 8.2. ПРОВЕРКА ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАРЯДОВОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Так же, как в случаях P- и T-инвариантности, будем различать эксперименты по тому виду взаимодействия, инвариантность которого относительно зарядового состояния проверяется.

8.2.1. С в сильных взаимодействиях. Прямой проверкой C-инвариантности явилось бы сравнение дифференциального сечения, распределения по энергии, поляризации и т. д. для процесса

$$a+b\to c+d+e+\ \ldots$$

с соответствующими величинами для зарядово-сопряженного процесса

$$\bar{a}+\bar{b}\to\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}+\ \ldots$$

Однако существует всего несколько систем, для которых легко получить оба начальных состояния. Пока использована только одна система — $\bar{p}p$-аннигиляция в состоянии покоя или на лету.

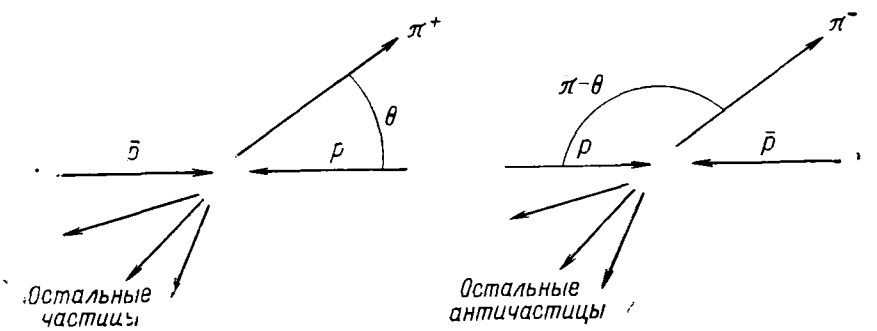


Рис. 8.1. Две аннигиляции $\bar{p}p$ на лету, связанные с помощью зарядового сопряжения

Рассмотрим, например, аннигиляцию на лету на $\pi^+\pi^-$ и n—2 частиц определенного вида. C-инвариантность связывает в с. ц. м. амплитуду $\bar{p}p$-аннигиляции на π^+ и n—1 других частиц с амплитудой $p\bar{p}$-аннигиляции на π^- и n—1 других частиц (зарядово-сопряженных к исходным n—1 частицам). Этот процесс показан на рис. 8.1. Исходные состояния различаются пространственным поворотом на угол π. Так как предполагается, что инвариантность относительно вращения выполняется, то после возведения в квадрат и суммирования по всем переменным, кроме одной, имеем

$$(d\sigma/d\cos\theta_+)_{\theta_+=\theta} = (d\sigma/d\cos\theta_-)_{\theta_-=\pi-\theta}.$$

В обоих случаях углы измеряются относительно направления импульса p. Аналогично для спектров по энергии π^+ и π^- получаем:

$$d\sigma/dE_+ = d\sigma/dE_-.$$

Подобные соотношения были получены Пайсом [144]. Аналогичным образом можно показать, что угловое распределение π^0 должно быть симметричным относительно $\theta=\pi/2$.

Ксуонг, Линч и Хинрикс [190] и Маглич, Кальбфлейш и Стивенсон [133], изучая аннигиляцию на лету, не обнаружили никаких существенных статистических отклонений от этих равенств. Добржинский и др. [59], изучив несколько различных каналов аннигиляции, оценили относительную амплитуду нарушения C-инвариантности ($\sim 1\%$).

Если аннигиляция происходит в состоянии покоя, можно предположить, что $\bar{p}$ захватывается с атомной орбиты, так что начальное состояние имеет определенную зарядовую четность η_C. В этом случае C-инвариантность означает, что амплитуда аннигиляции, например, на π^+ и $n-1$ других мезонов равна η_C, умноженному на амплитуду распада на π^- и $n-1$ мезонов (зарядово-сопряженных к исходным мезонам), что приводит к тем же выводам.

Балтей и др. [12] в своем эксперименте проверили только распределение по энергии (распределение для одной частицы и для двух частиц по их инвариантной массе). Интегрирование по углам исключает те члены распределения, которые являются результатом интерференции и существуют в том случае, если начальные состояния с противоположной зарядовой четностью некогерентны. При этом предполагается, что захват происходит из s-состояния. Таким образом, состояния с $\eta_C=+1$ и $\eta_C=-1$ имеют разные полные моменты количества движения ($^1S_0$ и $^3S_1$ соответственно).

Экспериментаторы проверили отдельно 34 811 чисто пионных распадов (доминирующий канал $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-\pi^0$) и 4663 K-мезонных распада ($K^0K^+\pi^-\pi^0$ и $K^0K^-\pi^+\pi^0$). По их оценке, отношение амплитуд с нарушением и сохранением C равно примерно 1% для пионных и 2% для K-мезонных мод.

8.2.2. C в электромагнитных взаимодействиях. Стандартная квантовоэлектродинамическая теория взаимодействия фотонов с электронами и мюонами явно инвариантна относительно зарядового сопряжения. Следовательно, доказательство C-инвариантности электромагнитного взаимодействия электрона и мюона заключается в чрезвычайно хорошем соответствии предсказаний этой теории для лэмбовского сдвига и для магнитных моментов e и μ с экспериментальными значениями этих величин.

Адроны. В качестве примера адронного процесса, который обусловлен скорее электромагнитным, чем сильным взаимодействием, можно привести распад η^0-мезона. Для этого мезона, имеющего положительную G-четность, $J^P=0^-$, что запрещает его рас-

пад на 2π. Масса η^0-мезона слишком мала, так что распад на 4π невозможен, и единственно возможный процесс распада (см. § 9.5) — это электромагнитный распад на $\pi^+\pi^-\gamma$ и $\pi^+\pi^-\pi^0$ с нарушением G-четности. Нарушение C-инвариантности в одном из этих распадов привело бы к различию энергетических распределений π^+ и π^-.

В поисках этого различия было проведено много экспериментов. Результаты одного из ранних экспериментов, выполненного Балтеем и др. [13], по-видимому, указывают на небольшое превышение средней энергии π^+-мезона над средней энергией π^--мезонов, измеренных в системе покоя η^0. Однако эксперимент Кнопса и др. в ЦЕРНе [47] и последующие работы Лэйтера и др. [116] не подтвердили нарушения C-инвариантности. Самая последняя оценка зарядовой асимметрии для $\eta\to 3\pi$ дает значение $\alpha=-0{,}005\pm 0{,}0022$, а для $\eta\to\pi\pi\gamma$ $\alpha=0{,}005\pm 0{,}006$.

8.2.3. C в слабых взаимодействиях. Согласно анализу Ли, Эме и Янга [117], из экспериментов Ву и др. [188], Гарвина, Ледермана и Вайнриха [81] и Фридмана и Телеги [80], продемонстрировавших несохранение четности в β-распаде и распаде мюона, также следует, что при этом нарушается и C. Более прямое доказательство дают лептонные распады π-мезонов:

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu ; \tag{8.2а}$$

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu . \tag{8.2б}$$

При π^--распаде μ^--мезон оказывается поляризованным в направлении своего импульса, как показано в п. 5.6.3. При π^+-распаде спин μ^+-мезона антипараллелен импульсу этой частицы (в обоих случаях спин измеряется в системе отсчета покоящегося пиона). Сравнение этих зарядово-сопряженных процессов наглядно демонстрирует нарушение инвариантности относительно зарядового сопряжения.

Интересно отметить, однако, что эти наблюдения совместимы с инвариантностью относительно действия объединенного оператора CP, заменяющего в случае распада пионов (8.2) частицы античастицами и меняющего знак спиральности лептонов. В частности, если нейтрино отличается от своей античастицы лептонным зарядом, как описано в п. 5.6.3, то операция CP переводит левое нейтрино в правое и наоборот. Операторы C и P нельзя применять к нейтрино отдельно, так как при этом получили бы не существующие физически «правое» нейтрино и «левое» антинейтрино.

Аналогичным образом нелептонные распады, такие, как распады нейтральных каонов, инвариантны относительно CP с большой степенью точности. И действительно, CP-инвариантность считалась точной вплоть до эксперимента Христенсена и др. [46], осуществленного в 1964 г.

§ 8.3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО *CP*

8.3.1. Оператор CP. После того как выявлено нарушение четности в распадах в случае слабого взаимодействия, возникает вопрос, справедлива ли в этих процессах какая-либо более общая симметрия. До эксперимента Христенсена и др. [46] считалось, что инвариантность относительно комбинации операторов CP существует всегда. В случае CP-инвариантности любое нарушение четности в какой-либо системе частиц должно наблюдаться как обращенное во времени в такой же системе античастиц. Инверсия пространственных координат под действием оператора P вместе с заменой частиц античастицами под действием оператора зарядового сопряжения C образуют новую операцию CP. Собственное значение соответствующего унитарного оператора U_{CP} сохраняется даже в том случае, когда нет сохранения собственных значений отдельных составляющих его операторов. Наиболее известно применение этой идеи к нейтральным K-мезонам, для которых это рассмотрение применимо приближенно с погрешностью до $\pm 2\%$.

8.3.2. Распад нейтральных K-мезонов. Волновые функции двух нейтральных K-мезонов (K^0 со странностью $+1$ и $\overline{K}^0$ со странностью -1), являющихся античастицами друг по отношению к другу, должны быть связаны оператором U_C или U_{CP}, но сами быть собственными состояниями U_C или U_{CP} не могут. Системы пионов, на которые распадаются нейтральные K-мезоны, могут быть собственными состояниями U_{CP}, а именно: если процесс распада происходит за счет слабого взаимодействия, нарушающего P, но сохраняющего CP (точно или приближенно), то следует искать такие возможные начальные состояния, которые являются собственными состояниями U_{CP}. Эти нормированные начальные состояния имеют вид

$$|K_1^0\rangle = 2^{-1/2}(|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle); \tag{8.3}$$

$$|K_2^0\rangle = 2^{-1/2}(|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle). \tag{8.4}$$

Введя условия

$$U_{CP}|K^0\rangle = -|\overline{K}^0\rangle \tag{8.5}$$

и

$$U_{CP}|\overline{K}^0\rangle = -|K^0\rangle, \tag{8.6}$$

можно проверить, что K_1^0 и K_2^0 действительно представляют собой собственные состояния CP с собственными значениями, равными $+1$ и -1 соответственно, так что

$$U_{CP}|K_1^0\rangle = +|K_1^0\rangle \text{ и } U_{CP}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle.$$

Знак минус в равенствах (8.5) и (8.6) возникает из-за нашего соглашения об отрицательной четности K-мезонов. В некоторых случаях произвольная относительная фаза собственных состояний гиперзаряда K^0 и $\overline{K}^0$ выбирается такой, чтобы этот знак исчез, в результате чего изменятся определения (8.3) и (8.4).

Если теперь рассмотреть конечное состояние из двух пионов ($\pi^+\pi^-$ или $2\pi^0$), то увидим, что оно должно иметь собственное значение $CP=+1$. Следовательно, оно может быть образовано из K_1^0-, но не из K_2^0-мезона. Масса покоя K^0 и $\overline{K}^0$ достаточно велика для того, чтобы был разрешен распад на два или три пиона. В случае распада на два пиона разрешенная область фазового пространства больше, поэтому можно ожидать, что вероятность перехода больше, когда начальное состояние есть K_1^0, и, следовательно, распад на два пиона разрешен. Когда начальное состояние — K_2^0, распад на три пиона есть единственно возможный канал реакции и общая скорость распада соответственно меньше. Наблюдаемые средние времена жизни фактически равны $0{,}86\cdot10^{-10}$ *сек* (для K_1^0) и $5{,}3\cdot10^{-8}$ *сек* (для K_2^0).

8.3.3. Развитие во времени пучка нейтральных K-мезонов. Рассмотрим пучок нейтральных K-мезонов, рожденных в результате сохраняющего странность сильного взаимодействия, $\pi^-+p\to K^0+\Lambda^0$. Сначала пучок состоит целиком из K^0 с $S=1$. Это состояние не является собственным состоянием оператора CP, но может быть описано смесью двух собственных состояний K_1^0 и K_2^0 оператора CP, обладающих одинаковыми амплитудами. Объединяя (8.3) и (8.4), получаем

$$|K^0\rangle = 2^{-1/2}(|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle); \tag{8.7}$$

$$|\overline{K}^0\rangle = 2^{-1/2}(|K_2^0\rangle - |K_1^0\rangle). \tag{8.8}$$

Однако с течением времени компонента K_1^0 распадается со средним временем жизни около 10^{-10} *сек*, тогда как относительно стабильная компонента K_2^0 остается. Спустя промежуток времени, равный нескольким средним временам жизни K_1^0, оставшийся пучок будет состоять почти из одних K_2^0, т. е. будет представлять смесь K^0 и $\overline{K}^0$ в равных количествах. Таким образом, распад, при котором нарушается странность, приводит к спонтанному превращению K^0 или $\overline{K}^0$ в их смесь в равных пропорциях, имеющую относительную фазу и характеристику среднего времени жизни K_2^0.

И наоборот, пучок K_2^0 можно пропустить через такой материал, в котором в соответствии со странностью падающих частиц взаимодействия происходят селективно. Например, реакция $\overline{K}^0+n\to\pi^-+\Sigma^-$ имеет гораздо большее сечение, чем любая реакция между K^0 и n. В результате компонента пучка с $S=-1$ обедняется. Оставшаяся смесь должна описываться как K_2^0 с небольшим количеством K_1^0. Таким образом, роль материала сводится к регенерации некоторых короткоживущих частиц K_1^0, являющихся собственными состояниями оператора CP. Поток K_1^0, совпадающий по направлению с потоком частиц из материала

регенератора, распадается с временем жизни 10^{-10} *сек*, а поток K_2^0 остается, но уменьшает свою интенсивность.

Зависимость от времени разных амплитуд в пучке нейтральных K-мезонов можно выразить через $\exp(-i\lambda_1 t)$ для K_1^0 и $\exp(-i\lambda_2 t)$ для K_2^0, где

$$\lambda_1 = m_1 - \frac{1}{2} i\gamma_1 \tag{8.9}$$

и

$$\lambda_2 = m_2 - \frac{1}{2} i\gamma_2; \tag{8.10}$$

γ_1 и γ_2 — скорости распада для K_1^0 и K_2^0, причем γ_1 больше; m_1 и m_2 — обычные массы K_1^0 и K_2^0. Их разность $\Delta m = m_2 - m_1$ контролирует интерференционные эффекты между K_1^0 и K_2^0.

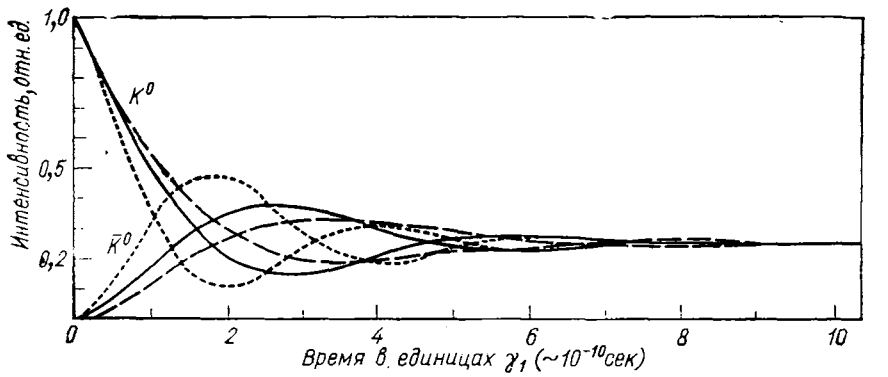


Рис. 8.2. Зависимость интенсивности K^0 и $\bar{K}^0$ от времени в пучке первоначально чистых K^0:
сплошная линия соответствует $\Delta m = \gamma_1$, штриховая $\Delta m = 0{,}75\,\gamma_1$, пунктир $\Delta m = 1{,}5\,\gamma_1$

Спустя определенное время t пучок, состоящий сначала из одних K^0, можно представить волновой функцией, которая получается введением в уравнение (8.7) временной зависимости и равна

$$\psi(t) = 2^{-1/2}(|K_1^0\rangle \exp(-i\lambda_1 t) + |K_2^0\rangle \exp(-i\lambda_2 t)). \tag{8.11}$$

Выражая $\psi(t)$ через K^0 и $\bar{K}^0$, с помощью уравнений (8.3) и (8.4) получаем

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\{|K^0\rangle(\exp(-i\lambda_1 t) + \exp(-i\lambda_2 t)) +$$
$$+ |\bar{K}^0\rangle(\exp(-i\lambda_2 t) - \exp(-i\lambda_1 t))\}.$$

Следовательно, интенсивность компоненты K^0 в момент времени t равна

$$\frac{1}{4}\,|\exp(-i\lambda_2 t)-\exp(-i\lambda_1 t)|^2=\frac{1}{4}\left\{\exp(-\gamma_1 t)+\exp(-\gamma_2 t)-\right.$$

$$\left.-2\exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2\ t\right)\cos(\Delta m t)\right\}. \qquad (8.12)$$

Соответствующий расчет интенсивности K^0 дает

$$\frac{1}{4}\,|\exp(-i\lambda_2 t)-\exp(-i\lambda_1 t)|^2=\frac{1}{4}\left\{\exp(-\gamma_1 t)+\exp(-\gamma_2 t)+\right.$$

$$\left.+2\exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\,t\right)\cos(\Delta m t)\right\}. \qquad (8.13)$$

Основные характеристики этих временных зависимостей определяются относительной разностью масс Δm и наибольшей постоянной распада γ_1. Измерения в пузырьковой камере показали, что Δm и γ_1 примерно равны, а наблюдаемые значения $\Delta m/\gamma_1$ лежат в диапазоне 0,6—1,9. На рис. 8.2 показана зависимость от времени интенсивностей K^0 и $\bar{K}^0$ для $\Delta m\sim\gamma_1$. Для бо́льших Δm начальные колебания очень резко выражены, а при меньших Δm происходит переход без колебаний к однородной смеси.

Как уже упоминалось, изложенная выше теория предполагает *CP*-инвариантность. Отклонения от нее обсуждаются в § 8.5.

§ 8.4. CPT-ИНВАРИАНТНОСТЬ

Значение оператора *CPT*, представляющего собой последовательное применение операторов обращения времени, пространственной инверсии и зарядового сопряжения, выходит за рамки значения этих трех отдельных симметрий. Это происходит из-за *CPT-теоремы*, открытой Паули [147] и Людерсом и Зумино [130, 131]. Эта теорема гласит: в квантовой теории поля любой гамильтониан, инвариантный относительно собственных преобразований Лоренца, будет обязательно инвариантным и относительно комбинированного оператора *CPT* независимо от того, инвариантен ли он относительно *C*, *P* или *T* отдельно. Доказательство *CPT*-теоремы в современной конструктивной квантовой теории поля, как показано, например, в книге Стритера и Вайтмана [166], стало настолько уточненным, что единственными понятиями, используемыми в этом общем доказательстве, являются релятивистская инвариантность и концепция локального поля.

Доказательство теоремы выходит за рамки этой книги. Будем довольствоваться исследованием некоторых ее следствий и экспериментальными подтверждениями ее справедливости.

Так как *CPT*-теорема основана на предположениях, носящих общий характер, следующие из нее предсказания тоже носят общий характер, т. е. не являются неожиданными. Действительно, часто предполагается, что *CPT*-инвариантность заключена в самой природе принципа абсолютной симметрии, на одном уровне с законом сохранения заряда или барионного числа. Однако ее можно и нужно проверять. Так как все динамические модели про-

цессов формулируются с помощью квантовой теории поля или некоторого ее эквивалента, CPT-инвариантность автоматически выполняется. Поэтому существует мало теоретических исследований эффектов CPT-нарушения, можно даже сказать, что они совсем отсутствуют.

Наиболее прямое следствие из CPT-теоремы заключается в том, что справедливость (или несправедливость) любой из инвариантностей C, P или T эквивалентна справедливости (или несправедливости) произведения двух других. Таким образом, если в каком-либо взаимодействии P-инвариантность нарушается, инвариантность относительно действия оператора CT должна тоже нарушаться. Это означает, что по крайней мере одна из двух остальных инвариантностей C или T, должна нарушаться. В то же время, если P сохраняется, симметрия CT должна выполняться. При этом C и T или сохраняются вместе, или вместе нарушаются. На диаграмме показаны разные варианты CPT-инвариантного взаимодействия

P	C	T	Примеры
V	V	V	Сильное и электромагнитное взаимодействия
V	×	×	Примеров нет
×	×	V	β-Распад
×	V	×	Примеров нет
×	×	×	$K_L^0 \to 2\pi$

Сильное и электромагнитное взаимодействия занимают первую строку, а слабые взаимодействия, при которых сохраняется CP, — третью строку. Как теперь известно, для распада $K_L^0 \to 2\pi$ характерно взаимодействие, при котором нарушается CP и сохраняется CPT. Оно занимает пятую строку (см. § 8.5).

8.4.1. Следствия из CPT-инвариантности для масс и времен жизни. В CPT-преобразование входит операция обращения времени T, для которой соответствующий оператор O_T является антиунитарным. Отсюда следует, что оператор, соответствующий CPT, также антиунитарен и к нему применимы правила обращения с такими операторами, выведенные в п. 6.2.3. В частности, хотя примененный дважды оператор CPT и возвращает систему в исходное состояние, такого понятия, как CPT-четность, не существует. Мы могли бы обозначить CPT-оператор символом O_{CPT}. Однако для того чтобы подчеркнуть первостепенную важность оператора как целого, используем специальный символ Θ:

$$\Theta = O_{CPT}\,.$$

Действие Θ на векторы состояния можно выяснить из их свойств преобразования относительно C, P и T отдельно. Так, под действием Θ одночастичное состояние с импульсом $\mathbf{p}$ и спиральностью λ преобразуется в состояние с античастицей, имеющей

импульс **p** и спиральность $-\lambda$. Например, из уравнений (5.46) и (6.63) находим для стандартного спирального состояния

$$\Theta\varphi^a_{p0\lambda} = U_C U_P O_T \varphi^a_{p0\lambda} = \eta_P (-1)^{s-\lambda} \varphi^{\bar{a}}_{p0-\lambda}; \qquad (8.14)$$

здесь a характеризует частицу, $\bar{a}$ — соответствующую античастицу, импульс **p** которой направлен вдоль оси z.

Инвариантность гамильтониана H относительно CPT выражается формулой

$$\Theta^{-1} H \Theta = H.$$

Взяв матричный элемент этого уравнения между любыми двумя состояниями φ_b и φ_a, получим, согласно уравнению (6.30),

$$(\varphi_b, H\varphi_a) = (\varphi_b, \Theta^{-1} H \Theta \varphi_a) = (\Theta\varphi_b \Theta\Theta^{-1} H \Theta\varphi_a)^*.$$

Следовательно,

$$(\varphi_b, H\varphi_a) = (\varphi_{\bar{b}}, H\varphi_{\bar{a}})^*, \qquad (8.15)$$

где $\varphi_{\bar{a}}$ означает CPT-преобразование состояния φ_a. Если за φ_a и φ_b взять состояние одной покоящейся частицы, то диагональный матричный элемент $(\varphi_a, H\varphi_a)$ будет равен как раз массе частицы и равенство (8.15) даст $m_a = m_{\bar{a}}$.

Таким образом, инвариантность относительно CPT требует равенства масс частицы и античастицы безотносительно к тому, инвариантен ли гамильтониан H относительно одного C или нет. Этот результат можно понять непосредственно следующим образом.

В результате действия оператора Θ на одну частицу a, находящуюся в покое и обладающую проекцией спина λ, получается античастица $\bar{a}$ с проекцией спина $-\lambda$. С помощью поворота можно перевести последнее состояние в античастицу $\bar{a}$ с проекцией спина $+\lambda$. Таким образом, комбинируя оператор Θ с поворотом, получаем тот же эффект, какой дает действие оператора C *на одночастичное состояние*, если не делать никаких предположений относительно C-инвариантности. Нестабильную частицу можно рассматривать как собственное состояние H с комплексным собственным значением $m - \frac{1}{2}i\Gamma$, где m — масса, а Γ — полная ширина распада или величина, обратная времени жизни. В этом случае CPT-инвариантность требует, чтобы и масса, и время жизни частицы были равны массе и времени жизни античастицы (см. [131]): $m_a = m_{\bar{a}}$; $\Gamma_a = \Gamma_{\bar{a}}$.

Некоторые результаты измерения времени жизни частиц и античастиц приведены в табл. 8.1. Все эти результаты в пределах чувствительности эксперимента порядка 10^{-3} согласуются с CPT-инвариантностью.

Наилучшее доказательство CPT-инвариантности дает система нейтральных K-мезонов. Для состояний $|K^0\rangle$ и $|\overline{K}^0\rangle$, связанных зарядовым сопряжением, CPT-инвариантность требует, чтобы

$$m(K^0) = m(\overline{K}^0),$$

где

$$m(K^0) = \langle K^0 \mid H \mid K^0 \rangle;$$
$$m(\overline{K^0}) = \langle \overline{K^0} \mid H \mid \overline{K^0} \rangle$$

и

$$H = H_{\text{сильн}} + H_{\text{эм}} + H_{\text{сл}}.$$

Состояния $|K^0>$ и $|\overline{K^0}>$ — собственные состояния $H_{\text{сильн}}$, но не полного гамильтониана. Физические состояния $|K_S^0>$ и $|K_L^0>$, являющиеся суперпозицией $|K^0>$ и $|\overline{K^0}>$, имеют определенные массы (и времена жизни). Можно показать, что разность $m(K^0)-m(\overline{K^0})$ не превышает $m(K_S)-m(K_L)$, т. е. разности масс короткоживущих и долгоживущих нейтральных K-мезонов. Последняя разность известна с очень большой точностью. Измерения дают

$$\left|\frac{m(K_S)-m(K_L)}{m(K)}\right| \sim 10^{-14}.$$

Это значение определяет верхний предел нарушения *CPT*-инвариантности в сильных взаимодействиях. Простейший вклад электромагнитного взаимодействия в массу получается за счет излучения и последующего поглощения виртуального фотона. Следовательно, можно ожидать, что он будет порядка α относительно вклада сильного взаимодействия. Несколько большую величину — порядка 10^{-12} относительно $H_{\text{сильн}}$, сохраняющего *CPT*, может иметь член, соответствующий нарушению *CPT* в электромагнитном взаимодействии. Путем таких же рассуждений можно прийти к выводу, что верхний предел нарушения *CPT* в слабом взаимодействии имеет порядок 10^{-7}. Здесь будет проверена только та часть слабого взаимодействия, для которой $S=0$. Хотя *CPT*-инвариантность и предполагает равенство полной ширины распада частицы и античастицы, она не требует равенства ширины распада частиц в зарядово-сопряженных каналах, например

Таблица 8.1

Сравнение времени жизни частицы и античастицы как проверка *CPT*-инвариантности

Частица	$\frac{\tau^+ - \tau^-}{\tau^-}$	Литература
$\mu^+\mu^-$	$0{,}000 \pm 0{,}001$	[137]
K^+K^-	$-0{,}0009 \pm 0{,}0008$	[128]
$\pi^+\pi^-$	$0{,}004 \pm 0{,}0018$	[128]
$\pi^+\pi^-$	$0{,}00064 \pm 0{,}00069$	[8]

$$n \to pe^-\bar{\nu} \quad \text{и} \quad \bar{n} \to \bar{p}e^+\nu.$$

Однако если распад можно описать в приближении первого порядка, для которого оператор перехода $\mathcal{T}$ является эрмитовым, то наиболее важен случай слабого распада, когда $H_{\text{сл}} = \mathcal{T}_{\text{сл}}$. Тогда обобщение положений п. 6.2.5 на *CPT* дает

$$(\varphi_b, \mathcal{T}\varphi_a) = (\Theta\varphi_b, \mathcal{T}\Theta\varphi_a)^*.$$

Так как действие оператора Θ сводится к превращению частиц в античастицы и обращению спинов и спиральностей, но не импульсов, квадраты амплитуд или вероятности удовлетворяют равенству

$$W_{a\to b}(\mathbf{p}, \mathbf{S}) = W_{\bar{a}\to\bar{b}}(\mathbf{p}, -\mathbf{S}).$$

Суммируя по всем спинам, приходим к предсказанию, что процессы распада $a\to b$ и $\bar{a}\to\bar{b}$ имеют одинаковое распределение. Следовательно, одинаковы и парциальные ширины процессов (Ли, Эме и Янг [117]). Эти результаты применимы к таким парам, как

$$K^+ \to \mu^+ + \nu, \quad K^- \to \mu^- + \bar{\nu}$$

и

$$K^+ \to \pi^0 + \mu^+ + \nu, \quad K^- \to \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu}.$$

В то же время в таких процессах, как

$$\Lambda^0 \to p + \pi^-, \quad \bar{\Lambda}^0 \to \bar{p} + \pi^+$$

или

$$K^\pm \to \pi^+ + \pi^- + l^\pm + \nu(\bar{\nu}),$$

сильное взаимодействие в конечном состоянии означает, что условие, что это процессы первого порядка, не выполняется. Анализ, проделанный в теореме о конечном состоянии (см. п. 6.4.2), можно использовать для того, чтобы показать, что инвариантность относительно CPT приводит к соотношениям, связывающим фазы двух амплитуд зарядово-сопряженных распадов и фазовый сдвиг для перерассеяния в конечном состоянии. Случай $K^\pm_{l_4}$-распадов и их связь с $\pi\pi$-перерассеянием в конечном состоянии обсуждаются в § 8.4 работы [119].

8.4.2. CPT-инвариантность и магнитные дипольные моменты. Рассматривая действие CPT-преобразования на движение частицы в заданном электромагнитном поле, можно показать, что магнитные моменты частицы и античастицы равны. Аналогично соответствующие электромагнитные форм-факторы частицы и античастицы имеют одинаковую функциональную зависимость.

Мы рассмотрим только равенство магнитных моментов для частицы со спином 1/2. При этом используем простой аргумент, приведенный в работе [93].

Образуем с помощью проволочного витка с током электромагнитное поле и поместим в его центр частицу с направленным вверх спином (рис. 8.3). Теперь ко всей системе, состоящей из витка и частицы, применим CPT-преобразование, взяв центр витка за начало координат для пространственной инверсии. Тогда поток электронов превратится в поток позитронов, имеющих противоположное направление, так что электрический ток, а следовательно, и электромагнитное поле не изменятся. Частица a в состоянии покоя со спином, направленным вверх, превращается

в античастицу $\bar{a}$ в состоянии покоя со спином, направленным вниз. *CPT*-инвариантность требует, чтобы энергия в обоих случаях не изменялась. Следовательно, и дипольный магнитный момент должен остаться тем же самым. Значит, магнитные дипольные моменты частицы и античастицы соответственно совпадают и противоположны направлению спина.

Магнитные моменты электронов и мюонов измерены с довольно большой точностью. Результаты измерений удобно выразить через гиромагнитное отношение g.

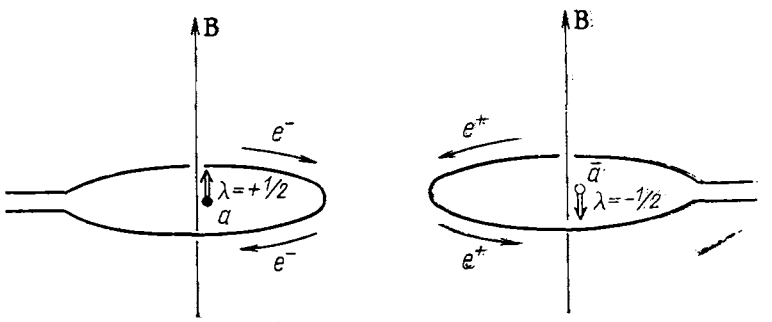


Рис. 8.3. Действие *CPT*-преобразования на частицу в поле витка с током

Из результатов Рича и Крейна [150] следует:

$$g(e^+) - g(e^-) = (3 \pm 4)\,\alpha^2/\pi^2,$$

где α — постоянная тонкой структуры. Эксперименты на мюонах в накопительном кольце мюонов, проведенные в ЦЕРНе (Бэйли и др. [10]), показывают, что

$$g(\mu^+) - g(\mu^-) = (1 \pm 1{,}5)\,\alpha^2/\pi^2.$$

Таким образом, электромагнитное взаимодействие лептонов оказывается *CPT*-инвариантным.

§ 8.5. НАРУШЕНИЕ *CP*-ИНВАРИАНТНОСТИ

CP-инвариантная модель поведения нейтральных K-мезонов, описанная в § 8.2, считалась точной вплоть до 1964 г. Эксперимент Христенсена и др. [46] показал, что небольшая часть долгоживущих нейтральных K-мезонов распадается на два пиона, нарушая простую *CP*-инвариантную модель. Количество таких аномальных распадов на $\pi^+\pi^-$ составило 0,2% всех распадов на заряженные частицы. Последующие эксперименты показали, что существует распад на $2\pi^0$ с аналогичным нарушением *CP* и что лептонные распады

$$K_L^0 \to \pi^- l^+ \nu; \tag{8.16}$$

$$K_L^0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu} \tag{8.17}$$

являются еще более ярким доказательством нарушения CP. В результате основного процесса (8.16) нейтральная частица K_L^0 распадается на положительные лептоны.

Из CP-инвариантности для этой системы следует:

а) частица K_L^0 с определенным временем жизни совпадает с собственным состоянием оператора CP

$$|K_2^0\rangle = 2^{-1/2}(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle);$$

б) амплитуды K^0- и $\overline{K}^0$-распадов связаны определенными соотношениями. Обозначим для краткости конечное состояние его заряженным лептоном. Тогда в силу CP-инвариантности

$$\langle l^+, \mathbf{p} \mid \mathcal{T} \mid K^0\rangle = -\langle l^-, -\mathbf{p} \mid \mathcal{T} \mid \overline{K^0}\rangle;$$

$$\langle l^-, \mathbf{p} \mid \mathcal{T} \mid K^0\rangle = -\langle l^+, -\mathbf{p} \mid \mathcal{T} \mid \overline{K^0}\rangle.$$

Из условий а) и б) делаем вывод, что скорости процессов (8.16) и (8.17) должны быть одинаковы.

Экспериментальное исследование этих довольно редких мод четко показывает существование малой, но все же не равной нулю зарядовой асимметрии, измеряемой величиной

$$\delta = \frac{\Gamma(l^+) - \Gamma(l^-)}{\Gamma(l^+) + \Gamma(l^-)}.$$

Среднее значение этой величины в настоящее время, по данным «Группы по частицам» (1974 г.), равно $\delta = (3{,}26 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$.

Известны разные попытки описания и объяснения этих наблюдений, имевшие разный успех (см., например, работу Кабира [110]), но ни одно из них нельзя выделить по отношению к другим. В последнее время предпочитают описание, использующее сверхслабое взаимодействие [118, 185, 186].

Обычно ситуацию описывают с помощью коротко- и долгоживущего состояний K_S^0 и K_L^0, которые лишь приблизительно идентичны собственным состояниям CP K_1^0 и K_2^0. Чтобы объяснить наблюдения, две последние величины в табл. 8.2 выражают

Таблица 8.2

Распады нейтральных K-мезонов, расположенные в порядке уменьшения их скорости

Начальное состояние	Канал распада	Константа распада, $сек^{-1}$	Примечание
K_S^0	$\pi^+\pi^-$	$0{,}799 \cdot 10^{10}$	Адронные распады с сохранением CP, быстрые
	$\pi^0\pi^0$	$0{,}361 \cdot 10^{10}$	
K_L^0	$\pi e \nu$	$7{,}54 \cdot 10^6$	Лептонные распады
	$\pi \mu \nu$	$5{,}18 \cdot 10^6$	
	$\pi^0\pi^0\pi^0$	$4{,}13 \cdot 10^6$	Адронные распады с сохранением CP
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	$2{,}43 \cdot 10^6$	
	$\pi^+\pi^-$	$3{,}03 \cdot 10^4$	Адронные распады с нарушением CP
	$\pi^0\pi^0$	$1{,}81 \cdot 10^4$	

в виде долей постоянных распада K_L^0 или K_S^0, соответствующих сохранению CP-инвариантности.

8.5.1. Формализм распада. Чтобы приспособить термины, используемые при нарушении CP-инвариантности, временную зависимость пучка нейтральных K-мезонов можно описать следующим образом. Предположим, что вместо двух простых зависимостей от времени $\exp(-i\lambda t)$, введенных в п. 8.3.3, эта зависимость определяется уравнением

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \tag{8.18}$$

где a_1 и a_2 — коэффициенты общего состояния

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)\,|K^0\rangle + a_2(t)\,|\overline{K}^0\rangle. \tag{8.19}$$

В общем случае временная зависимость (8.18) дает переменное значение a_1/a_2, определяющее относительные пропорции K^0 и $\overline{K}^0$ в пучке. Однако алгебраические преобразования показывают, что существуют два значения a_1/a_2, для которых с течением времени состав пучка не меняется, а его интенсивность падает по экспоненте. Эти два состояния имеют вид (8.19), в котором $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ является собственным вектором комплексной матрицы массы Λ, и соответствуют коротко- и долгоживущим K-мезонам K_S и K_L.

Обозначим собственные значения

$$\lambda_L = m_L - \frac{1}{2}i\gamma_L; \quad \lambda_S = m_S - \frac{1}{2}i\gamma_S. \tag{8.20}$$

и запишем их в виде

$$\left.\begin{aligned} |K_L\rangle &= [2(1+|\varepsilon_L|^2)]^{-1/2}[(1+\varepsilon_L)\,|K^0\rangle + (1-\varepsilon_L)\,|\overline{K}^0\rangle]; \\ |K_S\rangle &= [2(1+|\varepsilon_S|^2)]^{-1/2}[(1+\varepsilon_S)\,|K^0\rangle - (1-\varepsilon_S)\,|\overline{K}^0\rangle]. \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

Комплексные параметры ε_L и ε_S определены таким образом, что ε_L является мерой амплитуды K_1^0 относительно K_2^0 в K_L, а ε_S — мерой амплитуды K_2^0 относительно K_1^0 в K_S. До тех пор, пока CP-инвариантность приблизительно сохраняется, можно ожидать, что ε_L и ε_S малы.

Определим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_S + \varepsilon_L); \quad \delta = \frac{1}{2}(\varepsilon_S - \varepsilon_L). \tag{8.22}$$

За период времени t частицы K_L и K_S распадаются по экспоненте в соответствии с формулами

$$|K_L\rangle \to \exp\left(-im_L t - \frac{1}{2}\gamma_L t\right)|K_L\rangle; \tag{8.23а}$$

$$|K_S\rangle \to \exp\left(-im_S t - \frac{1}{2}\gamma_S t\right)|K_S\rangle. \tag{8.23б}$$

Связь между ε_L, ε_S и элементами Λ можно установить еще более легко, если записать общее состояние нейтрального K-мезона в виде суперпозиции K^0, $\overline{K}^0$ и K_L, K_S и рассмотреть их изменение за малый промежуток времени δt [см. (8.18) и (8.23), а также [22, 165]]. После чисто алгебраических преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda_L + \lambda_S) + \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_S}{2(1-\varepsilon_L\varepsilon_S)}(\lambda_L - \lambda_S);\\
\Lambda_{22} &= \frac{1}{2}(\lambda_L + \lambda_S) - \frac{\varepsilon_L - \varepsilon_S}{2(1-\varepsilon_L\varepsilon_S)}(\lambda_L - \lambda_S);\\
\Lambda_{12} &= \frac{(1+\varepsilon_L)(1+\varepsilon_S)}{2(1-\varepsilon_L\varepsilon_S)}(\lambda_L - \lambda_S);\\
\Lambda_{21} &= \frac{(1-\varepsilon_L)(1-\varepsilon_S)}{2(1-\varepsilon_L\varepsilon_S)}(\lambda_L - \lambda_S).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.24)$$

Уравнение (8.18) было записано в виде феноменологического уравнения, но его можно вывести и как частное решение зависящего от времени уравнения Шредингера для системы из $|K^0\rangle$ и $|\overline{K}^0\rangle$ и всех тех состояний $|\alpha\rangle$, в которые K^0 и $\overline{K}^0$ могут совершать переходы (реальные или виртуальные) под влиянием полного гамильтониана

$$H = H_{\text{сильн}} + H_{\text{эм}} + H_{\text{сл}}.$$

Это приближение Вайскопфа — Вигнера, уже много раз описанное (Кабир [110], приложение А). С его помощью получаем выражение для элементов $\mathbf{\Lambda}$ через амплитуды распада. Для этого запишем 2×2-матрицу $\mathbf{\Lambda}$ через эрмитову матрицу массы $\mathbf{M}$ и эрмитову матрицу распада Γ: $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} - \frac{1}{2}i\mathbf{\Gamma}$.

Тогда элементы матрицы Γ определяются действительными элементами матрицы перехода $H_{сл}$ с помощью обычных формул Золотого правила:

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= 2\pi \int d\alpha\rho(E_\alpha)\,|\langle\alpha|H_{\text{сл}}|K^0\rangle|^2\,\delta(E_\alpha - m_0);\\
\Gamma_{22} &= 2\pi \int d\alpha\rho(E_\alpha)\,|\langle\alpha|H_{\text{сл}}|\overline{K}^0\rangle|^2\,\delta(E_\alpha - m_0).
\end{aligned}\right\} \qquad (8.25)$$

При этом

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{12}^* = 2\pi \int d\alpha\rho(E_\alpha)\,\langle\overline{K}^0|H_{\text{сл}}|\alpha\rangle\langle\alpha|H_{\text{сл}}|K^0\rangle\,\delta(E_\alpha - m_0)$$

и элементы матрицы M зависят от виртуальных переходов (или переходов вне энергетической оболочки), что выражается формулами теории возмущений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
M_{11} &= m_0 + \langle K^0|H_{\text{сл}}|K^0\rangle + \mathcal{P}\int d\alpha\rho(E_\alpha)\frac{|\langle\alpha|H_{\text{сл}}|K^0\rangle|^2}{m_0 - E_\alpha};\\
M_{22} &= m_0 + \langle\overline{K}^0|H_{\text{сл}}|\overline{K}^0\rangle + \mathcal{P}\int d\alpha\rho(E_\alpha)\frac{|\langle\alpha|H_{\text{сл}}|\overline{K}^0\rangle|^2}{m_0 - E_\alpha};
\end{aligned}\right\} \qquad (8.26)$$

$$M_{12} = M_{21}^{*} = \langle K^0 | H_{\text{сл}} | \overline{K}^0 \rangle + \mathcal{P} \int d\alpha \rho (E_\alpha) \frac{\langle K^0 | H_{\text{сл}} | \alpha \rangle \langle \alpha | H_{\text{сл}} | \overline{K}^0 \rangle}{m_0 - E_\alpha}, \quad (8.27)$$

Здесь m_0 — масса K^0 и $\overline{K}^0$. При этом предполагается, что в отсутствие $H_{\text{сл}}$ она одна и та же. Знак $\int d\alpha$ — интегрирование по всем собственным состояниям $H_{\text{сильн}} + H_{\text{эм}}$ и $\rho(E_\alpha)$ — плотность состояний. Символ $\mathcal{P}$ — главное значение, т. е. состояния с энергией $E_\alpha = m_0$ исключены.

Эти выражения — удобная отправная точка при обсуждении следствий *CPT*-, *T*- и *CP*-симметрий.

8.5.2. CPT- и T-инвариантность. Предположение о справедливости *CPT*-, *T*- или *CP*-симметрий приводит к соотношениям между элементами матрицы массы Λ. Выведем эти соотношения.

CPT-инвариантность. Согласно соотношению (8.14), *CPT*-оператор Θ действует на состояние с нейтральным *K*-мезоном, имеющим нулевой спин и отрицательную четность в состоянии покоя, следующим образом:

$$\Theta | K^0 \rangle = - | \overline{K}^0 \rangle; \quad \Theta | \overline{K}^0 \rangle = - | K^0 \rangle.$$

CPT-инвариантность $H_{\text{сл}}$ уравнения (8.15) дает

$$\langle \alpha | H_{\text{сл}} | K^0 \rangle = - \langle \overline{K}^0 | H_{\text{сл}} | \alpha^\Theta \rangle;$$
$$\langle \alpha | H_{\text{сл}} | \overline{K}^0 \rangle = - \langle K^0 | H_{\text{сл}} | \alpha^\Theta \rangle,$$

где α^Θ — *CPT*-преобразованное состояние α. Теперь из (8.25) и (8.26) находим, что

$$M_{11} = M_{22}, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} \ (CPT), \quad (8.28)$$

а из (8.24)

$$\varepsilon_L = \varepsilon_S \text{ или } \delta = 0 \ (CPT). \quad (8.29)$$

Таким образом, если *CPT*-инвариантность справедлива, примесь K_1^0 в K_L равна примеси K_2^0 в K_S. Следует заметить, что $|\alpha>$ представляет собой такие конечные состояния, как $\pi\pi$, $\pi\pi\pi$, $\pi\mu\nu$ и т. д. Если в конечном состоянии имеется взаимодействие, то $|\alpha^\Theta>$ отличается от $|\alpha>$. Однако если набор $|\alpha>$ полный, то полным будет и набор $|\alpha^\Theta>$. Этого достаточно, чтобы получить равенство (8.28). Аналогичное замечание подходит и для случая *T*-инвариантности.

T-инвариантность гамильтониана приводит к соотношениям

$$\langle \alpha | H_{\text{сл}} | K^0 \rangle = \langle K^0 | H_{\text{сл}} | \alpha^T \rangle;$$
$$\langle \alpha | H_{\text{сл}} | \overline{K}^0 \rangle = \langle \overline{K}^0 | H_{\text{сл}} | \alpha^T \rangle.$$

Из (8.25) и (8.26) находим, что

$$M_{21} = M_{12}, \quad \Gamma_{21} = \Gamma_{12} \quad (T). \quad (8.30)$$

Вместе со свойством эрмитовости оно дает:

$$M_{21} = M_{12} = \text{действительны}, \quad \Gamma_{21} = \Gamma_{12} = \text{действительны} \quad (T). \quad (8.31)$$

Отсюда следует, что $\Lambda_{21}=\Lambda_{12}$. Уравнение (8.24), в свою очередь, дает

$$\varepsilon = 0 \quad (T). \tag{8.32}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда сохраняются *CPT*, *T* и *CP*. Этот случай объединяет следствия а) и б), так что выполняются оба условия $\delta=0$ и $\varepsilon=0$ или $\varepsilon_L=0$ и $\varepsilon_S=0$. Тогда, согласно (8.24),

$$\Lambda_{11}=\Lambda_{22}=\frac{1}{2}(\lambda_L+\lambda_S); \quad \Lambda_{12}=\Lambda_{21}=\frac{1}{2}(\lambda_L-\lambda_S),$$

так что собственные состояния суть

$$|K_L\rangle \to 2^{-1/2}[|K^0\rangle+|\bar{K}^0\rangle]=|K_2^0\rangle;$$
$$|K_S\rangle \to 2^{-1/2}[|K^0\rangle-|\bar{K}^0\rangle]=|K_1^0\rangle,$$

и, как и следовало ожидать, мы вновь возвращаемся к трактовке п. 8.3.3.

8.5.3. Проверка CPT и T в K^0-распаде. Мы не имеем здесь возможности дать даже краткий обзор той обильной информации, которая существует по нейтральным *K*-мезонам. Однако для независимого определения параметров ε и δ собрано уже достаточно данных (см., например, работу Шуберта [160]). Если начать с соотношения унитарности Белла — Штейнбергера [22]

$$\left[i(m_L-m_S)+\frac{1}{2}(\gamma_L+\gamma_S)\right]\langle K_S^0|K_L^0\rangle = $$
$$= 2\pi\int d\alpha\rho(E_\alpha)\langle\alpha|\mathcal{T}|K_S\rangle^*\langle\alpha|\mathcal{T}|K_L\rangle,$$

затем ввести экспериментальные значения m_L-m_S и $\gamma_L+\gamma_S$ и рассмотреть экспериментальные данные для разных конечных состояний в правой части равенства, то можно оценить перекрытие $\langle K_S|K_L\rangle$. Из уравнения (8.21) получаем формулу перекрытия

$$\langle K_S|K_L\rangle = 2(\mathrm{Re}(\varepsilon)-i\,\mathrm{Im}(\delta)).$$

Здесь мы пренебрегли $|\varepsilon_L|^2$ и $|\varepsilon_S|^2$, что оправдывается полученными результатами. Таким образом, можно выделить $\mathrm{Re}(\varepsilon)$ и $\mathrm{Im}(\delta)$. Из анализа Ву и Янга [189] и данных по распаду $K_L\to 2\pi$ можно получить $\mathrm{Im}(\varepsilon)$ и $\mathrm{Re}(\bar{\delta})$. При этом $\bar{\delta}$ отличается от δ только на величину, связанную с той частью распада $K\to 2\pi$, которая обусловлена нарушением *CPT*, так что $\bar{\delta}$, так же как и δ, должно исчезнуть, если *CPT* сохраняется.

Шубертом и др. [160] установлено, что:

$$\mathrm{Re}(\varepsilon)=(1{,}68\pm 0{,}30)\cdot 10^{-3};$$
$$\mathrm{Im}(\varepsilon)=(1{,}45\pm 0{,}30)\cdot 10^{-3};$$
$$\mathrm{Re}(\bar{\delta})=(0{,}07\pm 0{,}43)\cdot 10^{-3};$$
$$\mathrm{Im}(\bar{\delta})=(-0{,}30\pm 0{,}45)\cdot 10^{-3}.$$

Итак, делаем вывод, что в *K*-мезонных распадах *T* нарушается вместе с *CP*, но *CPT* сохраняется.

Глава 9

АДРОННЫЕ РАСПАДЫ МЕЗОНОВ

§ 9.1. G-ЧЕТНОСТЬ

Рассматривая оператор зарядового сопряжения C, мы упоминали о том, что собственные состояния C должны иметь нулевой полный заряд, а также нулевую странность и барионное число. Таким образом, в список наблюдаемых свойств нестранных нейтральных мезонов можно внести η_C — собственное значение оператора C.

Фактически квантовое число η_C можно обобщить и применить к таким состояниям изоспина, для которых равны нулю другие квантовые числа, такие, как барионное число B и странность S. Примерами таких состояний являются нестранные мезоны и барион-антибарионные пары. Полученная в результате величина, называемая *G-четностью,* введена Мишелем [138] и Ли и Янгом [121]. Более образно она названа Мишелем изотопической четностью.

В поисках способа обобщения вспомним, что действие зарядового сопряжения на состояния пионов можно выразить уравнениями

$$U_C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle; \quad U_C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle; \quad U_C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle. \tag{9.1}$$

Таким образом, для рассматриваемых состояний U_C меняет значение I_3. Потребуем компенсации с помощью изоспинового поворота, оказывающего такое же действие. Желаемый эффект дает поворот на π вокруг второй оси. Запишем его в виде

$$P_i = \exp(-\mathrm{i}\pi I_2) \tag{9.2}$$

(подробности см. в § В.2).

Действие конечного изоспинового преобразования на состояния произвольного изоспинового мультиплета можно определить, пользуясь аналогией с моментом количества движения [см. формулу (3.69)], при условии, что в обоих случаях используются одни и те же фазовые условия. Тогда из (3.68) находим

$$\exp(-\mathrm{i}\pi I_2)|I, I_3\rangle = (-1)^{I-I_3}|I, -I_3\rangle. \tag{9.3}$$

Сюда подставлено значение $d^I_{I_3 I_3}(\pi)$ из (3.86б). В приложении В показано, что правильный выбор триплета пионов таков:

$$|I=1, I_3=+1\rangle = -|\pi^+\rangle; \quad |1, 0\rangle = |\pi^0\rangle; \quad |1, -1\rangle = |\pi^-\rangle.$$

Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\exp(-i\pi I_2)\,|\pi^+\rangle = -|\pi^-\rangle;\\ &\exp(-i\pi I_2)\,|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle;\\ &\exp(-i\pi I_2)\,|\pi^-\rangle = -|\pi^+\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Оператор G-четности теперь определим формулой

$$U_G = \exp(-i\pi I_2)\,U_C = U_C \exp(-i\pi I_2). \tag{9.5}$$

Согласно уравненням (9.1) и (9.4), он действует следующим образом на однопионные состояния:

$$U_G|\pi^+\rangle = -|\pi^+\rangle;\quad U_G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle;\quad U_G|\pi^-\rangle = -|\pi^-\rangle. \tag{9.6}$$

Таким образом, все три зарядовых состояния пиона являются собственными состояниями U_G. Соответствующее собственное значение называется *G-четностью*, $\eta_G = -1$.

Из того факта, что G-четность одинакова для разных членов изомультиплета, следует, что U_G коммутирует с операторами изоспина $[U_G, \mathbf{I}] = 0$. В приложении В показано, что это действительно так!

Подведем итог. Для систем, обладающих изоспиновой инвариантностью и инвариантностью относительно зарядового сопряжения, оператор зарядового сопряжения U_C не коммутирует со всеми преобразованиями изоспина, но его можно заменить U_G, который уже коммутирует с ними.

Возвращаясь к нуклонному дублету, вспомним, что U_C преобразует нуклоны в антинуклоны, тогда как из (9.3) и (3.86б) получаем

$$\exp(-i\pi I_2)\,|p\rangle = |n\rangle;\quad \exp(-i\pi I_2)\,|n\rangle = -|p\rangle.$$

Следовательно,

$$U_G|p\rangle = |\bar{n}\rangle; \tag{9.7а}$$

$$U_G|n\rangle = -|\bar{p}\rangle. \tag{9.7б}$$

Хотя нуклоны не являются собственными состояниями U_G, пара нуклон — антинуклон уже может быть собственным состоянием, так как имеет нулевые барионное число и странность. Это рассматривается в следующем разделе.

В качестве предварительного этапа рассмотрим действие оператора U_G на антинуклонные состояния. Для антинуклонов стандартные изоспиновые состояния (см. приложение В)

$$\left|\bar{N},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right\rangle = -|\bar{n}\rangle,\quad \left|\bar{N},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle = |\bar{p}\rangle.$$

Таким образом, из (9.3) получаем

$$\exp(-i\pi I_2)\,|\bar{n}\rangle = -|\bar{p}\rangle;\quad \exp(-i\pi I_2)\,|\bar{p}\rangle = |\bar{n}\rangle.$$

Следовательно,

$$U_G|\bar{n}\rangle = -|p\rangle; \tag{9.8а}$$

$$U_G|\bar{p}\rangle = |n\rangle. \tag{9.8б}$$

Аналогичный анализ применим к системе K-мезонов:

$$\left.\begin{aligned} U_G|K^+\rangle &= |\bar{K}^0\rangle; \\ U_G|K^0\rangle &= -|K^-\rangle; \\ U_G|\bar{K}^0\rangle &= -|K^+\rangle; \\ U_G|K^-\rangle &= |K^0\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Как следует из (9.7) и (9.8), для $x=p$, n, $\bar{p}$ или $\bar{n}$ и аналогично для $K^{\pm}$, K^0 или $\bar{K}^0$ справедливо равенство $U_G^2|x\rangle = -|x\rangle$. В то же время для пионов $U_G^2|\pi^c\rangle = +|\pi^c\rangle$, $c=+1$, 0 или -1. Это особые случаи равенства

$$U_G^2 = (-1)^{2I}, \tag{9.10}$$

которое вытекает из равенства (9.5). Иногда уравнение (9.10) с помощью формулы Гелл-Мана — Нишиджимы и благодаря тому факту, что все известные частицы имеют целые заряды, записывают в виде

$$U_G^2 = (-1)^Y.$$

Основное значение G-четности в том, что система n пионов имеет $\eta_G = (-1)^n$.

Мезонам, обладающим большимн массами, может быть приписана G-четность $+1$ или -1. Это зависит от того, распадаются они при сильном взаимодействии на четное нли нечетное число пионов. Предполагается, что в сильных взаимодействиях G-четность сохраняется, но не сохраняется в слабых илн электромагнитных взаимодействиях, для которых не сохраняется изоспин, а оператор поворота $\exp(-i\pi I_2)$ не имеет ясного смысла.

§ 9.2. ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП ПАУЛИ

Как отмечалось в § 7.2, этот принцип требует, чтобы полная волновая функция пары фермионов была антисимметричной относительно одновременной перестановки пространственных, спиновых и зарядовых координат. Справедливость этого требования вытекает из того факта, что одновременная перестановка этих трех типов координат эквивалентна перестановке двух тождественных частиц.

Распространим этот принцип на случай пары фермион — антифермион, например $p+\bar{n}$, $p+\bar{p}$, $n+\bar{n}$ или $n+\bar{p}$. Теперь антисимметрия относительно обмена двух частиц эквивалентна антисимметрии относительно одновременной перестановки пространственных координат, спиновых координат I_3 и барионного числа B. Симметрия, связанная с барионным числом, задается собственным значением η_G оператора G-четности G, так как при этом меняется B и остается неизменным I. Перестановка изоспиновых компонент I_3 приводит к умножению на $(-1)^{I+1}$, а перестановка спиновых координат эквивалентна умножению на $(-1)^{S+1}$. Здесь I

и S — полный изоспин и спин соответственно. При перестановке пространственных координат, эквивалентной инверсии относительно начала координат, орбитальный момент количества движения l дает множитель $(-1)^l$, а противоположные внутренние четности нуклона и антинуклона дают дополнительный множитель (-1).

Следовательно, полная симметрия есть

$$\eta_G (-1)^{I+S+l+1}.$$

Это именно та величина, от которой требуется в силу обобщенного принципа Паули, чтобы она была равна (-1).

Мы приходим к выводу, что для пары нуклон — антинуклон η_G определяется формулой

$$\eta_G = (-1)^{I+S+l}. \tag{9.11}$$

Можно считать, что мезоны, удовлетворяющие (9.11), обладают возможностью виртуальных переходов в пары нуклон — антинуклон и кварк — антикварк (см. гл. 11), так как статистика пары $q\bar{q}$ аналогична статистике пары $N\bar{N}$.

§ 9.3. НОРМАЛЬНЫЙ И АНОМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОРЫ С

В случае нейтральных мезонов, удовлетворяющих условию (9.11), можно рассматривать также симметрию относительно зарядового сопряжения, задаваемую равенством

$$\eta_G = \eta_C (-1)^I.$$

В сочетании с уравнением (9.11) это дает

$$\eta_C = (-1)^{I+S}. \tag{9.12}$$

Следовательно, симметрия относительно операции CP есть

$$\eta_{CP} = (-1)^{S+1}. \tag{9.13}$$

Иногда говорят, что нейтральные мезоны, квантовые числа которых удовлетворяют (9.12) и (9.13), имеют «нормальное C», что означает поведение, аналогичное поведению пары $q\bar{q}$ или $N\bar{N}$.

Если мы рассмотрим также полный момент количества движения $\mathbf{J}$, задаваемый векторной суммой

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{S},$$

то увидим, что «нормальное C» требует, чтобы квантовые числа входили в виде возможных комбинаций, перечисленных в табл. 9.1.

В двух столбцах правой части таблицы приведены квантовые числа. Условно и сокращенно здесь I^G означает I и η_G, а J^P—J и η_P. Относящиеся к J^P буквы N или A означают нормальную и аномальную четность. Это понятие не надо путать с нормальным и аномальным C, рассмотренным выше. Оно просто отражает тот факт, что если момент количества движения полностью орбиталь-

Таблица 9.1

Мезоны с «нормальным C», т. е. состоящие из $q\bar{q}$

S	l	J	$\eta_C=(-1)^{l+S}$	$\eta_P=-(-1)^l$	$\eta_{CP}=-(-1)^S$	I^G	J^P
0	0	0	+	−	−	0+ или 1−	0− (A)
1	0	1	−	−	+	0− или 1+	1− (N)
0	1	1	−	+	−	0− или 1+	1+ (A)
1	1	0, 1, 2	+	+	+	0+ или 1−	0+ (N), 1+ (A), 2+ (N)

ный, как в обычных сферических гармониках, то разрешены значения $J^P=0^+$, 1^-, 2^+ и т. д.

Фактически все известные мезоны и мезонные резонансы имеют нормальный C, что видно из табл. 9.2.

Таблица 9.2

Основные свойства и моды распада мезонов с $S=0$

Частица	Масса, *Мэв*	Полная ширина, *Мэв*	I^GJ^PC (для нейтральных мезонов)	Мода распада	Вероятность распада, %
π^+	139,6	0		$\mu\nu$	100
π^0	135,0	8 *эв*	1^-0^-+	$\gamma\gamma$	98,84
η	548,8	2,6 *кэв*	0^+0^-+	γe^+e^-	1,16
				на все нейтральные	71
				$\pi^-\pi+\pi^0+\pi+\pi^-\gamma$	29
ρ	765	135	1^+1^--	$\pi\pi$	100
ω	783,9	10	0^-1^--	$\pi^+\pi^-\pi^0$	89,7
				$\pi^+\pi^-$	1,2
				$\pi\gamma$	9,0
φ	1019	4	0^-1^--	K^+K^-	49,1
				K_LK_S	30,7
				$\pi^+\pi^-\pi^0$	17,5
				$\eta\gamma$	2,6

§ 9.4. КОНЕЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

При распаде нестранного мезона в конечное состояние, состоящее из n пионов, самым сильным правилом отбора после законов сохранения заряда, энергии и полного момента количества движения обычно бывает закон сохранения четности. Для состояния из двух пионов существует один-единственный орбитальный момент количества движения l и общая четность есть $(-1)^l$. Для трех пионов полный момент количества движения j можно представить в виде векторной суммы орбитального момента количества движения l одной пары и орбитального момента количества движения пары относительно третьего пиона. Таким образом, если $J=0$, $l=L$, то общая четность 3π-системы (включая нечетную

внутреннюю четность отдельного пиона) нечетна. Но $J=1$ может быть результатом суммы $(l, L)=(0, 1)$, $(1, 0)$ или $(1, 1)$, так что состояние трех пионов с $J=1$ может иметь как нечетную, так и четную четность. Аналогично любая четность возможна и для $J=1$, $n>3$, и для $n=3$, $J>1$.

Следующим после четности квантовым числом, сохраняющимся в распаде в результате сильного взаимодействия, является G-четность, значение которой для конечного состояния равно $G=(-1)^n$.

Можно ожидать, что адронные распады нестранных мезонов будут зависеть от того, существуют ли конечные состояния, такие, что упомянутые выше квантовые числа сохраняются.

Однако мезоны с ненулевой странностью распадаются в результате слабых взаимодействий, при этом ни G-четность, ни просто четность не сохраняются.

§ 9.5. РЕАЛЬНО СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕЗОНЫ

Некоторые из хорошо известных мезонов со своими основными свойствами перечислены в табл. 9.2. Для объяснения наиболее важных из перечисленных мод распада прокомментируем таблицу.

Частица η с нулевым J и отрицательной четностью требует для сохранения обеих этих величин, чтобы в конечном состоянии находились по крайней мере три пиона. Энергия ее недостаточна для того, чтобы получилось 4π, и, следовательно, η распадается на 3π, а G не сохраняется. Таким образом, скорость перехода относительно мала и η наблюдается в виде узкого резонанса.

Частица ρ, с другой стороны, имеет $J^P=1^-$ и $G=+1$. Следовательно, она легко распадается на 2π, сохраняя при этом J, P и G. Поэтому она наблюдается в виде резонанса с большой шириной (135 *Мэв*).

Частица ω с $J^P=1^-$, но с $G=-1$ распадается на 3π (основная мода распада) и более слабо на 2π с нарушением G. При этом отношение мод составляет 1,2%.

Частица φ, имеющая те же самые квантовые числа, что и ω, обладает энергией, достаточной для рождения пары K-мезонов. Таким образом, преобладающими модами распада этой частицы являются K^+K^- и K_LK_S с модой $\pi^+\pi^-\pi^0$, составляющей 17,5%.

Распределение импульсов и направлений отдельных пионов в конечных состояниях трех и более пионов определяется соответствующим фазовым пространством. Обычно π-мезоны изображаются на далиц-плоте (см., например, работу [82]). Из этих распределений получены важные квантовые числа.

Глава 10
SU(3)-СИММЕТРИЯ

Успешное распространение в пятидесятых годах концепции изоспина на гипероны и K-мезоны привело к поиску такой симметрии, которая связывала бы все увеличивающееся число сильновзаимодействующих частиц. Такую симметрию, выходящую за рамки понятия изоспина, часто называют *высшей симметрией*.

В начале шестидесятых годов было исследовано несколько возможных теоретических схем, но в этой книге мы опишем только наиболее успешную из них — схему $SU(3)$-симметрии Гелл-Мана [84] и Неймана [142]. Начнем с общих замечаний по поводу высших симметрий.

§ 10.1. ПОНЯТИЕ ВЫСШЕЙ СИММЕТРИИ

Возникают вопросы: каково эмпирическое доказательство, если оно есть, высшей симметрии сильновзаимодействующих частиц и как сформулировать такую симметрию математически? Чтобы ответить на них, удобно вернуться опять к изоспину, который является прототипом всех внутренних симметрий.

Было постулировано существование трех операторов изоспина I_+, I_- и I_3, подчиняющихся коммутационным соотношениям

$$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm; \quad [I_+, I_-] = 2I_3. \tag{10.1}$$

Из одних этих коммутационных соотношений с помощью математики получаем, что состояния частицы образуют мультиплеты (аргументы в этом случае математически идентичны аргументам в случае момента количества движения). Мультиплет характеризуется полным изоспином I или, точнее, собственным значением $I(I+1)$ оператора I^2, а отдельные состояния различаются собственными значениями I_3. Далее предполагается, что $I_\pm$ и I_3 коммутируют с гамильтонианом сильного взаимодействия и с другими операторами, характеризующими пространство и время, такими, как, например, спин и четность. Отсюда следует, что все состояния частицы в одном мультиплете по изоспину имеют одни и те же массу, спин и четность.

Имея в виду эту идею изоспина, можно считать, что прямым эмпирическим доказательством высшей симметрии было бы наблюдение *супермультиплетов* адронных состояний с почти одина-

ковой массой и одними и теми же спином и четностью, но, может быть, с разными изоспином и странностью. Эту высшую симметрию можно сформулировать математически, если найти дополнительные операторы, которые будут коммутировать с $H_{\text{сильн}}$ и постулировать интересующий нас набор коммутационных соотношений между ними.

Как и в случае изоспина, начнем с более глубокого уровня, постулировав группу преобразований во внутреннем пространстве. Генераторами этой группы служат операторы, и их коммутационные соотношения вытекают из структуры группы. Это и будет отправной точкой анализа в § 10.2. Теперь вернемся к вопросу об эмпирическом доказательстве существования супермультиплетов.

В начале шестидесятых годов адронный спектр был примерно следующим. Было известно восемь стабильных относительно сильного распада барионов: p, n, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Λ^0, Ξ^0, Ξ^-. Спин N-, Λ- и Σ-барионов был известен и равен 1/2, а спин Ξ не был известен. Было известно также, что стабильные относительно сильного взаимодействия $\pi^{\pm}$-, π^0-, K^{+}-, K^0-, $\bar{K}^0$-, K^--мезоны имеют спин 0. Считалось, что относительная четность πN отрицательна. Прямых фактов, свидетельствующих против того, что четность ΛNK и ΣNK отрицательна, не было, так что можно считать, что восемь барионов с $J^P = 1/2^+$ и семь 0^--мезонов можно идентифицировать.

Если считать восемь барионов супермультиплетом симметрии более высокого порядка, то эта симметрия должна сильно нарушаться, так как массы этих состояний отклоняются от среднего значения на величину порядка 10%. Так, например, $(\Lambda - p)/(\Lambda + p) \simeq 6\%$, , что следует сравнить с мультиплетом по изоспину $(n - p)/(n + p) \simeq 0{,}06\%$.

Априори неясно, имеет ли какое-либо значение при таких обстоятельствах высшая симметрия. Следовательно, замечательным, но до сих пор еще недостаточно ясным является тот факт, что хотя симметрия и сильно нарушается, существует достаточное число регулярностей, что делает $SU(3)$-симметрию полезной. Можно даже количественно оценить механизм нарушения симметрии, например, с помощью массовой формулы Гелл-Мана — Окубо.

Если бы η^0-мезон был открыт несколько раньше, октеты $\frac{1+}{2}$-барионов и 0^--мезонов могли бы привести теоретиков более прямым путем к схеме $SU(3)$-симметрии. Но он открыт еще не был, а в массах имелось несоответствие, поэтому путь получился более сложным.

Сегодня схема «глобальной симметрии» Гелл-Мана и Швингера и четырехмерное изоспиновое пространство д'Эспанья и Прентки представляют только исторический интерес. Следует вкратце упомянуть о модели Сакаты [155], поскольку при математическом анализе этой модели (см. [105, 106]) в физику частиц была введена группа $SU(3)$.

Модель Сакаты расширяет дальше старую идею Ферми и Янга [74] о том, что пионы являются связанными состояниями нуклона и антинуклона. Если проводить аналогию с K-мезонами, нужна тяжелая частица со странностью 1, в качестве которой и выбрана Λ^0. Поэтому Саката предположил, что p^+, n^0 и Λ^0 являются фундаментальными частицами, из которых построены другие. Таким образом,

$$\pi^+ \approx (p\bar{n}); \quad K^+ \approx (p\bar{\Lambda}^0); \quad K^- \approx (\Lambda^0\bar{p}).$$

При такой схеме Σ- и Ξ-барионы тоже являются составными частицами

$$\Sigma^+ \approx (\Lambda^0 p\bar{n}), \quad \Xi^- \approx (\Lambda^0\Lambda^0\bar{p})$$

и потому не эквивалентны основному триплету (p, n, Λ).

Из-за отсутствия реалистических динамических расчетов, предсказывающих энергии связи этих систем, внимание в основном было сконцентрировано на изоспине и странности связанных систем. Их трактовку можно систематизировать, если рассмотреть идеализированный случай, когда составляющие основного триплета имеют одинаковые массы. Используем следующий постулат симметрии: взаимодействия между p, n и Λ инвариантны относительно линейных преобразований этих трех частиц:

$$\left.\begin{aligned} p \to p' &= a_{11}p + a_{12}n + a_{13}\Lambda; \\ n \to n' &= a_{21}p + a_{22}n + a_{23}\Lambda; \\ \Lambda \to \Lambda' &= a_{31}p + a_{32}n + a_{33}\Lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

Точнее, если воспользоваться лагранжевой формой теории поля и считать, что p, n и Λ представляют собой поля, соответствующие этим частицам, то уравнение (10.2) представляет собой преобразования этих полей друг через друга. Для того чтобы лагранжиан оставался эрмитовым, необходимо ограничить матрицу коэффициентов

$$\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$$

требованием унитарности $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = 1$.

Можно показать, что наложение условия унимодулярности

$$\det(\mathbf{A}) = +1$$

не приводит к существенным ограничениям.

Множество всех 3×3-матриц $\mathbf{A}$, удовлетворяющих этим двум условиям, образует группу, называемую группой $SU(3)$.

Этот постулат симметрии приводит к определенным предсказаниям, на которые мы будем ссылаться без доказательств. Составные состояния должны образовывать супермультиплеты. Разрешены только определенные размерности этих супермультиплетов: 1, 3, 6, 8, 10, 15 и т. д. Каждый супермильтиплет имеет определенное содержание изоспинов и странности. Для обозначения мультиплета с изоспином I и странностью S воспользуемся обозначением $\{S, I\}$.

Далее, связанные состояния одного триплета $t=(p,\ n,\ \Lambda)$ и одного антитриплета $\bar{t}=(\bar{p},\ \bar{n},\ \bar{\Lambda})$ должны образовывать октет или синглет.

Синглетом является $\{0,\ 0\}$, а октет состоит из

$$8:\left\{1,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 0\},\ \left\{-1,\ \frac{1}{2}\right\}.$$

K^--, π^--, η- и $\bar{K}$-мезоны, конечно, подходят для этого случая. Σ и Ξ могут быть реализованы в виде связанных состояний $(tt\bar{t})$. Эти связанные состояния должны образовывать супермультиплеты из 15, 6 или 3 состояний. Супермультиплет из 15 состояний состоит из:

$$15:\{1,\ 1\},\ \left\{0,\ \frac{3}{2}\right\},\ \left\{0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{-1,\ 1\},\ \{-1,\ 0\},\ \left\{-2,\ \frac{1}{2}\right\}.$$

С ним можно связать Σ и Ξ, но тогда должны существовать десять других барионных состояний со спином и четностью $\frac{1^+}{2}$ и близкой массой. Мультиплеты $\left\{0,\ \frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{0,\ \frac{3}{2}\right\}$ должны быть нуклонными резонансами, а $\{-1,\ 0\}$ — Λ-резонансом.

Это размещение неудовлетворительно, поскольку ясно, что мы имеем *восемь* барионов $\left(\frac{1}{2}\right)^+$, из которых, подобно мезонам можно образовать октет. Для этого надо избавиться от выделенной роли частиц p, n и Λ в качестве фундаментальных частиц. Однако хочется сохранить при этом группу инвариантности $SU(3)$, так как она является механизмом, превращающим октет в один из супермультиплетов.

Это приводит нас к октетной модели или «восьмеричному пути», предложенному независимо Гелл-Маном и Нейманом. По аналогии с моделью Сакаты в основу нашего подхода можно положить постулат об основном триплете частиц или полей, на который действуют преобразования $SU(3)$. Эти частицы — кварки или «тузы». Наблюдаемые физические частицы образованы из кварков и (или) антикварков. Однако сначала предпочтительно придерживаться более консервативной, абстрактной точки зрения. К модели кварков мы вернемся в следующей главе. Эта модель при более сильных предположениях приводит к дополнительным предсказаниям.

По $SU(3)$-симметрии и ее применениям имеется огромное количество обзорных статей. Им целиком посвящены работы [39, 92]. Работа Гелл-Мана и Неймана [87], содержащая ряд оригинальных статей, является полезным дополнением. Приведенные здесь основы теории являются частным случаем теории алгебр Ли и их представлений, развитым Картаном и Вейлем и описанным Рака [149], Берендсом и др. [19].

В других обзорах Берендса [18], Бермана [23], де Сварта [57], Метьюза [136] и Я. А. Смородинского [163] описаны другие под-

ходы, техники расчета или применения которых мы здесь касаться не будем.

§ 10.2. КОНСЕРВАТИВНЫЙ ПОДХОД К $SU(3)$

Если использовать лишь общие принципы симметрии в квантовой теории (см. § 2.2), можно подойти к $SU(3)$ консервативно, т. е. обойти вопрос о том, на какой объект действует 3×3-преобразование $\mathbf{A}$.

Как показано в п. 2.2.3, каждому преобразованию T группы симметрии должен соответствовать унитариый оператор $U(T)$, действующий в пространстве состояний частицы. Для инфинитезимального преобразования T оператор $U(T)$ принимает вид

$$U=1+i\varepsilon G,$$

где G —эрмитов генератор. Инвариантность системы относительно группы симметрии выражается для каждого T уравнениями

$$U(T)HU(T)^{-1}=H \text{ и } [G,\ H]=0,$$

где H — гамильтониан.

Запомнив это, выдвинем следующий постулат: существует набор унитарных операторов $U(\mathbf{A})$, действующих на состояния частицы, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами $\mathbf{A}$ группы $SU(3)$ и удовлетворяют правилу перемножения

$$U(\mathbf{A}_2)\,U(\mathbf{A}_1)=U(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1).$$

Инвариантность сильного взаимодействия относительно этой группы выражается соотношением

$$U(\mathbf{A})\,H_{\text{сильн}}U(\mathbf{A})^{-1}=H_{\text{сильн}}. \tag{10.3}$$

Физическая идентификация производится путем рассмотрения инфинитезимальных преобразований.

Унитарную 3×3-матрицу, отличающуюся инфинитезимально от единичной матрицы, можно записать в виде

$$\mathbf{A}=1+i\varepsilon\mathbf{M}, \tag{10.4}$$

где $\mathbf{M}$ — эрмитова 3×3-матрица

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}^{+}.$$

Величинами порядка ε^2 здесь пренебрегли. Условие

$$\det(\mathbf{A})=+1 \tag{10.5}$$

удовлетворяется, если

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{M})=0, \tag{10.6}$$

так как матрицу (10.4) можно записать с точностью до первого порядка по ε в виде

$$\mathbf{A}=\exp(i\varepsilon\mathbf{M}).$$

Теперь общую эрмитову 3×3-матрицу с нулевым следом можно параметризовать следующим образом:

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_3+3^{-1/2}a_8 & a_1-ia_2 & a_4-ia_5 \\ a_1+ia_2 & -a_3+3^{-1/2}a_8 & a_6-ia_7 \\ a_4+ia_5 & a_6+ia_7 & -2\cdot 3^{-1/2}a_8 \end{pmatrix},$$

где a_1, a_2, ..., a_8 — действительные величины. Записав

$$\mathbf{M}=\frac{1}{2}(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\ \ldots\ +a_8\lambda_8),$$

определим введенные Гелл-Маном эрмитовы матрицы λ_i. Они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\\ &\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};\\ &\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix};\quad \lambda_8=3^{-1/2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.7)$$

λ-Матрицы удовлетворяют характерным для группы $SU(3)$ коммутационным соотношениям, имеющим общий вид

$$[\lambda_i,\lambda_j]=2i\sum_{k=1}^{8}f_{ijk}\lambda_k, \qquad (10.8)$$

где f_{ijk} — *структурные постоянные*. Прямым расчетом находим значения для f_{ijk}, собранные в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Значения структурных постоянных f_{ijk}

$i\ j\ k$	f_{ijk}	$i\ j\ k$	f_{ijk}	$i\ j\ k$	f_{ijk}
1 2 3	1	2 4 6	1/2	3 6 7	−1/2
1 4 7	1/2	2 5 7	1/2	4 5 8	$(1/2)\,3^{1/2}$
1 5 6	−1/2	3 4 5	1/2	6 7 8	$(1/2)\,3^{1/2}$

Примечание. Значения f_{ijk} исчезают для всех троек ijk, не перечисленных в таблице, и полностью антисимметричны по трем индексам.

Из сформулированного выше постулата следует, что каждому инфинитезимальному преобразованию

соответствует уравнение для операторов

$$U(\mathbf{A}) = 1 + i\varepsilon \sum_i a_i F_i,$$

где U и F_i — операторы, действующие на состояния частицы.

Из постулата также следует, что операторы F_i подчиняются коммутационным соотношениям, аналогичным (10.8):

$$[F_i, F_j] = i \sum_{k=1}^{8} f_{ijk} F_k. \tag{10.9}$$

Инвариантность относительно SU (3) выражается с помощью генераторов

$$[H_{\text{сильн}}, F_i] = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 8. \tag{10.10}$$

Наконец, отождествим F_i с физическими величинами. Нетрудно видеть, что λ_1, λ_2 и λ_3 — матрицы изоспина, дополненные строкой и столбцом из нулей. Следовательно, они и F_1, F_2 и F_3 подчиняются коммутационным соотношениям изоспина, так что положим

$$F_1 = I_1, \quad F_2 = I_2, \quad F_3 = I_3. \tag{10.11}$$

С λ_1, λ_2 и λ_3 коммутирует единственная матрица λ_8. Следовательно, F_8 — единственный оператор, коммутирующий с операторами (10.11), и можно предположить, что он пропорционален другому аддитивному квантовому числу Y для адронов.

Так как удобнее иметь дело не с Y, а с M, положим

$$F_8 = M = \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} Y. \tag{10.12}$$

Здесь следует заметить, что барионное число B остается вне схемы SU (3). Вследствие этого барионное число можно приписать супермультиплету независимо. Таким образом, в отличие от модели Сакаты, в данной схеме существуют октеты барионов и мезонов.

Так как I_3 и M (т. е. Y) коммутируют друг с другом, наши состояния можно выбрать такими, чтобы они одновремеино являлись и собственными состояниями этих операторов. Ни один из других операторов не коммутирует ни с I_3, ни с M, так что постулируемая симметрия не предсказывает никаких дополнительных аддитивных квантовых чисел. Это утверждение соответствует эмпирическим наблюдениям. Операторы F_4, ..., F_7 — новые интегралы движения для $H_{\text{сильн}}$. В частности, они имеют матричные элементы между состояниями с разными Y, и, как мы увидим дальше, это приводит к соотношениям между свойствами состояний с разными Y. Таким образом, можно ожидать, что

наша симметрия свяжет состояния с разными Y (и I) в супермультиплеты с аналогичными свойствами.

Наша первая задача — определить структуру этих супермультиплетов. Для этого коммутационные соотношения (10.9) перепишем в более удобной форме.

Определим *операторы сдвига:*

$$\left.\begin{aligned} I_\pm &= F_1 \pm iF_2; \\ U_\pm &= F_6 \pm iF_7; \\ V_\pm &= F_4 \mp iF_5. \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

Объединим I_3 и M в двухкомпонентный вектор $\mathbf{G}=(I_3, M)$. Поводом к этому является то, что собственное состояние $\varphi(I_3', M')$ операторов I_3 и M можно представить точкой, определяемой вектором $\mathbf{g}=(I_3', M')$ на плоскости.

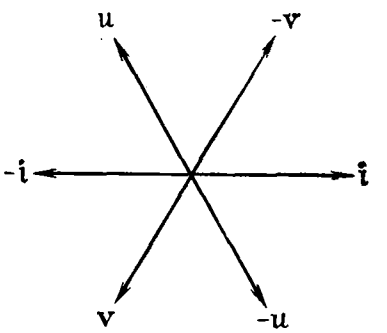


Рис. 10.1. Векторы, ассоциированные с операторами сдвига в $SU(3)$-группе

Введем постоянный вектор $\mathbf{i}=(1, 0)$. Таким образом, коммутационные соотношения $[I_3, I_\pm]=\pm I_\pm$, $[M, I_\pm]=0$ можно объединить в

$$[\mathbf{G}, I_\pm] = \pm \mathbf{i} I_\pm. \tag{10.14а}$$

Другие соотношения для изоспина, соответствующие (10.1), приобретут вид

$$[I_+, I_-] = 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{G}. \tag{10.14б}$$

Аналогично введем векторы

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\right); \quad \mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\right),$$

которые совместно с вектором $\mathbf{i}$ обладают гексагональной симметрией, что и показано на рис. 10.1. Из (10.8) находим:

$$[\mathbf{G}, U_\pm] = \pm \mathbf{u} U_\pm; \tag{10.14в}$$

$$[U_+, U_-] = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{G}; \tag{10.14г}$$

$$[\mathbf{G}, V_\pm] = \pm \mathbf{v} V_\pm; \tag{10.14д}$$

$$[V_+, V_-] = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{G}. \tag{10.14е}$$

Далее, пользуясь в каждом уравнении только верхним или нижним знаком, получаем

$$[I_\pm, U_\pm] = \pm V_\mp; \tag{10.14ж}$$

$$[U_\pm, V_\pm] = \pm I_\mp; \tag{10.14з}$$

$$[V_\pm, I_\pm] = \pm U_\mp. \tag{10.14и}$$

Коммутатор любой другой пары операторов равен нулю.

Уравнения (10.14а)—(10.14и) [другая форма записи выражений (10.8)] представляют собой коммутационные соотношения группы SU (3).

Для того чтобы не потеряться среди такого большого количества соотношений, полезно отметить естественное соответствие $I_+ \to \mathbf{i}$, $U_+ \to \mathbf{u}$, $V_- \to -\mathbf{v}$ и т. д.

Руководствуясь очевидным соотношением (см. рис. 10.1) $\mathbf{i}+\mathbf{u}=-\mathbf{v}$, получаем

$$[I_+, U_+] = V_-,$$

но $\mathbf{i}$—$\mathbf{u}$ не равно ни одному из шести векторов, так что

$$[I_+, U_-] = 0.$$

Значения этих обозначений станут более понятными в следующем разделе.

$\mathbf{G}$, $I_\pm$, $U_\pm$ и $V_\pm$ образуют независимый набор восьми генераторов. Однако иногда бывают полезны и другие комбинации. Если мы определим

$$U_3 = -\frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} M, \tag{10.15}$$

то операторы U_+, U_- и U_3 будут подчиняться коммутационным соотношениям изоспина. Эти операторы, называемые операторами U-спина, имеют следующий физический смысл. Оператор электрического заряда является комбинацией генераторов SU (3):

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y = I_3 + 3^{-1/2} M, \tag{10.16}$$

и все три оператора U-спина коммутируют с Q:

$$[U_\pm, Q] = 0; \quad [U_3, Q] = 0,$$

что легко доказать. Позднее мы используем эту аналогию между U-спином и изоспином.

Если положить

$$V_3 = -\frac{1}{2} I_3 - \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} M, \tag{10.17}$$

то V_+, V_- и V_3 образуют операторы V-спина, но они не так важны.

Заканчивая этот параграф, напомним читателю, что существуют и другие способы характеризовать генераторы.

§ 10.3. СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТЫ $SU(3)$

Наша первая задача состоит в определении неприводимых супермультиплетов, разрешенных $SU(3)$-симметрией. Неприводимость означает, что все состояния данного супермультиплета можно получить повторным применением генераторов к какому-либо одному состоянию. В дальнейшем под супермультиплетом мы будем понимать *неприводимый супермультиплет* (если противное не оговорено).

Для некоторых целей удобно рассмотреть конечные преобразования группы $SU(3)$. В этом случае неприводимый супермультиплет состояний образует базис унитарного неприводимого представления группы $SU(3)$. Такой подход описан, например, в работе [57].

Тензорный подход к $SU(3)$ также подчеркивает конечные преобразования $SU(3)$ и описан в работах [48, 49, 129]. Мы предпочитаем подход, использующий операторы сдвига, принципы которого аналогичны случаю момента количества движения.

10.3.1. Веса и решетка весов. Мы видели, что из восьми операторов лишь I_3 и $M(Y)$ коммутируют друг с другом. Следовательно, их можно одновременно привести к диагональному виду. Таким образом, состояния будут характеризоваться собственными значениями этих двух операторов. Так, в обозначениях $\mathbf{G}=(I_3, M)$ для любого состояния имеем

$$\mathbf{G}\,|\alpha, \xi\rangle = \mathbf{g}\,|\alpha, \xi\rangle, \tag{10.18}$$

где собственные значения I_3 и M записаны в векторном виде, а α обозначает все остальные квантовые числа, необходимые для определения состояния. Вектор $\mathbf{g}$ называется *весом,* а состояние $|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ представляется точкой, положение которой задается на *весовой диаграмме* вектором $\mathbf{g}$.

Предположим, что достаточно рассмотреть супермультиплеты, состоящие из конечного числа состояний. Можно показать математически, что все унитарные неприводимые представления $SU(3)$ конечномерны.

Супермультиплет определяется заданием всех весов состояний, входящих в него, и *кратностей* каждого веса, т. е. числом различных состояний с данным весом. Вся эта информация содержится в весовой диаграмме супермультиплета.

Смысл операторов сдвига $I_\pm$, $U_\pm$ и $V_\pm$ можно понять с помощью соответствующих вспомогательных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, лежащих на весовой диаграмме, из следующей теоремы.

Теорема о сдвиге. Пусть дано состояние $|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ веса $\mathbf{g}$, тогда состояние $I_+|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ или равно нулю, или является состоянием того же супермультиплета веса $\mathbf{g}+\mathbf{i}$. Аналогично состояние $I_-|\alpha, \mathbf{g}\rangle$, если не равно нулю, имеет вес $(\mathbf{g}-\mathbf{i})$; $U_\pm|\alpha, \mathbf{g}\rangle$, если не равно нулю, имеет вес $(\mathbf{g}\pm\mathbf{u})$; $V_\pm|\alpha, \mathbf{g}\rangle$, если не равно нулю, имеет вес $(\mathbf{g}\pm\mathbf{v})$.

Все эти соотношения доказываются одинаково.

Доказательство. Из (10.14в) имеем

$$\mathbf{G}U_+ = U_+(\mathbf{G}+\mathbf{u}).$$

Применим это операторное уравнение к состоянию $|\alpha, \mathbf{g}\rangle$. Используя (10.18), получаем

$$\mathbf{G}U_+|\alpha, \mathbf{g}\rangle = U_+(\mathbf{G}+\mathbf{u})|\alpha, \mathbf{g}\rangle = (\mathbf{g}+\mathbf{u})U_+|\alpha, \mathbf{g}\rangle.$$

Следовательно, если предположить, что состояние $U_+|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ отлично от нуля, оно будет иметь вес $\mathbf{g}+\mathbf{u}$ и по определению неприводимости находиться в том же самом супермультиплете, что и $|\alpha, \mathbf{g}\rangle$.

Нетрудно видеть, что состояние $U_+|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ обладает собственными значениями $I_3 - \frac{1}{2}$ и $M + \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}$. Таким образом, оператор сдвига U_+ переводит состояние с весом $\mathbf{g}$ в состояние с весом $\mathbf{g}+\mathbf{u}$. Отсюда и происходит термин *оператор сдвига.*

Легко определить действие цепочки операторов сдвига в общем случае. Например, состояние

$$U_-V_-U_+I_-|\alpha, \mathbf{g}\rangle$$

имеет вес

$$\mathbf{g} - \mathbf{i} + \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

(при условии, что это состояние отлично от нуля).

Теорема о сдвиге вместе с гексагональной симметрией $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ показывает, что веса состояний супермультиплета образуют гексагональную решетку.

Переходим теперь к рассмотрению следующей теоремы.

Теорема об отражении. Весовая диаграмма супермультиплета симметрична при отражениях относительно трех линий, проходящих через начало координат и перпендикулярных $\mathbf{i}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Доказательство (для $\mathbf{i}$). Оператор

$$P_{\mathbf{i}} = \exp(-i\pi I_2)$$

обладает свойствами

$$P_{\mathbf{i}}^{-1} I_3 P_{\mathbf{i}} = -I_3;$$

$$P_{\mathbf{i}}^{-1} M P_{\mathbf{i}} = M$$

и унитарен:

$$P_{\mathbf{i}}^{+} P_{\mathbf{i}} = 1.$$

Первое свойство доказано в приложении В, посвященном G-четности, второе следует из того факта, что I_2 коммутирует с M.

Пусть теперь дано состояние $|\alpha, \mathbf{g}\rangle$, тогда состояние $P|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ принадлежит тому же супермультиплету и обладает собственными значениями $(-I_3, M)$ *:

* Когда это необходимо, собственные значения I_3 и M для ясности будут записываться в виде i_3 и m.

$$I_3 P_i |\alpha, \mathbf{g}\rangle = -P_i I_3 |\alpha, \mathbf{g}\rangle = -i_3 P_i |\alpha, \mathbf{g}\rangle$$

и

$$M P_i |\alpha, \mathbf{g}\rangle = P_i M |\alpha, \mathbf{g}\rangle = m P_i |\alpha, \mathbf{g}\rangle.$$

Наконец, состояние $P_i\,|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ не может обращаться в нуль, поскольку оператор P_i сохраняет нормировку состояния.

Теперь вес состояния $P_i\,|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ может быть получен из веса состояния $|\alpha, \mathbf{g}\rangle$ геометрически, путем отражения относительно линии, перпендикулярной оси I_3 (т. е. оси M).

Аналогично определим оператор

$$P_u = \exp(-i\pi U_2),$$

который изменяет знак собственных значений U_3, но оставляет неизменным Q, поскольку Q коммутирует с операторами U-спина. Геометрически это соответствует отражению относительно линии, перпендикулярной $\mathbf{u}$, как показано на рис. 10.2. Наконец,

$$P_v = \exp(-i\pi V_2)$$

генерирует отражения относительно линии, проходящей под углом 120° к предыдущим двум линиям.

Возникающая в результате решетка возможных весов с гексагональной симметрией и с действием операторов сдвига показана на рис. 10.3.

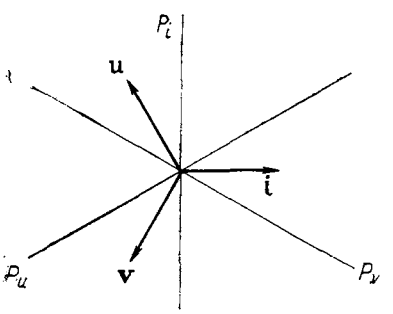


Рис. 10.2. Линии зеркальной симметрии, ассоциированные с P_i, P_u и P_v

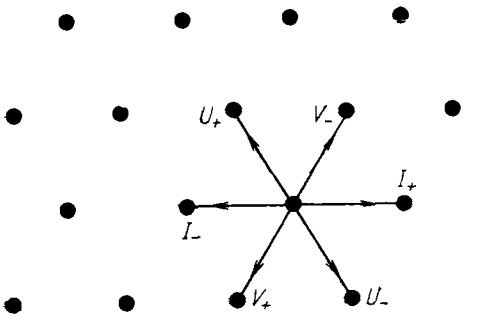


Рис. 10.3. Действие операторов сдвига на решетке весов

10.3.2. Старший вес супермультиплета. Так как предполагается, что супермультиплет конечен, то *старший вес* (и *старшее состояние*) можно определить как вес с наибольшим значением M, и если имеется несколько таких весов, то вес с наибольшим значением I_3 среди них.

Можно было бы ожидать, что существует несколько различных состояний с одним старшим весом, но это запрещено следующей теоремой.

Теорема о старшем весе. Старший вес супермультиплета имеет единичную кратность. Эта теорема имеет прямое доказательство, но требует некоторых предварительных определений, не необходимых в дальнейшем, так что мы опустим это доказательство и отошлем интересующихся к лекциям Рака [149].

Закономерности, выраженные сформулированными выше тремя теоремами, почти достаточны для определения структуры весовой диаграммы общего супермультиплета и, следовательно, собственных значений I_3 и M состояний, входящих в этот супермультиплет.

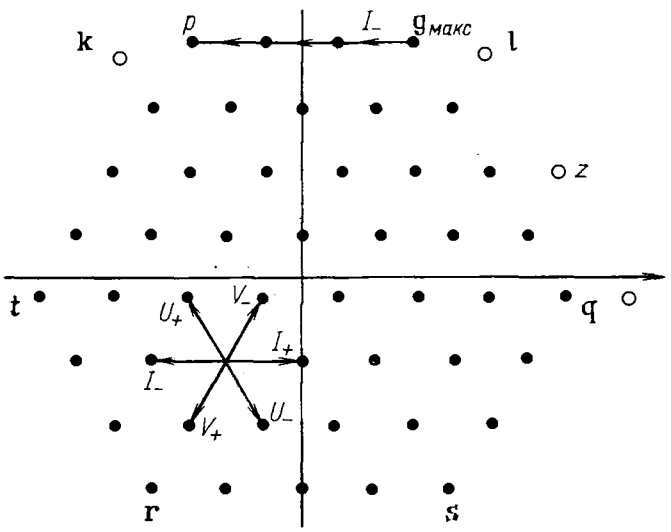


Рис. 10.4. Типичная весовая диаграмма.
Пустые кружки указывают возможные веса, которые исключаются способом, описанным в тексте

Рассмотрим весовую диаграмму, показанную на рис. 10.4. Применение оператора отражения P_i к старшему состоянию $|a, g_{макс}>$ дает состояние с весом **p**. Так как оператор P_i унитарен, он сохраняет число состояний, и, следовательно, кратность веса **p** равна кратности веса $g_{макс}$, т. е. равна единице.

Аналогично операторы P_u и P_v дают веса **q** и **r**, а примененный затем оператор P_i дает веса **s** и **t**. Кратность всех этих весов равна единице.

Зададим теперь вопрос: может ли существовать вес **k**, соответствующий состоянию $I_-|a, p>$? Ответ отрицателен, поскольку если бы такой вес существовал, оператор P_i давал бы вес **l**, что противоречит предположению, что вес $g_{макс}$ является старшим.

Аналогично веса **q**, **r**, **s** и **t** являются крайними весами в том смысле, который следует из приведенных выше рассуждений.

Это можно выразить в терминах операторов сдвига. Заметим, что для $\mathbf{g}_{\text{макс}}$

$$I_+|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle = U_+|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle = V_-|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle = 0, \quad (10.19а)$$

аналогично для $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$

$$I_-|\alpha, \mathbf{p}\rangle = U_+|\alpha, \mathbf{p}\rangle = V_-|\alpha, \mathbf{p}\rangle = 0; \quad (10.19б)$$

$$I_+|\alpha, \mathbf{q}\rangle = U_-|\alpha, \mathbf{q}\rangle = V_-|\alpha, \mathbf{q}\rangle = 0. \quad (10.19в)$$

Повторное применение оператора I_- к $|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle$ генерирует цепочку состояний с весами, указанными на рис. 10.4. Этот процесс должен привести к весу $\mathbf{p}$ и, согласно (10.19б), на этом закончиться. Если бы это было не так, то композиция сдвигов и отражения генерировала бы бесконечно много состояний. Аналогичные рассуждения для цепочки, генерируемой операторами U_- и

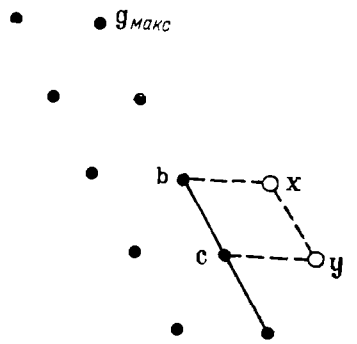


Рис. 10.5. Доказательство того, что границы весовых диаграмм — прямые линии, проведенные между крайними весами

V_+, приводят к выводу, что решетка расположена относительно начала координат так, что линии симметрии относительно отражений проходят через веса или посередине между весами.

До сих пор аргументы не исключали вес $\mathbf{z}$. Теперь мы покажем, что граница между $\mathbf{g}_{\text{макс}}$ и $\mathbf{q}$ — прямая линия.

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 10.5, где $\mathbf{g}_{\text{макс}}$ — старший вес. Покажем, что если вес $\mathbf{b}$ имеет кратность 1 и вершина $\mathbf{x}$ не занята, то вес $\mathbf{c}$ имеет кратность 1, а вершина $\mathbf{y}$ также не занята. Этот результат можно использовать для того, чтобы продвигаться вниз по диагонали, начиная со случая, когда вектором $\mathbf{b}$ является крайний вектор $\mathbf{g}_{\text{макс}}$, для которого исходное условие выполнено, и кончая вектором $\mathbf{q}$.

Чтобы показать, что весу $\mathbf{c}$ соответствует лишь одно состояние, заметим, что вес $\mathbf{c}$ можно получить следующими способами:

$$\left.\begin{aligned} |\mathbf{c}\rangle_1 &= U_-|\mathbf{b}\rangle; \\ |\mathbf{c}\rangle_2 &= I_+V_+|\mathbf{b}\rangle; \\ |\mathbf{c}\rangle_3 &= V_+I_+|\mathbf{b}\rangle. \end{aligned}\right\} \quad (10.20)$$

Однако из перестановочных соотношений (10.14) следует, что они независимы:

$$V_+I_+|\mathbf{b}\rangle - I_+V_+|\mathbf{b}\rangle = U_-|\mathbf{b}\rangle,$$

а из предположения, что вершина **x** не занята, следует

$$I_+|\mathbf{b}\rangle = 0,$$

так что

$$|\mathbf{c}\rangle = |\mathbf{c}\rangle_2 = |\mathbf{c}\rangle_1 = U_-|\mathbf{b}\rangle. \qquad (10.21)$$

Нетрудно показать, что любую другую цепочку операторов сдвига, примененную к подходящему состоянию для того, чтобы генерировать состояние с весом **c**, можно свести к одному из видов (10.20) с помощью перестановочных соотношений (10.14). Значит, **c** имеет кратность 1.

Предположим затем, что вершина **y** занята. Тогда по только что показанной единственности состояние $|\mathbf{c}>$, определенное уравнением (10.21), можно получить с помощью формулы

$$I_-|\mathbf{y}\rangle = \lambda|\mathbf{c}\rangle, \qquad (10.22)$$

где λ — подходящая нормировочная постоянная.

Взяв скалярное произведение последних двух уравнений, получим

$$\lambda\langle\mathbf{c}|\mathbf{c}\rangle = \langle\mathbf{y}|(I_-)^+U_-|\mathbf{b}\rangle = \langle\mathbf{y}|I_+U_-|\mathbf{b}\rangle = \langle\mathbf{y}|U_-I_+|\mathbf{b}\rangle = 0,$$

поскольку вершина **x** не занята.

Так как $<\mathbf{c}|\mathbf{c}> > 0$, мы показали, что $\lambda = 0$. Следовательно, согласно (10.22), наше первоначальное предположение о том, что вершина **y** занята, ошибочно.

Таким образом, граница весовой диаграммы между $\mathbf{g}_{\text{макс}}$ и **q** — прямая линия и каждый из весов на ней имеет единичную кратность. Аналогичный аргумент применим и к другим линиям границы. Результат показан на рис. 10.4. В определенных случаях граница вырождается в треугольник.

10.3.3. Кратности и характеристика состояний. В п. 10.3.2 было показано, что веса на границе имеют единичную кратность; остается определить кратность внутренних весов. Снова начнем со старшего веса. Из рис. 10.6 видно, что состояния

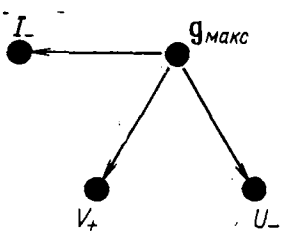


Рис. 10.6. Действие операторов сдвига на состояние старшего веса

$$I_-|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle, \quad V_+|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle, \quad U_-|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle \qquad (10.23)$$

не могут быть все равны нулю, если $\mathbf{g}_{\text{макс}}$ — не единственный вес супермультиплета.

Состояния с весом $\mathbf{g}_{\text{макс}}+\mathbf{v}$ можно построить следующим образом:

$$V_+|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle, \quad I_-U_-|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle, \quad U_-I_-|\alpha, \mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle.$$

Они не являются линейно независимыми, так как, согласно (10.14),

$$I_-U_-|\mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle - U_-I_-|\mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle = -V_+|\mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle.$$

Таким образом, имеется самое большое два независимых состояния с весом $\mathbf{g}+\mathbf{v}$. Таких состояний именно два, если не равны нулю $I_-|\mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle$ или $U_-|\mathbf{g}_{\text{макс}}\rangle$, в противном случае существует лишь одно такое состояние.

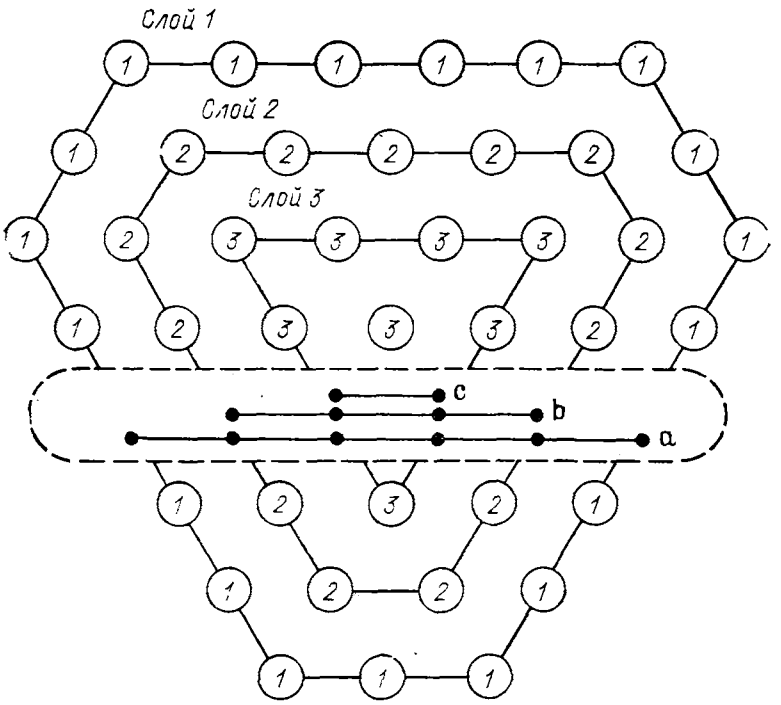


Рис. 10.7. Супермультиплет 81 с указанием его слоев.
Внутри штриховой линии все состояния с определенным M смещены и сгруппированы в мультиплеты по изоспину с $I=1/2$, $3/2$ и $5/2$

Применяя далее технику этого и предыдущего разделов, получим следующие результаты.

В обозначениях рис. 10.7 граничный слой (слой *1*) состоит из весов кратностн 1; в слое *2* кратность каждого веса равна 2 и т. д., пока не достигнем слоя, имеющего вид треугольника. Внутри этого треугольника и на его граннце кратность постоянна. Таким образом, изображенный на рисунке супермультиплет состоит из

81 состояния. В особом случае, когда два состояния из (10.23) равны нулю, граничный слой I представляет собой треугольник, а все веса имеют кратность 1.

В общем случае несколько состояний имеют один и тот же вес, т. е. одинаковые пары собственных значений I_3 и $M(Y)$, поэтому для того чтобы различить их, нужны дополнительные характеристики состояний. Такой характеристикой является, например, квадрат полного изоспина

$$I^2 = \frac{1}{2}(I_-I_+ + I_+I_-) + I_3^2,$$

коммутирующий и с I_3, и с $M(Y)$.

В результате мы классифицируем состояния с фиксированным значением $M(Y)$ по изоспиновым мультиплетам. Это показано символически на рис. 10.7. Самое правое состояние **a** имеет $I_3 = +5/2$ и принадлежит мультиплету $I = 5/2$. Состояние $I_-|a\rangle$ также имеет $I = 5/2$, в то время как линейно независимое состояние в этой вершине имеет $I = 3/2$. Применение I_- к двум этим состояниям дает два состояния **c** с $I_3 = +1/2$ и $I = 5/2$ и $3/2$ соответственно. Оставшееся третье состояние должно иметь $I = 1/2$. Из этого примера и правила для кратностей видно, что одного добавочного оператора I^2 достаточно для того, чтобы характеризовать все состояния однозначно.

Наконец, охарактеризуем мультиплет в целом. Можно доказать, что супермультиплет однозначно определен, если задан его старший вес. Следовательно, для определения супермультиплета можно использовать два квантовых числа, характеризующих $\mathbf{g}_{\text{макс}}$ *.

Часто супермультиплет характеризуют двумя целыми числами: супермультиплет (p, q) есть супермультиплет, старший вес которого задается формулой

$$Y = \frac{1}{3}(p + 2q); \quad I_3 = \frac{1}{2}p;$$

его размерность есть

$$n(p, q) = \frac{1}{2}(p + 1)(q + 1)(p + q + 2).$$

Таким образом, супермультиплет **3** есть (1,0), **3*** есть (0, 1), **8** есть (1, 1) и т. д. Числа p и q равны также длинам смежных сторон весовой диаграммы, т. е. **81** на рис. 10.7 соответствует (5, 2).

Тот факт, что для однозначного определения супермультиплета $SU(3)$ требуются две характеристики, является важным моментом. Однако на практике используется как наиболее информативное полное число состояний или размерность. Неоднозначности, которые при этом могут возникнуть, легко устранимы.

---

* Это аналогично той роли, которую играет квантовое число I полного изоспина, являющееся наибольшим значением I_3 в мультиплете по изоспину.

10.3.4. Супермультиплеты низкой размерности. Рассмотрим теперь некоторые простейшие супермультиплеты, разрешенные выведенными нами правилами.

Заменим оператор M *гиперзарядом*, связанным с ним соотношением

$$M = \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} Y.$$

Оператор M был использован нами потому, что позволял вскрыть естественную симметрию весовых диаграмм. Чтобы сохранить эту симметрию, удобно использовать для осей Y и I_3 разный масштаб.

1. Простейший супермультиплет состоит из одного состояния $|0\rangle$ с нулевым весом. Таким образом,

$$Y = I_3 = 0.$$

Поскольку это состояние находится на пересечении всех трех линий отражения, то теорема об отражении не требует существования никаких дополнительных состояний. Все шесть операторов сдвига, примененные к состоянию $|0\rangle$, дают нуль:

$$I_\pm |0\rangle = U_\pm |0\rangle = V_\pm |0\rangle = 0,$$

так что никакие дополнительные состояния не возникают.

Ясно, что состояние $|0\rangle$ соответствует $I=0$.

3: Наименьший нетривиальный супермультиплет состоит из трех состояний. Веса этих состояний лежат на линиях отражения (рис. 10.8).

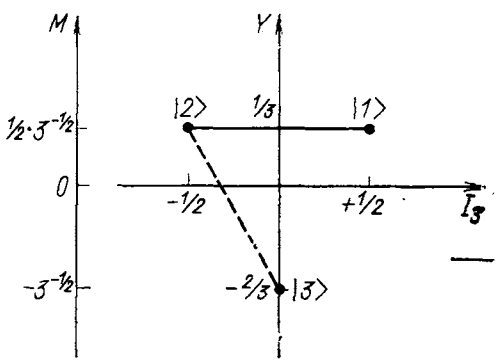


Рис. 10.8. Весовая диаграмма супермультиплета 3

Теорема об отражении выполняется. Старшее состояние есть $|1\rangle$, так как оно удовлетворяет соотношениям

$$I_+ |1\rangle = U_+ |1\rangle = V_- |1\rangle = 0 \qquad (10.24)$$

и

$$U_- |1\rangle = 0. \qquad (10.25)$$

Определим состояние $|2\rangle$ с помощью соотношения

$$I_-|1\rangle = |2\rangle. \tag{10.26}$$

Так как состояние $|2\rangle$ можно получить из старшего состояния путем отражения P_i, никакого другого состояния слева нет, так что

$$I_-|2\rangle = 0.$$

Состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ образуют изоспиновый дублет и

$$I_+|2\rangle = |1\rangle. \tag{10.27}$$

Третье состояние можно определить соотношением

$$U_-|2\rangle = |3\rangle. \tag{10.28}$$

В уравнениях (10.26)—(10.28) мы обобщили фазовое условие Кондона — Шортли следующим образом *.

Фазовое условие: будем считать, что матричные элементы операторов сдвига $I_\pm$ и $U_\pm$ относительно состояний супермультиплета действительны и положительны.

С помощью коммутационных соотношений находим

$$U_+|3\rangle = |2\rangle; \quad V_+|1\rangle = |3\rangle; \quad V_-|3\rangle = |1\rangle.$$

Например, с помощью (10.25) получаем

$$U_-|2\rangle = U_-I_-|1\rangle = I_-U_-|1\rangle + V_+|1\rangle = V_+|1\rangle.$$

Несмотря на то что собственные значения $I_3\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$ подходят для обычных частиц, собственные значения $Y\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ не подходят. Это объясняется идентификацией (10.12), но не должно нас беспокоить, так как в пользу октетов существует больше эмпирических доказательств, чем в пользу триплетов. В гл. 11 мы еще вернемся к супермультиплетам с дробным Y.

Во введении отмечалось, что развитая здесь алгебра $SU(3)$ подходит также и для модели Сакаты. В этой теории идентификация M вместо выражения (10.12) имела вид

$$M = \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\left(S + \frac{1}{3}B\right) \quad \text{(Саката)}. \tag{10.29}$$

Здесь B — барионное число; S — странность. Таким образом, странности изодублета и изосинглета равны 0 и —1 соответственно, так что (p, n) и Λ могли бы иметь место в этой схеме.

3 *: Существует второй супермультиплет размерности 3, весо-

* Это условие отличается от условия де Сварта [57], требующего положительности матричных элементов для $I_\pm$ и $V_\pm$ (т. е. для $K_\mp$ в обозначениях де Сварта). Минусы в коммутационных соотношениях (10.14) одновременно исключают положительные матричные элементы для всех шести операторов сдвига. Причина нашего выбора заключается в желании облегчить использование U-спина (см. приложение В).

вая диаграмма которого показана на рис. 10.9. Этот случай отличается от случая изоспина, где существует единственный мультиплет заданной размерности.

Из диаграммы можно видеть, что собственные значения Y отличаются от собственных значений супермультиплета 3. Это значит, что с помощью унитарного преобразования базисных состояний вида

$$|3^*, n\rangle = \sum_{m=1}^{3} U_{nm} |3, m\rangle \tag{10.30}$$

невозможно перевести одни состояния в другие: в случае преобразования (10.30) операторы подвергаются преобразованию подобия

$$Y \to Y' = UYU^{-1}.$$

При этом, как известно, собственные значения сохраняются. Действие операторов сдвига заключается в следующем:

$$U_-|1\rangle = |2\rangle; \quad U_+|2\rangle = |1\rangle;$$

$$I_-|2\rangle = |3\rangle; \quad I_+|3\rangle = |2\rangle;$$

$$V_-|3\rangle = |1\rangle; \quad V_+|1\rangle = |3\rangle.$$

В модели Сакаты при наличии соотношения (10.29) античастицы $\bar{\lambda}$, $\bar{n}$ и $\bar{p}$ могут считаться супермультиплетами 3^*.

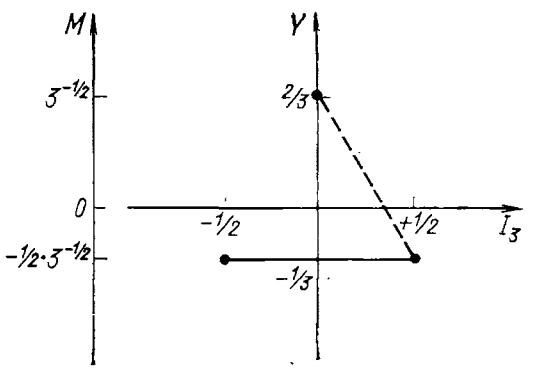


Рис. 10.9. Весовая диаграмма супермультиплета 3*

6 и 6^*: Это два разных супермультиплета с шестью членами и снова дробным гиперзарядом. Их весовые диаграммы изображены на рис. 10.10.

8: Весовая диаграмма представлена на рис. 10.11. В результате идентификации (10.12) в этом случае Y имеет целые собст-

венные значения. Состояние $|1>$ старшее, состояние $|2>$ определяется соотношением

$$I_-|1\rangle = |2\rangle$$

и образует $I=1/2$ дублет с состоянием $|1>$.

Состояние $|3>$ определяется как

$$U_-|1\rangle = |3\rangle.$$

Вес $I_3=Y=0$ имеет кратность 2: одно из состояний можно определить как центральный член триплета $I=1$, полагая $I_-|3>=$

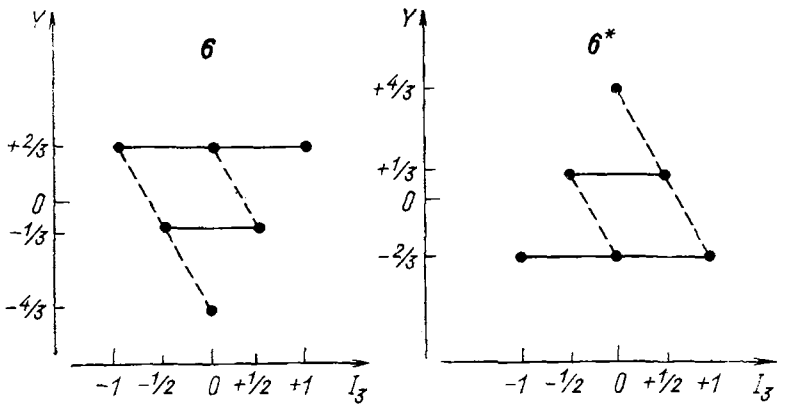


Рис. 10.10. Весовые диаграммы супермультиплетов **6** и **6***

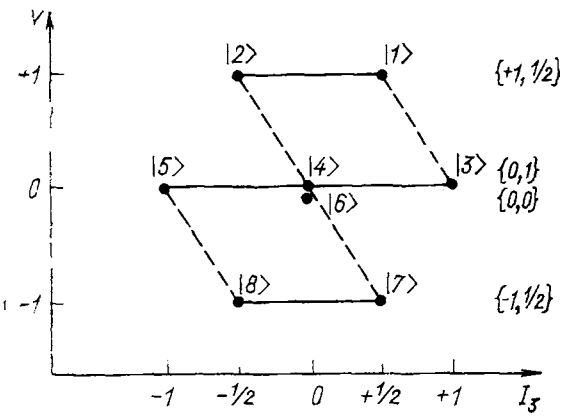


Рис. 10.11. Весовая диаграмма октета **8**. Справа обозначено содержание гиперзаряд — изоспин $\{Y, I\}$

$=2^{1/2}|4>$. Множитель справа есть стандартный матричный элемент изоспина $\rho_-(I=1, I_3=1)$ (3.35). Линейно независимое состояние с $g=0$ есть изосинглетное состояние $|6>$.

Состояние $|5>$ получается из соотношения

$$I_-|4\rangle = 2^{1/2}|5\rangle.$$

Развивая далее технику U-спина, покажем, что

$$U_-|2\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}|4\rangle + \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}|6\rangle.$$

Так как при этом U_- не коммутирует с I-спином, справа получается суперпозиция состояний с $I=1$ и $I=0$.

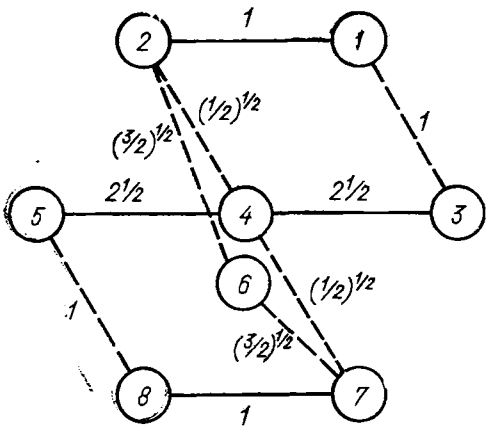
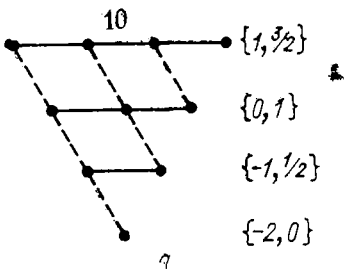
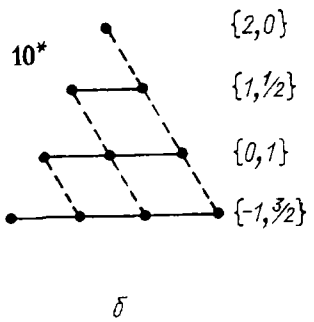
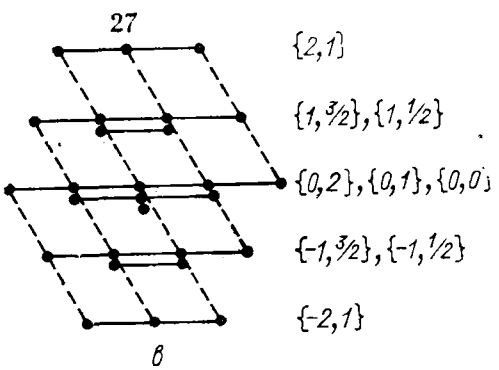


Рис. 10.12. Матричные элементы операторов $J_\pm$ и $U_\pm$ между состояниями супермультиплета **8**

Рис. 10.13. Весовые диаграммы для **10** (*а*), **10*** (*б*) и **27** (*в*)







Аналогично можно показать:

$$U_-|4\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}|7\rangle; \quad U_-|6\rangle = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}|7\rangle.$$

И, наконец, определим

$$I_-|7\rangle = |8\rangle; \quad U_-|5\rangle = |8\rangle.$$

Матричные элементы U_- и I_- перечислены и собраны вместе на рис. 10.12. Матричные элементы U_- и I_+ получаются из них, если использовать условия эрмитовости и вещественности:

$$\langle m|I_+|n\rangle = \langle n|I_-|m\rangle; \quad \langle m|U_+|n\rangle = \langle n|U_-|m\rangle.$$

Все величины здесь положительны в соответствии с принятым условием.

С помощью аналогичной техники можно получить матричные элементы операторов сдвига для произвольного супермультиплета. Существуют и общие формулы (см. [39]).

10, 10* и 27: Весовые диаграммы этих супермультиплетов, имеющих физические значения I_3 и Y, показаны на рис. 10.13. Для мультиплета с изоспином I и гиперзарядом Y использовано обозначение $\{Y, I\}$.

§ 10.4. РАЗМЕЩЕНИЕ ЧАСТИЦ И РЕЗОНАНСОВ ПО СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТАМ SU(3)

Опишем некоторые следствия инвариантности относительно группы $SU(3)$.

Из предположения о $SU(3)$-инвариантности следует, что все состояния супермультиплета должны быть вырождены по энергии (массе) и иметь одни и те же спин и четность. Отсутствие точной симметрии означает, что существует только приближенное равенство энергии. Однако, руководствуясь двумя другими свойствами, супермультиплеты адронных состояний можно идентифицировать.

Ниже мы еще вернемся к вопросу об отклонениях от точной симметрии.

Схема $SU(3)$-симметрии была разработана специально для описания октетов $(1/2)^+$-барионов и 0^--мезонов. Размещение этих состояний показано на рис. 10.14.

Адронные резонансы, которые возникают вследствие приближенно $SU(3)$ симметричных взаимодействий, также должны образовывать супермультиплеты $SU(3)$. Хорошо известный резонанс Δ (1236) со спином и четностью $(3/2)^+$ имеет внутренние квантовые числа $Y=1$, $I=3/2$ и не может быть помещен в октет. Наименьший супермультиплет, который может быть связан с этой частицей, — это декуплет. Партнерами этого резонанса, как показано на рис. 10.15, должны быть барионные резонансы со значениями $\{Y, I\}$, равными $\{0, 1\}$, $\{-1, 1/2\}$ и $\{-2, 0\}$.

В 1962 г. на конференции в ЦЕРНе Гелл-Ман предложил идентифицировать первые два из них с резонансом Σ (1385) и каскадным резонансом Ξ (1530). В то время кандидата на остающееся состояние со странностью (-3) и изоспином 0 не было. Последующее открытие Ω^--частицы с предсказанными квантовы-

ми числами было важным событием, убедившим физиков в правильности схемы $SU(3)$. Мы снова вернемся к этому вопросу, когда покажем, как была предсказана масса недостающего Ω^--гиперона.

Удовлетворительное размещение высших барионных резонансов по супермультиплетам требует знания спинов и четностей, которые были установлены сначала для состояний $N(I=1/2)$ и $\Delta(I=3/2)$, а затем со все большим трудом для резонансов Σ, Λ и

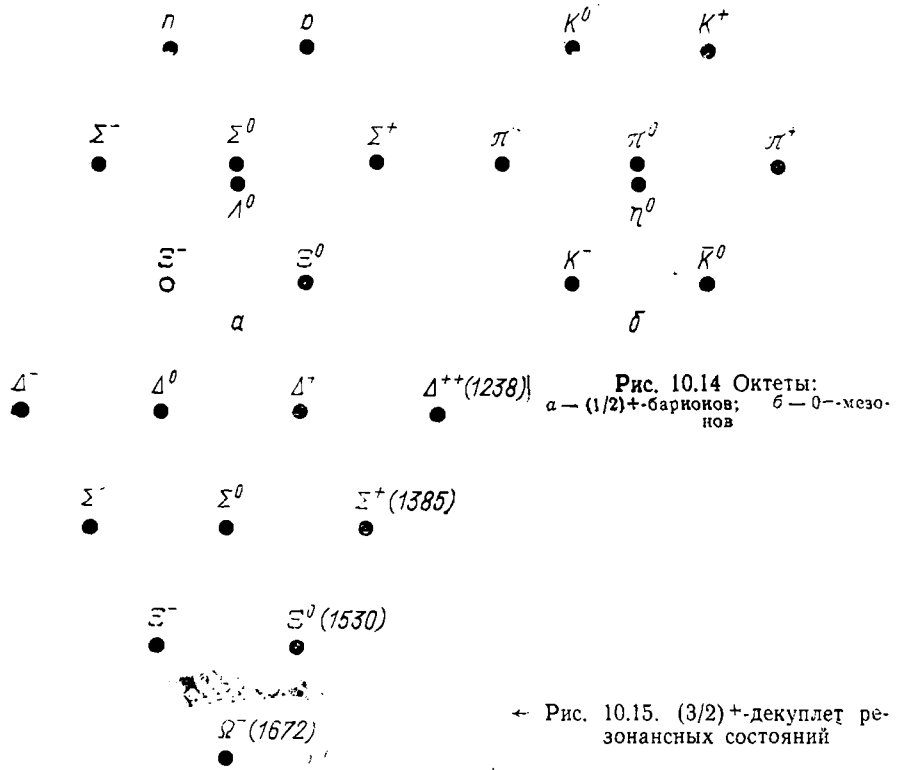


Рис. 10.14 Октеты: *а* — (1/2)+-барионов; *б* — 0−-мезонов

← Рис. 10.15. (3/2)+-декуплет резонансных состояний

Ξ. Мультиплеты с тремя или большим числом известных состояний перечислены в табл. 10.2.

Важная закономерность спектра барионов состоит в отсутствии резонансов с $Y=+2$ в KN-рассеянии. Отсюда следует, что супермультиплеты **10*** или **27** (или высшие супермультиплеты) существовать не должны, поскольку в противном случае каждый нуклонный резонанс можно было бы приписать или **8**, или **10** в зависимости от его изоспина $I=1/2$ или $I=3/2$. Затем можно исследовать список гиперонных резонансов для $Y=0$, $I=0$ или 1, которые являются партнерами нуклонных резонансов. Дальнейшие предсказания $SU(3)$, такие, как отношения скоростей распадов, на этой стадии являются полезными критериями. Эту технику мы опишем для случая барионного декуплета **10** в § 10.6. Обзор про-

Таблица 10.2

Супермультиплеты барионов

Октеты					Синглеты	Дублеты				
J^P	N	Σ	Λ	Ξ	Λ'	J^P	Δ	Σ	Ξ	Ω^-
$(1/2)^+$	940	1190	1115	1320	—	$(3/2)^+$	1236	1385	1530	1675
$(1/2)^-$	1535	1750	1670	—	1405	$(7/2)^+$	1950	2030	—	—
$(3/2)^-$	1520	1670	1690	1815	1520					
$(5/2)^-$	1670	1765	1830	1940?	—					
$(5/2)^+$	1688	1915	1815	2037?	—					

блемы размещения барионных резонансов дан в работах [97, 125].

Мезонные резонансы, с достаточной достоверностью размещенные по супермультиплетам $SU(3)$, перечислены в табл. 10.3. Оказывается, что они образуют лишь октеты и синглеты.

Таблица 10.3

Супермультиплеты мезонов

J^P	Октеты			Синглеты
0	π	η	K	η' (958)
1^-	ρ (770)	φ (1019)	K (892)	ω (784)
2^+	A_2 (1310)	f' (1514)	K^* (1420)	f (1270)

Здесь удобно ввести понятие *сопряженного супермультиплета.* Пусть дан $SU(3)$-супермультиплет **N**. При этом всегда существует сопряженный супермультиплет **N***.

Весовая диаграмма **N** получается из **N*** путем отражения в начале координат, так что для каждого состояния $|\mathbf{N}, Y, I, I_3\rangle$ в **N** существует состояние $|\mathbf{N}^*, -Y, I, -I_3\rangle$ в **N***. Может оказаться, что **N** и **N*** совпадают (самосопряжены), как для супермультиплета **8**. Общий случай иллюстрируется парами **3**, **3***; **6**, **6*** и **10**, **10***, которые уже встречались.

Если множество частиц принадлежит **N**, то их античастицы принадлежат **N***.

В случае барионов они отличаются от своих античастиц барионным числом. Античастицы супермультиплета **8**, т. е. барионов $(1/2)^+$, принадлежат **8**, тогда как античастицы супермультиплета **10** образуют супермультиплет **10***. Для мезонов ($B=0$) самосопряженный супермультиплет, такой, как **8** или **27**, содержит и частицы, и античастицы (например, π^+ и π^-, K^+ и K^- и т. д.). Из существования мезонного супермультиплета **10** следовало бы существование супермультиплета **10***, причем эти супермультиплеты в силу *CPT*-теоремы должны быть вырождены по массе. Однако экспериментально это не подтверждено.

§ 10.5. НАРУШЕННАЯ СИММЕТРИЯ: МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ

Большие отклонения от равенства масс внутри супермультиплетов показывают, что инвариантность относительно $SU(3)$ не является точной. Попытаемся описать качественно и количественно отклонения от совершенной симметрии в такой ситуации.

10.5.1. Гипотеза Гелл-Мана о нарушенной симметрии. Для наглядности полезно представить гамильтониан сильного взаимодействия состоящим из двух частей: из «очень сильного» взаимодействия, инвариантного относительно $SU(3)$, и «умеренно сильного», ответственного за отклонения от точной симметрии.

Таким образом, если бы умеренно сильное взаимодействие можно было бы выключить, то $SU(3)$-симметрия стала бы точной инвариантностью адронов. При этом супермультиплеты были бы вырождены по массе точно так же, как вырождены члены мультиплета по изоспину в отсутствие электромагнитного взаимодействия.

Выразим это в виде

$$H_{\text{сильн}} = H_{\text{оч.сильн}} + H_{\text{ум.сильн}}, \tag{10.31}$$

где $H_{\text{ум. сильн}}$ коммутирует со всеми генераторами $SU(3)$:

$$[H_{\text{оч.сильн}}, F_i] = 0,$$

но

$$[H_{\text{ум.сильн}}, F_i] \neq 0$$

для некоторых F_i, что выражает тот факт, что $H_{\text{ум. сильн}}$ неинвариантно относительно всех преобразований из $SU(3)$. Гелл-Ман обратил это отрицательное утверждение о неинвариантности в положительное утверждение о том, что $H_{\text{ум. сильн}}$ обладает простыми трансформационными свойствами относительно преобразований $SU(3)$.

Чтобы убедиться в том, что это может привести к экспериментально проверяемым следствиям, воспользуемся аналогичной ситуацией в атомной физике.

Рассмотрим атом и пренебрежем для простоты спином. Как следствие сферической симметрии уровень энергии E_l с орбитальным моментом количества движения l обладает $(2l+1)$-кратным вырождением. При этом отдельные состояния различаются собственным значением m_l оператора L_z.

Если приложить слабое магнитное поле B, направленное по оси z, то возникает дополнительная энергия взаимодействия между полем и эффективным орбитальным магнитным дипольным моментом $e\hbar L_z/2mc$:

$$H' = \frac{e\hbar}{2mc} BL_z = kL_z.$$

Система теперь уже не обладает инвариантностью относительно вращений, поскольку H не коммутирует с L_x и L_y. Однако, по-

скольку возмущение пропорционально генератору L_z-группы инвариантности исходной системы, можно прямо получить новые уровни энергии. В первом порядке теории возмущений поправка к энергии дается средним значением

$$\delta E_{lm_l} = (\psi_{lm_l}, H'\psi_{lm_l}) = km_l.$$

Возмущение диагонально в базисе ψ_{lm_l}, так что теория возмущений для вырожденного случая здесь не требуется. Это не что иное, как теория нормального эффекта Зеемана.

Вернемся теперь к $SU(3)$-симметрии и зададим вопрос: какую гипотезу можно выдвинуть относительно трансформационных свойств $H_{\text{ум. сильн}}$? Хотя полная $SU(3)$-симметрия нарушается, изоспин и гиперзаряд при этом еще сохраняются, так что

$$[Y, H_{\text{ум.сильн}}] = 0, \quad [I_3, H_{\text{ум.сильн}}] = [I_\mp, H_{\text{ум.сильн}}] = 0.$$

Гелл-Ман предложил считать, что $H_{\text{ум. сильн}}$ преобразуется подобно одному из генераторов группы $SU(3)$ (как в только что рассмотренном примере). Исследование алгебры $SU(3)$-симметрии и уравнений (10.14а)—(10.14и) показывает, что единственный генератор, коммутирующий с Y и $I_\pm$, — это сам генератор Y. Таким образом, приходим к следующей формулировке.

Гипотеза о нарушении симметрии: гамильтониан $H_{\text{ум. сильн}}$ преобразуется подобно гиперзаряду Y.

Из последующего обсуждения станет ясно, что в случае $SU(3)$ в отличие от случая эффекта Зеемана имеется разница между $H_{\text{ум. сильн}}$, преобразующимся *подобно* Y, и $H_{\text{ум. сильн}}$ пропорциональным Y.

10.5.2. U-спин. При выводе следствий из гипотезы о нарушении симметрии воспользуемся техникой U-спина, развитой Липкиным и др. *

В случае точной $SU(3)$-симметрии, когда умеренно сильное и электромагнитное взаимодействия выключены, все восемь $\frac{1^+}{2}$-барионов будут вырождены по массе. При этом наше предположение о подразделении октета на изоспиновые мультиплеты с определенным гиперзарядом не очевидно. На математическом языке это можно представить так: вместо того чтобы характеризовать состояние с помощью I_3 и Y, воспользуемся

$$U_3 = -\frac{1}{2} I_3 + \frac{3}{4} Y \tag{10.32}$$

и

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y. \tag{10.33}$$

Как уже отмечалось выше, операторы U-спина U_3, $U_\pm$ подчиняются тем же самым коммутационным соотношениям, что и I_3,

* Читатель, знакомый с теорией групп, может быстрее сделать этот вывод с помощью тензорных операторов и теоремы Вигнера—Эккарта.

$I_\pm$ или J_3, $J_\pm$. Следовательно, к U-спину можно применить весь аппарат момента количества движения.

В случае точной $SU(3)$-симметрии можно с одинаковым правом классифицировать состояния $SU(3)$-супермультиплета с помощью Q, U_3 и собственного значения $U(U+1)$ полного U-спина

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2,$$

где U_1 и U_2 определяются соотношением

$$U_\pm = U_1 \pm iU_2.$$

Далее, так как Q коммутирует с U-спином, то состояния мультиплета по U-спину обладают U_3, пробегающими значения от $-U$ до $+U$. При этом все состояния имеют одинаковый заряд Q.

Необходимо связать две схемы задания состояний с помощью значений (U, U_3, Q) и (I, I_3, Y). Обычно это делается легко. Если вес имеет кратность 1, то соотношения (10.32) и (10.33) дают значения U_3 и Q. Отсюда часто можно получить значение полного U-спина. Таким образом, в барионном октете p и Σ^+ имеют $(Q, U_3) = \left(+1, +\frac{1}{2}\right)$ и $\left(+1, -\frac{1}{2}\right)$ соответственно, образуя мультиплет с $U=1/2$. Частицам n и Ξ^0 соответствуют $(0, +1)$ и $(0, -1)$, а Σ^0 и Λ^0 — $(0, 0)$. Однако состояния, отвечающие началу координат и имеющие определенный полный U-спин, являются суперпозицией состояний Σ^0 и Λ^0 с определенным I. Такие суперпозиции обозначаются Σ_U^0 и Λ_U^0 в зависимости от того, $U=1$ или $U=0$, и могут быть определены следующим образом. Предположим, что состояние с $U=1$, $U_3=0$ есть

$$|\Sigma_U^0\rangle = |U=1, U_3=0\rangle = \alpha|\Sigma^0\rangle + \beta|\Lambda^0\rangle, \qquad (10.34)$$

где $\alpha^2+\beta^2=1$, так как все символы $|>$ нормированы. Далее мы убедимся, что α и β можно выбрать так, чтобы они были действительными.

Нейтрон имеет $U_3=1$ и должен принадлежать триплету с $U=1$, поэтому, применяя понижающий U_--оператор U-спина, получаем

$$U_-|n\rangle = 2^{1/2}|\Sigma_U^0\rangle.$$

Аналогично для триплета $I=1$

$$I_-|\Sigma^+\rangle = 2^{1/2}|\Sigma^0\rangle.$$

В этих уравнениях число $2^{1/2}$ является матричным элементом U_- (или I_-), полученным из (3.41) и положительным при наших условиях.

Взяв скалярное произведение последних двух уравнений, получим

$$2\langle\Sigma^0|\Sigma_U^0\rangle = \langle\Sigma^+|I_\pm U_-|n\rangle = \langle\Sigma^+|I_+U_-|n\rangle =$$
$$= \langle\Sigma^+|U_-I_+|n\rangle = \langle p|p\rangle = 1.$$

Здесь мы использовали тот факт, что I_+ и U_- коммутируют друг с другом

$$U_+ \mid \Sigma^+\rangle = \mid p\rangle.$$

Так как $\langle\Sigma^0 \mid \Sigma_U^0\rangle$ как раз равно α, имеем $\alpha = 1/2$, и, следовательно,

$$\mid \Sigma_U^0\rangle = \frac{1}{2} \mid \Sigma^0\rangle + \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} \mid \Lambda^0\rangle. \tag{10.35}$$

Ортогональная линейная комбинация дает состояние Λ_U^0:

$$\mid \Lambda_U^0\rangle = \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} \mid \Sigma^0\rangle - \frac{1}{2} \mid \Lambda^0\rangle. \tag{10.36}$$

Положение знака минус здесь произвольно. Эти результаты справедливы и для любого октета.

В случае такого треугольного супермультиплета, как изображенный на рис. 10.13 супермультиплет **10**, кратность весов равна 1 и состояния можно прямо перегруппировать в мультиплеты U-спина. На рис. 10.8—10.13 мультиплеты U-спина обозначены штриховыми линиями.

10.5.3. Массовые формулы. Польза от U-спина при рассмотрении нарушения симметрии заключается в том, что мультиплет по U-спину содержит состояния с разными (Y, I), следовательно, в отличие от мультиплета по I-спину, содержит эффекты взаимодействий, нарушающих симметрию.

Нами уже выдвинут постулат о том, что $H_{\text{ум. сильн}}$ преобразуется подобно Y, и так как

$$Y = U_3 + \frac{1}{2} Q$$

и

$$[QU] = 0,$$

то, значит, $H_{\text{ум. сильн}}$ преобразуется подобно суперпозиции U_3, т. е. компоненте вектора $U=1$ и скаляра Q в пространстве U-спина. Представим это следующей формулой:

$$H_{\text{ум.сильн}} = H^{(S)}_{\text{ум.сильн}} + H^{(V)}_{\text{ум.сильн}}. \tag{10.37}$$

Подобно теории возмущений первого порядка, поправки к энергиям или массам членов октета будут даваться средними значениями возмущения. Таким образом,

$$\delta m_p = \langle p \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid p\rangle \tag{10.38}$$

и т. д.

Переходя к характеристике с помощью U-спина, рассмотрим триплет $U=1$

$$\left(n,\ \frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2}\,\Lambda^0,\ \Xi^0\right).$$

Итак, мы должны вычислить величину

$$\langle U=1,\ U_3 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid U=1,\ U_3\rangle = \langle 1,\ U_3 \mid H^{(S)}_{\text{ум.сильн}} \mid 1,\ U_3\rangle + \\ + \langle 1,\ U_3 \mid H^{(V)}_{\text{ум.сильн}} \mid 1,\ U_3\rangle.$$

Среднее значение величины $H_{\text{ум. сильн}}$, скалярной относительно U-спина, не может зависеть от U_3, так что

$$\langle 1,\ U_3 \mid H^{(S)}_{\text{ум.сильн}} \mid 1,\ U_3\rangle = a.$$

В то же время среднее значение величины $H^{(V)}_{\text{ум. сильн}}$, векторной относительно U-спина, преобразующейся подобно U_3, пропорционально U_3, и, таким образом,

$$\langle 1,\ U_3 \mid H^{(V)}_{\text{ум.сильн}} \mid 1,\ U_3\rangle = bU_3.$$

Здесь a и b — константы, характеризующие рассматриваемый супермультиплет.

Выбрав матричные элементы $H_{\text{ум. сильн}}$ между состояниями триплета $U=1$, в свою очередь, получим:

$$\langle n \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid n\rangle = a + b;$$

$$\left\langle \frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\Lambda^0 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid \frac{1}{2}\Sigma^0 + \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\Lambda^0 \right\rangle = a;$$

$$\langle \Xi^0 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid \Xi^0\rangle = a - b.$$

Так как $H_{\text{ум. сильн}}$ сохраняет I-спин, матричный элемент между состояниями Σ^0 и Λ^0 равен нулю. Таким образом, средняя строка принимает вид

$$\frac{1}{4}\langle \Sigma^0 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid \Sigma^0\rangle + \frac{3}{4}\langle \Lambda^0 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid \Lambda^0\rangle = a.$$

Исключив a и b, получим одно соотношение, связывающее сдвиги масс:

$$\frac{1}{2}(\delta n + \delta\Xi^0) = \frac{1}{4}(\delta\Sigma^0 + 3\delta\Lambda^0).$$

Так как невозмущенные массы предполагаются равными, это уравнение можно переписать в виде соотношения между полными (наблюдаемыми) массами частиц

$$\frac{1}{2}(N + \Xi) = \frac{1}{4}(\Sigma + 3\Lambda). \qquad (10.39)$$

Зарядовые характеристики можно опустить, так как, если пренебречь электромагнитными эффектами, все массы в пределах мультиплета по изоспину равны.

Уравнение (10.39) есть *массовая формула Гелл-Мана — Окубо*, которая должна выполняться для любого октета.

Для октета $\frac{1+}{2}$ -барионов стороны уравнения имеют массы

1128 и 1135 *Мэв*. Если точность массовой формулы определять по отличию от средней массы этого октета, получим значение, равное 1%. Если иметь в виду теорию возмущений первого порядка, такое соответствие удивительно.

Для 0^--мезонов эта формула согласуется хуже. Фейнман отметил, что для мезонов согласование можно сделать лучшим, если переписать формулу через квадраты масс. Тогда получим соотношение

$$m_K^2 = \frac{1}{4}(m_\pi^2 + 3m_\eta^2), \tag{10.40}$$

так как в силу CPT-инвариантности $m_{\overline{K}} = m_K$.

Основанием для использования квадратов масс может служить тот факт, что в теорию поля для бозонов (в противоположность фермионам) естественным образом входят именно квадраты масс, а не сами массы (ср., например, уравнения Клейна — Гордона и Дирака).

Массовую формулу легче получить для декуплета, потому что, как отмечалось выше, члены мультиплетов по U-спину можно записывать непосредственно по весовой диаграмме.

Рассмотрим среднее значение $H_{\text{ум. сильн}}$ по членам мультиплета с $U=3/2$

$$|\, U = \frac{3}{2},\ U_3\rangle = (\Delta^-,\ \Sigma^-,\ \Xi^-,\ \Omega^-).$$

Находим

$$\left\langle \frac{3}{2} U_3 \,|\, H_{\text{ум.сильн}} \,|\, \frac{3}{2} U_3 \right\rangle = a' + b' U_3,$$

где a' и b' — константы. Таким образом, сдвиги масс в мультиплете линейно зависят от U_3, а так как Q постоянно, то они линейно зависят и от Y. То же самое справедливо для наблюдаемых масс, так как невозмущенные массы равны.

Таким образом, получаем *правило эквидистантности* для декуплетов

$$\Delta - \Sigma^* = \Sigma^* - \Xi^* = \Xi^* - \Omega. \tag{10.41}$$

Когда этот результат был впервые получен, еще не было известно о существовании Ω^-. Массы Δ, Σ^* и Ξ^* резонансных состояний находились в хорошем соответствии с этой формулой. Их значения в настоящее время составляют, *Мэв*: $\Delta=1236$; $\Sigma^*=1385$; $\Xi^*=1531$, а ширина каждого примерно равна 10 *Мэв*.

Значит, для отсутствующего состояния с $I=0$, $Y=-2$ можно предсказать массу, приблизительно равную 1680 *Мэв*. Отсюда следует, что это состояние должно слабо распадаться, так как наименьшая из возможных для $\Xi\overline{K}$-состояний энергия равна 1812 *Мэв*.

Последующее наблюдение Барнсом и др. [16] гиперона, обладающего странностью минус три и массой 1686 ± 12 *Мэв*, подтвердило правильность предположений о нарушении схемы, лежащей

в основе $SU(3)$-симметрии, и о наличии нарушающего симметрию взаимодействия, преобразующегося подобно гиперзаряду.

Заканчивая этот параграф, отметим, что если нарушающее симметрию взаимодействие имеет тот вид, который мы постулировали, то массы в супермультиплете задаются формулой Окубо [143]

$$m = m_0 + m_1 Y + m_2\left[\frac{1}{4}Y^2 - I(I+1)\right]. \qquad (10.42)$$

Значения констант m_0, m_1 и m_2 зависят от рассматриваемого супермультиплета.

10.5.4. Перемешивание масс. В попытках разместить по октету мезонные резонансы 1^- в диапазоне масс от 700 до 900 *Мэв* находим $\rho(770)$ $(I=1,\ Y=0)K^*\bar{K}^*(I=\frac{1}{2},\ Y=\pm 1)$, но для состояния $I=Y=0$ имеем два кандидата: $\varphi(1019)$ и $\omega(784)$. В этом диапазоне масс других 1^--мезонов нет, так что остается единственное предположение о том, что мы имеем октет и синглет. Чтобы решить, является ли φ или ω членом октета, можно воспользоваться для определения массы состояния $I=Y=0$ формулой Гелл-Мана — Окубо. Найденное таким путем значение 930 *Мэв* недостаточно хорошо согласуется как с φ, так и с ω.

Объяснение этого расхождения можно найти в рамках схемы нарушения $SU(3)$-симметрии. Предположим, что в пределе точной $SU(3)$-симметрии октет и синглет 1^--мезонов оказались вырожденными или почти вырожденными по массе. Теперь $H_{\text{ум. сильн}}$, преобразуясь подобно $U_3+{}^1/_2Q$, будет в общем иметь ненулевые матричные элементы между состояниями синглета $|1, I_3=Y=0\rangle$ и изосинглетом октета $|8, I=I_3=Y=0\rangle$, так как этими состояниями являются состояние $U=0$ и суперпозиция состояний $U=0$ и $U=1$ соответственно. (Матричных элементов с $|8,\ I=1,\ I_3=Y=0\rangle$ нет, так как $H_{\text{ум. сильн}}$ сохраняет I-спин.)

Эти матричные элементы будут усилены из-за равенства невозмущенных энергий. Для этих двух состояний надо использовать теорию возмущений для случая вырождения, которая приводит к следующим результатам. Матрица возмущенного гамильтониана между невозмущенными состояниями 1 и 8 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \langle 8 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid 8\rangle & \langle 8 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid 1\rangle \\ \langle 1 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid 8\rangle & \langle 1 \mid H_{\text{ум.сильн}} \mid 1\rangle \end{pmatrix}.$$

Однако по указанным выше причинам мы будем работать с квадратами масс:

$$\begin{pmatrix} M_{88}^2 & M_{81}^2 \\ M_{18}^2 & M_{11}^2 \end{pmatrix}. \qquad (10.43)$$

Эта матрица эрмитова, и выбором фаз состояний ее можно сделать действительной и, следовательно, симметричной, т. е. $M_{18}^2 = M_{81}^2$.

Возмущенные энергии задаются собственными значениями матрицы (10.43), которые равны

$$\left.\begin{matrix} m_\varphi^2 \\ m_\omega^2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\{(m_{88}^2 + m_{11}^2) \pm [(m_{88}^2 - m_{11}^2)^2 + 4m_{81}^4]^{1/2}\}. \quad (10.44)$$

Соответствующие нормированные собственные векторы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

где θ задается равенством

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_\varphi^2 - m_{88}^2}{m_{81}^2} = \frac{m_{81}^2}{m_{88}^2 - m_\omega^2}. \quad (10.45)$$

При этом возмущенные (физические) состояния имеют вид

$$\left.\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \cos\theta\,|8\rangle + \sin\theta\,|1\rangle; \\ |\omega\rangle &= -\sin\theta\,|8\rangle + \cos\theta\,|1\rangle. \end{aligned}\right\} \quad (10.46)$$

Угол θ называют углом смешивания.

Чтобы применить эти результаты к 1^--мезонам, предположим, что сначала учтено расщепление масс в октете, и, следовательно, m_{88}^2 связана с m_ρ^2 и m_K^2 по аналогии с (10.40):

$$m_{88}^2 = \frac{1}{3}(4m_K^2 - m_\rho^2).$$

Как отмечалось выше, это дает значение $m_{88} = 930$ *Мэв*. Затем выбираем m_{11}^2 и m_{81}^2 (или θ) так, чтобы φ^0- и ω^0-мезоны имели наблюдаемые массы. С помощью формул

$$m_{81}^2 = (m_{88}^2 m_{11}^2 - m_\varphi^2 m_\omega^2)^{1/2};$$

$$m_\varphi^2 + m_\omega^2 = m_{88}^2 + m_{11}^2;$$

$$\sin^2\theta = \frac{m_\varphi^2 - m_{88}^2}{m_\varphi^2 - m_\omega^2}; \quad \cos^2\theta = \frac{m_{88}^2 - m_\omega^2}{m_\varphi^2 - m_\omega^2},$$

полученных из (10.44) и (10.45), имеем $m_{11} = 888$ *Мэв*, $m_{81} = 456$ *Мэв*, $\cos\theta = 0{,}7685$, $\theta = 40{,}0°$. В качестве исходных данных использованы $m_\varphi = 1019$ *Мэв*, $m_\omega = 784$ *Мэв*. Итак, можно сказать, что вероятность того, что φ-мезон является членом октета, равна 60%, членом синглета — 40%.

Кроме объяснения кажущегося отклонения от массовой формулы для октета эта картина перемешивания частиц приводит еще и к дальнейшим предсказаниям (см. п. 10.7.3).

Перемешивания частиц следует ожидать в том случае, когда обнаруживаются супермультиплеты $SU(3)$ с теми же спином и четностью и примерно равными массами. Установлено, что для де-

вяти 2^+-мезонов $f(1260)$, $A_2(1310)$, $K^*(1420)$ и $f'(1514)$ угол смешивания $\theta \simeq 34°$, а f' — в основном член октета. Для 0^--мезонов смешивание $\eta'(958)$ с $\eta(550)$ мало и $\theta \simeq 10°$.

§ 10.6. РАСПАДЫ ДЕКУПЛЕТОВ

Размещение адронных состояний по супермультиплетам можно проверить, сравнивая скорости их распада (парциальной ширины), предсказанной схемой $SU(3)$ для разных мод, с наблюдаемыми значениями. Проиллюстрируем сказанное рассмотрением распадов $3/2^+$-барионного декуплета на $1/2^+$-барионы и 0^--мезоны. Предположим, что $SU(3)$-симметрия является точной. Тогда при распаде сохраняются I- и U-спины. Распады, разрешенные сохранением I-спина и Y, суть

$$\Delta \to N\pi,\ \Sigma K;\ \Sigma^* \to N\overline{K},\ \Lambda\pi,\ \Sigma\pi,\ \Sigma\eta,\ \Xi K;$$
$$\Xi^* \to \Lambda\overline{K},\ \Sigma\overline{K},\ \Xi\pi,\ \Xi\eta;\ \Omega \to \Xi\overline{K}.$$

Если принять во внимание реальные массы частиц, энергетически разрешены только четыре распада.

Далее будет показано, что амплитуды всех перечисленных выше процессов в принципе можно выразить через один-единственный параметр.

Для $U=3/2$ мультиплета $(\Delta^-, \Sigma^{*-}, \Xi^{*-}, \Omega^-)$ возможны следующие распады:

$$D\left(U=\frac{3}{2}\right) \to B\left(U=\frac{1}{2}\right) + M(U=1); \qquad (10.47а)$$

$$D\left(U=\frac{3}{2}\right) \to B(U=1) + M\left(U=\frac{1}{2}\right), \qquad (10.47б)$$

где

$$B\left(U=\frac{1}{2}\right) = (\Sigma^-, \Xi^-);\quad M(U=1) = (K^0, \pi^0_U, \overline{K^0});$$
$$B(U=1) = (n, \Sigma^0_U, \Xi^0);\quad M\left(U=\frac{1}{2}\right) = (\pi^-, K^-).$$

Для каждого из этих процессов разные элементы матрицы перехода полностью определяются одним параметром и коэффициентом Клебша—Гордана для U-спина, который можно взять из табл. 3.2 [см. замечания, из которых следует (10.33)]. Таким образом, из (10.47а) находим:

$$\langle \Sigma^- K^0 \mid \mathscr{T} \mid \Delta^- \rangle = C^{3/2\ +1/2}_{1/2\ +1/2,\ 1+1}\, g = g;$$
$$\langle \Xi^- K^0 \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = C^{3/2\ +1/2}_{1/2\ -1/2,\ 1+1}\, g = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} g;$$
$$\langle \Sigma^- \pi^0_U \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = C^{3/2\ +1/2}_{1/2\ +1/2,\ 1\ 0}\, g = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} g;$$

$$\langle \Xi^- \pi_U^0 \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = (2/3)^{1/2} g;$$

$$\langle \Sigma^- \overline{K}^0 \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} g; \quad \langle \Xi^- \overline{K}^0 \mid \mathscr{T} \mid \Omega^- \rangle = g.$$

Теперь $U_3=0$ состояния $|\pi_U^0>$ и $|\eta_U^0>$ выражаются через состояния физических мезонов уравнениями, аналогичными (10.35) и (10.36), которые после обращения дают

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{2} |\pi_U^0\rangle + \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} |\eta_U^0\rangle; \quad |\eta^0\rangle = \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} |\pi_U^0\rangle - \frac{1}{2} |\eta_U^0\rangle.$$

Так как распад

$$D\left(U = \frac{3}{2}\right) \to B\left(U = \frac{1}{2}\right) + \eta_U (U = 0)$$

запрещен по U-спину, то

$$\langle \Sigma^- \pi^0 \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \frac{1}{2} \langle \Sigma^- \pi_U^0 \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{6}\right)^{1/2} g$$

и

$$\langle \Sigma^- \eta^0 \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \frac{1}{2} \cdot 3^{1/2} \langle \Sigma^- \pi_U^0 \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} g.$$

Аналогично для Ξ^*-распада

$$\langle \Xi^- \pi^0 \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{6}\right)^{1/2} g; \quad \langle \Xi^- \eta^0 \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} g.$$

Такие же расчеты для распада (10.47б) дают:

$$\langle n\pi^- \mid \mathscr{T} \mid \Delta^- \rangle = f, \quad \langle \Xi^0 \pi^- \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} f;$$

$$\langle nK^- \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} f, \quad \langle \Sigma^0 K^- \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{6}\right)^{1/2} f;$$

$$\langle \Sigma^0 \pi^- \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{6}\right)^{1/2} f, \quad \langle \Lambda^0 K^- \mid \mathscr{T} \mid \Xi^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} f;$$

$$\langle \Lambda^0 \pi^- \mid \mathscr{T} \mid \Sigma^{*-} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} f, \quad \langle \Xi^0 K^- \mid \mathscr{T} \mid \Omega^- \rangle = f.$$

Здесь f и g не являются независимыми и связаны между собой так, как они были связаны, например, при рассмотрении I-спина для Ω^--распада. Частица Ω^- должна переходить в состояние $\Xi\overline{K}$ с $I=0$:

$$[\Xi\overline{K}]_{I=0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \{ |\Xi^0 K^-\rangle - |\Xi^- \overline{K}^0\rangle \},$$

следовательно,

$$\langle \Xi^0 K^- \mid \mathscr{T} \mid \Omega^- \rangle = -\langle \Xi^- \overline{K}^0 \mid \mathscr{T} \mid \Omega^- \rangle,$$

так что

$$g = -f.$$

Остальные зарядовые состояния можно связать с перечисленными с помощью закона сохранения I-спина. Таким образом, при точной $SU(3)$-симметрии все амплитуды распада декуплета задаются одним параметром g.

Экспериментально легче наблюдать не время жизни τ образца, состоящего из частиц декуплета, а ширину $\Gamma = 1/\tau$ соответствующего резонанса в мезон-барионном рассеянии. Значение Γ определяется из экспериментальных данных с помощью моделей. Полезно подогнать амплитуду рассеяния к брейт-вигнеровской форме

$$\mathcal{T}(E) = \frac{1}{E_0 - E - \frac{1}{2} i\Gamma},$$

в которой ширина Γ зависит от энергии.

Можно использовать множество разных форм этой зависимости. Для распада в состояние с орбитальным моментом количества движения l зависимость от энергии имеет простой вид

$$\Gamma = C^2 g^2 \frac{m_B}{m_D} q^{2l+1}, \qquad (10.48)$$

где q — относительный импульс продуктов распада; m_D и m_B — массы декуплета и конечного бариона; C — вычисленный выше коэффициент Клебша—Гордана. Множитель q^{2l} связывает коэффициент проникновения через барьер с моментом количества движения. Если в этом выражении использовать массы реальных физических частиц, то тем самым некоторым способом можно учесть нарушение $SU(3)$-симметрии. Множитель g^2 представляет собой квадрат эффективного матричного элемента для распада, который считается одинаковым для всех распадов декуплетов. Его можно определить, подогнав к ширине распада $\Delta(1236)$. Затем можно предсказать три другие ширины распада. Результаты приведены в табл. 10.4. Такая подгонка не является очень хорошей, но она передает правильные тенденции.

Таблица 10.4

Сравнение эксперимента с предсказаниями $SU(3)$-симметрии для ширины распадов декуплета

Распад	Предсказываемая ширина, *Мэв*	Измеренная ширина, *Мэв*
$\Delta(1236) \to N\pi$	Входная	120
$\Sigma(1385) \to \Lambda\pi$	46	35 ± 8
$\to \Sigma\pi$	6	$5{,}2 \pm 1{,}5$
$\Xi(1530) \to \Xi\pi$	16	$7{,}5 \pm 3$

Аналогичный анализ можно провести для других двухчастичных распадов супермультиплетов, состоящих из резонансов барионов или мезонов. Для исследования того, как влияет, например,

разная энергетическая зависимость Г, произведено несколько детальных и критических подгонок. Самая недавняя из них осуществлена Сэмиосом, Гольдбергом и Медоузом [157]. Остальные ссылки можно найти в «Обзоре свойств частиц» за 1974 г. Приходим к выводу, что предсказания точной $SU(3)$-симметрии в том виде, в каком они использованы здесь, хорошо согласуются с экспериментальными данными для всех определенных до сих пор супермультиплетов.

§ 10.7. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА ДЛЯ SU(3)-СИММЕТРИИ

При рассмотрении распадов декуплета *априори* не очевидно, что все амплитуды распада могут быть выражены через один параметр. Причина этого становится понятной только после того, как станут известны свойства преобразования $SU(3)$-симметрии для состояний двух или большего числа частиц.

10.7.1. Ряд Клешба — Гордана. Рассмотрим два октета частиц—октет барионов (B) и октет мезонов (M), хотя этот метод применим и в общем случае. Имеется 64 возможных произведения состояний $|BM>$. Они не образуют одного неприводимого супермультиплета $SU(3)$. Вместо этого можно обнаружить наборы *линейных комбинаций этих состояний, такие, что относительно операций* $SU(3)$ состояния каждого набора преобразуются только друг через друга. Таким образом, каждый из этих наборов должен соответствовать одному из неприводимых супермультиплетов, разрешенных правилами § 10.3. Эти правила никогда не требуют, чтобы состояния супермультиплета были состояниями одной частицы.

Первый шаг анализа заключается в том, чтобы определить, каким супермультиплетам эти неприводимые наборы соответствуют. Покажем, что 64 состояния $|BM>$ разбиваются на **27**, **10*** **10**, **8**, **8** и **1**. Результаты запишем в виде

$$8 \times 8 = 27 + 10^* + 10 + 8 + 8 + 1. \qquad (10.49)$$

Этот набор называется *рядом Клебша—Гордана* для произведения двух октетов.

Произведение состояний $|BM>$ можно характеризовать значениями (Y, I_3) для B и M или полными Y и I_3:,

$$Y = Y_B + Y_M; \quad I_3 = I_{3B} + I_{3M}.$$

В весовых обозначениях состояние $|BM>$ имеет полный вес

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_B + \mathbf{g}_M.$$

64 варианта веса произведения состояний получаются простым векторным сложением всех возможных пар $\mathbf{g}_B$ и $\mathbf{g}_M$. Систематический подход к этой операции заключается в следующем. Возьмем весовую диаграмму октета M и поместим ее начало (0, 0) в каждый вес диаграммы октета B, каждый раз отмечая положения весов M. Отмеченные точки соответствуют векторам $\mathbf{g}$. Весовая диаграмма, полученная таким путем, показана на рис. 10.16.

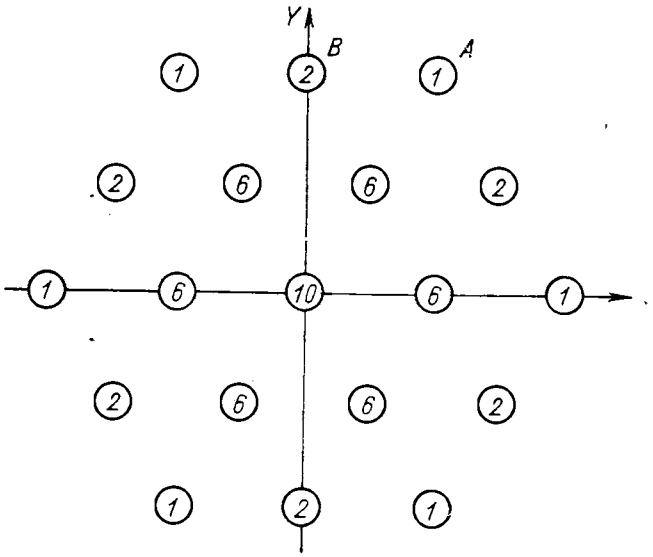


Рис. 10.16. Приведенная весовая диаграмма для 8×8. Числа означают кратности

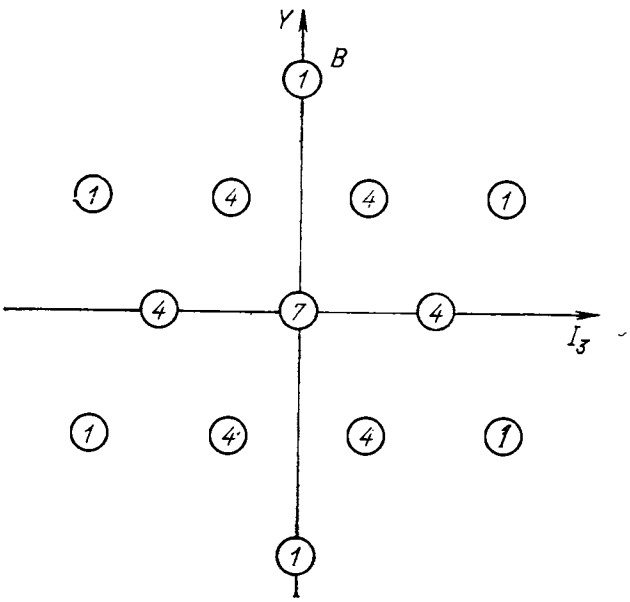


Рис. 10.17. Промежуточная весовая диаграмма для редукции 8×8. Удалены состояния супермультиплета 27. *B* — старшее состояние в оставшейся части

Чтобы найти содержащиеся в ней неприводимые супермультиплеты, определим старший вес (на диаграмме вес A). Это старший вес супермультиплета **27** (см. рис. 10.13, *в*), о присутствии которого он свидетельствует. Следовательно, удаляя соответствующие 27 весов, получаем весовую диаграмму (рис. 10.17). Опять определим старший вес. Он соответствует супермультиплету **10***. Затем удалим соответствующие 10 весов. В следующий раз вместо супермультиплета **10** мы удалим 8 весов дважды и окончательно получим **1** в начале координат. Таким путем мы приходим к (10.49).

Описанная здесь техника — самая общая, и ее можно использовать для того, чтобы редуцировать произведение любых двух (или более) супермультиплетов на их неприводимые составные части. Читатель может сам убедиться в том, что справедливы следующие разложения:

$$\mathbf{10} \times \mathbf{8} = \mathbf{35} + \mathbf{27} + \mathbf{10} + \mathbf{8}; \tag{10.50а}$$

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3}^* = \mathbf{8} + \mathbf{1}; \tag{10.50б}$$

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{6} + \mathbf{3}^*; \tag{10.50в}$$

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = (\mathbf{6} + \mathbf{3}^*) \times \mathbf{3} = \mathbf{10} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{1}. \tag{10.50г}$$

Супермультиплет **35**, входящий в уравнение (10.50а), имеет старший вес, $Y=+2$, $I_3=+2$ и следующую структуру мультиплета I-спина: $\{Y, I\}=\{+2, 2\}$, $\{+1, 5/2\}$, $\{+1, 3/2\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 3/2\}$, $\{-1, 1/2\}$, $\{-2, 1\}$, $\{-2, 0\}$, $\{-3, 1/2\}$.

10.7.2. Коэффициенты Клешба — Гордана. Следующая задача — определить коэффициенты Клебша — Гордана. Метод совершенно аналогичен тому, который был использован в гл. 3 для определения коэффициентов Клебша — Гордана для момента количества движения. Этот процесс прямой, но утомительный, поэтому ограничимся лишь краткими комментариями, а в заключение укажем, как использовать результаты. Определим операторы сдвига [см. уравнение (3.96)]:

$$I_- = I_{B-} + I_{M-}; \tag{10.51а}$$

$$U_- = U_{B-} + U_{M-}. \tag{10.51б}$$

Старший вес диаграммы рис. 10.16, очевидно, является суммой старших весов двух составляющих супермультиплетов. Так как соответствующие состояния единственны (теорема о старшем весе), то и произведение состояний со старшим весом тоже единственно.

Таким образом, в нашем примере старое состояние супермультиплета **27** есть $|p^+K^+\rangle$ с $Y=+2$, $I_3=+1$, $I=1$. Запишем его в виде

$$|\,(BM)\,\mathbf{27},\ Y=+2,\ I=1,\ I_3=+1\rangle = |\,p^+K^+\rangle. \tag{10.52а}$$

Применив оператор I_-, соответствующий формуле (10.51а), к обеим частям этого равенства, слева получим другое состояние **27**, так как операторы сдвигов связывают лишь состояния в одном

и том же супермультиплете. Справа на состояние $B(M)$ действует оператор I_{B-} (I_{M-}), так что получаем

$$2^{1/2}|(BM)\,27,\ +2,\ 1,\ 0\rangle = |\,n^0K^+\rangle + |\,p^+K^0\rangle. \qquad (10.52б)$$

Число $2^{1/2}$ слева является как раз матричным элементом (3.47) оператора I_- между состояниями с $I=1$. Таким путем мы только что получили состояния NK с $I=1$, $Y=+2$. Вторичное применение оператора I_- дает

$$|(BM)\,27,\ +2,\ 1,\ -1\rangle = |\,n^0K^0\rangle. \qquad (10.52в)$$

Уравнения (10.52а)—(10.52в) можно объединить следующим образом:

$$|(BM)\,27,\ +2,\ 1,\ I_3\rangle = [NK]_{1I_3}.$$

Правая часть этого уравнения символизирует состояние нуклона и K-мезона с полным изоспином $I=1$ и третьей компонентой I_3.

Чтобы получить другие значения Y, надо использовать U_- из формулы (10.51б). Для того чтобы получить общие формулы, необходимо знать матричные элементы U_- относительно состояний, входящих в супермультиплет (см., например, работу [18]). Здесь мы просто сошлемся на результаты без всяких доказательств.

Оператор U_-, примененный к (10.52а), дает

$$2^{1/2}\,|\,(BM)\,27,\ +1,\ \frac{3}{2},\ +\frac{3}{2}\rangle = |\,\Sigma^+K^+\rangle + |\,p^+\pi^+\rangle. \qquad (10.53)$$

При этом использованы формулы

$$U_{B-}\,|\,p^+\rangle = |\,\Sigma^+\rangle,\quad U_{M-}\,|\,K^+\rangle = |\,\pi^+\rangle.$$

Оператор I_-, примененный к (10.53), просто генерирует другие изоспиновые подсостояния ΣK и $N\pi$ с $I=3/2$. Ожидаемый результат есть

$$|\,(BM)\,27,\ +1,\ \frac{3}{2},\ I_3\rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}[\Sigma K]_{3/2I_3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}[N\pi]_{3/2I_3}. \qquad (10.54)$$

Численные коэффициенты справа называют *изоскалярными множителями* в силу их независимости от квантовых чисел I_3. Умножая их на коэффициенты Клебша—Гордана для изоспина, определяемые квадратными скобками справа, получаем коэффициент Клебша—Гордана для $SU(3)$.

Изоскалярные множители действительны и равны корням квадратным из отношений целых чисел. Сумма квадратов изоскалярных множителей в выражении вида (10.54) должна быть равна 1.

Применяя повторно эту же технику, можно найти остальные состояния супермультиплета **27**. Результаты приведены в приложении Г.

Переходя к супермультиплету **10***, видим, что его старшее состояние с $Y=+2$, $I_3=0$ ортогонально к (10.52б). Таким образом,

$$|\,(BM)\,\mathbf{10}^*,\ +2,\ 0,\ 0\rangle = [NK]_{00}.$$

Применение оператора U_- приводит к выражению

$$|\,(BM)\,\mathbf{10}^*,\ +1,\ \tfrac{1}{2},\ I_3\rangle = \tfrac{1}{2}[N\pi]_{1/2 I_3} + \tfrac{1}{2}[\Sigma K]_{1/2 I_3} + \\ + \tfrac{1}{2}[N\eta]_{1/2 I_3} - \tfrac{1}{2}[\Lambda K]_{1/2 I_3}.$$

Как было показано, существует два октета, входящих в 8×8. Можно выбрать их так, чтобы один из них был симметричным 8_S, а другой антисимметричным 8_A* относительно замены $B\rightleftarrows M$, т. е. $p\rightleftarrows K^+$, $\Sigma^0\rightleftarrows\pi^0$ и т. д. для двухчастичных состояний. Эта операция проделана в таблицах приложения Г.

Таким образом, состояние $[\Sigma\pi]_{00}$, которое вследствие свойств коэффициента Клебша—Гордана для изоспина является симметричным, содержится в $|8_S,\ 0,\ 0,\ 0\rangle$, но не в $|8_A,\ 0,\ 0,\ 0\rangle$.

Состояния супермультиплетов **27** и **1** заведомо симметричны относительно этой операции, тогда как **10** и **10*** антисимметричны.

Симметрия связей приобретает физический смысл в том случае, когда рассматриваются два одинаковых октета. Например, два октета 0^--мезонов могут быть связаны только следующим образом:

27, 8_S, **1** в состояниях с моментом количества движения l=четное число;

10, **10***, 8_A в состояниях с l=нечетное число.

Этот вывод следует из применения обобщенного принципа Паули к волновой функции двух мезонов, рассматриваемой как произведение части, зависящей от $SU(3)$, и координатной части.

В заключение этого раздела дадим формальные определения коэффициентов Клебша—Гордана для общего случая [57].

Характеристики супермультиплета обозначаются μ, μ_a, μ_b, а характеристики отдельного состояния Y, I, I_3 в совокупности обозначаются ν.

Пусть заданы произведения состояний $\varphi^{\mu_a}_{\nu_b}\,\varphi^{\mu_a}_{\nu_b}$, образованные из состояния двух супермультиплетов μ_a и μ_b. Состояния с определенными трансформационными свойствами относительно $SU(3)$ задаются линейными комбинациями

$$\varphi^{(\mu_a\mu_b)\,\mu_\gamma}_{\nu} = \sum_{\nu_a\nu_b} \begin{pmatrix} \mu_a & \mu_b & \mu_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{pmatrix} \varphi^{\mu_a}_{\nu_a}\varphi^{\mu_b}_{\nu_b},$$

где μ_γ пробегает значение для всех супермультиплетов, входящих в ряд Клебша — Гордана для $\mu_a\times\mu_b$. Величина γ помогает различить μ в случае, когда их кратность больше 1, например в случае, когда 8_A и 8_S входят в 8×8, а

* 8_A и 8_S также обозначаются в литературе как 8_F и 8_D.

$$\begin{pmatrix} \mu_a & \mu_b & \mu_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{pmatrix}$$

является $SU(3)$-коэффициентом Клебша—Гордана. Мы уже видели, как факторизуется коэффициент Клебша—Гордана:

$$\begin{pmatrix} \mu_a & \mu_b & \mu_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_a & \mu_b & \mu_\gamma \\ Y_a I_a & Y_b I_b & YI \end{pmatrix} C^{II_3}_{I_a I_{3a} I_b I_{3b}} \tag{10.56}$$

на изоскалярный множитель и коэффициент Клебша—Гордана для изоспина.

$SU(3)$-коэффициент Клебша—Гордана удовлетворяет условиям ортогональности, с помощью которых можно обратить соотношения (10.55):

$$\varphi^{\mu_a}_{\nu_a} \varphi^{\mu_b}_{\nu_b} = \sum_{\mu_\gamma \nu} \begin{pmatrix} \mu_a & \mu_b & \mu_\gamma \\ \nu_a & \nu_b & \nu \end{pmatrix} \varphi^{(\mu_a \mu_b)\, \mu_\gamma}_{\nu}. \tag{10.57}$$

10.7.3. Применения. Самое непосредственное применение аппарат коэффициентов Клебша — Гордана находит при подсчете количества независимых амплитуд при распадах или рассеянии в теории, инвариантной относительно $SU(3)$-симметрии.

Чтобы проиллюстрировать это, снова рассмотрим распады декуплетов. Амплитуды распада члена $\nu = (Y, I, I_3)$ супермультиплета **10** на барион ν_B и мезон ν_M задаются элементом $\mathcal{T}$-матрицы:

$$\mathcal{T}_{\nu_B \nu_M, \nu} = \langle 8\nu_B,\ 8\nu_M \mid \mathcal{T} \mid 10\nu \rangle.$$

Конечное состояние BM можно разложить с помощью соотношения (10.57), в котором μ пробегает значения, соответствующие супермультиплетам **27**, **10***, **10**, **8**, **8** и **1**:

$$\mathcal{T}_{\nu_B \nu_M, \nu} = \sum_{\mu_\gamma \nu'} \begin{pmatrix} 8 & 8 & \mu_\gamma \\ \nu_B & \nu_M & \nu' \end{pmatrix} \langle (BM)\, \mu_\gamma \nu' \mid \mathcal{T} \mid 10\nu \rangle. \tag{10.58}$$

Если взаимодействие инвариантно относительно $SU(3)$, то

$$\langle (BM)\, \mu_\gamma \nu' \mid \mathcal{T} \mid 10\nu \rangle = \delta_{\mu_\gamma 10}\, \delta_{\nu' \nu}\, \mathcal{T}_{\mu_\gamma}.$$

Это соотношение выражает тот факт, что переходы могут происходить только между состояниями, принадлежащими к супермультиплетам одного и того же типа (в нашем примере **10**→**10**), и что матричный элемент не может зависеть от рассматриваемого частного подсостояния (т. е. от ν).

Так как **10** только один раз входит в произведение **8**×**8**, то переменная γ лишняя, и амплитуды распада для всех членов декуплета можно выразить через одну амплитуду $\mathcal{T}_{10}$ и коэффициент Клебша—Гордана:

$$\mathcal{T}_{\nu_B \nu_M,\ \nu} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 \\ \nu_B \nu_M & & \nu \end{pmatrix} \mathcal{T}_{10},$$

При распаде октета барионных резонансов на две частицы

$$B_8^* \to B_8 + M_8,$$

такие, как $1/2^-$ или $3/2^-$, распад задается двумя амплитудами $\mathcal{T}_{8A}$ и $\mathcal{T}_{8S}$ из-за двойного вхождения 8 в произведение 8×8.

В случае распада мезона число амплитуд сокращается благодаря действию обобщенного принципа Паули.

При распаде векторного мезона на два псевдоскалярных мезона конечное состояние должно иметь $l=1$ и, следовательно, волновую функцию, антисимметричную по $SU(3)$.

Таким образом, связь типа 8_S в конечном состоянии исключается и для описания всех распадов векторного мезона достаточно одной $SU(3)$-инвариантной амплитуды. Однако если учитывается смешивание нонетов, то вводится и другая амплитуда. Так как два псевдоскалярных октета мезонов, связанных в синглет 1, не имеют волновой функции, симметричной относительно $SU(3)$, то распад векторного мезона, являющегося $SU(3)$-синглетом, на два псевдоскалярных мезона запрещен. Перемешивание φ—ω, и, в частности, соотношение (10.46), говорит о том, что инвариантные силы связи для физических φ- и ω-мезонов с двумя 0^--мезонами соответственно отличаются на множители $\cos\theta$ и $-\sin\theta$ от сил связи для других членов октета.

Аналогично для распадов 2^+-мезона на псевдоскалярные мезоны разрешены только связи типа 8_S.

Таким же способом можно рассмотреть виртуальный процесс Юкавы $B \rightleftharpoons B+M$, обобщающий реакции типа $N \rightleftharpoons \pi N$. Здесь соображения симметрии использовать нельзя, но имеются две инвариантные амплитуды, т. е. константы связи, посредством которых в $SU(3)$-инвариантной теории задаются все индивидуальные барион-мезонные связи.

§ 10.8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В SU(3)

Так как супермультиплеты $SU(3)$ содержат частицы с разными электрическими зарядами, взаимодействующие с электромагнитным полем по-разному, электромагнитное взаимодействие нарушает $SU(3)$-симметрию. Тем не менее, как и в случае умеренно сильного взаимодействия, простая гипотеза о том, каким образом происходит это нарушение, приводит к предсказанию таких электромагнитных свойств адронов, которые можно проверить экспериментально.

10.8.1. Магнитные моменты барионов. Предположим, что взаимодействие адронов с электромагнитным полем удовлетворяет принципу минимальной электромагнитной связи. Этот принцип можно адекватно сформулировать только в рамках квантовой теории поля. Это значит, что фундаментальным является взаимодействие с *зарядом* адрона, а фундаментальный магнитный момент отсутствует. Предполагается, что магнитный момент частично возникает как единственное следствие из релятивистского описания

частицы, обладающей спином, например, из уравнения Дирака, а частично из самой структуры адрона, например из токов виртуально заряженных пионов, которые могут окружать нуклон. Вследствие последнего эффекта магнитный момент частицы со спином 1/2 отличается от дираковского значения, равного $1\mu_{\text{я}}$.

Принцип минимальной связи означает, что электромагнитное взаимодействие $H_{\text{эм}}$ преобразуется подобно оператору заряда Q, являющемуся одним из генераторов $SU(3)$. Так как Q коммутирует с U-спином, все члены мультиплета по U-спину должны иметь одинаковые электромагнитные свойства.

Для магнитных моментов октета $1/2^+$-барионов справедливы равенства:

$$\mu(p) = \mu(\Sigma^+); \tag{10.59а}$$

$$\mu(n) = \mu(\Sigma^0_U) = \mu(\Xi^0); \tag{10.59б}$$

$$\mu(\Sigma^-) = \mu(\Xi^-). \tag{10.59в}$$

$\mu(B)$ можно считать средним значением оператора магнитного момента в состоянии бариона

$$\mu(B) = \langle B \mid \mu \mid B \rangle.$$

Следовательно, с помощью выражения (10.35) можно преобразовать нефизическую величину $\mu(\Sigma^0_U)$ к виду

$$\mu(\Sigma^0_U) = \frac{1}{4}\mu(\Sigma^0) + \frac{3}{4}\mu(\Lambda^0) + \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\mu(\Sigma^0\Lambda^0), \tag{10.59г}$$

где $\mu(\Sigma^0\Lambda^0)$ представляет собой магнитный момент перехода, вносящий свой вклад в распад $\Sigma \to \Lambda\gamma$. Так как $H_{\text{эм}}$ сохраняет U-спин, то

$$\langle \Sigma^0_U \mid H_{\text{эм}} \mid \Lambda^0_U \rangle = 0,$$

а в силу (10.35) и (10.36)

$$\frac{1}{4}\cdot 3^{1/2}\mu(\Sigma^0) + \frac{1}{2}\mu(\Sigma^0\Lambda^0) - \frac{1}{4}\cdot 3^{1/2}\mu(\Lambda^0) = 0. \tag{10.59д}$$

Прежде чем идти дальше, заметим, что из уравнения

$$Q = \frac{1}{2}Y + I_3$$

и из соотношения между $H_{\text{эм}}$ и Q следует, что $H_{\text{эм}}$ — сумма изоскалярной и изовекторной частей:

$$H_{\text{эм}} = \frac{1}{2}H^Y_{\text{эм}} + H^{I_3}_{\text{эм}}.$$

Тот же самый вывод справедлив и для оператора магнитного момента:

$$\mu = \frac{1}{2}\mu^Y + \mu^{I_3}.$$

Взяв матричный элемент этого уравнения относительно состояний изоспинового мультиплета, получим, что μ^Y дает вклад в постоянный член, в то время как μ^{I_3} дает вклад, линейный по I_3, так что

$$\mu(I_3) = n + bI_3.$$

Для триплета Σ-гиперонов это рассуждение приводит к соотношению

$$\mu(\Sigma^+) + \mu(\Sigma^-) = 2\mu(\Sigma^0). \tag{10.59е}$$

Наконец, покажем, что

$$\mu(\Lambda^0) = -\frac{1}{2}\mu(\Lambda_U^0), \tag{10.59ж}$$

где в силу (10.36)

$$\mu(\Lambda_U^0) = \frac{3}{4}\mu(\Sigma^0) + \frac{1}{4}\mu(\Lambda^0) - \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\mu(\Sigma^0\Lambda^0). \tag{10.59з}$$

Чтобы получить соотношение (10.59ж), отметим, что только изоскалярная часть μ^Y может давать вклад в магнитный момент Λ^0 состояния с $I=0$:

$$\mu(\Lambda^0) = \left\langle \Lambda^0 \left| \frac{1}{2}\mu^Y \right| \Lambda^0 \right\rangle. \tag{10.60}$$

Затем используем тот факт, что оператор отражения

$$P_v = \exp(-i\pi V_2),$$

введенный в п. 10.3.1, обладает свойством обменивать I-спин на U-спин и Y на Q. Таким образом,

$$P_V^{-1} Y P_v = -Q \tag{10.61}$$

и

$$P_v \mid \Lambda_U^0\rangle = \mid \Lambda^0\rangle. \tag{10.62}$$

Последнее уравнение является специальным случаем общего правила: в одном и том же супермультиплете оператор P_v переводит состояние $|U=u, U_3=u_3>$ в состояние $|I=u, I_3=u_3>$.

Из (10.61) получаем

$$P_v^{-1}\mu^Y P_v = -\mu^Q = -\mu$$

и

$$\left\langle \Lambda^0 \left| \frac{1}{2}\mu^Y \right| \Lambda^0 \right\rangle = \frac{1}{2}\langle \Lambda_U^0 \mid P_v^{-1}\mu^Y P_v \mid \Lambda_U^0\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}\langle \Lambda_U^0 \mid \mu^Q \mid \Lambda_U^0\rangle = -\frac{1}{2}\mu(\Lambda_U^0),$$

откуда и следует (10.59ж).

После исключения $\mu(\Lambda_U^0)$ и $\mu(\Sigma_U^0)$ с помощью (10.59а) и (10.59з) получаем семь соотношений между девятью магнитными моментами, включая $\mu(\Sigma^0\Lambda^0)$. Таким образом, все магнитные мо-

менты барионов выражаются через магнитные моменты протона и нейтрона. Находим:

$$\mu(\Sigma^+) = \mu_p; \quad \mu(\Lambda^0) = \frac{1}{2}\mu_n;$$

$$\mu(\Sigma^0) = -\frac{1}{2}\mu_n; \quad \mu(\Xi^0) = \mu_n;$$

$$\mu(\Sigma^-) = -\mu_p - \mu_n; \quad \mu(\Xi^-) = -\mu_p - \mu_n;$$

$$\mu(\Sigma^0\Lambda^0) = -\frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\,\mu_n.$$

В табл. 10.5 сопоставлены предсказанные значения и экспериментальные данные. Совпадение довольно хорошее, хотя в лучшем по экспериментальной определенности случае $\mu(\Lambda^0)$ появляется незначительное несоответствие.

Таблица 10.5

Сравнение экспериментально наблюдаемых магнитных моментов с предсказаниями $SU(3)$-инвариантности

Частица	Эксперимент	Предсказание	Частица	Эксперимент	Предсказание
p	2,79	Входные	Σ^-	?	—0,88
n	—1,91	»	Λ^0	—0,67±0,06	—0,95
Σ^+	2,59±0,46	2,79	Ξ^0	?	—1,91
Σ^0	?	0,95	Ξ^-	—1,93±0,75	—0,88

10.8.2. Другие электромагнитные процессы. Так как электромагнитное взаимодействие связывает фотоны с адронами, а фотон связан с зарядом Q, то в случае минимальной связи фотон должен быть системой с $U=0$.

Можно воспользоваться U-спином для того, чтобы получить следствие из этого утверждения. Например, рассмотрим фоторождение резонансов декуплета, в частности

$$\gamma + p \to \Delta^0 + \pi^+; \quad \gamma + p \to \Sigma^{*0} + K^+.$$

Начальное состояние $|\gamma p\rangle$ имеет $U=1/2$, $U_3=1/2$, тогда как Δ^0 и π^+ имеют $U=1$, $U_3=+1$ и $U=1/2$, $U_3=-1/2$ соответственно, так что $\langle\Delta^0\pi^+|\,\mathcal{T}\,|\gamma p\rangle$ пропорционально коэффициенту Клебша — Гордана $C^{1/2+1/2}_{1+1,\,1/2-1/2}$ для U-спина. Следовательно,

$$\frac{\langle\Sigma^{*0}K^+\,|\,\mathcal{T}\,|\,\gamma p\rangle}{\langle\Delta^0\pi^+\,|\,\mathcal{T}\,|\,\gamma p\rangle} = \frac{C^{1/2+1/2}_{10,\,1/2+1/2}}{C^{1/2+1/2}_{1+1,\,1/2-1/2}} = -2^{-1/2}.$$

Другое предсказание касается распадов $\pi^0\to\gamma\gamma$ и $\eta^0\to\gamma\gamma$. Так как

$$|\,\pi^0_U\rangle = \frac{1}{2}\,|\,\pi^0\rangle + \frac{1}{2}\cdot 3^{1/2}\,|\,\eta^0\rangle$$

имеет $U=1$, распад $\pi^0_U \to \gamma\gamma$ запрещен:

$$\langle \gamma\gamma \mid \mathcal{T} \mid \pi^0_U \rangle = 0.$$

Следовательно, для физических распадов справедливо равенство

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = 3\Gamma(\eta^0 \to \gamma\gamma).$$

Прежде чем приступить к его проверке, необходимо с помощью поправки на фазовый объем учесть разность масс π—η.

10.8.3. Массовые формулы с учетом электромагнитных эффектов. Электромагнитное возмущение масс должно быть одинаковым в пределах мультиплетов по U-спину. Таким образом, для октета барионов

$$\delta\Sigma^+ = \delta p; \quad \delta n^0 = \delta\Xi^0; \quad \delta\Sigma^- = \delta\Xi^-.$$

Следовательно,

$$\delta\Sigma^+ - \delta p + \delta n - \delta\Xi^0 + \delta\Xi^- - \delta\Sigma^- = 0.$$

Массы, не испытывающие сдвига, так же как влияния умеренно сильного взаимодействия $H_{\text{ум. сильн}}$, остающегося одинаковым в пределах одного мультиплета изоспинов, в последнем выражении сокращаются, поэтому

$$(n-p) - (\Sigma^- - \Sigma^+) + (\Xi^- - \Xi^0) = 0. \qquad (10.63)$$

Это формула шести масс Коулмана — Глешоу. Другой ее вывод, основанный на «законе параллелограмма» Фельдмана и Мэттьюса [72], показывает, что она должна быть справедливой во всех порядках по $H_{\text{эм}}$ и $H_{\text{ум. сильн}}$, если пренебречь перекрестными числами, начиная с $H_{\text{ум. сильн}} H_{\text{эм}}$. Так как вклады от $H_{\text{эм}}$ и $H_{\text{ум. сильн}}$ имеют порядок α (т. е. 1%) и 10% соответственно, можно ожидать, что (10.63) будет выполняться с погрешностью, меньшей 1%.

С помощью «Обзора свойств частиц» за 1973 г. находим

$$(n-p) - (\Sigma^- - \Sigma^+) = 1{,}293 - 7{,}93 = -6{,}6 \pm 0{,}1 \ \textit{Мэв}$$

и

$$\Xi^- - \Xi^0 = 6{,}39 \pm 0{,}6 \ \textit{Мэв},$$

т. е. соответствие весьма удовлетворительное.

Это хорошая проверка $SU(3)$-симметрии, основанная не на специфических свойствах преобразования взаимодействий, нарушающих симметрию, а на одних предположениях о том, что $H_{\text{ум. сильн}}$ сохраняет I-спин, а $H_{\text{эм}}$ сохраняет U-спин.

Объем книги не позволяет описать в рамках $SU(3)$-теории элегантный синтез, данный Кабиббо для слабых лептонных взаимодействий, сохраняющих странность и изменяющих ее. Для этого мы отсылаем читателя к работам [79, 82, 87].

Глава 11
МОДЕЛЬ КВАРКОВ

В предыдущей главе мы видели, что схема $SU(3)$-симметрии с успехом объясняет порядок адронных состояний и некоторые соотношения между ними, например разности масс и скорости распадов. Однако на многие вопросы она не дает ответа. Как и любая чистая схема симметрии, она дает лишь перечень возможностей, например бесконечный список супермультиплетов, но не отвечает на вопрос, какие из них соответствуют частицам, встречающимся в природе. Остается также загадкой тот факт, что супермультиплеты наименьшей размерности **3**, **3***, **6** и т. д., по-видимому, не соответствуют никаким известным частицам. Загадочным представляется также происхождение взаимодействия, нарушающего симметрию.

Можно попытаться ответить на эти вопросы, выйдя за рамки $SU(3)$-симметрии и рассмотрев специальные физические модели, обладающие $SU(3)$-симметрией. Простейшая и самая успешная из таких моделей — это *модель кварков,* предложенная Гелл-Маном [86] и Цвейгом [192] и развитая далее многими учеными.

§ 11.1. КВАРКИ

Основные предположения модели кварков состоят в следующем:

а) существует фундаментальный триплет сильновзаимодействующих частиц, называемых кварками и обозначаемых* u, d и s. Они обладают следующими свойствами: u и d образуют изодублет со странностью нуль, $I=1/2$ и с изоспином, направленным вверх и вниз соответственно, а s является изосинглетом $I=0$ со странностью -1. Все три имеют барионное число $B=1/3$;

б) наблюдаемые адроны являются связанными состояниями двух и более кварков и (или) антикварков.

Квантовые числа кварков представлены в табл. 11.1. Из рис. 11.1 можно видеть, что кваркам соответствует представление **3** группы $SU(3)$, а антикваркам — представление **3***.

* Кварки часто обозначаются символами p, n и λ из-за их аналогии с моделью Сакаты, в которой протон, нейтрон и Λ^0-частица образуют триплет. Однако в последнем случае p и n — стандартные обозначения для физического протона и нейтрона, а N используется для нуклона, так что желательно взять другие обозначения.

Если силы связи симметричны по отношению к трем кваркам, то модель инвариантна относительно $SU(3)$-симметрии и связанные состояния образуют супермультиплеты $SU(3)$ *.

Предположив, что взаимодействие кварков имеет определенный вид, можем подсчитать энергии связанных состояний, т. е. массы физических частиц, их спины и четности.

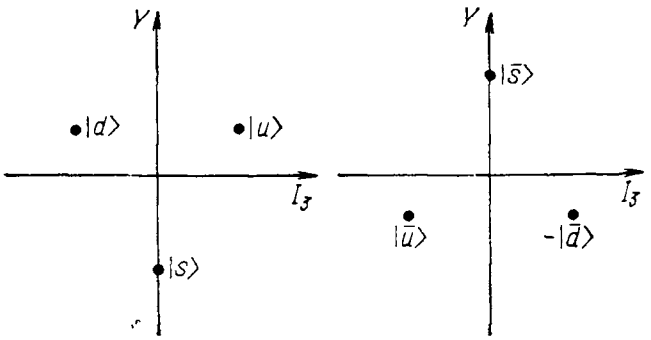


Рис. 11.1. Весовые диаграммы кварков 3 и антикварков 3*.

Фазы изодублета антикварков ($\bar{d}$, $\bar{u}$) выбраны в соответствии с приложением В

Так как кварки имеют барионное число $B=1/3$, то наблюдаемые барионы строятся из трех кварков qqq, тогда как мезоны с $B=0$ образуются из равного числа кварков и антикварков. Простейший возможный вариант—пара $q\bar{q}$ кварка и антикварка.

Таблица 11.1

Квантовые числа кварков

Характеристика кварка	B	Y	I	I_3	$Q=I_3+Y/2$	$S=Y-B$
u	1/3	1/3	1/2	1/2	2/3	0
d	1/3	1/3	1/2	—1/2	—1/3	0
s	1/3	—2/3	0	0	—1/3	—1
$\bar{s}$	—1/3	2/3	0	0	1/3	+1
$\bar{d}$	—1/3	—1/3	1/2	1/2	1/3	0
$\bar{u}$	—1/3	—1/3	1/2	—1/2	—2/3	0

Начнем с того, что покажем, как можно из кварков построить наблюдаемые супермультиплеты мезонов и барионов. При этом будет важна симметрия волновой функции относительно переста-

* Это аналогично положению с легкими ядрами, а именно если силы симметричны по отношению к протонам и нейтронам, то уровни энергии образуют мультиплеты по изоспину.

новок кварков. Поэтому сделаем дополнительное предположение о том, что кварки обладают спином 1/2 и силы, действующие между кварками, не зависят от характера кварка относительно $SU(3)$ (т. е. u, d или s) и от ориентации его спина ($\uparrow$ или $\downarrow$). Это приводит нас к группе симметрии $SU(6)$. Хотя эту симметрию можно сформулировать независимо от модели кварков, мы воспользуемся ею как своего рода «книгохранилищем» для классификации состояний. В дальнейшем будет показано, как правильно объяснить спины и четности барионных и мезонных состояний. Далее дан краткий обзор других следствий модели кварков, например электромагнитных свойств барионов. В заключение сделаны замечания по вопросу о существовании свободных кварков.

§ 11.2. КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ МЕЗОНОВ

Если предположить, что мезоны имеют простейшую структуру, а именно $q\bar{q}$, то девять возможных состояний можно наглядно представить с помощью весовой диаграммы (рис. 11.2). Ясно, что мы будем иметь октет и синглет по $SU(3)$.

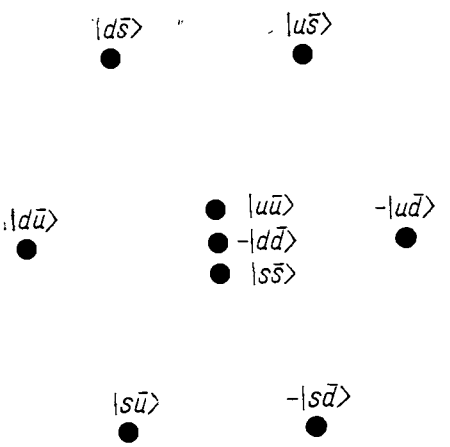


Рис. 11.2. Размещение состояний кварка — антикварка на приведенной весовой диаграмме $3\times3^*$

Если предположить, что между q и $\bar{q}$ существуют мощные силы притяжения, приводящие к связанным состояниям с подходящими моментом количества движения и четностью, то получим модель для наблюдаемых мезонов. В дальнейшем о зависимости этих сил от координат и спинов поговорим подробнее. Сейчас же рассмотрим аспекты, связанные с $SU(3)$-симметрией. Важный результат заключается в том, что структура $q\bar{q}$ допускает лишь октеты и синглеты мезонных состояний, что соответствует наблюдениям.

Для того чтобы образовать высший супермультиплет, например 27, на существование которого указывали бы наблюдения, скажем, двукратно заряженных мезонов или резонансов KK, надо рассмотреть такие структуры, как $q\bar{q}q\bar{q}$. До сих пор в этом не было необходимости.

Структура $q\bar{q}$ октета мезонов показана в табл. 11.2. Единственное нетривиальное вычисление заключается в определении правильных линейных комбинаций состояний $q\bar{q}$ с $I_3=Y=0$. Отметим, что операторы $I_\pm$ и $U_\pm$ имеют положительные матричные элементы между состояниями $+|\bar{s}\rangle$, $-|\bar{d}\rangle$ и $+|\bar{u}\rangle$ для $\bar{q}$ (см. прило-

Таблица 11.2

Кварковая структура псевдоскалярных и векторных мезонов

Псевдоскаляр	Вектор	Кварковая структура
$K+$	$K^{*}+$	$\lvert u\bar{s}\rangle$
K^0	K^{*0}	$\lvert d\bar{s}\rangle$
$\pi+$	$\rho+$	$-\lvert u\bar{d}\rangle$
π^0	ρ^0	$2^{-1/2}\,(\lvert u\bar{u}\rangle-\lvert d\bar{d}\rangle)$
π^-	ρ^-	$\lvert d\bar{u}\rangle$
η^0	φ_8	$6^{-1/2}\,(-\lvert u\bar{u}\rangle-\lvert d\bar{d}\rangle+2\lvert s\bar{s}\rangle)$
K^0	K^{*0}	$-\lvert s\bar{d}\rangle$
K^-	K^{*-}	$\lvert s\bar{u}\rangle$
$\eta^{0'}$	ω_1	$3^{-1/2}\,(\lvert u\bar{u}\rangle+\lvert d\bar{d}\rangle+\lvert s\bar{s}\rangle)$

жение В). Тогда состояние с $I=1$, $I_3=0$ получается из $-|u\bar{d}>$ состояния с $I=1$, $I_3=+1$ при помощи оператора сдвига

$$(I^{q}_{-}+I^{\bar{q}}_{-})\,(-\,|\,u\bar{d}\rangle)=-\,|\,d\bar{d}\rangle+|\,u\bar{u}\rangle$$

с учетом нормировки

$$|\,I=1,\ I_3=0\rangle=2^{-1/2}\,(\,|\,u\bar{u}\rangle-|\,d\bar{d}\rangle). \qquad (11.1)$$

Состояние в начале координат с $U=1$, $U_3=0$ получается в результате применения понижающего оператора U-спина к состоянию $|d\bar{s}>$

$$|\,U=1,\ U_3=0\rangle=2^{-1/2}\,(-\,|\,d\bar{d}\rangle+|\,s\bar{s}\rangle).$$

Тогда из уравнения (10.35), связывающего собственные состояния I- и U-спина в октете, находим

$$|\,I=0,\ I_3=0\rangle=6^{-1/2}\,(-\,|\,u\bar{u}\rangle-|\,d\bar{d}\rangle+2\,|\,s\bar{s}\rangle). \qquad (11.2)$$

В результате оставшееся в начале координат состояние, ортогональное к (11.1) и (11.2), должно быть $SU(3)$-синглетом:

$$|\,1,\ Y=I=I_3=0\rangle=3^{-1/2}\,(\,|\,u\bar{u}\rangle+|\,d\bar{d}\rangle+|\,s\bar{s}\rangle). \qquad (11.3)$$

Если взаимодействие $q\bar{q}$ полностью симметрично относительно трех видов кварков, то все девять связанных состояний должны быть вырождены по энергии. Однако можно ожидать, что взаимодействие $q\bar{q}$ зависит от характера супермультиплета $SU(3)$, т. е. от того, имеем ли мы 8 или 1. В этом случае массы связанных состояний для октета и синглета будут различаться.

Вернемся теперь к нарушению $SU(3)$-симметрии в этой модели. Простая и естественная гипотеза состоит в том, что расщепление по массе среди наблюдаемых мезонов обусловлено разницей масс между синглетным кварком s и изодублетом (u, d). Мы хотим сохранить симметрию по изоспину, поэтому

удержим массу m_u равной m_d, но в то же время положим $m_s = M + m$, где $M = m_u = m_d$.

Предположим, что волновые функции связанного состояния вычислены в пределе $m = 0$, когда симметрия выполняется, и нечувствительны к изменению массы. Вычисляя матричные элементы возмущенного гамильтониана по отношению к приведенным в табл. 11.2 состояниям, получаем выражения для масс мезонов:

$$m(K^*) = m(K) = 2M + m - E_B(8);$$

$$m(\rho) = 2M - E_B(8);$$

$$m(\varphi_8) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) 2M + \frac{4}{6}(2M + 2m) - E_B(8) =$$

$$= 2M + \frac{4}{3}m - E_B(8);$$

$$m(\omega_1) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) 2M + \frac{1}{3}(2M + 2m) - E_B(1) = 2M +$$

$$+ \frac{2}{3}m - E_B(1).$$

В принятых здесь обозначениях $2M - E_B(\mathbf{n})$ — энергия связи в супермультиплете $\mathbf{n}$ в предельном случае полной симметрии. Расщепление масс, как мы видим, дается выражением

$$m = m(K^*) - m(\rho),$$

так что, используя экспериментальные данные, получаем $m = 110$ *Мэв*. Нетрудно найти также, что

$$4m(K^*) = m(\rho) + 3m(\varphi_8). \tag{11.4}$$

Это и есть формула Гелл-Мана — Окубо. Однако теперь имеется отличный от нуля матричный элемент в массовом члене гамильтониана $q\bar{q}$ между состояниями φ_8 и ω_1:

$$\langle \varphi_8 \mid H \mid \omega_1 \rangle = 18^{-1/2}\{-2M - 2M + 2(2M + 2m)\}\mathcal{J} = -2 \cdot 2^{1/2}\mathcal{J}m/3.$$

Здесь $\mathcal{J}$ — интеграл перекрытия координатно-спиновых волновых функций системы $q\bar{q}$. Его можно получить лишь с помощью более детальной модели. Такую цель мы ставить себе не будем. Однако если величина $\mathcal{J}$ известна, то с помощью формул п. 10.5.4 можно вычислить угол перемешивания.

Если потенциал $q\bar{q}$ обладает упомянутой выше максимальной симметрией, то

$$E_B(8) = E_B(1). \tag{11.5}$$

В этом случае можно ожидать, что физическими состояниями являются не φ_8 и ω_1 из таблицы, а состояния, в которые кварки с различными массами входят по отдельности. Таким образом, приходим к формулам

$$|\varphi\rangle = |s\bar{s}\rangle; \tag{11.6а}$$

$$|\omega\rangle = 2^{-1/2}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \tag{11.6б}$$

с массами

$$m(\varphi) = 2M + 2m - E_B; \quad m(\omega) = 2M - E_B.$$

Следовательно, в этом частном случае предсказаны следующие соотношения:

$$m(\omega) = m(\rho); \tag{11.7а}$$

$$m(\omega) + m(\varphi) = 2m(K^*). \tag{11.7б}$$

Они выполняются экспериментально с погрешностью 1%, что определяет предел точности равенства (11.5). Если выразить состояния (11.6) через состояния $|\varphi_8\rangle$ и $|\omega_1\rangle$, то соответствующий угол смешивания (называемый в этом случае *идеальным углом смешивания)* выражается формулой

$$\operatorname{tg}\theta = 2^{-1/2}, \text{ или } \theta = 35{,}3°.$$

Это значение очень близко к тому, которое получается из феноменологического анализа перемешивания векторных мезонов.

В случае псевдоскалярных мезонов равенства (11.7) не выполняются, перемешивание $\eta'(958)$ и $\eta(550)$ мало, $\theta \simeq 10°$. Вероятно, в этом случае приравнивание энергий связи, как это было сделано в (11.5), не является хорошим приближением.

§ 11.3. КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ БАРИОНОВ

Низколежащие барионные состояния ($B=1$) можно построить из трех кварков qqq. Для этого надо предположить, что свойства сил qq таковы, что три кварка могут быть связаны в стабильную конфигурацию, а два или четыре кварка этим свойством не обладают. Начнем опять с рассмотрения свойств связанной системы относительно группы $SU(3)$.

11.3.1. Классификация состояний трех кварков. Рассмотрим сначала состояния двух кварков. Комбинируя тем же способом, что и в § 10.7, весовые диаграммы двух систем типа 3s, получаем результат, показанный на рис. 11.3. Здесь $|uu\rangle$ — старшее состояние супермультиплета 6, изображенного на рис. 10.10, *а*. Состояния этого супермультиплета таковы:

$$|dd\rangle \quad 2^{-1/2}\{|ud\rangle + |du\rangle\} \quad |uu\rangle$$
$$2^{-1/2}\{|ds\rangle + |sd\rangle\} \quad 2^{-1/2}\{|us\rangle + |su\rangle\}$$
$$|ss\rangle$$

Три крайних состояния берутся непосредственно из рис. 11.3. В случае весов, занятых дважды, правильные линейные комбинации получаются с помощью операторов сдвига

$$I_-|uu\rangle = |du\rangle + |ud\rangle;$$
$$U_-|dd\rangle = |sd\rangle + |ds\rangle.$$

Если веса супермультиплета **6** из рис. 11.3 удалить, останутся веса супермультиплета **3***. Так как соответствующие состояния должны быть ортогональны состояниям из **6**, они имеют вид

$$2^{-1/2}\{\,|\,ud\rangle - |\,du\rangle\}$$

$$2^{-1/2}\{\,|\,ds\rangle - |\,sd\rangle\}\quad 2^{-1/2}\{\,|\,us\rangle - |\,su\rangle\}.$$

Таким образом, выполнена редукция

$$\mathbf{3}\times\mathbf{3} = \mathbf{6} + \mathbf{3}^*.$$

Мы видим здесь другой пример правил, а именно: если скомбинировать два тождественных супермультиплета, то все состояния образованного из них неприводимого супермультиплета будут иметь один и тот же определенный тип симметрии относительно перестановки своих составляющих.

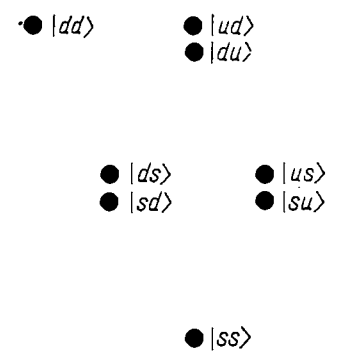


Рис. 11.3. Размещение состояний двух кварков на приведенной весовой диаграмме 3×3

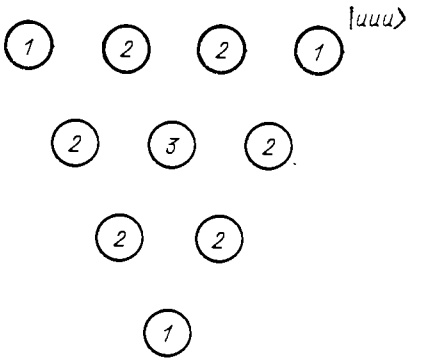


Рис. 11.4. Приведенная весовая диаграмма для 6×3

Следовательно, если обозначить общее состояние двух кварков

$$|\,q_1q_2\rangle,$$

все ненормированные состояния из **6** будут иметь вид

$$|\,q_1q_2\rangle + |\,q_2q_1\rangle, \tag{11.8}$$

а из **3***

$$|\,q_1q_2\rangle - |\,q_2q_1\rangle. \tag{11.9}$$

В наших обозначениях q_1 и q_2 — переменные, которые принимают значения u, d или s. В выражении (11.8) с помощью (q_1q_2) можно обозначить uu, dd, ss, ud, ds или su, что дает шесть состояний. В то же время значение (11.9) отлично от нуля только при $q_1 \neq q_2$, т. е. здесь допустимы три состояния.

Следующий шаг состоит в том, чтобы объединить двухкварковые состояния с третьим кварком. Комбинируя симметричные

состояния из **6** с одним кварком из **3**, получаем весовую диаграмму (рис. 11.4). Старшее состояние $|uuu>$ с $Y=1$, $I_3=+3/2$ является старшим состоянием супермультиплета 10, а если удалить веса этого супермультиплета, то останутся веса супермультиплета **8**. Следовательно,

$$\mathbf{6} \times \mathbf{3} = \mathbf{10} + \mathbf{8}. \tag{11.10}$$

Комбинируя антисимметричные состояния qq из $\mathbf{3}^*$ с третьим кварком тем же способом, получаем

$$\mathbf{3}^* \times \mathbf{3} = \mathbf{8} + \mathbf{1}. \tag{11.11}$$

Таким образом, 3^3 состояний трех кварков разбиваются на сумму SU (3)-супермультиплетов: **10**, **8** (дважды) и **1**. Эта четырехступенчатая классификация точно соответствует классификации состояний трех частиц согласно типу их симметрии относительно перестановки этих частиц.

Подведем итог без доказательства: классификация состояний трех частиц по типу их симметрии является обобщением хорошо известной классификации двухчастичных состояний на симметричные и антисимметричные.

Если говорить общими словами, мы имеем систему трех тождественных объектов, каждый из которых может находиться в любом из n состояний. Обозначим $|q_1q_2q_3>$ состояние системы, в котором первый объект находится в состоянии q_1, второй — в состоянии q_2, а третий — в состоянии q_3. Для кварков $n=3$, а каждый из q_1, q_2 и q_3 может принимать значения u, d или s.

Можно считать, что состояния системы принадлежат к одному из четырех типов симметрии.

1. Полностью симметричные, S. Эти состояния не меняются при любой перестановке характеристик частицы:

$$|(q_1q_2q_3)S\rangle = |q_1q_2q_3\rangle + |q_2q_3q_1\rangle + |q_3q_1q_2\rangle + |q_2q_1q_3\rangle + \\ + |q_3q_2q_1\rangle + |q_1q_3q_2\rangle. \tag{11.12}$$

Разумеется, это выражение упрощается, если две или более характеристики становятся равными.

2. Полностью антисимметричные, A. При четной (нечетной) перестановке эти состояния не меняются (умножаются на -1):

$$|(q_1q_2q_3)A\rangle = |q_1q_2q_3\rangle - |q_2q_1q_3\rangle + |q_2q_3q_1\rangle - |q_3q_2q_1\rangle + \\ + |q_3q_1q_2\rangle - |q_1q_3q_2\rangle. \tag{11.13}$$

Все три характеристики должны быть различны.

3 и 4. Состояния, обладающие смешанной симметрией. Здесь мы имеем два состояния для каждого типа выбранных характеристик кварков. Действие произвольной перестановки состоит в преобразовании каждого из этих двух состояний в их определенную линейную комбинацию. Эти два состояния можно выбрать различными способами, но удобнее всего так:

$$|\,(q_1q_2q_3)\,M_1\rangle = 2\,|\,q_1q_2q_3\rangle + 2\,|\,q_2q_1q_3\rangle - |\,q_2q_3q_1\rangle - |\,q_3q_2q_1\rangle - |\,q_3q_1q_2\rangle - |\,q_1q_3q_2\rangle; \tag{11.14}$$

$$|\,(q_1q_2q_3)\,M_2\rangle = 2\,|\,q_1q_2q_3\rangle - 2\,|\,q_2q_1q_3\rangle - |\,q_2q_3q_1\rangle + |\,q_3q_2q_1\rangle - |\,q_3q_1q_2\rangle + |\,q_1q_3q_2\rangle. \tag{11.15}$$

С помощью соотношений ортогональности

$$\langle q_1' q_2' q_3' \,|\, q_1q_2q_3\rangle = \delta_{q_1' q_1}\,\delta_{q_2' q_2}\,\delta_{q_3' q_3}$$

можно показать, что эти четыре состояния взаимно ортогональны, и доказать, что

$$|\,q_1q_2q_3\rangle = \frac{1}{6}\{\,|\,S\rangle + |\,A\rangle + |\,M_1\rangle + |\,M_2\rangle\}.$$

Следовательно, любое состояние трех кварков можно выразить в терминах четырех стандартных состояний.

Подсчитаем число различных состояний трех кварков для каждого типа симметрии.

Симметричные: три состояния с совершенно одинаковыми характеристиками, шесть — с двумя одинаковыми и одной отличной и одно — с тремя разными; всего 10 состояний.

Антисимметричные: все характеристики должны быть разными, т. е. разрешено одно состояние.

Смешанные, M. Состояние M_1 исчезает, если все характеристики одинаковы. Оно симметрично по q_1 и q_2, так что для трех разных характеристик следует ожидать наличия трех состояний $|M_1\rangle$, соответствующих $(q_1q_2,\ q_3) = (ud,\ s)$, $(su,\ d)$ или $(ds,\ u)$. Однако они не являются линейно независимыми, так как их сумма представляет собой всегда симметричное состояние, пропорциональное $|S\rangle$. Мы знаем, что $|M_1\rangle$ ортогонально $|S\rangle$. Следовательно, существует только два состояния с тремя разными кварками. Аналогично для двух одинаковых и одной отличной характеристик состояния, полученные подстановкой $(q_1q_2,\ q_3) = (uu,\ d)$ и $(ud,\ u)$, пропорциональны, т. е. разрешены только шесть состояний этого типа. Делаем вывод: существует восемь состояний типа M_1. Аналогично находим, что существует восемь состояний симметрии типа M_2.

Теперь мы выявили связь, существующую между типами симметрии и $SU(3)$-супермультиплетами для состояний трех кварков. В разложении Клебша — Гордана

$$3 \times 3 \times 3 = (6 + 3^*) \times 3 = 10 + 8 + 8' + 1 \tag{11.16}$$

состояния супермультиплета 10 полностью симметричны, супермультиплета 1 полностью антисимметричны, в то время как состояния 8 и 8′ обладают смешанной симметрией.

Состояния трех кварков нормированы и вместе с общими фазовыми множителями, согласованными с нашими предыдущими условиями, представлены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Кварковая структура барионных состояний $|\,\mathbf{n},\ Y,\ I,\ I_3\rangle$

$$|\,\mathbf{10},\ +1,\ 3/2,\ +3/2\rangle = |\,uuu\rangle$$

$$|\,\mathbf{10},\ +1,\ 3/2,\ +1/2\rangle = 3^{-1/2}\{|\,udu\rangle + |\,duu\rangle + |\,uud\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ +1,\ 3/2,\ -1/2\rangle = 3^{-1/2}\{|\,ddu\rangle + |\,udd\rangle + |\,dud\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ +1,\ 3/2,\ -3/2\rangle = |\,ddd\rangle$$

$$|\,\mathbf{10},\ 0,\ 1,\ +1\rangle = 3^{-1/2}\{|\,usu\rangle + |\,suu\rangle + |\,uus\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ 0,\ 1,\ 0\rangle = 6^{-1/2}\{|\,uds\rangle + |\,dsu\rangle + |\,sud\rangle + |\,dus\rangle + |\,sdu\rangle + |\,usd\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ 0,\ 1,\ -1\rangle = 3^{-1/2}\{|\,dsd\rangle + |\,sdd\rangle + |\,dds\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ -1,\ 1/2,\ +1/2\rangle = 3^{-1/2}\{|\,ssu\rangle + |\,uss\rangle + |\,sus\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ -1,\ 1/2,\ -1/2\rangle = 3^{-1/2}\{|\,ssd\rangle + |\,dss\rangle + |\,sds\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{10},\ -2,\ 0,\ 0\rangle = |\,sss\rangle$$

$$|\,\mathbf{8},\ +1,\ 1/2,\ +1/2\rangle = 6^{-1/2}\{2\,|\,uud\rangle - |\,udu\rangle - |\,duu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ +1,\ 1/2,\ -1/2\rangle = 6^{-1/2}\{|\,dud\rangle + |\,udd\rangle - 2\,|\,ddu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ 0,\ 1,\ +1\rangle = 6^{-1/2}\{2\,|\,uus\rangle - |\,usu\rangle - |\,suu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ 0,\ 1,\ 0\rangle = 12^{-1/2}\{2\,|\,uds\rangle - |\,dsu\rangle - |\,sud\rangle + 2\,|\,dus\rangle - |\,sdu\rangle - |\,usd\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ 0,\ 1,\ -1\rangle = 6^{-1/2}\{2\,|\,dds\rangle - |\,dsd\rangle - |\,sdd\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ 0,\ 0,\ 0\rangle = \frac{1}{2}\{|\,usd\rangle + |\,sud\rangle - |\,sdu\rangle - |\,dsu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ -1,\ 1/2,\ +1,2\rangle = 6^{-1/2}\{|\,sus\rangle + |\,uss\rangle - 2\,|\,ssu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8},\ -1,\ 1/2,\ -1/2\rangle = 6^{-1/2}\{|\,sds\rangle + |\,dss\rangle - 2\,|\,ssd\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ +1,\ 1/2,\ +1/2\rangle = 2^{-1/2}\{|\,udu\rangle - |\,duu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ +1,\ 1/2,\ -1/2\rangle = 2^{-1/2}\{|\,udd\rangle - |\,dud\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ 0,\ 1,\ +1\rangle = 2^{-1/2}\{|\,usu\rangle - |\,suu\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ 0,\ 1,\ 0\rangle = \frac{1}{2}\{|\,usd\rangle + |\,dsu\rangle - |\,sdu\rangle - |\,sud\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ 0,\ 1,\ -1\rangle = 2^{-1/2}\{|\,dsd\rangle - |\,sdd\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ 0,\ 0,\ 0\rangle = 12^{-1/2}\{2\,|\,uds\rangle - |\,dsu\rangle - |\,sud\rangle - 2\,|\,dus\rangle + |\,sdu\rangle + |\,usd\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ -1,\ 1/2,\ +1/2\rangle = 2^{-1/2}\{|\,uss\rangle - |\,sus\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{8}',\ -1,\ 1/2,\ -1/2\rangle = 2^{-1/2}\{|\,dss\rangle - |\,sds\rangle\}$$

$$|\,\mathbf{1},\ 0,\ 0,\ 0\rangle = 6^{-1/2}\{|\,uds\rangle + |\,dsu\rangle + |\,sud\rangle - |\,dus\rangle - |\,sdu\rangle - |\,usd\rangle\}$$

Замечания по поводу определения состояний M_1 и M_2 со смешанной симметрией.

Последовательность получения состояния M_1 из $|q_1q_2q_3>$ следующая:

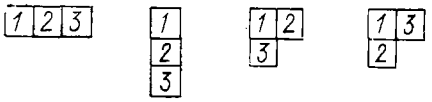
а) симметризация по положениям 1 и 2;

б) антисимметризация по положениям 1 и 3;

в) симметризация по положениям 1 и 2.

Состояние M_2 получается аналогичным образом, но с антисимметризацией в п. а) и в) и с симметризацией в п. б).

Подходящим инструментом для анализа симметрии состояний n частиц является теория группы перестановок n объектов и ее представлений, разработанная, например, в работе [98]. Состояния S, A, M_1 и M_2 соответствуют схемам Юнга:



Приведенные выше рекомендации соответствуют модификации симметризаторов Юнга, предложенной Траллом [171].

11.3.2. Физика состояний трех кварков. Выше было показано, что три кварка могут образовывать только супермультиплеты **10**, **8** и **1**. Полностью симметричный декуплет **10** отождествляется с $SU(3)$ декуплетом возбужденных барионов со спином 3/2, а именно Δ^{++},Δ^{+}, Δ^{0}, Δ^{-}, Σ^{*+}, Σ^{*0}, Σ^{*-}, Ξ^{*0}, Ξ^{*-}, Ω^{-}, что и показано в табл. 11.3.

Октет обычных барионов со спином 1/2 (p, n, Σ^{+}, Σ^{0}, Σ^{-}, Λ^{0}, Ξ^{0} и Ξ^{-}) перераспределяется в октет, обладающий смешанной симметрией. Каждое состояние этого октета будет, вообще говоря, соответствовать суперпозиции определенных состояний октетов M_1 и M_2 со смешанной симметрией. Однако определить эту комбинацию без детального рассмотрения пространственно-спиновой части волновой функции невозможно. Корреляция между $SU(3)$-мультиплетом и обычным спином обсуждается в параграфах, посвященных $SU(6)$.

До сих пор не удалось наблюдать ни одной частицы, соответствующей унитарному синглетному состоянию трех кварков.

Таким образом, предполагая, что qq-силы приводят к связыванию вполне определенного типа, приходим к выводу, что кварковая модель может объяснить, почему наблюдаются только декуплеты и октеты состояний с $B=1$.

Важной эмпирической закономерностью барионного спектра является то, что до сих пор твердо не установлено существование ни одного резонанса с $Y=+2$. Для таких состояний нужны были бы супермультиплеты **27** или **10*** группы $SU(3)$, а в кварковой модели их можно получить только из $(qqq)\,(q\bar{q})$ или в более общем случае из трех кварков, объединенных с несколькими парами $q\bar{q}$.

Состояния, которые нельзя представить в виде связанных состояний qqq (если это барионы) или $q\bar{q}$ (если это мезоны), называются *экзотическими*. Отсутствие экзотических состояний в природе является хорошей поддержкой гипотезы о простой модели кварков.

Для барионов нарушение симметрии можно ввести точно таким же путем, как и для мезонов. Состояния декуплета с $Y=+1$, 0, -1 и -2 имеют 0, 1, 2 и 3 кварка s-типа соответственно, откуда непосредственно следует правило эквидистантности:

$$\Sigma-\Delta=\Xi-\Sigma=\Omega-\Xi=m.$$

Зная наблюдаемые массы, определяем разность масс кварков $m=145$ *Мэв*, что гораздо выше оценочного значения 110 *Мэв*, полученного с помощью данных для векторных мезонов.

Если то же самое доказательство применить к октету, также можно предсказать правило эквидистантности:

$$\Sigma-N=\Xi-\Sigma;\ \Lambda=\Sigma.$$

Первое из этих равенств плохо согласуется с наблюдениями: $\Sigma-N=254$ *Мэв*, $\Xi-\Sigma=125$ *Мэв*. Это расхождение следует приписать отклонениям от $SU(3)$-симметрии при взаимодействии qq [67].

§ 11.4. ВВЕДЕНИЕ СПИНА В КВАРКОВУЮ МОДЕЛЬ: $SU(6)$

Успехи схемы $SU(3)$ в кварковой модели приводят к мысли о более реалистическом рассмотрении кварков. Для объяснения наличия полуцелого спина у барионов необходимо приписать полуцелый спин и кваркам.

Предположим, что каждый из трех кварков несет внутренний спин, равный $\hbar/2$. Так как пока ни одна частица, обладающая свойствами таких кварков, не нашла убедительного экспериментального подтверждения, следует предполагать массу кварка большой ($\geqslant 10$ *Гэв*). Это необходимо для того, чтобы сечение рождения пары $q\bar{q}$ стало ниже тех пределов, которые накладываются исследованиями, выполненными на ускорителях.

Можно было бы начать с предположения о законе сил, действующих между кварками и кварком и антикварком, а затем перейти к расчету свойств связанных состояний барионов (qqq) и мезонов $(q\bar{q})$. Выполняя эту программу, мы неизбежно столкнемся с трудностями расчетов релятивистских связанных состояний, особенно для *трех частиц*. Даже связанное состояние $q\bar{q}$, по-видимому, является крайне релятивистским, поскольку полная масса кварка, равная, скажем, 20 *Гэв*, почти полностью аннулируется энергией связи, в результате чего получаются мезоны с массой около 1 *Гэв*.

Однако Морпурго [140] показал, что можно использовать и нерелятивистские концепции. Если предположить, что радиус сильного взаимодействия, существующего между кварком и антикварком, типичен и для других адронов, то $R \sim \hbar/m_v c$, где m_v — масса векторного мезона *.

Для кварков в яме шириной R типичный импульс $\hbar/R \sim m_v c$, так что скорости кварков равны

$$v \sim m_v c/M_q \quad \text{или} \quad v/c \sim m_v/M_q \sim 1/10,$$

т. е. можно использовать нерелятивистские расчеты.

Для расчета энергий, спинов и четностей, т. е. пространственных свойств связанных состояний, необходимо более подробно исследовать qq- и $q\bar{q}$-силы. Возможный способ избежать детальных расчетов для конкретных законов действующих сил заключается в постулировании дополнительной инвариантности для взаимодействия qq, а для получения следствий — в использовании аргументов симметрии. Так как нас интересуют пространственно-временные свойства и их связь со свойствами $SU(3)$, то мы, естественно, будем искать инвариантность, которая объединит их.

В работах [96, 145, 156] предполагалось, что может получиться полезное приближение, если предположить, что qq-взаимодействие приближенно не зависит от спина, так же как и от $SU(3)$. Математическая трактовка этого предположения заключается в том, чтобы считать шесть состояний кварка (u, d или s со спином, направленным вверх $\uparrow$ или вниз $\downarrow$) эквивалентными, что приводит нас к группе инвариантности $SU(6)$. Эта группа представляет собой множество всех унитарных преобразований шести основных состояний кварка (или антикварка) со спином 1/2:

$$u\uparrow,\ u\downarrow,\ d\uparrow,\ d\downarrow,\ s\uparrow,\ s\downarrow, \tag{11.17}$$

подчиняющихся единственному условию: детерминант преобразования должен быть равен $+1$.

Для того чтобы имело смысл говорить об $SU(6)$-преобразованиях, действующих инвариантно на спин, но не действующих на орбитальный момент количества движения, необходимо предположить, что сохранение спина и орбитального момента количества движения по отдельности является хорошим приближением. Это, в свою очередь, требует того, чтобы спин-орбитальное взаимодействие между кварками было малым. Но хорошо известно, что спин-орбитальное взаимодействие представляет собой релятивистский эффект, так что предположение об $SU(6)$-инвариантности является нерелятивистским приближением.

---

* Нейтральный векторный мезон ($J=1$) или «глюон», связанный с барионным числом B адрона, вызывает силы притяжения между кварком ($B=+1$) и антикварком ($B=-1$) в прямой аналогии с силами притяжения между частицами с противоположными электрическими зарядами, обусловленные обменом фотонов.

Существует много способов релятивистских обобщений $SU(6)$. Обзор их дан, например, в работе [146]. Не будем обсуждать здесь все эти попытки, а ограничимся замечаниями, что результирующие группы $U(6,6)$, $SL(6, C)$ и т. д. нельзя, подобно группам $SU(3)$ или $SU(6)$, интерпретировать просто как группы инвариантности гамильтониана.

11.4.1. Преобразования $SU(6)$. Обозначим ориентированное состояние кварка $|Q>$, где Q может принимать одно из шести значений: $u\uparrow$, $u\downarrow$, $d\uparrow$, $d\downarrow$, $s\uparrow$ или $s\downarrow$. Символ $|\bar{Q}>$ представляет собой состояние антикварка $\bar{s}\uparrow$, $\bar{s}\downarrow$, $\bar{d}\uparrow$, $\bar{d}\downarrow$, $\bar{u}\uparrow$ или $\bar{u}\downarrow$.

Общее преобразование $SU(6)$ есть линейное унитарное преобразование шести состояний $|Q>$ с единичным детерминантом. Генераторы группы, определенные инфинитезимальными преобразователями, имеют, как обычно, более прямой физический смысл. По аналогии с $SU(3)$ можно видеть без подробного вывода, что существует 2×15 операторов сдвига, преобразующих одно в другое любое из шести состояний. Это показано на рис. 11.5. Жирная линия соответствует оператору, преобразую-

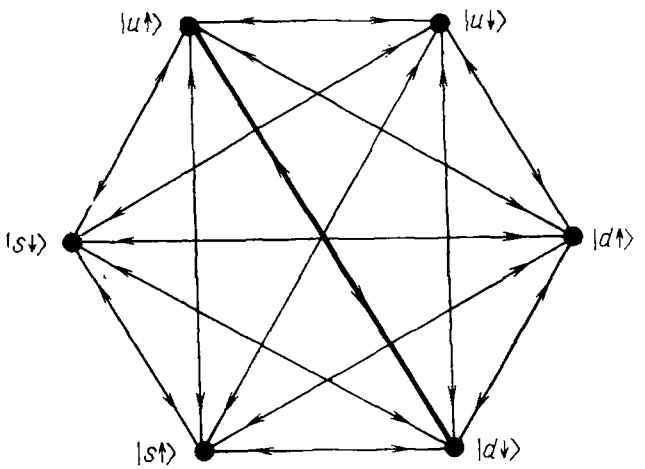


Рис. 11.5. Действие 30 операторов сдвига $SU(6)$-группы на состояния ориентированных кварков

щему $|u\uparrow>$ в $|d\downarrow>$, обратная линия соответствует эрмитово-сопряженному оператору. Кроме того, имеется пять диагональных операторов, собственные значения которых можно выбрать следующим образом: это z-компонента спина кварка каждого типа, s_z^u, s_z^d и s_z^s и полные Y и I_3.

Путем линейных комбинаций этих операторов можно образовать три оператора, действующих на спиновые переменные, но индифферентные относительно вида кварка, и аналогично восемь

операторов, действующих на степень свободы кварка, но не имеющих отношения к ориентации спина. Это показывает, каким образом $SU(2)$- и $SU(3)$-преобразования содержатся в группе $SU(6)$. Подробности нас не интересуют.

Техника весовых диаграмм, которая так пригодилась нам в случае $SU(3)$, здесь менее полезна. Это соответствовало бы классификации состояний с помощью пяти диагональных операторов, на которые мы уже ссылались. Однако физические состояния частиц — не только собственные состояния полных Y и I_3 и S_z для составляющих их кварков, но также собственные состояния полного изоспина I и полного спина S. Теперь уже I и S не коммутируют с S_z^u, S_z^d и S_z^s, так что, за исключением специальных случаев, физические состояния не соответствуют отдельным точкам весовой диаграммы, являющейся в этом случае пятимерной, которую поэтому довольно трудно представить визуально. Вместо этого можно получить физические состояния из более интуитивных соображений.

11.4.2. Состояния мезонов в $SU(6)$. С учетом спина существует 36 состояний кварка — антикварка $|Q\bar{Q}>$. С помощью анализа, аналогичного использованному в § 11.1 для состояний $|q\bar{q}>$, можно показать, что 36 состояний делятся на 35 и 1. Последнее состояние нельзя связать с другими 36 состояниями с помощью сдвиговых операторов $SU(6)$. Следовательно, 35 и 1 суть супермультиплеты $SU(6)$, так что $6\times6=35+1$. Супермультиплеты $SU(6)$ обозначаются цифрами в соответствии с их размерностью.

Очень важно знать содержание супермультиплетов $SU(3)$ и спиновое содержание в супермультиплете $SU(6)$. Так как чистые $SU(3)$-преобразования коммутируют в пределах $SU(6)$ с чистыми $SU(2)$ (спиновыми) преобразованиями, то супермультиплет $SU(6)$ можно разложить на супермультиплеты $SU(3)$ с определенным полным спином (супермультиплеты $SU(2)$).

Для состояний 6×6 это можно произвести следующим образом. Известно, что для $SU(3)$-супермультиплетов $3\times3=8+1$, тогда как кварк и антикварк со спином 1/2 могут дать только спин, равный нулю или единице. Удобнее работать со спиновой кратностью $2S+1$, а не с S. Таким образом, обозначив $(2S+1, n)$ некий $SU(3)$-супермультиплет n со спином S, получаем следующие возможности:

$$(3, 8),\ (1, 8),\ (3, 1),\ (1, 1), \tag{11.18}$$

которые можно рассматривать как «триплет восемь» и т. д. Ясно, что первые три мультиплета образуют 35, а последний супермультиплет $SU(6)$ — 1.

Теперь можем рассмотреть физическую сторону дела. Если инвариантность $SU(6)$ приближенно выполняется в природе, то состояния супермультиплета 35 должны быть приближенно вырожденными по энергии, тогда как 1 может обладать другой энергией. Следовательно, в соответствии с (11.18) надо ожидать

октета и синглета мезонов (3, 8) и (3, 1) со спином 1 и октета мезонов (1, 8) со спином нуль. Возвращаясь к координатной части волновой функции $Q\bar{Q}$, можем считать, что низшим связанным состоянием будет s-состояние ($l=0$). Так как пара фермион — антифермион обладает отрицательной относительной четностью, то мы ожидаем, что связанные состояния $Q\bar{Q}$ будут иметь отрицательную четность.

Итак, кварковая модель в сочетании с $SU(6)$-инвариантностью предсказывает октет и синглет 1^--мезонов и октет 0^--мезонов. Эти предсказания неплохо согласуются с наблюдаемыми низколежащими состояниями мезонного спектра.

Интересно, что супермультиплет 35 разрешает девять векторных мезонов, но только восемь 0^--мезонов. Девятый 0^--мезон должен соответствовать 1. Это может объяснить результаты феноменологического анализа перемешивания, из которого следует, что 0^--мезоны содержат гораздо меньшую примесь состояний октета и синглета, чем 1^--мезоны.

Мезоны со спином, большим единицы, можно трактовать как состояния $q\bar{q}$-системы с ненулевым орбитальным моментом количества движения L, но даже и в этом случае могут быть образованы только $SU(3)$-октеты и синглеты.

Рассмотрим супермультиплет 35 типа $q\bar{q}$ с $L=1$. Векторное сложение полного спина $S=0$ или $S=1$ с $L=1$ приводит к следующей структуре мультиплета. Введем обозначение $(2S+1, \mathbf{n})^P_J$, где J — полный момент количества движения состояния, т. е. наблюдаемый спин резонанса, а P — его четность:

$$[35,\ L=1]\colon\ (3,\ 8)^+_2\quad (3,\ 8)^+_1\quad (3,\ 8)^+_0$$
$$(3,\ 1)^+_2\quad (3,\ 1)^+_1\quad (3,\ 1)^+_0$$
$$(1,\ 8)^+_1$$

Все эти состояния имеют положительную четность. В общем случае состояния мезона, образованные из $q\bar{q}$ с орбитальным моментом количества движения L, имеют четность $(-1)^{L+1}$.

Единственным другим твердо установленным мезонным супермультиплетом является нонет $J^P=2^+$. Он может быть включен в супермультиплет [35, $L=1$], в котором остается заполнить лишь несколько состояний с положительной четностью и спинами, равными нулю и единице. Для некоторых из этих состояний имеются экспериментально наблюдаемые кандидаты. В отдельных случаях, например для $A_1(1100)$, не ясно, наблюдается ли резонанс или несколько резонансов или кинематический пик. Это следует иметь в виду при ссылке на размещение резонансов согласно табл. 11.4. C-четность $(-1)^{L+S}$ нейтральных состояний противоположна для состояний триплета и синглета по спину.

Если бы $SU(6)$-симметрия была точной, все состояния 35 были бы вырождены по массе. Отсутствие вырождения приписывается отклонениям от точной симметрии $q\bar{q}$-сил. Таким образом, можно различить следующие виды $q\bar{q}$-взаимодействия:

Таблица 11.4

Мезонные резонансы в $L=1$ мультиплете 35

$(2s+1, n)_{JPC}$	$I=\frac{1}{2}$, $Y=\pm 1$	$I=1$, $Y=0$	$I=0$, $Y=0$	$I=0$, $Y=0$
$(3, 8)_{2++}$ $(3, 1)_{2++}$	K (1420)	A_2 (1310)	f (1270)	f' (1514)
$(3, 8)_{1++}$ $(3, 1)_{1++}$	?Q	A_1 (1100)	D (1285)	E (1420)
$(3, 8)_{0++}$ $(3, 1)_{0++}$	?K	?δ (960)	S^*	
$(1, 8)_{1+-}$ $(1, 1)_{1+-}$		B (1235)		

а) взаимодействия, для которых эквивалентны все шесть типов кварков. Фактически это приводит к симметрии более высокого порядка, чем $SU(6)$, а именно, все 36 состояний $q\bar{q}$ будут вырожденными;

б) общее $SU(6)$-инвариантное взаимодействие, разделяющее 35 и 1;

в) центральные силы, обладающие $SU(3)$-инвариантностью и разделяющие разные $SU(3)$-супермультиплеты;

г) спин-спиновое взаимодействие, расщепляющее мультиплеты с разными S;

д) нецентральные силы, обладающие $SU(3)$-инвариантностью, например спин-орбитальная сила, разделяющая состояния с одинаковыми S и L, но разными J;

е) взаимодействие, нарушающее симметрию $SU(3)$, $H_{\text{ум. сильн.}}$

Для получения спектра уровней, наблюдаемых в состояниях с $L=1$, нужны силы всех этих типов. Разные эффекты трудно различить из-за их большого количества и неопределенности в размещении частиц с $L=1$.

В специальной литературе читатель может проследить за тем прогрессом, который достигнут в этой области.

11.4.3. Барионные состояния в $SU(6)$. С учетом спина существует $6\times6\times6=216$ трехкварковых состояний $|Q_1Q_2Q_3\rangle$. Для их классификации по $SU(6)$-супермультиплетам начнем с двух кварков и воспользуемся техникой симметризации. 36 двухкварковых состояний можно выбрать таким образом, чтобы они были или симметричными, или антисимметричными относительно их характеристик. Таким образом, образуем

$$|Q_1Q_2\rangle + |Q_2Q_1\rangle;$$
$$|Q_1Q_2\rangle - |Q_2Q_1\rangle,$$

где Q_1 и Q_2 пробегают шесть возможных значений. В первую группу входит $6+(\frac{1}{2}\times6\times5)=21$ состояние, во вторую $\frac{1}{2}(6\times\times5)=15$ состояний. Следовательно, они соответствуют $SU(6)$-супермультиплетам 21 и 15.

Присоединяя к двухкварковому супермультиплету 21 третий кварк, можно образовать набор полностью симметричных состояний $|(Q_1Q_2Q_3)S>$ в обозначениях п. 11.3.1. Считая все характеристики одинаковыми; две одинаковыми, а одну нет; все три разными, получаем

$$6 + (6 \times 5) + (6 \times 5 \times 4/2 \times 3) = 56.$$

Остальные $(6\times21) - 56 = 70$ состояний соответствуют векторам состояний, обладающих смешанной симметрией.

Аналогично, присоединяя третий кварк к антисимметричному супермультиплету 15, можем, очевидно, образовать набор полностью антисимметричных состояний $|(Q_1Q_2Q_3)A>$, число которых равно $(6\times5\times4/2\times3) = 20$. Остальные $(6\times15) - 20 = 70$ состояний опять будут соответствовать состояниям со смешанной симметрией. Таким образом,

$$6 \times 6 \times 6 = 56 + 70 + 70' + 20. \qquad (11.19)$$

И снова мы имеем четырехступенчатое разложение состояния трех объектов соответственно их симметрии относительно перестановок.

Далее требуется найти спиновое и $SU(3)$ содержание $SU(6)$-супермультиплетов. Согласно § 11.2, можно ожидать, что три кварка образуют $SU(3)$-супермультиплеты **10**, **8** или **1**, тогда как сложение трех спинов, равных 1/2, дает значения полного спина 3/2 или 1/2. В терминах спиновых мультиплетов имеем

$$2\times2\times2 = 4+2+2.$$

Квартет ($S=3/2$) соответствует полностью симметричному сложению трех спинов, равных 1/2, тогда как два дублета соответствуют двум состояниям со смешанной симметрией. В силу того, что существует только два возможных значения S_z, не может быть никакой полностью антисимметричной комбинации трех спинов, равных 1/2.

Чтобы определить, каким образом $SU(3)$- и $SU(2)$-мультиплеты группируются в $SU(6)$-супермультиплеты, введем правила перемножения типов симметрии для трех объектов. Эти правила являются обобщением простого правила перемножения волновых функций двух частиц. Например, произведение симметричного состояния относительно группы $SU(3)$ на антисимметричное спиновое состояние антисимметрично относительно обмена характеристик и $SU(3)$, и спина.

Правила для трех частиц приведены в табл. 11.5. Для трехкварковых состояний следует проигнорировать третью строку таблицы, так как, как уже упоминалось выше, полностью антисимметричных спиновых состояний нет.

Из таблицы видно, что полностью антисимметричное состояние $SU(6)$ можно получить двумя способами: умножением спинового состояния S (спин 3/2) на $SU(3)$-состояние A (т. е. состояние **1**) или умножением спинового состояния M (спин

Таблица 11.5

Полная симметрия трехчастичного состояния, являющегося произведением спинового и $SU(3)$-состояний, каждое из которых обладает заданной симметрией

		Симметрия $SU(3)$-части		
		S	M	A
Симметрия спиновой части	S	S	M	A
	M	M	S, M и A	M
	A	A	M	S

1/2) на $SU(3)$-состояние M (т. е. состояние 8). Обозначим эти две возможности через (4, **1**) и (2, **8**) соответственно. Тогда полностью антисимметричный $SU(6)$-супермультиплет 20 будет иметь следующую структуру по спину и мультиплетам $SU(3)$:

$$20 = (4,\ 1) + (2,\ 8). \tag{11.20}$$

Аналогично, отмечая, в каких местах табл. 11.5 имеется M, определяем разложение $SU(6)$-состояния, обладающего смешанной симметрией. Находим

$$70 = (2,\ 10) + (4,\ 8) + (2,\ 8) + (2,\ 1). \tag{11.21}$$

Наконец, полностью симметричный супермультиплет 56 можно получить в виде $S \times S$ или $M \times M$, так что

$$56 = (4,\ 10) + (2,\ 8). \tag{11.22}$$

Судя по этим результатам, в $SU(6)$-супермультиплете 56 могут содержаться октет барионов со спином 1/2 и декуплет барионов со спином 3/2, являющихся как раз комбинациями по $SU(3)$ и спину низколежащих состояний барионов. Естественно объединить наиболее низколежащие барионы в $SU(6)$-супермультиплет 56. Однако если серьезно отнестись к модели кварков, то при этом возникнет проблема. Так как часть этих состояний, связанная с $SU(3)$-спином, полностью симметрична, то для того чтобы общий вектор состояния был полностью антисимметричным, как того требуют кварки со спином 1/2, эту часть надо умножить на полностью антисимметричную *координатную* волновую функцию.

До тех пор, пока qq-взаимодействие не является очень специфичным, трудно понять, каким образом полностью антисимметричная координатная волновая функция может соответствовать состоянию с наименьшей энергией. Она должна иметь поверхности узлов, где какие-либо две координаты становятся равными и кривизна волновой функции между такими поверхностями соответствует кинетической энергии. Более вероятно состояние с наименьшей энергией, обладающее полностью симмет-

ричной волновой функцией, которая меняется более гладко, понижая таким образом свою энергию. Статистика Ферми тогда требовала бы, чтобы $SU(6)$-часть волновой функции была полностью антисимметричной, как, например, в случае 20. Сюда не может входить супермультиплет **10**, который входит в 56. Следовательно, свою роль в объяснении приблизительного вырождения $(1/2)^+$-октета и $(3/2)^+$-декуплета $SU(6)$ сыграть не смогла. Мы должны будем вернуться опять к проблеме симметрии при обсуждении возбужденных состояний барионов.

11.4.4. Барионные волновые функции в $SU(6)$. Вычисление явных волновых функций барионных состояний супермультиплета 56 облегчается, если потребовать полную симметрию относительно взаимного обмена характеристик кварков. Начнем с того, что запишем состояния трех ориентированных кварков с правильными значениями полных Y, I_3 и S_z. Затем необходимо определить комбинации с нужными полными I и S. И, наконец, следует потребовать выполнения полной симметрии.

Приведем несколько примеров. Как обычно, имея дело с симметризацией, лучше оставить общую нормировку до конца расчета. Сразу получаем:

$$\left|\Delta^{++},\ S_z=+\frac{3}{2}\right\rangle=\left|u\uparrow u\uparrow u\uparrow\right\rangle.$$

Для Δ^+, $S_z=+3/2$ мы возьмем два кварка u и один d кварк со спинами, направленными вверх, например $|u\uparrow u\uparrow d\uparrow\rangle$. Симметризация дает

$$\left|\Delta^{+},\ S_z=+\frac{3}{2}\right\rangle\approx\left|u\uparrow u\uparrow d\uparrow\right\rangle+|u\uparrow d\uparrow u\uparrow\rangle+$$
$$+|d\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle. \qquad (11.23)$$

Знак $\approx$ означает, что правая часть не нормирована.

Все состояния **10** с $S_z=+3/2$ можно определить просто из табл. 11.3, введя ориентацию спина $\uparrow\uparrow\uparrow$.

Применение к равенству (11.23) понижающего оператора спина дает

$$\left|\Delta^{+},\ S_z=+\frac{1}{2}\right\rangle\approx\left|u\downarrow u\uparrow d\uparrow\right\rangle+|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle+|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle+$$
$$+|u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle+|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle+|u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle+|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle+$$
$$+|d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle+|d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle. \qquad (11.24)$$

Чтобы получить состояние протона с $S_z=+1/2$, необходимы кварки uud с ориентацией спина $\uparrow\uparrow\downarrow$, т.е. $u\uparrow u\uparrow d\downarrow$ и $u\uparrow u\downarrow d\uparrow$ и их перестановки.

Потребуем выполнения условия: $I=S=1/2$. Это можно сделать следующим образом. Двухкварковое состояние

$$|u\uparrow d\downarrow\rangle+|d\downarrow u\uparrow\rangle-|u\downarrow d\uparrow\rangle-|d\uparrow u\downarrow\rangle$$

имеет $I=0$ и $S=0$. Его можно записать в виде

$$(ud-du)\times(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow).$$

Теперь введем третий кварк, который должен быть $u\uparrow$. Результирующее состояние

$$|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle+|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle-|u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle-|d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle$$

не полностью симметрично, но симметрично относительно обмена первых двух аргументов. Поэтому добавим состояния, полученные при обмене первого и третьего и второго и третьего аргументов. В результате получаем:

$$\left|p,\ S_z=+\frac{1}{2}\right\rangle\approx 2|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle+2|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle+$$
$$+2|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle-|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle-|u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle-|u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle-$$
$$-|d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle-|d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle-|u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle. \qquad (11.25)$$

Нормировочный множитель равен $18^{-1/2}$. Применение изоспинового понижающего оператора дает состояние нейтрона. Продолжая использовать операторы $I_\pm$ и $U_\pm$* и привлекая в случае Λ^0 соотношения ортогональности, получаем возможность скомплектовать октет барионов с $S=1/2$. Волновые функции состояний октета барионов с $S_z=+1/2$ перечислены в табл. 11.6.

11.4.5. Возбужденные состояния барионов. Для возбужденных состояний барионов с довольно большим успехом может быть использована симметричная осцилляторная модель Гринберга [94]. Для более подробного ознакомления читатель может обратиться к работам [65, 66], в которых даны доказательства некоторых утверждений, сделанных в этом разделе.

Предположим, что взаимодействие пар кварков осуществляется через нерелятивистский потенциал гармонического осциллятора. Систему из трех таких кварков можно проанализировать с помощью эквивалентной модели оболочек, согласно которой три невзаимодействующих кварка движутся в общей яме гармонического осциллятора. Состояния такой модели оболочек легко перечислить, за исключением лишних состояний, которые в исходной физической модели соответствуют движению центра масс.

В этой модели также предполагается, что общая волновая функция кварка

$$\psi_{\text{простр}}\,\psi_{SU(6)}$$

может быть полностью симметричной, и, кроме того, что полностью симметричные состояния имеют наименьшую энергию. В конце раздела мы еще остановимся на этом.

Порядок энергетических уровней одной частицы в трехмерном гармоническом осцилляторе хорошо известен и показан на рис. 11.6.

---

* Но не $V_\pm$, что дало бы состояния, для которых были бы нарушены фазовые условия, сформулированные в п. 10.3.4.

Волновые функции для состояний барионного октета с $S_z=+1/2$ в кварковой модели

$$|p,\ S_z=+1/2\rangle = 18^{-1/2}\{2|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle+2|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle+2|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle-|u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle-|u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle-$$
$$-|u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle-|d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle-|d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle-|u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle\}$$

$$|n,\ S_z=+1/2\rangle = 18^{-1/2}\{-2|d\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle-2|d\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle-2|u\downarrow d\uparrow d\uparrow\rangle+|u\uparrow d\uparrow d\downarrow\rangle+|u\uparrow d\downarrow d\uparrow\rangle+$$
$$+|d\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle+|d\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle+|d\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle+|d\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle\}$$

$$-|\Sigma^+,\ S_z=+1/2\rangle = 18^{-1/2}\{2|u\uparrow u\uparrow s\downarrow\rangle+2|u\uparrow s\downarrow u\uparrow\rangle+2|s\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle-|u\uparrow s\uparrow u\downarrow\rangle-|u\uparrow u\downarrow s\uparrow\rangle-$$
$$-|u\downarrow u\uparrow s\uparrow\rangle-|s\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle-|s\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle-|u\downarrow s\uparrow u\uparrow\rangle\}$$

$$|\Sigma^0,\ S_z=+1/2\rangle = 36^{-1/2}\{2|u\uparrow d\uparrow s\downarrow\rangle+2|u\uparrow s\downarrow d\uparrow\rangle+2|s\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle+2|d\uparrow u\uparrow s\downarrow\rangle+2|d\uparrow s\downarrow u\uparrow\rangle+$$
$$+2|s\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle-|u\uparrow s\uparrow d\downarrow\rangle-|u\uparrow d\downarrow s\uparrow\rangle-|d\downarrow u\uparrow s\uparrow\rangle-|d\uparrow s\uparrow u\downarrow\rangle-|d\uparrow u\downarrow s\uparrow\rangle-$$
$$-|u\downarrow d\uparrow s\uparrow\rangle-|s\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle-|s\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle-|d\downarrow s\uparrow u\uparrow\rangle-|s\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle-$$
$$-|s\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle-|u\downarrow s\uparrow d\uparrow\rangle\}$$

$$|\Sigma^-,\ S_z=+1/2\rangle = 18^{-1/2}\{2|d\uparrow d\uparrow s\downarrow\rangle+2|d\uparrow s\downarrow d\uparrow\rangle+2|s\downarrow d\uparrow d\uparrow\rangle-|d\uparrow s\uparrow d\downarrow\rangle-|d\uparrow d\downarrow s\uparrow\rangle-|d\downarrow d\uparrow s\uparrow\rangle-$$
$$-|s\uparrow d\uparrow d\downarrow\rangle-|s\uparrow d\downarrow d\uparrow\rangle-|d\downarrow s\uparrow d\uparrow\rangle\}$$

$$|\Lambda^0,\ S_z=+1/2\rangle = 12^{-1/2}\{|u\uparrow s\uparrow d\downarrow\rangle+|u\uparrow d\downarrow s\uparrow\rangle+|d\downarrow s\uparrow u\uparrow\rangle-|d\uparrow s\uparrow u\downarrow\rangle-|d\uparrow u\downarrow s\uparrow\rangle-|u\downarrow s\uparrow d\uparrow\rangle+$$
$$+|s\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle+|s\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle+|d\downarrow u\uparrow s\uparrow\rangle-|s\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle-|s\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle-|u\downarrow d\uparrow s\uparrow\rangle\}$$

$$|\Xi^0,\ S_z=+1/2\rangle = 18^{-1/2}\{-2|s\uparrow s\uparrow u\downarrow\rangle-2|s\uparrow u\downarrow s\uparrow\rangle-2|u\downarrow s\uparrow s\uparrow\rangle+|u\uparrow s\uparrow s\downarrow\rangle+|u\uparrow s\downarrow s\uparrow\rangle+|s\downarrow u\uparrow s\uparrow\rangle+$$
$$+|s\uparrow u\uparrow s\downarrow\rangle+|s\uparrow s\downarrow u\uparrow\rangle+|s\downarrow s\uparrow u\uparrow\rangle\}$$

$$|\Xi^-,\ S_z=+1/2\rangle = 18^{-1/2}\{-2|s\uparrow s\uparrow d\downarrow\rangle-2|s\uparrow d\downarrow s\uparrow\rangle-2|d\downarrow s\uparrow s\uparrow\rangle+|d\uparrow s\uparrow s\downarrow\rangle+|d\uparrow s\downarrow s\uparrow\rangle+|s\downarrow d\uparrow s\uparrow\rangle+$$
$$+|s\uparrow d\uparrow s\downarrow\rangle+|s\uparrow s\downarrow d\uparrow\rangle+|s\downarrow s\uparrow d\uparrow\rangle\}$$

Самым нижним состоянием модели оболочек является то, в котором все три кварка находятся в $1s$-состоянии. Обозначается оно $(1s)^3$. Такое состояние полностью симметрично и имеет полный орбитальный момент количества движения $L=0$ и положительную четность. Умножение на полностью симметричную $SU(6)$-волновую функцию 56 дает волновую функцию барионов $(1/2)^+$ и $(3/2)^+$.

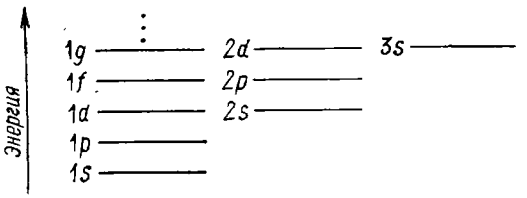


Рис. 11.6. Одночастичные уровни в потенциале трехмерного гармонического осциллятора

Игнорируя в данный момент проблему статистики Ферми, перейдем к возбужденным состояниям. Первое возбужденное состояние модели оболочек соответствует тому, что одна частица находится в состоянии $1p$, которое обозначено $(1s)^2 1p$. Мы вправе ожидать наличия трех таких состояний, но их симметричная комбинация является лишним состоянием, так как описывает движение центра масс. Разрешены две другие независимые комбинации, обладающие смешанной симметрией и имеющие $L=1$ и отрицательную четность.

Из этих координатных состояний со смешанной симметрией и из $SU(6)$-состояний со смешанной симметрией 70 и 70′, соответствующих равенству (11.19), можно образовать одно полностью симметричное состояние. Обозначим его $[70, 1^-]$. Этот вывод следует из табл. 11.5, которую можно применить, если считать строки и столбцы относящимися соответственно к координатной и $SU(6)$-частям волновой функции трех кварков.

Таким образом, выше состояния $[56, 0^+]$ располагаются барионные состояния $[70, 1^-]$. Чтобы получить разрешенные значения полного момента количества движения J, воспользуемся результатом (11.21) и объединим спин S с $L=1$. Это даст следующие состояния, обладающие отрицательной четностью.

$$[70, 1^-]: \quad (2, 1)^{1/2}_{1/2}, \quad (2, 1)^{3/2}_{1/2}$$
$$(2, 8)^{1/2}_{1/2}, \quad (2, 8)^{3/2}_{1/2}$$
$$(4, 8)^{1/2}_{1/2}, \quad (4, 8)^{3/2}_{1/2}, \quad (4, 8)^{5/2}_{1/2}$$
$$(2, 10)^{1/2}_{1/2} \quad (2, 10)^{3/2}_{1/2}$$

Из «Обзора свойств частиц» за 1973 г. видно, что в эти мультиплеты могут входить все четко установленные резонансы барионов с отрицательной четностью, лежащие в диапазоне масс 1400—2000 *Мэв*. Важно также то, что не выявлены резонансы,

не разрешенные этой моделью. Из-за расщепления масс внутри $SU(3)$-супермультиплетов и перекрытия разных супермультиплетов размещение некоторых частиц остается неопределенным, пока нет дальнейшей информации. Описываемую модель можно использовать для расчета скоростей распада резонансов на две частицы. Эти расчеты были выполнены в работе [76]. Мы приняли размещение частиц, данное в табл. 11.7.

Таблица 11.7

Размещение барионных резонансов по состояниям мультиплета [70, 1^-] в осцилляторной кварковой модели

Состояние	Δ	N	Σ	Λ	Ξ
$(2, 1)^-_{1/2}$	—	—	—	$\Lambda(1405)$	—
$(2, 1)^-_{3/2}$	—	—	—	$\Lambda(1520)$	—
$(2, 8)^-_{1/2}$	—	$N(1535)$	$\Sigma(\ )$	$\Lambda(1670)$	$\Xi(\ )$
$(2, 8)^-_{3/2}$	—	$N(1520)$	$\Sigma(1670)$	$\Lambda(1690)$	$\Xi(1820)$?
$(4, 8)^-_{1/2}$	—	$N(1700)$	$\Sigma(\ )$	$\Lambda(\ )$	$\Xi(\ )$
$(4, 8)^-_{3/2}$	—	$N(\ )$	$\Sigma(1940)$	$\Lambda(\ )$	$\Xi(\ )$
$(4, 8)^-_{5/2}$	—	$N(1670)$	$\Sigma(1765)$	$\Lambda(1830)$	$\Xi(1930)$?
$(2, 10)^-_{1/2}$	$\Delta(1650)$	—	$\Sigma(1750)$	—	$\Xi(\ )$
$(2, 10)^-_{3/2}$	$\Delta(1670)$	—	$\Sigma(\ )$	—	$\Xi(\ )$

В следующие по энергии состояния этой модели входят двухквантовые возбуждения гармонического осциллятора. При этом возможны комбинации: $(1s)^2 2s$, $(1s)^2 1d$ и $1s(1p)^2$. Требование полной симметрии приводит к следующим состояниям, обладающим положительной четностью:

$$[56,0^+] \quad [70,0^+] \quad [20,1^+]$$
$$[56,2^+] \quad [70,2^+]$$

Пробное размещение барионов с более высокой энергией по этим мультиплетам уже сделано (см. работы [56, 97]), но здесь обсуждаться больше не будет.

Симметричная кварковая модель распространена и на описание сильных и электромагнитных распадов адронов [76]. Как упоминалось выше, ее предсказания можно использовать для проверки соответствия наблюдаемых частиц мультиплетам.

11.4.6. Статистика кварков. В симметричной осцилляторной модели предполагается, что общая волновая функция трех кварков полностью симметрична. Однако в соответствии с теоремой о спине и статистике фермионные кварки должны иметь полностью антисимметричные волновые функции. Эмпирические факты кажутся благоприятными для предполагаемой модели.

Выход из этой дилеммы, указанный Гринбергом [94], заключается в предположении, что кварки подчиняются одной из обобщенных статистик, в частности парастатистике Ферми третьего порядка.

Статистику этого типа можно описать следующим образом. Кварковое состояние зависит от переменной ζ, которую можно назвать «секретной», принимающей три возможных значения $\zeta = 1, 2$ или 3. Число 3 и определяет порядок статистики. Однако ни один физический процесс не может никаким образом различить три значения ζ для одного кварка. Таким образом, при такой модели кварковое состояние $|u>$ действительно является одним из трех состояний $|u, \zeta>$, но $|u, 1>$, $|u, 2>$ и $|u, 3>$ физически неразличимы. Более того, для системы нескольких кварков общая волновая функция имеет вид

$$\Psi = \psi_{\text{простр}}\, \varphi_{SU(6)}\, \chi_{\text{секрет}}(\zeta).$$

Из *парастатистики Ферми* следует, что Ψ полностью антисимметрична относительно одновременной замены пространственной, спиновой, $SU(3)$ и «секретной» переменных ζ. Воспользовавшись опять правилами табл. 11.5 и рассматривая специальный случай трех кварков, получаем:

$$\Psi = \psi_{\text{простр}-SU(6)}\, \chi_{\text{секрет}};$$
$$A = S \times A;$$
$$A = M \times M;$$
$$A = A \times S.$$

Таким образом, парастатистика Ферми позволяет быть симметричной той части трехкварковой волновой функции, которая включает координаты пространства и $SU(6)$. Более того, так как из трех кварков может быть образована только одна полностью антисимметричная функция $\chi_{\text{секрет}}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, то соответствующая функция $\psi_{\text{простр}-SU(6)}$ является единственной. Эта гипотеза допускает, чтобы часть трехкварковой волновой функции, характеризующая пространство и $SU(6)$, могла бы иметь вид как M, так и A, но энергии таких состояний зависят от отдельных свойств qq-сил.

Причина привлечения парастатистики Ферми заключается в том, что, согласно общим принципам релятивистской квантовой теории поля, для частиц со спином 1/2, допустима парастатистика Ферми, но не статистика Бозе (неприменим прямой постулат: часть волновой функции пространство — $SU(6)$ всегда симметрична).

11.4.7. Цвет. (Дополнение к русскому изданию). Более фундаментальное решение проблемы статистики может быть получено с помощью гипотезы о цветных кварках. В этом случае секретная переменная становится действительно динамической степенью свободы. Она называется цветом. Заменяя величины 1,

2, 3 цветами, назовем их красной, зеленой и синей. Таким образом мы получаем девять цветных кварков:

$$\begin{matrix} u_к & u_з & u_с \\ d_к & d_з & d_с \\ s_к & s_з & s_с \end{matrix}$$

Хан и Намбу (1965) предложили считать, что имеется цветовая степень свободы по $SU(3)$-симметрии. В этом случае три u-кварка $u_к$, $u_з$, $u_с$ образуют фундаментальный триплет по цветовой группе $SU(3)$. Аналогичная ситуация имеет место для трех d- и для трех s-кварков. Эту $SU(3)$-симметрию по цвету, обозначаемую $SU(3)_с$, необходимо отличать от $SU(3)$-симметрии по u—d—s-степеням свободы, рассмотренной выше; в дальнейшем будем называть ее $SU(3)$-симметрией по аромату: $SU(3)_f$. Считается, что $SU(3)_с$ является точной симметрией, в то время как мы видели выше, $SU(3)_f$ является лишь приближенной.

Серьезный аргумент в пользу существования цвета — измеренное экспериментальное отношение

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}.$$

Экспериментальные данные по R могут быть представлены в виде кривой с двумя плато; каждое из них имеет, кроме того, резонансную структуру. В области первого плато от 1,5 до 3,5 Гэв $R \simeq 2{,}5$, а в области второго, более высокого — от 4 до 7 *Гэв*, — $R \simeq 5$.

Считается, что при таких энергиях сечение $\sigma(e^+e^- \to \text{адроны})$ определяется сечением $\sigma(e^+e^- \to q_n\bar{q}_n)$, просуммированным по всем типам кварков n. Предполагается, что вероятность процесса $q_n\bar{q}_n \to$ адроны примерно равна единице. Поэтому для R получаем

$$R = \sum_n Q_n^2,$$

где Q_n — заряд кварка n-го типа (заряд позитрона равен $+1$). В простой трехкварковой модели мы получили $R=2/3$, в модели из трех кварков с цветом $R=2$, это значение примерно совпадает с R для первого плато.

Второе плато, по-видимому, соответствует диапазону энергий, где может уже возбуждаться четвертый, очарованный, кварк (см. § 11.5а).

Если взаимодействия адронов инвариантны относительно двух независимых симметрий $SU(3)_с$ и $SU(3)_f$ (при этом мы для простоты пренебрегаем нарушением $SU(3)_f$-симметрии), то адронные состояния должны образовывать мультиплеты одновременно по двум группам. Требование полной антисимметрии барионов по χ, скрытое в цветовой картине, сводится к тому, что барионные состояния должны быть синглетами в $SU(3)_с$. Эквивалентность этих требований можно увидеть из правил симметрии, из-

ложенных в п. 11.3.1, но примененных теперь к цветовой группе. Отметим просто, что синглет 1_c, образованный из трех триплетов 3_c в $SU(3)_c$, является полностью антисимметричной комбинацией.

Рассмотрим кратко состояние мезонов в цветовой картине. Теперь имеется девять антикварков, которые образуют 3^* в $SU(3)_f$ и 3^* в $SU(3)_c$.

Рассматривая только цвет, мы можем образовать из 3_c и 3_c^* синглет в $SU(3)_c$:

$$3_c \times 3_c^* = 8_c + 1_c.$$

Как было показано выше, синглеты в $SU(3)_c$ с разными значениями аромата могут рассматриваться как мезоны. Состояние, обозначенное выше как $|q_1\bar{q}_2>$, является теперь комбинацией, симметричной по цвету:

$$|\, q_{1к}\bar{q}_{2к}\rangle + |\, q_{1з}\bar{q}_{2з}\rangle + |\, q_{1с}\bar{q}_{2с}\rangle.$$

Следующая гипотеза в цветовых моделях — предположение о том, что динамика такова (см. ниже), что в природе существуют только цветовые синглеты. В случае барионов три цветных кварка могут объединяться, образуя синглет [см. уравнение (11.16)]:

$$3_c \times 3_c \times 3_c = 10_c + 8_c + 8_c + 1_c,$$

а два кварка объединяться не могут, так как

$$3_c \times 3_c = 6_c + 3_c^*.$$

Не могут объединяться и четыре кварка. Таким образом, из гипотезы о существовании «только цветовых синглетов» вытекает естественное правило, с помощью которого можно исключать нежелательные состояния в $SU(3)_f$-картине.

Если цвет является динамической переменной и нам необходимо объяснить предпочтительное существование цветовых синглетов, а, например, не октетов (по крайней мере при энергиях, достижимых в настоящее время на ускорителях), мы должны предположить, что сильные взаимодействия зависят от цвета.

Другая привлекательная теоретическая возможность, которая усиленно исследуется в настоящее время, — квантовая хромодинамика (КХД). Согласно этой теории цветовой октет безмассовых векторных мезонов (цветовых глюонов) связан с цветовыми кварками калибровочно-инвариантным образом. Отметим, что виртуальное испускание векторного глюона

$$q_c \rightleftarrows q_c + V_c$$

разрешено потому, что 3_c содержится в $8_c \times 3_c$:

$$8_c \times 3_c = 15_c + 6_c^* + 3_c.$$

Калибровочная инвариантность теории имеет теоретические преимущества, но с ее помощью до сих пор не удалось показать,

что теория приводит преимущественно к синглетным по цвету состояниям.

Последним обзором по цветовым моделям является работа Гринберга и Нельсона (1977).

§ 11.5. МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ БАРИОНОВ

Трактовка электромагнитного взаимодействия адронов в модели кварков основана на *гипотезе аддитивности*. Рассмотрим магнитные моменты. Предположим, что оператор магнитного момента адрона задается суммой магнитных моментов отдельных кварков.

Для бариона

$$\mu = \mu_{q_1} + \mu_{q_2} + \mu_{q_3}. \tag{11.26}$$

Кроме того, предполагается, что оператор магнитного момента кварка дается выражением

$$\mu_{q_i} = \mu_0 Q\sigma, \tag{11.27}$$

где Q — заряд $(+2/3, -1/3, -1/3)$ соответственно для $q_i = u$, d или s; σ — спиновый оператор Паули. Здесь μ_0 — масштабный магнитный момент. Пропорциональность магнитного момента и заряда не тождественна утверждению о том, что аномальные магнитные моменты кварков равны нулю. Действительно, как мы уже видели, кварковые моменты аномально отличаются от 2/3 или (—1/3), умноженных на $e\hbar/2m_Qc$.

Однако пропорциональность следует из $SU(3)$-инвариантности и из частного вида оператора магнитного момента

$$\mu = \frac{1}{2}\mu^Y + \mu^{I_3},$$

как указывалось в п. 10.8.1. Производя те же операции, что и при анализе моментов бариона, получаем

$$\langle u \mid \mu \mid u\rangle = \frac{1}{2}\langle u \mid \mu^Y \mid u\rangle + \langle u \mid \mu^{I_3} \mid u\rangle$$

и

$$\langle s \mid \mu \mid s\rangle = \frac{1}{2}\langle s \mid \mu^Y \mid s\rangle,$$

так как изовекторная часть не может давать вклад в состояние $|s>$ с $I=0$. Оператор отражения P_v обладает свойствами

$$P_v \mid u\rangle = \mid s\rangle$$

и

$$P_v^{-1}\mu^Y P_v = -\mu,$$

так что

$$\langle s \mid \mu \mid s\rangle = \frac{1}{2}\langle u \mid P_v^{-1}\mu^Y P_v \mid u\rangle = -\frac{1}{2}\langle u \mid \mu \mid u\rangle. \tag{11.28}$$

В силу инвариантности относительно U-спина

$$\langle s \mid \mu \mid s\rangle = \langle d \mid \mu \mid d\rangle. \tag{11.29}$$

Уравнение (11.27) является просто следствием уравнений (11.28) и (11.29).

С помощью простых выражений (11.26) и (11.27) для μ и барионных волновых функций из табл. 11.6 можно непосредственно рассчитать магнитные моменты барионов. Для протона с $S_z = +1/2$ находим

$$\left\langle p,\ S_z = +\frac{1}{2} \mid \mu_z \mid p,\ S_z = +\frac{1}{2} \right\rangle = 18^{-1}\mu_0\{3\cdot 4[2\langle u\uparrow \mid Q\sigma_z \mid u\uparrow\rangle +$$

$$+\langle d\downarrow \mid Q\sigma_z \mid d\downarrow\rangle] + 6[\langle u\uparrow \mid Q\sigma_z \mid u\uparrow\rangle + \langle d\uparrow \mid Q\sigma_z \mid d\uparrow\rangle +$$

$$+\langle u\downarrow \mid Q\sigma_z \mid u\downarrow\rangle]\} = \frac{1}{18}\mu_0\left\{3\cdot 4\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}\right)\right\} = \mu_0.$$

Аналогично для нейтрона

$$\left\langle n,\ S_z = +\frac{1}{2} \mid \mu_z \mid n,\ S_z = +\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{2}{3}\mu_0.$$

Таким образом, гипотеза об аддитивности для кварковой модели предсказывает

$$\mu_n/\mu_p = -2/3. \tag{11.30}$$

Экспериментально это отношение равно —0,685. Выражение (11.30) вначале было получено как чистый результат $SU(6)$-инвариантности [17].

Уравнение (11.30) вместе с рассмотрением $SU(3)$ означает, что все моменты барионов, включая декуплет $2/3^+$, выражаются через момент протона.

Соотношения между радиационными распадами барионов, например $\Delta(1236) \to p\gamma$ (а также мезонов, $\omega^0 \to \pi^0\gamma$), можно получить с помощью простой техники (см. работу [113]).

В основе трактовки лептонных распадов барионов в кварковой модели также лежит гипотеза аддитивности. Предполагается, что основными процессами являются лептонные распады кварков.

Изучение пары *заряженных* лептонов, если пренебречь нейтральными токами, означает наличие двух возможных процессов

$$d \to u + l^- + \bar{\nu}; \tag{11.31а}$$

$$s \to u + l^- + \bar{\nu} \tag{11.31б}$$

вместе с соответствующими зарядово-сопряженными процессами.

Первый из них — закон сохранения странности $\Delta S = 0$. Он включает изменение изоспина на единицу, $|\Delta \mathbf{I}| = 1$, а второй — $\Delta Q = \Delta S = 1$ и $|\Delta \mathbf{I}| = 1/2$. Таким образом, кварковая модель дает естественное объяснение этих эмпирических правил для слабых распадов. Объединяя амплитуды процессов (11.31а) и (11.31б) с коэффициентами $G\cos\theta_c$ и $G\sin\theta_c$, получаем формулировку Кабиббо для полулептонных распадов [175].

§ 11.6. ОЧАРОВАНИЕ И SU(4) (дополнение к русскому изданию)

Попытки объединить слабые и электромагнитные взаимодействия с помощью неабелевых калибровочных теорий стали более обнадеживающими после того, как Хуфт и другие показали, что теории такого типа являются перенормируемыми. Эти теории предсказывали существование слабых нейтральных токов, которые впоследствии были подтверждены экспериментально.

В теориях такого типа довольно просто можно избежать предположения о наличии нейтральных токов, изменяющих странность и не существующих в первом порядке приближения по G_{wk}, если только ввести четвертый кварк (четвертый аромат), обозначенный «c» (Глэшоу, Илипулос и Майани, 1970). Новый кварк c является изоскаляром с таким же электрическим зарядом, что и u-кварк, и ему приписывается одна единица нового квантового числа — очарования, обозначаемого C. Таким образом, мы добавим к табл. 11.1 следующее:

	B	Y	I	I_3	Q	S	C
c	1/3	$-2/3$	0	0	2/3	0	$+1$
$\bar{c}$	1/3	$+2/3$	0	0	$-2/3$	0	-1

Очарование u-, d- и s-кварков равно нулю. Расширенная формула Гелл-Мана — Нишиджимы примет теперь вид

$$Q = I_3 + 1/2 \times (B + S + C),$$

а гиперзаряд и странность будут связаны следующим образом:

$$Y = B + S - C.$$

Теперь оказывается, что новые частицы, открытые с 1974 г., являются всего лишь новыми состояниями, предсказываемыми в такой расширенной кварковой модели.

Отметим, что при добавлении очарованного кварка R — отношение сечения образования адронов к сечению образования $\mu^+\mu^-$-пар в e^+e^--столкновениях, равно 10/9 (без учета цвета) и 10/3 (при учете цвета). Поведение же цвета и аромата дает нам R, приблизительно совпадающую с экспериментальным значением при энергиях выше 4 *Гэв*, когда уже могут возбуждаться пары очарованных кварков.

Наиболее просто и естественно предположить, что четыре кварка u, d, s и c отвечают группе симметрии $SU(4)$, при этом адронные состояния составляют $SU(4)$-супермультиплеты. Кварк и антикварк принадлежат основным супермультиплетам 4 и 4*. Супермультиплеты в $SU(4)$ могут быть получены тем же методом, который был описан для $SU(3)$-симметрии, или с помощью алгебры операторов (как в гл. 10), или же более просто путем образования частиц из кварков, как это описывается в данной главе.

Весовые диаграммы становятся теперь трехмерными. Третья ось, ортогональная I_3 и Y, обозначается как C-очарование. $SU(4)$-весовая диаграмма состоит из слоев, каждый слой содержит один или большее число $SU(3)$-мультиплетов с одинаковым значением C. Треугольная симметрия в плоскости $I_3 - Y$ превращается в тетраэдральную симметрию в $I_3 - Y - C$-пространстве. Весовые диаграммы приведены в работах Гэйларда, Ли и Рознера (1975) и Джексона (1976).

Как и раньше, мезоны рассматриваются как различные состояния системы $q\bar{q}$, а барионы — как различные состояния системы qqq.

Мезоны. 16 $q\bar{q}$-состояний образуют 15 и 1 в $SU(4)$:

$$4 \times 4^* = 15 + 1.$$

Структура $SU(3)$ и значения очарования приведены в табл. 11.8, там же указано, из каких кварков образуются новые

Таблица 11.8

$SU(4)$-супермультиплет	$SU(3)$	Очарование
15	**8+1**	$C=0$
	3*	$C=+1$ $c\bar{s}$, cd, $c\bar{u}$
	3	$C=-1$ $u\bar{c}$, $d\bar{c}$, $s\bar{c}$
1	**1**	$C=0$ при идеальном смешивании
$\mathbf{20}_S$	**10**	$C=0$
	6	$C=1$ uuc, ...
	3	$C=2$ ucc, ...
	1	$C=3$ ccc
$\mathbf{20}_M$	**8**	$C=0$
	6	$C=1$ uuc, ...
	3*	$C=1$ uuc, ...
	3	$C=2$ ucc, ...
4	**1**	$C=0$ uds
	3*	$C=1$ cud, ...

состояния. Правильно симметризованные волновые функции могут быть получены описанными выше методами. Синглет $SU(4)$ по чисто групповой теории состоял бы из следующих кварков:

$$u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + c\bar{c}.$$

Однако предполагается, что c-кварк значительно тяжелее, чем u, d и s. Так что, используя прием идеального смешивания, мы могли бы ожидать, что состояния $I = Y = C = 0$ из **15** и **1** смешиваются так, что **1** получается чистым $c\bar{c}$-состоянием. Если рассматривать $c\bar{c}$ как систему из двух тяжелых кварков, движущихся нерелятивистским образом в потенциальной яме, — «чармонии», — то при некоторых простых предположениях о форме потенциала мы можем описать спектр новых частиц с массами от 3 до 4 *Гэв*,

J/ψ (3100) является самым низшим 1^--уровнем этой системы, а ψ (3685)- и χ-состояния могут рассматриваться как более высокие уровни.

Ни одно из этих состояний не имеет отличной от нуля величины очарования, несмотря на то что они состоят из очарованных кварков. Тем не менее несколько очарованных D-мезонов были обнаружены в e^+e^--экспериментах как узкие резонансы Кл и Кпл.

Рассмотренным выше вопросам посвящены работы Джексона (1976) и обзор свойств частиц (1977).

Барионы. Трехкварковые состояния в $SU(4)$ определяются по правилам, рассмотренным в п. 11.3.1, при этом получается

$$4 \times 4 \times 4 = 20_S + 20_M + 20'_M + 4.$$

$SU(3)$ и значения очарования приведены в табл. 11.8. Предполагается существование большого числа аналогов с очарованием для известных барионов, и часть из них, по-видимому, уже наблюдалась экспериментально. (Обзор свойств частиц, 1977.)

Вопросы, затронутые выше, более подробно рассмотрены в докладах на последних конференциях, в частности Джексоном (1976) и Вийком и Рухула на Тбилисской конференции (XVIII Международная конференция по физике высоких энергий, Тбилиси, 1976).

§ 11.7. СВОБОДНЫЕ КВАРКИ

До сих пор мы рассматривали связанные системы кварков и антикварков. Теперь перейдем к вопросу о возможности существования одиночных кварков в виде свободных частиц.

Если кварки способны существовать отдельно, по крайней мере один из трех их типов должен быть стабильным. Между разными типами кварков могут происходить спонтанные переходы (например, β-распад), и заранее нельзя сказать определенно, который из них окажется стабильным или достаточно долгоживущим, чтобы его можно было наблюдать как свободную частицу. Поэтому исследовались частицы с ионизационными характеристиками заряда $e/3$ или $2e/3$, т. е. с ионизацией, составляющей 1/9 или 4/9 нормальной.

Из неудачных поисков таких частиц с помощью ускорителей был сделан вывод о том, что если они и существуют вообще, то имеют массу порядка нескольких гигаэлектронвольт. Это можно было бы согласовать с известными массами ортодоксальных частиц, если бы для уменьшения полной массы связанной системы из нескольких кварков была разрешена большая энергия связи. Поэтому последующие исследования были сконцентрированы на процессах с энергией, достаточной для разрушения ортодоксальных частиц и превращения их в отдельные кварки с массами 5 *Гэв* и больше каждый. В связи с непрерывным отсутствием каких-либо однозначных доказательств эксперименты все больше

убеждали в сложности этих эффектов. Обнаружение объекта, который мог бы быть кварком, теперь представляет незначительный интерес по сравнению с главным вопросом о нахождении объекта, который не мог бы быть ничем другим.

Методы поиска можно разделить на эксперименты с ускорителями высокой энергии, эксперименты с космическими лучами и поиски связанных кварков в обычном веществе.

В экспериментах с ускорителями в ЦЕРНе верхний предел площади пересекающихся накопительных колец системы, равный $3\times$ $\times 10^{-34}$ *см*^{2} [33], определяет верхний предел масс получаемых кварков порядка 5—22 *Гэв* и заряда $e/3$ ($6\cdot 10^{-34}$ *см*^{2} для массы до 13 *Гэв* и заряда $2e/3$). Более ранние эксперименты показали еще меньшие значения масс кварков. Эксперименты с космическими лучами и результаты исследований захваченных кварков еще труднее интерпретировать с помощью верхних пределов сечений специальных процессов.

Из современных экспериментальных результатов ясно, что или существование свободных кварков является не совсем независимым, или их вообще нет. Возможные причины этого пока остаются областью предположений. Ясно, что открытие свободных кварков выдвинуло бы новые проблемы, касающиеся, например, спина статистики. Тем не менее статус кварка как частицы или совокупности квантовых чисел остается неясным.

§ 11.8. ДАЛЬНЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящей главе описаны основные характерные черты кварковой модели адронов. Они привели к рассмотрению аспектов симметрии кварковой картины. Используемые для этого кварки иногда называют «валентными» или «структурными». Есть еще много других аспектов кварковой модели, таких, как W-спин, $SU(6)_W$, сравнение структурных и токовых кварков, тождественность кварков и партонов и т. д., которых мы еще не касались. Обзор этих тем со ссылками на оригинальную литературу читатель может найти в работах [126, 179] и в докладах последних конференций.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

СЕЧЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ $\mathcal{T}$-МАТРИЦЫ

Для вывода соотношений между элементами $\mathcal{T}$-матрицы и сечениями и скоростями распада воспользуемся методом, исключающим обычный и хорошо разработанный прием заключения системы в большой пространственно-временной объем.

§ А.1. Определение сечения

Рассмотрим процесс

$$a + b \to c + d, \tag{A.1}$$

в котором пучок частиц a с хорошо определенным импульсом направлен на мишень из частиц b, а детекторы считают частицы c, d или те и другие вместе. Если за промежуток времени T подсчитано $\mathfrak{N}_c$ частиц типа c и не пропущено ни одной, то скорость счета будет $\mathfrak{N}_c/T$. Скорость счета пропорциональна числу N_b частиц типа b в мишени (считаем, что пучок охватывает всю мишень, а многократным рассеянием и экранированием можно пренебречь) и падающему потоку J_a. Поток J_a равен числу частиц a, пересекающих в единицу времени единичную площадь, расположенную перпендикулярно к пучку. Таким образом,

$$\mathfrak{N}_c/T = \sigma(ab \to cd)\, N_b J_a, \tag{A.2}$$

где константа пропорциональности — *сечение* процесса (A.1).

Если мы детектируем $\delta\mathfrak{N}_c$ частиц типа c, испускаемых в пределах телесного угла $\delta\Omega$, то получим сечение $d\sigma/d\Omega$, которое определяется формулой

$$\delta\mathfrak{N}_c/T = \frac{d\sigma}{d\Omega}\,\delta\Omega N_b J_a. \tag{A.3}$$

Уравнение (A.2) можно привести к более симметричной относительно a и b форме. Падающий поток J_a есть плотность частиц a в пучке, умноженная на скорость частиц a, вылетающих из мишени:

$$J_a = \rho_a v. \tag{A.4}$$

В более общем случае для движущихся частиц b относительная скорость

$$v_{ab} = |\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b|. \tag{A.5}$$

В описываемом случае скорости $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{v}_b$ лежат на одной и той же прямой.

Если ρ_b означает плотность мишени объема V, то

$$N_b = \rho_b V. \tag{A.6}$$

Введя (A.4) — (A.6) в (A.2), получим

$$\mathfrak{N}_c = \sigma v_{ab} \rho_a \rho_b V T. \tag{A.7}$$

Если ρ_a и ρ_b меняются во времени или пространстве, выражение в правой части равенства следует обобщить:

$$\mathfrak{N}_c = \sigma v_{ab} \int d^3x \int dt \rho_a(\mathbf{x}, t)\, \rho_b(\mathbf{x}, t). \tag{A.8}$$

Это выражение справедливо также и в том случае, если пучок не охватывает всю мишень.

Величину

$$\Phi = v_{ab} \int d^3x \int dt \rho_a(\mathbf{x}, t)\, \rho_b(\mathbf{x}, t) \tag{A.9}$$

называют взаимным потоком a и b.

Таким образом, имеем

$$\sigma(ab \to cd) = \mathfrak{N}_c/\Phi, \tag{A.10}$$

где σ — инвариант относительно преобразований Лоренца вдоль направления относительного движения. Рассмотрим (A.7). Число частиц $\mathfrak{N}_c$ и пространственно-временной объем VT инвариантны относительно преобразований Лоренца, а ρ_a и ρ_b — нет. Плотность ρ_a в системе отсчета, в которой частицы движутся с энергией E_a и импульсом p_a, превышает плотность ρ_a^0 в системе покоя на лоренцев множитель сжатия

$$(1 - v_a^2)^{-1/2} = E_a/m_a.$$

Таким образом,

$$\rho_a = \rho_a^0 E_a/m_a.$$

Следовательно,

$$\rho_a \rho_b v_{ab} = \rho_a^0 \rho_b^0 v_{ab} E_a E_b/m_a m_b.$$

Это выражение можно переписать через инварианты Лоренца следующим образом: в системе покоя b

$$\frac{E_a E_b}{m_a m_b} v_{ab} = \frac{E_a}{m_a} v_a = \frac{|\mathbf{p}_a|}{m_a} = \frac{\{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2\}^{1/2}}{m_a m_b}. \tag{A.11}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{N}_c = \sigma \rho_a^0 \rho_b^0 \frac{\{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2\}^{1/2}}{m_a m_b} VT.$$

§ A.2. Вероятность перехода в релятивистском случае

При тех же соглашениях относительно состояний с определенным релятивистским импульсом, что и в § 4.3 [в частности, (4.45)], вероятность того, что после рассеяния импульс частицы c лежит в области $(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_c + d\mathbf{p}_c)$, а частицы d — в области $(\mathbf{p}_d, \mathbf{p}_d + d\mathbf{p}_d)$, равна

$$dw = \left| \left(\varphi_{\mathbf{p}_c \mathbf{p}_d}, \mathcal{T} \varphi_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b} \right) \right|^2 \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2E_d}. \tag{A.12}$$

Из инвариантности относительно смещений в пространстве и времени следует сохранение энергии и импульса, что выражается равенством

$$\left(\varphi_{\mathbf{p}_c \mathbf{p}_d}, \mathcal{T} \varphi_{\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b} \right) = (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \times$$
$$\times \delta(E_c + E_d - E_a - E_b)\, T(\mathbf{p}_c \mathbf{p}_d, \mathbf{p}_a \mathbf{p}_b), \tag{A.13}$$

где $(2\pi)^4$ введено просто для удобства. Таким образом, матричный элемент слева является сингулярной величиной. Однако не следует идеализировать, считая импульсы в начальный момент вполне определенными. Поэтому начальное

собственное состояние импульса

$$\varphi_{\mathbf{p}_a\mathbf{p}_b} = \varphi^a_{\mathbf{p}_a}\varphi^b_{\mathbf{p}_b}$$

заменим суперпозицией

$$\Psi = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^{3/2}(2E_1)^{1/2}} a_1(\mathbf{p}_1)\varphi^a_{\mathbf{p}_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^{3/2}(2E_2)^{1/2}} a_2(\mathbf{p}_2)\varphi^b_{\mathbf{p}_2},$$

в которой амплитуды в импульсном пространстве $a_1(\mathbf{p}_1)$ и $a_2(\mathbf{p}_2)$ имеют острый пик в точках $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{p}_b$ соответственно. Коэффициенты определяются таким же образом, как и в § 4.3.

Согласно принципу суперпозиции, амплитуда

$$A = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p_1}{(2E_1)^{1/2}} \int \frac{d^3p_2}{(2E_2)^{1/2}} \left(\varphi_{\mathbf{p}_c\mathbf{p}_d}, \mathcal{T}\varphi_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}\right) a_1(\mathbf{p}_1)\, a_2(\mathbf{p}_2), \quad (A.14)$$

а выражение (A.12) приобретает вид

$$dw = |A|^2 \frac{d^3p_c}{(2\pi)^3\, 2E_c} \frac{d^3p_d}{(2\pi)^3\, 2E_d}. \quad (A.15)$$

Подставив (A.13) в (A.14) и воспользовавшись тем фактом, что $a_1(\mathbf{p}_1)$ и $a_2(\mathbf{p}_2)$ имеют острый пик, заменим функцию $T(\mathbf{p}_c\mathbf{p}_d, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ ее значением при $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_a$, $\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_b$, вынеся его за знак интеграла:

$$A = 2\pi T(p_c p_d, p_a p_b) \int \frac{d^3p_1}{(2E_1)^{1/2}} \int \frac{d^3p_2}{(2E_2)^{1/2}} a_1(p_1)\, a_2(p_2)\, \delta^{(4)}(p_c + p_d - p_1 - p_2). \quad (A.16)$$

Здесь $\delta^{(4)}$ означает четырехмерную δ-функцию. Взяв квадрат модуля (A.16), получим

$$|A|^2 = \frac{(2\pi)^2 |T(p_c p_d, p_a p_b)|^2}{4E_aE_b}\delta^{(4)}(p_c + p_d - p_a - p_b) \times$$

$$\times \int d^3p_1' d^3p_2' d^3p_1 d^3p_2 a_1^*(\mathbf{p}_1') a_2^*(\mathbf{p}_2') a_1(\mathbf{p}_1) a_2(\mathbf{p}_2) \delta^{(4)}(p_1' + p_2' - p_1 - p_2). \quad (A.17)$$

Здесь мы воспользовались выражением

$$\delta^{(4)}(p_c + p_d - p_1' - p_2')\,\delta^{(4)}(p_c + p_d - p_1 - p_2) =$$

$$= \delta^{(4)}(p_c + p_d - p_1 - p_2)\,\delta^{(4)}(p_1' + p_2' - p_1 - p_2),$$

положив затем в первом множителе $p_1=p_a$, $p_2=p_b$. Таким образом, для $a_1(\mathbf{p})$ и $a_2(\mathbf{p})$, имеющих резко выраженные максимумы, считаем $E_1=E'_1=E_a$ и $E_2=E'_2=E_b$.

§ A.3. Взаимный поток

Соответственно функции $a(\mathbf{p})$ в импульсном пространстве определим волновую функцию в пространстве — времени:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2E_p)^{1/2}} a(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - iE_p t), \quad (A.18)$$

которая, как легко показать, будет удовлетворять уравнению Клейна — Гордона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Определим через ψ плотность вероятности и поток вероятности

$$\left.\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= i\left\{\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right\};\\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= -i\{\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi)^*\psi\}.\end{aligned}\right\} \quad (A.19)$$

Можно доказать, что при таких определениях удовлетворяется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0.$$

Для ψ, стремящейся к нулю при $|\mathbf{x}|\to\infty$, уравнение непрерывности можно использовать для того, чтобы показать, что вероятность сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Подставляя (A.18) в (A.19), находим, что для $a(\mathbf{p})$, имеющей резко выраженный максимум, множитель $E_{\mathbf{p}}$ можно сократить. Это дает

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p d^3p' a^*(\mathbf{p}')\, a(\mathbf{p}) \exp[i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{x} - i(E_p - E_{p'})t]. \quad (A.20)$$

Выражение вида (A.20) дает возможность выразить $\rho_a(\mathbf{x}, t)$ через $a_1(\mathbf{p})$ и аналогично $\rho_b(\mathbf{x}, t)$ через $a_2(\mathbf{p})$. Подставив эти значения в определение (A.9) для Φ и вспомнив интегральную формулу

$$\int d^4x \exp(i\mathbf{P}\mathbf{x} - iEt) = (2\pi)^4\delta^{(3)}(\mathbf{P})\,\delta(E),$$

найдем выражение для взаимного потока:

$$\Phi = \frac{v_{ab}}{(2\pi)^2}\int d^3p_1' d^3p_2' d^3p_1 d^3p_2 a_1^*(\mathbf{p}_1')\, a_2^*(\mathbf{p}_2')\, a_1(\mathbf{p}_1)\, a_2(\mathbf{p}_2)\,\delta^{(4)}(p_1' + p_2' - p_1 - p_2). \quad (A.21)$$

§ A.4. Сечение

При вычислении

$$\sigma = \left(\int dw\right)/\Phi$$

с помощью выражений (A.15), (A.17) и (A.21) интеграл по амплитудам начальных импульсов исчезает и остается желаемое соотношение между элементом $\mathscr{T}$-матрицы и сечением

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4E_aE_bv_{ab}}\int \frac{d^3p_c d^3p_d}{(2\pi)^3\,2E_c\,(2\pi)^3\,2E_d}\,\delta^{(4)}(p_c + p_d - p_a - p_b)\,|T(p_cp_d, p_ap_b)|^2. \quad (A.22)$$

В § A.1 показано, что величина $E_aE_bv_{ab}$ — лоренцев инвариант. Интеграл $d^3p/2E$ тоже является лоренцевым инвариантом, так как якобиан преобразования

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p}' = \Lambda\mathbf{p}$$

есть просто E/E', что легко доказать для специального случая буста вдоль оси z:

$$\int\frac{d^3p}{2E} = \int\frac{d^3p'}{2E}\left|\frac{\partial(p_xp_yp_z)}{\partial(p_x'p_y'p_z')}\right| = \int\frac{d^3p'}{2E'}.$$

Четырехмерная δ-функция — инвариант Лоренца; лоренцева инвариантность σ обсуждалась в § A.1, а инвариантность $|T|^2$ следует из п. 4.10.3.

Спинами мы уже пренебрегли. Если какая-либо из частиц имеет спин, то σ и T должны иметь характеристики спиральности, но предыдущие выводы остаются нензменными.

Четыре из шести операций интегрнрования в (А.22) можно выполнить с помощью δ-функции. Для системы отсчета ц. м. находим

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 W^2} \frac{p_{cd}}{p_{ab}} \int |T|^2 \, d\Omega, \tag{А.23}$$

где p_{ab} и p_{cd} — импульсы частиц в начальном и конечном состояниях, а W — полная энергия:

$$W = E_a + E_b = E_c + E_d.$$

Если T выразить через нормированные по-иному двухчастичные состояния (4.85), то (А.23) примет вид

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{p_{ab}^2} \int |T'|^2 \, d\Omega. \tag{А.24}$$

§ А.5. Скорости распада

Рассмотрим процесс распада

$$A \to a + b + c + \ldots \tag{А.25}$$

Число δN_a частиц типа a, продетектированных за время δt, пропорционально количеству $N_A(t)$ присутствующих частиц A и δt:

$$\delta N_a = \Gamma N_A(t) \, \delta t. \tag{А.26}$$

Постоянная Γ — ширина распада. Так как детектирование a свидетельствует о наличии распада A, то

$$\delta N_a = -\delta N_A$$

и

$$\delta N_A = -\Gamma N_A(t) \, \delta t.$$

Это и есть закон радиоактнвности распада, который показывает, что $1/\Gamma$ является временем жнзнн частицы A для распада (А.25).

Для простоты написанння остановимся на двухчастичном распаде $A \to a + b$. Полное число обнаруженных частиц a равно

$$N_a = \int \frac{dN_a}{dt} \, dt = \int \Gamma N_A(t) \, dt = \Gamma \int \rho_A(\mathbf{x}, t) \, d^3x dt.$$

Таким образом,

$$\Gamma = N_A / \left(\int \rho_A d^3x dt \right). \tag{А.27}$$

Мы ввели плотность ρ_a частиц A.

Расчет, аналогичный расчету поперечного сечения, дает

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2E_A} \int \frac{d^3p_a d^3p_b}{(2\pi)^3 \, 2E_a \, (2\pi)^3 \, 2E_b} \delta^{(4)}(p_A - p_a - p_b) \, |T(p_a, p_b; p_A)|^2. \tag{А.28}$$

Для системы покоя частицы A (с. ц. м. распада) находим

$$\Gamma = \frac{p_{ab}}{32\pi^2 m_A^2} \int d\Omega \, |T|^2. \tag{А.29}$$

Если конечное состояние выразить через двухчастичное (4.85), то (А.29) примет вид

$$\Gamma = \frac{1}{2m_A} \int d\Omega \, |T'|^2. \tag{А.30}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

§ Б.1. Определение матрицы плотности

Находящаяся в определенных условиях квантовомеханическая система описывается волновой функцией или вектором состояния, и наоборот, вектор состояния содержит всю возможную информацию о системе. Иногда приходится иметь дело с системами, о которых мы не имеем полных данных. Такая ситуация обычно возникает тогда, когда мы имеем большое число N копий одной и той же системы, как, например, в случае с пучком протонов, испускаемых ускорителем. Для каждого одиночного протона мы располагаем только статистической информацией об ориентации его спина — 50% направлено вверх, 50% вниз. Квантовомеханический формализм можно распространить и на такие случаи.

Вместо вектора состояний ансамбль систем описывается матрицей плотности. Мы рассмотрим только описание с помощью матрицы плотности спиновых состояний, т. е. явления поляризации. Предположим, что все частицы ансамбля находятся в одном и том же состоянии по координате, например, все имеют один и тот же импульс k. Таким образом, все ссылки на состояние по координате опускаются.

Частица со спином s в хорошо определенном состоянии описывается вектором состояния ψ, который можно представить в виде столбца из $2s+1$ компонент, элементы c_λ которого являются амплитудами частиц со спиновыми проекциями λ, направленными вдоль определенной оси квантования. Имеем

$$\psi = \sum_\lambda c_\lambda \varphi_\lambda. \tag{Б.1}$$

В матричных обозначениях

$$\psi = \begin{vmatrix} c_s \\ c_{s-1} \\ c_{s-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{-s} \end{vmatrix}; \quad \varphi_s = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \varphi_{s-1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Величины φ_λ обычно являются собственными функциями z-компоненты спина S_z или оператора спиральности

$$\mathscr{H} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{P}/|\mathbf{P}|.$$

Однако необходимо, чтобы они образовывали полный набор спиновых состояний.

Среднее значение любой наблюдаемой A, связанной со спином частицы, например x-компоненты спина, задается выражением

$$(\psi, A\psi) = \sum_{\mu\lambda} c_\mu^* c_\lambda (\varphi_\mu, A\varphi_\lambda) = \sum_{\mu\lambda} c_\mu^* c_\lambda A_{\mu\lambda}, \tag{Б.2}$$

в которое введено разложение (Б.1), а $A_{\mu\lambda}$ — матричный элемент A в базисе φ_λ.

Теперь представим себе N частиц, часть N_1 которых находится в состоянии $\psi^{(1)}$, N_2 — в состоянии $\psi^{(2)}$ и т. д. Чему будет равно среднее значение, которое получается при измерении A для всех членов ансамбля?

Для доли случаев $w_1 = N_1/N$ получаем

$$(\psi^{(1)}, A\psi^{(1)}) = \sum_{\mu\lambda} c_\mu^{(1)*} c_\lambda^{(1)} A_{\mu\lambda},$$

где $c_\lambda^{(1)}$ — коэффициент разложения $\psi^{(1)}$ в базисе φ_λ. Для доли $w_2 = N_2/N$ получаем

$$\sum_{\mu\lambda} c_\mu^{(2)*} c_\lambda^{(2)} A_{\mu\lambda}$$

и т. д. Следовательно, среднее значение A по всему ансамблю

$$\langle A \rangle = \sum_r w_r \sum_{\mu\lambda} c_\mu^{(r)*} c_\lambda^{(r)} A_{\mu\lambda}. \qquad (Б.3)$$

Рассмотрим вид этого выражения. Матричные элементы $A_{\mu\lambda}$ зависят только от величины A, выбранной для измерений, и от базиса φ_λ, в котором разлагаются состояния $\psi^{(r)}$. В то же время

$$\rho_{\lambda\mu} = \sum_r w_r c_\lambda^{(r)} c_\mu^{(r)*}, \qquad (Б.4)$$

содержит информацию о состоянии ансамбля частиц в пучке. Эта величина называется *матрицей плотности* пучка. Разложение (Б.3) можно выразить через $\rho_{\lambda\mu}$ в виде

$$\langle A \rangle = \sum_{\mu\lambda} \rho_{\lambda\mu} A_{\mu\lambda}$$

или

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho A), \qquad (Б.5)$$

где ρ и A — $(2s+1)\times(2s+1)$-матрицы, а Tr означает след

$$\mathrm{Tr}\,(M) = \sum_\lambda M_{\lambda\lambda}.$$

Матрица плотности введена в квантовую механику Л. Д. Ландау и фон Нейманом. К проблемам поляризации ее применили Далиц [54] и др.

Матрица плотности содержит максимальную информацию о состоянии поляризации пучка. С ее помощью можно предсказать результат любого измерения. Все измерения для двух пучков с одинаковыми матрицами плотности дают один и тот же результат.

Из определения (Б.4) следует, что ρ — эрмитова матрица

$$\rho_{\lambda\mu} = \rho_{\mu\lambda}^*. \qquad (Б.6)$$

Таким образом, для определения ρ требуется $(2s+1)^2$ действительных чисел.

След

$$\mathrm{Tr}\,(\rho) = \sum_\lambda \rho_{\lambda\lambda} = \sum_\lambda \sum_r w_r \left| c_\lambda^{(r)} \right|^2.$$

Сумма $\sum_r w_r \left| c_\lambda^{(r)} \right|^2$ измеряет ту часть всех случаев, когда обнаруженная частица находится в состоянии λ, и, следовательно, сумма по λ дает единицу, так что

$$\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1.$$

Если ввести в приведенные выше уравнения координатную волновую функцию, то $\mathrm{Tr}(\rho)$ даст интенсивность пучка. Предположим, что так оно и есть, и запишем

$$\mathrm{Tr}\,(\rho) = \mathcal{J}. \qquad (Б.7)$$

Выражение (Б.5) для среднего значения A теперь следует записать в виде

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho A)/\mathrm{Tr}\,(\rho). \qquad (Б.8)$$

Для проверки можно воспользоваться случаем $A = 1$

§ Б.2. Матрица плотности для спина 1/2

На примере случая $s=1/2$ рассмотрим свойства ρ. Этот случай охватывает пучки протонов, нейтронов и других барионов. Кроме того, фотон имеет только два состояния спиральности, следовательно, для описания поляризованных фотонов достаточно 2×2-матрицы плотности.

Для пучка частиц со спином 1/2 можно записать

$$\rho_{\mu\lambda}=\begin{pmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{pmatrix},$$

где, согласно (Б.6) и (Б.7),

$$\left.\begin{aligned}&\rho_{11}+\rho_{22}=\mathcal{I};\\ &\rho_{12}=\rho_{21}^{*};\quad \rho_{11}\text{ и }\rho_{22}\text{ — действительное число}\end{aligned}\right\}\qquad (Б.9)$$

(удобнее использовать индексы 1 и 2, а не $\pm1/2$). Теперь любую 2×2-эрмитову матрицу можно разложить по спиновым матрицам Паули и единичной 2×2-матрице. Таким образом,

$$\rho=a1+\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma},$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z).$$

Так как

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma_x)=\mathrm{Tr}\,(\sigma_y)=\mathrm{Tr}\,(\sigma_z)=0,\quad \mathrm{Tr}\,(1)=2,$$

то равенство (Б.7) требует, чтобы

$$a=\mathcal{I}/2,$$

так что положим

$$\rho=\frac{1}{2}\mathcal{I}\,(1+\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}).\qquad (Б.10)$$

Для того чтобы фиксировать значение ρ, нужны четыре числа $\mathcal{I}$ и $\mathbf{P}$. Величину $\mathbf{P}$ называют вектором *поляризации* пучка. Физический смысл ее следующий.

С помощью свойств матриц Паули

$$\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x=i\sigma_z\ \text{ и т. д.}\qquad (Б.11а)$$

и

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1\qquad (Б.11б)$$

рассчитаем

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma_i\rho)=P_i\mathcal{I}.\qquad (Б.12)$$

Таким образом, в силу (Б.8) вектор $\mathbf{P}$ является средним значением при измерении величины σ для пучка, описываемого с помощью ρ. В явном виде

$$\begin{aligned}\mathcal{I}&=\rho_{11}+\rho_{22};\\ \mathcal{I}P_x&=\rho_{21}+\rho_{12};\\ \mathcal{I}P_y&=-i\,(\rho_{21}-\rho_{12});\\ \mathcal{I}P_z&=\rho_{11}-\rho_{22}.\end{aligned}$$

Например,

$$P_z=\frac{\text{Число частиц со спином вверх — число частиц со спином вниз}}{\text{Полное число частиц}}.$$

Представим себе, что мы выполняем с пучком эксперимент типа эксперимента Штерна — Герлаха *. Он сводится к измерению той части случаев, в которой z-проекция спина равна $+1/2$ и $-1/2$, следовательно, к определению P_z. Аналогично путем переориентации аппарата можно определить P_x и P_y и таким образом определить полную матрицу плотности (Б.10).

Для того чтобы глубже понять смысл матрицы плотности, рассмотрим несколько специальных случаев.

а. Предположим, что все частицы пучка находятся в одном и том же состоянии

$$\psi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно общим определениям (Б.3) и (Б.4), суммирования по r нет и (Б.4) приобретает вид

$$\rho = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix}. \tag{Б.13}$$

Интенсивность задается простым выражением

$$\mathcal{J} = \mathrm{Tr}\,(\rho) = |c_1|^2 + |c_2|^2, \quad .$$

а компоненты вектора поляризации равны:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= 2\mathrm{Re}\,(c_2 c_1^*)/(|c_1|^2 + |c_2|^2); \\ P_y &= 2\mathrm{Im}\,(c_2 c_1^*)/(|c_1|^2 + |c_2|^2); \\ P_z &= (|c_1|^2 - |c_2|^2)/(|c_1|^2 + |c_2|^2). \end{aligned}\right\} \tag{Б.14}$$

В то же время, так как $\mathbf{P}$ — среднее значение σ для пучка, а следовательно, и для каждой частицы в состоянии ψ, можем записать

$$\mathbf{P} = (\psi, \sigma\psi)/(\psi, \psi), \tag{Б.15}$$

что совпадает с выражением (Б.14).

Из (Б.14) следует, что

$$|\mathbf{P}|^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1. \tag{Б.16}$$

Значит, в этом случае $\mathbf{P}$ — единичный вектор, компоненты которого являются средними значениями компонент σ.

Напомним далее, что для частицы со спином 1/2, находящейся в состоянии ψ, всегда существует такое направление квантования $\mathbf{n}$, вдоль которого проекция спина равна $+1/2$

$$\sigma \cdot \mathbf{n}\psi = \psi \tag{Б.17}$$

(σ — удвоенный оператор спина). Для этого надо перейти к новой координатной системе в двухкомпонентном спиновом пространстве, такой, чтобы $\sigma \cdot \mathbf{n}$ и ψ приобрели вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь покажем, что направление $\mathbf{n}$ задается вектором $\mathbf{P}$.

Свойства (Б.11) можно суммировать как

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

---

* Фактически аргументы принципа неопределенности показывают, что для таких заряженных частиц, как свободные протоны, эксперимент Штерна—Герлаха не может быть выполнен (см., например, работу Мотта [141]), так что для проведения нужных измерений необходим косвенный эксперимент по рассеянию.

Возьмем среднее значение по ψ для этого тождества

$$(\psi,\ \sigma_i\sigma_j\psi) + (\psi,\ \sigma_j\sigma_i\psi) = 2\delta_{ij}\,(\psi,\ \psi).$$

Следовательно,

$$(\psi,\ \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sigma_j\psi) + (\psi,\ \sigma_j\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\psi) = 2n_j\,(\psi,\ \psi).$$

Теперь в левой части равенства имеем эрмитов оператор $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, действующий налево и направо, и, воспользовавшись (Б.17), получим

$$2\,(\psi,\ \sigma_j\psi) = 2n_j\,(\psi,\ \psi).$$

Таким образом,

$$n_j = (\psi,\ \sigma_j\psi)/(\psi,\ \psi) = P_j.$$

Короче, пучок, для которого все частицы находятся в одном и том же состоянии ψ, называется *полностью поляризованным*. Матрица плотности его имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,(1 + \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}),$$

где вектор $\mathbf{P}$ направлен вдоль направления поляризации и

$$|\mathbf{P}| = 1.$$

б. Теперь рассмотрим пучок, матрица плотности которого

$$\rho = \frac{1}{2}\mathcal{J}1. \qquad (Б.18)$$

Если с таким пучком выполнить эксперимент типа Штерна — Герлаха, то при любой ориентации аппарата пучок будет расщепляться на две одинаковые части. Следовательно, пучок частиц, описанный матрицей (Б.18), будет *неполяризованным*.

в. Далее, предположим, что

$$\rho = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,(1 + P\sigma_z) = \mathcal{J}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+P) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-P) \end{pmatrix}. \qquad (Б.19)$$

Если $P=0$, имеем случай б), а если $P=+1$ (или -1), — случай а) полностью поляризованного пучка. Для значений P, лежащих между 0 и 1, матрица (Б.19) описывает частично поляризованный пучок, в котором часть частиц $^1/_2\,(1+P)$ имеет $s_z=+1/2$, а $^1/_2\,(1-P)$ имеет $s_z=-1/2$. Так как

$$\rho = \mathcal{J}\left\{\frac{1}{2}(1-P)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

альтернативно можем сказать, что часть пучка $1-P$ не поляризована, а часть P полностью поляризована в направлении оси $+Oz$. (Если величина P отрицательна, то и поляризация направлена вдоль оси $-Oz$.)

Оба эти описания одинаково справедливы, так как их нельзя различить экспериментально.

г. Общую матрицу плотности

$$\rho = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,(1 + \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \qquad (Б.20)$$

можно привести к виду (Б.19) поворотом оси квантования.

Таким образом, о пучке, описываемом матрицей ρ (Б.20), можем сказать следующее:

1. Если $|\mathbf{P}|=1$, пучок полностью поляризован в направлении $\mathbf{P}$.
2. Если $0<|\mathbf{P}|<1$, пучок частично поляризован, часть его $^1/_2(1\pm|\mathbf{P}|)$ имеет спиновую проекцию $\pm^1/_2$ на направление $\mathbf{P}$.
3. Если $\mathbf{P}=0$, пучок не поляризован.

§ Б.3. Обобщения

Случай, когда спин равен 1, иллюстрирует то направленне, в котором надо идти, обобщая полученные результаты для $s>1/2$. Матрица плотности спина, равного 1, характеризуется $3^2=9$ вещественными числами. Представление (Б.10) можно заменить

$$\rho=\mathcal{J}\left(\frac{1}{3}1+\sum_i P_i S_i+\ldots\right),$$

где $S_i=(S_xS_yS_z)$ — спиновые матрицы 3×3, соответствующие спину 1. Чтобы произвести разложение эрмитовой матрицы, нужны еще пять эрмитовых операторов. Соответствующие операторы образуются из $S_xS_y+S_yS_z$ и т. д. и из S_xS_x и т. д.

Коэффициенты при этих величинах иазываются моментами ρ. Наличие этих дополнительных членов связано с тем, что в этом случае в эксперименте Штерна — Герлаха есть три пучка — отклоняющийся вверх, вниз и пучок без отклонения.

Величина $\mathrm{Tr}(\rho S_z)/\mathrm{Tr}(\rho)=$(часть с отклонением вверх)—(часть с отклонением вниз) не дает никакой информации о неотклоненном пучке.

Рассмотрим систему из двух частиц a и b со спинами s_a и s_b. Если частицы не взаимодействуют друг с другом и находятся в определенных квантовых состояниях, они описываются произведением волновых функций $\psi^{(a)}\chi^{(b)}$. Соответственно два пучка частиц a и b в эксперименте по рассеянию можно описать произведением матриц плотности

$$\rho^{(a)}_{\lambda\lambda'}\rho^{(b)}_{\mu\mu'}=\rho^{(ab)}_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}. \qquad (Б.21)$$

Эту матрицу можио считать матрицей, строки которой характеризуются парами индексов $\lambda\mu$, а столбцы $\lambda'\mu'$. После взаимодействия пучков между спинами возникает корреляция, и матрица плотности приобретает вид

$$\rho^{(ab)\text{кон}}_{\lambda\mu,\lambda'\mu'} \qquad (Б.22)$$

и не может быть представлена в внде (Б.21).

§ Б.4. Матрица плотности и рассеяние

Рассмотрим рассеяние пучка частиц со спиион $^1/_2$ на бесспиновой мишени, например πN-рассеяние, прнчем используем обозиачения § 4.8.

Если частицы пучка находятся в определенном спиновом состоянии, например в собственном состоянии спиральности λ, то амплитуду рассеяния в собственном состоянии спиральности μ можно считать матрицей

$$f_{\mu\lambda}=(\chi_\mu, f\chi_\lambda).$$

Следовательно, амплитуда рассеяния в состояние μ для общего начального спинового состояния $\Sigma c^i_\lambda\chi_\lambda$ равна

$$c^f_\mu=\sum_\lambda f_{\mu\lambda}c^i_\lambda.$$

Для рассеянного пучка матрицу плотности

$$\rho^f_{\mu\mu'}=\sum_\lambda f_{\mu\lambda}c^i_\lambda f^*_{\mu'\lambda'}c^{i*}_{\lambda'}$$

можно преобразовать так, чтобы выявить ее зависимость от начального состояния (в нашем случае оно полностью поляризовано):

$$\rho^f_{\mu\mu'} = \sum_{\lambda\lambda'} f_{\mu\lambda} c^i_\lambda c^{i*}_{\lambda'} f^*_{\mu'\lambda'},$$

или

$$\rho^f = f\rho^i f^+. \tag{Б.23}$$

Как всегда, если падающий пучок — произвольно поляризованное состояние, описываемое матрицей плотности ρ^i, то матрица плотности рассеянного пучка задается выражением (Б.23). Разумеется, через амплитуду рассеяния $f_{\mu\lambda}$ матрица ρ^f зависит от угла рассеяния.

Удобно нормировать ρ^i на единичную интенсивность в падающем пучке

$$\mathrm{Tr}\rho^i = 1,$$

так что для неполяризованного пучка

$$\rho^i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для следа ρ^f находим

$$\mathrm{Tr}\,\rho^f = \mathrm{Tr}\left(f\cdot\frac{1}{2}\cdot f^+\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mu\lambda} f_{\mu\lambda} f^+_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\lambda} |f_{\mu\lambda}|^2,$$

что является просто обычным выражением для дифференциального сечения рассеяния с неполяризованным начальным пучком, для которого спины в конечном состоянии не наблюдаются. Матрица плотности указывает более точный путь описания этих операций. Мы имеем формулу

$$\mathrm{Tr}\,\rho^f = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{неполяриз}}$$

для дифференциального сечения рассеяния, соответствующего начальному состоянию ρ^i без наблюдения спинов в конечном состоянии.

При описании спина с помощью спиральности f означает матрицу, индексы столбцов которой относятся к оси Oz как к оси квантования, а индексы строк — к направлению (θ, φ) рассеянного нуклона как к оси квантования. Таким образом, если запишем

$$\rho^f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}^f\cdot\sigma)\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{неполяриз}},$$

то $\mathbf{P}^f$ будет вектором, компоненты которого относятся к осям x', y', z', полученным из обычных осей поворотом $R(\varphi, \theta, 0)$ и показанных на рис. 4.1. Кроме того, $\mathbf{P}^f$ характеризует поляризацию в системе покоя конечной частицы со спином $1/2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ИЗОСПИН И ФАЗОВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ $SU(3)$

В этом приложении дается объяснение фазовых условий, использованных в этой книге для операторов и состояний внутренних симметрий, а именно для изоспина, $SU(3)$ и зарядового сопряжения.

§ В.1. Фазовые условия для изоспина и зарядового сопряжения

Для изоспина можно воспользоваться фазовым условием Кондона — Шортли (КШ), первоначально принятым для момента количества движения

в п. 3.2.2. Это условие требует, чтобы операторы сдвига $I_\pm$ имели *действительные* и *положительные* матричные элементы относительно стандартных собственных состояний $|I, I_3>$ операторов I^2 и I_3.

Таким образом, для нуклонного изодублета

$$|p\rangle = \left|N, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle; \quad |n\rangle = \left|N, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle. \tag{B.1}$$

В случае триплета π-мезонов надо положить $|\pi^+>=|1, +1>$, $|\pi^0>=|1, 0>$, $|\pi^->=|1, -1>$. Хотя этот выбор вполне приемлем, в литературе обычно правая часть этих уравнений имеет знак минус. Аналогично для дублета антинуклонов выбор $|\bar{p}>=|\bar{N}, 1/2, +1/2>$ и $|\bar{n}>=|\bar{N}, 1/2, -1/2>$ нестандартен. Причина заключается в наличии другого оператора, а именно оператора зарядового сопряжения U_C, благодаря которому эти состояния оказываются связанными или в пределах одного и того же мультиплета, как в случае π^+ и π^-, или в разных мультиплетах, как в случае p и $\bar{p}$. Оказывается, что требование положительности матричных элементов для U_C несовместимо с условием Кондона — Шортли для $I_\pm$. Примем «нездоровый» компромисс — воспользуемся символами состояния подобно тому, как это сделано в левой части (B.1) для обозначения состояний, связанных посредством U_C, а справа для стандартных изоспиновых состояний. Отрицательные знаки могут тогда появиться в (B.1) в аналогичных выражениях.

Зарядовое сопряжение соответственно своему определению меняет знак третьей компоненты изоспина. Следовательно, U_C и I_3 должны удовлетворять соотношению

$$U_C I_3 U_C^{-1} = -I_3. \tag{B.2}$$

Действие оператора U_C на $I_\pm$ можно определить следующим образом. Преобразованные операторы

$$I_\pm^C = U_C I_\pm U_C^{-1}$$

являются изоспиновыми операторами сдвига для зарядово-сопряженного мультиплета, следовательно, тоже должны подчиняться коммутационным соотношениям для изоспина. Имея это в виду, применим операцию $U_C \ldots U_C^{-1}$ к уравнению

$$I_3 I_\pm - I_\pm I_3 = \pm I_\pm$$

и получим

$$I_3^C I_\pm^C - I_\pm^C I_3^C = \pm I_\pm^C. \tag{B.3}$$

Из (B.2) следует, что

$$I_3^C = -I_3,$$

поэтому (B.3) приобретает вид

$$[I_3, I_\pm^C] = \mp I_\pm^C.$$

Из этого уравнения и из требования о том, что I_-^C и I_+^C должны быть эрмитово-сопряженными операторами, можно сделать вывод:

$$U_C I_\pm U_C^{-1} = I_\pm^C = \alpha I_\mp,$$

где α равно $+1$ или -1. Мы должны условиться относительно выбора α. По причинам, связанным с квантовой теорией поля *, обычно выбирают

$$\alpha = -1,$$

---

* В частности, выбор, сделанный в тексте, соответствует условию, заключающемуся в том, что если оператор поля φ рождает частицу x, то эрмитово-сопря-

так что

$$U_C I_\pm U_C^{-1} = -I_\mp. \tag{B.4}$$

Отметим, что это требует выполнения равенств

$$U_C I_1 U_C^{-1} = -I_1; \tag{B.5а}$$

$$U_C I_2 U_C^{-1} = +I_2. \tag{B.5б}$$

Для нас основным является уравнение (B.4).

Рассмотрим систему нуклон — антинуклон. Положим

$$|p\rangle = \left|N, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle; \quad |n\rangle = \left|N, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \tag{B.6}$$

где, как показано выше, состояния справа являются стандартными состояниями изоспина, для которых выполняется фазовое условие Кондона — Шортли. Из (B.4) следует, что

$$I_+ U_C |p\rangle = -U_C I_- |p\rangle = -U_C I_- \left|N, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle =$$

$$= -U_C \left|N, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = -U_C |n\rangle. \tag{B.7}$$

Если обозначить эффект зарядного сопряжения черточкой сверху характеристики частицы, то

$$U_C |p\rangle = |\bar{p}\rangle, \quad U_C |n\rangle = |\bar{n}\rangle. \tag{B.8}$$

Тогда уравнение (B.7) дает

$$I_+ |\bar{p}\rangle = -|\bar{n}\rangle. \tag{B.9}$$

Из этого выражения ясно, что I_+ имеет отрицательный матричный элемент относительно состояний $|\bar{p}\rangle$ и $|\bar{n}\rangle$.

Аналогично находим

$$I_- U_C |n\rangle = -U_C |p\rangle$$

или

$$I_- |\bar{n}\rangle = -|\bar{p}\rangle.$$

Для определения тех состояний античастицы, для которых выполняется условие Кондона — Шортли, положим

$$\left.\begin{aligned} \left|\bar{N}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle &= -|\bar{n}\rangle; \\ \left|\bar{N}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle &= +|\bar{p}\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{B.10}$$

так что (B.9) приобретает вид

$$I_+ \left|\bar{N}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\bar{N}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$$

женный оператор φ^+ рождает соответствующую античастицу $\bar{x}$ в том же самом состоянии, т. е.

$$|x\rangle = \varphi |\text{ вак}\rangle; \quad |\bar{x}\rangle = \varphi^+ |\text{ вак}\rangle,$$

где $|$вак$\rangle$ означает вакуумное состояние.

и условие Кондона — Шортли удовлетворяется. Знак минус в (В.10) может занимать произвольное положение. Его можно, например, отнести к состоянию $|\bar{p}>$.

Рассмотрим теперь изотриплет π-мезонов. В этом случае оператор U_C связывает частицы в одном и том же мультиплете. Можно было бы проанализировать этот случай, исходя из тех же первых принципов, что и для нуклонов. Это открыло бы все те возможности, которым подчиняются условия для знаков. Вместо этого вернемся к выбранному нами условию для знаков.

Во-первых, отметим, что равенство

$$U_C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle \tag{В.11а}$$

является не условием, а физическим утверждением о том, что зарядовая четность π^0 равна $+1$. Однако в

$$U_C|\pi^+\rangle = +|\pi^-\rangle \tag{В.11б}$$

выберем положительный знак, откуда в силу $U_C^2 = 1$ будет следовать, что

$$U_C|\pi^-\rangle = +|\pi^+\rangle. \tag{В.11б}$$

Из (В.4) находим

$$I_+ U_C|\pi^+\rangle = -U_C I_-|\pi^+\rangle.$$

Таким образом,

$$I_+|\pi^-\rangle = -U_C I_-|\pi^+\rangle. \tag{В.12}$$

Так как, согласно (В.11), U_C имеет положительные матричные элементы относительно состояний $|\pi^+>$, $|\pi^0>$ и $|\pi^->$, то знак минус в (В.12) должен исчезнуть.

Если положить

$$|1, +1\rangle = -|\pi^+\rangle; \quad |1, 0\rangle = |\pi^0\rangle; \quad |1, -1\rangle = |\pi^-\rangle, \tag{В.13}$$

то условие Кондона — Шортли будет удовлетворено для состояний $|I, I_3>$ в левой части равенства. Например,

$$I_+ U_C|\pi^+\rangle = -U_C I_-|\pi^+\rangle$$

или

$$I_+|\pi^-\rangle = +U_C I_-|1, +1\rangle = +2^{1/2} U_C|1, 0\rangle = +2^{1/2}|1, 0\rangle,$$

так что

$$I_+|1, -1\rangle = +2^{1/2}|1, 0\rangle.$$

С K-мезонами можно обращаться по аналогии с нуклонами, но при этом заменить барионное число гиперзарядом. Выберем

$$\left.\begin{aligned} |K^+\rangle &= \left|K, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle; \quad |K^0\rangle = \left|K, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle; \\ |\bar{K}^0\rangle &= -\left|\bar{K}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle; \quad |K^-\rangle = \left|\bar{K}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{В.14}$$

Здесь $|K^-\rangle$ есть $|\bar{K}^+\rangle$, т. е.

$$U_C|K^+\rangle = |K^-\rangle.$$

Последний пример — Σ-гиперон:

$$\left.\begin{aligned} |\Sigma^+\rangle &= -|\Sigma, 1, +1\rangle; \quad |\Sigma^0\rangle = |\Sigma, 1, 0\rangle; \quad |\Sigma^-\rangle = |\Sigma, 1, -1\rangle; \\ |\bar{\Sigma}^-\rangle &= -|\bar{\Sigma}, 1, +1\rangle; \quad |\bar{\Sigma}^0\rangle = |\bar{\Sigma}, 1, 0\rangle; \quad |\bar{\Sigma}^+\rangle = |\bar{\Sigma}, 1, -1\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{В.15}$$

где $|\overline{\Sigma}^{-}>$ обозначает положительно заряженную частицу «антисигма». При таком выборе знаков: а) оператор U_C превращает $|x>$ в $|\overline{x}>$; б) условие (B.4) удовлетворено и в) $I_{\pm}$ имеет положительные матричные элементы относительно $|\Sigma, 1, I_3>$ и $|\overline{\Sigma}, 1, I_3>$.

Физик может задать вопрос: если есть положительный Σ-гиперон, направление движения которого не совпадает с траекторией пучка, можно ли описать его с помощью $|\Sigma^{+}>$, $-|\Sigma^{+}>$ или еще какого-нибудь состояния? Ответ заключается в том, что в случаях, связанных с изоспинами (или с $SU(3)$), мы пытаемся связать свойства разных частиц, например Σ^{+} со свойствами Σ^{0} или $\overline{\Sigma}^{+}$. Если $|\Sigma^{+}>$ представляет собой положительную сигму, находящуюся в заданном пространственно-спиновом состоянии, то $|\Sigma^{0}>$ представляет собой нейтральную сигму, а $|\overline{\Sigma}^{+}>$ — отрицательную антисигму, находящиеся в том же самом пространственно-спиновом состоянии.

Единственная причина введения состояний $|\Sigma, 1, I_3>$ и $|\overline{\Sigma}, 1, I_3>$ заключается в том, что таблицы коэффициентов Клебша — Гордана относятся к тем состояниям, для которых выполнено условие Кондона — Шортли, так что переходы от $|\Sigma^{+}>$ и т. д. к $|\Sigma, 1, I_3>$ должны быть осуществлены прежде всего.

§ B.2. G-четность

Определение оператора G-четности диктуется принятым ранее выбором α, приведшим к (B.4). Так как оператор U_C меняет на обратные знаки I_3 и I_1, то следует произвести компенсирующий поворот изоспина на угол π относительно второй оси. Соответствующий унитарный оператор

$$P_i = \exp(-i\pi I_2). \tag{B.16}$$

Он обладает следующими свойствами:

$$P_i I_1 P_i^{-1} = -I_1; \tag{B.17а}$$

$$P_i I_2 P_i^{-1} = +I_2; \tag{B.17б}$$

$$P_i I_3 P_i^{-1} = -I_3. \tag{B.17в}$$

В корректности этих уравнений можно убедиться, если использовать тот же аргумент, что и в соответствующем случае с моментом количества движения [см. обсуждение, предшествующее (3.63)].

Альтернативно можно дать формальный вывод соотношения (B.17).

Так как операторы P_i играют важную роль в нашем обсуждении $SU(3)$, мы это сделаем. Искусственный прием заключается сначала в работе с

$$P_i(\beta) = \exp(-i\beta I_2),$$

в которых лишь в конце полагаем $\beta = \pi$. Рассмотрим оператор, зависящий от β:

$$F(\beta) = \exp(-i\beta I_2)\, I_1 \exp(+i\beta I_2).$$

Его можно продифференцировать по β и получить

$$\frac{dF}{d\beta} = \exp(-i\beta I_2)(-iI_2)\, I_1 \exp(i\beta I_2) + \exp(-i\beta I_2)\, I_1 (+iI_2) \exp(i\beta I_2).$$

Порядок I_2 и экспоненциальной функции по I_2 здесь не существен. Таким образом,

$$\frac{dF}{d\beta} = i \exp(-i\beta I_2)\,[I_1, I_2] \exp(i\beta I_2) = -\exp(-i\beta I_2)\, I_3 \exp(i\beta I_2).$$

Теперь определим

$$K(\beta) = \exp(-i\beta I_2)\, I_3 \exp(i\beta I_2).$$

Таким образом,

$$dF/d\beta = -K(\beta). \tag{B.18}$$

Дифференцируя K, с помощью аналогичной процедуры находим

$$dK/d\beta = F(\beta). \tag{B.19}$$

Пара дифференциальных уравнений первого порядка (B.18) и (B.19) должна быть решена с начальными условиями

$$F(\beta = 0) = I_1; \quad K(\beta = 0) = I_3.$$

Непосредственно из них следует:

$$F(\beta) = I_1 \cos\beta - I_3 \sin\beta; \quad K(\beta) = I_1 \sin\beta + I_3 \cos\beta.$$

Подставляя $\beta = \pi$, получаем нужные нам соотношения (B.17а) и (B.17в).

Из (B.17) имеем закон преобразования операторов сдвига

$$P_i I_\pm P_i^{-1} = -I_\mp. \tag{B.20}$$

Теперь определим оператор G-четности:

$$U_G = U_C \exp(-i\pi I_2) = \exp(-i\pi I_2)\, U_C.$$

Обратный оператор есть

$$U_G^{-1} = \exp(i\pi I_2)\, U_C^{-1} = \exp(i\pi I_2)\, U_C.$$

С помощью (B.4) и (B.20) можно показать, что

$$U_G I_\pm U_G^{-1} = U_C \exp(-i\pi I_2)\, I_\pm \exp(i\pi I_2)\, U_C^{-1} = U_C(-I_\mp) U_C^{-1} = +I_\pm.$$

Аналогично, используя (B.2) и (B.17б), находим

$$U_G I_3 U_G^{-1} = +I_3.$$

Таким образом, U_G коммутирует с алгеброй изоспиновых операторов $I_\pm$ и I_3 и, значит, собственные состояния G-четности и изоспина существуют одновременно.

Отметим, что

$$U_G^2 = U_C \exp(-i\pi I_2)\, U_C \exp(-i\pi I_2) = U_C^2 \exp(-2\pi i I_2).$$

Так как $U_C^2 = 1$, имеем

$$U_G^2 = \exp(-2\pi i I_2) = (-1)^{2I}. \tag{B.21}$$

Это равенство получается потому, что так же, как и для обычного момента колнчества движения, в случае нзоспина поворот на 2π оставляет вектор состояния нензменным нли умножает его на -1 в соответствии с тем, является ли полный изоспин I целым или полуцелым чнслом.

Вернемся к условню: если в (B.4) выбрать $\alpha = +1$, то в определении U_G потребуется ввести $\exp(-i\pi I_1)$. Этот выбор сделан Челленом [111]. Смешнванне обонх условий приводит к противоположным G-четностям заряженных н нейтральных пнонов (Фрезер [79]). Хотя это не сказывается на физнческнх следствнях, концепция G-четности теряет свою простоту.

§ B.3. Фазовые условия в $SU(3)$

Как мы уже видели, из одновременной ннварнантностн относительно I- и U-спинов можно получнть важные следствня для $SU(3)$-инварнантности. Обеимн ннвариантностямн относнтельно легко манипулировать, так как они требуют только знания алгебры момента количества движения. Мы выберем

U-, а не V-спин, так как электромагнетизм сохраняет U-спин. С этой точки зрения распространение фазового условия Кондона — Шортли на условие, выдвинутое в п. 10.3.4, вполне естественно.

Фазовое условие в SU(3): матричные элементы $I_\pm$ и $U_\pm$ должны быть вещественными и положительными.

Преимуществом этого условия является то, что расчеты, выполненные с помощью техники U- и I-спинов и $SU(2)$-коэффициентов Клебша — Гордана, точно согласуются с расчетами, выполненными целиком с помощью $SU(3)$-коэффициентов Клебша — Гордана.

Аналогично правило (B.4) действия оператора U_C на операторы I-спина можно распространить и на U-спин. Таким образом,

$$U_C U_\pm U_C^{-1} = -U_\mp.$$

Знак справа опять выбран условно.

Для супермультиплетов кварков 3 и антикварков 3* можно проверить, что наше $SU(3)$-фазовое условие удовлетворяется для стандартных состояний, определяемых следующим образом:

$$|3 + 1/3,\ 1/2,\ +1/2\rangle = |u\rangle;\quad |3^*,\ +2/3,\ 0,\ 0\rangle = |\bar{s}\rangle;$$

$$|3,\ +1/3,\ 1/2,\ -1/2\rangle = |d\rangle;\quad |3^*,\ -1/3,\ 1/2,\ +1/2\rangle = -|\bar{d}\rangle;$$

$$|3,\ -2/3,\ 0,\ 0\rangle = |s\rangle,\quad |3^*,\ -1/3,\ 1/2,\ -1/2\rangle = |\bar{u}\rangle.$$

Здесь условие просто распространено на случай мультиплетов изоспинов и проверено для U-спина.

Стандартные состояния октетов барионов и мезонов выбраны так, чтобы они согласовались с условиями, принятыми для соответствующих мультиплетов изоспинов. Они приводятся в табл. B.1.

Таблица B.1

Определение стандартных $SU(3)$-состояний барионных и мезонных октетов

$\|8, Y, I, I_3\rangle$	Мезон	Барион	Антибарион
$\|8, +1, 1/2, +1/2\rangle$	$\|K^+\rangle$	$\|p\rangle$	$-\|\overline{\Xi^-}\rangle$
$\|8, +1, 1/2, -1/2\rangle$	$\|K^0\rangle$	$\|n\rangle$	$\|\overline{\Xi^0}\rangle$
$\|8, 0, 1, +1\rangle$	$-\|\pi^+\rangle$	$-\|\Sigma^+\rangle$	$-\|\overline{\Sigma^-}\rangle$
$\|8, 0, 1, 0\rangle$	$\|\pi^0\rangle$	$\|\Sigma^0\rangle$	$\|\overline{\Sigma^0}\rangle$
$\|8, 0, 1, -1\rangle$	$\|\pi^-\rangle$	$\|\Sigma^-\rangle$	$\|\overline{\Sigma^+}\rangle$
$\|8, 0, 0, 0\rangle$	$\|\eta^0\rangle$	$\|\Lambda^0\rangle$	$\|\overline{\Lambda^0}\rangle$
$\|8, -1, 1/2, +1/2\rangle$	$-\|\overline{K^0}\rangle$	$\|\Xi^0\rangle$	$-\|\overline{n}\rangle$
$\|8, -1, 1/2, -1/2\rangle$	$\|K^-\rangle$	$\|\Xi^-\rangle$	$\|\overline{p}\rangle$

К сожалению, обычно используемое условие де Сварта [57] требует (в наших обозначениях), чтобы $I_\pm$ и $V_\pm$ имели положительные матричные элементы. Отрицательные знаки в коммутационных соотношениях (10.14) препятствуют одновременной положительности матричных элементов всех шести операторов.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА ДЛЯ 8×8

Приведем коэффициенты Клебша — Гордана для произведения 8×8 в виде выражений для двухчастичных состояний $|N, Y, I, I_3\rangle$ с определенными полными Y, I и I_3, принадлежащих супермультиплету $N=27$, 10, 10^*, 8_A, 8_S или 1.

Системы барион — мезон уже использовались раньше в качестве конкретного примера, но полученные результаты, конечно, применимы к любым двум октетам при соответствующем изменении обозначений.

Символ $[BM]$ в правой части обозначает состояние двух частиц B и M с определенным значением полного изоспина I и I_3, заданных вектором состояния в левой части. Коэффициенты перед символами $[BM]$ являются как раз изоскалярными множителями.

Состояние $[BM]$ можно записать явно с помощью изоспиновых коэффициентов Клебша — Гордана, приведенных в табл. 3.2—3.4, и, если необходимо, используя выражение (3.107). При этом надо использовать соотношения между состояниями частиц и стандартными состояниями изоспина, приведенные в приложении В. Например, для $|27, -1, 1/2, +1/2\rangle$ расчет дает

$$[\Sigma\overline{K}] = \sum_{I_3 I_3'} C^{1/2+1/2}_{1I_3,1/2I_3'} |\Sigma, 1, I_3\rangle |\overline{K}, 1/2, I_3'\rangle =$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |\Sigma, 1, 0\rangle |\overline{K}, 1/2, +1/2\rangle + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |\Sigma, 1, +1\rangle |\overline{K}, 1/2, -1/2\rangle =$$

$$= +\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |\Sigma^0\rangle |\overline{K}^0\rangle - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |\Sigma^+\rangle |K^-\rangle.$$

Как уже отмечалось в приложении В, наши условия отличаются от условий де Сварта. Отличие состоит в изменении знаков некоторых изоскалярных множителей. Крестик, добавленный в таблицах к символу $[BM]$, означает, что предшествующий ему изоскалярный множитель имеет противоположный знак, если используется условие де Сварта [57]

Барион-мезонные состояния супермультиплета 27:

$$|27, +2, 1, I_3\rangle = [NK];$$

$$|27, +1, 3/2, I_3\rangle = (1/2)^{1/2}[N\pi] + (1/2)^{1/2}[\Sigma K];$$

$$|27, +1, 1/2, I_3\rangle = -(1/20)^{1/2}[N\pi]^+ + (1/20)^{1/2}[\Sigma K]^+ + (9/20)^{1/2}[\Lambda K] + (9/20)^{1/2}[N\eta];$$

$$|27, 0, 2, I_3\rangle = [\Sigma\pi];$$

$$|27, 0, 1, I_3\rangle = (1/5)^{1/2}[N\overline{K}] + (1/5)^{1/2}[\Xi K] + (3/10)^{1/2}[\Sigma\eta] + (3/10)^{1/2}[\Lambda\pi];$$

$$|27, 0, 0, 0\rangle = -(3/20)^{1/2}[N\overline{K}]^+ + (3/20)^{1/2}[\Xi K]^+ - (1/40)^{1/2}[\Sigma\pi] + (27/40)^{1/2}[\Lambda\eta];$$

$$|27, -1, 3/2, I_3\rangle = (1/2)^{1/2}[\Sigma\overline{K}] + (1/2)^{1/2}[\Xi\pi];$$

$$|27, -1, 1/2, I_3\rangle = (1/20)^{1/2}[\Sigma\overline{K}]^+ + (1/20)^{1/2}[\Xi\pi]^+ + (9/20)^{1/2}[\Lambda\overline{K}] + (9/20)^{1/2}[\Xi\eta];$$

$$|27, -2, 1, I_3\rangle = [\Xi\overline{K}].$$

Барион-мезонные состояния супермультиплета 10^*:

$$|10^*, +2, 0, 0\rangle = [NK]^+;$$

$$|10^*, +1\ \ 1/2, I_3\rangle = \frac{1}{2}[N\pi]^+ + \frac{1}{2}[\Sigma K]^+ + \frac{1}{2}[N\eta] - \frac{1}{2}[\Lambda K];$$

$$|10^*, 0, 1, I_3\rangle = (1/6)^{1/2}[N\bar{K}] + (1/6)^{1/2}[\Sigma\pi]^+ + \frac{1}{2}[\Sigma\eta] - \frac{1}{2}[\Lambda\pi] - (1/6)^{1/2}[\Xi K];$$

$$|10^*, -1, 3/2, I_3\rangle = (1/2)^{1/2}[\Sigma\bar{K}] - (1/2)^{1/2}[\Xi\pi].$$

Барион-мезонные состояния супермультиплета 10:

$$|10, +1, 3/2, I_3\rangle = (1/2)^{1/2}[N\pi]^+ - (1/2)^{1/2}[\Sigma K]^+;$$

$$|10, 0, 1, I_3\rangle = (1/6)^{1/2}[N\bar{K}]^+ + (1/6)^{1/2}[\Sigma\pi] - \frac{1}{2}[\Sigma\eta]^+ + \frac{1}{2}[\Lambda\pi]^+ - (1/6)^{1/2}[\Xi K];$$

$$|10, -1, 1/2, I_3\rangle = \frac{1}{2}[\Sigma\bar{K}] + \frac{1}{2}[\Xi\pi] - \frac{1}{2}[\Xi\eta]^+ + \frac{1}{2}[\Lambda\bar{K}]^+;$$

$$|10, -2, 0, 0\rangle = [\Xi\bar{K}].$$

Барион-мезонные состояния супермультиплета 8_S:

$$|8_S, +1, 1/2, I_3\rangle = (9/20)^{1/2}[N\pi] - (9/20)^{1/2}[\Sigma K] + (1/20)^{1/2}[\Lambda K]^+ + (1/20)^{1/2}[N\eta]^+;$$

$$|8_S, 0, 1, I_3\rangle = (6/20)^{1/2}[N\bar{K}]^+ + (6/20)^{1/2}[\Xi K]^+ - (1/5)^{1/2}[\Sigma\eta]^+ - (1/5)^{1/2}[\Lambda\pi]^+;$$

$$|8_S, 0, 0, 0\rangle = (1/10)^{1/2}[N\bar{K}] - (1/10)^{1/2}[\Xi K] + (6/10)^{1/2}[\Sigma\pi]^+ + (2/10)^{1/2}[\Lambda\eta]^+;$$

$$|8_S, -1, 1/2, I_3\rangle = (9/20)^{1/2}[\Sigma\bar{K}] - (9/20)^{1/2}[\Xi\pi] + (1/20)^{1/2}[\Lambda\bar{K}]^+ + (1/20)^{1/2}[\Xi\eta]^+.$$

Барион-мезонные состояния супермультиплета 8_A:

$$|8_A, +1, 1/2, I_3\rangle = \frac{1}{2}[N\pi] - \frac{1}{2}[N\eta]^+ + \frac{1}{2}[\Sigma K] + \frac{1}{2}[\Lambda K]^+;$$

$$|8_A, 0, 1, I_3\rangle = -(1/6)^{1/2}[N\bar{K}]^+ + (2/3)^{1/2}[\Sigma\pi] + (1/6)^{1/2}[\Xi K]^+;$$

$$|8_A, 0, 0, 0\rangle = (1/2)^{1/2}[N\bar{K}] + (1/2)^{1/2}[\Xi K];$$

$$|8_A, -1, 1/2, I_3\rangle = \frac{1}{2}[\Sigma\bar{K}] + \frac{1}{2}[\Xi\pi] - \frac{1}{2}[\Lambda\bar{K}]^+ + \frac{1}{2}[\Xi\eta]^+.$$

Барион-мезонные состояния супермультиплета 1:

$$|1, 0, 0, 0\rangle = \frac{1}{2}[N\bar{K}] - \frac{1}{2}[\Xi K] - (3/8)^{1/2}[\Sigma\pi]^+ + (1/8)^{1/2}[\Lambda\eta]^+.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Кроме обычных ссылок на литературные источники будем обращаться иногда к «Обзору свойств частиц», чтобы получить какие-либо среднестатические данные или выбрать стандартные обозначения. Этот обзор составляется членами «Группы данных по частицам» и печатается ежегодно в апреле преимущественно в таких журналах, как «Reviews of Modern Physics», «Physics Letters». В частности, сошлемся на два из них: «Rev. Mod. Phys.», 1973, v. 45, N 2, p. 2; «Phys. Lett.», 1974, v. 50B, N 1. «Rev. Mod. Phys.», 1976, v. 48, N 2, part 2; Supplement to «New Particles»; «Phys. Lett.», 1977, v. 68B, N 1.

1. **Abashian A., Hafner E. M.** «Phys. Rev. Lett.», 1958, v. 1, p. 255.
2. **Abov Yu. G., Krupchitskii P. A., Bulgakov M. I. e. a.** «Phys. Lett.», 1968, v. 27B, p. 16.
3. **Абов Ю. Г., Крупчицкий П. А., Оратовский Ю. А.** «Ядерная физика», 1965, т. 1, с. 479.
4. **Adair R. K.** «Phys. Rev.», 1955, v. 100, p. 1540.

4a. **Aidzu.** Proc. Intern. Conf. of Theor. Physics, Kyoto and Tokyo, 1953, p. 200.

5. **Aizenberg-Selove F., Lauritsen T.** «Nucl. Phys.», 1968, v. A114, p. 1.
6. **Alff C., Gelfand N., Nauenberg U. e. a.** «Phys. Rev.»,1965, v. 137B, p. 1105.
7. **Алиханов А. И., Галактионов Ю. В., Городков Ю. В. и др.** «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 38, с. 1918.
8. **Ayres D. S., Cormack A. M., Greenberg A. J. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p.261.
9. **Backenstoss G., Hyams B. D., Knop G. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 6, p. 415.
10. **Bailey J., Barti W., Bochmann G. e. a.** «Phys. Lett.», 1968, v. B28, p. 287.
11. **Baird J. K., Miller P. D., Dress W. B. e. a.** «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1285.
12. **Baltay C., Barash N., Franzini P. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 591.
13. **Baltay C., Franzini P., Kim J. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 1224.
14. **Bardon M., Franzini P., Lee J.** «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 23.
15. **Bardon M., Norton P., Peoples J. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 449.
16. **Barnes V. E., Connoly P. L., Crennell D. J. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 12, p. 204.
17. **Beg M. A. B., Lee B. W., Pais A.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 514.
18. **Behrends F.** In: Loebl ed. «Group Theory». V. 2. N. Y., Academic Press, 1968.
19. **Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C. e. a.** «Rev. Mod. Phys.», 1962, v. 34, p. 1.
20. **Bell J. S., Mandl F.** «Proc. Phys. Soc.», 1958, v. A71, p. 273.
21. **Bell J. S., Mandl F.** «Proc. Phys. Soc.», 1958, v. A71, p. 867.
22. **Bell J. S., Steinberger J.** Oxford International Conference on Elementary Particles, Proceedings, 1966, Chilton, Rutherford High Energy Laboratory.
23. **Berman S.** In: A. Zichichi ed. Symmetries in Particle Physics. N. Y., Academic Press, 1965.
24. **Bernstein J., Feinberg G., Lee T. D.** «Phys. Rev.», 1965, v. 139B, p. 1650.
25. **Bilenky S. M.** «Nuovo cimento», 1958, v. 10, p. 1049.

26. **Bilenky S. M., Ryndin R. M.** «Phys. Lett.», 1965, v. 18, p. 346.
27. **Блат Дж., Вайскопф В.** Теоретическая ядерная физика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
28. **Block M. M., Lendinary L., Monari L.** Proc. of the Annual International High Energy Physics Conference. Geneva, CERN, 1962, p. 371.
29. **Bock P., Schopper H.** «Phys. Lett.», 1965, v. 16, p. 284.
30. **Bodansky D., Braithwaite W. J., Shreve D. C. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 589.
31. **Bodansky D., Eccles S. F., Farwell G. W. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 101.
32. **Boehm F., Kankeleit E.** «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 312.
33. **Bott-Bodenhausen M., Cladwell D. O., Fabian C. W. e. a.** «Phys. Lett.», 1972, v. 40B, p. 693.
34. **Burgy M. T., Krohn V. E., Novey T. B. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1958, v. 1, p. 324.
35. **Byers N., Burkhardt H.** «Phys. Rev.», 1961, v. 121, p. 281.
36. **Byers N., Fenster S.** «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 11, p. 52.
37. **Calaprice F. P., Commins E. D., Gibbs H. M. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 918.
38. **Camerini U., Hautman R. L., March R. L. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 14, p. 989.
39. **Carruthers P.** Introduction to Unitary Symmetry. N. Y., Interscience, 1966.
40. **Cartwright W. F., Richman C., Whitehead N. M. e. a.** «Phys. Rev.», 1953, v. 91, p. 677.
41. **Chamberlain O., Segre E., Tripp R. e. a.** «Phys. Rev.», 1954, v. 93, p. 1430.
42. **Chen J. R., Sanderson J., Appel J. A. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 1279.
43. **Cheston W. B.** «Phys. Rev.», 1951, v. 83, p. 1118.
44. **Christ N., Lee T. D.** «Phys. Rev.», 1966, v. 143, p. 1310.
45. **Christ N., Lee T. D.** «Phys. Rev.», 1966, v. 148, p. 1520.
46. **Christensen J. H., Cronin J. W., Fitch V. L. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 138.
47. **Cnops A. M., Finocchiaro G., Lassalle J. C. e. a.** «Phys. Lett.», 1966, v. 22, p. 546.
48. **Coleman S.** In: Trieste Seminar on High Energy Physics and Elementary Particles. Vienna, IAEA, 1965.
49. **Coleman S.** In: A. Zichichi ed. Strong and Weak Interactions, Present Problems. N. Y., Academic Press, 1966.
50. **Courant H., Filthuth H., Franzini P. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 10, p. 409.
51. **Crauford Jr. F. S., Cresti M., Good M. I. e. a.** «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 1102.
52. **Cronin J. W., Overseth O. E.** «Phys. Rev.», 1963, v. 129, p. 1795.
53. **Culligan G., Frank S. G. F., Holt J. R. e. a.** «Nature», 1957, v. 180, p. 751.
54. **Dalitz R. H.** «Proc. Phys. Soc.», 1952, v. A65, p. 175.
55. **Dalitz R. H.** Strange Particles and Strong Interactions. Bombay, Oxford University Press for Tata Institute, 1962.
56. **Dalitz R. H., Horgan R.** «Nucl. Phys.», 1973, v. B66, p. 135; See also **Horgan R.** «Nucl. Phys.», 1974, v. B71, p. 514.
57. **De Swart J. J.** «Rev. Mod. Phys.», 1963, v. 35, p. 916.
58. **Dieterle B. D., Arens J. F., Chamberlain O. e. a.** «Phys. Rev.», 1968, v. 167, p. 1191.
59. **Dobrzynski L., Xuong N. A., Montanet L. e. a.** «Phys. Lett.», 1966, v. 22, p. 105.
60. **Dress W. B., Baird J. K., Miller P. D. e. a.** «Phys. Rev.», 1968, v. 170, p. 1200.
61. **Dress W. B., Miller P. D., Ramsey N. F.** «Phys. Rev.», 1973, v. D7, p. 3147.
62. **Durbin R., Loar H., Steinberger J.** «Phys. Rev.», 1951, v. 81, p. 894.
63. **Edmonds A. R.** Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton University Press, 1957.
64. **Eisler F., Plano R., Prodell A. e. a.** «Nuovo cimento», 1958, v. 7, p. 222.
65. **Faiman D., Hendri A. W.** «Phys. Rev.», 1968, v. 173, p. 1720.

66. **Faiman D., Hendri A. W.** «Phys. Rev.», 1969, v. 180, p. 1572.
67. **Federman P., Rubinstein H. R., Talmi I.** «Phys. Lett.», 1966, v. 22, p. 208.
68. **Feinberg G.** «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 1019.
69. **Feinberg G.** «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 640.
70. **Feinberg G.** «Phys. Rev.», 1965, v. 140B, p. 1413.
71. **Feldman G., Fulton T.** «Nucl. Phys.», 1958, v. 8, p. 106.
72. **Feldman G., Matthews P. T.** «Ann. Phys.», 1965, v. 31, p. 469.
73. **Fermi E.** «Nuovo cimento. Suppl.», 1955, v. 2, p. 17.
74. **Fermi E., Yang C. N.** «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 1739.
75. **Feynman R. P., Gell-Mann M.** «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 193.
76. **Feynman R. P., Kislinger M., Ravndal F.** «Phys. Rev.», 1971, v. D3, p. 2706.
77. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.** Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики. Пер. с англ. Под ред. Я. А. Смородинского. М., «Мир», 1965, гл. 11.
78. **Fraunfelder H., Bobone R., von Goeler E. e. a.** «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 386.
79. **Frazer W. R.** Elementary Particles. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. Y., 1966, p. 39, 40.
80. **Friedman J. I., Telegdi V.** «Phys. Rev.», 1957, v. 105, p. 1681.
81. **Garwin R. L., Lederman L., Weinrich M.** «Phys. Rev.», 1957, v. 105, p. 1415.
82. **Gasiorowicz S.** Elementary Particle Physics. N. Y., John Wiley and Sons, 1966.
83. **Gatto R.** «Phys. Rev.», 1957, v. 109, p. 610.
84. **Gell-Mann M.** California Institute of Technology, Synchrotron Lab. Report CTSL-20, 1961; см. в сб.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1964, с. 117.
85. **Gell-Mann M.** «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 1067.
86. **Gell-Mann M.** «Phys. Lett.», 1964, v. 8, p. 214.
87. **Gell-Mann M., Ne'eman Y.** The Eightfold Way. N. Y., Benjamin, 1964.
88. **Glasser R. G., Kehol B., Engelmann P. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 603.
89. **Goldhaber M.** Annual International Conference on High Energy Physics. Geneva, CERN, 1958, p. 233.
90. **Goldhaber M., Grodzins L., Sunyar A. W.** «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 1015.
91. **Golub R., Pendlebury J. M.** «Contemp. Phys.», 1972, v. 13, p. 519.
92. **Gourdin M.** Unitary Symmetries and Their Applications to High Energy Physics. Amsterdam, North-Holland, 1967.
93. **Grawert G., Luders G., Rollnik H.** «Fortschritt. Physik», 1959, Bd 7, S. 291.
94. **Greenberg O. W.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 598.
95. **Grodzins L., Genovese F.** «Phys. Rev.», 1961, v. 121, p. 228.
96. **Gursey F., Radicati L. A.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 173.
97. **Harari H.** In: J. Prentki and J. Steinberger eds. Proc. 14th International Conference on High Energy Physics, Geneva, CERN, 1968.
98. **Хаммермеш М.** Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Пер. с англ. М., «Мир», 1966.
99. **Hamilton W. D.** «Progr. Nucl. Phys.», 1968, v. 10, p. 1.
100. **Heisenberg W.** «Z. Physik», 1932, Bd 77, S. 1.
101. **Henley E. M.** «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1969, v. 19, p. 367.
102. **Henley E. M., Jacobson B. A.** «Phys. Rev.», 1959, v. 113, p. 225, 234.
103. **Hillman P., Johansson A., Tibell G.** «Phys. Rev.», 1958, v. 110, p. 1218.
104. **Hwang C. F., Ophel T. R., Thorndike E. H. e. a.** «Phys. Rev.», 1960, v. 119, p. 352.
105. **Ikeda M., Ogawa S., Ohnuki Y.** «Progr. Theor. Phys.», 1959, v. 22, p. 715.
106. **Ikeda M., Ogawa S., Ohnuki Y.** «Progr. Theor. Phys. Suppl.», 1961, v. 19, p. 44.
107. **Inglis D. R.** «Rev. Mod. Phys.», 1953, v. 25, p. 390.
108. **Jacob M., Wick G. C.** «Ann. Phys.», 1959, v. 7, p. 404.
109. **Jones D. P., Murphy P. G., O'Neill P. L.** «Proc. Phys. Soc.», 1958, v. A72, p. 429.
110. **Kabir P.** The CP Puzzle: Strange Decays of the Neutral Kaon. London, Academic Press, 1968.

111. **Källen G.** Elementary Particle Physics. Reading, Mass, Addison-Wesley, 1964.
112. **Koch W.** CERN Yellow Report 64-13, 1964, v. 2.
113. **Kokkedee J. J. J.** The Quark Model, N. Y., Benjamin, 1969.
114. **Landau L. D.** «Nucl. Phys.», 1957, v. 3, p. 127.
115. **Lander R. L., Powell W. M., White H. S.** «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 236.
116. **Layter J. G., Appel J. A., Kotlewski A. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 29, p. 316.
117. **Lee T. D., Oehme R., Yang C. N.** «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 340.
118. **Lee T. D., Wolfenstein L.** «Phys. Rev.», 1965, v. 138B, p. 1490.
119. **Lee T. D., Wu C. S.** «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1966, v. 16, p. 471.
120. **Lee T. D., Yang C. N.** «Phys. Rev.», 1956, v. 104, p. 254.
121. **Lee T. D., Yang C. N.** «Nuovo cimento», 1956, v. 3, p. 749.
122. **Lee T. D., Yang C. N.** «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 1645.
123. **Lee T. D., Yang C. N.** «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 1755.
124. **Leitner J., Nordin Jr. P., Rosenfeld A. H. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 238.
125. **Levi-Setti R.** In: G. von Dardel ed. Proc. of the Lund Intern. Conf. on Elementary Particles, Lund, Institute of Physics, 1969.
126. **Lipkin H.** «Phys. Reports», 1973, v. 8C, p. 173.
127. **Лобашов В. М., Назаренко В. А., Саенко Л. Ф. и др.** «Письма ЖЭТФ», 1966, т. 3, с. 76.
128. **Lobkowicz F., Mellssinos A. C., Nagashima Y. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 548.
129. **Low F. E.** In: Particle Symmetries and Axiomatic Field Theory (1965 Brandeis Summer Institute Lectures). N. Y., Gordon and Breach, 1966, v. 2.
130. **Luders G.** «Kgl. danske vid. selskab mat.-fys. medd.», 1954, v. 28, N 5.
131. **Luders G., Zumino B.** «Phys. Rev.», 1957, v. 106, p. 385.
132. **Macq P. C., Growe K. M., Haddock R. P.** «Phys. Rev.», 1957, v. 112, p. 2061.
133. **Maglic B. C., Kalbfleisch G. R., Stevenson M. L.** «Phys. Rev. Lett.», 1961, v. 7, p. 137.
134. **Mandl F.** Quantum Mechanics. London, Butterworths, 1957.
135. **Marshak R. E.** «Phys. Rev.», 1951, v. 82, p. 313.
136. **Matthews P. T.** In: E. H. S. Burhop ed. High Energy Physics. V. 1. N. Y., Academic Press, 1967.
137. **Meyer S. L., Anderson E. W., Bleser E. e. a.** «Phys. Rev.», 1963, v. 132, p. 2693.
138. **Michel L.** «Nuovo cimento», 1953, v. 10, p. 319.
139. **Miller P. D., Dress W. B., Baird J. K. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 381.
140. **Morpurgo G.** «Physics», 1965, v. 2, p. 95.
141. **Mott N. F.** «Proc. Roy. Soc.», 1929, v. A124, p. 425, appendix.
142. **Ne'eman Y.** «Nucl. Phys.», 1962, v. 26, p. 222.
143. **Okubo S.** «Progr. Theor. Phys.», 1962, v. 27, p. 949.
144. **Pais A.** «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 242.
145. **Pais A.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 175.
146. **Pais A.** «Rev. Mod. Phys.», 1966, v. 38, p. 215.
147. **Паули В.** В кн.: Нильс Бор и развитие физики. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
148. **Player M. A., Sanders P. G. H.** «J. Phys.», 1970, v. C3, p. 1620.
149. **Racah G.** Ergebn. exact Naturwiss., 1965, v. 37, p. 38 (Reprint of 1951 Princeton Lectures).
150. **Rich A., Crane H. R.** «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 271.
151. **Roper L. D., Wright R. M.** «Phys. Rev.», 1965, v. 138B, p. 921.
152. **Rose M. E.** Elementary Theory of Angular Momentum. N. Y., John Wiley and Sons, 1957.
153. **Rosen L., Brolley Jr. J. E.** «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 2, p. 98.
154. **Rowe E. G. P., Squires E. J.** «Rep. Progr. Phys.», 1969, v. 32, p. 273.
155. **Sakata S.** «Progr. Theor. Phys.», 1956, v. 16, p. 686.
156. **Sakita B.** «Phys. Rev.», 1964, v. 136, p. 1756.

157. **Samios N. P., Goldberg M., Meadows B. T.** «Rev. Mod. Phys.», 1974, v. 46, p. 49.
158. **Sanders P. G. H.** «Proc. Phys. Soc.», 1968, v. B1, p. 499.
159. **Schiff L. I.** Quantum Mechanics. N. Y., McGraw-Hill, 1968.
160. **Schubert K. R., Wolff B., Chollet J. C. e. a.** «Phys. Lett.», 1970, v. 31B, p. 662.
161. **Shull G. G., Nathans R.** «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 384.
162. **Smith J. H., Purcell E. M., Ramsey N. F.** «Phys. Rev.», 1957, v. 108, p. 120.
163. **Смородинский Я. А.** «Успехи физ. наук», 1964, т. 84, № 1, с. 3.
164. **Stein T. S., Carrico J. P., Lipworth E. e. a.** «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 39.
165. **Steinberger J.** CERN Yellow Report 70-1, 1970.
166. **Стритер Р., Вайтман А.** *PCT*, спин и статистика и все такое. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
167. **Tanner N.** «Phys. Rev.», 1957, v. 107, p. 1203.
168. **Thomas L. H.** «Nature», 1926, v. 117, p. 514.
169. **Thomas L. H.** «Philos. Mag.», 1927, v. 3, p. 1.
170. **Thornton S. T., Jones G. M., Bair J. K. e. a.** «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 447.
171. **Thrall R. M.** «Duke Math. J.», 1941, v. 8, p. 611.
172. **Treiman S. B.** «Phys. Rev.», 1959, v. 113, p. 355.
173. **Tripp R. D.** «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1965, v. 15, p. 325.
174. **Ueda Y., Okubo S.** «Nucl. Phys.», 1963, v. 49, p. 345.
175. **Van Royen R., Weisskopf V. F.** «Nuovo cimento», 1967, v. 50A, p. 617.
176. **Von Witsch W., Richter A., Brentano P.** «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 524.
177. **Watson K. M.** «Phys. Rev.», 1954, v. 95, p. 228.
178. **Weitkamp W. G., Storm D. W., Shreve D. C. e. a.** «Phys. Rev.», 1968, v. 165, p. 1233.
179. **Weyers J.** Lectures at the Louvian Summer School, 1973, CERN Report TH. 1743.
180. **Wigner E. P.** «Z. Phys.», 1927, Bd 43, S. 624; erratum v. 45, p. 601.
181. **Wigner E. P.** «Göttinger Nachr.», 1932, S. 546.
182. **Wigner E. P.** «Phys. Rev.», 1937, v. 51, p. 106.
183. **Wigner E. P.** Ann. Math.», 1939, v. 40, p. 149.
184. **Wilkinson D. H.** «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 1603.
185. **Wolfenstein L.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 562.
186. **Wolfenstein L.** «Nuovo cimento», 1966, v. 42, p. 17.
187. **Wolfenstein L., Ashkin J.** «Phys. Rev.», 1952, v. 85, p. 947.
188. **Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W. e. a.** «Phys. Rev.», 1957, v. 105, p. 1413.
189. **Wu T. T., Yang C. N.** «Phys. Rev. Lett.», 1964, v. 13, p. 380.
190. **Xuong N. H., Lynch G. R., Hinrichs C. K.** «Phys. Rev.», 1961, v. 124, p. 575.
191. **Zulkarneev R. Yu., Kiselev V. S., Nadezhdin V. S. e. a.** «Rev. Mod. Phys.», 1967, v. 39, p. 509.
192. **Zweig G.** CERN Reports TH401 and TH412, 1964.
193. **Zweig G.** In: A Zichichi ed. Symmetries in Elementary Particle Physics. N. Y., Academic Press, 1965.

ДОПОЛНЕНИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Baird P. E. G. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1977, v. 39, p. 798.
Bouchiat M. A., Bouchiat C. C. «Phys. Lett.», 1974, v. 48B, p. 111.
Gaillard M. K., Lee B. W., Rosner J. L. «Revs Mod. Phys.», 1975, v. 47, p. 277.
Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L. «Phys. Rev.», 1970, v. D2, p. 1285.
Greenberg O. W., Nelson C. A. «Phys. Rev.», 1977, v. 32C, p. 69.
Han M. Y., Nambu Y. «Phys. Rev.», 1965, v. 139B, p. 1006.
Jackson J. D. Proceedings of the SLAC Summer Institute on Particle Physics, 1976. Report SLAC-198, p. 147.
Kriplovich I. B. «JETP Lett.», 1974, v. 20, p. 686.
Lewis L. L. e. a. «Phys. Rev. Lett.», 1977, v. 39, p. 795.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адрон 9
Аксиальный вектор 115
Активная интерпретация преобразования 22, 42, 73, 105
Алгебра Ли 235
Амплитуда вероятности 14, 18
Амплитуды парциальных волн 96
— перехода 31, 90, 170
— реакции 16
Анализ по парциальным волнам 88
Анализ Эдера 100
Антинейтрино 150, 151; см. также Нейтрино
Антиунитарный оператор 168—217
Асимметрия лево-право 143, 189
Ассоциированное рождение 201

Базис 13
Бозон 9
Барионные резонансы в кварковой модели 294—303
— — в схеме $SU(3)$ 255—257
Барионное число 199—203
— — и группа $SU(3)$ 238
— — и зарядовое сопряжение 208, 227
— — и модель Сакаты 252
— — и обобщенный принцип Паули 230
Безмассовые частицы, квантовое описание 73
Бета-распад и несохранение четности 149
— кварков 311
— симметрии 217
Бра-вектор 15
Буст 67, 105

Валентные кварки 311
Вектор поляризации 320
Вес 242—253, 269—271
Весовая диаграмма 242
Взаимодействие гравитационное 10
— сверхслабое 221
— сильное 10, 11
— слабое 10, 11
— очень сильное 258
— умеренно сильное 258, 279
— электромагнитное 10, 11
— в конечном состоянии 171, 183, 220
Вигнеровское вращение 103—108
Волновая функция в импульсном пространстве 31, 315
Восьмеричный путь 236; см. также Группа $SU(3)$
V-спин 242—252
Вырожденное собственное значение 13

Генератор 27, 30
Гиперзаряд 11, 202, 203, 229
— в схеме $SU(3)$ 239, 250, 252, 253, 255, 264
Гипотеза аддитивности 300
Гиромагнитное отношение 221
Глобальная симметрия 234
Гравитационное взаимодействие 10
Группа, аксиомы 25
— вращений 53
— дискретная 26
— Лоренца неоднородная 71
— непрерывная 26, 27
— перестановок 290
— представление 26, 54, 71, 242
— Пуанкаре 71
— $SU(2)$ 203—207, 294, 298
— $SU(3)$ 15, 21, 32, 205, 233—285, 313—317
— $SU(6)$ 291, 293, 300
— теория 52
G-четность 11, 28, 227, 228
— в распадах мезонов 212, 227—232

Двойное рассеяние протона на ядре 158
Двузначность спиновых волновых функций 52
Декуплет барионов 3/2+ 266
— в кварковой модели 289
— в схеме $SU(3)$ 255
— массовая формула 263—291
— распады 266
— фоторождение 278
Детального равновесия принцип 181
— — проверка 186, 187
d-функции определение 49
— свойства 56, 57
D-функции 49—52, 54—56

Единичный оператор 17, 26

Загадка τ— θ 147
Закон параллелограмма 279
Законы сохранения вероятности 18, 94
— — изоспина 201
— — лептонного числа 150
— — момента количества движения 45
— — четырехмерного импульса 69
Зарядовая независимость 194, 199, 200
Зарядовая симметрия 194
Зарядовое сопряжение 12, 21, 27, 208—226
— — и CPT 216—218
— — и G-четность 227, 228, 329, 330
— — оператор 208, 209, 325, 328
— четность 208, 209, 295
— — нормальная и аномальная 230
Зеркальное отражение 125, 148, 149
Зеркальные ядра 194

Изоскалярный фактор 272
Изоспин 12, 15, 21, 32, 194—207
— в схеме $SU(3)$ 240—243, 259—263
Изотопическая четность 227; см. также G-четность
Инвариантность относительно вращений 46

— — — в гамильтониане 46
— — — оператора рассеяния 46
Инвариантность относительно обращения времени проверка: в электромагнитном взаимодействии 190; в слабых взаимодействиях 192
— — — — в процессах первого порядка 172—174
— — — — в процессах рассеяния 169—173
— — — — в реакциях 178
— — — — в реакциях частиц спина 0
— — — — с частицами спина 1/2 179
— — — — в πN-рассеянии 179
Инвариантность относительно трансляции во времени 27
Инвариантное подпространство 54
Интервал 66
Интеграл перекрытия 13, 15, 76, 77

Каноническое преобразование 116
Квантовая теория поля 20
Квантовая электродинамика 173, 176, 190, 211
Кварк 229, 230, 236, 280—312
— экспериментальные факты 33
— свободный 311
Кварковая модель симметричного осциллятора для барионов 300—303
Кет-вектор 15
Комптоновская длина волны 10, 11
Коэффициенты векторного сложения 58; см. также Момент количества движения
— Клебша—Гордана для группы $SU(3)$ 269—275
— — — — применение 273
— — — — расчет 271
— — — — таблицы для 8×8 331, 332
Кратность веса 242, 247
K_1^0 и K_2^0 214
K_L и K_S 223
$K_{l_4}^{\pm}$-распады 220

Лэмбовский сдвиг 211
Лептон 10, 11, 150, 151, 221
Лептонный распад K-мезона 220, 222, 223
Лептонное число 12, 150
Лоренцев скаляр 65

Магнитный (дипольный) момент 211, 220, 221
— — барионов в схеме $SU(3)$ 275—279
— — электрона 221
— — μ-мезона 221
Магнитное дипольное излучение 121
Массовая формула Гелл-Мана—Окубо 234, 263, 264, 283
— Коулмана — Глешоу 279
Матричный элемент 20, 31
Матрица плотности 155, 188
— — применения 140—142, 151—157, 187—189
— — общий формализм 318—324
Мезонные резонансы в модели кварков 281—284, 293—295
— — в схеме $SU(3)$ 257, 258, 264—266
Минимальная электромагнитная связь 275, 278
Модель Сакаты 235, 239, 252
Момент количества движения 231
— — — векторное сложение 56—62
— — — инвариантность относительно вращений 27, 42—46, 205
— — — коэффициент Клебша—Гордана 56—62
— — — матричные элементы 40—42
— — — полный 36, 37
— — — симметрия 142—232
— — — сохранение 45—49
— — — спин 35, 36
— — — собственные значения 37—40
Модель Ферми—Янга 235
Мультиплет по моменту количества движения 34, 40
Мультиплетное излучение 117, 118, 120—122
μ-Мезон 10, 148—152, 221

Наблюдаемые 13
— полный коммутирующий набор 38
Нарушенная симметрия 257
Нарушение симметрии, гипотеза 259
— — в модели кварков 290
— — в схеме $SU(3)$ 280
Нейтральный K-мезон 212—216, 219—221, 226
Нейтрино 10, 12, 82, 148—152, 213
— и нарушение четности 149, 150
— и CP-преобразование 213
— определение спиральности 152
Несохранение четности 225, 217
— — в β-распаде ^{60}Co 148
— — в распаде Λ^0 125
— — в распаде μ-мезона 148
— — в распаде π-мезона 148
— — и нейтрино 135, 136, 149
— — эксперименты 124, 148
Неприводимое подпространство 54
Неприводимое представление 55
— — группы $SU(3)$ 241
Неприводимый супермультиплет 241
Нормировка спирального состояния 76, 77, 87, 88
— на δ-функцию 76
— сферических гармоник 34
— волновых функций 13
Нормальная четность 230
Нуклон-нуклонные силы, зарядовая независимость 199—201
— — — несохранение четности 121, 139, 160

Обращенное во времени движение 162
Обращение времени 24, 162—193
— — в классической физике 162, 164
— — для безмассовых частиц 180
— — оператор 167—169
— — преобразование спирального состояния 174
— — преобразование для бесспиновых частиц 164
— — — частиц со спином 1/2 166
Обобщенный принцип Паули 197, 229, 273, 274
Обращение времени оператора 167
Октетная модель 236; см. также Группа $SU(3)$
ω-Мезон 232, 233
— в модели кварков 282—284
— в схеме $SU(3)$ 257, 264, 265
ω—φ-Смешивание 264, 274
— — в модели кварков 284
Ω-Гиперон 257, 289, 290
Оператор антилинейный 167
— антиунитарный 167, 217
— гамильтониан 16—20, 26, 27
— единичный 17, 18
— импульса 15
— поворота 44, 45
— положительный полуопределенный 38
— перехода 19, 88, 108, 116, 136, 172, 173, 186, 266, 274, 278, 314
— унитарный 21—30
— эрмитов 13, 14, 26, 27
— — для момента количества движения 37—39
— — для изоспина 196, 240, 241
— — для U — спина 239—241
— — для V — спина 240, 241
Ортогонализация по Шмидту 14
Ортогональная матрица 52
Относительная четность Σ—Λ 144

Параметры A и R 143

Пассивная интерпретация преобразования 22, 43, 103
Позитроний 16, 209, 210
Полнота 22
— d-функций 56
Полный ортонормированный набор 13, 17
Полярный вектор 115
Поляризация 89, 140, 154—160, 187—190, 191
— нейтронов 122
— нуклонов в распаде гиперона 155
— описание с помощью матрицы плотности 318—324
— параметры A и R 143
— циркулярная γ-излучения 121, 135
— эксперименты по определению четности 139—143
Правило $|\Delta I| = 1/2$ 184, 311
— Лапорта 111, 117, 119
Представление группы вращений, 54, 55
Преобразование зарядового сопряжения 208
— инфинитезимальное 26—28
— каноническое 116
— координат 21—23
— Лоренца 21, 24, 63—69
— обращения времени 174
— симметрии 23—26
— $SU(3)$ 235—237
— четности 22, 26, 111—114, 127
— — оператора 114
— — состояния спиральности 127—130
— — состояния частицы 127—130
— — состояния фотона 135
Принцип суперпозиции 13, 31
— Паули 197
— — обобщенный 197, 229, 273, 274
Процесс первого порядка 172, 179—180
Псевдовектор 115
Псевдоскаляр 115, 118

Равенство поляризация—асимметрия в рассеянии частиц спина 1/2 на частицах спина 0 143
— — — в рассеянии частиц спина 1/2 на частицах спина S 187
Распад двухчастичный 96—99
— декуплета 266—269
— гиперона 152—158, 182, 193, 220
— скорости и элементы $\mathcal{T}$-матрицы 317—318
— $\pi^{\pm}$-мезонов 148—151, 211
— и зарядовое сопряжение 209
— $\Sigma^{\pm}$ 158
— $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ 144
— π^0-мезона
— в схеме $SU(3)$ 278
Распады гиперонов (нелептонные) 153—158, 182—184, 193, 220
— декуплета 266—269
Рассеяние 16, 31
— оператор 17—20, 108, 169, 182
— S-матрица
— с обменом зарядом 203—205
— π-мезонов на нуклоне 90, 203—205
Регенерация 215
Релятивистская кинематика 69, 70
Ряд Клебша—Гордана для группы $SU(3)$ 269—272
ϱ-Мезон 232, 233

Связанное состояние 16
Связь барионов с мезонами в схеме $SU(3)$ 333
Сечения и элементы ρ-матрицы 313—317
Сильное взаимодействие 10, 11
— — инвариантность относительно обращения времени 173, 186—190, 229
— — сохранение четности 136, 159, 161, 217
— — сохранение G-четности 229, 232
— — C-инвариантность 209, 210, 217
Симметрия лево—право 189
— оператор 26
— перестановочная 287—289
— преобразования 23, 26, 27
Симметризаторы Юнга 289
Скамер истинный 115
— лорейцев 65
— псевдо 115
Скалярное произведение четырехмерных векторов 69
Слабые взаимодействия 9, 11, 124, 149, 172
— — нарушение J-инвариантности 192, 217
— — несохранение C 211—214, 217
— — несохранение G-четности 229
— — несохранение четности 109, 122, 161, 217
Следствие из инвариантности относительно зарядового сопряжения 208—210, 229—232
— — — в позитронном распаде 209
— — — нарушение в слабых взаимодействиях 211
— — — справедливость: в электромагнитных взаимодействиях 211; в сильных взаимодействиях 210, 211
Случайное вырождение 34
Смешивание частиц векторных мезонов 264, 274, 284
— масс 264
— мезонов со спином 2, 266
— — псевдоскалярных мезонов 266, 284
Событие 63
Соотношение унитарности Белла—Штейнбергера 226
Сопряженный супермультиплет 257
Сохранение четности 98, 99, 116—125
— — в распадах 98, 130
— — в реакциях 114—118, 130—135
— — в электромагнитных взаимодействиях 161
— — в πN-рассеянии 92
— — проверка: в атомной физике 119
— — в ядерной физике 120; в сильных взаимодействиях 159
Спин 16, 35
— безмассовых частиц 82
— и статистика 7, 304
— релятивистских частиц 77
Спиральность 78—80
— оператор 79
— система отсчета 80, 81
Спиральные амплитуды для распадов 97
— — для рассеяния 89
— — π-мезона на нуклоне 90, 91
Спиральные состояния двух частиц 83, 84
— — лоренц-преобразование 102, 105
— — нормировка 76, 77, 87, 88
— — одной частицы 77—79
— — преобразование четности 126—130
— — преобразование обращения времени 174—178
— — фотона 83
— — преобразование четности 174
Среднее значение 23
Старший вес 245
Статистика 99, 130, 151
— Бозе—Эйнштейна 7, 99, 307
— пара-фермн 304
— Ферми—Дирака 7, 99, 151, 302
Странность 11, 202, 203
— в модели Сакаты 235
— в схеме $SU(3)$ 236, 263
— и зарядовое сопряжение 227, 228
— мезонов 212, 232
Супермультиплет 233, 240
—сопряженный 257
Сферические гармоники 33, 35
— — четность 111
Схема LS-связи 100
Схемы Юнга 288

S-матрица 16—20, 83, 94, 181
— и сохранение импульса 31
— и сохранение момента количества движения 47
CP 212—216, 221—225
— инвариантность 213
— нарушение 192, 193, 221—226
— оператор 212
— собственное значение 212, 214, 230
CPT 216—221
— оператор 217
— теорема 136, 192, 193, 216
CPT-инвариантность в распаде нейтральных *K*-мезонов 225, 226
— и времена жизни частицы—античастицы 218
— и магнитные моменты 220, 221
— и массы частиц—античастиц 217, 257, 263
— и процессы первого порядка 220
— справедливость: в электромагнитных и сильных взаимодействиях 219

Теория Кабиббо 279—311
Теорема взаимности 172, 180, 181
— о конечном состоянии 182, 183
— об отражении 243
— о сдвиге 242
— о старшем весе 245
— Эйлера 53
Трансляционная инвариантность 24, 28, 31
Г-матрица; см. Оператор перехода

Угол перемешивания 265
Углы Эйлера 48
Умеренно сильное взаимодействие 257—279
Унитарность оператора рассеяния или *S*-матрицы 18, 94, 182
Унитарное представление 26, 54, 71, 76, 77, 241, 242
— преобразование 21, 26, 43, 76, 77
Унитарная симметрия; см. Группа *SU* (3)
Уравнение Дирака 70, 263
— Клейна—Гордона 70, 263, 315
— Шредингера 16, 28
U-спин 236—254, 259—267

Фазовые сдвиги 95
Фактор неупругости 95
Фермион 7, 10, 11, 229
Формула Гелл-Мана—Нишнджимы 202, 229
Фоторождение 184
— в схеме *SU*(3) 278
φ-мезон 232, 233
φ—ω-смешивание 264, 274
— в модели кварков 284

Характерные состояния в схеме *SU*(3) 247—249

Четность 11, 27, 109—161, 209
— аномальная 204
— бариона 256, 257
— безмассовых частиц 135
— внутренняя 121 каскадного гиперона 147
— заряженного π-мезона 137
— — — определения 136
— *K*-мезона 147
— нейтрального π-мезона 137
— Σ-гиперона 147
— Ω-гиперона 147
— фотона 136
— странных частиц 139
— инвариантность; см. Сохранение четности
— мезонов 230—232, 257, 295
— нормальная 230
— оператор 112, 113
— состояния 113
Четырехмерный вектор 68
— импульс 70
— скорость 69

Экзотические состояния 290
Электрон-протонное рассеяние 191
Электрический дипольный момент и инвариантность относительно обращения времени 184—186
— — — и сохранение четности 118, 160
— — — нейтрона 184, 185
— — — перехода 118
— — — статический 118
— — — электрона 185
Электрическое дипольное излучение 120
Электромагнитное взаимодействие в модели кварков 307
— — и группа *SU*(3) 275—279
— — и инвариантность относительно обращения времени 190—192
— — и изотоп-спин 200, 257
— — и *G*-четность 229
— — н зарядовое сопряжение 209, 211, 217
— — н сохранение четности 117—122, 161
— — и фотоны 83
Эрмитов оператор 13, 14, 26, 27
Эрмитово сопряжение 14

Эффект Зеемана 258
— Штарка 119
η-мезон 232, 233
— в смешивании с η′ 266—284
— в схеме *SU*(3) 234, 256
η→γγ-Распад 278