Б. А. Купершмидт

КП или мКП

некоммутативная математика лагранжевых, гамильтоновых и интегрируемых систем

Перевод с английского В.Э. Адлера

R&C Dynamics РХД
Москва · Ижевск

2002

УДК 531

Mathematical Surveys and Monographs. Volume 78

Boris A. Kupershmidt

KP or mKP: Noncommutative Mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and Integrable Systems

American Mathematical Society (Providence, 2000)

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №02-01-14001.

Купершмидт Б. А.
КП или МКП: некоммутативная математика лагранжевых, гамильтоновых и интегрируемых систем. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 624 стр.

В книге известного американского математика развивается общая теория динамических систем с некоммутирующими переменными, и интегрируемых систем, в частности; гамильтонов формализм и вариационное исчисление; как в непрерывных, так и в дискретных пространствах. Для чтения книги достаточно основ алгебры и анализа, все необходимое содержится в самой книге. Вводимые понятия подробно мотивируются, каждый раз после тщательного анализа множества конкретных моделей. Книга содержит значительное число упражнений.

Для математиков-прикладников, механиков, физиков, аспирантов и студентов университетов.

ISBN 5-93972-170-2

http://rcd.ru

Оглавление

Часть В. Дискретное пространство, непрерывное время

Часть C. Дискретное пространство-время

Часть D. Приложения

---

[*] Приложения *A10, *A11 добавлены для русского издания

Предисловие

В молодости мы теряем коммутативную невинность, сталкиваясь с кватернионами в математике или операторами наблюдаемых в физике. После этого, следующий логический шаг должен был бы вести в область некоммутативных дифференциальных уравнений и теорий поля, но эти таинственные королевства до сих пор скрывались в тумане. Они исследованы и нанесены на карту в настоящем трактате.

В ретроспективе, я полагаю, что основной причиной задержки было отсутствие подходящего крючка, на который можно было бы насадить, в качестве приманки, достаточное число разумных вопросов. Предыдущие попытки использовали наживки из топологии (М. Концевич [Kon 1993], И. Гельфанд и М. Смирнов [GSm 1994]) и кватернионной квантовой механики (С. Адлер [Adl 1995]). Я выбрал интегрируемые системы.

Современная теория интегрируемых систем берет начало с открытия, в 1967 г. (ровно через 100 лет после великого изобретения колючей проволоки), солитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Сейчас эта теория расцвела в хорошо развитую совокупность технических приемов, трюков, методов, результатов, строгих и эвристических принципов, неписанных законов, эмпирических наблюдений, оставленных и забытых подходов, нерешенных загадок и безнадежных проблем, — словом, это универсальный аппарат, идеально приспособленный для правильной постановки и решения задач, независимо от их происхождения. В трех первых главах мы ищем ответ на вопрос: что произойдет со свойствами известных дифференциальных уравнений, если зависимые переменные станут кватернионно-, матрично- и т.д. значными? — вплоть до §3.11, где мы *вынуждены* открыть некоммутативный гамильтонов формализм, который является единственным способом работы с непробиваемыми тождествами и заключается в возврате к действиям с исходными объектами, а не их многоиндексной записью; подобно классической замене координатных тензорных вычислений понятиями геометрии многообразий. Большая часть всей теории интегрируемых систем может быть извлечена из свойств иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП) и ее модификации (МКП) — отсюда название книги. Эти две иерархии, вместе с их специализациями, разновидностями и обобщениями, являются главными актерами в разворачивающейся некоммутативной пьесе. В частности, Главы 1–3 Части A (непрерывное пространство-время) систематически подводят к некоммутативному аппарату, который, в первом приближении, можно воспринимать, как способ делать подконтрольными некоторые устрашающе длинные и тяжелые координатные вычисления, а вычисления умеренной длины и сложности превращать в короткие и изящные тривиальности. Задним числом, я привожу в §4.1 простые соображения в несколько строк, о том, как правильное определение могло бы быть (но не было) естественно введено ранее — это для тех читателей, которых интересует только, как, а не почему. Однако, некоммутативный формализм, рутинный и удобный после того как его освоишь, не так уж интуитивно понятен с первого раза, если представить его сразу в законченном виде, без отчета о фактическом ходе развития, приведшем к нему.

В ответ на вопрос любителя, что такое джаз, Луи Армстронг ответил: “Парень, если тебе приходится спрашивать, ты никогда не поймешь.” Этой фразой можно описать стиль современной математической литературы. Что касается данной книги, то она написана в старомодной традиции 18-го столетия, тщательно избегающей всякой садоматематики, но зато сохраняющей все необходимые мотивы и честно воспроизводящей весь фактический процесс получения представленных результатов. Совету Вольтера, что лучший способ быть скучным, это ничего не оставить невысказанным, я следовал наполовину. Текст логически замкнут (хотя пока не положен на музыку), и не требует обращения к внешним источникам; однако значительная доля второстепенного материала помещена в упражнения, которых в книге очень много, главным образом типа “проверь предшествующее вычисление — получи мотивировку для последующего построения”. Все эти лакомые кусочки, за единственным исключением упражнения 19.11.41, решаются в одну-две строки.

Бросим взгляд на пару представителей Некоммутативной Вселенной.

Во-первых, это некоммутативное уравнение КдФ

$$u_t = (3u^2 + u_{xx})_x,$$

которое выглядит точно так же, как и в коммутативном случае, в то время как для модифицированного уравнения КдФ (МКдФ) имеется две *различных* некоммутативных версии:

$$\begin{aligned} v_t &= -3(v_x v^2 + v^2 v_x) + v_{xxx}, \\ w_t &= -6ww_xw + 3[w, w_{xx}] + w_{xxx}; \end{aligned}$$

и еще больше разнообразия имеется в потенциальной форме этих уравнений — это составляет предмет §3.9.

Во-вторых, в то время как многие (хотя и не все) из известных коммутативных результатов имеют некоммутативные версии (общий принцип, из которого следовал бы этот экспериментальный факт, пока не найден), существуют и чисто некоммутативные явления, не имеющие коммутативных предшественников. Одна из таких красот — это то, что я называю формулой типа Концевича: пусть u_i есть полевые переменные и H гамильтониан, тогда

$$\sum_i \left[u_i, \frac{\delta H}{\delta u_i}\right] \quad \text{есть “дивергенция”};$$

в частности, в классической механике, где имеется лишь одна независимая переменная, сумма равна нулю.

Слово о доказательствах. Интересно, что, как правило, некоммутативную формулу *доказывать легче,* чем ее коммутативную версию, в основном потому, что некоммутативные одночлены заведомо разной природы в коммутативной версии сливаются в неразличимые группы. Например, большинство результатов в Части C (дискретное пространство-время) получено впервые, так как в коммутативном случае соответствующие задачи считались слишком сложными. Некоммутативная точка зрения оказывается мощным инструментом, позволяющим отсекать ложные направления и сводящим все усилия в узкое русло.

Я надеюсь, что читатели с разными и несходными интересами найдут места, где они смогут удовлетворить жажду знаний:

Физики-прикладники и инженеры, интересующиеся матричнозначными дифференциальными или разностными уравнениями, могут благополучно считать, что зависимые переменные суть матрицы. Те, кто интересуются скобками Пуассона, но не хотят ввязываться в некоммутативные авантюры, найдут, в Приложениях A1, A2 и A4 соответственно, инструкции о том, как комплексифицировать гамильтонову систему, как делать для нее правильное асимптотическое разложение, и как связать пару таких систем правильным пуассоновым соответствием (не обязательно взаимно-однозначным.) Я знаю, что некоторые читатели запуганы алгебраическими террористами и, может быть даже, им в детстве Ришелье нравился больше, чем д'Артаньян, — но вместо того, чтобы лить крокодиловы слезы над убогими, я написал §A4.1, где даются достаточные геометрические мотивировки для алгебраических определений и конструкций;

Физики-теоретики, которых интересует некоммутативность, а не интегрируемость, смогут удовлетворить свое любопытство, прочитав Главы 4, 5 или 10, 11 — в зависимости от того, вовлечены ли они в непрерывную или дискретную деятельность;

Часть C, о дискретном пространстве-времени, особенно рекомендуется тем, кому доводилось испытывать хотя бы тень подозрения, что стандартные разностные методы численного анализа и вычислительной физики слишком грубы и упрощенны, и не отражают должным образом нетривиальные свойства непрерывных моделей;

Разработчики моделей, вычислители симметрий, специалисты по сингулярному анализу, и другие, найдут большую часть скалярных уравнений и иерархий, разбросанных по всему тексту, собранными под одной крышей в Приложении A8;

Аналогично, ретивые аспиранты найдут все открытые задачи и гипотезы, высказанные в книге, собранными в Приложении A9;

Знатоки классической механики найдут ее некоммутативную версию в §4.6, а специалисты в динамике жидкости и физике плазмы найдут различные некоммутативные системы гидродинамического типа в главах 14–19, и некоммутативные представления Клебша в §6.4.

Текст оказался довольно большим, и по сути состоит из 4 отдельных, хотя и связанных, книг. Для экономии места, я постоянно заменяю слова “поэтому”, “таким образом”, “следовательно”, “откуда”, и т.д. символом ⇒; слова “что эквивалентно”, “другими словами”, и т.д. символом ⇔; конец доказательства отмечается знаком ▮. Специальные вопросы и менее величественные предметы помещены в обоз, в качестве Приложений.

Тем, кто пройдет через весь текст, станет ясно, что некоммутативная поверхность лишь слегка поцарапана; например, среди рассматриваемых гамильтонианов нет ни одного механического типа $H = p^2/2 + V(q)$ (см., однако, добавленное при переводе Приложение $\ast$A11). Я надеюсь, что читатели смогут найти некоторые улучшения и продолжат дальнейшее развитие предмета.

Я верю, что книга не содержит ошибок, по крайней мере серьезных; но я не так оптимистичен в отношении опечаток, и заранее приношу свои извинения. Я буду благодарен всем читателям за указания на опечатки, комментарии и предложения.

* * *

19-го апреля 1943, после двухмесячного выжидания, немецкие нацисты из СС вызвали военные подразделения с бронемашинами, чтобы положить конец Варшавским евреям.

19-го апреля 1993, после двухмесячного выжидания, BATF[1] вызвал подразделения ФБР с бронемашинами, чтобы положить конец Ветви Давидовой.

Эта книга посвящена всем жертвам организованной преступности. Автор передает все доходы от продажи этой книги первой организации Америки по защите гражданских прав, JPFO (Евреи за Ограничение Огнестрельного Оружия), работающей по предотвращению геноцида: Box 270143, Hartford, Wisconsin 53207;
<`http://www.jpfo.org`>[2]

---

[1] Bureau of Alcohol, Tobacco, and Firearms — отдел казначейства Соединенных Штатов, регулирующий продажу, распределение и налогообложение этих трех продуктов.

[2] Выраженные здесь взгляды принадлежат исключительно автору, и не являются точкой зрения Американского Математического Общества.

Часть A

Непрерывное пространство-время

Будучи вполне нормальным человеком, Вилли все же имел плохое представления о других людях и масштабах современного мира, и иногда, похоже, думал, что латынь все еще занимает то место, которое она занимала в Средние Века. Известна достоверная история о его беседе с человеком, стелившим ковер в доме одного его друга. Речь Вилли включала цитаты на латыни и древнегреческом. Древнегреческие он переводил, в качестве общепринятой любезности; латынь же оставлял в неприкосновенности, как подобает в разговоре двух джентльменов.

Кингсли Эмис о Вилли Смите (*Мемуары*, 1991)

Глава 1

Иерархия КП

Эта глава вводит иерархию КП и устанавливает ее основные свойства.

1.1 Основные уравнения и их простейшие свойства

Этот раздел является своего рода ликбезом в теории некоммутативных дифференциальных уравнений Лакса. Мы вводим обозначения, определяем иерархию КП и устанавливаем некоторые простейшие свойства уравнений из этой иерархии: коммутативность потоков и, при дополнительных предположениях, существование бесконечного множества общих сохраняющихся плотностей.

Для начала мы напоминаем основные ингредиенты дифференциальной алгебры, необходимые при построении непрерывных интегрируемых систем. Нашей целью будет сделать изложение автономным — где возможно и в пределах разумного. В то же время, мы не хотим испытывать терпение читателей, считающих, что они достаточно знакомы с предметом; они могут пропустить этот раздел.

Кольцо всегда предполагается ассоциативным и, как правило, с единицей; часто кольца будут некоммутативными. *Дифференцированием* $\bar{\partial}$ кольца R называется аддитивное отображение $\bar{\partial} : R \to R$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\bar{\partial}(r_1 r_2) = \bar{\partial}(r_1) r_2 + r_1 \bar{\partial}(r_2), \quad \forall\, r_1, r_2 \in R. \tag{1.1.1}$$

Алгебра — это кольцо R, элементы которого можно умножать на элементы поля $\mathcal{F}$ (то есть, R есть векторное пространство над $\mathcal{F}$;) чтобы избежать педантичных оговорок, поле $\mathcal{F}$ всегда будет иметь характеристику ноль. Обычно мы будем считать, что $\mathcal{F} = \mathbb{Q}$; иногда, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; изредка $\mathcal{F}$ будет конечным их расширением. Так как R имеет единицу, $\mathcal{F}$ можно отождествить с подкольцом в R. *Дифференциальное кольцо* — это кольцо с дифференцированием, или набором из m взаимно коммутирующих дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_m$. *Дифференциальная алгебра* R является одновременно дифференциальным кольцом и алгеброй, причем дифференцирования $\partial_1, \dots, \partial_m$ коммутируют с умножением на элементы $\mathcal{F}$. Типичный пример: $R = C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$, $\partial_1 = \partial/\partial x^1, \dots, \partial_m = \partial/\partial x^m$, где $x^1, \dots, x^m$ есть стандартные координаты на $\mathbb{R}^m$. В этой главе и большей частью дальше, $m = 1$, причем дифференцирование ∂_1 обозначается просто ∂. Следующее построение стандартно. Пусть R — дифференциальное кольцо (или алгебра) с дифференцированием $\partial : R \to R$.

Мы превращаем аддитивную группу (то есть, векторное пространство)

$$R((\xi^{-1})) = \Big\{ \sum_{\mu<\infty} r_\mu \xi^\mu \mid r_\mu \in R \Big\} \tag{1.1.2}$$

в кольцо (или алгебру) “псевдо-дифференциальных операторов”, определив умножение по правилу

$$(r_\mu \xi^\mu)(\bar r_\nu \xi^\nu) = \sum_{s\geqslant 0} r_\mu \partial^s(\bar r_\nu) \binom{\mu}{s} \xi^{\mu-s+\nu}, \tag{1.1.3}$$

где

$$\binom{\mu}{0} = 1, \quad \binom{\mu}{s} = \prod_{\alpha=0}^{s-1} (\mu-\alpha)/s!\ , \quad s \in \mathbb{N} \tag{1.1.4}$$

есть биномиальный коэффициент. Мы видим, что для $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $R[\xi]$ является кольцом обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами в R.

Упражнение 1.1.5. Покажите, что кольцо $R((\xi^{-1}))$ ассоциативно.

> (“Я твердо верю, что для того, чтобы чему-то научиться, надо это сделать: самый легкий способ научится плавать — это начать плавать, а лекции о плавании не помогут.” (П. Халмош))

Упражнение 1.1.6. Пусть индекс суммирования μ в (1.1.2) пробегает $\widetilde{Q}^{-1}\mathbb{Z}$, где $\widetilde{Q} \in \mathbb{N}$ фиксировано. Покажите, что $R((\xi^{-1}))$ опять ассоциативно. (Конечно, правильнее было бы обозначать $R((\xi^{-1/\widetilde{Q}}))$.)

Упражнение 1.1.7. Покажите, что в $R((\xi^{-1}))$ верны соотношения

$$\xi^{-1}\bar r = \sum_{s\geqslant 0} (-1)^s \bar r^{(s)} \xi^{-1-s}, \quad \bar r \xi^{-1} = \sum_{s\geqslant 0} \xi^{-1-s} \bar r^{(s)}, \quad \bar r \in R, \tag{1.1.8a,b}$$

где

$$\bar r^{(s)} = \partial^s(\bar r). \tag{1.1.9}$$

[Подсказка : покажите, что

$$\binom{-1}{s} = (-1)^s, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \quad] \tag{1.1.10}$$

Пусть теперь наша дифференциальная алгебра R есть алгебра многочленов от некоммутирующих переменных $A_i^{(j)}$:

$$R = \mathcal{F}\langle A_i^{(j)} \rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1.11}$$

где дифференцирование ∂ действует на образующие R по правилу

$$\partial(A_i^{(j)}) = A_i^{(j+1)}. \tag{1.1.12}$$

(Неформально, можно считать, что $A_i^{(j)}$ есть $\partial^j A_i(x)/\partial x^j$, с матричнозначными функциями $A_i(x)$.) Дифференцирование $\partial_t : R \to R$ называется *эволюционным,* если оно коммутирует с ∂, то есть

$$\partial_t(A_i^{(j)}) = \partial^j[\partial_t(A_i)], \quad \forall\, i, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.1.13}$$

где $A_i = A_i^{(0)}$. Иначе говоря, эволюционное дифференцирование определено своими значениями на A_i. Далее, выберем в $R((\xi^{-1}))$ следующий элемент ("оператор Лакса")

$$L = \xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}. \tag{1.1.14}$$

"n-й поток" иерархии КП, $n \in \mathbb{N}$, есть эволюционное дифференцирование ∂_{t_n} в R, определенное следующим равенством в $R((\xi^{-1}))$:

$$\partial_{t_n}(L) = \mathrm{const}_n[(L^n)_+, L] = \mathrm{const}_n[L, (L^n)_-], \tag{1.1.15}$$

с учетом, что

$$\partial_{t_n}\xi = \xi\partial_{t_n}; \tag{1.1.16}$$

при этом в (1.1.15) используются следующие обозначения:

$$[\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$$

для коммутатора (в $R((\xi^{-1}))$ и в общем случае);

$$\Big(\sum_\mu r_\mu \xi^\mu\Big)_+ = \sum_{\mu\geqslant 0} r_\mu \xi^\mu, \quad \Big(\sum_\mu r_\mu \xi^\mu\Big)_- = \sum_{\mu<0} r_\mu \xi^\mu; \tag{1.1.17}$$

const_n есть ненулевая постоянная, значение которой зависит от ситуации. Так как ее всегда можно убить растяжением времени t_n, то значение const_n выбирается только из соображений красоты, обычно

$$\mathrm{const}_n = 1 \quad \text{или} \quad 1/n; \tag{1.1.18}$$

наконец, последние два равенства в (1.1.15) согласованы, так как

$$[L^n, L] = 0: \tag{1.1.19}$$

действительно,

$$\begin{aligned}[(L^n)_+, L] - [L, (L^n)_-] &= [(L^n)_+, L] + [(L^n)_-, L] \\ &= [(L^n)_+ + (L^n)_-, L] = [L^n, L] = 0.\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

Замечание 1.1.21. Соотношение (1.1.15) определяет эволюционное дифференцирование в R при помощи равенства в $R((\xi^{-1}))$. Этой же формулой можно определить эволюционное дифференцирование в самом $R((\xi^{-1}))$, если превратить $R((\xi^{-1}))$ в дифференциальное кольцо по правилу

$$\partial\Big(\sum r_\mu \xi^\mu\Big) = \sum \partial(r_\mu)\xi^\mu. \tag{1.1.22}$$

Вычислим явный вид двух первых потоков, при выборе

$$\mathrm{const}_n = 1/n. \tag{1.1.23}$$

При $n = 1$ имеем

$$\begin{gathered}(L^1)_+ = L_+ = \xi \quad \Rightarrow \\ \partial_{t_1}(L) = \sum \partial_{t_1}(A_i)\xi^{-i-1} = \big[\xi,\ \xi + \sum A_i\xi^{-i-1}\big] = \sum \partial(A_i)\xi^{-i-1},\end{gathered}$$

так что первый поток имеет вид

$$\partial_{t_1}(A_i) = \partial(A_i), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1.24}$$

При $n = 2$ имеем

$$\mathrm{const}_2(L^2)_+ = \frac{1}{2}\left[(\xi + A_0\xi^{-1} + \ldots)^2\right]_+ = \frac{1}{2}\xi^2 + A_0 \quad \Rightarrow \tag{1.1.25}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_2}(L) &= \sum \partial_{t_2}(A_i)\xi^{-i-1} = \left[\xi^2/2 + A_0,\ \xi + \sum A_j\xi^{-j-1}\right] \\ &= \sum \frac{1}{2}A_j^{(2)}\xi^{-j-1} + \sum A_j^{(1)}\xi^{-j} - A_0^{(1)} + \sum A_0A_j\xi^{-j-1} \qquad (1.1.26\text{a}) \\ &\quad - \sum A_j\xi^{-j-1}A_0. \qquad (1.1.26\text{b})\end{aligned}$$

Согласно формуле (1.1.3),

$$\xi^{-j-1}A_0 = \sum_{s \geqslant 0} A_0^{(s)}\binom{-j-1}{s}\xi^{-j-1-s}\ . \tag{1.1.27}$$

Упражнение 1.1.28. Доказать, что

$$\binom{-j-1}{s} = (-1)^s\binom{j+s}{s}. \tag{1.1.29}$$

Подставляя (1.1.27, 29) в (1.1.26b) получаем

$$-\sum A_j\xi^{-1-j}A_0 = -\sum A_j(-1)^s\binom{j+s}{s}A_0^{(s)}\xi^{-1-j-s},$$

так что (1.1.26) принимает вид

$$\begin{aligned}&\sum \frac{1}{2}A_j^{(2)}\xi^{-j-1} + \sum A_{j+1}^{(1)}\xi^{-j-1} + \sum A_0A_j\xi^{-j-1} \\ &\qquad + \sum (-1)^{s+1}\binom{j+s}{s}A_jA_0^{(s)}\xi^{-1-j-s} \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\partial_{t_2}(A_i) = \frac{1}{2}A_i^{(2)} + A_{i+1}^{(1)} + A_0A_i - \sum_{s=0}^{i}(-1)^s\binom{i}{s}A_{i-s}A_0^{(s)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1.30}$$

В частности,

$$\partial_{t_2}(A_0) = \frac{1}{2}A_0^{(2)} + A_1^{(1)}, \tag{1.1.31a}$$

$$\partial_{t_2}(A_1) = \frac{1}{2}A_1^{(2)} + A_2^{(1)} + [A_0, A_1] + A_0A_0^{(1)}, \tag{1.1.31b}$$

$$\partial_{t_2}(A_2) = \frac{1}{2}A_2^{(2)} + A_3^{(1)} + [A_0, A_2] + 2A_1A_0^{(1)} - A_0A_0^{(2)}. \tag{1.1.31c}$$

Упражнение 1.1.32. Покажите, что

$$\partial_{t_n}(A_0) \in \mathrm{Im}\,\partial, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Теперь мы можем установить первое фундаментальное свойство потоков (1.1.15) иерархии КП, а именно, что все эти потоки взаимно коммутируют.

Теорема 1.1.33. Для $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, положим $P = L^{n_1}$, $Q = L^{n_2}$, и обозначим $\partial_P = \partial_{t_{n_1}}$, $\partial_Q = \partial_{t_{n_2}}$. Тогда

$$[\partial_P, \partial_Q] = 0. \tag{1.1.34}$$

Доказательство. { **Упражнение 1.1.35.** Покажите, что коммутатор эволюционных дифференцирований – снова эволюционное дифференцирование. }
Надо показать, что $[\partial_P, \partial_Q](A_i) = 0$, при всех i, что эквивалентно равенству

$$[\partial_P, \partial_Q](L) = 0. \tag{1.1.36}$$

Теперь, положив $\mathrm{const}_n = 1$, получаем из (1.1.5)

$$\partial_P \partial_Q(L) = \partial_P([Q_+, L]) = [\partial_P(Q_+), L] + [Q_+, \partial_P(L)]. \tag{1.1.37}$$

Заметим, что в любом ассоциативном кольце с дифференцированием $\widetilde{\partial}$

$$\text{из} \quad \widetilde{\partial}(X) = [Y, X] \quad \text{следует} \quad \widetilde{\partial}(X^n) = [Y, X^n], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \tag{1.1.38}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial}(X^n) = \widetilde{\partial}(X \dots X) &= \sum_{s=0}^{n-1} X^s \widetilde{\partial}(X) X^{n-1-s} = \sum_{s=0}^{n-1} X^s (YX - XY) X^{n-1-s} \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} [X^s Y X^{n-s} - X^{s+1} Y X^{n-(s+1)}] = YX^n - X^n Y = [Y, X^n]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\partial_P(Q_+) = [\partial_P(Q)]_+ = [-P_-, Q]_+ = [-P_-, Q_+]_+ \ , \tag{1.1.39}$$

так как $\partial_P(L) = [-P_-, L]$ и

$$[-P_-, Q_-]_+ = 0. \tag{1.1.40}$$

Подстановка (1.1.39) в (1.1.37) дает

$$\partial_P \partial_Q(L) = [\partial_P(Q_+), L] + [Q_+, [P_+, L]] = [[-P_-, Q_+]_+, L] + [Q_+, [P_+, L]]. \tag{1.1.41}$$

Меняя местами P и Q, находим

$$\partial_Q \partial_P(L) = [[-Q_-, P_+]_+, L] + [P_+, [Q_+, L]]. \tag{1.1.42}$$

Следовательно, вычитая (1.1.42) из (1.1.41) и используя тождество Якоби, мы получаем

$$[\partial_P, \partial_Q](L) = [?, L], \tag{1.1.43}$$

где

$$\begin{aligned} ? = \partial_P(Q_+) - \partial_Q(P_+) - [P_+, Q_+] &= [-P_-, Q_+]_+ + [Q_-, P_+]_+ + [Q_+, P_+] \\ &= \big([Q_+, P_-] + [Q_-, P_+] + [Q_+, P_+]\big)_+ \\ &= \big([Q_+ + Q_-, P_+ + P_-] - [Q_-, P_-]\big)_+ = [Q, P]_+ = 0. \end{aligned} \tag{1.1.44}$$

∎

На будущее отметим равенство, встреченное в приведенном доказательстве:

$$\partial_P(Q) = [-P_-, Q]. \tag{1.1.45}$$

Перейдем к вопросу о сохраняющихся плотностях.

Определение 1.1.46. Пусть R — дифференциальное кольцо с дифференцированиями $\partial_1, \ldots, \partial_m$. Элемент $r \in R$ называется *тривиальным*, если $r \in \{\partial_1(R) + \ldots + \partial_m(R)\}$. В этом случае мы пишем $r \sim 0$.

Определение 1.1.47. Пусть R — дифференциальное кольцо с дифференцированием ∂, тогда в $R((\xi^{-1}))$ определен *вычет* Res :

$$\mathrm{Res}\Big(\sum r_\mu \xi^\mu\Big) = r_{-1}. \tag{1.1.48}$$

Лемма 1.1.49. Если R — *коммутативное* дифференциальное кольцо с дифференцированием ∂, то в $R((\xi^{-1}))$

$$\mathrm{Res}([\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2]) \sim 0, \quad \forall\, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in R((\xi^{-1})). \tag{1.1.50}$$

Доказательство. Из (1.1.3) имеем

$$\mathrm{Res}([r_1\xi^\mu, r_2\xi^\nu]) = \sum_{s \geqslant 0} \delta_{-1}^{\mu+\nu-s}\left[r_1 r_2^{(s)}\binom{\mu}{s} - r_2 r_1^{(s)}\binom{\nu}{s}\right], \tag{1.1.51}$$

и так как

$$r_1 r_2^{(s)} \sim (-1)^s r_1^{(s)} r_2, \tag{1.1.52}$$

то имеем

$$\mathrm{Res}([r_1\xi^\mu, r_2\xi^\nu]) \sim \delta_{-1}^{\mu+\nu-s}\left[r_1^{(s)} r_2 (-1)^s \binom{\mu}{s} - r_2 r_1^{(s)}\binom{\nu}{s}\right]. \tag{1.1.53}$$

Используя коммутативность R, приведем правую часть (1.1.53) к виду

$$\delta_{-1}^{\mu+\nu-s} r_1^{(s)} r_2 \left[(-1)^s \binom{s-1-\nu}{s} - \binom{\nu}{s}\right], \tag{1.1.53$'$}$$

а это тождественно равно нулю, согласно соотношению (1.1.55). ∎

Упражнение 1.1.54. Докажите равенство

$$(-1)^s \binom{s-1-\nu}{s} = \binom{\nu}{s}. \tag{1.1.55}$$

Определение 1.1.56. Пусть $\widetilde{\partial}$ — эволюционное дифференцирование в дифференциальном кольце R, тогда $H \in R$ называется *сохраняющейся плотностью* для $\widetilde{\partial}$, если $\widetilde{\partial}(H) \sim 0$.

Следствие 1.1.57. Если переменные $A_i^{(j)}$ коммутируют, то иерархия КП (1.1.15) имеет бесконечный набор общих сохраняющихся плотностей $\{\mathrm{Res}(L^n) |\; n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Имеем

$$\partial_P[\mathrm{Res}(Q)] = \mathrm{Res}[\partial_P(Q)] \overset{(1.1.45)}{=} \mathrm{Res}([-P_-, Q]) \overset{(1.1.50)}{\sim} 0.$$ ∎

Что происходит в Департаменте Сохраняющихся Плотностей, когда переменные $A_i^{(j)}$ *не коммутируют*? На первый взгляд, ничего хорошего. Однако, когда $A_i^{(j)}$ — это *матрицы*, кое-что можно спасти.

Лемма 1.1.58. Если $A_i^{(j)}$ есть матрицы размера $\widetilde{l}\times\widetilde{l}$ с попарно коммутирующими элементами, то

$$Tr\,\mathrm{Res}\big([\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2]\big)\sim 0,\quad \forall\,\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2\in R((\xi^{-1})). \tag{1.1.59}$$

Доказательство. Используем соотношение (1.1.53). Применив Tr к обеим его частям, получим

$$Tr\,\mathrm{Res}\big([r_1\xi^\mu,r_2\xi^\nu]\big)\sim\delta_{-1}^{\mu+\nu-s}\;Tr(r_1^{(s)}r_2)\Big[(-1)^s\binom{s-1-\nu}{s}-\binom{\nu}{s}\Big], \tag{1.1.60}$$

и (1.1.59) следует в силу формулы (1.1.55). ∎

Следствие 1.1.61. Если $A_i^{(j)}$ есть $\widetilde{l}\times\widetilde{l}$–матрицы (с взаимно коммутирующими элементами), то иерархия КП (1.1.15) имеет бесконечное множество общих сохраняющихся плотностей $\{Tr\,\mathrm{Res}(L^n)|n\in\mathbb{N}\}$.

Доказательство. Снова,

$$\partial_P\,Tr\,\mathrm{Res}(Q)=Tr\,\mathrm{Res}\,\partial_P(Q)\overset{(1.1.45)}{=}Tr\,\mathrm{Res}([-P_-,Q])\overset{(1.1.59)}{\sim}0.$$ ∎

Замечание 1.1.62. Лемма 1.1.58 и Следствие 1.1.61 остаются в силе, если $A_i^{(j)}$ принадлежат подпространству матриц размера $\widetilde{l}\times\widetilde{l}$, которое является *подкольцом.*

Мы разовьем это замечание позже.

Упражнение 1.1.63. Покажите, что

$$\partial_P(Q)-\partial_Q(P)=[P_+,Q_+]-[P_-,Q_-]. \tag{1.1.64}$$

Упражнение 1.1.65. Покажите, что в некоммутативной ситуации

$$\partial_P(\mathrm{Res}\,Q)=\partial_Q(\mathrm{Res}\,P). \tag{1.1.66}$$

1.2 Гамильтонов формализм для иерархии КП

В этом разделе мы выводим гамильтонову структуру иерархии КП для случая, когда основные переменные $A_i^{(j)}$ являются матрицами размера $\widetilde{l}\times\widetilde{l}$ с коммутирующими элементами.

В общем, гамильтонов формализм — это устройство, специально сконструированное так, чтобы ставить в соответствие эволюционное дифференцирование *каждому* элементу дифференциального кольца. (Это алгебраическая точка зрения; геометрическая несколько отличается.) Таким образом, если данное эволюционное дифференцирование X дифференциального кольца R можно представить в гамильтоновой форме с гамильтонианом $H\in R$, $X=X_H$, это означает, что *любой другой* элемент G кольца R порождает свое собственное эволюционное дифференцирование X_G. Ясно, что такая ситуация встречается достаточно редко; когда это происходит, это доказывается чаще всего в результате вычислений, которые, к счастью, являются более или менее рутинными.

Такое рутинное вычисление будет выполнено в этом разделе, с целью получить так называемую первую гамильтонову структуру иерархии КП. Прилагательное “первая” мы будем опускать, так как в этом тексте вторая гамильтонова структура нам не встретится. (Ее можно найти, напр., в [Dic 1991].)

В основе всех таких рутинных вычислений лежит формула вычетов Манина [Man 1978], которая нам потребуется только в следующем упрощенном варианте. Пусть $R = \mathcal{F}[a^{(j)}_{i|\alpha\beta}]$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \tilde{l}$, является коммутативной дифференциальной $\mathbb{Q}$–алгеброй с дифференцированием ∂, действующим на полиномиальные образующие R по правилу

$$\partial(a^{(j)}_{i|\alpha\beta}) = a^{(j+1)}_{i|\alpha\beta}. \tag{1.2.1}$$

Пусть

$$\Omega^1(R) = \left\{\sum f^j_{i|\alpha\beta} da^{(j)}_{i|\alpha\beta} \mid f^j_{i|\alpha\beta} \in R, \text{ конечные суммы}\right\} \tag{1.2.2}$$

есть R–модуль 1-форм на R, с дифференциалом $d : R \to \Omega^1(R)$ действующим на образующие R по естественному закону

$$d(a^{(j)}_{i|\alpha\beta}) = da^{(j)}_{i|\alpha\beta}\ ; \tag{1.2.3}$$

d — дифференцирование R в $\Omega^1(R)$. Мы можем продолжить действие ∂ на $\Omega^1(R)$ по правилу

$$\partial(f da^{(j)}_{i|\alpha\beta}) = \partial(f) da^{(j)}_{i|\alpha\beta} + f da^{(j+1)}_{i|\alpha\beta}, \tag{1.2.4}$$

так, чтобы

$$\partial d = d\partial\ :\ R \to \Omega^1(R) \tag{1.2.5}$$

и

$$\partial(f\omega) = \partial(f)\omega + f\partial(\omega), \quad \forall\, f \in R, \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(R). \tag{1.2.6}$$

Упражнение 1.2.7. Проверьте формулы (1.2.5, 6).

Подобно тому, что было сделано в §1.1, мы можем построить кольцо $R((\xi^{-1}))$ и $R((\xi^{-1}))$–бимодуль $\Omega^1(R)((\xi^{-1}))$ с использованием тех же самых формул (1.1.2), 3); аналогично, обозначая через $\mathrm{Mat}_{\tilde{l}}(\cdot)$ кольцо матриц размера $\tilde{l} \times \tilde{l}$ с элементами из кольца $(\cdot)$, мы может построить кольцо $\mathrm{Mat}_{\tilde{l}}(R)((\xi^{-1}))$ и $\mathrm{Mat}_{\tilde{l}}(R)((\xi^{-1}))$–бимодуль $\mathrm{Mat}_{\tilde{l}}(\Omega^1(R))((\xi^{-1}))$. Формула (1.1.22) превращает все эти объекты в дифференциальные кольца и дифференциальные бимодули, соответственно. В частности, определено понятие тривиального элемента.

Далее, соберем элементы $\{a^{(j)}_{i|\alpha\beta} |\ 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \tilde{l}\}$ в матрицу $a^{(j)}_i$ размера $\tilde{l} \times \tilde{l}$ и рассмотрим в $\mathrm{Mat}_{\tilde{l}}(R)((\xi^{-1}))$ элемент

$$L = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^{-i}, \tag{1.2.8}$$

где ξ в правой части (1.2.8) обозначает $\xi 1_{\tilde{l}}$.

Лемма 1.2.9. (Формула вычетов)

$$d\, Tr\, \mathrm{Res}(L^n) \sim n\ Tr\, \mathrm{Res}(L^{n-1} dL) \sim n\ Tr\, \mathrm{Res}((dL)L^{n-1}). \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Доказательство соотношения (1.1.59) проходит, даже если один из элементов $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ принадлежит к $\Omega^1(R)((\xi^{-1}))$, а не $R((\xi^{-1}))$. Следовательно,

$$d\, Tr\, \mathrm{Res}(L^n) = Tr\, \mathrm{Res}\, d(L^n) = Tr\, \mathrm{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} L^s(dL)L^{n-1-s}\Big)$$

$$\sim Tr\, \mathrm{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} L^{n-1-s}L^s dL\Big) = n\, Tr\, \mathrm{Res}(L^{n-1}dL)$$

$$\sim Tr\, \mathrm{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1}(dL)L^{n-1-s}L^s\Big) = n\, Tr\, \mathrm{Res}((dL)L^{n-1}). \quad \blacksquare$$

Замечание 1.2.11. Формула вычетов (1.2.10) остается, очевидно, верной для любого L вида

$$L = \sum_{i=-\infty}^{1} f_i \xi^i, \quad f_i \in \mathrm{Mat}_{(\cdot)}(R). \tag{1.2.12}$$

Вернемся теперь к элементу

$$L = \xi + \sum A_i \xi^{-i-1} \tag{1.2.13}$$

из §1.1, где $A_i = (A_{i|\alpha\beta})$ есть $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$-матрицы с коммутирующими элементами, и дифференциальная алгебра R есть

$$R = \mathcal{F}[A^{(j)}_{i|\alpha\beta}]. \tag{1.2.14}$$

Положим

$$L^n = \sum_k \xi^k p_k(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.15}$$

$$H_n = n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(L^n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.16}$$

Применяя формулу (1.2.10) к элементу L (1.2.13), получаем

$$d(H_n) \sim Tr\, \mathrm{Res}\Big(\sum dA_i \xi^{-i-1}\xi^k p_k(n-1)\Big)$$
$$= Tr\Big(\sum dA_i p_i(n-1)\Big) = \sum dA_{i|\alpha\beta} p_{i|\beta\alpha}(n-1). \tag{1.2.17}$$

Из вариационного исчисления следует (см., напр. [Ман 1978], или [Kup 1992], или Главу 4)

$$p_i(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_i^t}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.2.18}$$

или, в компонентах,

$$p_{i|\alpha\beta}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{i|\beta\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2.19}$$

Остается подставить уравнения (1.2.18), (1.2.19) в уравнения движения (1.1.15) иерархии КП. Положим $\mathrm{const}_n = 1$ и найдем:

$$\begin{aligned}
\partial_{t_n}(L) &= \sum \partial_{t_n}(A_i)\xi^{-i-1} = [(L^n)_+, L] = [(L^n)_+, L]_- = [(L^n)_+, L_-]_- \\
&= [\sum_{k\geqslant 0} \xi^k p_k(n),\ \sum A_j \xi^{-j-1}]_- \\
&= \Big(\sum_{k,j\geqslant 0} [\xi^k p_k(n) A_j \xi^{-j-1} - A_j \xi^{-j-1+k} p_k(n)]\Big)_- \\
&= \Big(\sum \binom{k}{s} (p_k(n)A_j)^{(s)} \xi^{k-s-j-1}\Big)_- - \sum A_{k+s}\xi^{-s-1}p_k(n) \\
&= \sum \binom{k}{s} (p_k(n)A_{i+k-s})^{(s)} \xi^{-i-1} - \sum A_{k+s}[p_k(n)]^{(s')}\xi^{-s-1-s'}\binom{-s-1}{s'} \\
&= \sum \Big[\binom{k}{s} (p_k(n)A_{i+k-s})^{(s)} - A_{i+k-s}\binom{i}{s}(-1)^s[p_k(n)]^{(s)}\Big]\xi^{-i-1} \quad \Rightarrow
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

$$\partial_{t_n}(A_i) = \sum_{k,s\geqslant 0}\Big[\binom{k}{s}\partial^s(p_k(n)A_{i+k-s}) - \binom{i}{s}A_{i+k-s}(-\partial)^s(p_k(n))\Big], \tag{1.2.21}$$

или

$$\partial_{t_n}(A_i) = \sum_{k,s\geqslant 0}\Big[\binom{k}{s}\widehat{L}(\partial^s)\widehat{R}(A_{i+k-s}) - \binom{i}{s}\widehat{L}(A_{i+k-s}(-\partial)^s)\Big](p_k(n)), \tag{1.2.22}$$

где $\widehat{L}(\cdot) = \widehat{L}_{(\cdot)}$ и $\widehat{R}(\cdot) = \widehat{R}_{(\cdot)}$ обозначают, соответственно, операторы левого и правого умножения на $(\cdot)$. Наконец, подставляя (1.2.18) в (1.2.22), мы получаем

$$\partial_{t_n}(A_i) = \sum\Big[\binom{k}{s}\widehat{L}(\partial^s)\widehat{R}(A_{i+k-s}) - \binom{i}{s}\widehat{L}(A_{i+k-s}(-\partial)^s)\Big]\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_k^t}\right), \tag{1.2.23}$$

или, покомпонентно,

$$\partial_{t_n}(A_{i|\alpha\beta}) = \sum\Big[\binom{k}{s}\partial^s\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{k|\gamma\alpha}}A_{i+k-s|\gamma\beta}\right) - \binom{i}{s}A_{i+k-s|\alpha\gamma}(-\partial)^s\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{k|\beta\gamma}}\right)\Big]. \tag{1.2.24}$$

Формула (1.2.24) и есть искомая гамильтонова форма матричной иерархии КП. Титул “гамильтонова” еще следует обосновать; этому посвящен остаток данного раздела.

Переписав уравнение (1.2.24) в предгамильтоновом виде

$$\partial_{t_n}(A_{i|\alpha\beta}) = \sum_{j,\varphi,\psi} B_{i|\alpha\beta}^{j|\varphi\psi}\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{j|\varphi\psi}}\right), \tag{1.2.25}$$

мы видим, что

$$B_{i|\alpha\beta}^{j|\varphi\psi} = \sum_s\Big[\binom{j}{s}\partial^s A_{i+j-s|\varphi\beta}\delta_\alpha^\psi - \binom{i}{s}A_{i+j-s|\alpha\psi}(-\partial)^s\delta_\beta^\varphi\Big]. \tag{1.2.26}$$

Нам надо показать, что матрица B (1.2.26) “гамильтонова”. Это свойство является дифференциальной версией классико-механических свойств скобки Пуассона: кососимметричность и тождество Якоби. Так как в данный момент было бы неуместно развивать с нуля современный гамильтонов формализм, читателю, незнакомому с предметом, придется либо обратиться к другим источникам, либо подождать до главы 5. В рассматриваемом случае, матрица B (1.2.26) *линейна* по базисным переменным $A_{i|\alpha\beta}$ и, согласно одному из основных результатов гамильтонова формализма, такая матрица гамильтонова, если и только если ассоциированная с ней алгебра является алгеброй Ли. Коммутатор в алгебре, связанной с матрицей $\bar{B} = (\bar{B}_{ij})$, линейной по переменным q_k определяется следующим образом:

$$\sum_{i,j} X_i \bar{B}_{ij}(Y_j) \sim \sum_k q_k [X, Y|_k. \tag{1.2.27}$$

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned}
&\sum X_{i|\alpha\beta} B^{j|\varphi\psi}_{i|\alpha\beta}(Y_{j|\varphi\psi}) = \\
&\quad = \sum X_{i|\alpha\beta}\Big[\binom{k}{s}[Y_{k|\gamma\alpha} A_{i+k-s|\gamma\beta}]^{(s)} - \binom{i}{s} A_{i+k-s|\alpha\gamma}(-1)^s Y^{(s)}_{k|\beta\gamma}\Big] \\
&\quad \sim \sum \Big[A_{i+k-s|\gamma\beta}\binom{k}{s}(-1)^s X^{(s)}_{i|\gamma\beta} Y_{k|\gamma\alpha} - A_{i+k-s|\alpha\gamma}(-1)^s \binom{i}{s} X_{i|\alpha\beta} Y^{(s)}_{k|\beta\gamma}\Big] \\
&\quad = \sum \Big[A_{i+k-s|\gamma\beta}\binom{k}{s}(-1)^s (Y_k X_i^{(s)})_{|\gamma\beta} - A_{i+k-s|\alpha\gamma}\binom{i}{s}(-1)^s (X_i Y_k^{(s)})_{|\alpha\gamma}\Big] \\
&\quad = \sum A_{i+k-s|\varphi\psi}\Big[\binom{k}{s}(-1)^s Y_k X_i^{(s)} - \binom{i}{s}(-1)^s X_i Y_k^{(s)}\Big]_{|\varphi\psi} \\
&\quad = \sum A^t_{i+j-s}\Big[\binom{j}{s} Y_j(-\partial)^s(X_i) - \binom{i}{s} X_i(-\partial)^s(Y_j)\Big].
\end{aligned} \tag{1.2.28}$$

Следовательно, на матричном языке,

$$[X, Y]_k = \sum_{i+j-s=k} \Big[\binom{j}{s} Y_j(-\partial)^s(X_i) - \binom{i}{s} X_i(-\partial)^s(Y_j)\Big]. \tag{1.2.29}$$

Теперь положим

$$\widehat{X} = \sum_{i\geqslant 0} X_i(-\xi)^i, \quad \widehat{Y} = \sum_{j\geqslant 0} Y_j(-\xi)^j, \tag{1.2.30a}$$

умножим формулу (1.2.29) справа на $(-\xi)^k$ и просуммируем по k. Получим

$$\begin{aligned}
\sum_k [X, Y]_k(-\xi)^k &= \sum \Big[\binom{j}{s} Y_j(-\partial)^s(X_i)(-\xi)^{i+j-s} - \binom{i}{s} X_i(-\partial)^s(Y_j)(-\xi)^{i+j-s}\Big] \\
&= \sum [Y_j(-\xi)^j X_i(-\xi)^i - X_i(-\xi)^i Y_j(-\xi)^j] = [\widehat{Y}, \widehat{X}].
\end{aligned} \tag{1.2.30b}$$

Это показывает, что формула умножения (1.2.29) действительно связанна с (противоположной) алгеброй Ли обыкновенных дифференциальных операторов с матричными коэффициентами. Следовательно, матрица B (1.2.26) гамильтонова. Следовательно, гамильтоново и представление (1.2.24) матричной иерархии КП.

1.3 Кватернионная иерархия КП

> *Пора реформ* — *Не* во время войны, когда все спешка и смятение, и умы слишком разгорячены и возбуждены, чтобы браться за столь серьезное дело. *Не* во время мира, так как тогда было бы безумием тревожить спокойствие нации.
>
> Шарль Пиго, *Политический словарь: объяснение истинных значений слов* (1794)

В этом разделе мы рассматриваем специальный случай, когда некоммутирующие переменные $A_i^{(j)}$ из §1.1 являются кватернионами. Будет показано, что возникающая кватернионная иерархия КП является гамильтоновой системой.

В §1.1 коэффициенты A_i оператора Лакса

$$L = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} A_i \xi^{-i-1} \tag{1.3.1}$$

были произвольными некоммутирующими переменными; например, они могли быть матрицами размера $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$. Чем бы они ни были, потоки КП

$$\partial_{t_n}(L) = [(L^n)_+, L] = [L, (L^n)_-], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3.2}$$

взаимно коммутируют. В §1.2 мы видели, что когда переменные A_i являются матрицами, сохраняющиеся плотности

$$H_n = n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(L^n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3.3}$$

порождают потоки КП при помощи гамильтоновой матрицы B (1.2.26).

Допустим, мы хотим интерпретировать образующие A_i, как ***кватернионы***, — можем ли мы себе это позволить, и что происходит при этом с гамильтоновым формализмом? Прежде всего, кватернионная точка зрения, конечно же законна, так как кватернионы образуют *ассоциативное* кольцо $\mathbb{H}$; тогда как, например, октавы были бы запрещены. Во-вторых, сохраняющиеся плотности H_n (1.3.3) выживают при кватернионной специализации и принимают вид

$$H_n = 4n^{-1}\, \mathrm{Re}[\mathrm{Res}(L^n)], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3.4}$$

где, для кватерниона

$$q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}, \tag{1.3.5}$$

вещественная часть $\mathrm{Re}(q)$ определяется как

$$\mathrm{Re}(q) = q_0; \tag{1.3.6}$$

равенство (1.3.4) следует из ***матричного представления*** кольца кватернионов $\mathbb{H}$, как подпространства и подкольца в $\mathrm{Mat}_4(\cdot)$:

$$\widehat{L}_q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}, \tag{1.3.7}$$

и из тождества

$$Tr(\widehat{L}_{\boldsymbol{q}}) = 4\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}). \tag{1.3.8}$$

Альтернативно, можно обойтись без представления в матрицах 4×4 и вывести, что H_n (1.3.4) служат сохраняющимися плотностями кватернионной иерархии КП, из следующего свойства кватернионов:

$$\mathrm{Re}([\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]) = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}. \tag{1.3.9}$$

В-третьих, при специализации переменных ("наложении связей") в гамильтоновой системе, мы получаем систему, вообще говоря, уже не гамильтонову. (Это опытный факт, не связанный с теорией Дирака.) В нашем случае, нам придется опять запустить аппарат вычетов из предыдущего раздела и проверить, что из этого выйдет.

Сохраняя обозначения (1.2.15),

$$L^n = \sum \xi^k \boldsymbol{p}_k(n) \quad \text{или} \quad L^n = \sum \xi^k \widehat{L}_{\boldsymbol{p}_k(n)}, \tag{1.3.10}$$

и повторяя вычисление (1.2.17) для представлении 4×4, мы находим, что

$$d(H_n) \sim \sum (\widehat{L}_{d\boldsymbol{A}_i})_{\alpha\beta} (\widehat{L}_{\boldsymbol{p}_i(n-1)})_{\beta\alpha} = \sum_i Tr(\widehat{L}_{d\boldsymbol{A}_i} \widehat{L}_{\boldsymbol{p}_i(n-1)}). \tag{1.3.11}$$

Далее, имеем

$$\widehat{L}_{\boldsymbol{q}} \widehat{L}_{\boldsymbol{p}} = \widehat{L}_{\boldsymbol{qp}}, \quad \forall\, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{H}, \tag{1.3.12}$$

$$(\widehat{L}_{\boldsymbol{q}})^t = \widehat{L}_{\bar{\boldsymbol{q}}}, \quad \forall\, \boldsymbol{q} \in \mathbb{H}, \tag{1.3.13}$$

где ***сопряженный кватернион*** $\bar{q}$ определяется по правилу

$$\overline{q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}} = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k}. \tag{1.3.14}$$

Следовательно, (1.3.11) принимает вид

$$d(H_n) \sim 4\,\mathrm{Re}[(d\boldsymbol{A}_i)\boldsymbol{p}_i(n-1)] = 4\,\mathrm{Re}[\boldsymbol{p}_i(n-1)d\boldsymbol{A}_i]. \tag{1.3.15}$$

Обозначая

$$\boldsymbol{A}_i = A_{i|0} + A_{i|1}\boldsymbol{i} + A_{i|2}\boldsymbol{j} + A_{i|3}\boldsymbol{k}, \tag{1.3.16}$$

$$\boldsymbol{p}_i(n) = p_{i|0}(n) + p_{i|1}(n)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{p}_{i|2}(n)\boldsymbol{j} + p_{i|3}(n)\boldsymbol{k}, \tag{1.3.17}$$

мы находим, что

$$d(H_n) \sim 4 \sum_{l=1}^{4} p_{i|l}(n-1) dA_{i|l} \varepsilon_l, \tag{1.3.18a}$$

где

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1. \tag{1.3.18b}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{p}_{i|l}(n) = \frac{1}{4} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{i|l}} \varepsilon_l, \tag{1.3.19}$$

или

$$\bar{p}_i(n) = \frac{1}{4}\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_i}, \quad p_i(n) = \frac{1}{4}\frac{\delta H_{n+1}}{\delta \overline{A}_i}. \tag{1.3.20}$$

Остается подставить выражение (1.3.20) в формулу (1.2.22):

$$\partial_{t_n}(A_i) = \sum \left[\binom{k}{s} \widehat{L}(\partial^s)\widehat{R}(A_{i+k-s}) - \binom{i}{s} \widehat{L}(A_{i+k-s}(-\partial)^s) \right] (p_k(n)). \tag{1.3.21}$$

Для кватерниона q, обозначим через $\widetilde{q}$ вектор-столбец

$$\widetilde{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^t. \tag{1.3.22}$$

Тогда

$$\widetilde{qp} = \widehat{L}_q(\widetilde{p}) = \widehat{R}_p(\widetilde{q}), \tag{1.3.23}$$

где

$$\widehat{R}_p = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix}. \tag{1.3.24}$$

Следовательно, (1.3.21) можно переписать в виде

$$\partial_{t_n}(\widetilde{A}_i) = \sum \left[\binom{k}{s} \partial^s \widehat{R}_{A_{i+k-s}} - \binom{i}{s} \widehat{L}_{A_{i+k-s}}(-\partial)^s \right] \left(\frac{\delta H_{n+1}/4}{\delta \widetilde{\overline{A}}_k} \right), \tag{1.3.25}$$

или, в компонентах,

$$\partial_{t_n}(A_{i|l}) = \sum \left[\binom{k}{s} \partial^s (\widehat{R}_{A_{i+k-s}})_{ll'} - \binom{i}{s} (\widehat{L}_{A_{i+k-s}})_{ll'}(-\partial)^s \right] \left(\frac{\delta H_{n+1}/4}{\delta A_{k|l'}} \varepsilon_{l'} \right). \tag{1.3.26}$$

Таким образом, n-й поток кватернионной иерархии КП записался в предгамильтоновом виде

$$\partial_{t_n}(A_{i|l}) = \sum B_{i|l}^{k|l'} \left(\frac{\delta H_{n+1/4}}{\delta A_{k|l'}} \right), \tag{1.3.27}$$

где

$$B_{i|l}^{k|l'} = \sum_s \left[\binom{k}{s} \partial^s \widehat{R}_{A_{i+k-s}} - \binom{i}{s} \widehat{L}_{A_{i+k-s}}(-\partial)^s \right]_{ll'} \varepsilon_{l'}. \tag{1.3.28}$$

Теорема 1.3.29. Матрица B (1.3.28), а с ней и кватернионная иерархия КП, гамильтонова.

Доказательство. Так как матрица B (1.3.28) линейна по базисным переменным $A_{i|l}$, то достаточно проверить, что алгебра, естественно связанная с матрицей B по формуле (1.2.27), есть алгебра Ли. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum X_{i|l} B^{k|l'}_{i|l}(Y_{k|l'}) = \\
&= \sum X_{i|l}\left[\binom{k}{s}\partial^s(\widehat{R}_{A_{i+k-s}})_{ll'} - \binom{i}{s}(\widehat{L}_{A_{i+k-s}})_{ll'}(-\partial)^s\right]\varepsilon_{l'}(Y_{k|l'}) \\
&\sim \sum\left[(-1)^s X^{(s)}_{i|l}\binom{k}{s}(\overline{\boldsymbol{Y}}_k \boldsymbol{A}_{i+k-s})_{|l} - \binom{i}{s}X_{i|l}(\boldsymbol{A}_{i+k-s}\overline{\boldsymbol{Y}}^{(s)}_k)_{|l}(-1)^s\right] \\
&= \sum \mathrm{Re}(-1)^s\left[\overline{\boldsymbol{X}}^{(s)}_i\overline{\boldsymbol{Y}}_k\boldsymbol{A}_{i+k-s}\binom{k}{s} - \binom{i}{s}\overline{\boldsymbol{X}}_i\boldsymbol{A}_{i+k-s}\overline{\boldsymbol{Y}}^{(s)}_k\right] \\
&= \mathrm{Re}\Big(\sum(-1)^s\boldsymbol{A}_{i+k-s}\Big[\binom{k}{s}\overline{\boldsymbol{X}}^{(s)}_i\overline{\boldsymbol{Y}}_k - \binom{i}{s}\overline{\boldsymbol{Y}}^{(s)}_k\overline{\boldsymbol{X}}_i\Big]\Big) \\
&= \sum A_{i+k-s|l}(-1)^s\left[\binom{k}{s}\boldsymbol{X}^{(s)}_i\boldsymbol{Y}_k - \binom{i}{s}\boldsymbol{Y}^{(s)}_k\boldsymbol{X}_i\right]_{|l'},
\end{aligned} \tag{1.3.30}$$

так что, в кватернионнной форме записи,

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_k = \sum_{i+j-s=k}(-1)^s\left[\binom{j}{s}\boldsymbol{X}^{(s)}_i\boldsymbol{Y}_j - \binom{i}{s}\boldsymbol{Y}^{(s)}_j\boldsymbol{X}_i\right], \tag{1.3.31}$$

где

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_i), \quad \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}_i). \tag{1.3.32}$$

Теперь обозначим

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = \sum \xi^i \boldsymbol{X}_i, \quad \widehat{\boldsymbol{Y}} = \sum \xi^j \boldsymbol{Y}_j, \tag{1.3.33}$$

умножим обе стороны (1.3.31) на ξ^k слева и просуммируем по k :

$$\begin{aligned}
&\sum_k \xi^k[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_k = [\widehat{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}] = \sum \xi^{i+j-s}(-1)^s\left[\binom{j}{s}\boldsymbol{X}^{(s)}_i\boldsymbol{Y}_j - \binom{i}{s}\boldsymbol{Y}^{(s)}_j\boldsymbol{X}_i\right] = \\
&\overset{(1.3.36)}{=} \sum(\xi^i\boldsymbol{X}_i\xi^j\boldsymbol{Y}_j - \xi^j\boldsymbol{Y}_j\xi^i\boldsymbol{X}_i) = [\widehat{\boldsymbol{X}},\widehat{\boldsymbol{Y}}].
\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Таким образом, умножение (1.3.31) есть покомпонентная форма записи коммутатора в алгебре Ли левосторонних обыкновенных дифференциальных операторов с кватернионнно-значными коэффициентами. Следовательно, матрица B (1.3.28) гамильтонова. ∎

Упражнение 1.3.35. Покажите, что если R – дифференциальное кольцо с дифференцированием ∂, то в $R((\xi^{-1}))$

$$\bar{r}\xi^k = \sum_s(-1)^s\binom{k}{s}\xi^{k-s}\bar{r}^{(s)}, \quad \forall\, \bar{r} \in R,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{1.3.36}$$

Упражнение 1.3.37. Проверьте формулы (1.2.29) и (1.3.31).
[Подсказка : попробуйте транспонировать.]

Итак, кватернионнная редукция 4 × 4–матричной иерархия КП остается гамильтоновой системой. Это приятно, но почему так случилось? Чувствуется, что у этого чуда должна быть глубокая причина. В данный момент не ясно, что это за общий принцип, или почему он должен существовать. Вместо этого, в следующем разделе мы установим достаточно общий факт сохранения гамильтоновости в общем случае, когда базисные переменные принимают значения в конечномерной невырожденной ассоциативной алгебре.

1.4 Иерархия КП со значениями в конечномерных ассоциативных алгебрах

Пусть $\mathcal{A}$ — конечномерная ассоциативная алгебра над $\mathcal{F}$. В этом разделе *не* предполагается, что $\mathcal{A}$ имеет единицу. Единственное техническое предположение, которое мы сделаем, это *невырожденность* $\mathcal{A}$. Это означает, что симметричная билинейная форма на $\mathcal{A}$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = Tr(\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}\widehat{L}_{\boldsymbol{y}}), \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{A} \tag{1.4.1}$$

невырождена; здесь $\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}$ обозначает оператор левого умножения в $\mathcal{A}$:

$$\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}. \tag{1.4.2}$$

Переменные $A_i^{(j)}$ абстрактной иерархии КП из §1.1 теперь принимают значения в $\mathcal{A}$. Отсюда немедленно вытекает, что существует бесконечно много общих сохраняющихся плотностей иерархии КП:

$$\bar{H}_n = Tr\big(\widehat{L}_{\mathrm{Res}(L^n)}\big), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4.3}$$

Вопрос в том, выживает ли гамильтонов формализм.

Пусть

$$(e^\alpha), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant \tilde{l} = \dim_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \tag{1.4.4}$$

есть базис в $\mathcal{A}$. В этом базисе, каждый элемент

$$\boldsymbol{x} = \sum x_\alpha e^\alpha \tag{1.4.5}$$

можно представить, как вектор-столбец

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1, \ldots, x_{\tilde{l}})^t. \tag{1.4.6}$$

Кроме того, пусть $(c_\gamma^{\alpha\beta})$ будут структурными константами $\mathcal{A}$ в выбранном базисе:

$$e^\alpha e^\beta = \sum_\gamma c_\gamma^{\alpha\beta} e^\gamma. \tag{1.4.7}$$

Тогда операторы $\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}$ станут, в данном базисе, матрицами $\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}$:

$$\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}(\tilde{\boldsymbol{y}}) = \widetilde{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}. \tag{1.4.8}$$

Так как

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \Big(\sum x_\alpha e^\alpha\Big)\Big(\sum y_\beta e^\beta\Big) = \sum x_\alpha y_\beta c_\gamma^{\alpha\beta} e^\gamma, \tag{1.4.9}$$

мы заключаем, что элементы матрицы $\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}$ равны

$$(\widehat{L}_{\boldsymbol{x}})_\alpha{}^\beta = \sum_\gamma c_\alpha^{\gamma\beta} x_\gamma. \tag{1.4.10}$$

Поэтому,

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{y}}) = \sum x_\alpha y_\beta c_\gamma^{\alpha\tau} c_\tau^{\beta\gamma} = \sum \rho^{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \tag{1.4.11}$$

где

$$\rho^{\alpha\beta} = \rho^{\beta\alpha} = \sum_{\gamma\tau} c_\gamma^{\alpha\tau} c_\tau^{\beta\gamma} \tag{1.4.12}$$

есть матрица скалярного произведения в выбранном базисе:

$$(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}) = \widetilde{\boldsymbol{x}}^t \rho \widetilde{\boldsymbol{y}}. \tag{1.4.13}$$

Наше предположение о невырожденности $\mathcal{A}$ эквивалентно тому, что симметричная матрица $\rho = (\rho^{\alpha\beta})$ обратима, так что существует *обратная* матрица ρ^{-1}. (Например, алгебра матриц $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(\mathcal{F})$ невырождена.)

Как и в предыдущем разделе для случая кольца кватернионов, представив наши переменные $\boldsymbol{A}_i^{(j)}$ в виде $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$–матриц $\widehat{L}_{\boldsymbol{A}_i^{(j)}}$, мы можем запускать аппарат вычетов. При обозначениях

$$L^n = \sum \xi^k \boldsymbol{p}_k(n) \quad \text{или} \quad L^n = \sum \xi^k \widehat{L}_{\boldsymbol{p}_k(n)}, \tag{1.4.14}$$

$$H_n = n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(L^n), \tag{1.4.15}$$

формула (1.2.17) дает

$$(H_n) \sim \sum \big(\widehat{L}_{d\boldsymbol{A}_i}\big)_{\alpha\beta} \big(\widehat{L}_{\boldsymbol{p}_i(n-1)}\big)_{\beta\alpha} = \sum_i Tr\big(\widehat{L}_{d\boldsymbol{A}_i} \widehat{L}_{\boldsymbol{p}_i(n-1)}\big)$$

$$= \sum (d\boldsymbol{A}_i,\ \boldsymbol{p}_i(n-1)) = \sum (d\widetilde{\boldsymbol{A}}_i)^t \rho \widetilde{\boldsymbol{p}}_i(n-1). \tag{1.4.16}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_i(n) = \rho^{-1}\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta \widetilde{\boldsymbol{A}}_i}\right), \tag{1.4.17}$$

или, в компонентах,

$$\boldsymbol{p}_{i|\alpha}(n) = \sum (\rho^{-1})_{\alpha\beta}\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{i|\beta}}\right). \tag{1.4.18}$$

Остается подставить формулы (1.4.17, 18) в (1.2.21, 22):

$$\partial_{t_n}(A_{i|\alpha}) = \sum \Bigg[\binom{k}{s} \partial^s \big(\widehat{R}_{A_{i+k-s}}\big)_\alpha{}^\beta -$$

$$- \binom{i}{s} \big(\widehat{L}_{A_{i+k-s}}\big)_\alpha{}^\beta (-\partial)^s\Bigg] (\rho^{-1})_{\beta\gamma}\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{k|\gamma}}\right), \tag{1.4.19}$$

где $\widehat{R}_{\boldsymbol{x}}$ оператор правого умножения на $\boldsymbol{x}$:

$$\widehat{R}_{\boldsymbol{x}}(\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \widetilde{\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}. \tag{1.4.20}$$

Формула (1.4.19), переписанная в виде

$$\partial_{t_n}(A_{i|\alpha}) = \sum B_{i|\alpha}^{k|\gamma}\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_{k|\gamma}}\right), \tag{1.4.21}$$

где

$$B_{i|\alpha}^{k|\gamma} = \sum_{s,\beta} \Bigg[\binom{k}{s} \partial^s \big(\widehat{R}_{A_{i+k-s}}\big)_\alpha{}^\beta - \binom{i}{s} \big(\widehat{L}_{A_{i+k-s}}\big)_\alpha{}^\beta (-\partial)^s\Bigg] (\rho^{-1})_{\beta\gamma}, \tag{1.4.22}$$

приводит к предгамильтоновой форме динамики.

Теорема 1.4.23. *Матрица B (1.4.22) гамильтонова, а с ней и $\mathcal{A}$–значная иерархия КП.*

Доказательство. Согласно уже знакомой схеме рассуждений, мы должны доказать лиевость алгебры, ассоциированной с матрицей B (1.4.22) при помощи определяющего соотношения (1.2.27). Итак,

$$\sum X_{i|\alpha}B^{k|\gamma}_{i|\alpha}(\boldsymbol{Y}_{k|\gamma}) \sim \sum(-1)^s X^{(s)}_{i|\alpha}\binom{k}{s}[\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)\boldsymbol{A}_{i+k-s}]_{|\alpha} - \\ -\sum\binom{i}{s}X_{i|\alpha}[\boldsymbol{A}_{i+k-s}\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}^{(s)}_k)]_{|\alpha}(-1)^s, \quad (1.4.24)$$

где оператор ρ^{-1} определяется в выбранном базисе, как

$$[\rho^{-1}(\boldsymbol{x})]_\alpha = \sum(\rho^{-1})_{\alpha\beta}x_\beta = [\rho^{-1}(\widetilde{x})]_\alpha. \quad (1.4.25)$$

Далее,

$$\sum_\alpha X^{(s)}_{i|\alpha}[\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)\boldsymbol{A}_{i+k-s}]_{|\alpha} = \widetilde{\boldsymbol{X}}^{(s)t}_i\ \widetilde{\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)\boldsymbol{A}_{i+k-s}} = \\ = |\rho(\rho^{-1}(\widetilde{\boldsymbol{X}}^{(s)}_i))]^t\ \widetilde{\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)\boldsymbol{A}_{i+k-s}} = (\rho^{-1}(\boldsymbol{X}^{(s)}_i), \rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)\boldsymbol{A}_{i+k-s}) \\ \overset{(1.4.28)\text{ ниже}}{=} (\rho^{-1}(\boldsymbol{X}^{(s)}_i)\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k),\ \boldsymbol{A}_{i+k-s}) = \widetilde{\boldsymbol{A}}^t_{i+k-s}\rho\widetilde{|\rho^{-1}(\boldsymbol{X}^{(s)}_i)\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)]}. \quad (1.4.26)$$

Лемма 1.4.27. (Инвариантность скалярного произведения)

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \quad \forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathcal{A}. \quad (1.4.28)$$

Доказательство. Так как $\mathcal{A}$ ассоциативна, то

$$\widehat{L}_{\boldsymbol{xy}} = \widehat{L}_{\boldsymbol{x}}\widehat{L}_{\boldsymbol{y}}, \quad \forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}. \quad (1.4.29)$$

Следовательно,

$$(x,\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}) = Tr(\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}\widehat{L}_{\boldsymbol{yz}}) = Tr(\widehat{L}_{\boldsymbol{x}}\widehat{L}_{\boldsymbol{y}}\widehat{L}_{\boldsymbol{z}}) = Tr(\widehat{L}_{\boldsymbol{xy}}\widehat{L}_{\boldsymbol{z}}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).$$

∎

Аналогично мы можем преобразовать второе слагаемое в выражении (1.4.24):

$$\sum_\alpha X_{i|\alpha}[\boldsymbol{A}_{i+k-s}\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}^{(s)}_k)]_{|\alpha} = \widetilde{[\boldsymbol{A}_{i+k-s}\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}^{(s)}_k)]^t\rho(\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i))} = \\ = (\boldsymbol{A}_{i+k-s}\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}^{(s)}_k),\ \rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i)) \\ \overset{(1.4.28)}{=} (\boldsymbol{A}_{i+k-s},\ \rho^{-1}(\boldsymbol{Y}^{(s)}_k)\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i)) = \widetilde{\boldsymbol{A}}^t_{i+k-s}\rho\ \widetilde{[\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}^{(s)}_k)\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i)]}\ . \quad (1.4.30)$$

Подставляя (1.4.26) и (1.4.30) в (1.4.24), получаем

$$\sum X_{i|\alpha}B^{k|\gamma}_{i|\alpha}(\boldsymbol{Y}_{k|\gamma})$$

$$\sim\sum\widetilde{\boldsymbol{A}}^{t}_{i+k-s}\rho(-1)^{s}\Big[\binom{k}{s}\overbrace{\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i^{(s)})\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)}-\binom{i}{s}\overbrace{\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k^{(s)})\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i)}\Big]\quad\Rightarrow \tag{1.4.31}$$

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_j=\rho\sum_{i+k-s=j}(-1)^{s}\Big[\binom{k}{s}\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i^{(s)})\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)-\binom{i}{s}\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k^{(s)})\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i)\Big]\quad\Rightarrow \tag{1.4.32}$$

$$\rho^{-1}([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_j)=\sum_{i+k-s=j}(-1)^{s}\Big[\binom{k}{s}\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i^{(s)})\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k)-\binom{i}{s}\rho^{-1}(\boldsymbol{Y}_k^{(s)})\rho^{-1}(\boldsymbol{X}_i)\Big]. \tag{1.4.33}$$

Мы видим, что коммутатор в алгебре, ассоциированной с матрицей B (1.4.22), сопряжен линейным обратимым преобразованием ρ^{-1} с коммутатором

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_j=\sum_{i+k-s=j}(-1)^{s}\Big[\binom{k}{s}\boldsymbol{X}_i^{(s)}\boldsymbol{Y}_k-\binom{i}{s}\boldsymbol{Y}_k^{(s)}\boldsymbol{X}_i\Big]. \tag{1.4.34}$$

Но этот коммутатор имеет точно тот же вид, что и (1.3.31). Следовательно, он является компонентной формой записи коммутатора в алгебре Ли левосторонних обыкновенных дифференциальных операторов с коэффициентами в $\mathcal{A}\underset{\mathcal{F}}{\otimes}\bar{R}$, где $\bar{R}$ произвольная дифференциальная алгебра. ▮

Другое доказательство будет представлено в §2.3.

Таким образом, для любой невырожденной конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$-значная иерархии КП является гамильтоновой системой. Вас это уже не удивляет? Ладно, *вся* правда значительно менее ясна. Рассмотрим два примера.

Первый пример. Пусть $\mathcal{A}$ двумерна и коммутативна,

$$\mathcal{A}=\mathcal{F}e^1\oplus\mathcal{F}e^2, \tag{1.4.35}$$

$$e^1=1,\quad e^2e^2=0\quad(=0e^1). \tag{1.4.36}$$

Тогда

$$\widehat{L}_{e^1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad\widehat{L}_{e^2}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \tag{1.4.37}$$

так что

$$\rho=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}. \tag{1.4.38}$$

Таким образом, матрица ρ вырождена, а с ней и $\mathcal{A}$. Тем не менее, $\mathcal{A}$-значная иерархия КП *все еще* гамильтонова. Чтобы увидеть это, заметим, что формулу (1.4.36) можно интерпретировать, как осуществление подстановки

$$A_i=A_{i|1}+\varepsilon A_{i|2},\quad\varepsilon^2=0 \tag{1.4.39}$$

в коммутативной скалярной (то есть, $\tilde{l}=1$) иерархии КП, с последующим приравниванием членов с одинаковой степенью по ε в полученных уравнениях движения. Но формула (1.4.39) и следующая из нее процедура есть ни что иное, как *линеаризация* исходной коммутативной иерархии КП, а эта процедура переводит *произвольную* гамильтонову систему опять в гамильтонову, причем *новый* гамильтониан получается линеаризацией старого. (Сама гамильтонова структура при линеаризации претерпевает менее очевидную метаморфозу. Полную теорию можно найти в [Kup 1992, гл. 12].)

Первая мораль: невырожденность $\mathcal{A}$ *не обязательна* для гамильтоновости $\mathcal{A}$-значной иерархии КП.

Замечание 1.4.40. Из формулы (1.4.37) мы видим, что все проделанное можно переформулировать, как подстановку матрицы $\begin{pmatrix} A_{i|1} & 0 \\ A_{i|2} & A_{i|1} \end{pmatrix}$ вместо A_i в коммутативной иерархии КП. (Верхне-треугольная версия дает то же самое.)

Второй Пример. Пусть $\mathcal{A}$ опять двумерна и коммутативна,

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}e^1 \oplus \mathcal{F}e^2, \tag{1.4.41a}$$

$$e^1 = 1, \quad e^2e^2 = -e^1. \tag{1.4.41b}$$

Тогда

$$\widehat{L}_{e^1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{L}_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.42}$$

так что

$$\rho = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{1.4.43}$$

Таким образом, $\mathcal{A}$ невырождена. Следовательно, по Теореме 1.4.23, $\mathcal{A}$–значная иерархия КП гамильтонова. Однако это только *половина* полной картины. Действительно, то что мы делаем, является *комплексификацией* коммутативной иерархии КП, то есть осуществлением подстановки

$$A_i = A_{i|1} + \varepsilon A_{i|2}, \quad \varepsilon^2 = -1, \tag{1.4.44}$$

с последующим собиранием коэффициентов при ε^0 и ε^1 в получающихся уравнениях. В Приложении A1 показано, что комплексификация произвольной *гамильтоновой* системы дает *бигамильтонову* систему.

Вторая мораль: $\mathcal{A}$–значная иерархия КП может иметь не одну гамильтонову структуру. Картина не ясна даже в случае, когда $\mathcal{A}$ коммутативна, например, когда $\mathcal{A} \approx \mathcal{F}[\varepsilon]/(p)$, для некоторого $p \in \mathcal{F}[\varepsilon]$. Случай $p = \varepsilon^2$ отвечает процедуре линеаризации из Первого Примера; более общий случай $p = \varepsilon^n$ разобран в приложении A2.

1.5 Одевающие движения

Иерархию КП из §1.1 можно интерпретировать, как *тень* другой иерархии, связанной с так называемым "одеванием" оператора Лакса L (1.1.14). В этом разделе мы исследуем уравнения движения в пространстве одевающих переменных.

Рассмотрим дифференциальную алгебру

$$R_{\mathcal{X}} = \mathcal{F}\langle \mathcal{X}_i^{(j)} \rangle, \quad i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.5.1}$$

и зафиксируем элемент

$$K = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i \xi^{-i} \in R_{\mathcal{X}}((\xi^{-1})). \tag{1.5.2}$$

Лемма 1.5.3. Элемент

$$L = K\xi K^{-1} \in R_{\mathcal{X}}((\xi^{-1})) \tag{1.5.4}$$

имеет вид

$$L = \xi + O(\xi^{-1}), \tag{1.5.5}$$

где

$$O(\xi^{s}) = \Big\{ \sum_{\mu \leqslant s} \bar{r}_\mu \xi^\mu \,|\, \bar{r}_\mu \in R_{\mathcal{X}} \Big\}, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{1.5.6}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} K = 1 + \mathcal{X}_1\xi^{-1} + O(\xi^{-2}) \quad &\Rightarrow \quad K^{-1} = 1 - \mathcal{X}_1\xi^{-1} + O(\xi^{-2}) \\ \Rightarrow \quad L = K\xi K^{-1} &= [1 + \mathcal{X}_1\xi^{-1} + O(\xi^{-2})]\xi[1 - \mathcal{X}_1\xi^{-1} + O(\xi^{-2})] \\ &= [\xi - \xi\mathcal{X}_1\xi^{-1} + O(\xi^{-1})] + [\mathcal{X}_1 + O(\xi^{-1})] + O(\xi^{-1}) \\ &= \xi - \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1 + O(\xi^{-1}) = \xi + O(\xi^{-1}). \end{aligned}$$

∎

Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть ∂_{t_n} обозначает эволюционное дифференцирование в $R_{\mathcal{X}}$, определенное следующим уравнением Вильсона в $R_{\mathcal{X}}((\xi^{-1}))$:

$$\partial_{t_n}(K) = -(K\xi^n K^{-1})_- K, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.5.7}$$

где const_n положена равной 1, для упрощения последующих выкладок. Заметим, что равенство (1.5.7) действительно определяет эволюционное дифференцирование в $R_{\mathcal{X}}$, так как правая часть (1.5.7) лежит в $O(\xi^{-1})$.

Утверждение 1.5.8. Из уравнений движения (1.5.7) следуют уравнения движения для $L = K\xi K^{-1}$:

$$\partial_{t_n}(L) = [(L^n)_+, L] = [L, (L^n)_-]. \tag{1.5.9}$$

Доказательство. Первое равенство в уравнении (1.5.9) следует из второго, как уже отмечалось. Далее, из уравнений движения (1.5.7) и формулы

$$\partial_{t_n}(K^{-1}) = -K^{-1}\partial_{t_n}(K)K^{-1} \tag{1.5.10}$$

получаем

$$\begin{aligned} \partial_{t_n}(L) &= \partial_{t_n}(K)\xi K^{-1} + K\xi(-K^{-1})\partial_{t_n}(K)K^{-1} \\ &= -(L^n)_- K\xi K^{-1} + K\xi K^{-1}(L^n)_- K K^{-1} = [K\xi K^{-1}, (L^n)_-] = [L, (L^n)_-]. \end{aligned}$$

∎

Таким образом, иерархия КП (1.5.9) есть следствие одевающей версии (1.5.7). Для полноты картины мы теперь покажем, что все потоки одевающей иерархии (1.5.7) коммутируют.

Теорема 1.5.11. Потоки (1.5.7) взаимно коммутируют.

Доказательство. Выберем $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$P = L^{n_1} = K\xi^{n_1}K^{-1}, \quad Q = L^{n_2} = K\xi^{n_2}K^{-1}, \quad \partial_{t_{n_1}} = \partial_P, \quad \partial_{t_{n_2}} = \partial_Q.$$

Надо показать, что $[\partial_P, \partial_Q] = 0$ в $R_{\mathcal{X}}$; это эквивалентно

$$[\partial_P, \partial_Q](K) = 0. \tag{1.5.12}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\partial_P\partial_Q(K) = \partial_P[(-Q_-)K] &= -[\partial_P(Q)]_-K - Q_-\partial_P(K) \\ &= -[Q, P_-]_-K - Q_-(-P_-K) = ([P_-, Q]_- + Q_-P_-)K.\end{aligned}$$

Переставляя P и Q, получаем

$$\partial_Q\partial_P(K) = ([Q_-, P]_- + P_-Q_-)K \quad \Rightarrow \quad [\partial_P, \partial_Q](K) = ?K,$$

где

$$\begin{aligned}? &= [P_-, Q]_- - [Q_-, P]_- - [P_-, Q_-] = \\ &= [P_-, Q_- + Q_+]_- + [P_+ + P_-, Q_-]_- - [P_-, Q_-]_- = \\ &= [P_+ + P_-, Q_+ + Q_-]_- = [P, Q]_- = 0.\end{aligned}$$

∎

Замечание 1.5.13. *Не известно,* является ли одевающая иерархия (1.5.7) гамильтоновой. (По слухам, это не так.)

Глава 2

Иерархия МКП

В этой главе мы строим модифицированную иерархию КП (= МКП) и изучаем ее основные свойства. Затем, мы рассматриваем редукцию иерархии МКП с бесконечным числом компонент, к иерархии уравнений волн на воде с дисперсией (= ДВВ), имеющей две компоненты. Последняя редуцируется далее к двум однокомпонентным иерархиям: иерархии Бюргерса и иерархии Кортевега-де Фриза.

2.1 Вывод основных уравнений и коммутативность потоков для иерархии МКП

В этом разделе мы сначала определим модифицированную иерархию КП (= МКП) и затем докажем, что все потоки этой иерархии взаимно коммутируют.

Мы стартуем с дифференциальной алгебры

$$R = \mathcal{F}\langle a_i^{(j)}\rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.1.1}$$

с некоммутирующими образующими $a_i^{(j)}$ и уже знакомым действием дифференцирования ∂ на образующие R, по правилу

$$\partial(a_i^{(j)}) = a_i^{(j+1)}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.1.2}$$

Для элемента $\mathcal{R} = \sum r_\mu \xi^\mu$ из $R((\xi^{-1}))$ и любого $\nu \in \mathbb{Z}$, определим проекцию $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}_{\leqslant\nu}$ по формуле

$$\Big(\sum_\mu r_\mu \xi^\mu\Big)_{\leqslant\nu} = \sum_{\mu\leqslant\nu} r_\mu \xi^\mu, \tag{2.1.3}$$

и аналогично определим $\mathcal{R}_{<\nu}$, $\mathcal{R}_{>\nu}$, и $\mathcal{R}_{\geqslant\nu}$. В том же духе, для любого элемента $\mathcal{R} = \sum \xi^\mu r_\mu$ из $R((\xi^{-1}))$ и любого $\nu \in \mathbb{Z}$, определим проекцию $\mathcal{R} \to {}_{\leqslant\nu}\mathcal{R}$ по правилу

$${}_{\leqslant\nu}\Big(\sum_\mu \xi^\mu r_\mu\Big) = \sum_{\mu\leqslant\nu} \xi^\mu r_\mu, \tag{2.1.4}$$

и аналогично определим ${}_{<\nu}\mathcal{R}$, ${}_{>\nu}\mathcal{R}$, и ${}_{\geqslant\nu}\mathcal{R}$. Теперь рассмотрим следующий оператор Лакса $\mathcal{L} \in R((\xi^{-1}))$:

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^{-i}. \tag{2.1.5}$$

n-й поток иерархии МКП — это эволюционное дифференцирование ∂_{t_n} в R, определенное следующим равенством в $R((\xi^{-1}))$:

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}] = \mathrm{const}_n[\mathcal{L},\ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.6}$$

где, как в §1.1, $\mathrm{const}_n = 1$ или n^{-1} в зависимости от обстоятельств.

Утверждение 2.1.7. Иерархия МКП корректно определена.

Доказательство. Во-первых, два равенства в (2.1.6) взаимосогласованы:

$$[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}] - [\mathcal{L},\ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)] = [{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n) + {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}^n, \mathcal{L}] = 0.$$

Далее, обозначая

$$\mathcal{L}^n = \sum_k \xi^k p_k(n), \tag{2.1.8}$$

получаем, из второго равенства (2.1.6), при $\mathrm{const}_n = 1$:

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = \sum_{i\geqslant 0} \partial_{t_n}(a_i)\xi^{-i} = [\mathcal{L},\ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)] = \Big[\xi + \sum_{j\geqslant 0} a_j \xi^{-j}, \sum_{k\leqslant 0} \xi^k p_k(n)\Big] = \\ = \sum_{k\geqslant 0} \xi^{-k}[p_{-k}(n)]^{(1)} + \sum_{j,k\geqslant 0} \big(a_j \xi^{-j-k} p_{-k}(n) - \xi^{-k} p_{-k}(n) a_j \xi^{-j}\big).\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Так как все слагаемые в выражении (2.1.9) лежат в подпространстве $R((\xi^{-1}))_{\leqslant 0}$, то эволюционное дифференцирование ∂_{t_n} определено корректно: $\partial_{t_n}(a_i)$ равен члену слева от ξ^{-i} в выражении (2.1.9), для любого $i \in \mathbb{Z}_+$. ∎

Более того, эти члены можно легко вычислить. Для дальнейшего выпишем $\partial_{t_n}(a_0)$ и $\partial_{t_n}(a_1)$:

$$\partial_{t_n}(a_0) = p_0(n)^{(1)} + [a_0, p_0(n)], \tag{2.1.10a}$$

$$\partial_{t_n}(a_1) = p_{-1}(n)^{(1)} + [a_0, p_1(n)] + [a_1, p_0(n)]. \tag{2.1.10b}$$

Перейдем к проблеме коммутативности потоков. Приведенные ниже рассуждения следуют методу Вильсона, использованному в §1.1 для случая иерархия КП. Выберем $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и обозначим $P = \mathcal{L}^{n_1}$, $Q = \mathcal{L}^{n_2}$, $\partial_P = \partial_{t_{n_1}}$, $\partial_Q = \partial_{t_{n_2}}$.

Теорема 2.1.11. Все потоки в иерархии МКП взаимно коммутируют.

Доказательство. Нужно показать, что $[\partial_P, \partial_Q](a_i) = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}_+$, а это то же, что

$$[\partial_P, \partial_Q](\mathcal{L}) = 0. \tag{2.1.12}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\partial_P \partial_Q(\mathcal{L}) = \partial_P[{}_{\geqslant 1}Q, \mathcal{L}] = [{}_{\geqslant 1}(\partial_P(Q)), \mathcal{L}] + [{}_{\geqslant 1}Q, \partial_P(\mathcal{L})] = \\ = [{}_{\geqslant 1}([Q,\ {}_{\leqslant 0}P]), \mathcal{L}] + [{}_{\geqslant 1}Q, [{}_{\geqslant 1}P, \mathcal{L}]].\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Меняя местами P и Q, получаем

$$\partial_Q \partial_P(\mathcal{L}) = [{}_{\geqslant 1}([P,\ {}_{\leqslant 0}Q]), \mathcal{L}] + [{}_{\geqslant 1}P, [{}_{\geqslant 1}Q, \mathcal{L}]]. \tag{2.1.14}$$

Вычитая (2.1.14) из (2.1.13), находим, что

$$[\partial_P, \partial_Q](\mathcal{L}) = [?, \mathcal{L}],$$

где

$$\begin{aligned} ? &= {}_{\geqslant 1}[Q,\ {}_{\leqslant 0}P] + {}_{\geqslant 1}[{}_{\leqslant 0}Q, P] + {}_{\geqslant 1}[{}_{\geqslant 0}Q,\ {}_{\geqslant 1}P] \qquad (2.1.15) \\ &= {}_{\geqslant 1}[{}_{\geqslant 1}Q,\ {}_{\leqslant 0}P] + {}_{\geqslant 1}[{}_{\leqslant 0}Q,\ {}_{\geqslant 1}P] + {}_{\geqslant 1}[{}_{\geqslant 1}Q,\ {}_{\geqslant 1}P] \\ &= {}_{\geqslant 1}\Big([{}_{\geqslant 1}Q + {}_{\leqslant 0}Q,\ {}_{\geqslant 1}P + {}_{\leqslant 0}P] - [{}_{\leqslant 0}Q,\ {}_{\leqslant 0}P]\Big) = {}_{\geqslant 1}([Q, P]) = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2 Гамильтонов формализм для иерархии МКП

В этом разделе мы выводим гамильтонову структуру иерархии МКП в случае, когда переменными $a_i^{(j)}$ служат матрицы размера $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$ с коммутирующими элементами.

Предположим, что $a_i^{(j)} = (a_{i|\alpha\beta}^{(j)})$ являются матрицами размера $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$ с взаимно коммутирующими элементами. В качестве R примем $\mathcal{F}[a_{i|\alpha\beta}^{(j)}]$, с естественным действием дифференцирования ∂ на образующие R :

$$\partial(a_{i|\alpha\beta}^{(j)}) = a_{i|\alpha\beta}^{(j+1)}; \qquad (2.2.1)$$

тогда мы можем построить $\mathrm{Mat}_{\widetilde{l}}(R)((\xi^{-1}))$ и выбрать там элемент

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^{-i}, \qquad (2.2.2)$$

где, как и прежде, ξ в (2.2.2) понимается, как $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$-матрица $\xi 1_{\widetilde{l}}$. Согласно формуле вычетов (1.2.10),

$$d\, Tr\, \mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) \sim n\, Tr\, \mathrm{Res}((d\mathcal{L})\mathcal{L}^{n-1}). \qquad (2.2.3)$$

Полагая

$$\mathcal{H}_n = n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(\mathcal{L}^n), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (2.2.4)$$

мы немедленно видим, как в §1.1, что $\mathcal{H}_n$ есть обычные сохраняющиеся плотности всех потоков МКП.

Наша цель — переписать уравнения движения (2.1.6) для n-го потока иерархии МКП в терминах вариационных производных $\mathcal{H}_{n+1}$. Полагая

$$\mathcal{L}^n = \sum_k \xi^k p_k(n), \qquad (2.2.5)$$

имеем из формулы вычетов (2.2.3), что

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}_{n+1}) \sim Tr\, \mathrm{Res}\Big(\sum da_i \xi^{-i} \xi^k p_k(n)\Big) &= Tr\Big(\sum da_i p_{i-1}(n)\Big) \\ &= \sum da_{i|\alpha\beta} p_{i-1|\beta\alpha}(n), \qquad (2.2.6) \end{aligned}$$

откуда

$$p_{i-1|\alpha\beta}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_{i|\beta\alpha}}, \qquad (2.2.7a)$$

или

$$p_{i-1}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_i^t}. \tag{2.2.7b}$$

В частности, для $i = 0$ и $i = 1$ получаем

$$p_0(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_1^t}, \quad p_{-1}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_0^t}. \tag{2.2.8}$$

Подставляя эти выражения в формулы (2.1.10), находим

$$\partial_{t_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial + [a_0, \ ] \\ \partial + [a_0, \ ] & [a_1, \ ] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathcal{H}_{n+1}/\delta a_0^t \\ \delta \mathcal{H}_{n+1}/\delta a_1^t \end{pmatrix}. \tag{2.2.9}$$

Обозначим

$$w_i = a_{i+2}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.2.10}$$

Тогда соотношение (2.2.7) дает

$$p_{i+1}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta w_i^t}. \tag{2.2.11}$$

Теперь используем первое равенство в определении (2.1.6) n–го потока МКП. Полагая опять $\mathrm{const}_n = 1$, мы находим, что

$$\begin{aligned} \left[\partial_{t_n}(\mathcal{L})\right]_{\leqslant -2} &= \sum_{i \geqslant 2} \partial_{t_n}(a_i)\xi^{-i} = \Big[\sum_{k \geqslant 1} \xi^k p_k(n),\ \xi + \sum a_j \xi^{-j}\Big]_{\leqslant -2} = \\ &= \sum_{k,j \geqslant 0} \left[\xi^{k+1} p_{k+1}(n) a_{j+1} \xi^{-j-1} - a_{j+1} \xi^{-j+k} p_{k+1}(n)\right]_{\leqslant -2} = \\ &= \sum \left[\binom{k+1}{s} [p_{k+1}(n) a_{j+1}]^{(s)} \xi^{k-s-j} - a_{j+1} \binom{k-j}{s} [p_{k+1}(n)]^{(s)} \xi^{k-s-j}\right]_{\leqslant -2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\partial_{t_n}(w_i) = \sum_{k+i+2=s+j} \left[\binom{k+1}{s} \partial^s \widehat{R}_{a_{j+1}} - \widehat{L}_{a_{j+1}} \binom{k-j}{s} \partial^s\right](p_{k+1}(n)). \tag{2.2.12}$$

Преобразуем отдельно каждое слагаемое в правой части (2.2.12). В первом слагаемом, так как $s \leqslant k + 1$, то должно быть $j \geqslant i + 1$; следовательно, $j + 1 \geqslant i + 2 \geqslant 2$. Поэтому

$$\sum_{k+i+2=s+j} \binom{k+1}{s} \partial^s \widehat{R}_{a_{j+1}}(p_{k+1}(n)) = \sum \binom{k+1}{s} \partial^s \widehat{R}_{w_{k+i+1-s}}(p_{k+1}(n)). \tag{2.2.13a}$$

Второе слагаемое дает:

$$\begin{aligned} -\sum_{j,k \geqslant 0} [a_{j+1}\xi^{-j+k} p_{k+1}(n)]_{-i-2} \xi^{i+2} &= -\sum_{j,k \geqslant 0} [a_{j+k+2} \xi^{-1-j} p_{k+1}(n)]_{i-2} \xi^{i+2} = \\ &= -\sum \left[w_{j+k} \binom{-1-j}{s} p_{k+1}(n)^{(s)} \xi^{-1-j-s}\right]_{-i-2} \xi^{i+2} = \\ &\overset{(1.1.29)}{=} -\sum_{j+s=i+1} (-1)^s \binom{j+s}{s} w_{j+k} \partial^s(p_{k+1}(n)) = \\ &= -\sum \binom{i+1}{s} w_{w_{i+1+k-s}} \partial^s(p_{k+1}(n)). \end{aligned} \tag{2.2.13b}$$

Подставляя формулы (2.2.13) в формулы (2.2.12), получаем

$$\partial_{t_n}(w_i) = \sum\Big[\binom{k+1}{s}\partial^s\widehat{R}_{w_{i+k+1-s}} - \binom{i+1}{s}\widehat{L}_{w_{i+k+1-s}}(-\partial)^s\Big](p_{k+1}(n)). \qquad (2.2.14)$$

Учитывая формулу (2.2.11), находим наконец

$$\partial_{t_n}(w_i) = \sum\Big[\binom{k+1}{s}\partial^s\widehat{R}_{w_{i+k+1-s}} - \binom{i+1}{s}\widehat{L}_{w_{i+k+1-s}}(-\partial)^s\Big]\left(\frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta w_k^t}\right). \qquad (2.2.15)$$

Формулы (2.2.9) и (2.2.15) дают искомую предгамильтонову форму иерархии МКП. Мы видим, что переменные (a_0, a_1) и $(w_i |\, i \in \mathbb{Z}_+)$ появляются по отдельности друг от друга. Следовательно, нам придется провести две отдельные проверки на гамильтоновость.

Начнем с матрицы

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \partial + [a_0,\ ] \\ \partial + [a_0,\ ] & [a_1,\ ] \end{pmatrix}, \qquad (2.2.16)$$

входящей в уравнение (2.2.9). Она равна сумме двух матриц, $b = b_1 + b_0$, где

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & [a_0,\ ] \\ [a_0,\ ] & [a_1,\ ] \end{pmatrix}, \qquad (2.2.17)$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.2.18)$$

Матрица b_1 линейна по входящим переменным, a_0 и a_1; матрица b_0 имеет постоянные коэффициенты. Согласно еще одному основному результату гамильтонового формализма, аффинная матрица, то есть сумма линейной (но входящим в нее переменным q) матрицы b_{lin} и независящей от q матрицы b_{free}, является гамильтоновой *тогда и только тогда*, когда алгебра, связанная с матрицей b_{lin} определяющим соотношением

$$\boldsymbol{X}^t b_{\text{lin}}(\boldsymbol{Y}) \sim \boldsymbol{q}^t[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \qquad (2.2.19\text{a})$$

является алгеброй Ли, а билинейная форма

$$\omega(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \sim \boldsymbol{X}^t b_{\text{free}}(\boldsymbol{Y}) \qquad (2.2.19\text{b})$$

является обобщенным 2-коциклом на этой алгебре Ли, то есть

$$\omega([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], \boldsymbol{Z}) + \text{c.p.} \sim 0, \quad \forall\, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \qquad (2.2.20)$$

где “с.р."обозначает “циклическую перестановку".

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^t b_{\text{lin}}(\boldsymbol{Y}) &= \sum_{\alpha\beta}\big(X_{0|\alpha\beta}[a_0, Y_1^t]_{|\alpha\beta} + X_{1|\alpha\beta}[a_0, Y_0^t]_{|\alpha\beta} + X_{1|\alpha\beta}[a_1, Y_1^t]_{\alpha\beta}\big) = \\
&= Tr\big(X_0[a_0, Y_1^t]^t + X_1[a_0, Y_0^t]^t + X_1[a_1, Y_1^t]^t\big) = \\
&= Tr\big(X_0[Y_1, a_0^t] + X_1[Y_0, a_0^t] + X_1[Y_1, a_1^t]\big) = \\
&= Tr\Big(\big([X_0, Y_1] + [X_1, Y_0]\big)a_0^t + [X_1, Y_1]a_1^t\Big) = \\
&= \sum\big([X_0, Y_1] + [X_1, Y_0]\big)_{|\alpha\beta} a_{0|\alpha\beta} + \sum [X_1, Y_1]_{|\alpha\beta} a_{1|\alpha\beta},
\end{aligned}$$

то есть, в матричной системе обозначений,

$$\left[\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} [X_1, Y_0] - [Y_1, X_0] \\ [X_1, Y_1] \end{pmatrix}, \tag{2.2.21}$$

что является коммутатором в полупрямой сумме алгебр Ли

$$gl_{\bar{l}} \ltimes \mathrm{Mat}_{\bar{l}}. \tag{2.2.22}$$

С матрицей b_0 (2.2.18) связана, по формуле (2.2.19b), билинейная форма ω,

$$\omega(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \sum \left(X_{0|\alpha\beta} \partial(Y_{1|\beta\alpha}) + X_{1|\alpha\beta} \partial(Y_{0|\beta\alpha}) \right) = Tr(X_0 Y_1^{(1)} + X_1 Y_0^{(1)}). \tag{2.2.23}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], Z) + \text{c.p.} &= Tr\left\{ \left([X_1, Y_0] - [Y_1, X_0] \right) Z_1^{(1)} + [X_1, Y_1] Z_0^{(1)} \right\} + \text{c.p.} \\ &= \left\{ Tr\left([Z_1, X_0] Y_1^{(1)} \right) + \text{e.p.} \right\} - \left\{ Tr\left([Y_1, X_0] Z_1^{(1)} \right) + \text{e.p.} \right\} \\ &\quad + \left\{ Tr\left([Y_1, Z_1] X_0^{(1)} \right) + \text{c.p.} \right\} \\ &= Tr\left([Z_1, X_0] Y_1^{(1)} - [Y_1, X_0] Z_1^{(1)} + [Y_1, Z_1] X_0^{(1)} \right) + \text{c.p.} \\ &= Tr\left(Z_1 [X_0, Y_1^{(1)}] - Y_1 [X_0, Z_1^{(1)}] + [Y_1, Z_1] X_0^{(1)} \right) + \text{c.p.} \\ &= Tr\left([Y_1^{(1)}, Z_1] X_0 + [Y_1, Z_1^{(1)}] X_0 + [Y_1, Z_1] X_0^{(1)} \right) + \text{c.p.} \\ &= Tr\left([Y_1, Z_1] X_0 \right)^{(1)} + \text{c.p.} \sim 0. \end{aligned}$$

Замечание 2.2.24. Аналогичное вычисление показывает, что если ω есть (обобщенный) 2-коцикл на алгебре Ли $\mathcal{G}$, то на полупрямой сумме алгебр Ли $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{ab}$, с коммутатором (2.2.21), билинейная форма

$$\bar{\omega}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \omega(X_0, Y_1) + \omega(X_1, Y_0) \tag{2.2.25}$$

также является 2-коциклом.

Итак, матрица b (2.2.16) гамильтонова. Перейдем к матрице (2.2.15). Зафиксируем $r \in \mathbb{Z}_+$, и рассмотрим следующие уравнения движения:

$$\partial_t(w_i) = \sum \left[\binom{k+r}{s} \partial^s \widehat{R}_{w_{i+k+r-s}} - \binom{i+r}{s} \widehat{L}_{w_{i+k+r-s}} (-\partial)^s \right] \left(\frac{\delta H}{\delta w_k^t} \right), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.2.26}$$

Рассматриваемый случай отвечает значению $r = 1$; случай иерархии КП (1.2.23) соответствует значению $r = 0$. Чтобы показать, что уравнение (2.2.26) гамильтоново, проделаем теперь уже знакомое вычисление:

$$\begin{aligned} &\sum X_{i|\alpha\beta} \left[\binom{k+r}{s} (Y_k^t w_{i+k+r-s})^{(s)}_{|\alpha\beta} - \binom{i+r}{s} (w_{i+k+r-s} Y_k^{t(s)})_{|\alpha\beta} (-1)^s \right] \\ &\quad \sim Tr \sum (-1)^s \left[X_i^{t(s)} Y_k^t w_{i+k+r-s} \binom{k+r}{s} - \binom{i+r}{s} X_i^t X_i^t w_{i+k+r-s} Y_k^{t(s)} \right] \\ &\qquad = Tr \sum w_{i+k+r-s}^t (-1)^s \left[\binom{k+r}{s} Y_k X_i^{(s)} - \binom{i+r}{s} X_i Y_k^{(s)} \right], \end{aligned}$$

откуда

$$[X,Y]_j = \sum_{i+k+r-s=j} (-1)^s \Big[\binom{k+r}{s} Y_k X_i^{(s)} - \binom{i+r}{s} X_i Y_k^{(s)} \Big]. \tag{2.2.27}$$

Положим

$$\widehat{X} = \sum_{i\geqslant 0} X_i (-\xi)^{i+r}, \quad \widehat{Y} = \sum_{k \geqslant 0} Y_k (-\xi)^{k+r}. \tag{2.2.28}$$

Умножая равенство (2.2.27) справа на $(-\xi)^{j+r}$ и суммируя по j, получаем

$$\begin{aligned}[\widehat{X,Y}] &= \sum [X,Y]_j (-\xi)^{j+r} \\ &= \sum \Big[\binom{k+r}{s} Y_k (-\partial)^s (X_i) - \binom{i+r}{s} X_i (-\partial)^s (Y_k) \Big] (-\xi)^{i+k+r-s} (-\xi)^r \\ &= \sum \big[Y_k (-\xi)^{k+r} X_i (-\xi)^{i+r} - X_i (-\xi)^{i+r} Y_k (-\xi)^{k+r} \big] = [\widehat{Y}, \widehat{X}].\end{aligned}$$

Таким образом, умножение (2.2.27) есть покомпонентная запись коммутатора в (противоположной) алгебре Ли обыкновенных дифференциальных операторов с матричными коэффициентами, делящихся справа на ξ^r. Следовательно, уравнение (2.2.26) гамильтоново. А с ним и иерархия МКП.

2.3 Иерархия МКП со значениями в конечномерных ассоциативных алгебрах

Этот раздел параллелен §1.4; здесь мы делаем для иерархии МКП то же, что там делали для иерархии КП.

Рассмотрим невырожденную ассоциативную конечномерную алгебру $\mathcal{A}$ и примем обозначения из §1.4 и §2.2. При

$$\mathcal{L}^n = \sum \xi^k \boldsymbol{p}_k(n) \quad \text{или} \quad \mathcal{L}^n = \sum \xi^k \widehat{L}_{\boldsymbol{p}_k(n)}, \tag{2.3.1}$$

$$\mathcal{H}_n = n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(\mathcal{L}^n), \tag{2.3.2}$$

формула вычетов (2.2.6) принимает вид

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \sim \sum Tr(\widehat{L}_{d\boldsymbol{a}_i} \widehat{L}_{\boldsymbol{p}_{i-1}(n)}) = \sum (d\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{p}_{i-1}(n)) = \sum (d\widetilde{\boldsymbol{a}}_i)^t \rho (\widetilde{\boldsymbol{p}}_{i-1}(n). \tag{2.3.3}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{i-1}(n) = \rho^{-1} \Big(\frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta \widetilde{\boldsymbol{a}}_i} \Big), \tag{2.3.4}$$

или, по компонентам,

$$p_{i-1|\alpha}(n) = \sum (\rho^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_{i|\beta}}. \tag{2.3.5}$$

В частности,

$$p_{-1|\alpha}(n) = \sum (\rho^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_{0|\beta}}, \tag{2.3.6a}$$

$$p_{0|\alpha}(n) = \sum (\rho^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_{1|\beta}}, \tag{2.3.6b}$$

$$p_{k+1|\alpha}(n) = \sum (\rho^{-1})_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta w_{k|\beta}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.3.7}$$

Подставляя формулы (2.3.6) в уравнения (2.1.10), получаем

$$\partial_{t_n}\begin{pmatrix} a_{0|\alpha} \\ a_{1|\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\beta\gamma\tau}\begin{pmatrix} 0 & \delta^\beta_\alpha\partial + \sum(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)a_{0|\tau} \\ \delta^\beta_\alpha\partial + \sum(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)a_{0|\tau} & \sum(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)a_{1|\tau} \end{pmatrix}(\rho^{-1})_{\beta\gamma}\begin{pmatrix} Y_{0|\gamma} \\ Y_{1|\gamma} \end{pmatrix},$$

$$Y_{0|\gamma} = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_{0|\gamma}}, \quad Y_{1|\gamma} = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta a_{1|\gamma}}, \tag{2.3.8}$$

при этом следует использовать равенство

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]_{|\alpha} = \sum(c^{\beta\gamma}_\alpha - c^{\gamma\beta}_\alpha)x_\beta y_\gamma, \tag{2.3.9}$$

вытекающее из формулы (1.4.9). Далее, подставляя формулы (2.3.7) в уравнения (2.2.14), получаем

$$\partial_{t_n}(w_{i|\alpha}) = \sum\Big[\binom{k+1}{s}\partial^s(\widehat{R}_{w_{i+k+1-s}})^\beta_\alpha - \binom{i+1}{s}(\widehat{L}_{w_{i+k+1-s}})^\beta_\alpha(-\partial)^s\Big](\rho^{-1})_{\beta\gamma}(Y_{k|\gamma}),$$

$$Y_{k|\gamma} = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta w_{k|\gamma}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.3.10}$$

Как и в предыдущем разделе 2.2, мы видим, что переменные a_0 и a_1 отщепляются от w_i. Поэтому опять приходится выполнять две отдельные проверки на гамильтоновость, одну для уравнения (2.3.8) и другую для (2.3.10).

Начнем с (2.3.8). Матрица, отвечающая этой предгамильтоновой форме записи аффинна. Ее линейная (по a) часть приводит к алгебре с умножением, определяемым уравнением (2.2.19a), в данном случае это дает:

$$\sum(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)(\rho^{-1})_{\beta\gamma}\left[(X_{0|\alpha}Y_{1|\gamma} + X_{1|\alpha}Y_{0|\gamma})a_{0|\tau} + X_{1|\alpha}Y_{1|\gamma}a_{1|\tau}\right] \sim$$

$$\sim \sum a_{0|\tau}(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)(\rho^{-1})_{\beta\gamma}(X_{0|\alpha}Y_{1|\gamma} + X_{1|\alpha}Y_{0|\gamma}) \tag{2.3.11a}$$

$$+ \sum a_{1|\tau}(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)(\rho^{-1})_{\beta\gamma}X_{1|\alpha}Y_{1|\gamma}. \tag{2.3.11b}$$

Следовательно,

$$[X, Y]_{0|\tau} = \sum(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)(\rho^{-1})_{\beta\gamma}(X_{0|\alpha}Y_{1|\gamma} + X_{1|\alpha}Y_{0|\gamma}), \tag{2.3.12a}$$

$$[X, Y]_{1|\tau} = \sum(c^{\tau\beta}_\alpha - c^{\beta\tau}_\alpha)(\rho^{-1})_{\beta\gamma}X_{1|\alpha}Y_{1|\gamma}. \tag{2.3.12b}$$

Обозначим

$$X' = \rho^{-1}(\widetilde{X}), \quad Y' = \rho^{-1}(\widetilde{Y}). \tag{2.3.13}$$

Повторяя трюк из §1.3 с сопряжением обратимым отображением ρ^{-1}, можно, после ряда громоздких преобразований, в конце концов получить ответ в координатах X' и Y', в виде простой формулы (2.2.21). Однако, результат не стоит этой возни. Вместо этого, сделаем замену в выбранном базисе $\mathcal{A}$ так, чтобы матрица ρ превратилась в

$$\rho = \mathbf{1}_{\bar{l}}\ ; \tag{2.3.14}$$

это всегда можно сделать, расширяя, если нужно, поле $\mathcal{F}$ конечным числом квадратных корней. В новом базисе свойство инвариантности (1.4.28) на $\mathcal{A}$, в виде

$$(e^i, e^j e^k) = (e^i e^j, e^k), \tag{2.3.15}$$

приводит к свойству циклической симметрии

$$c_i^{jk} = c_k^{ij}, \tag{2.3.16}$$

структурных констант c_i^{jk}. Отметим, что замена базиса приводит к соответствующим линейным преобразованиям с постоянными коэффициентами для всех участвующих в игре векторов, вариационных производных и уравнений движения; однако свойство последних быть гамильтоновыми инвариантно относительно такой замены.

При сделанном выборе ортонормированного базиса, формулы (2.3.12) примут вид, с учетом циклической симметрии (2.3.16):

$$[X,Y]_{0|\tau} = ([X_0,Y_1] + [X_1,Y_0])_{|\tau}, \tag{2.3.17a}$$

$$[X,Y]_{1|\tau} = [X_1,Y_1]_{|\tau}, \tag{2.3.17b}$$

что то же самое, что формулы (2.2.21). Таким образом, формулы (2.3.17) задают коммутатор на полупрямой сумме алгебр Ли

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{A}) \ltimes \mathcal{A}. \tag{2.3.18}$$

Независящая от a часть матрицы из уравнения (2.3.8),

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.19}$$

соответствует билинейной форме

$$\bar{\omega}(X,Y) = (X_0, Y_1^{(1)}) + (X_1, Y_0^{(1)}) \tag{2.3.20}$$

того же вида, что и (2.2.25). Согласно Замечанию 2.2.24, достаточно доказать, что билинейная форма

$$\omega(X,Y) = (X, Y^{(1)}) \tag{2.3.21}$$

является 2-коциклом на алгебре Ли $\mathrm{Lie}(\mathcal{A})$. Действительно,

$$\begin{gathered}\omega([X,Y],Z) + \text{c.p.} = ([X,Y], Z^{(1)}) + \text{c.p.} = \\ = (XY - YX, Z^{(1)}) + \text{c.p.} = \{(XY, Z^{(1)}) + \text{c.p.}\} - \{(YX, Z^{(1)}) + \text{c.p.}\}.\end{gathered}$$

Но

$$\begin{gathered}(XY, Z^{(1)}) + \text{c.p.} = (XY, Z^{(1)}) + (YZ, X^{(1)}) + (ZX, Y^{(1)}) = \\ \overset{(1.4.28)}{=} (X, YZ^{(1)}) + (X^{(1)}, YZ) + (X, Y^{(1)}Z) = (X, YZ)^{(1)} \sim 0.\end{gathered} \tag{2.3.22}$$

Теперь перейдем ко второй проверке на гамильтоновость, для уравнения (2.3.10). Как в предыдущем разделе, выберем $r \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}\partial_{t_n}(w_{i|\alpha}) = \sum \left[\binom{k+r}{s} \partial^s \widehat{R}_{w_{i+k+r-s}} - \binom{i+r}{s} \widehat{L}_{w_{i+k+r-s}} (-\partial)^s \right]_{\alpha}^{\beta} (Y_{k|\beta}), \\ Y_{k|\beta} = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta w_{k|\beta}}.\end{gathered} \tag{2.3.23}$$

Рассматриваемый случай соответствует $r = 1$; значение $r = 0$ отвечает $\mathcal{A}$–значной иерархии КП из §1.4, формула (1.4.19).

Имеем:

$$\sum X_{i|\alpha}\left[\binom{k+r}{s}\partial^s\widehat{R}_{w_{i+k+r-s}}-\binom{i+r}{s}\widehat{L}_{w_{i+k+r-s}}(-\partial)^s\right]^{\beta}_{\alpha}(Y_{k|\beta}) \tag{2.3.24}$$

$$\sim\sum(-1)^s\Big[(\boldsymbol{X}_i^{(s)},\ \boldsymbol{Y}_k w_{i+k+r-s})\binom{k+r}{s} \tag{2.3.25}$$

$$-\binom{i+r}{s}(\boldsymbol{X}_i, w_{i+k+r-s}\boldsymbol{Y}_k^{(s)})\Big] \tag{2.3.26}$$

$$\overset{(1.4.28)}{=}\sum(-1)^s\left[\binom{k+r}{s}(w_{i+k+r-s},\boldsymbol{X}_i^{(s)}\boldsymbol{Y}_k)-\binom{i+r}{s}(w_{i+k+r-s},\boldsymbol{Y}_k^{(s)}\boldsymbol{X}_i)\right]$$

$$=\sum w_{i+k+r-s|\alpha}(-1)^s\left[\binom{k+r}{s}\boldsymbol{X}_i^{(s)}\boldsymbol{Y}_k-\binom{i+r}{s}\boldsymbol{Y}_k^{(s)}\boldsymbol{X}_i\right]_{|\alpha}, \tag{2.3.27}$$

так что

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_j=\sum_{i+k+r-s=j}(-1)^s\left[\binom{k+r}{s}\boldsymbol{X}_i^{(s)}\boldsymbol{Y}_k-\binom{i+r}{s}\boldsymbol{Y}_k^{(s)}\boldsymbol{X}_i\right]. \tag{2.3.28}$$

Положим

$$\widehat{X}=\sum\xi^{i+r}\boldsymbol{X}_i,\quad \widehat{Y}=\sum\xi^{k+r}\boldsymbol{Y}_k. \tag{2.3.29}$$

Умножая равенство (2.3.28) слева на ξ^{j+r} и суммируя по j, получаем

$$[\widehat{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}]=\sum\xi^{j+r}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_j=$$

$$=\sum\xi^{i+k+r-s+r}(-1)^s\left[\binom{k+r}{s}\boldsymbol{X}_i^{(s)}\boldsymbol{Y}_k-\binom{i+r}{s}\boldsymbol{Y}_k^{(s)}\boldsymbol{X}_i\right]=$$

$$=\sum(\xi^{i+r}\boldsymbol{X}_i\xi^{k+r}\boldsymbol{Y}_k-\xi^{k+r}\boldsymbol{Y}_k\xi^{i+r}\boldsymbol{X}_i)=[\widehat{X},\widehat{Y}].$$

Таким образом, умножение (2.3.28), отвечающее предгамильтоновой форме (2.3.23), является компонентной записью алгебры Ли левосторонних обыкновенных дифференциальных операторов, делящихся слева на ξ^r, с коэффициентами из $\mathcal{A}\otimes\bar{R}$, где $\bar{R}$ произвольная дифференциальная алгебра. Следовательно, уравнения (2.3.23) и (2.3.10) гамильтоновы.

> Как часто мы бросали бы свои безумные начинания, если бы не манящие трудности, возникающие на нашем пути.
>
> Сэр Артур Хелпс (1813–1875)

2.4 Уравнения диспергирующих волн на воде

Иерархия диспергирующих волн на воде (ДВВ) — это то, что останется от иерархии МКП, если вычеркнуть все w_i.

В иерархии МКП n-й поток

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L})=[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n),\mathcal{L}]=[\mathcal{L},\ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)],\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.4.1}$$

$$\mathcal{L}=\xi+\sum_{i\geqslant 0}a_i\xi^{-i}=\xi+a_0+a_1\xi^{-1}+\sum_{i\geqslant 0}w_i\xi^{-i-2}, \tag{2.4.2}$$

имеет вид (2.1.10), (2.2.14):

$$\partial_{t_n}(a_0) = p_0(n)^{(1)} + [a_0, p_0(n)], \tag{2.4.3a}$$

$$\partial_{t_n}(a_1) = p_{-1}(n)^{(1)} + [a_0, p_{-1}(n)] + [a_1, p_0(n)], \tag{2.4.3b}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}(w_i) = \sum \Big[&\binom{k+1}{s} \partial^s (p_{k+1}(n) w_{k+1+i-s}) \\ &- \binom{i+1}{s} w_{i+k+1-s} (-\partial)^s (p_{k+1}(n)) \Big],\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

где

$$\mathcal{L}^n = \sum \xi^k p_k(n). \tag{2.4.5}$$

Из уравнения (2.4.4) видно, что эволюционное дифференцирование ∂_{t_n} сохраняет дифференциальный идеал, порожденный $w_i^{(j)}$. Поэтому зануление всех w_i является самосогласованной редукцией. То, что остается, и есть так называемая иерархия ДВВ:

$$\partial_{t_n}(\bar{\mathcal{L}}) = \mathrm{const}_n[_{\geqslant 1}(\bar{\mathcal{L}}^n), \bar{\mathcal{L}}] = \mathrm{const}_n[\bar{\mathcal{L}},\ _{\leqslant 0}(\bar{\mathcal{L}}^n)], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4.6}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \xi + a_0 + a_1 \xi^{-1}, \tag{2.4.7}$$

$$\bar{\mathcal{L}}^n = \sum \xi^k \bar{p}_k(n),$$

$$\partial_{t_n}(a_0) = \mathrm{const}_n \{ \bar{p}_0(n)^{(1)} + [a_0, \bar{p}_0(n)] \}, \tag{2.4.8a}$$

$$\partial_{t_n}(a_1) = \mathrm{const}_n \{ \bar{p}_{-1}(n)^{(1)} + [a_0, \bar{p}_{-1}(n)] + [a_1, \bar{p}_0(n)] \}. \tag{2.4.8b}$$

Все результаты о гамильтоновости из двух предыдущих разделов переносятся на иерархию ДВВ, и мы не будем их повторять. Вместо этого, вычислим первые два потока иерархии ДВВ, полагая $\mathrm{const}_n = n^{-1}$. Для первого потока, при $n = 1$, имеем

$$\begin{gathered} _{\geqslant 1}(\bar{\mathcal{L}}^1) = \xi, \quad \bar{p}_0(1) = a_0, \quad \bar{p}_{-1}(1) = a_1 \quad \Rightarrow \\ \partial_{t_1}(a_0) = a_0^{(1)}, \quad \partial_{t_1}(a_1) = a_1^{(1)}. \end{gathered} \tag{2.4.9}$$

Для второго потока, при $n = 2$, получаем

$$(2^{-1})\ _{\geqslant 1}(\bar{\mathcal{L}}^2) = \frac{1}{2}\xi^2 + \xi a_0 \quad \Rightarrow \tag{2.4.10}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_2}(\bar{\mathcal{L}}) &= \partial_{t_2}(a_0) + \partial_{t_2}(a_1)\xi^{-1} = [\frac{1}{2}\xi^2 + \xi a_0, \xi + a_0 + a_1\xi^{-1}] \\ &= [\frac{1}{2}a_0^{(2)} + a_0^{(1)}\xi] + [\frac{1}{2}a_1^{(2)} + a_1^{(1)}\xi]\xi^{-1} + [(a_0\xi + a_0^{(1)})\xi - (a_0\xi^2 + 2a_0^{(1)}\xi + a_0^{(2)})] \\ &\quad + [a_0^2\xi + (a_0^2)^{(1)} - a_0(a_0\xi + a_0^{(1)})] + [a_0 a_1 \xi + (a_0 a_1)^{(1)}]\xi^{-1} - a_1 a_0 \\ &= -\frac{1}{2}a_0^{(2)} + a_1^{(1)} + a_0^{(1)} a_0 + [a_0, a_1] + [\frac{1}{2}a_1^{(2)} + (a_0 a_1)^{(1)}]\xi^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, второй поток ДВВ имеет вид

$$\partial_{t_2}(a_0) = -\frac{1}{2}a_0^{(2)} + a_1^{(1)} + a_0^{(1)} a_0 + [a_0, a_1], \tag{2.4.11a}$$

$$\partial_{t_2}(a_1) = (\frac{1}{2}a_1^{(1)} + a_0 a_1)^{(1)}. \tag{2.4.11b}$$

Если переменные $u = a_0$ и $h = a_1$ — *коммутирующие скаляры*, то система (2.4.11) превращается в систему

$$u_t = \big(\frac{1}{2}u^2 + h - \frac{1}{2}u_x\big)_x, \tag{2.4.12a}$$

$$h_t = \big(uh + \frac{1}{2}h_x\big)_x, \tag{2.4.12b}$$

в гидродинамических обозначениях. Эта система описывает эволюцию диспергирующих волн на мелкой воде, откуда и происходит название всей иерархии. (См. [Bro 1975], [Kau 1975] и [Kup 1985b].)

2.5 Иерархия Бюргерса

В этом разделе вводится неабелева иерархия Бюргерса, как специализация иерархии ДВВ из предыдущего раздела. Затем эта иерархии линеаризуется посредством неабелевой версии преобразования Хопфа-Коула.

Иерархия Бюргерса, это то, что останется от иерархии ДВВ (2.4.8) если $h = a_1$ положить нулем. Так как

$$\Big(\sum \xi^k \bar{p}_k(n)\Big)\big|_{h=0} = (\bar{\mathcal{L}}^n)\big|_{h=0} = (\xi + u)^n, \tag{2.5.1}$$

то мы сразу видим, что

$$\bar{p}_k(n)\ \big|_{h=0} = 0, \quad \forall\ k < 0. \tag{2.5.2}$$

Таким образом, уравнение (2.4.8b) согласовано со связью $\{h = 0\}$. Остается уравнение (2.4.8a) при $h = 0$:

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n(\mathrm{ad}_u + \partial)(\bar{p}_0(n)), \tag{2.5.3}$$

где теперь

$$\sum \xi^k \bar{p}_k(n) = (\xi + u)^n; \tag{2.5.4}$$

соответствующее представление Лакса имеет вид

$$\partial_{t_n}(\bar{\mathcal{L}}_B) = \mathrm{const}_n|_{\geqslant 1}(\bar{\mathcal{L}}_B^n), \bar{\mathcal{L}}_B| = \mathrm{const}_n[\bar{\mathcal{L}}_B,\ {}_{\leqslant 0}(\bar{\mathcal{L}}_B^n)], \tag{2.5.5}$$

где

$$\bar{\mathcal{L}}_B = \xi + u. \tag{2.5.6}$$

Из соотношений (2.4.9) и (2.4.11a) мы находим явный вид первых даух потоков из иерархии Бюргерса (при $\mathrm{const}_n = n^{-1}$):

$$\partial_{t_1}(u) = \partial(u), \tag{2.5.7}$$

$$\partial_{t_2}(u) = -\frac{1}{2}\partial^2(u) + u^{(1)}u. \tag{2.5.8}$$

Высшие потоки (2.5.3) также можно выписать в явном виде. Для этого, распишем следующее тождество:

$$\bar{\mathcal{L}}_B^{n+1} = \bar{\mathcal{L}}_B^n \bar{\mathcal{L}}_B \tag{2.5.9}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k\geqslant 0} \xi^k \bar{p}_k(n+1) = \sum_{k\geqslant 0} \xi^k \bar{p}_k(n)(\xi + u) = \sum_{k\geqslant 0} \xi^k [\xi \bar{p}_k(n) - \bar{p}_k(n)^{(1)} + \bar{p}_k(n)u] \tag{2.5.10}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad \bar{p}_0(n+1) &= -\bar{p}_0(n)^{(1)} + \bar{p}_0(n)u = (\widehat{R}_a - \partial)(\bar{p}_0(n)) = \dots \\ &= (\widehat{R}_u - \partial)^n(\bar{p}_0(1)) = (\widehat{R}_u - \partial)^n(u). \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Таким образом, n-й поток из бесконечной коммутативной иерархии Бюргерса (2.5.3) имеет вид

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n(\mathrm{ad}_u + \partial)(\widehat{R}_u - \partial)^{n-1}(u) = \mathrm{const}_n(\mathrm{ad}_u + \partial)(\widehat{R}_u - \partial)^n(1). \qquad (2.5.12)$$

Остался вопрос о линеаризации. Напомним, что классическое уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad \nu = \mathrm{const} \qquad (2.5.13)$$

на функцию $u = u(x, t)$ линеаризуется преобразованием Хопфа-Коула

$$u = -2\nu(\ln U)_x, \qquad (2.5.14)$$

переводящим уравнение теплопроводности

$$U_t = \nu U_{xx}, \qquad (2.5.15)$$

в уравнение Бюргерса (2.5.13).

Теорема 2.5.16. Гомоморфизм дифференциальной алгебры $\Phi : \mathcal{F}\langle u^{(j)}\rangle \to \mathcal{F}\langle U^{(j)}\rangle$:

$$\Phi(u) = -U^{(1)}U^{-1}, \qquad (2.5.17)$$

отображает n-й поток (2.5.12) неабелевой иерархии Бюргерса в линейный поток

$$\partial_{t_n}(U) = \mathrm{const}_n(-1)^{n+1}U^{(n)}. \qquad (2.5.18)$$

Доказательство. Мы должны проверить равенство

$$\Phi\partial_{t_n}\Big|_u = \partial_{t_n}\Big|_U \Phi \qquad (2.5.19a)$$

примененное к u, то есть

$$\Phi[\mathrm{const}_n(\mathrm{ad}_u + \partial)(\widehat{R}_a - \partial)^n(1)] = \partial_{t_n}(-U^{(1)}U^{-1}). \qquad (2.5.19b)$$

Но

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}(-U^{(1)}U^{-1}) &= -[\partial_{t_n}(U)]^{(1)}U^{-1} + U^{(1)}U^{-1}\partial_{t_n}(U)U^{-1}\\ &\overset{(2.5.18)}{=} \mathrm{const}_n(-1)^{n+1}[-U^{(n+1)}U^{-1} - \Phi(u)U^{(n)}U^{-1}]. \qquad (2.5.20)\end{aligned}$$

Лемма 2.5.21. Определим рекуррентно последовательность элементов $\bar{Q}_n \in \mathcal{F}\langle u^{(j)}\rangle$,

$$\bar{Q}_0 = 1, \quad \bar{Q}_{n+1} = (\partial - \widehat{R}_u)(\bar{Q}_n), \quad n \in \mathbb{Z}_+ : \qquad (2.5.22)$$

$$\bar{Q}_n = (\partial - \widehat{R}_u)^n(1), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (2.5.23)$$

Если

$$U^{(1)}U^{-1} = -\Phi(u), \qquad (2.5.24)$$

то

$$U^{(n)}U^{-1} = \Phi(\bar{Q}_n). \qquad (2.5.25)$$

Доказательство. При $n = 0, 1$, формула (2.5.25) принимает вид

$$UU^{-1} = 1, \quad U^{(1)}U^{-1} = \Phi(\bar{Q}_1) = \Phi(-u),$$

что верно. Осуществляя индукцию по n, применяем ∂ к (2.5.25) и получаем

$$U^{(n+1)}U^{-1} - U^{(n)}U^{-1}U^{(1)}U^{-1} = U^{(n+1)}U^{-1} + \Phi(\bar{Q}_n)\Phi(u) = \partial\Phi(\bar{Q}_n) \quad \Rightarrow$$
$$U^{(n+1)}U^{-1} = \partial\Phi(\bar{Q}_n) - \Phi(\bar{Q}_n u) = \Phi(\partial - \widehat{R}_a)(\bar{Q}_n) \overset{(2.5.22)}{=} \Phi(\bar{Q}_{n+1}). \qquad \blacksquare$$

Используя эту лемму, можно преобразовать равенство (2.5.20) к виду

$$\partial_{t_n}(-U^{(1)}U^{-1}) = \mathrm{const}_n(-1)^n\Phi(\bar{Q}_{n+1} + u\bar{Q}_n)$$
$$\overset{(2.5.22)}{=} \mathrm{const}_n(-1)^n\Phi[\partial - \widehat{R}_u + \widehat{L}_u](\bar{Q}_n) = \mathrm{const}_n(-1)^n(\partial + \mathrm{ad}_u)(\bar{Q}_n).$$

После подстановки в (2.5.19), остается проверить тождество

$$(\widehat{R}_u - \partial)^n(1) = (-1)^n\bar{Q}_n, \tag{2.5.26}$$

а это следует из (2.5.23). ∎

Таким образом, иерархия Бюргерса (2.5.12) получается из бесконечной коммутативной иерархии неабелева уравнения теплопроводности (2.5.18), в результате перехода к дифференциальной подалгебре, порожденной комбинацией $U^{(1)}U^{-1}$.

Упражнение 2.5.27. Покажите, что уравнения движения (2.5.18) и

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n(\partial - \mathrm{ad}_u)(\widehat{L}_u - \partial)^n(1) \tag{2.5.28}$$

связаны гомоморфизмом

$$\overline{\Phi} : u \mapsto -U^{-1}U^{(1)}. \tag{2.5.29}$$

Обсудим коротко иерархию Бюргерса в *пределе нулевой дисперсии.* Если формально заменить ∂ на $\varepsilon\partial$ во всех уравнениях, то правые части в каждом из уравнений движения (2.5.12) будут порядка $O(\varepsilon)$; в некоммутативном царстве это исключительный результат, проистекающий из *скалярности* иерархии, то есть из наличия лишь *единственной* полевой переменной; в общем случае, правая часть будет содержать коммутаторы и иметь порядок $O(1)$. В нашем исключительном случае, процедура сохранения членов порядка ε и отбрасывания всех старших членов, называется пределом нулевой дисперсии.

Упражнение 2.5.30. Покажите, что в пределе нулевой дисперсии иерархия Бюргерса (2.5.12) переходит в

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n\, n u_x u^{n-1}. \tag{2.5.31}$$

[Подсказка : покажите сначала, что

$$(\widehat{R}_a - \partial)^n(1) = u^n - \sum_{\imath=0}^{n-2}(n - i - 1)u^{\imath}u_x u^{n-\imath-2} \quad (\mathrm{mod}\ O(\partial^2)). \quad] \tag{2.5.32}$$

Упражнение 2.5.33. Покажите, что в пределе нулевой дисперсии иерархия (2.5.28) переходит в

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n\, n u^{n-1} u_x. \tag{2.5.34}$$

[Подсказка : иерархия (2.5.28) является зеркальным образом (2.5.12).[

Замечание 2.5.35. В §9.8 нам встретится еще одна версия иерархии Бюргерса без вязкости (формула (9.8.22)):

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n\, \partial(u^{n+1}). \tag{2.5.36}$$

Существуют ли другие бесконечные коммутирующие иерархии типа Бюргерса без вязкости, вдобавок к этим трем, (2.5.31), (2.5.34), (9.8.22) (= 2.5.36))?

Упражнение 2.5.37. Пусть в кольце $C = C_u = R\langle u^{(i)}\rangle$ дифференцирование $X \in D^{ev}(C)$ задано формулой

$$X(u) = \theta_0 u u^{(1)} + \theta_1 u^{(1)} u, \quad \theta_0, \theta_1 \in R, \tag{2.5.38}$$

причем

$$\theta_0 \neq 0, \quad \theta_1 \neq 0, \quad \theta_0 \neq \theta_1. \tag{2.5.39}$$

Пусть $Y \in D^{ev}(C)$ задано формулой

$$Y(u) = \sum_{s=0}^{n} \bar\theta_s u^s u^{(1)} u^{n-s}, \quad \bar\theta_s \in R, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1. \tag{2.5.40}$$

Покажите, что если $[X, Y] = 0$, то $Y = 0$. [Подсказки: 1) покажите, что $[X, Y](u)$ не содержит $u^{(2)}$; 2) выведите две различных рекуррентных последовательности для $\bar\theta_s$, следя за членами $u^s u^{(1)} u^{(1)} u^{n-s}$ и $u^{(1)} u^s u^{(1)}\ u^{n-s}$.[

История была бы превосходным предметом, если
бы только она была правдива.

Лев Толстой

2.6 Иерархия Кортевега-де Фриза

Вселенная подобна сейфу, для которого есть комбинация, вот только комбинация заперта в сейфе.

Питер де Фриз

Известно, что если все переменные $a_0^{(j)}$, $a_1^{(j)}$ коммутируют, то иерархия ДВВ содержит в себе иерархию Кортевега-де Фриза (= КдФ). В этом разделе нас интересует, что происходит с этим вложением в общем неабелевом случае.

В абелевом случае, иерархия КдФ это то, что остается от иерархии ДВВ (2.4.8) когда переменная $u = a_0$ тождественно равна нулю. Формула (2.4.11a) показывает, что это, вообще говоря, невозможно, и действительно, абелева теория [Kup 1985b] предсказывает, что годятся лишь нечетные n, так как

$$\bar p_0(2n + 1)|_{u=0} = 0. \tag{2.6.1}$$

Это гарантирует, что уравнение (2.4.8a) совместно со связью $\{u = 0\}$; тогдв оставшееся уравнение (2.4.8b) превращается в n-й поток иерархии КдФ:

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = \mathrm{const}_{2n+1}(\bar{p}_{-1}(2n+1)|_{u=0})^{(1)}. \tag{2.6.2}$$

Исследуем, что происходит в общих неабелевых структурах, которые мы рассматриваем в данной главе. Иначе говоря, нам надо выяснить, будет ли выполняться основное равенство (2.6.1). Положив

$$\mathcal{L}_K = \bar{\mathcal{L}}|_{u=0} = (\xi + u + h\xi^{-1})|_{u=0} = \xi + h\xi^{-1}, \tag{2.6.3}$$

$$\mathcal{L}_K^n = (\xi + h\xi^{-1})^n = \sum \xi^k p_k(n), \tag{2.6.4}$$

перепишем (2.6.1) в виде

$$p_0(2n+1) = 0. \tag{2.6.5}$$

Прежде чем погружаться в анализ, рассмотрим первый нетривиальный пример: третий поток иерархии ДВВ. Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_K^3 &= (\xi + h\xi^{-1})(\xi + h\xi^{-1})(\xi + h\xi^{-1}) \\
&= (\xi + h\xi^{-1})(\xi^2 + 2h + h^{(1)}\xi^{-1} + h\xi^{-1}h\xi^{-1}) \\
&= (\xi^3 + 2\xi h + h^{(1)} + h^{(2)}\xi^{-1} + \xi h\xi^{-1}h\xi^{-1}) \\
&\qquad + (h\xi + h\xi^{-1}2h + h\xi^{-1}h^{(1)}\xi^{-1} + h\xi^{-1}h\xi^{-1}h\xi^{-1}) \\
&= \xi^3 + 3\xi h + \xi^{-1}(h^{(2)} + 3h^2) + \ \dots \qquad (2.6.6) \\
&\Rightarrow \quad p_0(3) = 0, \quad p_{-1}(3) = h^{(2)} + 3h^2, \qquad (2.6.7)
\end{aligned}$$

и мы приходим к неабелевому уравнению КдФ (2.6.2):

$$\partial_{t_3}(h) = \mathrm{const}_3[3h^2 + h^{(2)}]^{(1)}. \tag{2.6.8}$$

Пока все хорошо. Чтобы исследовать общий случай, распишем двойное тождество

$$\mathcal{L}_K^{n+1} = \mathcal{L}_K^n \mathcal{L}_K = \mathcal{L}_K \mathcal{L}_K^n : \tag{2.6.9}$$

$$\sum \xi^k p_k(n+1) = \sum \xi^k p_k(n)(\xi + h\xi^{-1}) = (\xi + h\xi^{-1}) \sum \xi^k p_k(n). \tag{2.6.10}$$

Так как

$$p_k(n)\xi = \xi p_k(n) - p_k(n)^{(1)}, \tag{2.6.11a}$$

$$p_k(n)h\xi^{-1} = \sum \xi^{-1-s}[p_k(n)h]^{(s)}, \tag{2.6.11b}$$

$$h\xi^{k-1} = \sum (-1)^r \binom{k-1}{r} \xi^{k-1-r} h^{(r)}, \tag{2.6.11c}$$

то равенство (2.6.10) примет вид

$$\begin{aligned}
\sum \xi^k p_k(n+1) &= \sum \xi^k \left\{ \xi p_k(n) - p_k(n)^{(1)} + \sum \xi^{-1-s}[p_k(n)h]^{(s)} \right\} \qquad (2.6.12a) \\
&= \sum \xi^{k+1} p_k(n) + \sum (-1)^r \binom{k-1}{r} \xi^{k-1-r} h^{(r)} p_k(n). \qquad (2.6.12b)
\end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при ξ^{μ} в двойном тождестве (2.6.12), находим

$$p_{\mu}(n+1) = p_{\mu-1}(n) - p_{\mu}(n)^{(1)} + \sum [p_{\mu+r+1}(n)h]^{(r)} \tag{2.6.13a}$$

$$= p_{\mu-1}(n) + \sum (-1)^{r} \binom{\mu+r}{r} h^{(r)} p_{\mu+r+1}(n). \tag{2.6.13b}$$

При $\mu = 0, -1, -2$, формулы (2.6.13) дают

$$p_0(n+1) = p_{-1}(n) - p_0(n)^{(1)} + \sum [p_{r+1}(n)h]^{(r)}, \tag{2.6.14}$$

$$p_{-1}(n+1) = p_{-2}(n) - p_{-1}(n)^{(1)} + \sum [p_r(n)h]^{(r)}, \tag{2.6.15}$$

$$p_{-1}(n+1) = p_{-2}(n) + hp_0(n), \tag{2.6.16}$$

$$p_{-2}(n+1) = p_{-3}(n) - p_{-2}(n)^{(1)} + \sum [p_{r-1}(n)h]^{(r)}, \tag{2.6.17}$$

$$p_{-2}(n+1) = p_{-3}(n) + hp_{-1}(n) + h^{(1)}p_0(n). \tag{2.6.18}$$

Вычитая (2.6.16) из (2.6.15), получаем

$$p_{-1}(n)^{(1)} = \Big(\sum [p_{r+1}(n)h]^{(r)}\Big)^{(1)} + [p_0(n), h] \quad \Leftrightarrow \tag{2.6.19}$$

$$p_{-1}(n) = \sum [p_{r+1}(n)h]^{(r)} + \partial^{-1}\big([p_0(n), h]\big) \quad \Leftrightarrow \tag{2.6.20}$$

$$\sum [p_{r+1}(n)h]^{(r)} = p_{-1}(n) - \partial^{-1}\big([p_0(n), h]\big). \tag{2.6.21}$$

Здесь $\partial^{-1}(\cdot)$ это нечто $(\cdot\cdot)$ такое, что

$$\partial(\cdot\cdot) = (\cdot), \quad \mathrm{rk}(\cdot\cdot) = \mathrm{rk}(\cdot) - 1, \tag{2.6.22}$$

где градуировка rk определена следующим образом:

$$\mathrm{rk}(h^{(j)}) = j + 2, \quad \mathrm{rk}(\mathcal{F}) = 0, \tag{2.6.23}$$

так что

$$\mathrm{rk}(\mathcal{L}_K) = 1, \quad \mathrm{rk}(p_k(n)) = n - k. \tag{2.6.24}$$

Подстановка (2.6.21) в (2.6.14) дает

$$p_0(n+1) = 2p_{-1}(n) - p_0(n)^{(1)} + \partial^{-1}\big([h, p_0(n)]\big). \tag{2.6.25}$$

Далее, вычитая (2.6.18) из (2.6.17), получаем

$$\begin{aligned} p_{-2}(n)^{(1)} &= [p_{-1}(n), h] + p_0(n)^{(1)}h + [p_0(n), h^{(1)}] + \partial^2 \sum [p_{r+1}(n)h]^{(r)} \\ &\overset{(2.6.21)}{=} [p_{-1}(n), h] + p_0(n)^{(1)}h + [p_0(n), h^{(1)}] + p_{-1}(n)^{(2)} - \partial\big([p_0(n), h]\big) \\ &= [p_{-1}(n), h] + hp_0(n)^{(1)} + p_{-1}(n)^{(2)} \end{aligned} \tag{2.6.26}$$

$$\Rightarrow \quad p_{-2}(n) = p_{-1}(n)^{(1)} + \partial^{-1}\big([p_{-1}(n), h] + hp_0(n)^{(1)}\big). \tag{2.6.27}$$

Наконец, подставив это в (2.6.16), находим

$$p_{-1}(n+1) = p_{-1}(n)^{(1)} + hp_0(n) + \partial^{-1}\big([p_{-1}(n), h] + hp_0(n)^{(1)}\big). \tag{2.6.28}$$

Эта пара формул, (2.6.25) и (2.6.28), обеспечивает нас итерационной схемой

$$\big(p_0(n); p_{-1}(n)\big) \longmapsto \big(p_0(n+1); p_{-1}(n+1)\big). \tag{2.6.29}$$

Теперь предположим, что, при некотором n,

$$p_0(2n-1)=0. \tag{2.6.30a}$$

Тогда, согласно (2.6.25) и (2.6.28),

$$p_0(2n)=2p_{-1}(2n-1), \quad p_{-1}(2n)=p_{-1}(2n-1)^{(1)}+\partial^{-1}\big([p_{-1}(2n-1),h]\big). \tag{2.6.30b}$$

Итерируя снова, мы находим

$$\begin{aligned} p_0(2n+1)={}&\big\{2p_{-1}(2n-1)^{(1)}+2\partial^{-1}\big([p_{-1}(2n-1),h]\big)\big\}-\\ &-\big\{2p_{-1}(2n-1)^{(1)}\big\}+\big\{\partial^{-1}\big([h,2p_{-1}(2n-1)]\big)\big\}=0. \end{aligned} \tag{2.6.31}$$

Таким образом, тождество $p_0(2n+1)=0$ (2.6.5) доказано по индукции. Попутно мы получили из (2.6.30b) и (2.6.28), что

$$\begin{aligned} p_{-1}(2n+1)={}&p_{-1}(2n-1)^{(2)}+[p_{-1}(2n-1),h]+h2p_{-1}(2n-1)+\\ &+\partial^{-1}\left\{\left[p_{-1}(2n-1)^{(1)}+\partial^{-1}\big([p_{-1}(2n-1),h]\big),h\right]+h2p_{-1}(2n-1)^{(1)}\right\}, \end{aligned} \tag{2.6.32}$$

или

$$p_{-1}(2n+1)^{(1)}=p_{-1}(2n-1)^{(3)}+2(\partial h+h\partial)(p_{-1}(2n-1))+ \tag{2.6.33a}$$

$$+\left[\operatorname{ad}_h\partial^{-1}\operatorname{ad}_h-(\partial\operatorname{ad}_h+\operatorname{ad}_h\partial)\right](p_{-1}(2n-1)). \tag{2.6.33b}$$

В абелевом случае формулы (2.6.33) обеспечивают вторую гамильтонову структуру иерархии КдФ (2.6.2); в неабелевом случае эта структура становится, как мы видим, нелокальной. (Подобные формулы можно получить и для неабелевой иерархия ДВВ (2.4.8), при помощи тех же рассуждений.)

Но *действительно ли* то, что мы получили, есть иерархия КдФ? Напомним, что традиционно эта иерархия определяется при помощи представления Лакса

$$\partial_{t_{2n+1}}(L_K)=\overline{\mathrm{const}_n}\big[(L_K^{(2n+1)/2})_{\geqslant 0},\ L_K\big]=\overline{\mathrm{const}_n}\big[L_K,\ (L_K^{(2n+1)/2})_{<0}\big], \tag{2.6.34a}$$

$$L_K=\xi^2+h. \tag{2.6.34b}$$

В этом представлении участвует квадратный корень $L_K^{1/2}$ из $L_K=\xi^2+h$. Однако, как и в абелевом случае, обе иерархии КдФ *совпадают*. Чтобы доказать это, мы выведем для второго лаксова представления (2.6.34) аналог рекуррентных соотношений (2.6.33). Положим

$$L_K^{(2n+1)/2}=\sum_k \pi_k(n)\xi^k. \tag{2.6.35}$$

Тогда, согласно (2.6.34a),

$$\begin{aligned} \partial_{t_{2n+1}}(L_K)=\partial_{t_{2n+1}}(h)&=\overline{\mathrm{const}_n}\big[\xi^2+h,\sum_{k<0}\pi_k(n)\xi^k\big]_{\geqslant 0}=\\ &=\overline{\mathrm{const}_n}2\pi_{-1}(n)^{(1)}, \end{aligned} \tag{2.6.36}$$

так что n-й поток имеет вид

$$\partial_{t_{2n+1}}(h)=2\overline{\mathrm{const}_n}\pi_{-1}(n)^{(1)}. \tag{2.6.37}$$

Чтобы выразить $\pi_{-1}(n+1)^{(1)}$ через $\pi_{-1}(n)$, соберем коэффициенты при ξ^{-1} и ξ^{-2} в двойном тождестве

$$L_K^{(2n+1)/2} = L_K^{(2n-1)/2} L_K = L_K L_K^{(2n-1)/2} \quad : \tag{2.6.38}$$

$$\sum \pi_k(n+1)\xi^k = \sum \pi_k(n)\xi^k(\xi^2+h) = (\xi^2+h)\sum \pi_k(n)\xi^k, \tag{2.6.39}$$

$$\pi_{-1}(n+1) = \pi_{-3}(n) + \pi_{-1}(n)h, \tag{2.6.40}$$

$$\pi_{-1}(n+1) = \pi_{-3}(n) + 2\pi_{-2}(n)^{(1)} + \pi_{-1}(n)^{(2)} + h\pi_{-1}(n), \tag{2.6.41}$$

$$\pi_{-2}(n+1) = \pi_{-4}(n) + \pi_{-2}(n)h - \pi_{-1}(n)h^{(1)}, \tag{2.6.42}$$

$$\pi_{-2}(n+1) = \pi_{-4}(n) + 2\pi_{-3}(n)^{(1)} + \pi_{-2}(n)^{(2)} + h\pi_{-2}(n). \tag{2.6.43}$$

Сравнивая (2.6.40) и (2.6.41), находим, что

$$\pi_{-2}(n) = -\frac{1}{2}\pi_{-1}(n)^{(1)} + \frac{1}{2}\partial^{-1}\big([\pi_{-1}(n), h]\big). \tag{2.6.44}$$

Вычитая (2.6.42) из (2.6.43), получаем

$$2\pi_{-3}(n)^{(1)} = -\pi_{-2}(n)^{(2)} + [\pi_{-2}(n), h] - \pi_{-1}(n)h^{(1)}. \tag{2.6.45}$$

Подстановка (2.6.44) в (2.6.45) дает

$$\begin{aligned} 2\pi_{-3}(n)^{(1)} = \frac{1}{2}\pi_{-1}(n)^{(3)} - \frac{1}{2}[\pi_{-1}(n), h]^{(1)} - \pi_{-1}(n)h^{(1)} - \\ - \Big[h,\ -\frac{1}{2}\pi_{-1}(n)^{(1)} + \frac{1}{2}\partial^{-1}\big([\pi_{-1}(n), h]\big)\Big]. \end{aligned} \tag{2.6.46}$$

Наконец, подставляя это в (2.6.40), получаем

$$\begin{aligned} \pi_{-1}(n+1)^{(1)} &= \pi_{-3}(n)^{(1)} + \big(\pi_{-1}(n)h\big)^{(1)} \\ &= \frac{1}{4}\pi_{-1}(n)^{(3)} - \frac{1}{4}\big[\pi_{-1}(n)^{(1)}h + \pi_{-1}(n)h^{(1)} - h^{(1)}\pi_{-1}(n) - h\pi_{-1}(n)^{(1)}\big] \\ &\qquad - \frac{1}{2}\pi_{-1}(n)h^{(1)} + \frac{1}{4}\big[h\pi_{-1}(n)^{1} - \pi_{-1}(n)^{(1)}h\big] \\ &\qquad + \frac{1}{4}\operatorname{ad}_h\partial^{-1}\operatorname{ad}_h(\pi_{-1}(n)) + \pi_{-1}(n)^{(1)}h + \pi_{-1}(n)h^{(1)} \\ &= \frac{1}{4}\Big\{\pi_{-1}(n)^{(3)} + 2\pi_{-1}(n)^{(1)}h + \pi_{-1}(n)h^{(1)} + h^{(1)}\pi_{-1}(n) + 2h\pi_{-1}(n)^{(1)} \\ &\qquad + \operatorname{ad}_h\partial^{-1}\operatorname{ad}_h(\pi_{-1}(n))\Big\}. \end{aligned} \tag{2.6.47}$$

Таким образом, мы пришли к желаемой формуле

$$\pi_{-1}(n+1)^{(1)} = \frac{1}{4}\big\{\partial^3 + \widehat{R}_h\partial + \partial\widehat{R}_h + \widehat{L}_h\partial + \partial\widehat{L}_h + \operatorname{ad}_h\partial^{-1}\operatorname{ad}_h\big\}(\pi_{-1}(n)). \tag{2.6.48}$$

Теперь ее нужно сравнить с формулой (2.6.33). Так как

$$\begin{aligned} 2(h\partial + \partial h) - (\partial\operatorname{ad}_h + \operatorname{ad}_h\partial) = 2(\widehat{L}_h\partial + \partial\widehat{L}_h) - \partial(\widehat{L}_h - \widehat{R}_h) - (\widehat{L}_h - \widehat{R}_h)\partial = \\ = \widehat{L}_h\partial + \partial\widehat{L}_h + \partial\widehat{R}_h + \widehat{R}_h\partial, \end{aligned} \tag{2.6.49}$$

то формула (2.6.33) принимает вид

$$p_{-1}(2n+1)^{(1)} = \left\{\partial^3 + \widehat{L}_h\partial + \partial\widehat{L}_h + \widehat{R}_h\partial + \partial\widehat{R}_h + \mathrm{ad}_h\,\partial^{-1}\,\mathrm{ad}_h\right\}(p_{-1}(2n+1)). \quad (2.6.50)$$

Так как

$$p_{-1}(1) = h, \quad \pi_{-1}(0) = \mathrm{Res}(\xi^2+h)^{1/2} = \frac{1}{2}h, \quad (2.6.51)$$

и рекуррентные соотношения (2.6.48) и (2.6.50) отличаются только множителем 1/4, то мы имеем

$$\pi_{-1}(n) = 2^{-1}4^{-n}p_{-1}(2n+1), \quad (2.6.52)$$

то есть,

$$\mathrm{Res}\left[(\xi^2+h)^{(2n+1)/2}\right] = 2^{-1-2n}\,\mathrm{Res}\left[(\xi+h\xi^{-1})^{2n+1}\right] \quad (2.6.53a)$$

$$= \mathrm{Res}\left([(\xi+h\xi^{-1})/2]^{2n+1}\right). \quad (2.6.53b)$$

Таким образом, наши два разных построения неабелевой иерархии КдФ приводят к одному результату.

2.7 Одетая иерархия МКП

> Однажды я сказал знакомому слависту, что мне очень нравится одно русское стихотворение, которое я прочел в переводе. "В оригинале оно многое теряет," ответил тот.
>
> Мартин Перец

В этом разделе мы строим коммутирующую иерархию уравнений движения для оператора $\mathcal{K}$, который раздевает оператор Лакса $\mathcal{L}$ (2.1.5) для иерархии МКП (2.1.6).

Рассмотрим дифференциальную алгебру

$$R_{v\tau} = \mathcal{F}\langle v^{(j)}, \tau_i^{(j)}\rangle, \quad i \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7.1)$$

и выберем следующий элемент $\mathcal{K}$ в кольце $R_{v\tau}((\xi^{-1}))$:

$$\mathcal{K} = e^{-v}\Big(1 + \sum_{i\geqslant 1}\tau_i\xi^{-i}\Big). \quad (2.7.2)$$

Строго говоря, нужно работать в чуть большем кольце $\mathcal{F}\big[[v]\big]\langle v^{(j+1)}, \tau_i^{(j)}\rangle$ (или, иначе в $\mathcal{F}\langle W, W^{-1}, W^{(j+1)}, \tau_i^{(j)}\rangle$, при $W = e^{-v}$), но, для краткости, мы игнорируем такие педантичные оговорки.

Обозначив

$$\mathcal{K}_0 = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\tau_i\xi^{-i}, \quad (2.7.3)$$

мы получим

$$\mathcal{K} = e^{-v}\mathcal{K}_0. \quad (2.7.4)$$

Лемма 2.7.5. Пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}\xi\mathcal{K}^{-1} \ \in \ R_{v\tau}((\xi^{-1})). \tag{2.7.6}$$

Тогда

$$\mathcal{L} \ \in \ \xi + O(1). \tag{2.7.7}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}\xi\mathcal{K}^{-1} = e^{-v}(\mathcal{K}_0\xi\mathcal{K}_0^{-1})e^{v} =$$

$$\overset{\text{Л. }1.5.3}{=} \ e^{-v}[\xi + O(\xi^{-1})]e^{v} = \xi + e^{-v}\partial(e^{v}) + O(\xi^{-1}). \qquad \blacksquare \tag{2.7.8}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$, определим эволюционное дифференцирование ∂_{t_n} алгебры $R_{v\tau}$ следующим равенством в алгебре $R_{v\tau}((\xi^{-1}))$:

$$\partial_{t_n}(\mathcal{K}) = - \ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{K}\xi^{n}\mathcal{K}^{-1})\mathcal{K}. \tag{2.7.9}$$

Так как обе стороны этого равенства принадлежат $R_{v\tau}((\xi^{-1}))_{\leqslant 0}$, то дифференцирование ∂_{t_n} определено корректно.

Утверждение 2.7.10. Из уравнений движения (2.7.9) следуют уравнения движения

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = [{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^{n}), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^{n})]. \tag{2.7.11}$$

Доказательство. Этот раздел дублирует §1.5. Как при доказательстве Предложения 1.5.8, мы находим

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = \partial_{t_n}(\mathcal{K})\xi\mathcal{K}^{-1} - \mathcal{K}\xi\mathcal{K}^{-1}\partial_{t_n}(\mathcal{K})\mathcal{K}^{-1} \overset{(2.7.9)}{=} [\mathcal{L}, \ {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^{n})]. \qquad \blacksquare$$

Таким образом, иерархия МКП действительно сидит внутри большей иерархии в пространстве раздетых переменных v, τ. Остается показать, что потоки раздетой иерархии коммутируют между собой.

Теорема 2.7.12. Потоки раздетой иерархии МКП (2.7.9) взаимно коммутируют.

Доказательство. Выберем $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, и обозначим

$$P = \mathcal{K}\xi^{n_1}\mathcal{K}^{-1}, \quad Q = \mathcal{K}\xi^{n_2}\mathcal{K}^{-1}, \quad \partial_{t_{n_1}} = \partial_P, \quad \partial_{t_{n_2}} = \partial_Q.$$

Мы собираемся показать, что

$$[\partial_P, \partial_Q](\mathcal{K}) = 0 \quad \text{в} \quad R_{v\tau}((\xi^{-1})). \tag{2.7.13}$$

Имеем,

$$\partial_P\partial_Q(\mathcal{K}) = \partial_P({}_{\leqslant 0}Q\mathcal{K}) = -{}_{\leqslant 0}[\partial_P(Q)]\mathcal{K} - {}_{\leqslant 0}Q\partial_P(\mathcal{K}) =$$
$$= -{}_{\leqslant 0}[Q, {}_{\leqslant 0}P]\mathcal{K} + {}_{\leqslant 0}Q({}_{\leqslant 0}P\mathcal{K}) = \big({}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}P, Q] + ({}_{\leqslant 0}Q)({}_{\leqslant 0}P)\big)\mathcal{K}.$$

Меняя местами P и Q, получаем

$$\partial_Q\partial_P(\mathcal{K}) = ({}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}Q, P] + ({}_{\leqslant 0}P)({}_{\leqslant 0}Q))\mathcal{K} \quad \Rightarrow$$
$$[\partial_P, \partial_Q](\mathcal{K}) = \ ?\mathcal{K},$$

где

$$\begin{aligned} ? &= {}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}P, Q] - {}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}Q, P] - [{}_{\leqslant 0}P, {}_{\leqslant 0}Q] \\ &= {}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}P, {}_{\leqslant 0}Q + {}_{\geqslant 1}Q] + {}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}P + {}_{\geqslant 1}P, {}_{\leqslant 0}Q] - {}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}P, {}_{\leqslant 0}Q] \\ &= {}_{\leqslant 0}[{}_{\leqslant 0}P + {}_{\geqslant 1}P, {}_{\leqslant 0}Q + {}_{\geqslant 1}Q] = {}_{\leqslant 0}[P, Q] = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание 2.7.14. Как и в случае КП, о гамильтоновых аспектах раздетой иерархии МКП (2.7.9) ничего официально не известно.

Глава 3

Между КП и МКП

Иерархии КП и МКП связаны неким преобразованием; по традиции, любое (необратимое) преобразование между интегрируемыми иерархиями называется *преобразованием Миуры*. В этой главе мы строим две версии преобразования Миуры, на языке уравнений Лакса и Вильсона, и исследуем гамильтоновы аспекты этого преобразования.

3.1 Преобразование Миуры на языке представления Лакса

В этом разделе преобразование Миуры между иерархиями МКП и КП вводится на языке уравнений Лакса.

Напомним, что n-й поток иерархии МКП (2.1.6) имеет вид

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = [\,_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \,_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)], \tag{3.1.1}$$

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i \geqslant 0} a_i \xi^{-i}, \tag{3.1.2}$$

где мы положили $\mathrm{const}_n = 1$ для краткости. В обозначениях

$$\mathcal{L}^n = \sum \xi^k p_k(n), \tag{3.1.3}$$

уравнение движения для a_0, (2.1.10a), имеют вид:

$$\partial_{t_n}(a_0) = (\partial + \mathrm{ad}_{a_0})\big(p_0(n)\big). \tag{3.1.4}$$

Пока все происходит внутри дифференциальной алгебры R_a :

$$R_a = \mathcal{F}\langle a_i^{(j)} \rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.1.5}$$

Теперь мы продолжим иерархию МКП (3.1.1) в бо́льшую дифференциальную алгебру R_{Va} :

$$R_{Va} = \mathcal{F}\langle V^{-1}, V^{(j)}, a_i^{(j)} \rangle, \quad i \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.1.6}$$

при помощи гомоморфизма Pot : $R_a \to R_{Va}$,

$$\mathrm{Pot}(a_0) = -V^{(1)} V^{-1}, \tag{3.1.7}$$

$$\mathrm{Pot}(a_i) = a_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.1.8}$$

Лемма 3.1.9. Уравнения движения: (3.1.4) в R_a, и

$$\partial_{t_n}(V) = -\operatorname{Pot}\bigl(p_0(n)\bigr)V \tag{3.1.10}$$

в R_{Va}, являются Pot–связанными.

Доказательство. Нужно проверить, что

$$\operatorname{Pot}\partial_{t_n}(a_0) = \partial_{t_n}(\operatorname{Pot}(a_0)), \tag{3.1.11}$$

что, согласно (3.1.4) и (3.1.7), равно

$$\operatorname{Pot}(\partial + \mathrm{ad}_{a_0})(p_0(n)) = \partial_{t_n}(-V^{(1)}V^{-1}). \tag{3.1.12}$$

Правая часть (3.1.12) равна, в силу (3.1.10):

$$\begin{aligned}
&-\bigl\{[-\operatorname{Pot}(p_0(n))V]^{(1)}V^{-1} - V^{(1)}V^{-1}[-\operatorname{Pot}(p_0(n))V]V^{-1}\bigr\} = \\
&\qquad = \operatorname{Pot}[p_0(n)^{(1)}] + \operatorname{Pot}(p_0(n))V^{(1)}V^{-1} - V^{(1)}V^{-1}\operatorname{Pot}(p_0(n)) = \\
&\qquad\qquad \overset{(3.1.7)}{=} \operatorname{Pot}[(\partial + \mathrm{ad}_{a_0})(p_0(n))],
\end{aligned}$$

что совнадает с левой частью (3.1.12). ▮

У нас уже есть все ингредиенты, необходимые, чтобы изготовить иерархию КП из иерархии МКП. Положим

$$\bar{L} = V^{-1}\operatorname{Pot}(\mathcal{L})V \in R_{Va}((\xi^{-1})). \tag{3.1.13}$$

Утверждение 3.1.14.

$$\bar{L} = \xi + O(\xi^{-1}). \tag{3.1.15}$$

Доказательство. Имеем, согласно (3.1.2):

$$\begin{aligned}
\bar{L} &= V^{-1}[\xi + \operatorname{Pot}(a_0) + O(\xi^{-1})]V = \xi + [V^{-1}\partial(V) + V^{-1}\operatorname{Pot}(a_0)V] + O(\xi^{-1}) = \\
&= \xi + V^{-1}[V^{(1)}V^{-1} + \operatorname{Pot}(a_0)]V + O(\xi^{-1}) \overset{(3.1.7)}{=} \xi + O(\xi^{-1}).
\end{aligned}$$ ▮

Теперь вычислим $\partial_{t_n}(\bar{L})$:

$$\begin{aligned}
\partial_{t_n}(\bar{L}) = \partial_{t_n}[V^{-1}\operatorname{Pot}(\mathcal{L})V] &\overset{(3.1.11)}{=} -V^{-1}\partial_{t_n}(V)\bar{L} + V^{-1}\operatorname{Pot}[\partial_{t_n}(\mathcal{L})]V + \\
&+\bar{L}V^{-1}\partial_{t_n}(V) = [V^{-1}\operatorname{Pot}(p_0(n)V, \bar{L}] + V^{-1}\operatorname{Pot}[\partial_{t_n}(\mathcal{L})]V.
\end{aligned}$$

Но, в силу (3.1.1),

$$V^{-1}\operatorname{Pot}[\partial_{t_n}(\mathcal{L})]V = [(V^{-1})({}_{\geqslant 1}(\operatorname{Pot}(\mathcal{L})^n))V, \bar{L}] = [\bar{L}, V^{-1}({}_{\leqslant 0}(\operatorname{Pot}(\mathcal{L})^n))V].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\partial_{t_n}(\bar{L}) &= [V^{-1}\operatorname{Pot}\{p_0(n) + {}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n)\}V, \bar{L}] && (3.1.16a)\\
&= [\bar{L}, V^{-1}\operatorname{Pot}\{{}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n) - p_0(n)\}V] \quad \Leftrightarrow && (3.1.16b)\\
\partial_{t_n}(\bar{L}) &= [V^{-1}\operatorname{Pot}({}_{\geqslant 0}(\mathcal{L}^n))V, \bar{L}] && (3.1.17a)\\
&= [\bar{L}, V^{-1}\operatorname{Pot}({}_{<0}(\mathcal{L}^n))V] \quad \Leftrightarrow && (3.1.17b)\\
\partial_{t_n}(\bar{L}) &= [V^{-1}\operatorname{Pot}((\mathcal{L}^n)_+)V, \bar{L}] && (3.1.18a)\\
&= |\bar{L}, V^{-1}\operatorname{Pot}((\mathcal{L}^n)_-)V] \quad \Leftrightarrow && (3.1.18b)\\
\partial_{t_n}(\bar{L}) &= [(V^{-1}\operatorname{Pot}(\mathcal{L}^n)V)_+, \bar{L}] && (3.1.19a)\\
&= [\bar{L}, (V^{-1}\operatorname{Pot}((\mathcal{L}^n)V)_-| \quad \Leftrightarrow && (3.1.19b)\\
\partial_{t_n}(\bar{L}) &= [(\bar{L}^n)_+, \bar{L}] = [\bar{L}, (\bar{L}^n)_-], && (3.1.20)
\end{aligned}$$

а это и есть КП. Итак, мы нашли преобразование Миуры $\overline{\Phi} : R_A = \mathcal{F}\langle A_i^{(j)}\rangle \to R_{Va}$:

$$\overline{\Phi}(L) = \overline{\Phi}\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}\Big) = \bar{L} = V^{-1}\operatorname{Pot}(\mathcal{L})V = \tag{3.1.21a}$$

$$= \xi + \sum_{i\geqslant 1} V^{-1} a_i \xi^{-i} V = \xi + \sum_{i\geqslant 1} (V^{-1}a_i V)[\xi - V^{-1}\operatorname{Pot}(a_0)V]^{-i}, \tag{3.1.21b}$$

где в последнем равенстве использовано соотношение

$$V^{-1}\xi^{-i}V = (V^{-1}\xi V)^{-i} = [\xi + V^{-1}V^{(1)}]^{-i} = [\xi - V^{-1}\operatorname{Pot}(a_0)V]^{-i}.$$

Мы видим, что преобразование Миуры $\overline{\Phi}^*$ отображает потенциальную (= V–продолженную) иерархию МКП в иерархию КП (если мы думаем об a_i и A_i, как функциях от x, t, и о преобразовании Миуры, как об аналитическом отображении, переводящем решения одной системы дифференциальных уравнений в решения другой системы; алгебраическое преобразование Миуры $\overline{\Phi}$ (3.1.21) двойственно к этому аналитическому).

Картина упрощается, *если все переменные коммутируют*. Тогда мы имеем

$$\overline{\Phi} = \operatorname{Pot} \circ \Phi, \tag{3.1.22}$$

где гомоморфизм $\Phi : R_A \to R_a$ задан формулой

$$\Phi(L) = \Phi\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}\Big) = \xi + \sum_{i\geqslant 1} a_i (\xi - a_0)^{-i}. \tag{3.1.23}$$

Так как отображение Pot инъективно,

$$\operatorname{Pot}(a_0^{(j)}) = v^{(j+1)}, \quad v = -\ln V, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.1.24}$$

то отображение Φ^* переводит иерархию МКП в иерархию КП.

Замечание 3.1.25. Чтобы завершить картину, нужно проверить, что все потоки в Pot–иерархии МКП коммутируют. Мы разобьем проверку на несколько отдельных шагов.

Пусть $R_{va} = \mathcal{F}\langle v^{(j)}, a_i^{(j)}\rangle$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, является дифференциальной алгеброй, и пусть, для $\varepsilon = \pm 1$,

$$D_\varepsilon^{ev}(R_{va}) = \{X \in D^{ev}(R_{va}) :\ X(v) \in \operatorname{Im}(\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)\}. \tag{3.1.26}$$

Лемма 3.1.27. $D_\varepsilon^{ev}(R_{va})$ является алгеброй Ли.

Доказательство. Рассмотрим любые $X, Y \in D_\varepsilon^{ev}(R_{va})$. Пусть, например, $X(v) = (\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)(x)$, $Y(v) = (\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)(y)$, для некоторых $x, y \in R_{va}$. Тогда

$$\begin{aligned}
[X,Y](v) &= X(\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)(y) - Y(\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)(x) \\
&= \partial X(y) + \varepsilon X([v,y]) - \partial Y(x) - \varepsilon Y([v,x]) \\
&= \partial[X(y) - Y(x)] + \varepsilon \operatorname{ad}_v [X(y) - Y(x)] && (3.1.27a) \\
&\quad + \varepsilon([X(v), y] - [Y(v), x]). && (3.1.27b)
\end{aligned}$$

Далее

$$[X(v), y] - [Y(v), x] = (\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)([x,y]) \quad \Rightarrow \tag{3.1.28}$$

$$[X,Y](v) = (\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_v)(X(y) - Y(x) + \varepsilon[x,y]). \qquad \blacksquare \tag{3.1.29}$$

Пусть $R_{Va} = \mathcal{F}\langle V^{-1}, V^{(j)}, a_i^{(j)}\rangle$ — другая дифференциальная алгебра, и пусть

$$D^{ev}_{+}(R_{Va}) = \{X' \in D^{ev}(R_{Va}) : X'(V) \in \operatorname{Im}(\widehat{R}_V)\}, \tag{3.1.30+}$$

$$D^{ev}_{-}(R_{Va}) = \{X' \in D^{ev}(R_{Va}) : X'(V) \in \operatorname{Im}(\widehat{L}_V)\}. \tag{3.1.30−}$$

Лемма 3.1.31. $D^{ev}_{\varepsilon}(R_{Va})$ является алгеброй Ли.

Доказательство. Конечно, Лемма бессодержательна, так как $D^{ev}_{\varepsilon}(R_{Va}) = D^{ev}(R_{Va})$. Смысл состоит в том, чтобы вывести явные формулы для коммутатора эволюционных дифференцирований.

Если $X'(V) = x'V$, $Y'(V) = y'V$ для некоторых $x', y' \in R_{Va}$, то

$$[X', Y'](V) = X'(y'V) - Y'(x'V) = [X'(y') - Y'(x')]V + y'x'V - x'y'V \quad \Rightarrow$$
$$[X', Y'](V) = (X'(y') - Y'(x') - [x', y'])V. \tag{3.1.32}$$

Аналогично, если $X'(V) = Vx'$, $Y'(V) = Vy'$, то

$$[X', Y'](V) = X'(Vy') - Y'(Vx') = Vx'y' + VX'(y') - Vy'x' - VY'(x') \quad \Rightarrow$$
$$[X', Y'](V) = V(X'(y') - Y'(x') + [x', y']). \quad \blacksquare \tag{3.1.33}$$

Пусть $\mathrm{Pot}_\varepsilon : R_{va} \to R_{Va}$ есть следующие дифференциальные гомоморфизмы:

$$\mathrm{Pot}_{+}(v) = -V^{(1)}V^{-1}, \quad \mathrm{Pot}_{+}(a_i) = a_i, \quad i \in \mathbb{Z}_{+}, \tag{3.1.34+}$$

$$\mathrm{Pot}_{-}(v) = -V^{-1}V^{(1)}, \quad \mathrm{Pot}_{-}(a_i) = a_i, \quad i \in \mathbb{Z}_{+}. \tag{3.1.34−}$$

Лемма 3.1.35. Если Pot_ε связывает $Z' \in D^{ev}(R_{Va})$ и $0 \in D^{ev}(R_{va})$, то

$$Z'(a_i) = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_{+}, \quad Z'(V) = \mathrm{const}\, V. \tag{3.1.36}$$

Доказательство. Из $\mathrm{Pot}_\varepsilon(a_i) = a_i$ следует, что $Z'(a_i) = 0$, $\forall i$. Имеем, при $\varepsilon = 1$,

$$0 = Z'(\mathrm{Pot}_{+}(v)) = Z'(-V^{(1)}V^{-1}) = -z^{(1)}V^{-1} + V^{(1)}V^{-1}zV^{-1},$$

где $z = Z'(V)$, так что

$$z^{(1)} = V^{(1)}V^{-1}z. \tag{3.1.37a}$$

Положим

$$z = V\bar{z},$$

тогда

$$0 = z^{(1)} - V^{(1)}V^{-1}z = V^{(1)}\bar{z} + V\bar{z}^{(1)} - V^{(1)}\bar{z} = V\bar{z}^{(1)},$$

так что $\bar{z}^{(1)} = 0$, откуда $\bar{z} = \mathrm{const}$, и формула (3.1.36) доказана.

Аналогично, для $\varepsilon = -1$, имеем

$$0 = Z'(\mathrm{Pot}_{-}(v)) = Z'(-V^{-1}V^{(1)}) = V^{-1}zV^{-1}V^{(1)} - V^{-1}z^{(1)} \quad \Rightarrow$$
$$z^{(1)} = zV^{-1}V^{(1)}. \tag{3.1.37b}$$

Положив

$$z = \bar{z}V,$$

получим

$$0 = z^{(1)} - zV^{-1}V^{(1)} = \bar{z}^{(1)}V + \bar{z}V^{(1)} - zV^{(1)} = \bar{z}^{(1)}V,$$

и опять, $\bar{z}^{(1)} = 0$, и формула (3.1.36) доказана. ∎

Итак, не существует естественного отображения $D^{ev}(R_{va}) \to D^{ev}(R_{Va})$, которое было бы совместно с гомоморфизмом $\mathrm{Pot}_\varepsilon : R_{va} \to R_{Va}$. Мы подправим ситуацию следующим образом.

Обозначим

$$\bar{D}^{ev}(R_{va}) = \{X \in D^{ev}(R_{va}) : \ X(v)|_{v=0,a=0} = 0\}, \tag{3.1.38}$$

так что $X(v)$ — дифференциальный многочлен от v и a_i без свободного члена. Пусть аналогичное определение относится также к символу $\bar{D}^{ev}_\varepsilon(R_{va})$. Доказательство Леммы 3.1.27 остается справедливым, так что $\bar{D}^{ev}(R_{va})$ и $\bar{D}^{ev}_\varepsilon(R_{va})$ являются алгебрами Ли.

Теорема 3.1.39. Продолжим гомоморфизм $\mathrm{Pot}_\varepsilon : R_{va} \to R_{Va}$ до отображения $\bar{D}^{ev}_\varepsilon(R_{va}) \to D^{ev}_\varepsilon(R_{Va})$, $X \mapsto X' = \mathrm{Pot}_\varepsilon(X)$, по правилу $X'(a_i) = \mathrm{Pot}_\varepsilon X(a_i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, и

$$X(v) = (\partial + \mathrm{ad}_v)(x) \quad \Rightarrow \quad X'(V) = -\mathrm{Pot}_+(x)V, \tag{3.1.40+}$$

$$X(v) = (\partial - \mathrm{ad}_v)(x) \quad \Rightarrow \quad X'(V) = -V\,\mathrm{Pot}_-(x). \tag{3.1.40−}$$

Тогда Pot_ε корректно определено и является гомоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Если $X \in \bar{D}^{ev}_\varepsilon(R_{va})$ и $X = (\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(x) = (\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(x_1)$ то $(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(x - x_1) = 0$. Следовательно, $(x - x_1)$ есть постоянная и, согласно определению (3.1.38) эта постоянная равна нулю.

Для $X, Y \in \bar{D}^{ev}_\varepsilon(R_{va})$ нужно проверить, что

$$\mathrm{Pot}_\varepsilon([X,Y]) = [\mathrm{Pot}_\varepsilon(X), \mathrm{Pot}_\varepsilon(Y)], \tag{3.1.41}$$

а также, что, при $\varepsilon = -1$, X и X' являются Pot_--связанными:

$$\mathrm{Pot}_-\, X(v) = X'\,\mathrm{Pot}_-(v). \tag{3.1.42}$$

(случай $\varepsilon = 1$ покрывается Леммой 3.1.9). Сначала докажем формулу (3.1.42). Имеем, для левой части (3.1.42):

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}_-\, X(v) &= \mathrm{Pot}_-(\partial - \mathrm{ad}_v)(x) = \mathrm{Pot}_-(x^{(1)} - [v, x]) \\ &= [\mathrm{Pot}_-(x)]^{(1)} + [V^{-1}V^{(1)}, \mathrm{Pot}_-(x)]. \end{aligned} \tag{3.1.43ℓ}$$

Для правой части (3.1.42) имеем

$$\begin{aligned} X'\,\mathrm{Pot}_-(v) &= X'(-V^{-1}V^{(1)}) = V^{-1}\{X'(V)V^{-1}V^{(1)} - [X'(V)]^{(1)}\} \\ &\overset{(3\,1.40-)}{=} -\mathrm{Pot}_-(x)V^{-1}V^{(1)} + [\mathrm{Pot}_-(x)]^{(1)} + V^{-1}V^{(1)}\,\mathrm{Pot}_-(x), \end{aligned} \tag{3.1.43г}$$

что то же самое, что (3.1.43ℓ).

Теперь докажем формулу (3.1.41). Пусть $X, Y \in \bar{D}^{ev}_+(R_{va})$ определены, как в Лемме 3.1.27. Тогда, согласно формуле (3.1.29),

$$[X,Y](v) = (\partial + \mathrm{ad}_v)(X(y) - Y(x) + [x, y]).$$

Следовательно, согласно (3.1.40+)

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{Pot}_+([X,Y])\big)(V)\,\mathrm{Pot}_+(X(y) - Y(x) + [x,y])V = \\ &\overset{\text{Л. } 3.1.9}{=} \big\{X'\big(-\mathrm{Pot}_+(y)\big) - Y'\big(-\mathrm{Pot}_+(x)\big) - [\mathrm{Pot}_+(x), \mathrm{Pot}_+(y)]\big\}V = \\ &= (X'(y') - Y'(x') - [x', y'])V, \end{aligned} \tag{3.1.44}$$

где $x' = -\operatorname{Pot}_+(x)$, $y' = -\operatorname{Pot}_+(y)$ входят в равенства $X'(V) = x'V$, $Y'(V) = y'V$. Но формула (3.1.44) совпадает с (3.1.32), значит $[X,Y]'(V) = [X',Y'](V)$, что доказывает (3.1.41) при $\varepsilon = 1$. Аналогично, при $\varepsilon = -1$, формула (3.1.20) дает

$$[X,Y](v) = (\partial - \operatorname{ad}_v)(X(y) - Y(x) - [x,y]).$$

Следовательно, согласно (3.1.40−),

$$\begin{aligned}[X,Y]'(V) &= -V \operatorname{Pot}_-(X(y) - Y(x) - [x,y]) \overset{(3.1.42)}{=} \\ &= V\{X'(y') - Y'(x') + [x',y']\} \overset{(3.1.33)}{=} [X',Y'](V),\end{aligned}$$

и формула (3.1.41) доказана при $\varepsilon = -1$. ▮

Следствие 3.1.45. Все потоки в потенциальной иерархии МКП коммутируют друг с другом.

Этот же вывод применим к любой разумной коммутативной иерархии, поднятой до потенциальной формы; мы еще увидим такие примеры в этой главе.

> Изысканная симметрия этой композиции пострадает, если я добавлю в нее хоть что-нибудь, поэтому я заканчиваю здесь.
>
> Ч.Л. Доджсон, в письме к своему брату Эдвину (11 марта 1867)

3.2 Преобразование Миуры на языке уравнений Вильсона

Преобразование Миуры из предыдущего раздела является отражением совсем простого преобразования Миуры в пространствах одевающих переменных.

В обозначениях §2.7, уравнения движения для одевающего оператора МКП $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = W\mathcal{K}_0, \tag{3.2.1}$$

$$\mathcal{K}_0 = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \tau_i \xi^{-i}, \tag{3.2.2}$$

$$W = e^{-v}, \tag{3.2.3}$$

имеют вид (2.7.9):

$$\partial_{t_n}(\mathcal{K}) = -_{\leqslant 0}(\mathcal{K}\xi^n\mathcal{K}^{-1})\mathcal{K}. \tag{3.2.4}$$

Положим

$$\mathcal{K}\xi^n\mathcal{K}^{-1} = \sum \xi^k p_k(n). \tag{3.2.5}$$

Тогда, собрав коэффициенты при ξ^0 в формуле (3.2.4), получим

$$\partial_{t_n}(W) = -p_0(n)W \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \partial_{t_n}(\mathcal{K}_0) &= W^{-1}\{-\partial_{t_n}(W)\mathcal{K}_0 - {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)W\mathcal{K}_0\} \\ &= -W^{-1}\{{}_{0\leq}(\mathcal{L}^n) - p_0(n)\}W\mathcal{K}_0 = -W^{-1}({}_{<0}(\mathcal{L}^n))W\mathcal{K}_0 \\ &= -(W^{-1}\mathcal{L}^n W)_{<0}\mathcal{K}_0 = -[(W^{-1}\mathcal{L}W)^n]_-\mathcal{K}_0.\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Далее,

$$W^{-1}\mathcal{L}W = W^{-1}(\mathcal{K}\xi\mathcal{K}^{-1})W = \mathcal{K}_0\xi\mathcal{K}_0^{-1}, \tag{3.2.8}$$

следовательно, полагая

$$\bar{L} = \mathcal{K}_0\xi\mathcal{K}_0^{-1} \tag{3.2.9}$$

и учитывая Лемму 1.5.3, имеем

$$\bar{L} = \xi + O(\xi^{-1}). \tag{3.2.10}$$

Окончательно, получаем из (3.2.7)

$$\partial_{t_n}(\mathcal{K}_0) = -(\bar{L}^n)_-\mathcal{K}_0, \tag{3.2.11}$$

то есть, в точности уравнения движения (1.5.7) иерархии КП в представлении Вильсона. Таким образом, гомоморфизм Миуры Φ в этом представление имеет вид

$$\Phi(K) = \Phi\Big(1 + \sum_{i\geqslant 1}\mathcal{X}_i\xi^{-i}\Big) = \mathcal{K}_0 = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\tau_i\xi^{-i}, \tag{3.2.12}$$

то есть,

$$\Phi(\mathcal{X}_i) = \tau_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.2.13}$$

Остается проверить, что это преобразование Миуры, при ограннчеяии на элемент L :

$$L = K\xi K^{-1}, \tag{3.2.14}$$

порождает преобразование Миуры из предыдущего раздела. Действительно,

$$\begin{aligned}\Phi(L) &= \Phi(K\xi K^{-1}) = \mathcal{K}_0\xi\mathcal{K}_0^{-1} = W^{-1}\mathcal{K}\xi\mathcal{K}^{-1}W = W^{-1}\mathcal{L}W \\ &= W^{-1}\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0}a_i\xi^{-i}\Big)W = \xi + (W^{-1}W^{(1)} + W^{-1}a_0W) + \sum_{i\geqslant 1}W^{-1}a_i\xi^{-i}W.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Но

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \mathcal{K}\xi\mathcal{K}^{-1} = W\mathcal{K}_0\xi\mathcal{K}_0^{-1}W^{-1} = W(\xi + O(\xi^{-1}))W^{-1} = \xi + W\partial(W^{-1}) + O(\xi^{-1}) \quad \Rightarrow \\ a_0 = W\partial(W^{-1}) = W(-W^{-1}W^{(1)}W^{-1}) = -W^{(1)}W^{-1},\end{gathered} \tag{3.2.16}$$

что совпадает с формулой (3.1.7) при $W = V$. Следовательно, равенство (3.2.15) принимает вид

$$\Phi(L) = \xi + \sum_{i\geqslant 1}W^{-1}a_i\xi^{-i}W, \tag{3.2.17}$$

что есть (3.1.21b); здесь отображение Pot удалено из обозначений, так как мы работаем во всеобъемлющей алгебре R_{W_T}. Что и требовалось доказать.

Замечание 3.2.18. Формулы преобразования Миуры в представлении Вильсона показывают, как искать модифицированные матричные уравнения Лакса, участвующие в общей теории Вильсона: нужно просто взять формулы из этого раздела и сделать несколько второстепенных изменений, состоящих в замене элемента $\xi = K^{-1}LK = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{K}$ на $u_N\xi^N$ или $c\xi$, где u_N постоянная обратимая полупростая матрица, и c постоянная матрица из цетра централизатора u_N. (См. [Wil 1979].) Здесь мы не будем в это углубляться.

3.3 Раздел, написанный с целью вызвать глубочайшую депрессию

> **Блейк, Данте, Вергилий и Теннисон**
>
> Поговорив, мы решили, что Блейк никуда не годится, потому что он в 60 лет учил итальянский, чтобы изучать Данте, а мы знаем, что Данте плох, потому что он слишком увлекался Вергилием, а Вергилий плох тем, что его хвалил Теннисон, что же до Теннисона — ну, о Теннисоне и говорить нечего.
>
> Сэмюэл Батлер, *Записные книжки*

Если невырожденная ассоциативная алгебре $\mathcal{A}$ *коммутативна*, то преобразование Миуры из §3.1 переводит $\mathcal{A}$-значную иерархию МКП в $\mathcal{A}$-значную иерархию КП. В этом разделе мы докажем, что это отображение гамильтоново, вне зависимости от природы $\mathcal{A}$. (Читатели без чувства юмора могут пропустить этот раздел.)

Сначала мы приведем это отображение к более явному виду. Так как преобразование Миуры имеет вид (3.1.23)

$$\sum_{i\geqslant 0}\Phi(A_i)\xi^{-i-1} = \sum_{i\geqslant 0} a_{i+1}(\xi - a_0)^{-i-1}, \tag{3.3.1}$$

нам нужно найти удобное выражение для $(\xi - a_0)^{-i-1}$. Определим последовательность многочленов $Q_s = Q_s(u) \in \mathbb{Z}\langle u^{(j)}\rangle$, $s \in \mathbb{Z}_+$, по правилу

$$Q_s = (\partial + u)^s(1), \tag{3.3.2}$$

так что

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = u, \tag{3.3.3}$$

$$Q_{s+1} = (\partial + u)(Q_s). \tag{3.3.4}$$

Лемма 3.3.5.

$$(\xi + u)^k = \sum_{s\geqslant 0}\binom{k}{s} Q_s(u)\xi^{k-s}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.6}$$

Доказательство. Используем индукцию по $|k|$. Сначала, пусть $k \geqslant 0$. При $k = 0$ равенство (*3.3.6*), очевидно, верно. Далее,

$$\begin{aligned}
(\xi + u)^{k+1} &= (\xi + u)(\xi + u)^k = (\xi + u)\sum\binom{k}{s}Q_s\xi^{k-s} \\
&= \sum\binom{k}{s}[Q_s^{(1)} + uQ_s]\xi^{k-s} + \sum\binom{k}{s}Q_s\xi^{k+1-s} \\
&= \sum\binom{k}{s}Q_{s+1}\xi^{k-s} + \sum\binom{k}{s}Q_s\xi^{k+1-s} \\
&= \sum\left[\binom{k}{s-1}Q_s + \binom{k}{s}Q_s\right]\xi^{k+1-s} \\
&= \sum\binom{k+1}{s}Q_s\xi^{k+1-s},
\end{aligned}$$

и индуктивный переход завершен.

Теперь пусть $k = -1$. Так как $\binom{-1}{s} = (-1)^s$, то при $k = -1$ формула (3.3.6) принимает вид

$$(\xi + u)^{-1} = \sum (-1)^s Q_s \xi^{-1-s}. \tag{3.3.7}$$

Чтобы доказать ее, умножим слева на $\xi + u$. Тогда правая часть даст

$$\sum (\xi + u)(-1)^s Q_s \xi^{-1-s} = \sum (-1)^s [Q_s^{(1)} + uQ_s]\xi^{-1-s} + \sum (-1)^s Q_s \xi^{-s}$$
$$= \sum_{s\geqslant 1} (-1)^{s-1} Q_s \xi^{-s} + \sum_{s\geqslant 0} (-1)^s Q_s \xi^{-s} = Q_0 = 1,$$

как и ожидалось. Формула (3.3.7) доказана. Допустим, что формула (3.3.6) верна при $0 > k \geqslant -r$. Что провести индукцию, возведем равенство (3.3.7) в $(r+1)$–ю степень, и запишем результат в виде

$$(\xi + u)^{-r-1} = \sum_{s\geqslant 0} \binom{-r-1}{s} ?_s \xi^{-r-1-s},$$

с некоторым неизвестным $?_s \in \mathbb{Q}\langle u^{(j)}\rangle$. Умножая слева на $\xi + u$ и используя предположение индукции, получаем:

$$\sum \binom{-r}{s} Q_s \xi^{-r-s} = (\xi + u)^{-r} = (\xi + u)(\xi + u)^{-r-1}$$
$$= (\xi + u) \sum \binom{-r-1}{s} ?_s \xi^{-r-1-s} = \sum \binom{-r-1}{s} [(\partial + u)(?_s)\xi^{-r-1-s} + ?_s \xi^{-r-s}],$$

откуда $Q_0 = ?_0$ и

$$\binom{-r-1}{s+1} ?_{s+1} = \binom{-r}{s+1} Q_{s+1} - \binom{-r-1}{s} (\partial + u)(?_s). \tag{3.3.8}$$

С учетом соотношения

$$\binom{-r-1}{s+1} + \binom{-r-1}{s} = \binom{-r}{s+1},$$

рекуррентное соотношение (3.3.8) принимает вид, в силу формулы (3.3.4):

$$\binom{-r}{s+1} (?_{s+1} - Q_{s+1}) = \binom{-r-1}{s} (\partial + u)(Q_s - ?_s).$$

Так как $?_0 = Q_0$, осюда следует, что $?_s = Q_s$ для всех s. ∎

Упражнение 3.3.9. Определим последовательность элементов $\bar{Q}_s = \bar{Q}_s(u) \in \mathbb{Z}\langle u^{(j)}\rangle$, $s \in \mathbb{Z}_+$, по правилу

$$\bar{Q}_0 = 1, \quad \bar{Q}_1 = u, \quad \bar{Q}_{s+1} = -\bar{Q}_s^{(1)} + \bar{Q}_s u. \tag{3.3.10}$$

Покажите, что

$$(\xi + u)^k = \sum_{s\geqslant 0} \binom{k}{s} \xi^{k-s} \bar{Q}_s(u), \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.11}$$

При помощи формулы (3.3.6), преобразование Миуры (3.3.1) упрощается до

$$\sum \Phi(A_i)\xi^{-i-1} = \sum a_{j+1}\binom{-j-1}{s}Q_s(-a_0)\xi^{-j-1-s}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(A_i) = \sum_{j+s=i}\binom{-j-1}{s}a_{j+1}Q_s(-a_0) = \tag{3.3.12a}$$

$$\overset{(1.1.20)}{=} \sum_{j+s=i}(-1)^s\binom{i}{s}a_{j+1}Q_s(-a_0) = \sum_{s=0}^{i}(-1)^s\binom{i}{s}Q_s(-a_0)a_{i+1-s} \tag{3.3.12b}$$

$$= (-1)^i Q_i(-a_0)a_1 + \sum_{s=0}^{i-1}(-1)^s Q_s(-a_0)a_{i+1-s}\binom{i}{s}. \tag{3.3.12c}$$

Заменяя s во втором слагаемом в (3.3.12c) на $(i-1-s)$, мы можем преобразовать это слагаемое следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{i-1}(-1)^{i-s-1}Q_{i-s-1}(-a_0)a_{s+2}\binom{i}{i-s-1} \overset{(2.2.10)}{=}$$

$$= \sum(-1)^{-i-s-1}\binom{i}{s+1}Q_{i-1-s}(-a_0)w_s \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(A_i) = (-1)^i Q_i(-a_0)a_1 + \sum(-1)^{i-1-s}\binom{i}{s+1}Q_{i-1-s}(-a_0)w_s. \tag{3.3.13}$$

Для упрощения последующих вычислений удобно ввести новые переменные

$$\bar{A}_i = (-1)^i A_i, \quad \bar{a}_i = (-1)^{i+1}a_i \quad \Rightarrow \tag{3.3.14a}$$

$$\bar{w}_i = (-1)^{i+1}w_i. \tag{3.3.14b}$$

В этих переменных преобразование Миуры (3.3.13) принимает вид

$$\Phi(\bar{A}_i) = Q(\bar{a}_0)\bar{a}_1 + \sum\binom{i}{s+1}Q_{i-1-s}(\bar{a}_0)\bar{w}_s. \tag{3.3.15}$$

Запишем теперь это отображение покомпонентно. Напомним, что все наши переменные принимают значения в коммутативной ассоциативной невырожденной алгебре $\mathcal{A}$, с ортонормальным базисом $\{\mathrm{e}^\alpha\}$, и структурными константами $c_\gamma^{\alpha\beta}$:

$$e^\alpha e^\beta = \sum_\gamma c_\gamma^{\alpha\beta}e^\gamma, \tag{3.3.16}$$

где, в силу ортонормальности базиса,

$$c_\gamma^{\alpha\beta} = c_\gamma^{\beta\alpha} = c_\alpha^{\beta\gamma}, \tag{3.3.17}$$

согласно (2.3.16). Итак, положим

$$A_i = \sum A_{i|\alpha}e^\alpha, \; a_i = \sum a_{i|\alpha}e^\alpha, \; w_i = \sum w_{i|\alpha}e^\alpha, \; Q_s(\widetilde{\bar{\mathbf{a}}}_0) = \sum Q_{s|\alpha}(\widetilde{\bar{\mathbf{a}}}_0)e^\alpha. \tag{3.3.18}$$

Из формулы (3.3.4) находим

$$Q_{s+1|\alpha}(\widetilde{\mathbf{u}}) = \sum c_\alpha^{\beta\gamma}u_\beta Q_{s|\gamma}(\widetilde{\mathbf{u}}) + \partial(Q_{s|\alpha}(\widetilde{\mathbf{u}})). \tag{3.3.19}$$

Напомним, что $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ — это вектор-столбец с компонентами $u_{|\alpha}$. Подводя итог, получаем компонентную форму преобразования Миуры (3.3.15):

$$\Phi(\bar{A}_{i|\alpha}) = \sum_{\beta\gamma} c_{\alpha}^{\beta\gamma}\Big[Q_{i|\beta}(\widetilde{\bar{\boldsymbol{a}}}_0)\bar{a}_{1|\gamma} + \sum_{s}\binom{i}{s+1}Q_{i-1-s|\beta}(\widetilde{\bar{\boldsymbol{a}}}_0)\bar{w}_{s|\gamma}\Big]. \tag{3.3.20}$$

Утверждается, что преобразование Миуры (3.3.20) задает гамильтоново отображение между гамильтоновыми структурами $\{(2.3.8), (2.3.10)\}$ иерархии МКП и (1.4.19) иерархии КП.

Напомним, как следует проверять утверждение о гамильтоновости отображения. Допустим, у нас есть две коммутативные дифференциальные алгебры $R_A = \mathcal{F}[A_i^{(j)}]$ и $R_a = \mathcal{F}[a_i^{(j)}]$; пусть $B^A = (B_{ij}^A) \in \mathrm{Mat}_{(\cdot)}(R_A[\partial])$ и $B^a = (B_{ij}^a) \in \mathrm{Mat}_{(\cdot\cdot)}(R_a[\partial])$ есть соответствующие гамильтоновы матрицы; пусть $\Phi : R_A \to R_a$ есть дифференциальный гомоморфизм (то есть, коммутирующий с действиями ∂ в алгебрах R_A и R_a), заданный на образующих A_i алгебры R_A вектором

$$\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_i), \quad \Phi_i = \Phi(A_i) \in R_a. \tag{3.3.21}$$

Тогда отображение Φ гамильтоново, *если и только если*

$$D(\boldsymbol{\Phi})B^a D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger = \Phi(B^A), \tag{3.3.22}$$

где "$\dagger$" обозначает сопряжение, и $D(\Phi)$, производная Фреше вектора $\boldsymbol{\Phi}$, есть следующий матричный дифференциальный оператор:

$$D(\boldsymbol{\Phi})_{ij} = \frac{D\Phi_i}{Da_j} = \sum_s \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_j^{(s)}}\partial^s. \tag{3.3.23}$$

(Детали и доказательста можно найти и [Kup 1992] или в §5.2.)

Остаток этого раздел посвящен проверке тождества (3.3.22) для рассматриваемого случая. Мы разобъем ее на шесть этапов.

Следующее доказательство немного длинновато. Читатели, страдающие внимательной недостаточностью, могут пропустить детали.

Этап 1. Перейдем от переменных $A_{i|\alpha}$ в гамильтоновой матрице $B^{\text{КП}}$ (1.4.19) к переменным $\bar{A}_{i|\alpha}$, и от переменных $a_{i|\alpha}$, $w_{i|\alpha}$ в гамильтоновой матрице $B^{\text{МКП}}$ $\{(2.3.8), (2.3.10)\}$ к переменным $\bar{a}_{i|\alpha}$, $\bar{w}_{i|\alpha}$ (переменные с черточкой вводятся формулами (3.1.14)). Полученные матрицы задаются следующими формулами (сослужившие свою службу черточки над переменными A, a и w опущены):

$$B^{\text{КП}} = \Big(B_{i|\alpha,j|\beta}^{\text{КП}}\Big), \tag{3.3.24a}$$

$$-B_{i|\alpha,j|\beta}^{\text{КП}} = \sum_{\gamma} c_{\alpha}^{\gamma\beta} \sum_s \Big[\binom{i}{s}A_{i+j-s|\gamma}\partial^s - \binom{j}{s}(-\partial)^s A_{i+j-s|\gamma}\Big], \tag{3.3.24b}$$

$$-B^{\text{МКП}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_0\ \ a_1 & \qquad w_{j|\beta} \end{array} \\ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ w_{i|\alpha} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & B_{i|\alpha;j|\beta}^1 \end{array}\right) \end{array}, \tag{3.3.25a}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial \; = \; \begin{array}{c|cc} & a_{0|\beta} & a_{1|\beta} \\ \hline a_{0|\alpha} & 0 & \delta_{\alpha\beta}\partial \\ a_{1|\alpha} & \delta_{\alpha\beta}\partial & 0 \end{array}, \tag{3.3.25b}$$

$$B^1_{i|\alpha,j|\beta} = \sum_\gamma c_\alpha^{\gamma\beta} \sum_s \left[\binom{i+1}{s} w_{i+j+1-s|\gamma} \partial^s - \binom{j+1}{s} (-\partial^s) w_{i+j+1-s|\gamma} \right]. \tag{3.3.25c}$$

Преобразование Миуры (3.3.20) принимает вид

$$\Phi(A_{i|\alpha}) = \sum_{\beta\gamma} c_\alpha^{\beta\gamma} [Q_{i|\beta}(\widetilde{\boldsymbol{a}}_0) a_{1|\gamma} + \sum_s \binom{i}{s+1} Q_{i-1-s|\beta}(\widetilde{\boldsymbol{a}}_0) w_{s|\gamma}]. \tag{3.3.26}$$

Этап 2. Перепишем проверяемое матричное тождество (3.3.22), с $B^a = -B^{\text{МКП}}$ и $B^A = -B^{\text{КП}}$, в терминах соответствующих матричных элементов, скажем, на $(i|\alpha, j|\beta)$ месте.

Начиная с левой части (3.3.22), имеем

$$D(\Phi)_{i|\alpha,i'|\alpha'} = \frac{D\Phi_{i|\alpha}}{Da_{i'|\alpha'}} = \frac{D\Phi(A_{i|\alpha})}{Da_{i'|\alpha'}} \quad \Rightarrow$$

$$D(\Phi)_{i|\alpha,a_{0|\alpha'}} = \sum_{\delta\gamma} c_\alpha^{\delta\gamma} \Big[a_{1|\gamma} D_{\alpha'}(Q_{i|\delta}) + \sum_s w_{s|\gamma} \binom{i}{s+1} D_{\alpha'}(Q_{i-1-s|\delta}) \Big], \tag{3.3.27a}$$

где:

$$Q_{i|\delta} = Q_{i|\delta}(\widetilde{\boldsymbol{a}}_0), \quad D_{\alpha'}(Q_{i|\delta}) = \frac{DQ_{i|\delta}}{Da_{0|\alpha'}};$$

$$D(\Phi)_{i|\alpha,a_{1|\alpha'}} = \sum_\delta c_\alpha^{\delta\alpha'} Q_{i|\delta}; \tag{3.3.27b}$$

$$D(\Phi)_{i|\alpha,w_{i'|\alpha'}} = \sum_\delta c_\alpha^{\delta\alpha'} Q_{i-1-i'|\delta} \binom{i}{i'+1}. \tag{3.3.27c}$$

Это позволяет вычислить произведение

$$[D(\Phi)(-B^{\text{МКП}})]_{i|\alpha,j'|\beta'} = -\sum_{i'\alpha'} D(\Phi)_{i|\alpha,i'|\alpha'} B^{\text{МКП}}_{i'|\alpha',j'|\beta'} :$$

$$[D(\Phi)B^{\text{МКП}}]_{i|\alpha,a_{0|\beta'}} = \sum_\delta c_\alpha^{\delta\beta'} Q_{i|\delta}\partial, \tag{3.3.27d}$$

$$-[D(\Phi)B^{\text{МКП}}]_{i|\alpha,a_{1|\beta'}} =$$

$$= \sum_{\delta\gamma} c_\alpha^{\delta\gamma} \Big[a_{1|\gamma} D_{\beta'}(Q_{i|\delta})\partial + \sum_s w_{s|\gamma} \binom{i}{s+1} D_{\beta'}(Q_{i-1-s|\delta})\partial \Big], \tag{3.3.27e}$$

$$-[D(\Phi)B^{\text{МКП}}]_{i|\alpha,w_{j'|\beta'}} =$$

$$= \sum_{\delta i'\alpha'} c_\alpha^{\delta\alpha'} Q_{i-1-i'|\delta} \binom{i}{i'+1} \sum_\gamma c_{\alpha'}^{\gamma\beta'} \sum_s \Big[\binom{i'+1}{s} w_{i'+j'+1-s|\gamma} \partial^s -$$

$$- \binom{j'+1}{s} (-\partial)^s w_{i'+j'+1-s|\gamma} \Big]. \tag{3.3.27f}$$

Теперь подготовим матрицу $D(\Phi)^\dagger$. Так как

$$D(\Phi)^\dagger_{j'|\beta',j|\beta} = \left(\frac{D\Phi_{j|\beta}}{Da_{j'|\beta'}}\right)^\dagger,$$

то мы можем извлечь эту матрицу из формул (3.3.27a–c):

$$D(\Phi)^\dagger_{a_{0|\beta'},j|\beta} =$$

$$= \sum_{\delta'\gamma'} c_\beta^{\delta'\gamma'} \Big[D_{\beta'}(Q_{j|\delta'})^\dagger a_{1|\gamma'} + \sum_{s'} \binom{j}{s'+1} D_{\beta'}(Q_{j-1-s'|\delta'})^\dagger w_{s'|\gamma'} \Big], \tag{3.3.27g}$$

$$D(\Phi)^\dagger_{a_{1|\beta'},j|\beta} = \sum_{\delta'} c_\beta^{\delta'\beta'} Q_{j|\delta'}, \tag{3.3.27h}$$

$$D(\Phi)^\dagger_{w_{j'|\beta'},j|\beta} = \sum_{\delta'} c_\beta^{\delta'\beta'} Q_{j-1-j'|\delta'} \binom{j}{j'+1} \tag{3.3.27i}$$

Перемножая матрицы $-D(\Phi)B^{\text{МКП}}$ (3.3.27d–f) и $D(\Phi)^\dagger$ (3.3.27g–i), получаем:

$$- [D(\Phi)B^{\text{МКП}} D(\Phi)^\dagger]_{i|\alpha,j|\beta} =$$

$$= \sum c_\alpha^{\delta\beta'} Q_{i|\delta} \partial c_\beta^{\delta'\gamma'} \Big[D_{\beta'}(Q_{j|\delta'})^\dagger a_{1|\gamma'} \tag{3.3.28a}$$

$$+ \sum_{s'} \binom{j}{s'+1} D_{\beta'}(Q_{j-1-s'|\delta'})^\dagger w_{s'|\gamma'} \Big] \tag{3.3.28b}$$

$$+ \sum c_\alpha^{\delta\gamma} a_{1|\gamma} D_{\beta'}(Q_{i|\delta}) \partial c_\beta^{\delta'\beta'} Q_{j|\delta'} \tag{3.3.28c}$$

$$+ \sum c_\alpha^{\delta\gamma} w_{s|\gamma} \binom{i}{s+1} D_{\beta'}(Q_{i-1-s|\delta}) \partial c_\beta^{\delta'\beta'} Q_{j|\delta'} \tag{3.3.28d}$$

$$+ \sum c_\alpha^{\delta\alpha'} c_{\alpha'}^{\gamma\beta'} c_\beta^{\delta'\beta'} \binom{i}{i'+1} \binom{j}{j'+1} Q_{i-1-i'|\delta} \Big[\binom{i'+1}{s} w_{i'+j'+1-s|\gamma} \partial^s \tag{3.3.28e}$$

$$- \binom{j'+1}{s} (-\partial)^s w_{i'+j'+1-s|\gamma} \Big] Q_{j-1-j'|\delta'}. \tag{3.3.28f}$$

С другой стороны, для правой части формулы (3.3.22) имеем, с учетом формулы (3.3.26):

$$\Phi(-B^{\text{КП}})_{i|\alpha,j|\beta} =$$

$$= \sum_\gamma c_\alpha^{\gamma\beta} \sum_s \Big[\binom{i}{s} \Phi(A_{i+j-s|\gamma}) \partial^s - \binom{j}{s} (-\partial)^s \Phi(A_{i+j-s|\gamma}) \Big]$$

$$= \sum c_\alpha^{\gamma\beta} c_\gamma^{\beta'\gamma'} \Big[\binom{i}{s} Q_{i+j-s|\beta'} a_{1|\gamma'} \partial^s - \binom{j}{s} (-\partial)^s Q_{i+j-s|\beta'} a_{1|\gamma'} \Big] \tag{3.3.29a}$$

$$+ \sum c_\alpha^{\gamma\beta} c_\gamma^{\beta'\gamma'} \binom{i+j-s}{s'+1} \Big[\binom{i}{s} Q_{i+j-s-1-s'|\beta'} w_{s'|\gamma'} \partial^s \tag{3.3.29b}$$

$$- \binom{i}{s} (-\partial)^s Q_{i+j-s-1-s'|\beta'} w_{s'|\gamma'} \Big]. \tag{3.3.29c}$$

Необходимо проверить тождество $\{(3.3.28)\}=\{(3.3.29)\}$. Оно кажется не очень-то привлекательным, и первым делом его нужно упростить. Мы сделаем это, преобразовав каждую часть к виду $\sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}(\cdot)_{|\gamma}$ и затем отбросив $c_\alpha^{\beta\gamma}$, сведя тем самым тождество в $\mathcal{A}$ к скалярному случаю $\mathcal{A} = \mathcal{F}$. Это упрощение займет следущие два этапа.

[Альфред Хичкок: “Всегда заставляйте аудиторию страдать как можно сильнее”. (Шутка.)]

Этап 3. Для любого элемента $H \in \mathcal{F}[a_i^{(j)}]$, и любой ассоциативной коммутативной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей, имеем

$$\frac{DH_{|\alpha}}{Da_{i|\beta}} = \sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}\Big(\frac{DH}{Da_i}\Big)_{|\gamma}, \tag{3.3.30}$$

$$\frac{\partial H_{|\alpha}}{\partial a_{i|\beta}^{(j)}} = \sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}\Big(\frac{\partial H}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\gamma}. \tag{3.3.31}$$

Доказательство. Тождество (3.3.30) следует из (3.3.31). Мы докажем последнее индукцией по степени по a элемента H, причем случай $H \in \mathcal{F}$ очевиден. Итак, допустим (3.3.31) верно для данного H, и пусть $\bar{H} = a_{i'}^{(j')}H$. Тогда

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{|\alpha} &= \sum c_\alpha^{\beta\gamma} a_{i'|\beta}^{(j')} H_{|\gamma} \quad \Rightarrow \\
\frac{\partial \bar{H}_{|\alpha}}{\partial a_{i|\beta}^{(j)}} &= \sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma} H_{|\gamma}\delta_{ij}^{i'j'} + \sum_{\eta\gamma} c_\alpha^{\eta\gamma} a_{i'|\eta}^{(j')} \frac{\partial H_{|\gamma}}{\partial a_{i|\beta}^{(j)}} = \\
&= \sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma} H_{|\gamma}\delta_{ij}^{i'j'} + \sum_{\eta\gamma} c_\alpha^{\eta\gamma} a_{i'|\eta}^{(j')} \sum_\delta c_\gamma^{\beta\delta}\Big(\frac{\partial H}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\delta}.
\end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Ассоциативность $\mathcal{A}$ означает, что верно тождество

$$\sum_\delta c_\theta^{\alpha\delta} c_\delta^{\beta\gamma} = \sum_\delta c_\delta^{\alpha\beta} c_\theta^{\delta\gamma}. \tag{3.3.33}$$

Применяя это тождество к произведению $\sum_\gamma c_\alpha^{\eta\gamma} c_\gamma^{\beta\delta}$ во втором слагаемом в (3.3.32), получаем:

$$\sum_\gamma c_\alpha^{\eta\gamma} c_\gamma^{\beta\delta} \text{ [так как } \mathcal{A} \text{ коммутативна]} = \sum_\gamma c_\alpha^{\eta\gamma} c_\gamma^{\delta\beta} \overset{(3.3.33)}{=} \sum_\gamma c_\gamma^{\eta\delta} c_\alpha^{\gamma\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{\eta\gamma} c_\alpha^{\eta\gamma} a_{i'|\eta}^{(j')} \sum_\delta c_\gamma^{\beta\delta}\Big(\frac{\partial H}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\delta} = \sum_{\gamma\eta\delta} c_\gamma^{\eta\delta} c_\alpha^{\gamma\beta} a_{i'|\eta}^{(j')}\Big(\frac{\partial H}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\delta} = \sum_\gamma c_\alpha^{\gamma\beta}\Big(a_{i'}^{(j')}\frac{\partial H}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\gamma},$$

и (3.3.32) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{H}_{|\alpha}}{\partial a_{i|\beta}^{(j)}} = \sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}\Big(\delta_{ij}^{i'j'} H + a_{i'}^{(j')}\frac{\partial H}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\gamma} = \sum c_\alpha^{\beta\gamma}\Big[\frac{\partial(a_{i'}^{(j)}H)}{\partial a_i^{(j)}}\Big]_{|\gamma} = \sum c_\alpha^{\beta\gamma}\Big(\frac{\partial \bar{H}}{\partial a_i^{(j)}}\Big)_{|\gamma}.$$

Это завершает шаг индукции. Вырожденность или невырожденность $\mathcal{A}$ не имела значения для доказательства. ▮

Упражнение 3.3.34. Для чего нужно, чтобы $\mathcal{A}$ имела единицу?
[Подсказка: правая часть (3.3.31) может быть многочленом нулевой степени.] [“Быть может, даже это когда-то будет приятно вспомнить” (Вергилий).]

Этап 4. Мы теперь готовы упростить все слагаемые в выражении (3.3.28), причем выражение (3.3.29) равно просто

$$\sum c_\alpha^{\gamma\beta}\Big\{\Big[\binom{i}{s}Q_{i+j-s}a_1\partial^s-\binom{j}{s}(-\partial)^sQ_{i+j-s}a_1\Big]$$
$$+\binom{i+j-s}{s'+1}\Big[\binom{i}{s}Q_{i+j-s-1-s'}w_{s'}\partial^s-\binom{j}{s}(-\partial)^sQ_{i+j-s-1-s'}w_{s'}\Big]\Big\}_{|\gamma}. \quad (3.3.35)$$

Для выражений (3.3.28a,b) имеем, согласно (3.3.30):

$$\sum c_\alpha^{\delta\beta'}Q_{i|\delta}\partial c_\beta^{\gamma'\eta}c_\eta^{\gamma\beta'}\Big\{[D(Q_j)]^\dagger_{|\gamma}a_{1|\gamma'}+\sum\binom{j}{s'+1}[D(Q_{j-1-s'})]^\dagger_{|\gamma}w_{s'|\gamma'}\Big\}=$$
$$=\sum c_\alpha^{\delta\beta'}Q_{i|\delta}\partial c_\eta^{\gamma'\gamma}c_\beta^{\eta\beta'}\Big\{|D(Q_j)]^\dagger_{|\gamma}a_{1|\gamma'}+\sum\binom{j}{s'+1}[D(Q_{j-1-s'})]^\dagger_{|\gamma}w_{s'|\gamma'}\Big\}$$
$$=\sum c_\alpha^{\delta\beta'}c_{\beta'}^{\eta\beta}Q_{i|\delta}\Big\{D(Q_j)^\dagger a_1+\sum\binom{j}{s'+1}D(Q_{j-1-s'})^\dagger w_{s'}\Big\}_{|\eta}$$
$$=\sum c_{\beta'}^{\delta\eta}c_\alpha^{\beta'\beta}Q_{i|\delta}\partial\{\ldots\}_{|\eta}=\sum c_\alpha^{\beta'\beta}[Q_i\partial\{\ldots\}]_{|\beta'}$$
$$=\sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}\Big\{Q_i\partial[D(Q_j)]^\dagger a_1+\sum\binom{j}{s'+1}D(Q_{j-1-s'})^\dagger w_{s'}\Big\}_{|\gamma}. \quad (3.3.36a)$$

Аналогично, для выражений (3.3.28c,d) имеем:

$$\sum c_\alpha^{\gamma\delta}c_\delta^{\gamma'\beta'}\Big[a_{1|\gamma}D(Q_i)_{|\gamma'}+\sum\binom{i}{s+1}w_{s|\gamma}D(Q_{i-1-s})_{|\gamma'}\Big]\partial c_{\beta'}^{\eta\beta}Q_{j|\eta}=$$
$$=\sum c_\delta^{\gamma\gamma'}c_\alpha^{\delta\beta'}\Big[a_{1|\gamma}D(Q_i)_{|\gamma'}+\sum\binom{i}{s+1}w_{s|\gamma}D(Q_{i-1-s})_{|\gamma'}\Big]c_{\beta'}^{\eta\beta}\partial Q_{j|\eta}=$$
$$=\sum c_\alpha^{\delta\beta'}c_{\beta'}^{\eta\beta}[a_1D(Q_i)+\sum\binom{i}{s+1}w_sD(Q_{i-1-s})]_{|\delta}\partial Q_{j|\eta}=$$
$$=\sum c_{\beta'}^{\delta\eta}c_\alpha^{\beta'\beta}[\ldots]_{|\delta}\partial Q_{j|\eta}=\sum c_\alpha^{\beta'\beta}\{[\ldots]\partial Q_j\}_{|\beta'}=$$
$$=\sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}\Big\{[a_1D(Q_i)+\sum\binom{i}{s+1}w_sD(Q_{i-1-s})]\partial Q_j\Big]_{|\gamma}. \quad (3.3.36b)$$

Наконец, подставляя тождество

$$\sum_{\alpha'}c_\alpha^{\delta\alpha'}c_{\alpha'}^{\gamma\beta'}=\sum_{\alpha'}c_{\alpha'}^{\delta\gamma}c_\alpha^{\alpha'\beta'}$$

в (3.3.28e, f), получаем

$$\sum c_\alpha^{\alpha'\beta'}c_{\beta'}^{\eta\beta}\binom{i}{i'+1}\binom{j}{j'+1}\Big\{Q_{i-1-i'}\Big[\binom{i'+1}{s}w_{i'+j'+1-s}\partial^s$$
$$-\binom{j'+1}{s}(-\partial)^sw_{i'+j'+1-s}\Big]\Big\}_{|\alpha'}Q_{j-1-j'|\eta}=$$
$$=\sum c_{\beta'}^{\alpha'\eta}c_\alpha^{\beta'\beta}\binom{i}{i'+1}\binom{j}{j'+1}\{\ldots\}_{|\alpha'}Q_{j-1-j'|\eta}$$
$$=\sum c_\alpha^{\beta\beta'}\binom{i}{i'+1}\binom{j}{j'+1}[\{\ldots\}Q_{j-1-j'}]_{|\beta'}$$

$$= \sum c_{\alpha}^{\beta\gamma} \binom{i}{i'+1} \binom{j}{j'+1} \Big\{ Q_{i-1-i'} \Big[\binom{i'+1}{s} w_{i'+j'+1-s} \partial^{s}$$

$$- \binom{j'+1}{s} (-\partial)^{s} w_{i'+j'+1-s} \Big] Q_{j-1-j'} \Big\}_{|\gamma}. \tag{3.3.36c}$$

Сравнивая (3.3.35) и (3.3.36), приходим к следующему независящему от A тождеству:

$$\sum \Big[\binom{i}{s} Q_{i+j-s} a_1 \partial^{s} - \binom{j}{s} (-\partial)^{s} Q_{i+j-s} a_1 \Big] \tag{3.3.37a}$$

$$+ \sum \binom{i+j-s}{s'+1} \Big[\binom{i}{s} Q_{i+j-s-1-s'} w_{s'} \partial^{s} - \binom{j}{s} (-\partial)^{s} Q_{i+j-s-1-s'} w_{s'} \Big] = \tag{3.3.37b}$$

$$= Q_i \partial D(Q_j)^{\dagger} a_1 + a_1 D(Q_i) \partial Q_j \tag{3.3.38a}$$

$$+ Q_i \partial \sum \binom{j}{s'+1} D(Q_{j-1-s'})^{\dagger} w_{s'} + \sum \binom{i}{s+1} w_s D(Q_{i-1-s}) \partial Q_j \tag{3.3.38b}$$

$$+ \sum \binom{i}{i'+1} \binom{j}{j'+1} Q_{i-1-i'} \Big[\binom{i'+1}{s} w_{i'+j'+1-s} \partial^{s} \tag{3.3.38c}$$

$$- \binom{j'+1}{s} (-\partial)^{s} w_{i'+j'+1-s} \Big] Q_{j-1-j'}. \tag{3.3.38d}$$

[“Веселее, худшее впереди” (Филандер Джонсон).]

Этап 5. Из проверяемого тождества, $\{(3.3.37)\} = \{(3.3.38)\}$, выделим вклад a_1, $\{(3.3.37a)\} = \{(3.3.38a)\}$:

$$\sum \Big[\binom{i}{s} Q_{i+j-s} a_1 \partial^{s} - \binom{j}{s} (-\partial)^{s} Q_{i+j-s} a_1 \Big] = \tag{3.3.39a}$$

$$= Q_i \partial D(Q_j)^{\dagger} a_1 + a_1 D(Q_i) \partial Q_j. \tag{3.3.39b}$$

Лемма 3.3.40.

$$D(Q_i)\partial + Q_i = (\partial + u)^{i}, \quad i \in \mathbb{Z}_{+}. \tag{3.3.41}$$

Доказательство. При $i = 0$, (3.3.41) принимает вид $1 = 1$. Применяя индукцию по i, находим

$$D(Q_{i+1})\partial \overset{(3.3.4)}{=}$$

$$= D(Q_i^{(1)} + uQ_i)\partial \quad [\text{так как дифференцирование } D \text{ коммутирует с } \partial] =$$

$$= [\partial D(Q_i) + Q_i + uD(Q_i)]\partial = (\partial + u) D(Q_i)\partial + Q_i\partial =$$

$$= (\partial + u)[(\partial + u)^{i} - Q_i] + Q_i\partial = (\partial + u)^{i+1} - Q_i^{(1)} - uQ_i = (\partial + u)^{i+1} - Q_{i+1}. \quad \blacksquare$$

Лемма 3.3.42.

$$\sum_{s \geqslant 0} \binom{i}{s} Q_{i-s} \partial^{s} Q_r = \sum_{s \geqslant 0} \binom{i}{s} Q_{i+r-s} \partial^{s}, \quad i, r \in \mathbb{Z}_{+}. \tag{3.3.43}$$

Доказательство. При $i = 0$, тождество превращается в $Q_r = Q_r$. Осуществляя индукцию по i, и заметив, что левую часть (3.3.43) можно переписать, с учетом формулы (3.3.6), как $(\partial + u)^i Q_r$, имеем :

$$(\partial+u)^{i+1}Q_r = (\partial+u)^i(\partial+u)Q_r = (\partial+u)^i(Q_r\partial + Q_r^{(1)} + uQ_r) =$$
$$= (\partial+u)^i(Q_r\partial + Q_{r+1}) = \sum \binom{i}{s}[Q_{i+r-s}\partial^{s+1} + Q_{i+r+1-s}\partial^s] =$$
$$= \sum\left[\binom{i}{s-1} + \binom{i}{s}\right]Q_{i+r+1-s}\partial^s = \sum\binom{i+1}{s}Q_{i+1+r-s}\partial^s. \qquad \blacksquare$$

Следствие 3.3.44.

$$D(Q_i)\partial Q_j = \sum\binom{i}{s}Q_{i+j-s}\partial^s - Q_iQ_j. \tag{3.3.45}$$

Доказательство. Имеем:

$$D(Q_i)\partial Q_j \overset{(3.3.41)}{=} [(\partial+u)^i - Q_i]Q_j \overset{(3.3.43)}{=} \sum\binom{i}{s}Q_{i+j-s}\partial^s - Q_iQ_j. \qquad \blacksquare$$

Доказательство. тождества (3.3.39). Для правой части имеем

$$a_1D(Q_i)\partial Q_j - [a_1D(Q_j)\partial Q_i]^\dagger \overset{(3.3.45)}{=}$$
$$= a_1\left[\sum\binom{i}{s}Q_{i+j-s} - Q_iQ_j\right] - \left[\sum\binom{j}{s}(-\partial)^sQ_{i+j-s} - Q_jQ_i\right]a_1 =$$
$$= a_1\sum\binom{i}{s}Q_{i+j-s}\partial^s - \sum\binom{j}{s}(-\partial)^sQ_{i+j-s}a_1,$$

что равно левой части (3.3.39). $\blacksquare$

6-й Этап. Оставшиеся члены в тождестве {(3.3.37b)}={(3.3.38b,c,d)} линейны по w_i. Поэтому, выберем w_r и обозначим его просто w. Все члены, содержащие w, дают тождество

$$\sum\binom{i+j-s}{r+1}\left[w\binom{i}{s}Q_{i+j-1-r-s}\partial^s - \binom{j}{s}(-\partial)^sQ_{i+j-1-r-s}w\right] = \tag{3.3.46a}$$
$$= Q_i\partial\binom{j}{r+1}D(Q_{j-1-r})^\dagger w + \binom{i}{r+1}wD(Q_{i-1-r})\partial Q_j + \tag{3.3.46b}$$
$$+ \sum_{i'+j'=r+s-1}\binom{i}{i'+1}\binom{j}{j'+1}Q_{i-1-i'}\left[\binom{i'+1}{s}w\partial^s - \binom{j'+1}{s}(-\partial)^sw\right]Q_{j-1-j'}. \tag{3.3.46c}$$

Рассмотрим три случая: (A) $j = 0$; (B) $i = 0$; (C) $i, j > 0$. (A) При $j = 0$ тождество (3.3.46) принимает вид

$$\sum_{s>0}\binom{i-s}{r+1}\binom{i}{s}wQ_{i-1-r-s}\partial^s = w\binom{i}{r+1}D(Q_{i-1-r})\partial, \tag{3.3.47}$$

или

$$\sum_s \binom{i-s}{r+1}\binom{i}{s} Q_{i-1-r-s}\partial^s = \binom{i}{r+1} Q_{i-1-r} + \binom{i}{r+1} D(Q_{i-1-r})\partial. \qquad (3.3.48)$$

В силу (3.3.41), правая часть (3.3.48) равна

$$\binom{i}{r+1}(\partial+u)^{i-r-1} \overset{(3.3.6)}{=} \binom{i}{r+1}\sum\binom{i-r-1}{s} Q_{i-r-1-s}\partial^s, \qquad (3.3.49)$$

и (3.3.48) следует из биномиального тождества

$$\binom{i-s}{r+1}\binom{i}{s} = \binom{i}{r+1}\binom{i-r-1}{s}. \qquad (3.3.50)$$

(B) Случай $i=0$ следует из случая $j=0$ после сопряжения и замены j на i. (C) Пусть теперь $i,j>0$. Используя формулу (3.3.45), преобразуем выражение (3.3.46b):

$$\begin{aligned}
&\binom{i}{r+1} w\Big[\sum\binom{i-1-r}{s} Q_{i+j-1-r-s}\partial^s - Q_{i-1-r}Q_j\Big] - \\
&-\binom{j}{r+1}\Big[\sum\binom{j-1-r}{s}(-\partial)^s Q_{i+j-1-r-s} - Q_{j-1-r}Q_i\Big] w \overset{(3.3.50)}{=} \\
&= \sum\Big[\binom{i-s}{r+1}\binom{i}{s} w Q_{i+j-1-r-s}\partial^s - \binom{j-s}{r+1}\binom{j}{s}(-\partial)^s Q_{i+j-1-r-s} w\Big] + \qquad (3.3.51a)\\
&+ w\Big[\binom{j}{r+1} Q_i Q_{j-1-r} - \binom{i}{r+1} Q_j Q_{i-1-r}\Big]. \qquad (3.3.51b)
\end{aligned}$$

Теперь преобразуем выражение (3.3.46c):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i'+j'=r+s-1}\binom{i}{i'+1}\binom{j}{j'+1} Q_{i-1-i'}\Big[\binom{i'+1}{s} w\partial^s - \binom{j'+1}{s}(-\partial)^s w\Big] Q_{j-1-j'} = \\
&= \sum_{\substack{i'+j'=r+s+1\\ i',j'>0}}\binom{i}{i'}\binom{j}{j'} Q_{i-i'}\Big[\binom{i'}{s} w\partial^s - \binom{j'}{s}(-\partial)^s w\Big] Q_{j-j'} \\
&= \sum_{i'+j'=r+s+1}\binom{i}{i'}\binom{j}{j'} Q_{i-i'}\Big[\binom{i'}{s} w\partial^s - \binom{j'}{s}(-\partial)^s w\Big] Q_{j-j'} \qquad (3.3.52a)\\
&\quad -\sum\binom{j}{r+s+1} Q_i\Big[w\delta_0^s - \binom{r+s+1}{s}(-\partial)^s w\Big] Q_{j-r-s-1} \qquad (3.3.52b)\\
&\quad -\sum\binom{i}{r+s+1} Q_{i-r-s-1}\Big[\binom{r+s+1}{s} w\partial^s - w\delta_0^s\Big] Q_j. \qquad (3.3.52c)
\end{aligned}$$

Первый член в (3.3.52b) вместе со вторым в (3.3.52c) сокращаются с выражением (3.3.51b). При помощи тождества

$$\binom{i}{r+s+1}\binom{r+s+1}{s} = \binom{i}{r+1}\binom{i-r-1}{s} \qquad (3.3.53)$$

преобразуем оставшийся первый член в (3.3.52c):

$$-\binom{i}{r+1} w \sum \binom{i-r-1}{s} Q_{i-r-1-s}\partial^s Q_j \overset{(3.3.43)}{=}$$

$$= -\binom{i}{r+1} w \sum \binom{i-r-1}{s} Q_{i+j-r-1-s}\partial^s \overset{(3.3.50)}{=}$$

$$= -w \sum \binom{i-s}{r+1}\binom{i}{s} Q_{i+j-r-1-s}\partial^s. \tag{3.3.54a}$$

Оставшийся второй член в (3.3.52b) с точностью до знака, сопряжения и перестановки индексов i и j совпадает с (3.3.54a):

$$\sum \binom{j-s}{r+1}\binom{j}{s}(-\partial)^s Q_{i+j-r-1-s} w. \tag{3.3.54b}$$

Комбинация (3.3.54a,b) сокращается с выражением (3.3.51a). Итак, нам остается проверить только тождество $\{(3.3.46\text{a})\}=\{(3.3.52\text{a})\}$:

$$\sum \binom{i+j-s}{r+1}\left[w\binom{i}{s} Q_{i+j-1-r-s}\partial^s - \binom{j}{s}(-\partial)^s Q_{i+j-1-r-s} w\right] = \tag{3.3.55a}$$

$$= \sum_{i'+j'=r+s+1} \binom{i}{i'}\binom{j}{j'} Q_{i-i'}\left[\binom{i'}{s} w\partial^s - \binom{j'}{s}(-\partial)^s w\right] Q_{j-j'}, \tag{3.3.55b}$$

а оно является частным случаем чуть более общего тождества

$$\sum \binom{i+j-s}{r}\left[w\binom{i}{s} Q_{i+j-r-s}\partial^s - \binom{j}{s}(-\partial)^s Q_{i+j-r-s} w\right] = \tag{3.3.56a}$$

$$= \sum_{i'+j'=r+s} \binom{i}{i'}\binom{j}{j'} Q_{i-i'}\left[\binom{i'}{s} w\partial^s - \binom{j'}{s}(-\partial)^s w\right] Q_{j-j'}. \tag{3.3.56b}$$

В свою очередь, это тождество получается, если из тождества

$$\sum \binom{i+j-s}{r}\binom{i}{s} Q_{i+j-r-s}\partial^s = \tag{3.3.57a}$$

$$= \sum_{i'+j'=r+s} \binom{i}{i'}\binom{j}{j'} Q_{i-i'}\binom{i'}{s}\partial^s Q_{j-j'} \tag{3.3.57b}$$

вычесть сопряженное к $\{\widehat{L}_w \times (3.3.57)$, с переставленными индексами i и $j\}$. Преобразуем (3.3.57b) следующим образом:

$$\sum_{i'+j'=r+s} \binom{i}{i'}\binom{j}{j'}\binom{i'}{s} Q_{i-i'}\partial^s Q_{j-j'} = \sum_{i'+j'=i+j-r-s} \binom{i}{i'}\binom{j}{j'}\binom{i-i'}{s} Q_{i'}\partial^s Q_{j'} =$$

$$= \sum \binom{j}{j'}\binom{i}{i+j-r-s-j'}\binom{j'+r+s-j}{s} Q_{i+j-r-s'-j'}\partial^s Q_{j'} \overset{(3.3.53)}{=}$$

$$= \sum_{j'} \binom{j}{j'}\binom{i}{r+j'-j}\sum_{s}\binom{i+j-r-j'}{s} Q_{i+j-r-j'-s}\partial^s Q_j \overset{(3.3.43)}{=}$$

$$= \sum_{j'} \binom{j}{j'} \binom{i}{r+j'-j} \sum_{s} \binom{i+j-r-j'}{s} Q_{i+j-r-s}\partial^{s} =$$

$$= \sum Q_{i+j-r-s}\partial^{s} \sum_{j'} \binom{j}{j'} \binom{i}{r+j'-j} \binom{i+j-r-j'}{s}. \tag{3.3.58}$$

Сравнив (3.3.57a) и (3.3.58), мы приходим к чисто биномнальному тождеству

$$\binom{i+j-s}{r}\binom{i}{s} = \sum_{j'} \binom{j}{j'} \binom{i}{r+j'-j} \binom{i+j-r-j'}{s}. \tag{3.3.59}$$

Известно, что

$$\binom{i}{i'}\binom{i-i'}{s} = \binom{i-s}{i'}\binom{i}{s}. \tag{3.3.60}$$

Подставляя это тождество, при $i' = r + j' - j$, в правую часть (3.3.59) и деля на $\binom{i}{s}$, получаем тождество

$$\binom{i+j-s}{r} = \sum_{j'} \binom{j}{j'} \binom{i-s}{r+j'-j}, \tag{3.3.61}$$

которое, в свою очередь, получается приравниванием коэффициентов при λ^{r} в тождестве

$$(1+\lambda)^{i+j-s} = (1+\lambda)^{j}(1+\lambda)^{i-s}. \tag{3.3.62}$$

Гамильтоновость преобразования Миуры таким образом доказана.

> В коммунизме есть кое-что хорошее: когда он заканчивается, люди так благодарны.
>
> Бенджамин Дж. Стейн, доклад о Румынии в *American Spectator* (май 1991)

3.4 От ДВВ к КП

Если занулить переменные w_i в иерархия МКП, то преобразование Миуры из МКП в КП редуцируется в преобразование Миуры из ДВВ в КП, и это редуцированное отображение по прежнему гамильтоново.

В §3.1 мы построили гомоморфизм $\overline{\Phi} : R_A \to R_{Va}$, $R_A = \mathcal{F}\langle A_i^{(j)}\rangle$, $R_{Va} = \mathcal{F}\langle V^{-1}, V^{(j)}, a_{i+1}^{(j)}\rangle$,

$$\overline{\Phi}(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}) = \xi + \sum_{i\geqslant 1} V^{-1} a_i \xi^{-i} V, \tag{3.4.1}$$

где V и a_0 связаны гомоморфизмом Pot :

$$\mathrm{Pot}(a_0) = -V^{(1)}V^{-1}. \tag{3.4.2}$$

Из уравнений движения n–го потока МКП:

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}_-) = \sum_{i\geqslant 1} \partial_{t_n}(a_i)\xi^{-i} = [\geqslant_1(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}]_-,$$

было выведено представление (2.2.14):

$$\partial_{t_n}(w_i) = \sum \left[\binom{k+1}{s} \partial^s (p_{k+1}(n) w_{k+1+i-s}) - \binom{i+1}{s} w_{i+k+1-s} (-\partial)^s (p_{k+1}(n)) \right], \tag{3.4.3}$$

где

$$\mathcal{L}^n = \sum \xi^k p_k(n).$$

Отсюда видно, что все w_i можно положить нулем, что приводит к совместному с ∂_{t_n} гомоморфизму $Go : R_a \to R_{a_0,a_1}$:

$$Go(a_0) = a_0, \quad Go(a_1) = a_1, \quad Go(w_i) = 0. \tag{3.4.4}$$

Очевидно, этот гомоморфизм продолжается из R_a в R_{Va}, до гомоморфизма $\overline{Go} : R_{Va} \to R_{Va_1}$. Комбинируя последний с $\overline{\Phi} : R_A \to R_{Va}$, получаем гомоморфизм

$$\overline{Go}\,\overline{\Phi} : R_A \to R_{Va_1}, \tag{3.4.5}$$

$$\overline{Go}\,\overline{\Phi}(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}) = \xi + V^{-1} a_1 \xi^{-1} V. \tag{3.4.6}$$

Это КП-подобная форма потенциальной иерархии ДВВ. Если все переменные коммутируют, гомоморфизм

$$Go\,\Phi : R_A \to R_{a_0,a_1}, \tag{3.4.7}$$

$$Go\,\Phi(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}) = \xi + a_1(\xi - a_0)^{-1}, \tag{3.4.8}$$

приводит к КП-подобной форме иерархии ДВВ (2.4.6) (с $\mathrm{const}_n = 1$). Более явно, формулу (3.4.8) можно вывести из (3.3.13):

$$Go\,\Phi(A_i) = (-1)^i Q_i(-a_0) a_1, \tag{3.4.9a}$$

$$Go\,\Phi(\bar{A}_i) = Q_i(\bar{a}_0) \bar{a}_1. \tag{3.4.9b}$$

Предметом данного раздела является наблюдение, что отображение $Go\,\Phi$ остается гамильтоновым.

Доказательство. $Go\,\Phi$ есть композиция двух отображений, Go и Φ. Гамильтоновость Φ была доказана в предыдущем разделе. Гамильтоновость гомоморфизма Go очевидна, так как в силу (3.3.25),

$$Go(B^{\text{МКП}}) = Go \left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & B^1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \tag{3.4.10}$$

и ясно, что критерий гамильтоновости (3.3.22) для Go выполняется. ▮

Отметим, что этот вывод применим также к $\mathcal{A}$-значному случаю, при $\mathcal{A}$ коммутативной, ассоциативной и невырожденной.

Я стремился быть кратким и стал непонятным.

Гораций

3.5 От НУШ к КП

В этом разделе мы вкладываем неабелеву версию иерархии нелинейного уравнения Шредингера (= НУШ) в неабелеву иерархию КП. Ограничиваясь $\mathcal{A}$-значными системами, мы покажем, что это вложение гамильтоново, причем $\mathcal{A}$ не обязательно коммутативна. Гамильтонова интерпретация этого вложения приводит к m-мерному аналогу иерархии КП.

В алгебре $R_{pq}((\xi^{-1}))$,

$$R_{pq} = \mathcal{F}\langle p_r^{(j)}, q_r^{(j)} \rangle, \quad 1 \leqslant r \leqslant r^{\max} \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.5.1}$$

выберем элемент

$$\bar{L} = \xi + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{q} = \xi + \sum_r p_r \xi^{-1} q_r. \tag{3.5.2}$$

Рассмотрим иерархию, n-й поток которой имеет вид

$$\partial_{t_n}(p_r) = (\bar{L}^n)_+(p_r), \tag{3.5.3a}$$

$$\partial_{t_n}(q_r) = -(q_r)\big((\bar{L}^n)_+\big)^\dagger, \tag{3.5.3b}$$

или, в векторной записи,

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p}) = (\bar{L}^n)_+(\boldsymbol{p}), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = -(\boldsymbol{q})\big((\bar{L}^n)_+\big)^\dagger, \tag{3.5.4}$$

где, для оператора $\mathcal{O}p \in R[\xi]$:

$$\mathcal{O}p = \sum_{s \geqslant 0} r_s \xi^s, \quad r_s \in R, \tag{3.5.5}$$

сопряженный оператор $\mathcal{O}p^\dagger$ действует *налево*:

$$(\bar{r})\, \mathcal{O}p^\dagger = \sum_{s \geqslant 0} (-\partial)^s (\bar{r} r_s), \quad \forall\, \bar{r} \in R. \tag{3.5.6}$$

Происхождение этого определения ясно:

$$\bar{r}^l [\mathcal{O}p(\bar{r}^r)] \sim [(\bar{r}^l)\, \mathcal{O}p^\dagger] \bar{r}^r, \quad \forall\, \bar{r}^l, \bar{r}^r \in R. \tag{3.5.7}$$

Вычислям первые два потока.
При $n = 1$, $(\bar{L})_+ = \xi$, и

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{p}) = \partial(\boldsymbol{p}), \quad \partial_{t_1}(\boldsymbol{q}) = \partial(\boldsymbol{q}). \tag{3.5.8}$$

При $n = 2$, $(\bar{L}^2)_+ = \xi^2 + 2\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q}$, откуда

$$\partial_{t_2}(p) = \boldsymbol{p}^{(2)} + 2(\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q})\boldsymbol{p}, \tag{3.5.9}$$

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{q}) = -[\boldsymbol{q}^{(2)} + 2\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q})], \tag{3.5.10}$$

это и есть неабелев аналог (нередуцированного) многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).

Отметим, что

$$\bar{L} = \xi + O(\xi^{-1}) \quad \text{в} \quad R_{pq}((\xi^{-1})). \tag{3.5.11}$$

Лемма 3.5.12. Из представления Гиббонса (3.5.4) следует

$$\partial_{t_n}(\bar{L}) = [(\bar{L}^n)_+, \bar{L}] = [\bar{L}, (\bar{L}^n)_-]. \tag{3.5.13}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_{t_n}(\bar{L}) = \partial_{t_n}(\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}) = [\partial_{t_n}(\boldsymbol{p})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = & \qquad (3.5.14\text{a}) \\ = [(\bar{L}^n)_+(\boldsymbol{p})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}[(\boldsymbol{q})((L^n)_+)^\dagger]. & \qquad (3.5.14\text{b}) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$[(\bar{L}^n)_+, \bar{L}]_- = [\bar{L}, (\bar{L}^n)_-]_- \overset{(3.5.11)}{=} [\bar{L}, (\bar{L}^n)_-] = [(\bar{L}^n)_+, \bar{L}],$$

следовательно

$$\begin{aligned} [(\bar{L}^n)_+, \bar{L}] = [(\bar{L}^n)_+, \bar{L}]_- = [(\bar{L}^n)_+(\xi + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}) - (\xi + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q})(\bar{L}^n)_+]_- = \\ = [(L^n)_+\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}]_- - [\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}(\bar{L}^n)_+]_-. \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Лемма 3.5.16. Всякий оператор $\mathcal{O}p \in R_{pq}[\xi]$ удовлетворяет соотношениям

$$(\mathcal{O}p\,\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q})_- = [\mathcal{O}p(\boldsymbol{p})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{3.5.17a}$$

$$(\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}\,\mathcal{O}p)_- = \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}[(\boldsymbol{q})\,\mathcal{O}p^\dagger]. \tag{3.5.17b}$$

Замечание 3.5.18. Формула (3.5.17b) может быть принята в качестве *определения* сопряженного оператора.

Доказательство Леммы 3.5.16. Из (3.5.5) имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}p\,\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q})_- = \Big(\sum_{s\geqslant 0} r_s\xi^s\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}\Big)_- = \Big(\sum_{s,k} r_s\binom{s}{k}[\boldsymbol{p}^{(k)}]^t\xi^{s-k-1}\boldsymbol{q}\Big)_- = \\ = \sum_s r_s[\boldsymbol{p}^{(s)}]^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} = [\mathcal{O}p(\boldsymbol{p})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}, \end{aligned}$$

что доказывает (3.5.17a). Аналогично, используя формулу (1.3.36):

$$\bar{r}\xi^s = \sum_{k\geqslant 0}\binom{s}{k}(-1)^k\xi^{s-k}\bar{r}^{(k)}, \quad \bar{r} \in R, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{3.5.19}$$

получаем доказательство (3.5.17b):

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}\,\mathcal{O}p)_- = \Big(\sum \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}r_s\xi^s\Big)_- = \Big(\sum \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\xi^{s-k}(-1)^k\binom{s}{k}(\boldsymbol{q}r_s)^{(k)}\Big)_- = \\ = \sum \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}(-1)^s(\boldsymbol{q}r_s)^{(s)} = \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}[(\boldsymbol{q})\,\mathcal{O}p^\dagger]. \end{aligned}$$

∎

Подставляя формулы (3.5.17) в (3.5.15) получаем

$$[(\bar{L}^n)_+, \bar{L}] = [(\bar{L}^n)_+(\boldsymbol{p})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}[(\boldsymbol{q})((\bar{L}^n)_+)^\dagger],$$

что совпадает с (3.5.14). ∎

Следствие 3.5.20. Отображение Гиббонса $\Psi : R_A \to R_{pq}$, $R_A = \mathcal{F}\langle A_i^{(j)}\rangle$,

$$\Psi\Big(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Big) = \xi + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{q}, \tag{3.5.21}$$

переводит иерархию КП в иерархию НУШ.

Apostil 3.5.22. Читатель может спросить, зачем, в виду Следствия 3.5.20, нужно определять иерархию НУШ при помощи довольно специфической формы Гиббонса (3.5.4), а не непосредственно из формы Лакса (3.5.13). Причина проста: лаксова форма (3.1.13) не является достаточно определенной, чтобы породить *отдельные* уравнения движения для $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Чтобы понять, что происходит, заметим, что уравнения движения (3.5.14a) имеют вид

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p})^t \xi^{-1} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{X}_n^t \xi^{-1} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{Y}_n, \tag{3.5.23}$$

с некоторыми $X_{nr}, Y_{nr} \in R_{pq}$. Из (3.5.23) нельзя вывести без дополнительных предположений, что

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{X}_n, \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{Y}_n, \tag{3.5.24}$$

так как форма (3.5.23) инвариантна по отношению к преобразованиям

$$X_{nr} \mapsto X_{nr} + \mathrm{const}_r\, p_r, \quad Y_{nr} \mapsto Y_{nr} - \mathrm{const}_r\, q_r. \tag{3.5.25}$$

Как разрешить эту проблему? Введем градуировку rk в алгебре R_{pq} по правилу

$$\mathrm{rk}(p_r^{(j)}) = \mathrm{rk}(q_r^{(j)}) = j + 1, \quad \mathrm{rk}(\mathcal{F}) = 0, \tag{3.5.26}$$

так что

$$\mathrm{rk}(\bar{L}) = 1, \quad \mathrm{rk}(\partial_{t_n}) = n, \quad \mathrm{rk}(X_{nr}) = \mathrm{rk}(Y_{nr}) = n + 1. \tag{3.5.27}$$

Гипотеза 3.5.28. Если

$$\boldsymbol{X}_n^t \xi^{-1} \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{Y}_n = 0 \tag{3.5.29}$$

при некоторых $X_{nr}, Y_{nr} \in R_{pq}$, то

$$\boldsymbol{X}_n = A^1 \boldsymbol{p} + A^2 \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{Y}_n = A^3 \boldsymbol{p} - A^1 \boldsymbol{q}, \tag{3.5.30}$$

где A^1, A^2, A^3 постоянные матрицы, причем A^2 и A^3 кососимметричны.

Это очевидно при $\mathrm{rk}(X_n) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{Y}_n) = 1$. Следовательно, эквивалентная форма этой гипотезы звучит так:

Гипотеза 3.5.31. Если $\mathrm{rk}(\boldsymbol{X}_n) = \mathrm{rk}(\boldsymbol{Y}_n) > 1$, то уравнение (3.5.29) имеет лишь тривиальное решение.

Данная гипотеза безусловно верна, но она так абсурдно проста, что для нее трудно найти тривиальное доказательство. Итак, мы не можем использовать представление Лакса для КП (3.5.13) и должны работать непосредственно с формой Гиббонса (3.5.4). Так мы и делаем при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.5.32. Все потоки неабелевой иерархии НУШ (3.5.4) коммутируют.

Доказательство. Имеем, со знакомыми обозначениями $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $P = L^{n_1}$, $Q = L^{n_2}$, $\partial_{t_{n_1}} = \partial_P$, $\partial_{t_{n_2}} = \partial_Q$:

$$\partial_P \partial_Q(\boldsymbol{p}) = \partial_P[(Q_+)(\boldsymbol{p})] = [\partial_P(Q)]_+(\boldsymbol{p}) + Q_+(\partial_P(\boldsymbol{p})) = [(\partial_P(Q))_+ + Q_+P_+](\boldsymbol{p}).$$

Переставляя P и Q и вычитая, находим, уже привычным способом, что $[\partial_P, \partial_Q](\boldsymbol{p}) = ?(\boldsymbol{p})$, где

$$\begin{aligned} ? &= [\partial_P(Q)]_+ - [\partial_Q(P)]_+ - [P_+, Q_+] \\ &= \big\{[Q, P_-] - [P, Q_-] - [P_+, Q_+]\big\}_+ \\ &= \big\{[Q_+, P_-] + [Q_-, P_+] + [Q_+, P_+]\big\}_+, \end{aligned} \tag{3.5.33}$$

и это равно нулю в силу (1.1.44). Аналогично,

$$\begin{gathered} \partial_P \partial_Q(\boldsymbol{q}) = \partial_P[-(\boldsymbol{q})(Q_+)^\dagger] = -[\partial_P(\boldsymbol{q})](Q_+)^\dagger - (\boldsymbol{q})[\partial_P(Q_+)^\dagger] = \\ = (\boldsymbol{q})(P_+)^\dagger(Q_+)^\dagger - (\boldsymbol{q})[\partial_P(Q_+)^\dagger] = (\boldsymbol{q})\{(P_+)^\dagger(Q_+)^\dagger - \partial_P[(Q_+)^\dagger]\} \quad \Rightarrow \\ [\partial_P, \partial_Q](\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{q})!, \end{gathered}$$

где

$$! = [(P_+)^\dagger, (Q_+)^\dagger] - \partial_P[(Q_+)^\dagger] + \partial_Q[(P_+)^\dagger]. \tag{3.5.34}$$

Лемма 3.5.35. Определим операцию сопряжения на всем кольце $R((\xi^{-1}))$ по правилу

$$(\widehat{L}_{\bar{r}\xi^s})^\dagger = \widehat{R}_{\bar{r}(-\xi)^s}, \quad \bar{r} \in R, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{3.5.36}$$

Тогда для любых двух элементов El_1 и El_2 из $R((\xi^{-1}))$ имеем

$$(El_1 El_2)^\dagger = (El_1)^\dagger (El_2)^\dagger. \tag{3.5.37}$$

Доказательство. Взятие сопряжения сводится к замене $\{\xi$ действующего направо$\}$ на $\{-\xi$ действующее налево$\}$. ∎

При помощи формулы (3.5.37), выражение (3.5.34) приводится к виду

$$! = [P_+, Q_+]^\dagger - [\partial_P(Q_+)]^\dagger + [\partial_Q(P_+)]^\dagger = -?^\dagger = 0.$$ ∎

Обратимся теперь к гамильтоновым аспектам иерархии НУШ. Итак, переменные p_r и q_r теперь $\mathcal{A}$–значные, где $\mathcal{A}$ ассоциативная невырожденная алгебра с фиксированным ортонормальным базисом. Положив, как в §1.4,

$$\bar{H}_n = n^{-1}\, Tr\, \widehat{L}_{\mathrm{Res}(L^n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5.38}$$

мы видим, что

$$\bar{H}_n = \Psi(H_n),$$

где H_n задан формулой (1.4.15). Тогда формула (1.4.18) дает

$$\bar{p}_{i|\alpha}(n) = \Psi\Big(\frac{\delta H_n}{\delta A_{i|\alpha}}\Big), \tag{3.5.39}$$

где

$$\bar{L}^n = \sum \xi^k \bar{p}_k(n). \tag{3.5.40}$$

Вычислим теперь $\dfrac{\delta\bar{H}_n}{\delta p_{r|\alpha}}$ и $\dfrac{\delta\bar{H}_n}{\delta q_{r|\alpha}}$. Так как

$$\xi^{-1}\bar{r} = \sum_{s\geqslant 0}(-1)^s\bar{r}^{(s)}\xi^{-1-s}, \quad \forall\,\bar{r}\in R, \tag{3.5.41}$$

то отображение Гиббонса Ψ (3.5.21) принимает вид

$$\Psi(A_i) = (-1)^i\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(i)}, \tag{3.5.42}$$

или, покомпонентно,

$$\Psi(A_{i|\alpha}) = \sum_{r\beta\gamma}(-1)^i c_\alpha^{\beta\gamma}p_{r|\beta}q_{r|\gamma}^{(i)}. \tag{3.5.43}$$

Следовательно,

$$\frac{D\Psi(A_{i|\alpha})}{Dp_{r|\beta}} = (-1)^i\sum_\gamma c_\alpha^{\beta\gamma}q_{r|\gamma}^{(i)}, \tag{3.5.44a}$$

$$\frac{D\Psi(A_{i|\alpha})}{Dq_{r|\beta}} = (-1)^i\sum_\gamma c_\alpha^{\gamma\beta}p_{r|\gamma}\partial^i. \tag{3.5.44b}$$

Теперь мы используем следующую общую формулу: если $\Psi : R_A \to R_a$, $R_A = \mathcal{F}[A_i^{(j)}]$, $R_a = \mathcal{F}[a_i^{(j)}]$, есть (дифференциальный) гомоморфизм, то, для любого $H \in R_A$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta\Psi(H)}{\delta\boldsymbol{a}}\right)_i = \frac{\delta\Psi(H)}{\delta a_i} = \left[D(\Psi)^\dagger\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A}\right)\right]_i = \sum_k[D(\Psi)^\dagger]_{ik}\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_k}\right) =\\ = \sum_k\left(\frac{D\Psi_k}{Da_i}\right)^\dagger\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_k}\right).\end{aligned} \tag{3.5.45}$$

(См. напр. часть A в [Kup 1992] или §5.2.) Применяя формулу (3.5.45) к гомоморфизму Ψ (3.5.43) и учитывая свойство циклической симметрии (2.3.16) структурных констант $c_\alpha^{\beta\gamma}$, находим, что

$$\frac{\delta\Psi(H)}{\delta p_{r|\beta}} = \sum(-1)^i c_\alpha^{\beta\gamma}q_{r|\gamma}^{(i)}\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_{i|\alpha}}\right) = \sum(-1)^i c_\beta^{\gamma\alpha}q_{r|\gamma}^{(i)}\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_{i|\alpha}}\right), \tag{3.5.46a}$$

$$\frac{\delta\Psi(H)}{\delta q_{r|\beta}} = \sum\partial^i\left[c_\alpha^{\gamma\beta}p_{r|\gamma}\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_{i|\alpha}}\right)\right] = \sum\partial^i\left[c_\beta^{\alpha\gamma}\Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_{i|\alpha}}\right)p_{r|\gamma}\right]. \tag{3.5.46b}$$

Далее, перепишем уравнения движения (3.5.3) покомпонентно:

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}(p_{r|\alpha}) &= \sum c_\alpha^{\beta\gamma}(\bar{p}_{i|\beta}(n)p_{r|\gamma})^{(i)} \overset{(3.5.39)}{=}\\ &= \sum c_\alpha^{\beta\gamma}\left[\Psi\left(\frac{\delta H_n}{\delta A_{i|\beta}}\right)p_{r|\gamma}\right]^{(i)} \overset{(3.5.46b)}{=} \frac{\delta\Psi(H_n)}{\delta q_{r|\alpha}} = \frac{\delta\bar{H}_n}{\delta q_{r|\alpha}},\end{aligned} \tag{3.5.47a}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}(q_{r|\alpha}) &= -\left\{(q_r)\left[\sum\partial^i\bar{p}_i(n)\right]^\dagger\right\}_{|\alpha} = -\left\{\sum(-1)^i q_r^{(i)}\bar{p}_i(n)\right\}_{|\alpha}\\ &= -\sum(-1)^i c_\alpha^{\gamma\beta}q_{r|\gamma}^{(i)}\bar{p}_{i|\beta}(n) = -\sum(-1)^i c_\alpha^{\gamma\beta}q_{r|\gamma}^{(i)}\Psi\left(\frac{\delta H_n}{\delta A_{i|\beta}}\right)\\ &= -\frac{\delta\Psi(H_n)}{\delta p_{r|\alpha}} = -\frac{\delta\bar{H}_n}{\delta p_{r|\alpha}}.\end{aligned} \tag{3.5.47b}$$

Итак, некоммутативное НУШ (3.5.4) является канонической гамильтоновой системой:

$$\partial_{t_n}(p_{r|\alpha}) = \frac{\delta H_n}{\delta q_{r|\alpha}}, \quad \partial_{t_n}(q_{r|\alpha}) = -\frac{\delta H_n}{\delta p_{r|\alpha}}. \tag{3.5.48}$$

Теорема 3.5.49. Отображение Ψ (3.5.43) между канонической гамильтоновой структурой (3.5.48) $\mathcal{A}$-значной иерархии НУШ и гамильтоновой структурой (1.4.22) $\mathcal{A}$-значной иерархии КП является гамильтоновым.

Доказательство. Необходимо проверить критерий (3.3.22), где матрица $B^a = B^{\text{НУШ}}$ извлекается из (3.5.48):

$$B^{\text{НУШ}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p_{r'|\alpha'} & q_{r'|\alpha'} \end{array} \\ \begin{array}{c} p_{r|\alpha} \\ q_{r|\alpha} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \delta_{r\alpha}^{r'\alpha'} \\ -\delta_{r\alpha}^{r'\alpha'} & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.5.50}$$

и матрица B^A совпадает с матрицей для КП $B^{\text{КП}}$ (1.4.22):

$$B^{\text{КП}}_{i|\alpha,j|\beta} = \sum \left[\binom{j}{s} \partial^s c_\alpha^{\beta\delta} A_{i+j-s|\delta} - \binom{i}{s} c_\alpha^{\delta\beta} A_{i+j-s|\delta}(-\partial)^s \right]. \tag{3.5.51}$$

Применяя формулы (3.5.44) и сопряженные к ним:

$$\left(\frac{D\Psi(A_{j|\beta})}{Dp_{r|\delta}}\right)^\dagger = (-1)^j \sum c_\beta^{\delta\gamma} q_{r|\gamma}^{(j)}, \tag{3.5.52a}$$

$$\left(\frac{D\Psi(A_{j|\beta})}{Dq_{r|\delta}}\right)^\dagger = \sum c_\beta^{\gamma\delta} \partial^j p_{r|\gamma}, \tag{3.5.52b}$$

к левой части тождества (3.3.22), получаем

$$[D(\Psi) B^{\text{НУШ}} D(\Psi)^\dagger]_{i|\alpha,j|\beta} =$$

$$= \quad (-1)^i \sum c_\alpha^{\delta\gamma'} c_\beta^{\gamma\delta} q_{r|\gamma'}^{(i)} \partial^j p_{r|\gamma} - \tag{3.5.53a}$$

$$-(-1)^{i+j} \sum c_\alpha^{\gamma\delta} c_\beta^{\delta\gamma'} p_{r|\gamma} \partial^i q_{r|\gamma'}^{(j)}. \tag{3.5.53b}$$

С другой стороны, из формулы (3.5.43) следует, что правую часть тождества (3.3.22) можно переписать в виде

$$\Psi(B^{\text{КП}}_{i|\alpha,j|\beta}) =$$

$$= \sum \binom{j}{s} \partial^s c_\alpha^{\beta\delta} c_\delta^{\gamma\gamma'} (-1)^{i+j-s} p_{r|\gamma} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)} - \tag{3.5.54a}$$

$$- \sum \binom{i}{s} c_\alpha^{\delta\beta} c_\delta^{\gamma\gamma'} (-1)^{i+j-s} p_{r|\gamma} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)} (-\partial)^s. \tag{3.5.54b}$$

Следует проверить тождество $\{(3.5.53)\}=\{(3.5.54)\}$. Мы сделаем это, преобразуя выражения (3.5.53). Для первого, (3.5.53a), имеем, с учетом циклической симметрии структурных констант:

$$(-1)^i \sum c_\alpha^{\delta\gamma'} c_\beta^{\gamma\delta} q_{r|\gamma'}^{(i)} \partial^j p_{r|\gamma} = \tag{3.5.55}$$

$$= (-1)^i \sum c_\delta^{\gamma'\alpha} c_\beta^{\gamma\delta} \binom{j}{s} \partial^s (-1)^{j-s} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)} p_{r|\gamma} \overset{(3.3.33)}{=}$$

$$= \sum c_\delta^{\gamma\gamma'} c_\beta^{\delta\alpha} \binom{j}{s} \partial^s (-1)^{i+j+s} p_{r|\gamma} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)} =$$

$$= \sum c_\delta^{\gamma\gamma'} c_\alpha^{\beta\delta} \binom{j}{s} \partial^s (-1)^{i+j-s} p_{r|\gamma} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)},$$

что равно (3.5.54a). Аналогнчно, для второго выражения, (3.5.53b), имеем

$$-(-1)^{i+j} \sum c_\alpha^{\gamma\delta} c_\beta^{\delta\gamma'} p_{r|\gamma} \partial^i q_{r|\gamma'}^{(j)} \text{ [переставляя } \alpha \text{ я } \beta \text{ в (3.5.55)]} =$$

$$= -(-1)^{i+j} c_\delta^{\gamma\gamma'} c_\beta^{\alpha\delta} p_{r|\gamma} \binom{i}{s} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)} \partial^s = -(-1)^{i+j-s} c_\delta^{\gamma\gamma'} c_\alpha^{\delta\beta} \binom{i}{s} p_{r|\gamma} q_{r|\gamma'}^{(i+j-s)} (-\partial)^s,$$

что равно (3.5.54b). ∎

Замечание 3.5.56. Отображеняе Ψ (3.5.43) пока что *единственное* гамильтопово отображеине между $\mathcal{A}$–значными гамильтоновыми нерархиямн, в случае, еслн алгебра $\mathcal{A}$ *не* предполагается *коммутативной*.

Упражненне 3.5.57. Покажите, что Теорема 3.5.49 остается справедливой, еслн: гамильтонову матрицу $B^{\text{НУШ}}$ (3.5.50) заменить на гамильтонову матрнцу

$$b^{(N)} = \begin{array}{c} \\ p_{r|\alpha} \\ q_{r|\alpha} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p_{r'|\alpha'} & q_{r'|\alpha'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \delta_{r\alpha}^{r'\alpha'} \partial^N \\ -(-\partial)^N \delta_{r\alpha}^{r'\alpha'} & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \tag{3.5.58}$$

гамильтонову матрицу $B^{\text{КП}}$ (3.5.51) заменить на гамильтонову матрицу $B^{(N)}$ (2.3.23):

$$B_{i|\alpha,j|\beta}^{(N)} = \sum \left[\binom{j+N}{s} \partial^s c_\alpha^{\beta\delta} A_{i+j+N-s|\delta} - \binom{i+N}{s} c_\alpha^{\delta\beta} A_{i+j+N-s|\delta} (-\partial)^s \right]; \tag{3.5.59}$$

в качестве отображения $\Psi : R_A \to R_{pq}$ принять отображение (3.5.43); считать N произвольным неотрицательным целым числом. (Теорема 3.5.49 является частным случаем $N = 0$ этого упражнения.)

Замечание 3.5.60. Предыдущее Упражнеине допускает дальнейшее обобщеине на случай $m(> 1)$ измереиий. В этом случае $N = (N_1, \ldots, N_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ обозначает мультииндекс, матрица $b^{(N)}$ (3.5.58) понимается соответственно. В матрице $B^{(N)}$ (3.5.59), i, j, и s также прниадлежат $\mathbb{Z}_+^m$, с бниомнальными коэффнциеитами и выражениями ∂^s, поннмаемымн в мультнпликативпом смысле:

$$\binom{j+N}{s} = \binom{j_1+N_1}{s_1} \ldots \binom{j_m+N_m}{s_m}, \quad \partial^s = \partial_1^{s_1} \ldots \partial_m^{s_m}. \tag{3.5.61}$$

Наконец, то же отпосится к отображению Ψ (3.5.43), где

$$q_{r|\gamma}^{(i)} = q_{r|\gamma}^{(i_1,\ldots,i_m)} = \partial_1^{i_1} \ldots \partial_m^{i_m} (q_{r|\gamma}) = \partial^i (q_{r|\gamma}), \tag{3.5.62}$$

$$(-1)^i = (-1)^{i_1} \ldots (-1)^{i_m}. \tag{3.5.63}$$

Замечание 3.5.64. Отображение Ψ (3.5.43) является компонентной формой $\mathcal{A}$–значного отображения (3.5.42), которое, в свою очередь, восходит к форме Гиббонса (3.5.21). Предыдущее Упражнение можно интерпретировать, как утверждение о гамильтоновости отображения

$$\Psi\left(\sum A_\imath \xi^{-(\imath+I)}\right) = \boldsymbol{p}^t \xi^{-I} \boldsymbol{q}, \tag{3.5.65}$$

где

$$I = (1, 1, \ldots, 1), \tag{3.5.66}$$

между гамильтоновыми матрицами $b^{(N)}$ (3.5.58) и $B^{(N)}$ (3.5.59). Это немедленно подсказывает m–мерный аналог иерархии КП

$$\partial_{t_n}(L) = [(L^n)_+, L] = [L, (L^n)_-], \tag{3.5.67}$$

$$L = \xi_1 + \sum_{\mathcal{I}} A_{\mathcal{I}} \xi^{-(\mathcal{I}+I)}, \quad \mathcal{I} \in \mathbb{Z}_+^m, \tag{3.5.68}$$

где значки "+" и "−" теперь относятся к степеням ξ_1. Теперь мы можем пожинать плоды последовательной неабелевой точки зрения, так как при этом подходе все, что мы нашли о негамильтоновых свойствах иерархии КП остается верным, при условии что $A_{\mathcal{I}}$ в операторе Лакса L (3.5.68) понимаются как компоненты в ассоциативной алгебре $R = R_A[[\xi_2^{-1}, \ldots, \xi_m^{-1}]]$, входящей в исходный оператор Лакса L (1.1.14).

Замечание 3.5.69. До сих пор мы не упоминали $\mathbb{Z}_2$–градуированную точку зрения. Читатели, увлекающиеся суперматематикой, могут заметить, что если в операторе Лакса для НУШ $\bar{L}$ (3.5.2) ввести произвольную градуировку

$$p(p_r) = -p(q_r) \in \Gamma, \tag{3.5.70}$$

где Γ дискретная абелева (градуирующая) группа (не обязательно $\mathbb{Z}_2$), то все в этом разделе остается верным, если модифицировать $\mathcal{A}$–компонентные формулы так, чтобы учесть Γ–коммутативность. (Эти модификации сводятся к знакам ±, которые появляются в $\mathbb{Z}_2$–градуированном случае, и аналогичным зверушкам в более общем Γ–градуированном случае.)

3.6 От НУШП к КП

> Доллар и восемьдесят семь центов. Это было все. Из них шестьдесят центов были в одноцентовых монетах.
>
> О'Генри, *Дары волхвов*, первая строчка

В этом разделе мы вкладываем неабелеву версию иерархии НУШ с производной (= НУШП) в иерархию МКП. Иерархия НУШП гамильтонова, но вложение нет.

Начнем с дифференциальной алгебры R_{ab} :

$$R_{ab} = \mathcal{F}\langle a_r^{(j)}, b_r^{(j)} \rangle, \quad 1 \le r \le r^{\max} \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.6.1}$$

и выберем в кольце $R_{ab}((\xi^{-1}))$ элементы

$$\Lambda = 1 + \boldsymbol{a}^t \xi^{-1} \boldsymbol{b} = 1 + \sum a_r \xi^{-1} b_r, \tag{3.6.2}$$

и

$$\bar{\mathcal{L}} = (\Lambda\xi^{-1})^{-1} = \xi\Lambda^{-1}. \tag{3.6.3}$$

Из этих данных мы построим иерархию, n-й поток которой имеет вид

$$\partial_{t_n}(a) = \geqslant_1(\bar{\mathcal{L}}^n)(a), \quad \partial_{t_n}(b) = -(b)[\xi^{-1}(\geqslant_1(\bar{\mathcal{L}}^n))\xi]^\dagger. \tag{3.6.4}$$

Вычислим два первых потока этой иерархии. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}} &= \xi\Lambda^{-1} = \xi(1 + a^t\xi^{-1}b)^{-1} = \xi(1 + \xi^{-1}a^tb + \xi^{-2}a^{(1)t}b + \xi^{-3}a^{(2)t}b + \ldots)^{-1}\\ &= \xi\{1 - \xi^{-1}a^tb + \xi^{-2}[(a^tb)^2 - a^{(1)t}b] + \xi^{-3}[-a^{(2)t}b - (a^tb)^3 + (a^tb)(a^{(1)t}b)\\ &\qquad + (a^{(1)t}b)(a^tb) + (a^tb)^{(1)}(a^tb)] + \ldots\}\\ &= \xi - a^tb + \xi^{-1}[(a^tb)^2 - a^{(1)t}b] + \xi^{-2}[-a^{(2)t}b - (a^tb)^3\\ &\qquad + (a^tb)(a^{(1)t}b) + (a^{(1)t}b)(a^tb) + (a^tb)^{(1)}(a^tb)] + \ldots \quad \Rightarrow\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

$$\geqslant_1\bar{\mathcal{L}} = \xi, \quad \geqslant_1(\bar{\mathcal{L}}^2) = \xi^2 - 2\xi a^tb. \tag{3.6.6}$$

Следовательно,

$$\partial_{t_1}(a) = \partial(a), \quad \partial_{t_1}(b) = \partial(b), \tag{3.6.7}$$

$$\partial_{t_2}(a) = a^{(2)} - 2[(a^tb)a]^{(1)}, \quad \partial_{t_2}(b) = -b^{(2)} - 2[b(a^tb)]^{(1)}. \tag{3.6.8}$$

Второй поток задает неабелеву многокомпонентную версию НУШ с производной (= НУШП)[1], и мы закрепим это название, НУШП, за всей иерархией.

Чтобы упростить предстоящие вычисления, выберем $n_1 \in \mathbb{N}$ и положим

$$\bar{\mathcal{L}}^{n_1} = P, \quad \partial_{t_{n_1}} = \partial_P, \tag{3.6.9}$$

так что наша иерархия (3.6.4) примет вид

$$\partial_P(a) = \geqslant_1P(a), \quad \partial_P(b) = -(b)(\xi^{-1}(\geqslant_1P)\xi)^\dagger. \tag{3.6.10}$$

Эта иерархия, конечно, выглядит странно. Чтобы оправдать ее эксцентричность, докажем следующий результат.

Теорема 3.6.11. Из уравнений движения (3.6.10) следуют уравнения движения

$$\partial_P(\bar{\mathcal{L}}) = [\geqslant_1(\bar{\mathcal{L}}^{n_1}), \bar{\mathcal{L}}] = [\bar{\mathcal{L}}, \leqslant_0(\bar{\mathcal{L}}^{n_1})]. \tag{3.6.12}$$

Доказательство. Проверим равенство

$$\partial_P(\bar{\mathcal{L}}) = [\geqslant_1P, \bar{\mathcal{L}}]. \tag{3.6.13}$$

Имеем, согласно (3.6.3):

$$\partial_P(\bar{\mathcal{L}}) = \partial_P(\xi\Lambda^{-1}) = -\xi\Lambda^{-1}\partial_P(\Lambda)\Lambda^{-1}, \tag{3.6.14a}$$

$$[\geqslant_1P, \bar{\mathcal{L}}] = [\geqslant_1P, \xi\Lambda^{-1}] = \geqslant_1P\xi\Lambda^{-1} - \xi\Lambda^{-1}(\geqslant_1P), \tag{3.6.14b}$$

---

[1] В скалярном абелевом случае ($r^{\max} = 1$, $a, b \in \mathbb{C}$) эта система была введена в [*KNe 1978] и связана дифференциальной подстановкой с системой, введенной в [*CLL 1979],

$$a_t = a_{xx} + 2a_xba, \quad b_t = -b_{xx} + 2bab_x,$$

для которой также используется термин НУШП. Различные неабелевы обобщения обеих систем рассматривались в [*For 1984, *OSo 1998a, *OSo 1998b, *ASY 1999] (прим. перев.).

так что тождество (3.6.13) эквивалентно тождеству

$$\partial_P(\Lambda) = {\geqslant_1} P\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi. \tag{3.6.15}$$

Обозначим

$$P' = \bar{\mathcal{L}}^{n_1} - ({\geqslant_1} P) = {\leqslant_0}(\bar{\mathcal{L}}^{n_1}). \tag{3.6.16}$$

Я утверждаю, что

$$\begin{gathered}
{\geqslant_1} P\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi = -(P'\Lambda - \Lambda\xi^{-1}P'\xi) \quad \Leftrightarrow \\
({\geqslant_1} P + P')\Lambda = \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P + P')\xi \quad \Leftrightarrow \\
\bar{\mathcal{L}}^{n_1}\Lambda\xi^{-1} = \Lambda\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n_1};
\end{gathered} \tag{3.6.17}$$

это верно, так как $\Lambda\xi^{-1} = \bar{\mathcal{L}}^{-1}$. Следующее утверждение:

$${\geqslant_1} P\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi = ({\geqslant_1} P\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)_-. \tag{3.6.18}$$

Действительно, в правой части (3.6.17) старший по ξ член — нулевой степени, и этот член, в обозначениях

$$\bar{\mathcal{L}}^n = \sum \xi^k \bar{p}_k(n), \tag{3.6.19}$$

равен

$$-[\bar{p}_0(n_1) - \bar{p}_0(n_1)] = 0,$$

что доказывает (3.6.18). Таким образом, тождество (3.6.15) можно переписать в виде

$$\partial_P(\Lambda) = ({\geqslant_1} P\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)_-. \tag{3.6.20}$$

Для левой части (3.6.20) находим:

$$\begin{aligned}
\partial_P(\Lambda) = \partial_P(1 + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b}) &= [\partial_P(\boldsymbol{a})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\partial_P(\boldsymbol{b}) = \\
&= [{\geqslant_1} P(\boldsymbol{a})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}[(\boldsymbol{b})(\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)^\dagger],
\end{aligned} \tag{3.6.21}$$

в то время, как для правой части

$$({\geqslant_1}\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)_- = |{\geqslant_1} P(1 + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b}) - (1 + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b})(\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)|_-. \tag{3.6.22}$$

Далее,

$${\geqslant_1} P = {\geqslant_1}(\bar{\mathcal{L}}^{n_1}) \ \in \xi R_{ab}[\xi] \quad \Leftrightarrow \tag{3.6.23}$$

$$\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi \ \in R_{ab}[\xi]\xi. \tag{3.6.24}$$

Поэтому, из (3.6.22) следует

$$\begin{aligned}
({\geqslant_1} P\Lambda - \Lambda\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)_- = ({\geqslant_1} P\boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b}\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)_- &\overset{(3.5.17)}{=} \\
= [{\geqslant_1} P(\boldsymbol{a})]^t\xi^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}[(\boldsymbol{b})(\xi^{-1}({\geqslant_1} P)\xi)^\dagger]&,
\end{aligned}$$

что равно (3.6.21). ∎

Следствие 3.6.25. В обозначениях

$$P^* = \xi^{-1}({\geqslant_1} P) \in R_{ab}[\xi], \tag{3.6.26}$$

уравнения движения (3.6.10) принимают вид

$$\partial_P(\boldsymbol{a}) = [P^*(\boldsymbol{a})]^{(1)}, \quad \partial_P(\boldsymbol{b}) = |(\boldsymbol{b})(P^*)^\dagger]^{(1)}. \tag{3.6.27}$$

Следствие 3.6.28. Гомоморфизм $\psi : R_a \to R_{ab}$, $R_a = \mathcal{F}\langle a_i^{(j)}\rangle$,

$$\psi(\mathcal{L}) = \psi\Big(\xi + \sum_{i \geqslant 0} a_i \xi^{-i}\Big) = \bar{\mathcal{L}} = \xi(1 + \boldsymbol{a}^t \xi^{-1} \boldsymbol{b})^{-1}, \tag{3.6.29}$$

отображает иерархию МКП в иерархию НУШП.

Теорема 3.6.30. Потоки неабелевой иерархии НУШП (3.6.4) коммутируют друг с другом.

Доказательство. Выберем $n_2 \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$Q = \bar{\mathcal{L}}^{n_2}, \quad \partial_Q = \partial_{t_{n_2}}.$$

Во-первых, имеем

$$\begin{aligned} \partial_P \partial_Q(\boldsymbol{a}) = \partial_P[\,{\geqslant_1}Q(\boldsymbol{a})] = [\partial_P({\geqslant_1}Q)](\boldsymbol{a}) + ({\geqslant_1}Q)({\geqslant_1}P)(\boldsymbol{a}) = \\ = [\partial_P({\geqslant_1}Q) + ({\geqslant_1}Q)({\geqslant_1}P)](\boldsymbol{a}), \end{aligned}$$

так что

$$[\partial_P, \partial_Q](\boldsymbol{a}) = ?(\boldsymbol{a}),$$

где

$$\begin{aligned} ? = \partial_P({\geqslant_1}Q) - \partial_Q({\geqslant_1}P) - [\,{\geqslant_1}P, {\geqslant_1}Q] = \\ = {\geqslant_1}[Q, {\leqslant_0}P] + {\geqslant_1}[{\leqslant_0}Q, P] + {\geqslant_1}[{\geqslant_1}Q, {\geqslant_1}P], \end{aligned} \tag{3.6.31}$$

и это совпадает с выражением (2.1.15), равным нулю.

Во-вторых, имеем

$$\partial_P \partial_Q(\boldsymbol{b}) = \partial_P[-(\boldsymbol{b})(\xi^{-1}({\geqslant_1}Q)\xi)^{\dagger}] = (\boldsymbol{b})(\xi^{-1}({\geqslant_1}P)\xi)^{\dagger}(\xi^{-1}({\geqslant_1}Q)\xi)^{\dagger} - (\boldsymbol{b})[\xi^{-1}\partial_P({\geqslant_1}Q)\xi]^{\dagger},$$

откуда

$$[\partial_P, \partial_Q](\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b})!,$$

где

$$! = [(\xi^{-1}({\geqslant_1}P)\xi)^{\dagger}, (\xi^{-1}({\geqslant_1}Q)\xi)^{\dagger}] - \{\xi^{-1}[\partial_P({\geqslant_1}Q) - \partial_Q({\geqslant_1}P)]\xi\}^{\dagger} \overset{(3.5.37)}{=} \bar{\text{¡}}^{\dagger},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\text{¡}} = [\xi^{-1}({\geqslant_1}P)\xi, \xi^{-1}({\geqslant_1}Q)\xi] - \xi^{-1}[\partial_P({\geqslant_1}Q) - \partial_Q({\geqslant_1}P)]\xi = \\ = \xi^{-1}\{[\,{\geqslant_1}P, {\geqslant_1}Q] - \partial_P({\geqslant_1}Q) + \partial_Q({\geqslant_1}P)\}\xi \overset{(3.6.31)}{=} -\xi^{-1}?\,\xi = 0. \end{aligned}$$

∎

Перейдем к гамильтоновым аспектам иерархии НУШП. Есть два стандартных гамильтоновых вопроса: 1) является ли иерархии гамильтоновой? 2) является ли преобразование Миуры гамильтоновым? Мы сейчас увидим, что в случае НУШП ответы такие: 1) в некотором роде; и 2) возможно, но это выходит за рамки этой книги.

Действительно, при

$$\bar{H}_n = n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(\bar{\mathcal{L}}^n) \quad \text{или} \quad n^{-1}\, Tr\, \mathrm{Res}(\widehat{L}_{\bar{\mathcal{L}}^n}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.6.32}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} d(\bar{H}_{n+1}) &\sim Tr\,\mathrm{Res}[\bar{\mathcal{L}}^n d(\bar{\mathcal{L}})] = Tr\,\mathrm{Res}[\bar{\mathcal{L}}^n \xi(-\Lambda^{-1} d(\Lambda)\Lambda^{-1})] = \\ &= -\,Tr\,\mathrm{Res}[\bar{\mathcal{L}}^{n+1} d(\Lambda)\xi^{-1}\xi\Lambda^{-1}] \ \sim\ -\,Tr\,\mathrm{Res}[d(\Lambda)\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2}] \\ &= -\,Tr\,\mathrm{Res}[d\boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b}\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2} + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}d\boldsymbol{b}\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2}] \\ &\sim -\,Tr\,\mathrm{Res}\sum\bigl(da_r\xi^{-1}b_r\xi^{k-1}\bar{p}_k(n+2) + db_r\xi^{k-1}\bar{p}_k(n+2)a_r\xi^{-1}\bigr) \\ &= -\,Tr\sum_r\Bigl\{da_r\sum(-1)^k b_r^{(k)}\bar{p}_{k+1}(n+2) + db_r\sum\bigl[\bar{p}_{k+1}(n+2)a_r\bigr]^{(k)}\Bigr\}. \end{aligned} \tag{3.6.33}$$

Следовательно,

$$\frac{\delta\bar{H}_{n+1}}{\delta a_{r|\alpha}} = -\sum_{k\geqslant 0}\bigl[b_r^{(k)}\bar{p}_{k+1}(n+2)(-1)^k\bigr]_{|\alpha}, \tag{3.6.34a}$$

$$\frac{\delta\bar{H}_{n+1}}{\delta b_{r|\alpha}} = -\sum_{k\geqslant 0}\bigl[\bar{p}_{k+1}(n+2)a_r\bigr]^{(k)}_{|\alpha}. \tag{3.6.34b}$$

Теперь на второй гамильтонов вопрос можно ответить отрицательно: формулы (3.6.34) означают, что мы имеем дело, в лучшем случае, с 3-й гамильтоновой структурой иерархии НУШП; значит, преобразование Миуры ψ (3.6.29) может оказаться гамильтоновым, только в случае, если взять тоже 3-ю гамильтонову структуру иерархии МКП — проект, о котором безопаснее не задумываться. (Напомним, что термин k-я гамильтонова структура означает, что соответствующие компоненты элемента $\bar{\mathcal{L}}^n$ выражены через вариационные производные гамильтониана $\bar{H}_{n+2-k}$.)

Первый гамильтонов вопрос теперь можно отбросить. Согласно формулам (3.6.4),

$$\partial_{t_n}(a_r) = \Bigl(\sum_{k\geqslant 0}\xi^{k+1}\bar{p}_{k+1}(n)\Bigr)(a_r) = \partial\Bigl(\sum_{k\geqslant 0}[\bar{p}_{k+1}(n)a_r]^{(k)}\Bigr), \tag{3.6.35a}$$

$$\partial_{t_n}(b_r) = -(b_r)\Bigl[\sum_{k\geqslant 0}\xi^k\bar{p}_{k+1}(n)\xi\Bigr]^\dagger = \partial\Bigl(\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k b_r^{(k)}\bar{p}_{k+1}(n)\Bigr), \tag{3.6.35b}$$

откуда

$$\partial_{t_n}(a_{r|\alpha}) = -\partial\Bigl(\frac{\delta H_{n-1}}{\delta b_{r|\alpha}}\Bigr), \qquad n\geqslant 2, \tag{3.6.36a}$$

$$\partial_{t_n}(b_{r|\alpha}) = -\partial\Bigl(\frac{\delta H_{n-1}}{\delta a_{r|\alpha}}\Bigr), \qquad n\geqslant 2. \tag{3.6.36b}$$

Эта гамильтонова форма не годится для первого потока (3.6.7), так как $\bar{H}_0$ не был определен. Это можно исправить, положив

$$\bar{H}_0 = Tr\,\mathrm{Res}[\ln(\Lambda^{-1})], \tag{3.6.37}$$

или даже, как это сейчас модно,

$$\bar{H}_0 = Tr\,\mathrm{Res}[\ln(\bar{\mathcal{L}})], \tag{3.6.38}$$

где появляется $\log\xi$, и т.д., — но это уведет нас далеко в сторону.

Замечание 3.6.39. Как и в случае НУШ, обсуждавшемся в Замечании 3.5.69, каждой паре переменных a_r, b_r в Λ (3.6.2) можно придать произвольные противоположные Г–градуировки. Мы больше не будем упоминать о таких пустяках.

3.7 Между НУШП и НУШ

В этом разделе мы исследуем, существует ли отображение между НУШП и НУШ, согласованное с их вложениями соответственно в МКП и КП.

Результаты предыдущих разделов наводят на следующие размышления. У нас имеется три преобразования Миуры между различными иерархиями:
1) Φ : КП $\to$ МКП (3.1.23), в случае, когда все переменные коммутируют,

$$\Phi(L) = \Phi\Big(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Big) = e^{\int a_0} \mathcal{L} e^{-\int a_0} = \xi + \sum a_{i+1}(\xi - a_0)^{-i-1}; \tag{3.7.1}$$

2) Ψ : КП $\to$ НУШ (3.5.21),

$$\Psi(L) = \Psi\Big(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Big) = \bar{L} = \xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q}; \tag{3.7.2}$$

и 3) ψ : МКП $\to$ НУШП (3.6.29),

$$\psi(\mathcal{L}) = \psi\Big(\xi + \sum a_i \xi^{-i}\Big) = \xi(1 + \mathbf{a}^t \xi^{-1} \mathbf{b})^{-1}. \tag{3.7.3}$$

Допустим, все переменные коммутируют. Вопрос: можно ли замкнуть диаграмму (3.7.1)–(3.7.3), то есть, найти отображение φ : НУШ $\to$ НУШП или отображение φ' : НУШП $\to$ НУШ такое, что

$$\varphi\Psi = \psi\Phi \quad \text{или} \quad \Psi = \varphi'\psi\Phi. \tag{3.7.4}$$

Исключив из обозначений все буквы $\varphi, \Phi, \psi, \Psi$, можно выразить свойство "коммутативности диаграммы" (3.7.4) посредством тождества

$$\xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q} = [\xi(1 + \mathbf{a}^t \xi^{-1} \mathbf{b})^{-1}]\,\big|_{\xi \mapsto \xi - a_0}, \tag{3.7.5}$$

где, согласно (3.6.5),

$$a_0 = -\mathbf{a}^t \mathbf{b}. \tag{3.7.6}$$

Таким образом, определяющее тождество имеет вид

$$\xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q} = (\xi + \mathbf{a}^t \mathbf{b})[1 + \mathbf{a}^t (\xi + \mathbf{a}^t \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b}]^{-1}. \tag{3.7.7}$$

Умножая справа на $1 + \mathbf{a}^t(\xi + \mathbf{a}^t\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}$, находим

$$\xi + \mathbf{a}^t \mathbf{b} = (\xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q})[1 + \mathbf{a}^t (\xi + \mathbf{a}^t \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b}] = \xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q} + (\xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q}) \mathbf{a}^t (\xi + \mathbf{a}^t \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b},$$

или

$$\mathbf{a}^t \mathbf{b} - \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q} = (\xi + \mathbf{p}^t \xi^{-1} \mathbf{q}) \mathbf{a}^t (\xi + \mathbf{a}^t \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b}. \tag{3.7.8}$$

Ясно, что в общем случае дальнейшие упрощения невозможны. (Если читатель возражает, я соглашусь с классическим шотландским приговором "не доказано".) Итак, исследуем скалярный случай $r^{\max} = 1$, когда

$$\mathbf{a} = a, \quad \mathbf{b} = b, \quad \mathbf{p} = p, \quad \mathbf{q} = q, \tag{3.7.9}$$

и (3.7.8) принимает вид

$$ab - p\xi^{-1} q = (\xi + p\xi^{-1} q) a (\xi + ab)^{-1} b. \tag{3.7.10}$$

Умножая (3.7.10) справа на $[a(\xi+ab)^{-1}b]^{-1}$, и слева на $\xi p^{-1}=(p\xi^{-1})^{-1}$, находим

$$\xi p^{-1}a(\xi+ab)a^{-1}-qb^{-1}(\xi+ab)a^{-1}=\xi p^{-1}\xi+q \quad \Leftrightarrow \tag{3.7.11}$$

$$\begin{gathered}\xi[\xi p^{-1}-(p^{-1}a)^{(1)}a^{-1}+p^{-1}a^2ba^{-1}]-\xi qb^{-1}a^{-1}+(qb^{-1})^{(1)}a^{-1}-qb^{-1}aba^{-1}=\\ =\xi^2p^{-1}-\xi(p^{-1})^{(1)}+q \quad \Leftrightarrow\\ (qb^{-1})^{(1)}=qb^{-1}(ab+ba), \qquad (3.7.12)\\ -(p^{-1}a)^{(1)}a^{-1}+p^{-1}a^2ba^{-1}-qb^{-1}a^{-1}=-(p^{-1})^{(1)}.\end{gathered}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{gathered}-p^{-1}a^{(1)}a^{-1}+p^{-1}a^2ba^{-1}=qb^{-1}a^{-1} \quad \Leftrightarrow\\ a^2b^2-a^{(1)}b=pq. \qquad (3.7.13)\end{gathered}$$

Это все, что мы можем получить в общем случае. Допустим теперь, что все переменные *коммутируют*.

Тогда формула (3.7.12) принимает вид

$$(qb^{-1})^{(1)}=2qa. \tag{3.7.12$'$}$$

Умножая это равенство на bq^{-1}, находим, что

$$\begin{gathered}qb^{-1}=\mathrm{const}\, e^{\int 2ab} \quad \Leftrightarrow\\ q=\mathrm{const}\, e^{\int 2ab}b, \qquad (3.7.14a)\end{gathered}$$

и подставляя это в (3.7.13), получаем

$$p=\mathrm{const}^{-1}[a^2b-a^{(1)}]e^{-\int 2ab}. \tag{3.7.14b}$$

Таким образом, отображение φ "существует" в 1-компонентном коммутативном случае, хотя и меланхолического типа (то есть, нелокальное).

3.8 Изоморфизм ДВВ и НУШ

В этом разделе показано, что 1-компонентная иерархия НУШ изоморфна потенциальной иерархия ДВВ, как динамически, так и гамильтоново. Далее, показано, что отображение Pot между иерархией ДВВ и потенциальной иерархией ДВВ также гамильтоново.

В §2.4 было показано, что иерархия ДВВ является редукцией иерархии МКП, с представлением Лакса

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_D=\xi+a_0+a_1\xi^{-1},\\ \partial_{t_n}(\mathcal{L}_D)=[\,{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_D^n),\ \mathcal{L}_D], \qquad (3.8.1)\end{gathered}$$

и уравнениями движения (2.4.8)

$$\partial_{t_n}(a_0)=(\partial+\mathrm{ad}_{a_0})(p_0(n)), \tag{3.8.2a}$$

$$\partial_{t_n}(a_1)=(\partial+\mathrm{ad}_{a_0})(p_{-1}(n))+[a_1,p_0(n)], \tag{3.8.2b}$$

где

$$\mathcal{L}_D^n = \sum \xi^k p_k(n). \tag{3.8.3}$$

В §3.1 мы доказали, что отображение Pot (3.1.7),

$$\mathrm{Pot}(a_0) = -V^{(1)}V^{-1}, \quad \mathrm{Pot}(a_1) = a_1, \tag{3.8.4}$$

переводит уравнение движения (3.8.2a) в уравнение движения (3.1.10)

$$\partial_{t_n}(V) = -\mathrm{Pot}(p_0(n))V. \tag{3.8.5}$$

В §3.4 мы нашли, что отображение $\overline{Go}\ \overline{\Phi} : R_A \to R_{Va_1}$ (3.4.6),

$$\overline{Go}\ \overline{\Phi}\Big(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Big) = \xi + V^{-1}a_1\xi^{-1}V, \tag{3.8.6}$$

переводит иерархию КП в потенциальную иерархию ДВВ.

Наконец, в §3.5 проверили вложение $\Psi : R_A \to R_{pq}$ (3.5.21) иерархии КП в иерархию НУШ:

$$\Psi\Big(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Big) = \xi + p\xi^{-1}q, \tag{3.8.7}$$

где, для целей настоящего раздела, векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ заменены на однокомпонентные скаляры.

Завершив предисловие, сравним формулы (3.8.6) и (3.8.7). *Видим*, что эти формулы изоморфны, с обратимыми изоморфизмами

$$\Phi_{ND}(p) = V^{-1}a_1, \qquad \Phi_{ND}(q) = V, \tag{3.8.8a}$$

$$\Phi_{DN}(V) = q, \qquad \Phi_{DN}(a_1) = qp, \qquad \Phi_{DN} = (\Phi_{ND})^{-1} \tag{3.8.8b}$$

что обеспечивает расщепление

$$\overline{Go}\ \overline{\Phi} = \Phi_{ND}\Psi, \tag{3.8.9a}$$

$$\Psi = \Phi_{DN}\overline{Go}\ \overline{\Phi}. \tag{3.8.9b}$$

Итак, 1-компонентные иерархия НУШ и потенциальная иерархия ДВВ изоморфны.

Возьмем для разнообразия любовную историю, как говорится в начале повести *"Убийство на Брум-стрит"* Бена Хехта. Давайте используем изоморфизм НУШ ≈ Pot-ДВВ, чтобы вычислить гамильтонову форму неабелевой иерархии ДВВ. Мы будем осуществлять эти вычисления в танцевальной манере: сначала получим из НУШ потенциальную ДВВ; затем перейдем от потенциальной ДВВ к самой ДВВ.

Начнем с отображения $\Phi_{DN} : R_{Va_1} \to R_{pq}$ (3.8.8b). *В* $\mathcal{A}$-компонентах, оно имеет вид

$$\Phi_{DN}(V_{|\alpha}) = q_{|\alpha}, \quad \Phi_{DN}(a_{1|\alpha}) = \sum c_\alpha^{\beta\gamma} q_{|\beta} p_{|\gamma}. \tag{3.8.10}$$

Следовательно, матрицы $D(\boldsymbol{\Phi}_{DN})$ и $D(\boldsymbol{\Phi}_{DN})^\dagger$ равны

$$D(\boldsymbol{\Phi}_{DN}) = \begin{array}{c} \\ \Phi_{DN}(V_{|\alpha}) \\ \Phi_{DN}(a_{1|\alpha}) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p_{|\alpha'} & q_{|\alpha'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha\alpha'} \\ \Sigma c_\alpha^{\delta\alpha'} q_{|\delta} & \Sigma c_\alpha^{\alpha'\delta} p_{|\delta} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.8.11}$$

$$D(\boldsymbol{\Phi}_{DN})^\dagger = \begin{array}{c} \\ p_{|\beta'} \\ q_{|\beta'} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Phi_{DN}(V_{|\beta}) & \Phi_{DN}(a_{1|\beta}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \Sigma c_\beta^{\gamma\beta'} q_{|\gamma} \\ \delta_{\beta\beta'} & \Sigma c_\beta^{\beta'\gamma} p_{|\gamma} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.8.12}$$

Так как гамильтонова матрица $B^{\text{НУШ}}$ (3.5.50) равна

$$B^{\text{НУШ}} = \begin{array}{c} \\ p_{|\alpha'} \\ q_{|\alpha'} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p_{|\beta'} & q_{|\beta'} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha'\beta'} \\ -\delta_{\alpha'\beta'} & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.8.13}$$

то мы находим, что

$$D(\Phi_{DN})B^{\text{НУШ}}D(\Phi_{DN})^{\dagger} = \begin{array}{c|cc} & \Phi_{DN}(V_{|\beta}) & \Phi_{DN}(a_{1|\beta}) \\ \hline \Phi_{DN}(V_{|\alpha}) & 0 & -\Sigma c_{\beta}^{\gamma\alpha} q_{|\gamma} \\ \Phi_{DN}(a_{1|\alpha}) & \Sigma c_{\alpha}^{\delta\beta} q_{|\delta} & (*) \end{array}, \tag{3.8.14}$$

где

$$(*) = \sum (c_{\alpha}^{\delta\beta'} c_{\beta}^{\beta'\gamma} - c_{\beta}^{\delta\beta'} c_{\alpha}^{\beta'\gamma}) q_{|\delta} p_{|\gamma}. \tag{3.8.15}$$

Лемма 3.8.16.

$$\sum_{\beta'} c_{\alpha}^{\delta\beta'} c_{\beta}^{\beta'\gamma} = \sum_{\beta'} c_{\alpha}^{\beta'\beta} c_{\beta'}^{\delta\gamma} \tag{3.8.17}$$

Доказательство. Учитывая циклическую симметрию структурных констант $c_{\alpha}^{\beta\gamma}$, находим

$$\sum c_{\alpha}^{\delta\beta'} c_{\beta}^{\beta'\gamma} = \sum c_{\alpha}^{\delta\beta'} c_{\beta'}^{\gamma\beta} \overset{(3.3.33)}{=} \sum c_{\beta'}^{\delta\gamma} c_{\alpha}^{\beta'\beta} = \sum c_{\alpha}^{\beta'\beta} c_{\beta'}^{\delta\gamma}. \qquad \blacksquare$$

Б силу Леммы 3.8.16, для выражения (*) (3.8.15) имеем

$$(*) = \sum \big(c_{\alpha}^{\beta'\beta} - c_{\beta}^{\beta'\alpha}\big) c_{\beta'}^{\delta\gamma} q_{|\delta} p_{|\gamma} = \Phi_{DN}\Big(\sum (c_{\alpha}^{\beta'\beta} - c_{\beta}^{\beta'\alpha}) a_{1|\beta'}\Big) \quad \Rightarrow \tag{3.8.18}$$

$$D(\Phi_{DN})B^{\text{НУШ}}D(\Phi_{DN})^{\dagger} = \Phi_{DN}(B_{\text{Pot}}^{\text{ДВВ}}), \tag{3.8.19}$$

где

$$B_{\text{Pot}}^{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c|cc} & V_{|\beta} & a_{1|\beta} \\ \hline V_{|\alpha} & 0 & -\Sigma c_{\beta}^{\delta\alpha} V_{|\delta} \\ a_{1|\alpha} & \Sigma c_{\alpha}^{\delta\beta} V_{|\delta} & \Sigma(c_{\alpha}^{\delta\beta} - c_{\beta}^{\delta\alpha}) a_{1|\delta} \end{array}. \tag{3.8.20}$$

Заметим, что глобальная форма гамильтоновой матрицы $B_{\text{Pot}}^{\text{ДВВ}}$ (3.8.20) имеет вид

$$B_{\text{Pot}}^{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c|cc} & V & a_1 \\ \hline V & 0 & -\widehat{R}_V \\ a_1 & \widehat{L}_V & \mathrm{ad}_{a_1} \end{array}. \tag{3.8.21}$$

Так как отображение Φ_{DN} обратимо, $(\Phi_{DN})^{-1} = \Phi_{ND}$, то гамильтонова матрица $B_{\text{Pot}}^{\text{ДВВ}}$ и есть искомая гамильтонова структура потенциальной иерархии ДВВ.

Найдя эту структуру, попытаемся теперь ограничить ее на подалгебру в R_{Va_1}, порожденную $-V^{(1)}V^{-1}$ и a_1. A priori не ясно, возможно ли такое ограничение. Давайте посмотрим. Нужно определить, является ли произведение

$$\begin{pmatrix} \frac{D\,\mathrm{Pot}(a_0)}{DV} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_V \\ \widehat{L}_V & \mathrm{ad}_{a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left[\frac{D\,\mathrm{Pot}(a_0)}{DV}\right]^{\dagger} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{3.8.22}$$

Pot–образом некоторой матрицы с элементами из $R_{a_0a_1}[\partial]$. Так как это произведение равно

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{D\,\mathrm{Pot}(a_0)}{DV}\widehat{R}_V \\ -\widehat{L}_V\left[\frac{D\,\mathrm{Pot}(a_0)}{DV}\right]^\dagger & \mathrm{ad}_{a_1} \end{pmatrix}, \tag{3.8.23}$$

то задача сводится к вычислению и анализу выражения

$$-\frac{D\,\mathrm{Pot}(a_0)}{DV}\widehat{R}_V = \frac{D(V^{(1)}V^{-1})}{DV}\widehat{R}_V. \tag{3.8.24}$$

Вычисляя формально, находим

$$\frac{D(V^{(1)}V^{-1})}{DV}\widehat{R}_V = (\partial V^{-1} - V^{(1)}V^{-2})\widehat{R}_V, \tag{3.8.25}$$

что абсурдно. Требуется более тщательное вычисление. (См. также Приложение A3 и §3.11.)

Теорема 3.8.26. Pot–образ гамильтоновой матрицы $B^{\text{ДВВ}}$ (2.3.8):

$$B^{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c} \\ a_{0|\alpha} \\ a_{1|\alpha} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad a_{0|\beta} \qquad\qquad\qquad & \qquad a_{1|\beta} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha\beta}\partial + \sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\alpha^{\beta\tau})a_{0|\tau} \\ \delta_{\alpha\beta}\partial + \sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\alpha^{\beta\tau})a_{0|\tau} & \sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\alpha^{\beta\tau})a_{1|\tau} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.8.27}$$

есть компонентная форма матрицы (3.8.22).

Доказательство. Нижний правый угол матрицы $B^{\text{ДВВ}}$ (3.8.27)

$$\sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\alpha^{\beta\tau})a_{1|\tau} = \sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\beta^{\tau\alpha})a_{1|\tau}$$

в точности совпадает с нижним правым углом матрицы $B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$ (3.8.20).

Следовательно, остается только разделаться с верхними правыми углами соответствующих (кососимметрических) матриц. Для элемента $(a_{0|\alpha}, a_{1|\beta})$ в произведении (3.8.22), в виде (3.8.23), имеем, с помощью формулы (3.8.20):

$$\frac{D(V^{(1)}V^{-1})_{|\alpha}}{DV_{|\gamma}}\Big(\sum c_\beta^{\delta\gamma}V_{|\delta}\Big). \tag{3.8.28}$$

Далее,

$$(V^{(1)}V^{-1})_{|\alpha} = \sum c_\alpha^{\eta\tau}V_{|\eta}^{(1)}V_{|\tau}^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{D(V^{(1)}V^{-1})_{|\alpha}}{DV_{|\gamma}} = \sum c_\alpha^{\gamma\tau}V_{|\tau}^{-1}\partial + \sum c_\alpha^{\eta\tau}V_{|\eta}^{(1)}\frac{\partial V_{|\tau}^{-1}}{\partial V_{|\gamma}},$$

и мы приходим к следующему тождеству, которое нужно проверить:

$$\sum c_\alpha^{\gamma\tau}V_{|\tau}^{-1}\partial c_\beta^{\delta\gamma}V_{|\delta} + \sum c_\alpha^{\eta\tau}V_{|\eta}^{(1)}\frac{\partial V_{|\tau}^{-1}}{\partial V_{|\gamma}}c_\beta^{\delta\gamma}V_{|\delta} = \tag{3.8.29a}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\partial + \sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\alpha^{\beta\tau})\,\mathrm{Pot}(a_{0|\tau}) =$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\partial - \sum(c_\alpha^{\tau\beta} - c_\alpha^{\beta\tau})c_\tau^{u\gamma}V_{|u}^{(1)}V_{|\gamma}^{-1}. \tag{3.8.29b}$$

Первое слагаемое в выражении (3.8.29a) можно преобразовать как

$$\begin{aligned}\sum c_\alpha^{\gamma\tau} c_\beta^{\delta\gamma} (V_{|\tau}^{-1} V_{|\delta}\partial + V_{|\delta}^{(1)} V_{|\tau}^{-1}) &\overset{(3.8.17)}{=} \sum c_\beta^{\gamma\alpha} c_\gamma^{\delta\tau} (V_{|\delta} V_{|\tau}^{-1}\partial + V_{|\delta}^{(1)} V_{|\tau}^{-1}) = \\ &= \sum c_\beta^{\gamma\alpha} 1_\gamma \partial + \sum c_\beta^{\gamma\alpha} c_\gamma^{u\tau} V_{|u}^{(1)} V_{|\tau}^{-1} \quad \overset{(3.8.34)\ \text{ниже}}{=} \\ &= \delta_{\alpha\beta}\partial + \sum c_\gamma^{u\tau} c_\beta^{\gamma\alpha} V_{|u}^{(1)} V_{|\tau}^{-1}, \end{aligned} \tag{3.8.30}$$

и подставляя это в (3.8.29), получаем тождество

$$\sum c_\gamma^{u\tau} c_\beta^{\gamma\alpha} V_{|\tau}^{-1} + \sum c_\alpha^{u\tau} \frac{\partial V_{|\tau}^{-1}}{\partial V_{|\gamma}} c_\beta^{\delta\gamma} V_{|\delta} = \tag{3.8.31a}$$

$$= \sum (c_\alpha^{\beta\tau} - c_\alpha^{\tau\beta}) c_\tau^{u\gamma} V_{|\gamma}^{-1}. \tag{3.8.31b}$$

Затем, первое слагаемое в (3.8.31a) равно

$$\sum c_\gamma^{u\tau} c_\beta^{\gamma\alpha} V_{|\tau}^{-1} = \sum c_\tau^{u\gamma} c_\alpha^{\beta\tau} V_{|\tau}^{-1},$$

что сокращается с первой частью в выражении (3.8.31b). Следовательно, тождество (3.8.31) принимает вид

$$\sum c_\alpha^{u\tau} c_\beta^{\delta\gamma} V_{|\delta} \frac{\partial V_{|\tau}^{-1}}{\partial V_{|\gamma}} = -\sum c_\alpha^{\tau\beta} c_\tau^{u\gamma} V_{|\gamma}^{-1}. \tag{3.8.32}$$

Лемма 3.8.33.

$$\sum_\gamma c_\beta^{\gamma\alpha} 1_\gamma = \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.8.34}$$

Доказательство. Формула (3.8.34) верна, *если и только если* для любого вектора $\boldsymbol{x} \in A$,

$$\sum_\alpha x_\alpha \sum c_\beta^{\gamma\alpha} 1_\gamma = \sum_\alpha x_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad (1\boldsymbol{x})_\beta = x_\beta,$$

а это, очевидно, верно. ∎

Чтобы продвигаться дальше, нам понадобится формула для $\dfrac{\partial V_{|\tau}^{-1}}{\partial V_{|\gamma}}$.

Лемма 3.8.35.

$$\frac{\partial V_{|\varphi}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} = -\sum c_\omega^{\varphi\theta} c_\omega^{\psi\eta} V_{|\theta}^{-1} V_{|\eta}^{-1}. \tag{3.8.36}$$

Следствие 3.8.37.

$$\frac{\partial V_{|\varphi}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} = \frac{\partial V_{|\psi}^{-1}}{\partial V_{|\varphi}}. \tag{3.8.38}$$

Считая Лемму доказанной, мы можем преобразовать левую часть тождества (3.8.32) следующим образом:

$$\sum c_\alpha^{u\tau} c_\beta^{\delta\gamma} V_{|\delta} \frac{\partial V_{|\tau}^{-1}}{\partial V_{|\gamma}} =$$

$$= \sum c_\alpha^{u\tau} V_{|\delta} c_\beta^{\delta\gamma} c_\omega^{\gamma\eta} V_{|\eta}^{-1} c_\omega^{\tau\theta} V_{|\theta}^{-1} \overset{(3.8.17)}{=} \sum c_\alpha^{u\tau} V_{|\delta} c_\beta^{\gamma\omega} c_\gamma^{\delta\eta} V_{|\eta}^{-1} c_\omega^{\tau\theta} V_{|\theta}^{-1} =$$

$$= \sum c_\alpha^{u\tau} c_\beta^{\gamma\omega} 1_\gamma c_\omega^{\tau\theta} V_{|\theta}^{-1} \overset{(3.8.34)}{=} -\sum c_\alpha^{u\tau} \delta_{\beta\omega} c_\omega^{\tau\theta} V_{|\theta}^{-1} =$$

$$= -\sum c_\alpha^{u\tau} c_\beta^{\tau\theta} V_{|\theta}^{-1} \overset{(3.8.17)}{=} -\sum c_\alpha^{\tau\beta} c_\tau^{u\theta} V_{|\theta}^{-1},$$

а это равно правой части (3.8.32). ∎

Доказательство Леммы 3.8.35. Расписывая тождество $VV^{-1} = 1$ покомпонентно, находим

$$\sum c_\omega^{\alpha\theta} V_{|\alpha} V_{|\theta}^{-1} = 1_\omega. \tag{3.8.39}$$

Дифференцируя по $V_{|\psi}$, получаем

$$\sum c_\omega^{\psi\theta} V_{|\theta}^{-1} + \sum c_\omega^{\alpha\theta} V_{|\alpha} \frac{\partial V_{|\theta}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} = 0.$$

Умножая на $c_\eta^{\omega\varphi} V_{|\eta}^{-1}$ и суммируя по η и ω, получаем

$$-\sum c_\omega^{\psi\theta} V_{|\theta}^{-1} c_\omega^{\varphi\eta} V_{|\eta}^{-1} = \sum c_\omega^{\alpha\theta} c_\eta^{\omega\varphi} V_{|\alpha} V_{|\eta}^{-1} \frac{\partial V_{|\theta}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} \overset{(3.3.33)}{=}$$

$$= \sum c_\eta^{\alpha\omega} c_\omega^{\theta\varphi} V_{|\alpha} V_{|\eta}^{-1} \frac{\partial V_{|\theta}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} = \sum 1_\omega c_\omega^{\theta\varphi} \frac{\partial V_{|\theta}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} \overset{(3.8.34)}{=}$$

$$= \sum \delta_{\theta\varphi} \frac{\partial V_{|\theta}^{-1}}{\partial V_{|\psi}} = \frac{\partial V_{|\varphi}^{-1}}{\partial V_{|\psi}},$$

а это есть тождество (3.8.36). ∎

Упражнение 3.8.40. Покажите, что

$$1_\alpha = \sum_\tau c_\alpha^{\tau\tau}, \tag{3.8.41}$$

$$Tr(\widehat{L}_{e^\alpha}) = Tr(\widehat{R}_{e^\alpha}) = 1_\alpha. \tag{3.8.42}$$

3.9 Настоящее преобразование Миуры между иерархиями КдФ и МКдФ

> 809. **СТИН, Линн Артур, ред. – МАТЕМАТИКА ЗАВТРА** — Сборник очерков ведущих ученых исследует будущее настоящей и прикладной математики.
> Шпрингер. 1981. 250 с. (цена $18.00). Наша цена: $5.95
>
> Каталог книжного магазина Стрэнд (февраль 1991)

В этом разделе мы выводим различные неабелевы модифицированные иерархии КдФ и их потенциальные формы, и изучаем связи между ними и неабелевой иерархией КдФ.

Традиционное модифицированное уравнение КдФ (= МКдФ)

$$v_t = (\pm 2v^3 + v_{xx})_x, \tag{3.9.1±}$$

допускает различные представления Лакса. Мы стартуем с исследовании их неабелевых версий.

Версия 1. Она появляется в результате специализации

$$v = p = \pm q \tag{3.9.2}$$

потоков с нечетными номерами

$$n \equiv 1 \pmod 2 \tag{3.9.3}$$

из 1-компонентной иерархии НУШ (3.5.3). Первый поток, при $n = 1$, есть просто (3.5.9):

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{p}) = \partial(\boldsymbol{p}). \tag{3.9.4}$$

Посмотрим на следующий поток с нечетным номером, при $n = 3$. Имеем:

$$\begin{aligned} (\bar{L}^3)_+ &= [(\xi + \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}\xi^{-1} - \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(1)}\xi^{-2})^3]_+ = (\bar{L}^2\bar{L})_+ = \\ &= \{[\xi^2 + 2\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{p}^{(1)t}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(1)})\xi^{-1}](\xi + \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}\xi^{-1} - \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(1)}\xi^{-2})\}_+ = \\ &= \xi^3 + 3\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}\xi + 3\boldsymbol{p}^{(1)t}\boldsymbol{q}, \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

откуда, в силу (3.5.4),

$$\partial_{t_3}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{(3)} + 3(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}^{(1)} + 3(\boldsymbol{p}^{(1)t}\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}, \tag{3.9.6a}$$

$$\partial_{t_3}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}^{(3)} + 3\boldsymbol{q}^{(1)}(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}) + 3\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(1)}). \tag{3.9.6b}$$

Как видим, в общем неабелевом случае, многокомпонентном или нет, нам нужна (дифференциальная) антиинволюция

$$T : R_{pq} \to R_{pq}, \quad T^2 = \mathbf{1}, \quad T\partial = \partial T, \tag{3.9.7a}$$

$$T(f_1 f_2) = T(f_2)T(f_1), \quad \forall\ f_1, f_2 \in R_{pq}, \tag{3.9.7b}$$

где либо

$$T(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}, \quad T(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}, \tag{3.9.8+}$$

либо

$$T(\boldsymbol{p}) = -\boldsymbol{q}, \quad T(\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{p}. \tag{3.9.8−}$$

Если временно ввести обозначения

$$(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}^t\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{f}^T = T(\boldsymbol{f}), \tag{3.9.9}$$

то 3-й поток НУШ (3.9.6) принимает вид, при специализации (3.9.8+) и (3.9.8−):

$$\partial_{t_3}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{(3)} + 3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}^T)\boldsymbol{p}^{(1)} + 3(\boldsymbol{p}^{(1)} \cdot \boldsymbol{p}^T)\boldsymbol{p}, \tag{3.9.10+}$$

$$\partial_{t_3}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{(3)} - 3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}^T)\boldsymbol{p}^{(1)} - 3(\boldsymbol{p}^{(1)} \cdot \boldsymbol{p}^T)\boldsymbol{p}. \tag{3.9.10−}$$

Мы видим, что, как и в традиционной ситуации (3.9.1±), две неабелевых версии МКдФ (3.9.10±) отличаются автоморфизмом $p \mapsto \sqrt{-1}p$. Чтобы проанализировать проблему специализаций (3.9.8±) для всей иерархии НУШ, нам потребуется следующая кострукции. Пусть R дифференциальная алгебра и $T : R \to R$ дифференциальная антиинволюции. Продолжим T до антиинволюции в $R((\xi^{-1}))$ по правилу

$$T\Bigl(\sum_{\mu} r_\mu \xi^\mu\Bigr) = \sum_{\mu} \xi^\mu T(r_\mu), \tag{3.9.11}$$

где правая часть (3.9.11) действует *налево*, а левая часть *направо*. Действует на что? — На себя, и, для подалгебры $R[\xi] \subset R((\xi^{-1}))$, на R.

Лемма 3.9.12. Для любых $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in R((\xi^{-1}))$, $\mathcal{O} \in R[\xi]$, $f \in R$, имеем

$$T(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2) = T(\mathcal{O}_2)T(\mathcal{O}_1), \tag{3.9.13}$$

$$T(\mathcal{O}(f)) = T(f)(T(\mathcal{O})). \tag{3.9.14}$$

Доказательство. Если

$$\mathcal{O} = \sum_{i \geqslant 0} r_i \xi^i,$$

то

$$\mathcal{O}(f) = \sum r_i \partial^i(f),$$

$$T(\mathcal{O}(f)) = \sum T(\partial^i(f))T(r_i) = \sum T(f)^{(i)}T(r_i), \tag{3.9.15a}$$

в то время как

$$T(\mathcal{O}) = \sum \xi^i T(r_i),$$

$$T(f)(T(\mathcal{O})) = \sum T(f)^{(i)}T(r_i), \tag{3.9.15b}$$

что то же самое, что (3.9.15a). Это доказывает (3.9.14). Далее, если

$$\mathcal{O}_1 = \sum r'_\mu \xi^\mu, \qquad \mathcal{O}_2 = \sum r_\nu \xi^\nu$$

то

$$\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 = \sum r'_\mu \binom{\mu}{s} r_\nu^{(s)} \xi^{\mu+\nu-s},$$

$$T(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2) = \sum \xi^{\mu+\nu-s} \binom{\mu}{s} T(r_\nu)^{(s)} T(r'_\mu), \tag{3.9.16a}$$

в то время как

$$T(\mathcal{O}_1) = \sum \xi^\mu T(r'_\mu), \qquad T(\mathcal{O}_2) = \sum \xi^\nu T(r_\nu),$$

$$T(\mathcal{O}_2)T(\mathcal{O}_1) = \sum \xi^\nu T(r_\nu) \xi^\mu T(r'_\mu) = \sum \xi^{\nu+\mu-s} \binom{\mu}{s} T(r_\nu)^{(s)} T(r'_\mu), \tag{3.9.16b}$$

а это равно (3.9.16a). Это доказывает (3.9.13). ∎

Лемма 3.9.17.

$$T(\bar{L}^n) = (-1)^n (\bar{L}^n)^\dagger, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.9.18}$$

Доказательство. Ввиду формул (3.9.13) и (3.5.37), достаточно рассмотреть случай $n = 1$, так что (3.9.18) принимает вид

$$T(\bar{L}) = -\bar{L}^{\dagger}. \tag{3.9.19}$$

Имеем,

$$\bar{L} = \xi + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{q} = \xi + \sum \xi^{-i-1}(\boldsymbol{p}^{(i)} \cdot \boldsymbol{q}),$$

откуда

$$\bar{L}^{\dagger} = (-\xi) + \sum (-\xi)^{-i-1}(\boldsymbol{p}^{(i)} \cdot \boldsymbol{q}) = -[\xi + \sum \xi^{-i-1}(-1)^i(\boldsymbol{p}^{(i)} \cdot \boldsymbol{q})]. \tag{3.9.20a}$$

С другой стороны,

$$\bar{L} = \xi + \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{q} = \xi + \sum (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}^{(i)})(-1)^i \xi^{-1-i},$$

так что

$$\begin{aligned} -T(\bar{L}) &= -\xi - \sum \xi^{-1-i}[T(\boldsymbol{q})^{(i)} \cdot T(\boldsymbol{p})](-1)^i \overset{(3.9.8\pm)}{=} \\ &= -\bigl[\xi + \sum \xi^{-1-i}(\boldsymbol{p}^{(i)} \cdot \boldsymbol{q})(-1)^i\bigr], \end{aligned} \tag{3.9.20b}$$

и это равно (3.9.20a). ∎

Следствие 3.9.21. Антиинволюция T (3.9.8±) коммутирует с эволюционными производными $\partial_{t_{2n+1}}$ с нечетными номерами.

Доказательство. Так как $T^2 = 1$, то достаточно проверить, что

$$(\partial_{t_{2n+1}} T)(\boldsymbol{p}) = T\partial_{t_{2n+1}}(\boldsymbol{p}). \tag{3.9.22}$$

Обозначая $\varepsilon = \pm$, так что $T(\boldsymbol{p}) = \varepsilon \boldsymbol{q}$, $T(\boldsymbol{q}) = \varepsilon \boldsymbol{p}$, имеем

$$\begin{aligned} T\partial_{t_{2n+1}}(\boldsymbol{p}) = T[(\bar{L}^{2n+1})_+(\boldsymbol{p})] \quad &\overset{(3.9.18),\ (3.5.3)}{=} \quad (\varepsilon \boldsymbol{q})[(\bar{L}^{2n+1})_+]^{\dagger}(-1)^{2n+1} = \\ = \varepsilon(\boldsymbol{q})[(\bar{L}^{2n+1})_+]^{\dagger}(-1) &= \varepsilon\partial_{t_{2n+1}}(\boldsymbol{q}) = \partial_{t_{2n+1}}(\varepsilon \boldsymbol{q}) = \partial_{t_{2n+1}}T(\boldsymbol{p}). \end{aligned}$$ ∎

Таким образом, потоки МКдФ имеют вид

$$\partial_{t_{2n+1}}(\boldsymbol{p}) = [(\xi + \varepsilon \boldsymbol{p}^t \xi^{-1} \boldsymbol{p}^T)^{2n+1}]_+(\boldsymbol{p}). \tag{3.9.23ε}$$

Следовательно автоморфизм $\boldsymbol{p} \mapsto \sqrt{-1}\boldsymbol{p}$ заменяет ε на $-\varepsilon$, а автоморфизм $\boldsymbol{p} \mapsto -\boldsymbol{p}$ оставляет потоки МКдФ без изменения.

Упражнение 3.9.24. Покажите, что

$$\sum_{i \geqslant 0} \xi^{-i-1}(\boldsymbol{p}^{(i)} \cdot \boldsymbol{q}) = \sum_{i \geqslant 0} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}^{(i)}) \xi^{-1-i}(-1)^i. \tag{3.9.25}$$

Замечание 3.9.26. Что происходит с потоками с четными номерами? Допустим, что наше поле $\mathcal{F}$ содержит (или равно) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, с (анти)инволюцией T

$$T\,|_{\mathbb{Q}} = \mathbf{1}, \quad T(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}. \tag{3.9.27}$$

Полагая $\mathrm{const}_{2n} = \sqrt{-1}$, запишем потоки с четными номерами как

$$\partial_{t_{2n}}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{-1}(\bar{L}^{2n})_+(\boldsymbol{p}), \quad \partial_{t_{2n}}(\boldsymbol{q}) = -\sqrt{-1}(\boldsymbol{q})[(\bar{L}^{2n})_+]. \tag{3.9.28}$$

Утверждается, что антиинволюция T (3.9.8±) коммутирует с эволюционными производными $\partial_{t_{2n}}$. Действительно,

$$T\partial_{t_{2n}}(\boldsymbol{p}) = T[\sqrt{-1}(L^{2n})_+(\boldsymbol{p})] = -\sqrt{-1}(\varepsilon\boldsymbol{q})[(L^{2n})_+]^\dagger = \varepsilon\partial_{t_{2n}}(\boldsymbol{q}) = \partial_{t_{2n}}T(\boldsymbol{p}).$$

Таким образом, комплексная иерархия НУШ имеет вид

$$\partial_{t_{2n}}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{-1}[(\xi + \varepsilon\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{p}^T)^{2n}]_+(\boldsymbol{p}). \tag{3.9.29ε}$$

Автоморфизмы $\boldsymbol{p} \mapsto \sqrt{-1}\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p} \mapsto -\boldsymbol{p}$ переводят и не переводят $\varepsilon = \pm$ в $-\varepsilon$, соответственно. Второй поток (3.5.9) принимает вид

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{p}) = i[\boldsymbol{p}^{(2)} + 2\varepsilon(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}^T)\boldsymbol{p}]. \tag{3.9.30}$$

Аналогичная процедура применима к иерархии НУШП (3.6.4), с антиинволюцией

$$T(\boldsymbol{a}) = \sqrt{-1}\boldsymbol{\beta}, \quad T(\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{-1}\boldsymbol{a}, \quad T(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}, \quad T|_{\mathbb{Q}} = 1, \tag{3.9.31}$$

(см. выше (3.9.27)), но эти специализации не имеют отношения к иерархии МКдФ.

Версия 2. *В алгебре* R_v $(= \mathcal{F}\langle v^{(j)}\rangle)((\xi^{-1}))$ выберем элементы

$$F_1 = \xi + v, \quad F_2 = \xi - v, \tag{3.9.32}$$

и рассмотрим гомоморфизмы $\varphi, \psi : R_h \to R_v$,

$$\varphi(L_K) = F_1F_2, \quad \psi(L_K) = F_2F_1, \quad L_K = \xi^2 + h. \tag{3.9.33a}$$

Так как

$$F_1F_2 = \xi^2 - v^{(1)} - v^2, \quad F_2F_1 = \xi^2 + v^{(1)} - v^2, \tag{3.9.33b}$$

то мы находим, что

$$\varphi(h) = -v^{(1)} - v^2, \quad \psi(h) = v^{(1)} - v^2. \tag{3.9.34}$$

Выберем n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, и обозначим, в духе §2.6,

$$P = L_K^{(2n_1+1)/2}, \; Q = L_K^{(2n_2+1)/2}, \quad \partial_P = \partial_{t_{2n_1+1}}, \quad \partial_Q = \partial_{t_{2n_2+1}},$$

где ∂_P и ∂_Q — эволюционные дифференцирования из R_h

$$\partial_P(L_K) = [P_+, L_K] = [L_K, P_-], \tag{3.9.35a}$$

$$\partial_Q(L_K) = [Q_+, L_K] = [L_K, Q_-], \tag{3.9.35b}$$

определяющие иерархию КдФ (2.6.34). Определим иерархию МКдФ следующими эволюционными дифференцированиями в R_v :

$$\partial_P(F_1) = \varphi(P_+)F_1 - F_1\psi(P_+) = \tag{3.9.36a}$$

$$= -\varphi(P_-)F_1 + F_1\psi(P_-), \tag{3.9.36b}$$

$$\partial_P(F_2) = \psi(P_+)F_2 - F_2\varphi(P_+) = \tag{3.9.37a}$$

$$= -\psi(P_-)F_2 + F_2\varphi(P_-), \tag{3.9.37b}$$

и аналогичными формулами для ∂_Q.

Теорема 3.9.38. (i) эволюционное дифференцирование ∂_P на R_v корректно определено; (ii) эволюционные дифференцирования ∂_P в алгебрах R_h и R_v совместны с гомоморфизмами φ и ψ; (iii) потоки ∂_P и ∂_Q в R_v коммутируют.

Доказательство. (i) Сначала покажем, что выражения (3.9.36a) и (3.9.36b) равны. Так как замена v на $-v$ переставляет F_1 и F_2, φ и ψ, нам не нужно делать отдельную проверку равенства выражений (3.9.37); кроме того, отсюда следует, что

$$\partial_P(-v) = \chi\partial_P(v), \tag{3.9.39}$$

где $\chi : R_v \to R_v$ обозначает автоморфизм

$$\chi(v) = -v. \tag{3.9.40}$$

Далее, нужно показать, что

$$\begin{gathered}\varphi(P_+)F_1 - F_1\psi(P_+) = -\varphi(P_-)F_1 + F_1\psi(P_-) \quad \Leftrightarrow \\ \varphi(P)F_1 = F_1\psi(P),\end{gathered} \tag{3.9.41}$$

что следует из равенства

$$\varphi(L_K^{1/2})F_1 = F_1\psi(L_K^{1/2}),$$

которое эквивалентно следующему равенству в $R_v((\xi^{-1}))$:

$$\varphi(L_K^{1/2}) = F_1\psi(L_K^{1/2})F_1^{-1}. \tag{3.9.42}$$

Старший член в каждой части равенства (3.9.42) равен ξ. Следовательно, оно эквивалентно своему квадрату:

$$[\varphi(L_K^{1/2})]^2 = [F_1\Psi(L_K^{1/2})F_1^{-1}|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(L_K) = F_1\psi(L_K)F_1^{-1},$$

то есть, согласно (3.9.33a),

$$F_1F_2 = F_1(F_2F_1)F_1^{-1},$$

что верно. Равенство (3.9.41) доказано.

Замечание 3.9.43. *В* приведенном доказательстве, и в §2.6, мы свободно использовали (при $N = 2$) следующую очевидную лемму.

Лемма 3.9.44. [*Sch 1904] Пусть R — дифференциальная алгебра $R = \mathcal{F}\langle u_i^{(j)}\rangle$, пусть $N \in \mathbb{N}$, и пусть элемент $L \in R((\xi^{-1}))$ имеет вид

$$L = \xi^N + \sum_{i\geqslant 0} u_i\xi^{N-1-i}, \quad u_i \in R. \tag{3.9.45}$$

Тогда существует единственный элемент $L^{1/N} \in R((\xi^{-1}))$ вида

$$L^{1/N} = \xi + \sum_{i\geqslant 0} v_i\xi^{-i}, \quad v_i \in R, \tag{3.9.46}$$

такой, что

$$(L^{1/N})^N = L. \tag{3.9.47}$$

Ассоциированые отображения $R_v \to R_u$ и $R_u \to R_v$ являются изоморфизмами.

Доказательство (в случае, если утверждение не очевидно). В выражении $(L^{1/N})^N$, коэффициент при ξ^{N-1-i} равен $(Nv_i+$ [члены зависящие от v_j при $j<i$]$\}$. ∎

Возвращаясь к уравнению (3.9.36), видим из (3.9.36a), что $\partial_P(F_1) \in R_v[\xi]$, в то время как из (3.9.36b) следует, что $\partial_P(F_1) \in R_v[[\xi^{-1}]]$. Следовательно, $\partial_P(v) = \partial_P(F_1) \in (R_v[\xi] \cap R_v[[\xi^{-1}]]\} = R_v$. Таким образом, дифференцирование ∂_P корректно определено, если использовать *только одно* из определений (3.9.36) или (3.9.37). Чтобы показать, что оба определения приводят к одинаковому результату, используем формулу (2.6.35) и вторую строчку, (b), из обоих определений, что дает

$$\partial_P(v) = (\psi - \varphi)(\pi_{-1}(n)), \tag{3.9.48a}$$

$$\partial_P(-v) = (\varphi - \psi)(\pi_{-1}(n)), \tag{3.9.48b}$$

а это одно и то же. Тем самым (i) доказано;
(ii) Имеем

$$\begin{gathered}(\partial_P\varphi)(L_K) = \partial_P(F_1F_2) = \partial_P(F_1)F_2 + F_1\partial_P(F_2) = \\ = [\varphi(P_+)F_1 - F_1\psi(P_+)]F_2 + F_1[\psi(P_+)F_2 - F_2\varphi(P_+)] = \\ = [\varphi(P_+), F_1F_2] = \varphi([P_+, L_K]) = \varphi\partial_P(L_K) \quad \Rightarrow \\ \partial_P\varphi = \varphi\partial_P. \end{gathered} \tag{3.9.49a}$$

Аналогично,

$$\begin{gathered}(\partial_P\psi)(L_K) = \partial_P(F_2F_1) = \partial_P(F_2)F_1 + F_2\partial_P(F_1) = \\ = [\psi(P_+)F_2 - F_2\varphi(P_+)]F_1 + F_2[\varphi(P_+)F_1 - F_1\psi(P_+)] = \\ = [\psi(P_+), F_2F_1] = \psi([P_+, L_K]) = \psi\partial_P(L_K) \quad \Rightarrow \\ \partial_P\psi = \psi\partial_P, \end{gathered} \tag{3.9.49b}$$

и свойство (ii) доказано;
(iii) Имеем

$$\begin{aligned}\partial_P\partial_Q(F_1) &= \partial_P[\varphi(Q_+)F_1 - F_1\psi(Q_+)] = \\ &\overset{(3.9.49)}{=} \varphi[\partial_P(Q_+)]F_1 + \varphi(Q_+)[\varphi(P_+)F_1 - F_1\psi(P_+)] - \\ &\quad - [\varphi(P_+)F_1 - F_1\psi(P_+)]\psi(Q_+) - F_1\psi[\partial_P(Q_+)],\end{aligned}$$

откуда

$$[\partial_P, \partial_Q](F_1) = \varphi(?)F_1 - F_1\psi(?),$$

где

$$? = \partial_P(Q_+) - \partial_Q(P_+) - [P_+, Q_+], \tag{3.9.50}$$

равно нулю в силу (1.1.44). Свойство (iii) доказано. ∎

Вычислим третий поток МКдФ, отвечающий уравнению КдФ (2.6.8)

$$\partial_{t_3}(h) = [3h^2 + h^{(2)}]^{(1)}. \tag{3.9.51}$$

Согласно формуле (2.6.37), ему соответствует

$$\pi_{-1} = \frac{1}{2}(3h^2 + h^{(2)}).$$

Следовательно, согласно (3.9.48а),

$$\partial_{t_3}(v) = (\psi - \varphi)\Big[\frac{1}{2}(3h^2 + h^{(2)})\Big] \overset{(3.8.34)}{=}$$

$$= \frac{3}{2}[(v^{(1)} - v^2)^2 - (-v^{(1)} - v^2)^2] + \frac{1}{2}\partial^2[(v^{(1)} - v^2) - (-v^{(1)} - v^2)] =$$

$$= -3(v^{(1)}v^2 + v^2v^{(1)}) + v^{(3)},$$

то есть, уравнение МКдФ имеет вид

$$\partial_{t_3}(v) = -3(v^{(1)}v^2 + v^2v^{(1)}) + v^{(3)}. \tag{3.9.52}$$

Сравнивая с 1-компонентной версией уравнения МКдФ (3.9.10−),

$$\partial_{t_3}(p) = p^{(3)} - 3pp^Tp^{(1)} - 3p^{(1)}p^Tp, \tag{3.9.53}$$

видим, что эти два уравнения совпадают только при $p^T = p$, то есть, когда $T = \mathbf{1}$, что случается, когда $\mathcal{F}\langle p^{(j)}\rangle = \mathcal{F}[p^{(j)}]$, то есть, в абелевом случае.

Версия 3. Зафиксируем положительное целое число N, дифференциальную алгебру $R_u = \mathcal{F}\langle u_i^{(j)}\rangle$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, и элемент $\mathcal{L}_N \in R_u((\xi^{-1}))$:

$$\mathcal{L}_N = \xi^N + \sum_{i\geqslant 0} u_i\xi^{N-1-i}. \tag{3.9.54}$$

Случай $N = 1$ отвечает иерархии МКП из §2.1. Для общего N, n-й поток $\mathcal{L}_N$–иерархии имеет вид

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}_N) = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_N^{n/N}), \mathcal{L}_N] = \mathrm{const}_n[\mathcal{L}_N, {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}_N^{n/N})], \tag{3.9.55}$$

где $\mathcal{L}_N^{n/N} = (\mathcal{L}_N^{1/N})^n$, и $\mathcal{L}_N^{1/N}$ есть корень N-й степени из $\mathcal{L}_N$, построенный в Лемме 3.9.44. Согласно этой лемме, отображение $\mathcal{L}_N \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{L} = \mathcal{L}_N^{1/N}$ обратимо. Так как, из n–го потока иерархии МКП

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}], \tag{3.9.56}$$

следует, что

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}^N) = const_n[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}^N], \tag{3.9.57}$$

то иерархии (3.9.55) и (3.9.56) изоморфны. В частности, все потоки $\mathcal{L}_N$–иерархии (3.9.55) коммутируют друг с другом. Кроме того, так как

$$u_0 = Na_0, \tag{3.9.58}$$

то потенциальная $\mathcal{L}_N$–иерархия получается при отображении

$$\mathrm{Pot}(u_0) = -NV^{(1)}V^{-1}, \quad \mathrm{Pot}(u_i) = u_i, \ i > 0. \tag{3.9.59}$$

Соответствующее преобразование Миуры $\overline{\Phi}_N$ тогда равно N-й степени преобразования Миуры (3.1.13), (3.1.21а):

$$\overline{\Phi}_N(L_N) = \bar{L}_N = V^{-1}\,\mathrm{Pot}(\mathcal{L}_N)V, \tag{3.9.60}$$

где

$$L_N = \xi^N + \sum_{i\geqslant 0} v_i \xi^{N-2-i}, \tag{3.9.61}$$

и формула

$$\partial_{t_n}(L_N) = \mathrm{const}_n[(L_N^{n/N})_+, L_N] = \mathrm{const}_n[L_N, (L_N^{n/N})_-] \tag{3.9.62}$$

задает n-й поток в L_N–иерархии, которая есть просто N-я степень иерархии КП из §1.1.

Лемма 3.9.63. Положим

$$\mathcal{L}_{N\ell} = \xi^N + \sum_{i=0}^{N} u_i \xi^{N-1-i}, \quad \mathcal{L}_{Nr} = \sum_{i\geqslant 0} u_{N+1+i}\xi^{-2-i}, \tag{3.9.64a}$$

и пусть $I_{Nr} \subset R_u$ — дифференциальный идеал, порожденный коэффициентами $\mathcal{L}_{Nr}$:

$$I_{Nr} = \mathcal{F}\langle u_i^{(j)}\rangle, \quad i \geqslant N+1, \quad j \geqslant 0. \tag{3.9.64b}$$

Тогда

$$\partial_{t_n}(I_{Nr}) \subset I_{Nr}. \tag{3.9.65}$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{L}_N^{n/N} = \sum_k \xi^k p_k(n). \tag{3.9.66}$$

Тогда из первого равенства в (3.9.55) имеем, игнорируя const_n :

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}_{Nr}) = [\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n), \mathcal{L}_{N\ell} + \mathcal{L}_{Nr}]_{\leq -2} = [\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n), \mathcal{L}_{Nr}]_{\leq -2}, \tag{3.9.67}$$

так как

$$[\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n), \mathcal{L}_{N\ell}]_{\leq -2} = 0. \tag{3.9.68}$$

Из формулы (3.9.67) следует искомое включение (3.9.65). Истинность равенства (3.9.68) можно показать следующим образом:

$$[\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n), \mathcal{L}_{N\ell}]_{\leq -2} = [\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n), \xi^N + \sum_{i=0}^{N} u_i\xi^{N-1-i}]_{\leq -2} =$$

$$= [\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n), u_N\xi^{-1}]_{\leq -2} = [\sum_{k\geqslant 1}\xi^k p_k(n)u_N\xi^{-1} - u_N\xi^{-1}\xi\sum_{k\geqslant 0}\xi^k p_{k+1}(n)]_{\leq -2} = 0. \quad \blacksquare$$

Следовательно, редукция

$$\{u_i = 0 \mid i > N\}, \tag{3.9.69}$$

непротиворечива, и при этой редукции $\mathcal{L}_N$–иерархия (3.9.55) принимает вид

$$\partial_{t_n}('\bar{\mathcal{L}}_N) = \mathrm{const}_n[\,{}_{\geqslant 1}('\bar{\mathcal{L}}_N^{n/N}),\ '\bar{\mathcal{L}}_N] = \mathrm{const}_n['\bar{\mathcal{L}}_N,\ {}_{\leqslant 0}('\bar{\mathcal{L}}_N^{n/N})], \tag{3.9.70}$$

$$'\bar{\mathcal{L}}_N = \xi^N + \sum_{i=0}^{N} u_i\xi^{N-1-i}, \tag{3.9.71}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}[(\mathcal{L}_N)_-] = [\partial_{t_n}(\mathcal{L}_N)]_- = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_N^{n/N}), \mathcal{L}_N]_- = \\ = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_N^{n/N}), (\mathcal{L}_N)_-]_-,\end{aligned} \tag{3.9.72}$$

то имеется также непротиворечивая редукция

$$\{u_i = 0 \mid i \geqslant N\}, \tag{3.9.73}$$

приводящая к $'\mathcal{L}_N$–иерархии

$$\partial_{t_n}('\mathcal{L}_N) = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}('\mathcal{L}_N^{n/N}), '\mathcal{L}_N] = \mathrm{const}_n['\mathcal{L}_N, {}_{\leqslant 0}('\mathcal{L}_N^{n/N})], \tag{3.9.74}$$

$$'\mathcal{L}_N = \xi^N + \sum_{i=0}^{N-1} u_i \xi^{N-1-i}. \tag{3.9.75}$$

Иерархия *Бюргерса* (2.5.5) имеет такой вид, при $N = 1$. Теперь перепишем оператор $'\mathcal{L}_N$ (3.9.75) в *левосторонней* форме:

$$'\mathcal{L}_N = \xi^N + \sum_{i=0}^{N-1} \xi^i \bar{u}_i. \tag{3.9.76}$$

Так как

$$\begin{aligned}\partial_{t_n}(\bar{u}_0) = {}_0[\partial_{t_n}('\mathcal{L}_N)] = (\mathrm{const}_n)\ {}_0[{}_{\geqslant 1}('\mathcal{L}_N^{n/N}), '\mathcal{L}_N] = \\ = (\mathrm{const}_n)\ {}_0\{(-\bar{u}_0)[{}_{\geqslant 1}('\mathcal{L}_N^{n/N})]\},\end{aligned} \tag{3.9.77}$$

то очевидна редукция

$$\bar{u}_0 = 0, \tag{3.9.78}$$

приводящая к $\bar{\mathcal{L}}_N$–иерархии

$$\partial_{t_n}(\bar{\mathcal{L}}_N) = \mathrm{const}_n[{}_{\geqslant 1}(\bar{\mathcal{L}}_N^{n/N}), \bar{\mathcal{L}}_N] = \mathrm{const}_n[\bar{\mathcal{L}}_N, {}_{\leqslant 0}(\bar{\mathcal{L}}_N^{n/N})], \tag{3.9.79}$$

$$\bar{\mathcal{L}}_N = \xi^N + \sum_{i=1}^{N-1} \xi^i \bar{u}_i. \tag{3.9.80}$$

3-я версия иерархии МКдФ связана с оператором $\bar{\mathcal{L}}_2$. Чтобы увидеть, как это происходнт, положим

$$\mathcal{L}_{mK} = \bar{\mathcal{L}}_2 = \xi^2 + 2\xi w. \tag{3.9.81}$$

Потоки (3.9.79) при четных n тривиальны, так как

$${}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_{mK}^{2n/2}) = {}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_{mK}^n) = \mathcal{L}_{mK}^n. \tag{3.9.82}$$

Таким образом, важны только нечетные n. При $n = 1$,

$$\begin{gathered}{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}_{mK}^{1/2}) = \xi \quad \Rightarrow \\ \partial_{t_1}(w) = w^{(1)},\end{gathered} \tag{3.9.83}$$

как и ожидалось. Положив

$$\mathcal{L}_{mK}^{(2n+1)/2} = \sum_k \xi^k p_k(n), \tag{3.9.84}$$

из второго равенства в (3.9.79) получим

$$(\mathrm{const}_{2n+1})^{-1} 2\xi \partial_{t_{2n+1}}(w) = [\xi^2 + 2\xi w, \sum_{k\leqslant 0} \xi^k p_k(n)] = {}_1[\xi^2 + 2\xi w, p_0(n)] =$$

$$= 2\xi(p_0(n)^{(1)} + [w, p_0(n)]) \quad \Rightarrow \tag{3.9.85}$$

$$\partial_{t_{2n+1}}(w) = \mathrm{const}_{2n+1}(\partial + \mathrm{ad}_w)(p_0(n)). \tag{3.9.86}$$

*В*ычислим теперь $p_0(1)$. Имеем,

$$\mathcal{L}_{mK}^{1/2} = \xi + w + \frac{1}{2}(w^{(1)} - w^2)\xi^{-1} - \frac{1}{4}(w^{(2)} - 2w^3)\xi^{-2} + O(\xi^{-3}) \quad \Rightarrow \tag{3.9.87}$$

$$\mathcal{L}_{mK}^{3/2} = \mathcal{L}_{mK}^{1/2}\mathcal{L}_{mK} =$$

$$= \xi^3 + 3\xi^2 w + \frac{3}{2}\xi(w^2 - w^{(1)}) + \frac{1}{4}(w^{(2)} - 2w^3 + 2[w, w^{(1)}]\} + O(\xi^{-1}) \quad \Rightarrow \tag{3.9.88}$$

$$p_0(1) = \frac{1}{4}\{w^{(2)} - 2w^3 + 2[w, w^{(1)}]\}, \tag{3.9.89}$$

и приняв

$$\mathrm{const}_3 = 4 \tag{3.9.90}$$

мы наконец получим желаемую 3-ю версию уравнения МКдФ [2]

$$\partial_{t_3}(w) = (\partial + \mathrm{ad}_w)(w^{(2)} - 2w^3 + 2[w, w^{(1)}]\} = \tag{3.9.91a}$$

$$= w^{(3)} - 6ww^{(1)}w + 3[w, w^{(2)}]. \tag{3.9.91b}$$

Однако, она не совпадает со второй версией МКдФ (3.9.52)!?!?!?

Упражнение 3.9.92. Покажите, что уравнение МКдФ$^{\mathrm{III}}$ (3.9.91) нельзя записать в виде

$$\partial_{t_3}(w) = (\partial - \mathrm{ad}_w)(\ldots). \tag{3.9.93}$$

*В*ычислим преобразование Миуры, ассоциированное с нашей иерархией МКдФ. Применяя Лемму 3.1.9 к уравнению (3.9.86), мы сначала переходим к потенциальной иерархии МКдФ

$$\partial_{t_{2n+1}}(W) = -\,\mathrm{const}_{2n+1}\,\mathrm{Pot}(p_0(n))W, \tag{3.9.94}$$

$$\mathrm{Pot}(w) = -W^{(1)}W^{-1}, \tag{3.9.95}$$

и затем имеем, согласно (3.9.60):

$$\overline{\Phi}_2(L_K) = \overline{\Phi}_2(\xi^2 + h) = W^{-1}\,\mathrm{Pot}(\xi^2 + 2\xi w)W =$$

$$= W^{-1}[W\xi^2 + 2W^{(1)}\xi + W^{(2)} + 2\xi(-W^{(1)}W^{-1})W] =$$

$$= \xi^2 - W^{-1}W^{(2)}. \tag{3.9.96}$$

Итак, искомое преобразование Миуры имеет вид

$$\overline{\Phi}_2(h) = -W^{-1}W^{(2)}. \tag{3.9.97}$$

Утверждение 3.9.98. Преобразование Миуры $\overline{\Phi}_2$ (3.9.97) можно записать в виде

$$\overline{\Phi}_2(h) = W^{-1}\,\mathrm{Pot}(w^{(1)} - w^2)W. \tag{3.9.99}$$

---

[2] В матричном случае введена, по-видимому, в [*KKh 1990]. Многополевые обобщения уравнений КдФ и МКдФ рассматривались в работах [*AFo 1987a, *Svi 1991, *Svi 1993] (прим. перев.).

Доказательство. Надо показать, что

$$-W^{-1}W^{(2)} = W^{-1}\,\mathrm{Pot}(w^{(1)} - w^2)W \quad \Rightarrow \tag{3.9.100}$$

$$\mathrm{Pot}(w^{(1)} - w^2) = -W^{(2)}W^{-1}. \tag{3.9.101}$$

В силу (3.9.95),

$$\mathrm{Pot}(w^{(1)} - w^2) = (-W^{(1)}W^{-1})^{(1)} - (W^{(1)}W^{-1})^2 =$$
$$= -W^{(2)}W^{-1} + W^{(1)}W^{-1}W^{(1)}W^{-1} - W^{(1)}W^{-1}W^{(1)}W^{-1} = -W^{(2)}W^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Сравнивая преобразования Миуры (3.9.34) и (3.9.99), мы видим, что они и вправду различны. Поэтому неудивительно, что и соответствующие иерархии МКдФ тоже различны. Но есть ли между ними хоть какая-нибудь связь?

Упражнение 3.9.102. Покажите, что отображение $w \mapsto -w$ не является симметрией иерархии МКдФ (3.9.86).
[Подсказка: Покажите сначала, что замена $w \mapsto -w$, $\partial \mapsto -\partial$ *является* симметрией.]

Вычислим явно потенциальное уравнение МКдФ (3.9.94) при $n = 1$. Оно имеет вид, согласно формулам (3.9.89) и (3.9.90):

$$\partial_{t_3}(W) = -\,\mathrm{Pot}(w^{(2)} - 2w^3 + 2[w, w^{(1)}])W. \tag{3.9.103}$$

Далее, в силу (3.9.95),

$$\mathrm{Pot}(w^{(1)}) = -W^{(2)}W^{(-1)} + W^{(1)}W^{-1}W^{(1)}W^{-1}, \tag{3.9.104}$$

$$\mathrm{Pot}(w^{(2)}) = -W^{(3)}W^{-1} + 2W^{(2)}W^{-1}W^{(1)}W^{-1} - 2(W^{(1)}W^{-1})^3 +$$
$$+W^{(1)}W^{(-1)}W^{(2)}W^{(-1)} \quad \Rightarrow \tag{3.9.105}$$

$$\partial_{t_3}(W) = W^{(3)} - 3W^{(1)}W^{-1}W^{(2)}. \tag{3.9.106}$$

Имеет ли 2-я версия уравнении МКдФ, (3.9.52), потенциальную форму?

Упражнение 3.9.107. Покажите, что уравнение МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.52),

$$\partial_{t_3}(v) = v^{(3)} - 3(v^{(1)}v^2 + v^2v^{(1)}), \tag{3.9.108}$$

можно записать в следующих формах:

$$\partial_{t_3}(v) = (\partial + \mathrm{ad}_v)(v^{(2)} - 2v^3 - [v, v^{(1)}]), \tag{3.9.109}$$

$$\partial_{t_3}(v) = (\partial - \mathrm{ad}_v)(v^{(2)} - 2v^3 + [v, v^{(1)}]). \tag{3.9.110}$$

Итак, по Теореме 3.1.39, уравнение МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.108) имеет *две* потенциальные формы, связанных с отображениями

$$\mathrm{Pot}_+(v) = U^{(1)}U^{-1}, \tag{3.9.111}$$

$$\mathrm{Pot}_-(v) = -V^{-1}V^{(1)}: \tag{3.9.112}$$

$$\partial_{t_3}(U) = -\,\mathrm{Pot}_+(v^{(2)} - 2v^3 - [v, v^{(1)}])U, \tag{3.9.113}$$

$$\partial_{t_3}(V) = -V\,\mathrm{Pot}_-(v^{(2)} - 2v^3 + [v, v^{(1)}]). \tag{3.9.114}$$

Это становится забавным. Вычислим в явном виде уравнения движения (3.9.113) и (3.9.114). Сравнивая формулы (3.9.103), (3.9.106) и (3.9.113), немедленно находим, что

$$\partial_{t_3}(U) = U^{(3)} - 3U^{(2)}U^{-1}U^{(1)}. \tag{3.9.115}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}_-(v^{(1)}) &= [V^{-1}V^{(1)}]^2 - V^{-1}V^{(2)}, \\ \mathrm{Pot}(v^{(2)}) &= -V^{-1}V^{(3)} - 2(V^{-1}V^{(1)})^3 + 2V^{-1}V^{(1)}V^{-1}V^{(2)} + \\ &\quad + V^{-1}V^{(2)}V^{-1}V^{(1)} \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{3.9.116}$$

$$\partial_{t_3}(V) = V^{(3)} - 3V^{(1)}V^{-1}V^{(2)}. \tag{3.9.117}$$

Становится все забавнее и забавнее. У нас есть два разных уравнения МКдФ, МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.108) и МКдФ$^{\mathrm{III}}$ (3.9.91b); у нас также есть три ассоциированных с ними потенциальных уравнений МКдФ, (3.9.106), (3.9.115), и (3.9.117), из которых два идентичны, а третье является зеркальным образом любого из идентичных близнецов. Что можно сказать об этом?

Прежде чем погружаться в дикие спекуляции, давайте математизируем понятие "зеркального образа".

Рассмотрям дифференциальную алгебру $R_a = \mathcal{F}\langle a_i^{(j)}\rangle$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $\mathcal{Z} : R_a \to R_a$ есть "зеркальная" дифференциальная антиинволюция: $\mathcal{Z}|_{\mathcal{F}} = 1$ и

$$\mathcal{Z}(a_i^{(j)}) = a_i^{(j)}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad \mathcal{Z}(f_1 f_2) = \mathcal{Z}(f_2)(f_1), \quad \forall\, f_1, f_2 \in R_a. \tag{3.9.118}$$

Продолжим $\mathcal{Z}$ на $D^{ev}(R_a)$: если $X \in D^{ev}(R_a)$, то эволюционное дифференцирование $X^{\mathcal{Z}} \in D^{ev}(R_a)$ определим как

$$X^{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}X\mathcal{Z}. \tag{3.9.119}$$

Лемма 3.9.120. (i) $X^{\mathcal{Z}} \in D^{ev}(R_a)$;
(ii) $\mathcal{Z} : D^{ev}(R_a) \to D^{ev}(R_a)$ есть изоморфизм;
(iii) в компонентной форме

$$(X^{\mathcal{Z}})_i = (X^{\mathcal{Z}})(a_i) = \mathcal{Z}(X_i). \tag{3.9.121}$$

Доказательство. (i) имеем, для любых $f_1, f_2 \in R_a$:

$$\begin{aligned} X^{\mathcal{Z}}(f_1 f_2) &= \mathcal{Z}X\mathcal{Z}(f_1 f_2) = \mathcal{Z}X[\mathcal{Z}(f_2)\mathcal{Z}(f_1)] = \mathcal{Z}[X\mathcal{Z}(f_2)\cdot\mathcal{Z}(f_1) + \mathcal{Z}(f_2)\cdot X\mathcal{Z}(f_1)] = \\ &= f_1\mathcal{Z}X\mathcal{Z}(f_2) + \mathcal{Z}X\mathcal{Z}(f_1)\cdot f_2 = f_1 X^{\mathcal{Z}}(f_2) + X^{\mathcal{Z}}(f_1)f_2, \end{aligned}$$

так что $X^{\mathcal{Z}}$ — дифференцирование. Также,

$$[X^{\mathcal{Z}}, \partial] = [\mathcal{Z}X\mathcal{Z}, \partial] = [\mathcal{Z}X\mathcal{Z}, \mathcal{Z}\partial\mathcal{Z}] = \mathcal{Z}[X, \partial]\mathcal{Z} = 0;$$

(iii) Имеем,

$$(X^{\mathcal{Z}})_i = X^{\mathcal{Z}}(a_i) = \mathcal{Z}X\mathcal{Z}(a_i) = \mathcal{Z}X(a_i) = \mathcal{Z}(X_i),$$

что равно (3.9.121);
(ii) Для любых $X, Y \in D^{ev}(R_a)$ имеем:

$$[X, Y]^{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}[X, Y]\mathcal{Z} = [\mathcal{Z}X\mathcal{Z}, \mathcal{Z}Y\mathcal{Z}] = [X^{\mathcal{Z}}, Y^{\mathcal{Z}}], \tag{3.9.122}$$

так что $\mathcal{Z}$ – гомоморфизм алгебры Ли. Формула (3.9.119) показывает, что

$$(X^{\mathcal{Z}})^{\mathcal{Z}} = X, \quad \forall\, X \in D^{ev}(R_a). \quad \blacksquare \tag{3.9.123}$$

(*В* свои семьдесят, леди Монтэгю призналась, что перестала смотреться в зеркало одиннадцать лет назад.)

Добавим еще один ингредиент в МКдФ-овское варево. Подставим

$$U = \bar{U}^{-1} \tag{3.9.124}$$

в уравнение Pot_+–МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.115). Имеем:

$$\begin{gathered}\partial_{t_3}(U) = -\bar{U}^{-1}\partial_{t_3}(\bar{U})\bar{U}^{-1}, \quad U^{(1)} = -\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(1)}\bar{U}^{-1}, \\ U^{(2)} = -\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(2)}\bar{U}^{-1} + 2\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(1)}\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(1)}\bar{U}^{-1}, \\ U^{(3)} = -\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(3)}\bar{U}^{-1} + 3\bar{U}^{-1}(\bar{U}^{(1)}\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(2)} + \bar{U}^{(2)}\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(1)}) - 6(\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(3)})^3\bar{U}^{-1} \quad \Rightarrow \\ \partial_{t_3}(\bar{U}) = \bar{U}^{(3)} - 3\bar{U}^{(1)}\bar{U}^{-1}\bar{U}^{(2)}, \end{gathered} \tag{3.9.125}$$

и это совпадает с уравнением Pot_-–МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.117).

Мы отметили уже достаточно совпадений (причем кажется правдоподобным, что они обобщаются на полные иерархии МКдФ$^{\mathrm{II}}$ и МКдФ$^{\mathrm{III}}$), чтобы сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.9.126. (i) в иерархии МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.48a):

$$\partial_{t_{2n+1}}(v) \in \mathrm{Im}(\partial + \mathrm{ad}_v), \tag{3.9.127}$$

$$\partial_{t_{2n+1}}(v) \in \mathrm{Im}(\partial - \mathrm{ad}_v); \tag{3.9.128}$$

(ii) уравнения Pot_-–МКдФ$^{\mathrm{II}}_{2n+1}$ и Pot_+–МКдФ$^{\mathrm{III}}_{2n+1}$ совпадают;
(iii) уравнения Pot_-–МКдФ$^{\mathrm{II}}_{2n+1}$ и Pot_+–МКдФ$^{\mathrm{II}}_{2n+1}$ являются зеркальными образами друг друга;
(i^4) отображение $U = V^{-1}$ переводит уравнение Pot_+–МКдФ$^{\mathrm{II}}_{2n+1}$ в уравнение Pot_-–МКдФ$^{\mathrm{II}}_{2n+1}$;
(i^5) уравнение МКдФ$^{\mathrm{II}}_{2n+1}$ зеркально-симметрично;
(i^6) отображение $w \mapsto -w$ переводит уравнение МКдФ$^{\mathrm{III}}_{2n+1}$ в его зеркальный образ;
(i^7) уравнение КдФ$_{2n+1}$ зеркально-симметрично.

Прежде чем продолжить, нам нужно установить несколько технических результатов.

Лемма 3.9.129. Пусть $\varphi : R_1 \to R_2$ есть гомоморфизм колец (или $\mathcal{F}$–алгебр), и пусть $T_i : R_i \to R_i$ есть антиинволюции, $i = 1, 2$. Тогда $T_2\varphi T_1$ тоже гомоморфизм.

Доказательство. Для любых $r_1, r_1' \in R_1$ имеем:

$$T_2\varphi T_1(r_1 r_1') = T_2\varphi[T_1(r_1')T_1(r_1)] = T_2[\varphi T_1(r_1') \cdot \varphi T_1(r_1)] = T_2\varphi T_1(r_1) \cdot T_2\varphi T_1(r_1'). \quad \blacksquare$$

Лемма 3.9.130. В обозначениях (3.1.34),

$$\mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_\varepsilon = \mathrm{Pot}_{-\varepsilon}\,\mathcal{Z} \ : \ R_{va} \to R_{Va}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{3.9.131}$$

Доказательство. Нужно проверить, что

$$\mathrm{Pot}_\varepsilon = \mathcal{Z}^{-1}\,\mathrm{Pot}_{-\varepsilon}\,\mathcal{Z}. \tag{3.9.132}$$

В силу Леммы 3.9.129, обе части (3.9.132) являются дифференциальными гомоморфизмами. Поэтому достаточно сравнить, как каждая из них действует на образующие a_i, $i \in \mathbb{Z}_+$, и v. Действие на a_i тождественно, в то время как

$$\mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_-\,\mathcal{Z}(v) = \mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_-(v) = \mathcal{Z}(-V^{-1}V^{(1)}) = -V^{(1)}V^{-1} = \mathrm{Pot}_+(v).$$

Итак, $\mathrm{Pot}_+ = \mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_-\,\mathcal{Z}$, откуда $\mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_+\,\mathcal{Z} = \mathrm{Pot}_-$. $\blacksquare$

Лемма 3.9.133. В обозначениях (3.1.40),

$$\operatorname{Im}\mathrm{Pot}_- = \operatorname{Im}\mathrm{Pot}_+ \quad \text{в} \quad D^{ev}(R_V). \tag{3.9.134}$$

Доказательство. Необходимо показать, что существует пара отображений $\sigma_\varepsilon : R_v \to R_v$ таких, что 3.9.135

$$\mathrm{Pot}_+(x)V = V\,\mathrm{Pot}_-\,\sigma_+(x), \quad \forall\, x \in R_v, \tag{3.9.135+}$$

$$V\,\mathrm{Pot}_-(x) = \mathrm{Pot}_+\,\sigma_-(x)V, \quad \forall\, x \in R_v, \tag{3.9.135−}$$

так, что если σ_ε обратимо, мы можем взять

$$\sigma_\varepsilon = (\sigma_{-\varepsilon})^{-1}. \tag{3.9.136}$$

Фактически, мы построим гомоморфизм σ_+, но *не дифференциальный*. Применяя $\mathcal{Z}$ к (3.9.135+) и используя (3.9.131) получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathrm{Pot}_+(x)V) &= V\,\mathrm{Pot}_-\,\mathcal{Z}(x) = \mathcal{Z}(V\,\mathrm{Pot}_-\,\sigma_+(x)) = \mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_-\,\sigma_+(x)V = \\ &= \mathrm{Pot}_+\,\mathcal{Z}\sigma_+(x)V \quad \Rightarrow \quad \sigma_- = \mathcal{Z}\sigma_+\mathcal{Z} \end{aligned} \tag{3.9.137}$$

удовлетворяет (3.9.135−). Следовательно, нужно только найти гомоморфизм $\sigma = \sigma_+ : R_v \to R_v$ такой, что

$$V^{-1}\,\mathrm{Pot}_+(x)V = \mathrm{Pot}_-\,\sigma(x), \quad \forall\, x \in R_v. \tag{3.9.138}$$

Так как Pot_ε — гомоморфязм яз R_v в R_v, то очевидно, что если равенство (3.9.138) вынолняется для $x = x_1$ и $x = x_2$, то оно верно и для $x = x_1x_2$ с $\sigma(x_1x_2) = \sigma(x_1)\sigma(x_2)$. Таким образом, надо лишь определить $\sigma(v^{(n)})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. При $n = 0$ имеем:

$$V^{-1}\,\mathrm{Pot}_+(-v)V = V^{-1}(V^{(1)}V^{-1})V = \mathrm{Pot}_-(-v),$$

так что

$$\sigma(v) = v. \tag{3.9.139}$$

Теперь определим последовательность элементов $Q^\ell_n = Q^\ell_n(\theta)$, $Q^r_n = Q^r_n(\theta) \in R_\theta = \mathcal{F}(\theta^{(j)})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, по правилам

$$Q^\ell_0 = Q^r_0 = 1, \tag{3.9.140}$$

$$Q^\ell_{n+1} = (\partial + \widehat{R}_\theta)(Q^\ell_n), \tag{3.9.140ℓ}$$

$$Q^r_{n+1} = (\partial + \widehat{L}_\theta)(Q^r_n). \tag{3.9.140r}$$

Лемма 3.9.141. (i) если

$$V^{(1)} = \theta V, \tag{3.9.141a}$$

то

$$V^{(n)} = Q^\ell_n V, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \tag{3.9.141b}$$

(ii) еслн

$$V^{(1)} = V\theta, \tag{3.9.142a}$$

то

$$V^{(n)} = VQ^r_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.9.142b}$$

Доказательство. (i) при $n = 0$, из (3.9.140ℓ) следует

$$Q^{\ell}_1 = \theta, \tag{3.9.143}$$

что совпадает с (3.9.141a). Проводя индукцию по n, применим ∂ к (3.9.141b):

$$V^{(n+1)} = \partial(V^{(n)}) = \partial(Q^{\ell}_n V) = [\partial(Q^{\ell}_n) + Q^{\ell}_n\theta]V \overset{(3.9.140\ell)}{=} Q^{\ell}_{n+1}V,$$

что доказывает (3.9.141b);
(ii) Применяя зеркальную симметрию Z к (3.9.140), находим

$$Q^{r}_n = Z(Q^{\ell}_n), \tag{3.9.144}$$

и тогда формулы (3.9.142) следуют из формул (3.9.141) после применения зеркального отображения Z. ∎

Лемма 3.9.145. Из равенств (3.9.141a) и (3.9.142a) следует, соответственно, что

$$(V^{-1})^{(n)} = V^{-1}Q^{r}_n(-\theta), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.9.146}$$

$$(V^{-1})^{(n)} = Q^{\ell}_n(-\theta)V^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.9.147}$$

Доказательство. (i) если $V^{(1)} = \theta V$, то

$$(V^{-1})^{(1)} = -V^{-1}V^{(1)}V^{-1} = -V^{-1}\theta, \tag{3.9.148}$$

и (3.9.146) следует из (3.9.142) ;
(ii) Аналогично, если $V^{(1)} = V\theta$, то

$$(V^{-1})^{(1)} = -\theta V^{-1}, \tag{3.9.149}$$

и (3.9.147) следует из (3.9.141). ∎

Лемма 3.9.150. Для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$V^{-1}(V^{(1)}V^{-1})^{(n)}V = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} Q^{r}_{\alpha}(\theta)\theta^{(\beta)}Q^{\ell}_{\gamma}(-\theta)\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}, \ \theta = V^{-1}V^{(1)}. \tag{3.9.151}$$

Доказательство. Обозначим $\bar{\theta} = V^{(1)}V^{-1}$, $\theta = V^{-1}V^{(1)} = V^{-1}\bar{\theta}V$. Тогда

$$V^{-1}(V^{(1)}V^{-1})^{(n)}V = V^{-1}(V\theta V^{-1})^{(n)}V =$$

$$= V^{-1}\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} V^{(\alpha)}\theta^{(\beta)}(V^{-1})^{(\gamma)}\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}V \overset{(3.9.142b), (3.9.147)}{=}$$

$$= \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} Q^{r}_{\alpha}(\theta)\theta^{(\beta)}Q^{\ell}_{\gamma}(-\theta)\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}.$$ ∎

Сравнивая формулы (3.9.151) и (3.9.138) находим, что

$$\sigma_+(v^{(n)}) = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} Q^{r}_{\alpha}(-v)v^{(\beta)}Q^{\ell}_{\gamma}(v)\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}. \tag{3.9.152}$$

Этим доказано существование σ_+. Далее, правая часть (3.9.152) имеет вид

$$v^{(n)} + \{\text{члены, зависящие от } v^{(j)} \text{ при } j < n\}. \tag{3.9.153}$$

Отсюда, σ_+ обратимо. Так как отображение $\mathrm{Pot}_{\varepsilon}$ инъективно, то отображение σ_{ε}, если оно существует, единственно. Это доказывает формулы (3.9.136) и (3.9.137). ∎

Доказательство. Теоремы 3.9.126. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим через ∂_t соответствующие эволюционные производные $\partial_{t_{2n+1}}$ во всех рассматриваемых алгебрах.

Согласно формуле (3.9.86), уравнение МКдФ$^{\mathrm{III}}$ (3.9.86) имеет вид

$$\partial_t(w) = (\partial + \mathrm{ad}_w)(p), \quad \text{с некоторым } p. \tag{3.9.154}$$

Следовательно, в силу Леммы 3.1.9, уравнение Pot-МКдФ$^{\mathrm{III}}$ имеет вид

$$\partial_t(W) = -\operatorname{Pot}_+(p)W. \tag{3.9.155}$$

Согласно Лемме 3.9.133, это уравнение можно также записать в виде

$$\partial_t(W) = -W\operatorname{Pot}_-\sigma_+(p); \tag{3.9.156}$$

в силу формулы (3.1.42), оно связано гомоморфизмом Pot_- с уравнением

$$\partial_t(w) = (\partial - \mathrm{ad}_w)(\sigma_+(p)). \tag{3.9.157}$$

Преобразование Миуры $\overline{\Phi}_2 : R_h \to R_W$ (3.9.97) переводит поток КдФ

$$\partial_t(h) = \partial(\dots) \tag{3.9.158}$$

в поток Pot-МКдФ$^{\mathrm{III}}$ (3.9.156). Далее,

$$\overline{\Phi}_2(h) = -W^{-1}W^{(2)} = [-W^{-1}W^{(1)}]^{(1)} - [-W^{-1}W^{(1)}]^2 = \operatorname{Pot}_-(w^{(1)} - w^2), \tag{3.9.159}$$

так что, в силу (3.9.34),

$$\overline{\Phi}_2 = \operatorname{Pot}_-\psi, \tag{3.9.160}$$

где $\psi : R_h \to R_w$, $\psi(h) = w^{(1)} - w^2$, есть одно из двух преобразований Миуры, ассоциированных с уравнением МКдФ$^{\mathrm{III}}$. Так как отображения Pot_- и ψ инъективны, то поток КдФ (3.9.158) и поток (3.9.157) связаны отображением ψ. Но ψ связывает этот поток КдФ также с потоком МКдФ$^{\mathrm{II}}$ (3.9.48a). Тогда, в силу следующей Леммы, эти потоки МКдФ совпадают, то есть

$$(\partial - \mathrm{ad}_w)\sigma_+(\partial + \mathrm{ad}_w)^{-1}(\text{МКдФ}^{\mathrm{III}}) = \text{МКдФ}^{\mathrm{II}}. \tag{3.9.161}$$

Лемма 3.9.162. Если ψ связывает эволюционные дифференцирования $Z \in D^{ev}(R_w)$ и $0 \in D^{ev}(R_h)$, то $Z = 0$.

Доказательство. Имеем

$$0 = Z(w^{(1)} - w^2) = \partial(Z(w)) - wZ(w) - Z(w)w. \tag{3.9.163}$$

Если $Z(w) \notin \mathcal{F}$, то любое вхождение $w^{(j)}$, старшей производной от w, в $Z(w)$, превращается в $w^{(j+1)}$ в $\partial(Z(w))$, и не может быть скомпенсировано никаким другим членом в выражениях $\partial(Z(w))$, $wZ(w)$ и $Z(w)w$; приходим к противоречию. Следовательно, $Z(w) \in \mathcal{F}$ и значит $Z(w) = 0$. ∎

Это доказывает (ii) и (3.9.128);

Согласно (3.9.39), поток МКдФ$^{\mathrm{II}}$ инвариантен относительно автоморфизма $v \mapsto -v$. Следовательно, из (3.9.128) следует (3.9.127), и (i) доказано;

(i^7) В силу формулы (3.9.11),

$$Z(L_K) = L_K, \quad L_K = \xi^2 + h. \tag{3.9.164}$$

Следовательно,

$$\mathcal{Z}(L_K^{1/2}) = L_K^{1/2}, \tag{3.9.165}$$

так как и $L_K^{1/2}$ и $\mathcal{Z}(L_K^{1/2})$ имеют вид $\xi + O(\xi^{-1})$ и удовлетворяют уравнению $(\dots)^2 = L_K$. Следовательно, уравнение КдФ$_{2n+1}$

$$\partial_t(L_K) = \mathrm{const}[((L_K^{1/2})^{2n+1})_+, L_K]$$

зеркально-симметрично и (i^7) доказано;

(i^5) Так как уравнение КдФ$_{2n+1}$ имеет вид (2.6.35):

$$\partial_t(h) = \partial[\mathrm{const}\,\pi_{-1}(n)],$$

то $\pi_{-1}(n)$ зеркально-симметрично. Так как отображения φ и ψ (3.9.34) зеркально-симметричны, то и уравнение МКдФ$^{\Pi}$ (3.9.48a) тоже зеркально-симметрично; (i^5) доказано.

Лемма 3.9.166. Допустим, Pot_ε связывает $X \in D^{ev}(R_v)$ и $X' \in D^{ev}(R_V)$. Тогда

$$(X^{\mathcal{Z}})' = (X')^{\mathcal{Z}}, \tag{3.9.167}$$

и Pot_ε связывает эволюционные поля $X^{\mathcal{Z}}$ и $(X')^{\mathcal{Z}}$.

Доказательство. Если X таково, что

$$\partial_t(v) = (\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(x), \quad x \in R_v, \tag{3.9.168}$$

то X' имеет вид, согласно (3.1.40);

$$\partial_t(V) = -\,\mathrm{Pot}_+(x)V, \qquad \varepsilon = 1, \qquad \mathrm{Pot}_+(v) = -V^{(1)}V^{-1}, \tag{3.9.169+}$$

$$\partial_t(V) = -V\,\mathrm{Pot}_-(x), \qquad \varepsilon = -1, \qquad \mathrm{Pot}_-(v) = -V^{-1}V^{(1)}. \tag{3.9.169−}$$

Так как, в силу (3.9.119), $X^{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}X\mathcal{Z}$, то для $X^{\mathcal{Z}}$ имеем:

$$\partial_t(v) = X^{\mathcal{Z}}(v) = \mathcal{Z}X\mathcal{Z}(v) = \mathcal{Z}X(v) = \mathcal{Z}(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(x) = (\partial - \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(\mathcal{Z}(x)). \tag{3.9.170}$$

Следовательно, $(X^{\mathcal{Z}})'$ имеет вид

$$\partial_t(V) = -V\,\mathrm{Pot}_-\,\mathcal{Z}(x), \quad \varepsilon = 1, \tag{3.9.171+}$$

$$\partial_t(V) = -\,\mathrm{Pot}_+\,\mathcal{Z}(x)V, \quad \varepsilon = -1. \tag{3.9.171−}$$

Аналогично, из (3.9.169), $(X')^{\mathcal{Z}}$ имеет вид

$$\partial_t(V) = -V\mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_+(x), \quad \varepsilon = 1, \tag{3.9.172+}$$

$$\partial_t(V) = -\mathcal{Z}\,\mathrm{Pot}_-(x)V, \quad \varepsilon = -1. \tag{3.9.172−}$$

В силу формулы (3.9.131) имеем $\{(3.9.171) = (3.9.172)\}$. Этим (3.9.167) доказано. Из (3.9.170) следует, что $\mathrm{Pot}_{-\varepsilon}$ связывает $X^{\mathcal{Z}}$ и $(X^{\mathcal{Z}})' = (X')^{\mathcal{Z}}$. ▮

(iii) Если X — эволюционное дифференцирование МКдФ$^{\mathrm{II}}$, то, согласно (i^5), $X^{\mathcal{Z}} = X$. Следовательно, по Лемме 3.9.166, $(X'_\varepsilon)^{\mathcal{Z}} = (X^{\mathcal{Z}})' = (X_{-\varepsilon})'$, что доказывает (iii);

(i^4) уравнение МКдФ$^{\mathrm{II}}$ имеет, согласно (i), вид

$$\partial_t(v) = (\partial + \mathrm{ad}_v)(x) = (\partial - \mathrm{ad}_v)(y),$$

при некоторых $x, y \in R_v$. Следовательно, по (3.1.40) два уравнения Pot–МКдФ$^{\text{II}}$ имеют вид:

$$\partial_t(U) = -\operatorname{Pot}_+(x)U, \quad \operatorname{Pot}_+(v) = -U^{(1)}U^{-1}, \tag{3.9.173+}$$

$$\partial_t(V) = -V\operatorname{Pot}_-(y), \quad \operatorname{Pot}_-(v) = -V^{-1}V^{(1)}. \tag{3.9.173−}$$

Если положить $U = \bar{U}^{-1}$, то Pot$_+$–уравнение (3.9.173+) принимает вид

$$\partial_t(\bar{U}) = \bar{U}\operatorname{Pot}_+(x), \tag{3.9.174a}$$

$$\operatorname{Pot}_+(v) = -(\bar{U}^{-1})^{(1)}\bar{U} = \bar{U}^{-1}\bar{U}^{(1)}. \tag{3.9.174b}$$

С другой стороны, из (3.9.39) имеем

$$y(v) = -x(-v) = -x(\bar{v}), \tag{3.9.175}$$

где

$$\bar{v} = -v. \tag{3.9.176}$$

Следовательно,

$$\partial_t(V) = -V\operatorname{Pot}_-(-x(\bar{v})) = V\operatorname{Pot}_-\, x(\bar{v}), \quad \operatorname{Pot}_-(\bar{v}) = V^{-1}V^{(1)}. \tag{3.9.177}$$

Наконец

$$\operatorname{Pot}_+(v) = \operatorname{Pot}_+(-\bar{v}) = -\operatorname{Pot}_+(\bar{v}) \overset{(3.9.174b)}{=} \bar{U}^{-1}\bar{U}^{(1)}. \tag{3.9.178}$$

Сравнивая (3.9.173−), в форме (3.9.177), с {(3.9.174a) & (3.9.178)} мы видим, что они будут изоморфны, если отождествить v с $\bar{v}$ и $\bar{U}$ с V. Это доказывает (i^4);

(i^6) Приведенные рассуждения показывают, что замена w на $-w$ в уравнении

$$\partial_t(w) = (\partial + \varepsilon\, \mathrm{ad}_w)(x) \tag{3.9.179}$$

отвечает замене W на W^{-1} в соответствующем Pot$_\varepsilon$–уравнении. Согласно (ii) и (iii), если (3.9.179) есть уравнение МКдФ$^{\text{III}}$, то эта замена W на W^{-1} есть то же самое, что зеркальная симметрия в пространстве W. По Лемме 3.9.166, замена w на $-w$ тогда сводится к зеркальной симметрии в w–пространстве. Это доказывает (i^6) и Теорему 3.9.126. ▮

[“Этот мир и еще следующий — и тогда *все* наши невзгоды будут позади.” (Тетушка генерала Гордона.)]

Упражнение 3.9.180. Покажите, что две версии иерархии Бюргерса, (2.5.12) и (2.5.28), являются зеркальными образами друг друга.

Упражнение 3.9.181. Покажите, что связь

$$\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\text{const}} \tag{3.9.182}$$

совместна с любым потоком с нечетным номером из иерархии НУШ (3.5.4), и затем, что $h = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$ удовлетворяет соответствующему уравнению КдФ.

Упражнение 3.9.183. Покажите, что, для Pot-уравнения МКдФ (3.9.115),

$$\partial_t(U^{\pm 2}) \not\sim 0 \tag{3.9.184}$$

если только U, $U^{(1)}$, и $U^{(2)}$ не коммутируют между собой.

Упражнение 3.9.185. Пусть R дифференциальное кольцо, и отображение $I : R^3 \to R$ определено следующим образом: если $\mathcal{O} \in R[\xi]$ — оператор порядка 2,

$$\mathcal{O} = a\xi^2 + b\xi + c, \quad a, b, c \in R, \tag{3.9.186}$$

то

$$I(\mathcal{O}) = I(a,b,c) = a[a^{-1}c - (a^{-1}b)^2/2 - (a^{-1}b)^{(1)}/2]a^{-1} = \tag{3.9.187a}$$
$$= ca^{-1} - (ba^{-1})^2/2 - (ba^{-1})^{(1)}/2 + [a^{(1)}a^{-1}, ba^{-1}]/2. \tag{3.9.187b}$$

Покажите, что, для всех $f \in R$,

$$I(f\mathcal{O}) = fI(\mathcal{O})f^{-1}, \tag{3.9.188a}$$
$$I(\mathcal{O}f) = I(\mathcal{O}). \tag{3.9.188b}$$

Упражнение 3.9.189. Пусть

$$(\partial^2 + \widehat{L}_u)(\varphi_1) = \lambda\varphi_1, \tag{3.9.190ℓ}$$
$$(\partial^2 + \widehat{R}_u)(\varphi_2) = \lambda\varphi_2, \quad \lambda \in \mathcal{F}. \tag{3.9.190r}$$

Определим вронскиан φ_1 и φ_2 по правилу

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2\varphi_1^{(1)} - \varphi_2^{(1)}\varphi_1. \tag{3.9.191}$$

Покажите, что

$$\partial[W(\varphi_1, \varphi_2)] = 0. \tag{3.9.192}$$

Упражнение 3.9.193. Покажите, что не существует неабелевого аналога вронскиана для собственных функций дифференциальных операторов 3-го порядка.

Упражнение 3.9.194. Покажите, что при подходящем выборе постоянных, n-й поток иерархии КдФ имеет квазиклассический предел

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = \partial(h^{n+1}), \tag{3.9.195}$$

тогда как соответствующее уравнение МКдФ$^{\text{II}}$ имеет квазиклассический предел

$$\partial_{t_{2n+1}}(v) = -\sum_{k=0}^{n} v^{2k}v^{(1)}v^{2(n-k)}. \tag{3.9.196}$$

Упражнение 3.9.197. (i) Покажите, что для любого $\theta \in \mathcal{F}[v]$ или $\mathcal{F}[[v]]$, эволюционные уравнения (3.9.195) и

$$\partial_{t_{2n+1}}(v) = \sum_{k=0}^{n} \theta^k v^{(1)} \theta^{n-k} \tag{3.9.198}$$

связаны отображением $\Phi : R_h \to R_v$,

$$\Phi(h) = \theta; \tag{3.9.199}$$

(ii) Покажите, что потоки (3.9.198) коммутируют между собой для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Обратимся к гамильтоновым аспектам. Это означает, что мы специализируем все наши абстрактные неабелевы переменные, считая их $\mathcal{A}$-значными, где $\mathcal{A}$ ассоциативная невырожденная алгебра с фиксированным ортонормальным базисом. Для краткости, опустим все атрибуты $\mathcal{A}$ из обозначений, — мы уже достаточно повидали, чтобы вспомнить о них, когда потребуется.

Начнем с иерархии КдФ (2.6.34). При

$$L_K^{(2n+1)/2} = \sum_k \xi^k \pi_k(n), \quad H_n = Tr\,\mathrm{Res}(L_K^{(2n+1)/2})/[(2n+1)/2], \quad L_K = \xi^2 + h,$$

$$\partial_{t_{2n+1}}(L_K) = \overline{\mathrm{const}}_n[(L_K^{(2n+1)/2})_+, L_K] = \overline{\mathrm{const}}_n[L_K, (L_K^{(2n+1)/2})_-],$$

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = \overline{\mathrm{const}}_n 2\pi_{-1}(n)^{(1)}, \tag{3.9.200}$$

имеем

$$d(H_{n+1}) \sim Tr\,\mathrm{Res}(L^{(2n+1)/2}dL) \sim (\pi_{-1}(n), dh), \tag{3.9.201}$$

откуда

$$\pi_{-1}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta h}. \tag{3.9.202}$$

Подставляя это в (3.9.200) и (2.6.48), получаем

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = 2\overline{\mathrm{const}}_n\partial\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta h}\Big) = \tag{3.9.203I}$$

$$= 2^{-1}\overline{\mathrm{const}}_n[\partial^3 + (\widehat{L}_h + \widehat{R}_h)\partial + \partial(\widehat{L}_h + \widehat{R}_h) + \mathrm{ad}_h\,\partial^{-1}\,\mathrm{ad}_h]\Big(\frac{\delta H_n}{\delta h}\Big). \tag{3.9.203II}$$

Эти формулы задают первую и вторую гамильтоновы формы иерархии КдФ, причем вторая нелокальна.

Рассмотрим теперь иерархию МКдФ$^{\mathrm{III}}$ (3.9.86). При

$$H_n = Tr\,\mathrm{Res}(\mathcal{L}_{mK}^{(2n+1)/2})/[(2n+1)/2], \tag{3.9.204}$$

имеем

$$d(H_{n+1}) \sim Tr\,\mathrm{Res}[(d\mathcal{L}_{mK})\mathcal{L}_{mK}^{(2n+1)/2}] = Tr\,\mathrm{Res}[2\xi dw \sum \xi^k p_k(n)] \sim$$

$$\sim 2\,Tr\,\mathrm{Res}[dw \sum \xi^k p_k(n)\xi] = 2(dw, p_2(n) - p_{-1}(n)^{(1)}), \tag{3.9.205}$$

так что

$$p_{-2}(n) - \partial(p_{-1}(n)) = \frac{1}{2}\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}. \tag{3.9.206}$$

Уравнение движения (3.9.86), при $\mathrm{const}_{2n+1} = 1$, имеет вид

$$\partial_{t_{2n+1}}(w) = (\partial + \mathrm{ad}_w)(p_0(n)). \tag{3.9.207}$$

Чтобы связать последние два выражения, соберем коэффициенты при ξ^0 и ξ^{-1} в двойном тождестве

$$\mathcal{L}_{mK}^{(2n+3)/2} = \mathcal{L}_{mK}^{(2n+1)/2}\mathcal{L}_{mK} = \mathcal{L}_{mK}\mathcal{L}_{mK}^{(2n+1)/2}: \tag{3.9.208}$$

$$\sum \xi^k p_k(n+1) = \sum \xi^k p_k(n)(\xi^2 + 2\xi w) = (\xi^2 + 2\xi w)\sum \xi^k p_k(n): \tag{3.9.209}$$

$$p_0(n+1) = p_{-2}(n) - 2\partial(p_{-1}(n)) + \partial^2(p_0(n)) + \\ + 2p_{-1}(n)w - 2\partial(p_0(n))w, \tag{3.9.210a}$$

$$p_0(n+1) = p_{-2}(n) + 2wp_{-1}(n), \tag{3.9.210b}$$

$$p_{-1}(n+1) = p_{-3}(n) - 2\partial(p_{-2}(n)) + \partial^2(p_{-1}(n)) + \\ + 2p_{-2}(n)w - 2\partial(p_{-1}(n))w, \tag{3.9.211a}$$

$$p_{-1}(n+1) = p_{-3}(n) + 2wp_{-2}(n) + 2w^{(1)}p_{-1}(n). \tag{3.9.211b}$$

Из (3.9.211) находим

$$w^{(1)}p_{-1}(n) + p_{-1}(n)^{(1)}w = \frac{1}{2}\partial^2(p_{-1}(n)) - \partial(p_{-2}(n)) + [p_{-2}(n), w]. \tag{3.9.212}$$

Подставив (3.9.206) в виде

$$p_{-2}(n) = \partial(p_{-1}(n)) + \frac{1}{2}\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w} \tag{3.9.213}$$

в (3.9.212), получим

$$w^{(1)}p_{-1}(n) + p_{-1}(n)^{(1)}w = \frac{1}{2}\partial^2(p_{-1}(n)) - \partial^2(p_{-1}(n)) - \frac{1}{2}\partial\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}\Big) + \\ + p_{-1}(n)^{(1)}w - wp_{-1}(n)^{(1)} + \frac{1}{2}[\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}, w] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\partial^2(p_{-1}(n)) + \partial(wp_{-1}(n)) = -\frac{1}{2}(\partial + \mathrm{ad}_w)\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}\Big) \quad \Leftrightarrow \tag{3.9.214}$$

$$(\partial + \widehat{L}_{2w})(p_{-1}(n)) = -\partial^{-1}(\partial + \mathrm{ad}_w)\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}\Big). \tag{3.9.215}$$

Подстановка (3.9.213) в (3.9.210b) дает

$$p_0(n+1) = \frac{1}{2}\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w} + \partial(p_{-1}(n)) + 2wp_{-1} \overset{(3.9.215)}{=} \\ = -\partial^{-1}(\frac{1}{2}\partial + \mathrm{ad}_w)(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}). \tag{3.9.216}$$

Подставляя это в (3.9.207), получаем

$$\partial_{t_{2n+1}}(w) = -(\partial + \mathrm{ad}_w)\partial^{-1}(\frac{1}{2}\partial + \mathrm{ad}_w)\Big(\frac{\delta H_n}{\delta w}\Big). \tag{3.9.217}$$

Это было бы 2-й (нелокальной) гамильтоновой формой иерархии МКдФ$^{\mathrm{III}}$, если бы не выражение $(\partial + \mathrm{ad}_w)\partial^{-1}(\frac{1}{2}\partial + \mathrm{ad}_w)$, которое кососимметрично лишь в абелевом случае, когда (3.9.217) принимает вид

$$\partial_{t_{2n+1}}(w) = -\frac{1}{2}\partial\Big(\frac{\delta H_n}{\delta w}\Big). \tag{3.9.218}$$

Давайте посмотрим, можем ли мы лучше справиться с первой гамильтоновой структурой. Из (3.9.209) находим

$$(\partial - \widehat{R}_{2w})\partial(p_0(n)) = 2(\partial + \mathrm{ad}_w)(p_{-1}(n)), \tag{3.9.219}$$

откуда

$$p_0(n) = \partial^{-1}(\partial - \widehat{R}_{2w})^{-1}2(\partial + \mathrm{ad}_w)(p_{-1}(n)). \tag{3.9.220}$$

Подставляя (3.9.215) в (3.9.220), имеем

$$p_0(n) = -2\partial^{-1}(\partial - \widehat{R}_{2w})^{-1}(\partial + \widehat{L}_{2w})^{-1}\partial^{-1}(\partial + \mathrm{ad}_w)\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}\Big). \tag{3.9.221}$$

Подставляя это в (3.9.207), получаем окончательно чудовищное нагромождение:

$$\partial_{t_{2n+1}}(w) =$$
$$= -2(\partial + \mathrm{ad}_w)\partial^{-1}(\partial - \widehat{R}_{2w})^{-1}(\partial + \mathrm{ad}_w)(\partial + \widehat{L}_{2w})^{-1}\partial^{-1}(\partial + \mathrm{ad}_w)\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}\Big). \tag{3.9.222}$$

В абелевом случае эта формула принимает знакомый вид

$$\partial_{t_{2n+1}}(w) = -2(\partial - 2w)^{-1}\partial(\partial + 2w)^{-1}\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta w}\Big). \tag{3.9.223}$$

Упражнение 3.9.224. Пусть R — дифференциальное кольцо (или $\mathcal{F}$–алгебра) с дифференциальной антиинволюцией $T : R \to R$. Рассмотрим следующее отображение $T\dagger : R((\xi^{-1})) \to R((\xi^{-1}))$:

$$\Big(\sum \bar{r}_\mu \xi^\mu\Big)^{T\dagger} = \sum(-\xi)^\mu T(\bar{r}_\mu). \tag{3.9.225}$$

(i) Покажите, что

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)^{T\dagger} = \mathcal{O}_2^{T\dagger}\mathcal{O}_1^{T\dagger}, \quad \forall\ \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in R((\xi^{-1})); \tag{3.9.226}$$

(ii) Пусть, в $R_h = \mathcal{F}\langle h^{(j)}\rangle$, T определено как

$$T(h) = h. \tag{3.9.227}$$

Покажите, что

$$(\xi^2 + h)^{T\dagger} = \xi^2 + h, \tag{3.9.228}$$

и выведите отсюда Теорему 3.9.126 (i^7);
(iii) Пусть, в $R_w = \mathcal{F}\langle w^{(j)}\rangle$, T определено как

$$T(w) = -w. \tag{3.9.229}$$

Покажите, что

$$(\xi^2 + \xi w)^{T\dagger} = \xi^2 + w\xi, \tag{3.9.230}$$

и выведите отсюда Теорему 3.9.126 (i^6).

Из тьмы веков доносится универсальный мотив лимерика.

3.10 Факторизованное КП, или МКП$^{\mathrm{II}}$

В §3.9, иерархия МКдФ$^{\mathrm{II}}$ была получена при факторизации оператора Лакса для КдФ $L_K = \xi^2 + h$. Попытаемся факторизовать оператор Лакса (1.1.14) для КП,

$$L = \xi + \sum_{i \geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}. \tag{3.10.1}$$

При сравнении со случаем КдФ, здесь есть две особенности: 1) элемент L (3.10.1) имеет псевдодифференциальный хвост, то есть, строго говоря, это не “оператор” (не элемент из $R[\xi]$). 2) порядок L, то есть старшая степень по ξ, равен 1, и поэтому не ясно, что вообще означает “факторизация”.

Мы поступим следующим образом. Положим

$$R_{v\chi} = \mathcal{F}\langle v^{(j)}, \chi_{s+1}^{(j)} \rangle, \quad s, j \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.10.2}$$

и пусть

$$F_1 = \xi + v, \quad F_2 = 1 + \sum_{s \geqslant 0} \chi_s \xi^{-s-1}, \tag{3.10.3a}$$

$$\chi_0 = -v, \tag{3.10.3b}$$

будут два элемента из $R_{v\chi}((\xi^{-1}))$, а $\varphi_1, \varphi_2 : R_A \to R_{v\chi}$ будут следующими гомоморфизмами:

$$\varphi_1(L) = F_1 F_2, \qquad \varphi_2(L) = F_2 F_1. \tag{3.10.4}$$

Условие (3.10.3b) гарантирует, что φ_1 и φ_2 определены корректно. Далее мы продолжим, как в §3.9 после формулы (3.9.34).

Выберем $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и обозначим, как в §1.1,

$$P = L^{n_1}, \quad Q = L^{n_2}, \quad \partial_P = \partial_{t_{n_1}}, \quad \partial_Q = \partial_{t_{n_2}}, \tag{3.10.5}$$

где ∂_P и ∂_Q — эволюционные дифференцирования в R_A, заданные равенствами

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \tag{3.10.6}$$

и аналогично для Q; мы положили $\mathrm{const}_n = 1$ для упрощения обозначений. Определим следующее эволюционное дифференцирование в алгебре $R_{v\chi}$:

$$\partial_P(F_1) = \ \varphi_1(P_+)F_1 - F_1\varphi_2(P_+) = \tag{3.10.7a}$$

$$= -\varphi_1(P_-)F_1 + F_1\varphi_2(P_-), \tag{3.10.7b}$$

$$\partial_P(F_2) = \ \varphi_2(P_+)F_2 - F_2\varphi_1(P_+) = \tag{3.10.8a}$$

$$= -\varphi_2(P_-)F_2 + F_2\varphi_1(P_-). \tag{3.10.8b}$$

Это наша иерархия МКП$^{\mathrm{II}}$.

Теорема 3.10.9. (i) эволюционное дифференцирование ∂_P на $R_{v\chi}$ корректно определено;
(ii) эволюционные дифференцирования ∂_P алгебр R_A и $R_{v\chi}$ совместны с гомоморфизмами φ_i, $i = 1, 2$;
(iii) дифференцировании ∂_P и ∂_Q на $R_{v\chi}$ коммутируют.

Доказательство. (i) формулы (3.10.7) и (3.10.8) можно переписать как

$$\partial_P(F_i) = \varphi_i(P_+)F_i - F_i\varphi_{i+1}(P_+) = \tag{3.10.10a}$$

$$= -\varphi_i(P_-)F_i + F_i\varphi_{i+1}(P_-), \tag{3.10.10b}$$

где индекс i теперь понимается по модулю 2: $i+2=i$. Сначала проверим, что выражения (3.10.10a) и (3.10.10b) равны. Это эквивалентно тождеству

$$\varphi_i(P)F_i = F_i\varphi_{i+1}(P), \tag{3.10.11}$$

которое эквивалентно равенству

$$\varphi_i(P) = F_i\varphi_{i+1}(P)F_i^{-1}, \tag{3.10.12}$$

которое следует из тождества

$$\varphi_i(L) = F_i\varphi_{i+1}(L)F_i^{-1}, \tag{3.10.13}$$

что то же самое, что

$$F_iF_{i+1} = F_i(F_{i+1}F_i)F_i^{-1}, \tag{3.10.14}$$

а это истинно. Далее, из (3.10.7a) мы заключаем, что $\partial_P(F_1) = \partial_P(v) \in R_{v\chi}[\xi]$, в то время, как из (3.10.7b) следует $\partial_P(F_1) \in R_{v\chi}[[\xi^{-1}]]$. Следовательно, $\partial_P(v) \in R_{v\chi}$. Аналогично, из (3.10.8b) находим, что $\partial_P(F_2) \in R_{v\chi}((\xi^{-1}))_-$. В силу (3.10.3b), остается проверить, что

$$\partial_P(\chi_0) = -\partial_P(v). \tag{3.10.15}$$

При

$$P = \sum \xi^k p_k = \sum \xi^k p_k(n_1), \tag{3.10.16}$$

из равенства (3.10.7b) следует

$$\partial_P(v) = (\varphi_2 - \varphi_1)(p_{-1}), \tag{3.10.17a}$$

а из равенства (3.10.8b) находим, что

$$\partial_P(\chi_0) = (\varphi_1 - \varphi_2)(p_{-1}). \tag{3.10.17b}$$

Этим (3.10.15) доказано;
(ii) имеем

$$\begin{gathered}
\partial_P\varphi_i(L) = \partial_P(F_iF_{i+1}) \overset{(3.10.10a)}{=} \\
= [\varphi_i(P_+)F_i - F_i\varphi_{i+1}(P_+)]F_{i+1} + F_i[\varphi_{i+1}(P_+)F_{i+1} - F_{i+1}\varphi_i(P_+)] = \\
= \varphi_i(P_+)F_iF_{i+1} - F_iF_{i+1}\varphi_i(P_+) = [\varphi_i(P_+), \varphi_i(L)] = \varphi_i([P_+, L]) = \varphi_i\partial_P(L) \quad \Rightarrow \\
\partial_P\varphi_i = \varphi_i\partial_P,
\end{gathered} \tag{3.10.18}$$

и (ii) доказано;
(iii) имеем, из (3.10.10a):

$$\begin{gathered}
\partial_P\partial_Q(F_i) = \partial_P[\varphi_i(Q_+)F_i - F_i\varphi_{i+1}(Q_+)] \overset{(3.10.18)}{=} \\
= \varphi_i\partial_P(Q_+)F_i + \varphi_i(Q_+)[\varphi_i(P_+)F_i - F_i\varphi_{i+1}(P_+)] - \\
-[\varphi_i(P_+)F_i - F_i\varphi_{i+1}(P_+)]\varphi_{i+1}(Q_+) - F_i\varphi_{i+1}\partial_P(Q_+) \quad \Rightarrow \\
[\partial_P, \partial_Q](F_i) = \varphi_i(?)F_i - F_i\varphi_{i+1}(?),
\end{gathered} \tag{3.10.19}$$

где

$$? = \partial_P(Q_+) - \partial_Q(P_+) - [P_+, Q_+], \tag{3.10.20}$$

и так как это равно нулю в силу (1.1.44), то (iii) доказано. ▮

Замечание 3.10.21. Формулы (3.10.10) можно записать в матричной компактной форме, следующим образом. Положим

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ F_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2[R_{u\chi}((\xi^{-1}))]. \tag{3.10.22}$$

тогда

$$F^2 = \begin{pmatrix} F_1F_2 & 0 \\ 0 & F_2F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(L) & 0 \\ 0 & \varphi_2(L) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tag{3.10.23}$$

$$F^{2m} = \begin{pmatrix} \varphi_1(P) & 0 \\ 0 & \varphi_2(P) \end{pmatrix}, \tag{3.10.24}$$

и уравнения (3.10.10) вытекают из

$$\partial_P(F) = [(F^{2m})_+, F] = [F, (F^{2m})_-]. \tag{3.10.25}$$

Что произойдет в общей ситуации, если вместо оператора КП L (3.10.1) рассмотреть

$$L = \xi^N + \sum_{i \geq 0} A_i \xi^{N-1-i}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{3.10.26}$$

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \tag{3.10.27}$$

где $P = L^{n/N}$, и т.д.? Фиксируем разбиение N на n положительных частей, $n \leq N$:

$$N = N_1 + \cdots + N_n. \tag{3.10.28}$$

Положим

$$F_i = \xi^{N_i} + \sum_{s=0}^{N_i-1} u_{is}\xi^{N_i-1-s}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.10.29a}$$

$$F_{n+1} = 1 + \sum \chi_s \xi^{-s-1}, \tag{3.10.29b}$$

$$\chi_0 = -\sum_{i=1}^{n} u_{i0}, \tag{3.10.30}$$

где индексы i берутся по модулю $n+1$. Пусть $R_{u\chi} = \mathcal{F}(u_{is}^{(j)}, \chi_{s+1}^{(j)})$, и пусть $\varphi_i : R_L \to R_{u\chi}$ есть гомоморфизмы

$$\varphi_i(L) = F_iF_{i+1}\ldots F_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_{n+1}, \tag{3.10.31}$$

так что

$$\varphi_i(L) = F_i\varphi_{i+1}(L)F_i^{-1} \tag{3.10.32}$$

Наконец, пусть ∂_P — эволюционное дифференцирование в $R_{u\chi}$, определенное формулой (3.10.10).

Теорема 3.10.33. = Теорема 3.10.9.

Доказательство. (i) Лемма 3.9.44 гарантирует, что

$$[\varphi_i(L)]^{1/N} = \varphi_i(L^{1/N}) \tag{3.10.34}$$

и также, что тождества (3.10.32) и

$$[\varphi_i(L)]^{1/N} = F_i[\varphi_{i+1}(L)]^{1/N} F_i^{-1} \tag{3.10.35}$$

эквивалентны. Возводя формулу (3.10.35) в n_1–ю степень и используи формулу (3.10.34), мы приходим к равенству (3.10.11); это доказывает, что оба определении ∂_P, (3.10.10a) и (3.10.10b), дают один и тот же результат.

Далее, при $P = \sum \xi^k p_k$ (3.10.16), из формул (3.10.10b) следует

$$\partial_P(v_{i0}) = (\varphi_{i+1} - \varphi_i)(p_{-1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.10.36a}$$

$$\partial_P(\chi_0) = (\varphi_1 - \varphi_{n+1})(p_{-1}) \quad \Rightarrow \tag{3.10.36b}$$

$$\partial_P\Big(\sum_{i=1}^{n} v_{i0} + \chi_0\Big) = 0, \tag{3.10.37}$$

что согласуется с (3.10.30). Это доказывает (i);
(ii) имеем, из (3.10.31) и (3.10.10a):

$$\begin{gathered}
\partial_P\varphi_i(L) = \partial_P(F_i \dots F_{i-1}) = \\
= \sum_{k \geqslant i} F_i \dots F_k F_k^{-1}[\varphi_k(P_+)F_k - F_k\varphi_{k+1}(P_+)]F_{k+1} \dots F_{i-1} = \\
= \varphi_i(P_+)F_i \dots F_{i-1} - F_i \dots F_{i-1}\varphi_i(P_+) = \varphi_i([P_+, L]) = \varphi_i\partial_P(L) \quad \Rightarrow \\
\partial_P\varphi_i = \varphi_i\partial_P.
\end{gathered} \tag{3.10.38}$$

Это доказывает (ii); доказательство (iii) такое же, как в Теореме 3.10.9. ∎

Итак, факторизация иерархии КП, описываемая Теоремой 3.10.9, является частным случаем $N = n = 1$ Теоремы 3.10.33. С другой стороны, в §3.9 мы факторизовали оператор $L = \xi^2 + A_0$ $(= \xi^2 + h)$, который равен чисто дифференциальной части в общем операторе L (3.10.26) для случая $N = 2$; в этой факторизации псевдодифференциальная часть F_{n+1} $(= F_3)$ (3.10.29b) равна просто 1. Как согласовать эти две ситуации?

Теорема 3.10.39. Общая процедура факторизации допускает специализацию

$$L_- = 0, \tag{3.10.40}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_{i0} = 0, \tag{3.10.41}$$

$$F_{n+1} = 1. \tag{3.10.42}$$

Доказательство. Формулы (3.10.29)–(3.10.31) и (3.10.40)–(3.10.42) показывают, что гомоморфизмы φ_i корректно определены. Нам надо проверить, что уравнения движения для F_{n+1} (3.10.10b),

$$\partial_P(F_{n+1}) = -\varphi_{n+1}(P_-)F_{n+1} + F_{n+1}\varphi_1(P_-) \tag{3.10.43}$$

остаются совместными, что сводится к тождеству

$$\varphi_{n+1}(P_-) = \varphi_1(P_-), \tag{3.10.44}$$

истинному, поскольку из (3.10.42) следует, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_1.$$ ∎

Замечание 3.10.45. Для общего случая $N \geqslant n \geqslant 1$, Замечание 3.10.21 можно обобщить следующим образом. Положим

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & F_n \\ F_{n+1} & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n+1}[R_{v\chi}((\xi^{-1}))]. \tag{3.10.46}$$

тогда

$$F^{n+1} = \mathrm{diag}(\varphi_1(L), \dots, \varphi_{n+1}(L)) \quad \Rightarrow \tag{3.10.47}$$

$$(F^{n+1})^{1/N} = \mathrm{diag}(\varphi_1(L^{1/N}), \dots, \varphi_{n+1}(L^{1/N})) \quad \Rightarrow \tag{3.10.48}$$

$$(F^{n+1})^{n_1/N} = \mathrm{diag}(\varphi_1(P), \dots, \varphi_{n+1}(P)), \tag{3.10.49}$$

а уравнения движения (3.10.10) эквивалентны матричному уравнению Лакса

$$\partial_P(F) = [((F^{n+1})^{n_1/N})_+, F] = [F, ((F^{n+1})^{n_1/N})_-]. \tag{3.10.50}$$

Упражнение 3.10.51. Имеет ли нерархия МКП$^{\mathrm{II}}$ (3.10.7), (3.10.8) потенциальную форму?
[Подсказка : вычислите $\partial_{t_2}(v)$.]

Упражнение 3.10.52. Покажите, что для общего оператора Лакса (3.10.26):

$$L = \xi^N + \sum_{i \geqslant 0} A_i \xi^{N-2-i},$$

выполняется

$$\partial_{t_n}(A_0) \in \mathrm{Im}\,\partial, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.10.53}$$

Упражнение 3.10.54. Возьмем

$$L = \xi^3 + A_0\xi + A_1. \tag{3.10.55}$$

Покажите, что система

$$\partial_{t_2}(L) = [(L^{2/3})_+, L] \tag{3.10.56}$$

имеет вид

$$\partial_{t_2}(A_0) = 2A_1^{(1)} - A_0^{(2)}, \tag{3.10.57a}$$

$$\partial_{t_2}(A_1) = A_1^{(2)} - \frac{2}{3}A_0^{(3)} - \frac{2}{3}A_0A_0^{(1)} + \frac{2}{3}[A_0, A_1]. \tag{3.10.57b}$$

3.11 P.S.: пересмотр полностью неабелевого преобразования Миуры между иерархиями КП и Pot-МКП: полная гамильтоновость

> Некоторые говорят, что Бог есть. Другие говорят, что Бога нет. По моему мнению, истина лежит, вероятно, где-то между этими крайностями.
>
> Дж.Б. Мортон

В §3.1 мы построили преобразование Миуры $\overline{\Phi}$ (3.1.21) переводящее иерархию КП в Pot-МКП:

$$\overline{\Phi}\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i\xi^{-i-1}\Big) = \xi + \sum_{i\geqslant 1} V^{-1}a_i\xi^{-i}V, \tag{3.11.1}$$

где

$$\mathrm{Pot}(a_0) = -V^{(1)}V^{-1}, \quad \mathrm{Pot}(a_i) = a_i, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{3.11.2}$$

есть потенциальное расширение (= инъективный гомоморфизм) иерархии МКП до иерархии Pot-МКП.

В §3.3 мы доказали, что если невырожденная ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$, в которой принимают значения все переменные, коммутативна, то отображение Φ (3.3.1) между иерархиями КП и МКП,

$$\Phi\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i\xi^{-i-1}\Big) = \xi + \sum_{i\geqslant 0} a_{i+1}(\xi - a_0)^{-i-1}, \tag{3.11.3}$$

$$\overline{\Phi} = \mathrm{Pot}\circ\Phi, \tag{3.11.4}$$

гамильтоново.

В §3.8 мы доказали, что отображение Pot гамильтоново, причем гамильтонова форма иерархии Pot-МКП задается гамильтоновой матрицей (3.8.21)

$$B^{\text{МКП}}_{\mathrm{Pot}} = \begin{array}{c} \\ V \\ a_1 \\ w \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & a_1 & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_V & 0 \\ \widehat{L}_V & \mathrm{ad}_{a_1} & \\ 0 & 0 & B^1(w) \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.11.5}$$

и гамильтонова матрица $B^1 = B^1(w)$ задается формулой (2.3.10):

$$B^1_{w_r w_s} = B^1_{rs} = \sum_l \Big[\binom{s+1}{l}\partial^l\widehat{R}_{w_{r+s+1-l}} - \binom{r+1}{l}\widehat{L}_{w_{r+s+1-l}}(-\partial)^l\Big]; \tag{3.11.6}$$

Напомним, что мы зафиксировали ортонормальный базис в $\mathcal{A}$. Итак, отображение Миуры $\overline{\Phi}$ (3.11.1) гамильтоново, если $\mathcal{A}$ абелева. В этом разделе мы доказываем, что $\overline{\Phi}$ гамильтоново в общем случае, когда $\mathcal{A}$ — произвольная ассоциативная невырожденная алгебра, неважно, абелева или нет.

Спачала сделаем отображение $\overline{\Phi}$ (3.11.1) явным:

$$\begin{aligned} \sum_{i\geqslant 0}\overline{\Phi}(A_i)\xi^{-i-1} &= \sum_{j\geqslant 0} V^{-1}a_{j+1}\xi^{-j-1}V = \\ &= \sum V^{-1}a_{j+1}\binom{-j-1}{s}V^{(s)}\xi^{-j-1-s} = \\ &= \sum V^{-1}a_{j+1}V^{(s)}(-1)^s\binom{j+s}{s}\xi^{-j-1-s} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(A_i) &= \sum_{j+s=i} V^{-1}a_{j+1}V^{(s)}(-1)^s\binom{j}{s} = \sum_{s=0}^{i} V^{-1}a_{i+1-s}V^{(s)}(-1)^s\binom{i}{s} = \\ &= (-1)^i V^{-1}a_1V^{(i)} + \sum_{s=0}^{i-1} V^{-1}a_{i+1-s}V^{(s)}(-1)^s\binom{i}{s}, \end{aligned} \tag{3.11.7}$$

так что, окончательно,

$$\overline{\Phi}(A_i) = (-1)^i V^{-1} a_1 V^{(i)} + \sum_{s\geqslant 0} V^{-1} w_s V^{(i-1-s)} (-1)^{i-1-s} \binom{i}{s+1}; \tag{3.11.8}$$

напомним, что $w_s = a_{s+2}$. Гамильтонова матрица $B^{\text{КП}} = B^0 = B^0(A)$ (1.4.22) равна

$$B^0_{A_i A_j} = B^0_{ij} = \sum_l \Big[\binom{j}{l} \partial^l \widehat{R}_{A_{i+j-l}} - \binom{i}{l} \widehat{L}_{A_{i+j-l}} (-\partial)^l \Big]. \tag{3.11.9}$$

Утверждается, что отображение $\overline{\Phi}$ (3.11.8) между гамильтоновыми матрицами (3.11.5) и (3.11.9) гамильтоново. Так как отображение $\overline{\Phi}$ (3.11.8) трилинейно, то компонентная форма проверки критерия гамильтоновости (3.3.22) будет в лучшем случае кошмаром тяжких вычислений, а в худшем — бесконечным случайным блужданием в тумане тождеств. Что делать? Похоже, у нас нет иного выбора, как обратиться к *глобальным вычислениям*, работая с матрицами, чьи элементы, в свою очередь, являются матрицами размера $\widetilde{l} \times \widetilde{l}$, где $\widetilde{l} = \dim \mathcal{A}$. Формулы (3.11.5, 6, 9) уже записаны в глобальной форме. Как мы сейчас увидим, глобальный язык не только позволяет избежать тяжелой скуки локальных вычислений, но и все вычисления превращаются в легкую прогулку.

Нам понадобятся несколько простых формул для производных Фреше и их сопряженных. (Подробнее об этом в Главе 4 и Приложении А3.) Для коммутативного дифференциального кольца R, положим $C = R\langle q_i^{(n)} \rangle$, $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\widetilde{C} = R\langle q_i^{(n)}, u^{-1}, u^{(n)} \rangle$. Если $E \in \widetilde{C}$, $E = \sum E_{|\alpha} e^\alpha$ в фиксированном ортонормальном базисе (e^α) в $\mathcal{A}$, то производная Фреше $\frac{DE_{|\alpha}}{Du_{|\beta}}$ равна

$$\frac{DE_{|\alpha}}{Du_{|\beta}} = \left(\frac{DE}{Du} \right)^\beta_\alpha, \tag{3.11.10}$$

где $\frac{DE}{Du}$, производная Фреше в $\widetilde{C}$, есть оператор, действующий по правилу

$$\frac{DE}{Du}(X) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \Big[E\big(u + \varepsilon X\big) \Big], \quad \forall\, X \in \widetilde{C}. \tag{3.11.11}$$

Это очевидно, так как все эти выражения, после дифференцирования по E, превращаются в тривиальные тождества для $E = u$. (Явное доказательство можно найти в §5.4.) Далее, сопряжения. Допустим, у нас есть глобальный матричный элемент

$$(1) \quad \overset{(2)}{(\widehat{L}_x \widehat{R}_y \partial^j)}\,. \tag{3.11.12}$$

Тогда его локальная форма — это матрица

$$(1)_{|\alpha} \quad \overset{(2)_{|\beta}}{\Big(\sum c^{\mu\nu}_\alpha c^{\sigma\beta}_\mu x_{|\sigma} y_{|\nu} \partial^j \Big)}, \tag{3.11.13}$$

так как

$$\begin{aligned} \Big[(\widehat{L}_x \widehat{R}_y \partial^j)(X) \Big]_{|\alpha} &= (x X^{(j)} y)_{|\alpha} = \sum (x X^{(j)})_{|\mu} y_{|\nu} c^{\mu\nu}_\alpha = \sum c^{\mu\nu}_\alpha c^{\sigma\beta}_\mu x_{|\sigma} X^{(j)}_{|\beta} y_{|\nu} = \\ &= \sum_\beta \Big(\sum_{\mu\nu\sigma} c^{\mu\nu}_\alpha c^{\sigma\beta}_\mu x_{|\sigma} y_{|\nu} \partial^j \Big)(X_{|\beta}). \end{aligned} \tag{3.11.14}$$

Сопряженная к матрице (3.11.13) тогда равна

$$\begin{array}{cc} & (1)_{|\alpha} \\ (2)_{|\beta} & \left((-\partial)^j \sum c_\alpha^{\mu\nu} c_\mu^{\sigma\beta} x_{|\sigma} y_{|\nu}\right) \end{array}, \tag{3.11.15}$$

что есть локальная форма глобального матричного элемента

$$\begin{array}{cc} & (1) \\ (2) & \left((-\partial)^j \widehat{L}_y \widehat{R}_x\right) \end{array}. \tag{3.11.16}$$

Действительно, так как структурные константы $c_\alpha^{\mu\nu}$ циклически симметричны (см. (2.3.16)), имеем из (3.11.15):

$$\sum_\alpha \Big[(-\partial)^j \sum c_\alpha^{\mu\nu} c_\mu^{\sigma\beta} x_{|\sigma} y_{|\nu}\Big](X_{|\alpha}) = \sum (-\partial)^j (c_\mu^{\nu\alpha} c_\beta^{\mu\sigma} x_{|\sigma} y_{|\nu} X_{|\alpha}) =$$
$$= \sum (-\partial)^j (c_\beta^{\mu\sigma} (yX)_{|\mu} x_{|\sigma}) = \Big((-\partial)^j \big[(yX)(x)\big]\Big)_{|\beta} = \Big(\big[(-\partial)^j \widehat{L}_y \widehat{R}_x\big](X)\Big)_{|\beta},$$

откуда следует (3.11.16). Последняя формула также может быть записана как

$$(\widehat{L}_x \widehat{R}_y \partial^j)^\dagger = (-\partial)^j \widehat{L}_y \widehat{R}_x. \tag{3.11.17}$$

Лемма 3.11.18. Если $x, y \in C$, то

$$\frac{D(xu^{-1}y)}{Du} = -\widehat{L}_{xu^{-1}} \widehat{R}_{x^{-1}y}. \tag{3.11.19}$$

Доказательство. Используя (3.11.11), находим

$$\frac{D(xu^{-1}y)}{Du}(X) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \Big[x(u+\varepsilon X)^{-1}y\Big] = -xu^{-1}Xu^{-1}y = -\widehat{L}_{xu^{-1}} \widehat{R}_{x^{-1}y}(X). \quad \blacksquare$$

Аналогично,

$$\frac{D(xu^{(j)})}{Du} = \widehat{L}_{x\partial^j} = \widehat{L}_x \partial^j, \quad \frac{D(u^{(j)}x)}{Du} = \widehat{R}_x \partial^j. \tag{3.11.20}$$

Упражнение 3.11.21. Вывести Лемму 3.8.35 из формулы (3.11.19) при $x = y = 1$.

Теперь все готово для вычисления $D(\overline{\Phi})$ и $D(\overline{\Phi})^\dagger$. Из формулы (3.11.8) получаем, с учетом (3.11.19), (3.11.20):

$$\frac{D\overline{\Phi}(A_i)}{DV} = (-1)^i \big[-\widehat{L}_{V^{-1}} \widehat{R}_{V^{-1}a_1V^{(i)}} + \widehat{L}_{V^{-1}a_1\partial^i}\big] +$$
$$+ \sum_s (-1)^{i-1-s} \binom{i}{s+1} \big[-\widehat{L}_{V^{-1}} \widehat{R}_{V^{-1}w_sV^{(i-1-s)}} + \widehat{L}_{V^{-1}w_s\partial^{i-1-s}}\big], \tag{3.11.22a}$$

$$\frac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Da_1} = (-1)^i \widehat{L}_{V^{-1}} \widehat{R}_{V^{(i)}}, \tag{3.11.22b}$$

$$\frac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Dw_s} = (-1)^{i-1-s} \binom{i}{s+1} \widehat{L}_{V^{-1}} \widehat{R}_{V^{(i-1-s)}}. \tag{3.11.22c}$$

откуда, с учетом (3.11.17), находим:

$$\begin{aligned}\left[\frac{D\overline{\Phi}(A_j)}{DV}\right]^\dagger &= (-1)^j\left[-\widehat{L}_{V^{-1}a_1V^{(j)}}\widehat{R}_{V^{-1}} + (-\partial)^j\widehat{R}_{V^{-1}a_1}\right]+\\ &+\sum_r(-1)^{j-1-r}\binom{j}{r+1}\left[-\widehat{L}_{V^{-1}w_rV^{(j-1-r)}}\widehat{R}_{V^{-1}} + (-\partial)^{j-1-r}\widehat{R}_{V^{-1}w_r}\right],\end{aligned} \tag{3.11.23a}$$

$$\left[\frac{D\overline{\Phi}(A_j)}{Da_1}\right]^\dagger = (-1)^j\widehat{L}_{V^{(j)}}\widehat{R}_{V^{-1}}, \tag{3.11.23b}$$

$$\left[\frac{D\overline{\Phi}(A_j)}{Dw_r}\right]^\dagger = (-1)^{j-1-r}\binom{j}{r+1}\widehat{L}_{V^{(j-1-r)}}\widehat{R}_{V^{-1}}. \tag{3.11.23c}$$

Следует нроверить тождество

$$D(\overline{\Phi})B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}}D(\overline{\Phi})^\dagger = \overline{\Phi}(B^{\text{КП}}). \tag{3.11.24}$$

На (A_i, A_j)–нозиции, это дает:

$$(-1)^i\widehat{R}_{V^{(i)}}(-1)^j|-\widehat{L}_{V^{-1}a_1V^{(j)}}\widehat{R}_{V^{-1}} + (-\partial)^jR_{V^{-1}a_1}]+ \tag{3.11.25a}$$

$$\begin{aligned}&+\sum_r(-1)^{i+j-1-r}\binom{j}{r+1}\widehat{R}_{V^{(i)}}[-\widehat{L}_{V^{-1}w_rV^{(j-1-r)}}\widehat{R}_{V^{-1}}+\\ &\qquad+(-\partial)^{j-1-r}\widehat{R}_{V^{-1}w_r}]+\end{aligned} \tag{3.11.25b}$$

$$\begin{aligned}&+(-1)^{i+j}\left[\widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{a_1V^{(i)}} - \widehat{L}_{V^{-1}a_1\partial^i}\widehat{R}_V + \widehat{L}_{V^{-1}a_1}\widehat{R}_{V^{(i)}}-\right.\\ &\qquad\left.-\widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{a_1V^{(i)}}\right]\widehat{L}_{V^{(j)}}\widehat{R}_{V^{-1}}+\end{aligned} \tag{3.11.25c}$$

$$\begin{aligned}&+\sum_s(-1)^{i+j-1-s}\binom{i}{s+1}\left[\widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{w_sV^{(i-1-s)}}-\right.\\ &\qquad\left.-\widehat{L}_{V^{-1}w_s\partial^{i-1-s}}\widehat{R}_V\right]\widehat{L}_{V^{(j)}}\widehat{R}_{V^{-1}}+\end{aligned} \tag{3.11.25d}$$

$$+\sum_{sr}(-1)^{i+j-r-s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{V^{(i-1-s)}}B^1_{sr}\widehat{L}_{V^{(j-1-r)}}\widehat{R}_{V^{-1}} = \tag{3.11.25e}$$

$$=\sum_l\left[\binom{j}{l}\partial^l\widehat{R}_{V^{-1}a_1V^{(i+j-l)}} - \binom{i}{l}\widehat{L}_{V^{-1}a_1V^{(i+j-1)}}(-\partial)^l\right](-1)^{i+j-l}+ \tag{3.11.25f}$$

$$\begin{aligned}&+\sum(-1)^{i+j-l-1-\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}\left[\binom{j}{l}\partial^l\widehat{R}_{V^{-1}w_\mu V^{(i+j-l-1-\mu)}}-\right.\\ &\qquad\left.-\binom{i}{l}\widehat{L}_{V^{-1}w_\mu V^{(i+j-l-1-\mu)}}(-\partial)^l\right].\end{aligned} \tag{3.11.25g}$$

Итак, имеем члены двух различных типов: линейные по a_1, (3.11.25a,c,f), и линейные по w, (3.11.25b,d,e,g). Начнем с лннейных по a_1. Обозначив $V^{-1}a_1$ через a, разделна на $(-1)^{i+j}$, н действуя предполагаемым операторным тождеством на дифференциальную пеизвестную X, мы сводим задачу к проверке следующего тождества:

$$\begin{aligned}&-aV^{(j)}XV^{-1}V^{(i)} + (-1)^j(Xa)^{(j)}V^{(i)} + V^{-1}V^{(j)}XaV^{(i)}-\\ &-a(V^{(j)}X)^{(i)} + aV^{(j)}XV^{-1}V^{(i)} - V^{-1}V^{(j)}XaV^{(i)} =\end{aligned} \tag{3.11.26a}$$

$$=\sum_l\left\{\binom{j}{l}\left[XaV^{(i+j-l)}\right]^{(l)}(-1)^l - \binom{i}{l}aV^{(i+j-l)}X^{(l)}\right\}. \tag{3.11.26b}$$

В левой части, 1-й и 5-й, 3-й и 6-й члены попарно сокращаются, а 4-й можно переписать, как

$$-a\sum_l \binom{i}{l} V^{(j+i-l)}X^{(l)},$$

и это совпадает со 2-м слагаемым в правой части. Нам остается проверить тождество

$$(-1)^j (Xa)^{(j)} V^{(i)} = \sum_l \binom{j}{l} [XaV^{(i+j-l)}]^{(l)} (-1)^l. \tag{3.11.27}$$

Вводя $Y = Xa$, можно переписать его в виде

$$(-1)^j Y^{(j)} V^{(i)} = \sum_{ls} \binom{j}{l} \binom{l}{s} (-1)^l Y^{(s)} V^{(i+j-s)}, \tag{3.11.27'}$$

что эквивалентно тождеству

$$\sum_l \binom{j}{l}\binom{l}{s}(-1)^l = (-1)^j \delta^j_s. \tag{3.11.28}$$

Чтобы доказать последнее, умножим его на t^s и просуммируем по s. Это дает

$$\sum_{ls}\binom{j}{l}\binom{l}{s}(-1)^l t^s = \sum_l \binom{j}{l}(-1)^l(1+t)^l = [1-(1+t)]^j = (-t)^j = \sum_s (-1)^j \delta^j_s t^s.$$

Итак, линейные по a_1 члены учтены.

Из оставшихся, линейных по w, членов выделим члены, содержащие $w = V^{-1}w_\mu$. Деля на $(-1)^{i+j}$ и действуя на неизвестную X, приходим к задаче проверки тождества

$$(-1)^{\mu+1}\binom{j}{\mu+1}\Big[-wV^{(j-1-\mu)}XV^{-1}V^{(i)} + (-1)^{j-1-\mu}(Xw)^{(j-1-\mu)}V^{(i)}\Big]+ \tag{3.11.29a}$$

$$+(-1)^{\mu+1}\binom{i}{\mu+1}\Big[V^{-1}V^{(j)}XwV^{(i-1-\mu)} - w(V^{(j)}X)^{(i-1-\mu)}\Big]+ \tag{3.11.29b}$$

$$+\sum \delta^{\mu}_{r+s+1-l}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\Big\{\binom{r+1}{l}V^{-1}[V^{(j-1-r)}Xw]^{(l)}V^{(i-1-s)}- \tag{3.11.29c}$$

$$-\binom{s+1}{l}(-1)^l w[V^{(j-1-r)}XV^{-1}]^{(l)}V^{(i-1-s)}\Big\} = \tag{3.11.29d}$$

$$=\sum(-1)^{l+1+\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}\Big\{\binom{j}{l}\big[XwV^{(i+j-l-1-\mu)}\big]^{(l)}- \tag{3.11.29e}$$

$$-(-1)^l\binom{i}{l}wV^{(i+j-l-1-\mu)}X^{(l)}\Big\}. \tag{3.11.29f}$$

Это тождество содержит члены двух типов: те, в которые w входит слева, (3.11.29a1, b2, d, f), и все остальные, (3.11.29a2, b1, c, e). Члены первого типа дают тождество

$$(-1)^{\mu}\binom{j}{\mu+1}V^{(j-1-\mu)}XV^{-1}V^{(i)} + (-1)^{\mu}\binom{i}{\mu+1}(V^{(j)}X)^{(i-1-\mu)}+$$

$$+\sum_{rs}(-1)^{\mu}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{s+1}{r+s+1-\mu}[V^{(j-1-r)}XV^{-1}]^{(r+s+1-\mu)}V^{(i-1-s)} = \tag{3.11.30}$$

$$= (-1)^{\mu} \sum_{l} \binom{i+j-l}{\mu+1} \binom{i}{l} V^{(i+j-l-1-\mu)} X^{(l)},$$

после отбрасывания w. Вводя $Y = XV^{-1}$ и деля на $(-1)^{\mu}$, получаем

$$\begin{gathered} \binom{j}{\mu+1} V^{(j-1-\mu)} Y V^{(i)} + \binom{i}{\mu+1} [V^{(j)} Y V|^{(i-1-\mu)} + \\ + \sum_{rs} \binom{i}{s+1} \binom{j}{r+1} [V^{(j-1-r)} Y]^{(r+s+1-\mu)} V^{(i-1-s)} = \\ = \sum_{l} \binom{i+j-l}{\mu+1} \binom{i}{l} V^{(i+j-l-1-\mu)} (YV)^{(l)}. \end{gathered} \tag{3.11.31}$$

Это тождество следует из тождества (и ему эквивалентно)

$$\begin{gathered} \binom{j}{\mu+1} V^{(j-1-\mu)} Y W^{(i)} + \binom{i}{\mu+1} [V^{(j)} Y W]^{(i-1-\mu)} + \\ + \sum_{rs} \binom{i}{s+1} \binom{j}{r+1} \binom{s+1}{r+s+1-\mu} [V^{(j-1-r)} Y]^{(r+s+1-\mu)} W^{(i-1-s)} = \\ = \sum_{l} \binom{i+j-l}{\mu+1} \binom{i}{l} V^{(i+j-l-1-\mu)} (YW)^{(l)} \end{gathered} \tag{3.11.32}$$

при $W = V$. Далее, тождество (3.11.32) трилинейно по V, Y, W, и состоит из линейных комбинаций (над $\mathbb{Z}$) членов $V^{(\cdot)} Y^{(\cdot\cdot)} W^{(\cdots)}$. Следовательно, при проверке, мы можем подставить $p^{\cdot} \theta^{\cdot\cdot} q^{\cdots}$ вместо $V^{(\cdot)} Y^{(\cdot\cdot)} W^{(\cdots)}$, где p, θ, q — коммутирующие (полиномиальные) неизвестные. Итак, мы совершаем переход к *символам*, заменяя $V \to e^{pt}$, $Y \to e^{\theta t}$, $W \to e^{qt}$, $\partial \to d/dt$. Тогда тождество (3.11.32) принимает вид

$$\begin{gathered} \binom{j}{\mu+1} p^{j-1-\mu} q^{i} + \binom{i}{\mu+1} p^{j} (p+\theta+q)^{i-1-\mu} + \\ + \sum_{rs} \binom{i}{s+1} \binom{j}{r+1} \binom{s+1}{r+s+1-\mu} p^{j-1-r} (p+\theta)^{r+s+1-\mu} q^{i-1-s} = \\ = \sum_{l} \binom{i+j-l}{\mu+1} \binom{i}{l} p^{i+j-l-1-\mu} (\theta+q)^{(l)}. \end{gathered} \tag{3.11.33}$$

Чтобы доказать это тождество, прибегнем к производящим функциям. Умножая на $z^{\mu+1}$ и суммируя по μ, получаем

$$1) \sum_{\mu \geqslant 0} z^{\mu+1} \binom{j}{\mu+1} p^{j-1-\mu} q^{i} = q^{i} \left[(p+z)^{j} - p^{j} \right]; \tag{3.11.34a}$$

$$2) \sum_{\mu} \binom{i}{\mu+1} p^{j} (p+\theta+q)^{i-1-\mu} z^{\mu+1} = p^{j} [(p+\theta+q+z)^{i} - (p+\theta+q)^{i}]; \tag{3.11.34b}$$

$$\begin{aligned} 3) \sum_{\mu} & \binom{s+1}{r+s+1-\mu} (p+\theta)^{r+s+1-\mu} z^{\mu+1} = \\ & = \sum_{\mu \geqslant r} \binom{s+1}{r+s+1-\mu} (p+\theta)^{r+s+1-\mu} z^{\mu+1} = \\ & = \sum_{\bar{\mu}} \binom{s+1}{s+1-\bar{\mu}} (p+\theta)^{s+1-\bar{\mu}} z^{\bar{\mu}} z^{r+1} = (p+\theta+z)^{s+1} z^{r+1} \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{rs\mu}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{s+1}{r+s+1-\mu}p^{j-1-r}(p+\theta)^{r+s+1-\mu}q^{i-1-s}z^{\mu+1}=$$

$$=\sum_{rs}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}p^{j-1-r}q^{i-1-s}(p+\theta+z)^{s+1}z^{r+1}=$$

$$=[(p+z)^j-p^j][(p+\theta+z+q)^i-q^i]=$$

$$=-[(p+z)^j-p^j]q^i+(p+\theta+z+q)^i[(p+z)^j-p^j]; \qquad (3.11.34c)$$

$$4)\sum_{l\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}p^{i+j-l-1-\mu}(\theta+q)^l z^{\mu+1}=\sum_{l}(\theta+q)^l\binom{i}{l}[(p+z)^{i+j-l}-p^{i+j-l}]=$$

$$=(p+z)^j(\theta+q+p+z)^i-p^j(\theta+q+p)^i. \qquad (3.11.34d)$$

Схема сокращений: (a) и (c1,2); (b1) и (c4); (b2) и (d2); (c3) и (d1). Тождество (3.11.30) доказано. Остальные члены в тождестве (3.11.29) соберем в тождество

$$(-1)^j\binom{j}{\mu+1}Y^{(j-1-\mu)}V^{(i)}+(-1)^{\mu+1}\binom{i}{\mu+1}V^{-1}V^{(j)}YV^{(i-1-\mu)}+$$
$$+\sum_{rs}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{r+1}{r+s+1-\mu}V^{-1}|V^{(j-1-r)}Y]^{(r+s+1-\mu)}V^{(i-1-s)}$$
$$(3.11.35)$$
$$=\sum_{l}(-1)^{l+1+\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}\binom{j}{l}[YV^{(i+j-l-1-\mu)}]^{(l)},$$

где $Y = Xw$. Умножая слева на V, получаем тождество

$$(-1)^j\binom{j}{\mu+1}VY^{(j-1-\mu)}V^{(i)}+(-1)^{\mu+1}\binom{i}{\mu+1}V^{(j)}YV^{(i-1-\mu)}+$$
$$+\sum_{rs}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{r+1}{r+s+1-\mu}[V^{(j-1-r)}Y]^{(r+s+1-\mu)}V^{(i-1-s)}=$$
$$(3.11.36)$$
$$=\sum_{l}(-1)^{l+1+\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}\binom{j}{l}V[YV^{(i+j-l-1-\mu)}]^{(l)},$$

которое эквивалентно следующему поляризованному тождеству:

$$(-1)^j\binom{j}{\mu+1}VY^{(j-1-\mu)}W^{(i)}+(-1)^{\mu+1}\binom{i}{\mu+1}V^{(j)}YW^{(i-1-\mu)}+$$
$$+\sum_{rs}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{r+1}{r+s+1-\mu}[V^{(j-1-r)}Y]^{(r+s+1-\mu)}W^{(i-1-s)}=$$
$$(3.11.37)$$
$$=\sum_{l}(-1)^{l+1+\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}\binom{j}{l}V[YW^{(i+j-l-1-\mu)}]^{(l)}.$$

Переходя к символам, получаем

$$(-1)^j\binom{j}{\mu+1}\theta^{j-1-\mu}q^i+(-1)^{\mu+1}\binom{i}{\mu+1}p^jq^{i-1-\mu}+$$

$$+\sum_{rs}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{r+1}{r+s+1-\mu}p^{j-1-r}(p+\theta)^{r+s+1-\mu}q^{i-1-s}= \tag{3.11.38}$$
$$=\sum_{l}(-1)^{l+1+\mu}\binom{i+j-l}{\mu+1}\binom{j}{l}q^{i+j-l-1-\mu}(\theta+q)^{l}.$$

Чтобы доказать это тождество, умножим его на $z^{\mu+1}$ и просуммируем по μ. Получим

$$1)\ \sum_{\mu\geqslant 0}(-1)^{j}q^{i}\binom{j}{\mu+1}\theta^{j-1-\mu}z^{\mu+1}=(-1)^{j}q^{i}[(\theta+z)^{j}-\theta^{j}]; \tag{3.11.39a}$$

$$2)\ \sum_{\mu}p^{j}(-1)^{\mu+1}\binom{i}{\mu+1}q^{i-1-\mu}z^{\mu+1}=p^{j}[(q-z)^{i}-q^{i}]; \tag{3.11.39b}$$

$$3)\ \sum_{\mu}\binom{r+1}{r+s+1-\mu}(p+\theta)^{r+s+1-\mu}z^{\mu+1}=$$
$$=\sum_{\bar\mu}\binom{r+1}{r+1-\bar\mu}(p+\theta)^{r+1-\bar\mu}z^{\bar\mu}z^{s+1}=(p+\theta+z)^{r+1}z^{s+1}\quad\Rightarrow$$
$$\sum_{\mu rs}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}\binom{r+1}{r+s+1-\mu}p^{j-1-r}(p+\theta)^{r+s+1-\mu}q^{i-1-s}z^{\mu+1}=$$
$$=\sum_{rs}(-1)^{r+s}\binom{i}{s+1}\binom{j}{r+1}p^{j-1-r}q^{i-1-s}(p+\theta+z)^{r+1}z^{s+1}=$$
$$=\left\{\sum_{r}\binom{j}{r+1}p^{j-r-1}[-(p+\theta+z)]^{r+1}\right\}\left\{\sum_{s}\binom{i}{s+1}q^{i-1-s}(-z)^{s+1}\right\}=$$
$$=\left\{\left[-(\theta+z)\right]^{j}-p^{j}\right\}\left\{(q-z)^{i}-q^{i}\right\}=$$
$$=\left[(-1)^{j}(\theta+z)^{j}-p^{j}\right](q-z)^{i}-\left[(-1)^{j}(\theta+z)^{j}-p^{j}\right]q^{i}; \tag{3.11.39c}$$

$$4)\ \sum_{l}\binom{j}{l}(\theta+q)^{l}(-1)^{l}\sum_{\mu}(-1)^{\mu+1}\binom{i+j-l}{\mu+1}q^{i+j-l-1-\mu}z^{\mu+1}=$$
$$=\sum\binom{j}{l}(-\theta-q)^{l}[(q-z)^{i+j-l}-q^{i+j-l}]=$$
$$=(q-z)^{i}(-\theta-z)^{j}-q^{i}(-\theta)^{j}. \tag{3.11.39d}$$

Схема сокращений: (a1) и (c3); (a2) и (d2); (b1) и (c2); (b2) и (c4); (c1) и (d1). Мы закончили.

Следующие упражнения дают сокращенные доказательства гамильтоновости различных отображений, встречавшихся в предыдущих разделах.

Упражнение 3.11.40. Доказать гамильтоновость отображения Ψ (3.5.21),

$$\Psi(A_i)=(-1)^{i}p^{i}q^{(i)} \tag{3.11.41}$$

между гамильтоновыми матрицами $B^{\text{НУШ}}$ (3.5.50)

$$B^{\text{НУШ}}=\begin{array}{c|cc} & p & q\\ \hline p & 0 & 1\\ q & -1 & 0\end{array} \tag{3.11.42}$$

иерархии НУШ и $B^{\text{КП}}$ (3.11.9) иерархии КП, проверив тождество

$$\Big((-1)^i\widehat{R}_{q^{(i)}} \mid (-1)^i\widehat{L}_p\partial^i\Big)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^j\widehat{L}_{q^{(j)}} \\ \partial^j\widehat{R}_p \end{pmatrix} = \tag{3.11.43}$$

$$= \Psi(B^{\text{КП}}_{ij}) = \sum_l\left[\binom{j}{l}\partial^l\widehat{R}_{\Psi(A_{i+j-l})} - \binom{i}{l}\widehat{L}_{\Psi(A_{i+j-l})}(-\partial)^l\right]. \tag{3.11.44}$$

Упражнение 3.11.45. Рассмотрим отображение Pot (3.1.7) между иерархиями ДВВ и Pot-ДВВ,

$$\operatorname{Pot}(a_0) = -V^{(1)}V^{-1}, \quad \operatorname{Pot}(a_1) = a_1. \tag{3.11.46}$$

Пусть $B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$ (3.8.21) и $B^{\text{ДВВ}}$ (2.1.10, 2.3.8) обозначают соответствующее гамильтоновы матрицы:

$$B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}} = \begin{array}{c|cc} & V & a_1 \\ \hline V & 0 & -\widehat{R}_V \\ a_1 & \widehat{L}_V & \operatorname{ad}_{a_1} \end{array}, \tag{3.11.47}$$

$$B^{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c|cc} a_0 & 0 & \partial + \operatorname{ad}_{a_0} \\ a_1 & \partial + \operatorname{ad}_{a_0} & \operatorname{ad}_{a_1} \end{array}. \tag{3.11.48}$$

Проверить, что отображение Pot гамильтоново, показав, что

$$\frac{D(\operatorname{Pot})}{D(\cdot)} = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{V^{(1)}V^{-1}}\widehat{R}_{V^{-1}} - \widehat{R}_{V^{-1}}\partial & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.11.49}$$

и затем, что

$$\frac{D(\operatorname{Pot})}{D(\cdot)}B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}\left[\frac{D(\operatorname{Pot})}{D(\cdot)}\right]^\dagger = \operatorname{Pot}(B^{\text{ДВВ}}). \tag{3.11.50}$$

Замечание 3.11.51. Вычисления в этом разделе не содержали каких-либо ссылок на ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$, за исключением *оправдания* формулы (3.11.17) для сопряженного оператора. Это наводит на мысль, что, возможно, существует общий некоммутативный гамильтонов формализм в дифференциальных кольцах типа $R(A_i^{(j)})$, безо всяких апелляций к коммутативной компонентной форме. Такая техника действительно существует. Она будет построена в следующих двух главах.

Глава 4

Некоммутативный лагранжев формализм

В этой главе мы разрабатываем вариационное исчисление для лагранжианов, зависящих от некоммутирующих полей. Это исчисление оказывается ненамного сложнее традиционного.

4.1 Мотивировки, полученные при вскрытии уравнения КдФ

В этом разделе мы возвращаемся к неабелевому уравнению КдФ, определяем причину отсутствия у него сохраняющихся плотностей, и прописываем традиционное математическое лекарство: подходящую смену определений.

Классическое уравнение КдФ,

$$h_t = 6hh_x + h_{xxx}, \tag{4.1.1}$$

имеет бесконечное число (нетривиальных) сохраняющихся плотностей $\{H_n\}$. Это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество

$$\partial_t(H_n) = \partial_x(F_n), \tag{4.1.2}$$

в силу (4.1.1), где H_n и F_n — дифференциальные многочлены от h, то есть элементы из $\mathbb{Q}[h^{(j)}]$. Иначе, говорят, что величины $\partial_t(H_n)$ *тривиальны*:

$$\partial_t(H_n) \sim 0, \tag{4.1.3}$$

где

$$(\cdot) \sim 0 \quad \text{означает, что} \quad (\cdot) \in \operatorname{Im} \partial. \tag{4.1.4}$$

Один из способов построения последовательности сохраняющихся плотностей $\{H_n\}$ использует представление Лакса

$$L_t = \mathrm{const}[(L^{3/2})_+, L], \tag{4.1.5}$$

$$L = L_K = \xi^2 + h \tag{4.1.6}$$

для уравнения КдФ (4.1.1) (при const = 4). Их вывод состоит из трех шагов:
1) Из (4.1.5) следует, что

$$[(L^{1/2})^{2n+1}]_t = \mathrm{const}[(L^{3/2})_+, (L^{1/2})^{2n+1}]; \tag{4.1.7}$$

2) Далее, определив

$$H_n = (2n+1)^{-1}\,\mathrm{Res}(L^{(2n+1)/2}), \tag{4.1.8}$$

получаем из (4.1.7):

$$(H_n)_t = \mathrm{const}(2n+1)^{-1}\,\mathrm{Res}([(L^{3/2})_+, L^{(2n+1)/2}]); \tag{4.1.9}$$

3) Накопец, так как

$$\mathrm{Res}([\cdot, \cdot\cdot]) \sim 0, \quad \forall\, (\cdot), (\cdot\cdot), \tag{4.1.10}$$

то мы заключаем из (4.1.9), что

$$(H_n)_t \sim 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.11}$$

Легко видеть, что построенные H_n нетривиальны, то есть $H_n \not\sim 0$. Что происходит и неабелевом случае? Мы встречали неабелеву иерархию КдФ в §2.6. Из уравнения (4.1.5) следует

$$h_t = 3(h^2)_x + h_{xxx}, \tag{4.1.12}$$

так что h является сохраняющейся плотностью. Если мы повторим приведенные выше выкладки (4.1.7–11) то увидим, что все работает, кроме последнего шага: формула (4.1.10) более не верна, так как коэффициенты в $(\cdot)$ и $(\cdot\cdot)$ уже не коммутируют друг с другом. В первых трех главах мы преодолевали эту проблему, считая наши переменные матрично- или $\mathcal{A}$–значными, и определяя H_n, не как чистые вычеты (4.1.8), а как их *следы*:

$$H_n = \mathrm{const}_n\; Tr\,\mathrm{Res}(L^{(2n+1)/2}). \tag{4.1.13}$$

Преимущество такого подхода состоит в том, что мы по прежнему получаем бесконечный набор сохраняющихся плотностей; недостаток в том, что мы не можем работать в дифференциальной алгебре $\mathbb{Q}\langle h^{(j)}\rangle$, и должны выйти за ее пределы и зависеть от прихотей конкретной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$. Более серьезно, без перехода к $\mathcal{A}$–форме у нас нет способа генерировать уравнения движения из сохраняющихся плотностей, как это всегда делается для коммутативных (в том числе, интегрируемых) гамильтоновых систем. Тем не менее, уравнения движения в некоммутативной иерархии существуют и нам бы хотелось порождать их из небольших объектов, называемых "гамильтонианами", то есть элементов из $\mathbb{Q}\langle h^{(j)}\rangle$. Что можно предпринять?

Обратим внимание на некоторые свойства неабелевого уравнения КдФ (4.1.12). Во-первых, его можно записать в виде

$$h_t = (3h^2 + h_{xx})_x = \partial(3h^2 + h_{xx}) = \tag{4.1.14}$$

$$= \partial\frac{\delta}{\delta h}\Big(h^3 - \frac{1}{2}h_x h_x\Big), \tag{4.1.15}$$

где вторая строка, в абелевом случае, является знакомой первой гамильтоновой формой, но в неабелевом случае это, конечно, не так, поскольку $\dfrac{\delta(\cdot)}{\delta h}$ есть уже не элемент из $\mathbb{Q}\langle h^{(j)}\rangle$, а *оператор* на $\mathbb{Q}\langle h^{(j)}\rangle$ (ср. Приложение А3). Первый вывод: в равенстве

$$\frac{\delta}{\delta h}\Big(h^3 - \frac{1}{2}h_x h_x\Big) = 3h^2 + h_{xx}, \tag{4.1.16}$$

если таковое существует, $\dfrac{\delta(\cdot)}{\delta h}$ обозначает *не обычную* вариационную производную, а некоторую новую разновидность, которую предстоит открыть. Во-вторых, рассмотрим абелеву сохраняющуюся плотность $h^2\ \left[\sim \frac{8}{3}\operatorname{Res}(L^{3/2})\right]$. Имеем

$$\begin{aligned}(h^2)_t &= hh_t + h_th = h(3hh_x + 3h_xh + h_{xxx}) + (3hh_x + 3h_xh + h_{xxx})h = \\ &= (3h^2h_x + 6hh_xh + 3h_xh^2) + (hh_{xxx} + h_{xxx}h) = \\ &= (4h^3 + hh_{xx} + h_{xx}h - h_xh_x)_x + \qquad (4.1.17a)\\ &\qquad + [hh_x - h_xh, h]. \qquad (4.1.17b)\end{aligned}$$

Второй вывод: похоже, что удачным определением неабелевой сохраняющейся плотности H будет

$$\partial_t(H) \in \operatorname{Im}\partial + \sum[\cdot,\cdot\cdot]. \tag{4.1.18}$$

Иными словами, понятие *тривиальности* следует ослабить, добавив в него коммутаторы. Этот подход окажется верным. Мы проработаем детали в этой и следующей главах. Формула (4.1.16) при этом тоже приобретет смысл. Отметим, что определение (4.1.18), задним числом, можно угадать, разглядывая формулу (4.1.13). Действительно, в матричной алгебре $\mathrm{Mat} = \mathrm{Mat}_{\bar{l}}$, след Tr есть ни что иное, как координата в 1-мерном фактор-пространстве $\mathrm{Mat}\,/[\mathrm{Mat}, \mathrm{Mat}]$. Мы завершим этот раздел, показав, что, при новом определении сохраняющейся плотности (4.1.18), все интегрируемые системы лаксова типа, построенные в предыдущих главах, имеют бесконечно много сохраняющихся плотностей. Это сводится к реставрации формулы (4.1.10).

Утверждение 4.1.19. Пусть R дифференциальное кольцо с дифференцированием ∂. Тогда, для любых $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in R((\xi^{-1}))$,

$$\operatorname{Res}([\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2]) \quad \text{тривиален.} \tag{4.1.20}$$

Доказательство. Достаточно взять $\mathcal{R}_1 = r_1\xi^i$, $\mathcal{R}_2 = \xi^j r_2$, где $r_1, r_2 \in R$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\operatorname{Res}([\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2]) = \operatorname{Res}(r_1\xi^{i+j}r_2 - \xi^j r_2 r_1 \xi^i) \sim [r_1, r_2]\delta^{-1}_{i+j}. \qquad \blacksquare \tag{4.1.21}$$

> Я убежден, что сумма тупости и глупости во всем мире постоянна во все времена. Видя, как умирает одно заблуждение, я не спешу радоваться, а думаю о новом, которое придет на его место, и с тревогой гадаю, не будет ли оно более обременительным или более опасным, чем первое.
>
> Анатоль Франс, о деле Дрейфуса

4.2 Вариационные производные и родственные понятия

В этом разделе мы развиваем вариационное исчисление, в котором тривиальные лагранжианы являются дивергенциями и/или коммутаторами.

Пусть R является векторным пространством над $\mathbb{Q}$ и ассоциативным дифференциальным кольцом с единицей, на котором действуют m коммутирующих дифференцирований $\partial_1, \ldots, \partial_m$. В большинстве случаев годится $R = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{F}$, и т.д., но лучше не конкретизировать R. Пусть $\mathcal{I}$ — множество индексов, и пусть $C = C(q) = C_q = R\langle q_i^{(\nu)}\rangle$, $i \in \mathcal{I}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^m$, есть ассоциативная алгебра, свободно порожденная над R образующими $q_i^{(\nu)}$; таким образом, $q_i^{(\nu)}$ коммутируют с элементами из R. Превратим C в дифференциальную алгебру, продолжив на C дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_m$ действием на образующие по правилу

$$\partial_s(q_i^{(\nu)}) = q_i^{(\nu+1_s)}, \tag{4.2.1}$$

где 1_s обозначает мультииндекс $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 на s–ом месте). Очевидно, $\partial_1, \ldots, \partial_m$ остаются коммутирующими на C. Обозначим $\mathrm{Der}(C)$ алгебру Ли дифференцирований C над R. Любое $Z \in \mathrm{Der}(C)$ однозначно определено своим действием на образующие $q_i^{(\nu)}$ в C : если $Z(q_i^{(\nu)}) = Z_i^\nu \in C$, то можно использовать наглядную запись

$$Z = \sum_{i\nu} Z_i^\nu \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}, \tag{4.2.2}$$

где $Z_i^\nu \dfrac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}$ есть дифференцирование на C, действующее на образующие по правилу

$$\left(Z_i^\nu \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}\right)(q_j^{(\sigma)}) = Z_i^\nu \delta_{j\nu}^{i\sigma}. \tag{4.2.3}$$

Элемент $X \in \mathrm{Der}(C)$ называется *эволюционным дифференцированием*, или *эволюционным (векторным) полем*, если он коммутирует с $\partial_1, \ldots, \partial_m$:

$$X(q_i^{(\nu)}) = X\partial^\nu(q_i) = \partial^\nu X(q_i) = \partial^\nu(X_i),$$

где: $\partial^\nu = \partial_1^{\nu_1} \ldots \partial_m^{\nu_m}$ при $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$; $q_i = q_i^{(0)}$; и $X_i = X(q_i)$.[1] Таким образом,

$$X = \sum \partial^\nu(X_i) \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}. \tag{4.2.4}$$

Алгебра Ли эволюционных дифференцирований обозначается $D^{ev} = D^{ev}(C)$. Пока что мы действовали по абелеву образцу. Теперь обратимся к дифференциальным формам. Это выражения типа

$$\Omega^1 = \Omega^1(C) = \left\{\sum \psi_i^\nu dq_i^{(\nu)} \varphi_i^\nu \mid \text{конечные суммы; } \psi_i^\nu,\ \varphi_i^\nu \in C\right\}. \tag{4.2.5}$$

Ω^1 очевидным образом является C–бимодулем. Более того, действия $\mathrm{Der}(C)$ и $\partial_1, \ldots, \partial_m$ естественно продолжаются на дифференциальные формы, как дифференцирования: если $Z \in \mathrm{Der}(C)$, или $Z = \partial_s$, то

$$Z(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi) = Z(\psi) dq_i^{(\nu)} \varphi + \psi d(Z(q_i^{(\nu)}))\varphi + \psi dq_i^{(\nu)} Z(\varphi). \tag{4.2.6}$$

Здесь $d(Z(q_i^{(\nu)}))$ определено посредством универсальной *производной* $d : C \to \Omega^1(C)$ (как обычно, над R), действующей на образующие C по правилу

$$d(q_i^{(\nu)}) = dq_i^{(\nu)}. \tag{4.2.7}$$

---

[1] Набор $\{X_i | i \in \mathcal{I}\}$ называется характеристикой векторного поля X. (прим. перев.)

Упражнение 4.2.8. Покажите, что:

(i) действия ∂_s на $\Omega^1(C)$ по прежнему коммутируют;

(ii) d коммутирует с $\partial_1, \dots, \partial_m$;

(iii) $D^{ev}(C)$ коммутирует с $\partial_1, \dots, \partial_m$ на $\Omega^1(C)$.

Рассмотрим естественное спаривание $\langle\ ,\ \rangle$ между $\mathrm{Der}(C)$ и $\Omega^1(C)$:

$$\left\langle z\frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}},\ \psi dq_j^{(\sigma)}\varphi\right\rangle = \psi z\varphi\delta_{j\nu}^{i\sigma}. \tag{4.2.9}$$

Упражнение 4.2.10. Покажите, что

$$Z(H) = \langle Z, d(H)\rangle, \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C), \quad \forall\ H \in C. \tag{4.2.11}$$

[Подсказка: обе части этого равенства являются дифференцированиями относительно H.]

Определим теперь, какие элементы в C (и $\Omega^1(C)$) следует считать тривиальными. Обозначим

$$\mathcal{T} = \sum_s \mathrm{Im}\,\partial_s \quad (\text{в } C \text{ или } \Omega^1(C)). \tag{4.2.12}$$

Классическое вариационное исчисление основано на понятии тривиальности, связанном с $\mathcal{T}$:

$$H \sim 0 \ (\text{или } \omega \sim 0) \text{ означает: } H \in \mathcal{T} \subset C \ (\text{или } \omega \in \mathcal{T} \subset \Omega^1(C)). \tag{4.2.13}$$

Как это работает в произвольной некоммутативной ситуации, объясняется в Приложении А3. Здесь мы *расширим* понятие тривиальности следующим образом. Определим

$$\mathrm{Com}(C) = [C, C] = \left\{\sum_l [\psi_l, \varphi_l] \mid \psi_l, \varphi_l \in C;\ \text{конечные суммы}\right\}, \tag{4.2.14}$$

$$\mathrm{Com}(\Omega^1(C)) = \left\{\sum_l (\psi_l\omega_l - \omega_l\psi_l) \mid \psi_l \in C,\ \omega_l \in \Omega^1(C);\ \text{конечные суммы}\right\}, \tag{4.2.15}$$

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^+(C) = \mathcal{T}^+_C = \mathcal{T} + \mathrm{Com}(C) \quad \text{в} \quad C, \tag{4.2.16}$$

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^+(\Omega^1(C)) = \mathcal{T}^+_{\Omega^1(C)} = \mathcal{T} + \mathrm{Com}(\Omega^1(C)) \quad \text{в} \quad \Omega^1(C). \tag{4.2.17}$$

Объявим любой элемент $(\cdot) \in \mathcal{T}^+$ (в C или $\Omega^1(C)$) тривиальным, и будем писать

$$(\cdot) \approx 0 \quad \text{если и только если} \quad (\cdot) \in \mathcal{T}^+. \tag{4.2.18}$$

Упражнение 4.2.19. Покажите, что

$$d(\mathcal{T}^+(C)) \subset \mathcal{T}^+(\Omega^1(C)), \tag{4.2.20}$$

$$Z(\mathrm{Com}(C)) \ \subset \mathrm{Com}(C), \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C), \tag{4.2.21}$$

$$Z(\mathrm{Com}(\Omega^1(C))) \subset \mathrm{Com}(\Omega^1(C)), \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C), \tag{4.2.22}$$

$$X(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, \quad X(\mathcal{T}^+) \subset \mathcal{T}^+, \quad \forall\ X \in D^{ev}(C), \tag{4.2.23}$$

$$\langle \mathrm{Der}(C), \mathrm{Com}(\Omega^1(C))\rangle \ \subset \mathrm{Com}(C), \tag{4.2.24}$$

$$\langle D^{ev}(C), \mathcal{T}(\Omega^1(C))\rangle \ \subset \mathcal{T}(C), \tag{4.2.25}$$

$$\langle D^{ev}(C), \mathcal{T}^+(\Omega^1(C))\rangle \ \subset \mathcal{T}^+(C). \tag{4.2.26}$$

[Подсказка к (4.2.23): $X(\partial_s(\cdot)) = \partial_s(X(\cdot)),\ \forall X \in D^{ev}(C)$;
Подсказка к (4.2.25): $\langle X, \partial_s(\cdot)\rangle = \partial_s(\langle X, (\cdot)\rangle),\ \forall X \in D^{ev}(C)$.]

Теперь можно вернуться к стандартной вариационной процедуре. Следующий логический шаг — снабдить фактор-пространство $\Omega^1(C)/\mathcal{T}^+(\Omega^1(C))$ структурой C–модуля. Определим объекты:

$$\Omega^1_0(C) = \Big\{\sum \psi_i dq_i \varphi_i \mid \psi_i, \varphi_i \in C;\ \text{конечные суммы}\Big\}, \tag{4.2.27}$$

$$\Omega^{1+}(C) = \Big\{\sum dq_i^{(\nu)} \varphi_i^\nu \mid \varphi_i^\nu \in C;\ \text{конечные суммы}\Big\}, \tag{4.2.28}$$

$$\Omega^{1+}_0(C) = \Big\{\sum dq_i \varphi_i \mid \varphi_i \in C;\ \text{конечные суммы}\Big\}. \tag{4.2.29}$$

Пусть $\mathrm{Flip} : \Omega^1(C) \to \Omega^{1+}(C)$ есть следующая проекция:

$$\mathrm{Flip}(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi) = dq_i^{(\nu)} \varphi \psi. \tag{4.2.30}$$

Мы видим, что

$$\mathrm{Flip}(\Omega^1_0(C)) \subset \Omega^{1+}_0(C), \tag{4.2.31}$$

$$(\mathrm{Flip} - 1)(\Omega^1(C)) \subset \mathrm{Com}(\Omega^1(C)). \tag{4.2.32}$$

Пусть $\widehat{\delta} : \Omega^1(C) \to \Omega^1_0(C)$ есть следующая проекция:

$$\widehat{\delta}(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi) = \sum_{\sigma \subset \nu} (-1)^\nu \binom{\nu}{\sigma} \psi^{(\sigma)} dq_i \varphi^{(\nu-\sigma)}, \tag{4.2.33}$$

где

$$\binom{\nu}{\sigma} = \binom{\nu_1}{\sigma_1} \dots \binom{\nu_m}{\sigma_m}, \quad (-1)^\nu = (-1)^{|\nu|}, \quad |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_m. \tag{4.2.34}$$

Операция $\widehat{\delta}$ является сутью “интегрирования по частям” в классическом вариационном исчислении.

Упражнение 4.2.35. Покажите, что

$$\widehat{\delta}(\omega) \sim \omega, \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(C), \tag{4.2.36}$$

$$(\langle Z, \mathrm{Flip}(\omega)\rangle - \langle Z, \omega\rangle) \in \mathrm{Com}(\Omega^1(C)), \quad \forall\, Z \in \mathrm{Der}(C). \tag{4.2.37}$$

Рассмотрим отображение $d^+ : C \to \Omega^{1+}(C)$,

$$d^+ = \mathrm{Flip} \circ d. \tag{4.2.38}$$

Для любого $H \in C$, определим $\dfrac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}} \in C$ посредством соотношения

$$d^+(H) = \sum dq_i^{(\nu)} \frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}}. \tag{4.2.39a}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}, \mathrm{Flip}\, d(H) \Big\rangle. \tag{4.2.39b}$$

Теперь мы можем определить вариационные производные. Положим

$$\delta = \widehat{\delta} d^+ = \widehat{\delta}\, \mathrm{Flip} \circ d : C \to \Omega^{1+}_0(C). \tag{4.2.40}$$

Тогда, для любого $H \in C$ имеем

$$\delta(H) = \widehat{\delta} d^+(H) \overset{(4.2.39a)}{=} \widehat{\delta}\Big(\sum dq_i^{(\nu)} \frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}}\Big) =$$

$$= \sum dq_i (-\partial)^\nu \Big(\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}}\Big) = \sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i} \quad \Rightarrow \tag{4.2.41}$$

$$\frac{\delta H}{\delta q_i} = \sum_\nu (-\partial)^\nu \left(\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}}\right), \tag{4.2.42}$$

где

$$(-\partial)^\nu = (-1)^\nu \partial^\nu.$$

Оператор δ будет называться *оператором Эйлера-Лагранжа*. В абелевом случае, формула (4.2.42) приводит к стандартному выражению для вариационных производных.

Упражнение 4.2.43. Рассмотрим $C = \mathbb{Q}\langle h^{(j)} \rangle$, $H = h^3 - \frac{1}{2} h^{(1)2}$. Покажите, что

$$\frac{\delta H}{\delta h} = 3h^2 + h^{(2)},$$

и тем самым формула (4.1.16) обоснована.

Утверждение 4.2.44.

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\mathcal{T}^+(\Omega^1(C)) = \{0\}. \tag{4.2.45}$$

Доказательство. 1) Имеем:

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}([\chi, \psi dq_i^{(\nu)} \varphi]) = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\chi\psi dq_i^{(\nu)} \varphi - \psi dq_i^{(\nu)} \varphi\chi)$$
$$= \widehat{\delta}(dq_i^{(\nu)} \varphi\chi\psi - dq_i^{(\nu)} \varphi\chi\psi) = \widehat{\delta}(0) = 0;$$

2) Покажем, что

$$\mathrm{Flip} \circ \partial_s = \partial_s \circ \mathrm{Flip}\,. \tag{4.2.46}$$

Действительно,

$$\mathrm{Flip}(\partial_s(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi)) = \mathrm{Flip}\Big(\partial_s(\psi) dq_i^{(\nu)} \varphi + \psi dq_i^{(\nu+1_s)} \varphi + \psi dq_i^{(\nu)} \partial_s(\varphi)\Big) =$$
$$= dq_i^{(\nu)} \varphi \partial_s(\psi) + dq_i^{(\nu+1_s)} \varphi\psi + dq_i^{(\nu)} \partial_s(\varphi)\psi = \partial_s(dq_i^{(\nu)} \varphi\psi) = \partial_s\,\mathrm{Flip}(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi).$$

Следовательно, согласно (4.2.49), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\,\partial_s = 0$. ∎

Заметим, что в части 1) приведенного доказательства мы нашли, что

$$\mathrm{Flip} \circ \mathrm{ad}_\chi = 0, \quad \forall\, \chi \in C. \tag{4.2.47}$$

Упражнение 4.2.48. Покажите, что

$$\widehat{\delta}(\mathcal{T}) = \{0\}. \tag{4.2.49}$$

[Подсказка: это то же самое, что Утверждение A3.1.50.]

Следствие 4.2.50. Для $H \in C$,

$$H \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta H}{\delta q_i} = 0, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}. \tag{4.2.51}$$

Доказательство. Если $H \in \mathcal{T}^+(C)$, то $d(H) \in \mathcal{T}^+(\Omega^1(C))$ по формуле (4.2.20). Следовательно, $\delta(H) = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip} \circ d(H) = 0$ по формуле (4.2.45). ∎

Итак, для тривиальных лагранжианов вариационные производные равны нулю. Из этого успокоительного факта выводится, по абелеву образцу, следующий аналог Леммы Дюбуа-Реймона:

Упражнение 4.2.52.

$$\{\varphi \in C \ \&\ C\varphi \approx 0\} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0. \tag{4.2.53}$$

Следствие 4.2.54.

$$\{\omega \in \Omega_0^{1+}(C) \ \&\ \langle D^{ev}, \omega\rangle \approx 0\} \quad \Rightarrow \quad \omega = 0. \tag{4.2.55}$$

Доказательство. Если $\omega = \sum\limits_i dq_i \varphi_i$, то

$$0 \approx \left\langle C\frac{\partial}{\partial q_j}, \omega\right\rangle = C\varphi_j \quad \Rightarrow \quad \varphi_j = 0, \quad \forall\, j \in \mathcal{I}. \qquad ∎$$

Следующая Теорема подготавливает почву для формулы для первой вариации.

Теорема 4.2.56. (i) если $\omega \in \Omega_0^{1+}(C)$ и $\omega \approx 0$, то $\omega = 0$;
(ii) если $\omega \in \Omega^1(C)$ и $\omega \approx 0$, то $\langle D^{ev}, \omega\rangle \approx 0$;
(iii) если $\omega \in \Omega^1(C)$ и $\langle D^{ev}, \omega\rangle \approx 0$, то $\omega \approx 0$;
(i^4) проекция $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip} : \Omega^1(C) \to \Omega_0^{1+}(C)$ одиозначно определяется соотношением $\langle X, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega)\rangle \approx \langle X, \omega\rangle$, $\forall X \in D^{ev}$;
(i^5) $\mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}) = \mathcal{T}^+(\Omega^1(C))$.

Доказательство. (ii) следует из (4.2.26);

(i) если $\omega \approx 0$, то $\langle D^{ev}, \omega\rangle \approx 0$ согласно (ii). Следовательно, $\omega = 0$ в силу (4.2.55);

(i^4) Единственность следует из (4.2.55). Существование следует из формул (4.2.36, 32), которые можно подытожить в виде

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) \approx \omega, \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(C), \tag{4.2.57}$$

и из (ii);

(i^5) если $\omega \in \mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip})$, то есть $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$, то $\omega \approx 0$ в силу (4.2.57). Следовательно, $\mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}) \subset \mathcal{T}^+$. Наоборот, если $\omega \in \mathcal{T}^+$, то есть $\omega \approx 0$, то $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) \approx 0$ в силу (4.2.57). Тогда, согласно (i), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$, то есть $\omega \in \mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip})$. Итак, $\mathcal{T}^+ \subset \mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip})$;

(i^3) Согласно (4.2.57), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) - \omega \approx 0$. Следовательно, в силу (ii), $\langle D^{ev}, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) - \omega\rangle \approx 0$, так что $\langle D^{ev}, \omega\rangle \approx \langle D^{ev}, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega)\rangle$. Тогда, если $\langle D^{ev}, \omega\rangle \approx 0$, то $\langle D^{ev}, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega)\rangle \approx 0$. Следовательно, согласно (4.2.55), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$. Тогда, опять в силу (4.2.57), $\omega \approx \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$. ∎

Следствие 4.2.58. (Формула для первой вариации) Зафиксируем $H \in C$. Тогда для любого $X \in D^{ev}(C)$,

$$X(H) \approx \sum_i X_i \frac{\delta H}{\delta q_i} =: X^t \frac{\delta H}{\delta q}, \quad X_i := X(q_i), \tag{4.2.59}$$

и это соотношение *однозначно определяет* вектор $\frac{\delta H}{\delta q}$.

Доказательство. Единственность следует из формулы (4.2.53). Существование:

$$X(H) \overset{(4.2.11)}{=} \langle X, d(H) \rangle \overset{\text{Т. 4.2.56(i) и (4.2.57)}}{\approx}$$
$$\approx \langle X, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\, d(H) \rangle = \langle X, \delta(H) \rangle = \left\langle X, \sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i} \right\rangle = \sum X_i \frac{\delta H}{\delta q_i}. \qquad \blacksquare$$

4.3 Формула преобразования вариационной производной

> Omlet, Omlet, dies is dein Feyder's spooke.
>
> *Гамлет*, перевод на голландский

Пусть $C_1 = C(u) = R\langle u_\eta^{(\nu)} \rangle$ — еще одна дифференциальная алгебра. *(Дифференциальный) гомоморфизм* $\Phi : C \to C_1$ — это такой гомоморфизм над R, который коммутирует со всеми ∂_s. Он однозначно определен вектором

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_i), \quad \Phi_i = \Phi(q_i) : \tag{4.3.1}$$

$$\Phi(q_i^{(\nu)}) = \Phi \partial^\nu (q_i) = \partial^\nu \Phi(q_i) = \partial^\nu (\Phi_i). \tag{4.3.2}$$

Φ можно однозначно продолжить до отображения $\Omega^1(C) \to \Omega^1(C_1)$, по правилу

$$\Phi(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi) = \Phi(\psi) d(\partial^\nu (\Phi_i)) \Phi(\varphi), \tag{4.3.3}$$

так что Φ коммутирует с d :

$$\Phi\, d_C = d_{C_1} \Phi : \ C \to \Omega^1(C_1). \tag{4.3.4}$$

Пусть $H \in C$. Из абелева вариационного исчисления известны следующие формулы, связывающие вариационные производные от H и $\Phi(H)$:

$$\frac{\delta \Phi(H)}{\delta \boldsymbol{u}} = D(\mathbf{\Phi})^\dagger \Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) = \sum_i D(\Phi_i)^\dagger \Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_i}\Big), \tag{4.3.5}$$

или, покомпонентно,

$$\frac{\delta \Phi(H)}{\delta u_\eta} = \sum_i \left(\frac{D\Phi_i}{Du_\eta}\right)^\dagger \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_i}\right). \tag{4.3.6}$$

Здесь $D(\Phi_i) = \left(\dfrac{D\Phi_i}{Du_\eta}\right)$ есть производная Фреше от Φ_i. В этом разделе мы доказываем, что формула (4.3.6) остается верной в общей неабелевой ситуации, при условии правильной интерпретации объектов $D(\Phi_i)$ и $D(\Phi_i)^\dagger$. (См. об этом также Приложение А3).

Начнем с понятия производной Фреше. Для любого $H \in C$, вектор из операторов $D(H) = \left(\frac{DH}{Dq_i}\right)$ определяется по правилу

$$X(H) = \sum_i \frac{DH}{Dq_i}(X_i) = \frac{DH}{Dq}(X) = D(H)(X), \quad \forall\, X \in D^{ev}(C). \tag{4.3.7}$$

Так как $X = \sum \partial^\nu(X_i)\frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}$, то, чтобы определить координатное выражение для $\frac{DH}{Dq_i}$, нам нужна формула

$$\Big(\chi\frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}\Big)(H) = \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}(\chi), \quad \forall\, \chi \in C. \tag{4.3.8}$$

Это показывает, что $\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}$ — элемент *не* из C, а из большего кольца $Op_0(C)$, порожденного операторами $\widehat{L}_\varphi\widehat{R}_\psi$:

$$Op_0(C) = \{\sum_s \widehat{L}_{\psi(s)}\widehat{R}_{\varphi(s)} \mid \psi(s), \varphi(s) \in C, \text{ конечные суммы}\}. \tag{4.3.9}$$

Таким образом,

$$X(H) = \Big(\sum \partial^\nu(X_i)\frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}\Big)(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}(\partial^\nu(X_i)) = \sum_i\Big(\sum_\nu \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}\partial^\nu\Big)(X_i), \tag{4.3.10}$$

откуда

$$\frac{DH}{Dq_i} = \sum_\nu \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}\partial^\nu. \tag{4.3.11}$$

Это — знакомая формула, но выражение $\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}$ имеет новый смысл. Мы видим, что $\frac{DH}{Dq_i}$ принадлежит $Op_0(C)[\partial^\nu]$, а не $C[\partial^\nu]$.

Упражнение 4.3.12. Покажите, что

$$\frac{DH}{Dq_i}(\chi) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(H|_{q_i\mapsto q_i+\varepsilon\chi}). \tag{4.3.13}$$

Упражнение 4.3.14. Покажите, что частные производные $\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}} \in C$ и $\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}} \in Op_0(C)$ связаны формулой

$$\frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}(\chi) \approx \frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(\nu)}}\chi, \quad \forall\, \chi \in C. \tag{4.3.15}$$

Далее, сопряженные операторы. Допустим, $\mathcal{R} \in Op_0(C)[\partial^\nu]$. Его сопряженный, $\mathcal{R}^\dagger \in Op_0(C)[\partial^\nu]$, определяется посредством соотношения

$$x\mathcal{R}(y) \approx \mathcal{R}^\dagger(x)y, \quad \forall\, x, y \in C. \tag{4.3.16}$$

Единственность сопряженного оператора следует из формулы (4.2.53). Существование следует из следующего вычисления: если $\mathcal{R} = \widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma$, то

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}(y) = x\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma(y) = x\psi y^{(\sigma)}\varphi \approx \varphi x\psi y^{(\sigma)} \sim |(-\partial)^\sigma(\varphi x\psi)]y = \\ = \{|(-\partial)^\sigma \widehat{L}_\varphi \widehat{R}_\psi](x)\}y, \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

откуда

$$(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma)^\dagger = (-\partial)^\sigma \widehat{L}_\varphi \widehat{R}_\psi. \tag{4.3.18}$$

Если $\mathcal{R} \in \mathrm{Mat}(Op_0(C)[\partial^\nu])$ — матричный, а не скалярный оператор, то формула-определение для сопряженного оператора принимает вид

$$\boldsymbol{x}^t\mathcal{R}(\boldsymbol{y}) \approx [\mathcal{R}^\dagger(\boldsymbol{x})]^t\boldsymbol{y}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in C^{(\cdot)}, \quad \forall\, \boldsymbol{y} \in C^{(\cdot\cdot)}, \tag{4.3.19a}$$

дальше все по прежнему, и мы получаем обычную формулу

$$(\mathcal{R}^\dagger)_{\alpha\beta} = (\mathcal{R}_{\beta\alpha})^\dagger. \tag{4.3.19b}$$

Лемма 4.3.20.

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(d(H)\chi) = \sum_i dq_i \left(\frac{DH}{Dq_i}\right)^\dagger(\chi), \quad \forall\, H, \chi \in C. \tag{4.3.21}$$

Доказательство. Так как

$$d(H) = \sum_{i\nu} \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}}(dq_i^{(\nu)}) = \sum_i \frac{DH}{Dq_i}(dq_i) \tag{4.3.22}$$

(почему?), то формула (4.3.21) вытекает из следующей формулы:

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\{[(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma)(dq_i)]\chi\} = dq_i(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma)^\dagger(\chi). \tag{4.3.23}$$

Для доказательства последней, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\{[(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \delta^\sigma)(dq_i)]\chi\} = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\psi dq_i^{(\sigma)}\varphi\chi) = \widehat{\delta}(dq_i^\sigma\varphi\chi\psi) = dq_i(-\partial)^\sigma(\varphi\chi\psi) \\ = dq_i[(-\partial)^\sigma \widehat{L}_\varphi \widehat{R}_\psi](\chi), \end{aligned}$$

и это есть правая часть (4.3.23), с учетом формулы (4.3.18). ∎

С этого момента мы будем использовать обозначение

$$\widehat{\delta}^+ = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}. \tag{4.3.24}$$

Индекс '1' будем использовать, чтобы различать операции в C_1 и C.

Лемма 4.3.25.

$$\widehat{\delta}_1^+\Phi\widehat{\delta}^+ = \widehat{\delta}_1^+\Phi : \quad \Omega^1(C) \to \Omega_0^{1+}(C_1). \tag{4.3.26}$$

Доказательство. Докажем, что

$$\widehat{\delta}_1^+ \Phi(\widehat{\delta}^+ - 1) = 0. \tag{4.3.27}$$

Выберем $\omega \in \Omega^1(C)$. В силу формулы (4.2.57), $(\widehat{\delta}^+ - 1)(\omega) \approx 0$. Поскольку

$$\Phi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_1, \quad \Phi(\mathrm{Com}(\cdot)) \subset \mathrm{Com}(\cdot)_1, \quad \Phi(\mathcal{T}^+) \subset \mathcal{T}_1^+, \tag{4.3.28}$$

то отсюда следует, что $\Phi(\widehat{\delta}^+ - 1)(\omega) \approx 0$. Тогда, по (4.2.45), $\widehat{\delta}_1^+ \Phi(\widehat{\delta}^+ - 1)(\omega) = 0$. ∎

Доказательство. формулы (4.3.6). Имеем,

$$\sum_\eta du_\eta \frac{\delta\Phi(H)}{\delta u_\eta} = \delta_1 \Phi(H) = \widehat{\delta}_1^+ d\Phi(H) = \widehat{\delta}_1^+ \Phi d(H) \overset{(4.3.26)}{=}$$

$$= \widehat{\delta}_1^+ \Phi \widehat{\delta}^+ d(H) = \widehat{\delta}_1^+ \Phi \delta(H) = \widehat{\delta}_1^+ \Phi\Big(\sum_i dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i}\Big) =$$

$$= \widehat{\delta}_1^+ \Big[\sum d(\Phi_i)\Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_i}\Big)\Big] \overset{(4.3.21)}{=} \sum_\eta du_\eta \sum_i \Big(\frac{D\Phi_i}{Du_\eta}\Big)^\dagger \Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_i}\Big). \quad ∎$$

∎

4.4 Вариационый комплекс

> Всех алхимиков, бывших в полнейшей уверенности, что волшебная формула почти у них в руках, ждало разочарование. Бернард из Трева в 1450 г. был убежден, что нашел непогрешимый рецепт для получения золота. Он смешал две тысячи яичных желтков с равными частями оливкового масла и купороса, и затем запекал этот гуляш на медленном огне в течение двух недель. Все, чего ему удалось добиться, это отравить своих свиней.
>
> **Тимоти Грин**

В этом разделе мы находим ядро н образ оператора Эйлера-Лагранжа δ.

Пусть $\partial_{m+1} : R \to 0$ есть новое дифференцирование, действующее тривиально на R. Пусть $\bar{C} = R\langle q_i^{(\bar{\nu})}\rangle$, $i \in \mathcal{I}$, $\bar{\nu} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$ есть новая дифференциальная алгебра. Обозначая $\bar{\nu} = (\nu|n)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мы идентифицируем C с подпространством в $\bar{C}$, состоящим из элементов $R\langle q_i^{(\nu|0)}\rangle$. Пусть $\tau : \Omega^1(C) \to \bar{C}$ есть следующнй гомоморфизм C–бимодулей:

$$\tau(\psi dq_i^{(\nu)} \varphi) = \psi q_i^{(\nu|1)} \varphi. \tag{4.4.1}$$

Очевидпо,

$$\tau(\mathrm{Com}(\Omega^1(C)) \subset \mathrm{Com}(\bar{C}), \tag{4.4.2}$$

$$\tau\partial_s = \partial_s\tau, \quad s = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow \tag{4.4.3}$$

$$\tau(\mathcal{T}_{\Omega^1(C)}) \subset \mathcal{T}_{\bar{C}}, \tag{4.4.4}$$

$$\tau(\mathcal{T}^+_{\Omega^1(C)}) \subset \mathcal{T}^+_{\bar{C}}. \tag{4.4.5}$$

Лемма 4.4.6.

$$\tau d(H) = \partial_{m+1}(H), \quad \forall\, H \in C. \tag{4.4.7}$$

Доказательство.

$$\partial_{m+1}(H) = \Big(\sum q_i^{(\nu|1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}\Big)(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}} (q_i^{(\nu|1)}) =$$

$$= \tau\Big(\sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\nu)}} (dq_i^{(\nu)})\Big) = \tau d(H). \quad \blacksquare$$

Чтобы различать операции в C и в $\bar{C}$, будем писать черту над операциями в $\bar{C} : \bar{\delta}$, и т.д..

Теорема 4.4.8. Последовательность

$$C \xrightarrow{\delta} \Omega_0^{1+}(C) \xrightarrow{\bar{\delta}\tau} \Omega_0^{1+}(\bar{C}) \tag{4.4.9}$$

является комплексом, то есть

$$\bar{\delta}\tau\delta = 0. \tag{4.4.10}$$

Доказательство. Выберем $H \in C$. Тогда $\delta(H) = \widehat{\delta}^{+} d(H) \overset{(4.2.57)}{\approx} d(H)$. Следовательно, в силу (4.4.5), $\tau\delta(H) \approx \tau d(H) \overset{(4.4.7)}{=} \partial_{m+1}(H) \sim 0$. Следовательно, согласно (4.2.45), $\bar{\delta}\tau\delta(H) = 0$. ▮

Запишем теперь формулу (4.4.10) покомпонентно. Пусть $R' \supset R$ является дифференциальное расширение R, с коммутирующими дифференцированиями $\partial_1, \dots, \partial_m$ действующими на R' как положено. Тогда мы получим соответствующие расширения $C' = R'\langle q_i^{(\nu)} \rangle \supset C$, $\Omega^1(C') \supset \Omega^1(C)$, и т.д.. Анализируя доказательство Леммы 4.3.20, легко заметить, что природа χ была несущественна в рассуждениях, и утверждение (4.3.21) можно переформулировать так:

$$\widehat{\delta}^{+}(d(H)\chi) = \sum_i dq_i \Big(\frac{DH}{Dq_i}\Big)^{\dagger}(\chi), \quad \forall\, H \in C, \quad \forall\, \chi \in C'. \tag{4.4.11}$$

Ниже мы будем использовать эту формулу в еще более общем случае, когда $C' = C\langle q_i^{(\nu|1)} \rangle$, при этом подразумевается, что образующие $q_i^{(\nu|1)}$ из C' не коммутируют с элементами коэффициентов кольца C. Итак, отождествим $\Omega_0^{1+}(C)$ с C^N, $N = |\mathcal{I}|$:

$$V = \sum_i dq_i V_i \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{V} = (V_i). \tag{4.4.12}$$

Теорема 4.4.13. Для $V \in \Omega_0^{1+}(C)$, равенство $\bar{\delta}\tau(V) = 0$ эквивалентно равенству

$$D(\boldsymbol{V}) = D(\boldsymbol{V})^{\dagger}. \tag{4.4.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\bar{\delta}\tau(V) = \bar{\delta}\tau\Big(\sum_i dq_i V_i\Big) = \bar{\delta}\Big(\sum_i q_i^{(0|1)} V_i\Big) = \sum_j dq_j \frac{\delta}{\delta q_j}\Big(\sum_i q_i^{(0|1)} V_i\Big) =$$

$$= \sum_j dq_j \sum_{i\nu n} (-\partial)^{\nu} (-\partial_{m+1})^{n} \frac{\partial^{+}}{\partial q_j^{(\nu|n)}} (q_i^{(0|1)} V_i) =$$

$$= \sum_j dq_j \Big[\sum_{\nu i} (-\partial)^{\nu} \frac{\partial^{+}}{\partial q_i^{(\nu)}} (q_i^{(0|1)} V_i) - \partial_{m+1}(V_j) \Big].$$

Следовательно, равенство $\bar{\delta}\tau(V) = 0$ эквивалентно система уравнений

$$\partial_{m+1}(V_j) = \sum_\nu (-\partial)^\nu \frac{\partial^+}{\partial q_j^{(\nu)}} \Big(\sum_i q_i^{(0|1)} V_i \Big), \quad \forall\, j \in \mathcal{I}. \tag{4.4.15}$$

Далее, ∂_{m+1} есть эволюционная производная с

$$\partial_{m+1}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}^{(0|1)}, \tag{4.4.16}$$

так что, согласно (4.3.7), левая часть (4.4.15) принимает вид

$$\partial_{m+1}(V_j) = \sum \frac{DV_j}{Dq_i}(q_i^{(0|1)}). \tag{4.4.17}$$

Далее, из (4.2.27) и (4.2.39b) следует

$$\frac{\partial^+}{\partial q_j^{(\nu)}}(q_i^{(0|1)} V_i) = \frac{\partial^+}{\partial q_j^{(\nu)}}(V_i q_i^{(0|1)}), \tag{4.4.18}$$

так что для правой части (4.4.15) получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_j dq_j \sum_\nu (-\partial)^\nu \frac{\partial^+}{\partial q_j^{(\nu)}} \Big(\sum_i V_i q_i^{(0|1)} \Big) = \\
&= \sum dq_j \sum_{\nu i} (-\partial)^\nu \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_j^{(\nu)}}, \operatorname{Flip} d(V_i q_i^{(0|1)}) \Big\rangle = \\
&= \sum dq_j \sum (-\partial)^\nu \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}, \operatorname{Flip}(d(V_i) q_i^{(0|1)}) \Big\rangle = \\
&= \sum_i \widehat{\delta}(\operatorname{Flip}(d(V_i) q_i^{(0|1)})) \overset{(4.4.11)}{=} \\
&= \sum_j dq_j \sum_i \left(\frac{DV_i}{Dq_j} \right)^\dagger (q_i^{(0|1)}),
\end{aligned}$$

откуда равенство (4.4.15) принимает вид

$$\sum_i \frac{DV_j}{Dq_i}(q_i^{(0|1)}) = \sum_i \left(\frac{DV_i}{Dq_j} \right)^\dagger (q_i^{(0|1)}). \tag{4.4.19}$$

Так как образующие $q_i^{(\nu|1)}$ в $C\langle q_i^{(\nu|1)} \rangle$ дифференциально независимы над C, равенство (4.4.19) эквивалентно равенству

$$\frac{DV_j}{Dq_i} = \left(\frac{DV_i}{Dq_j} \right)^\dagger, \tag{4.4.20}$$

которое является формой записи формулы (4.4.14) в матричных элементах. ∎

Следствие 4.4.21.

$$D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) = \Big[D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) \Big]^\dagger, \quad \forall\, H \in C. \tag{4.4.22}$$

Доказательство. Из формулы (4.4.10), $\bar{\delta}\tau(\delta(H)) = 0$, и тогда искомый результат следует из Теоремы 4.4.13. ▮

Теперь мы в состоянии определить образ вариационного оператора δ.

Теорема 4.4.23. Последовательность (4.4.9) точна, то есть, если $V \in \Omega_0^{1+}(C)$ таково, что $\bar{\delta}\tau(V) = 0$, то существует $H \in C$ такой, что $V = \delta(H)$.

Доказательство. Пусть $A_t : C \to C[t]$ — гомоморфизм над R, перводящий $q_i^{(\nu)}$ в $tq_i^{(\nu)}$, $\forall i \in \mathcal{I}$, $\forall \nu \in \mathbb{Z}_+^m$. Тогда A_t естественным образом продолжается в $Op_0(C)[\partial^\nu]$:

$$A_t(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma) = \widehat{L}_{A_t(\psi)} \widehat{R}_{A_t(\varphi)} \partial^\sigma. \tag{4.4.24}$$

Мы также продолжим A_t в $\Omega_0^{1+}(C)$ так, что изоморфизм $\Omega_0^{1+}(C) \approx C^N$ сохранится:

$$A_t\Big(\sum dq_i V_i\Big) = \sum dq_i A_t(V_i). \tag{4.4.25}$$

Лемма 4.4.26. $A_t(\mathrm{Ker}(\bar{\delta}\tau)) \subset \mathrm{Ker}(\bar{\delta}\tau)$ в $\Omega_0^{1+}(C)$.

Доказательство. Это следует из равенства

$$\bar{\delta}\tau A_t = A_t \bar{\delta}\tau \quad \text{на} \quad \Omega_0^{1+}(C), \tag{4.4.27}$$

которое истинно, так как операция $\bar{\delta}\tau$ перводят $dq_i V_i$ в $\sum_j dq_j \dfrac{\delta}{\delta q_j}(q_i^{(0|1)} V_i)$ и, следовательно, сохраняет q–степень V_i. ▮

Итак,

$$\bar{\delta}\tau A_t(V) = 0. \tag{4.4.28}$$

Далее, положим

$$H = \int_0^1 dt \langle X^{rad}, A_t(V) \rangle, \tag{4.4.29}$$

где X^{rad} есть радиальное эволюционное поле:

$$X^{rad} = \sum q_i^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}, \quad \boldsymbol{X}^{rad} = \boldsymbol{q}. \tag{4.4.30}$$

Мы собираемся показать, что

$$\delta(H) = V. \tag{4.4.31}$$

Согласно Следствию 4.2.58, это эквивалентно равенству

$$X(H) \approx \langle X, V \rangle = \boldsymbol{X}^t \boldsymbol{V}, \quad \forall\, X \in D^{ev}(C). \tag{4.4.32}$$

Имеем,

$$X(H) = X\Big(\int_0^1 dt \sum_i q_i A_t(V_i)\Big) = \sum_i \int_0^1 dt\, [X_i A_t(V_i) + q_i X(A_t(V_i))]. \tag{4.4.33}$$

Далее,

$$\sum_i q_i X(A_t(V_i)) = \sum q_i \frac{D(A_t(V_i))}{Dq_j}(X_j) \approx$$
$$\approx \sum \left(\frac{D(A_t(V_i))}{Dq_j}\right)^{\dagger}(q_i) \cdot X_j \overset{(4.4.28),\,(4.4.20)}{\approx}$$
$$\approx \sum X_j \frac{D(A_t(V_j))}{Dq_i}(q_i) = \sum_j X_j X^{rad}(A_t(V_j)),$$

так что равенство (4.4.33) принимает вид:

$$X(H) \approx \sum_j X_j \int_0^1 dt\, [A_t(V_j) + X^{rad} A_t(V_j)]. \tag{4.4.34}$$

Так как дифференцирование X^{rad} имеет нулевую степень по q, то

$$X^{rad} A_t = A_t X^{rad}, \tag{4.4.35}$$

равенство (4.4.34) принимает вид

$$X(H) \approx \sum_j X_j \int_0^1 dt\, A_t(1 + X^{rad})(V_j), \tag{4.4.36}$$

и доказываемая формула (4.4.32) следует из равенства (4.4.36) и тождества

$$\int_0^1 dt\, A_t(1 + X^{rad}) = \mathbf{1} \quad \text{на} \quad C. \tag{4.4.37}$$

Чтобы доказать последнее, рассмотрим любой одночлен $\chi = k q_{i(1)}^{\nu(1)} \dots q_{i(n)}^{\nu(n)}$ степени $n > 0$. (Если $n = 0$, тождество очевидно). Тогда

$$(1 + X^{rad})(\chi) = [1 + \deg(\chi)]\chi,$$

так что

$$A_t(1 + X^{rad})(\chi) = t^{\deg(\chi)}[1 + \deg(\chi)]\chi,$$

и следовательно

$$\int_0^1 dt\, A_t(1 + X^{rad})(\chi) = \int_0^1 dt\, t^{\deg(\chi)}[1 + \deg(\chi)]\chi = \chi. \qquad \blacksquare$$

У нас теперь есть все необходимое для определения $\mathrm{Ker}(\delta)$.

Теорема 4.4.38. $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathcal{T}^+ + R$.

Доказательство. Нам нужна формула

$$X^{rad} = (A_t)^{-1} t \frac{\partial}{\partial t} A_t \quad \text{на} \quad C. \tag{4.4.39}$$

(Каждая часть этого равенства является аддитивным отображением переводищим одночлен $\chi \in C$ в $\deg(\chi)\chi$.) Мы используем эту формула в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} A_t = t^{-1} A_t X^{rad}. \tag{4.4.40}$$

Для любого $\varphi \in C$ имеем

$$\varphi - \varphi|_{q=0} = A_1(\varphi) - A_0(\varphi) = \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} A_t(\varphi) \overset{(4.4.40)}{=}$$

$$= \int_0^1 dt\, t^{-1} A_t X^{rad}(\varphi) \approx \int_0^1 dt\, t^{-1} A_t (X^{rad})^t \frac{\delta \varphi}{\delta q}. \tag{4.4.41}$$

Следовательно, если $\varphi \in \operatorname{Ker}(\delta)$, то есть, $\dfrac{\delta\varphi}{\delta q} = 0$, то

$$\varphi \approx \varphi|_{q=0} \in R. \qquad \blacksquare \tag{4.4.42}$$

4.5 Формула вычетов

> ...со словарем, столь же мистическим и гибким, как второе начало термодинамики ... он был математиком слов. Он складывал их в акробатические узоры, полные каббалистической нежности.
>
> Бен Хехт о поэте Максе Боденхейме

В этом разделе мы возвращаемся к кольцу псевдо-дифференциальных операторов из главы 1 и выводим полностью некоммутативный аналог формулы вычетов из §1.2.

Пусть $C = R\langle u_i^{(\ell)} \rangle$, $i, \ell \in \mathbb{Z}_+$,. В кольце $C((\xi^{-1}))$ зафиксируем элемент

$$\mathcal{L} = \xi^N + \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^{N-1-i}. \tag{4.5.1}$$

Пусть $C_1 = R\langle v_i^{(\ell)} \rangle$, $i, \ell \in \mathbb{Z}_+$, есть другое дифференциальное кольцо с $m = 1$. В кольце $C_1((\xi^{-1}))$ зафиксируем элемент

$$L = \xi + \sum_{i=0}^{\infty} v_i \xi^{-i}. \tag{4.5.2}$$

По Лемме 3.9.44, дифференциальный гомоморфизм $\Phi : C_1 \to C$,

$$\Phi(L) = \mathcal{L}^{1/N}, \quad \Phi^{-1}(\mathcal{L}) = L^N, \tag{4.5.3}$$

является обратимым изоморфизмом. Как в §1.2, мы можем построить $C((\xi^{-1}))$–бимодуль $\Omega^1(C)((\xi^{-1}))$ и превратить дифференциал d из дифференцирования $C \to \Omega^1(C)$ в дифференцирование $d:\ C((\xi^{-1})) \to \Omega^1(C)((\xi^{-1}))$, считая, что d коммутирует с ξ.

Теорема 4.5.4. (Формула вычетов для L)

$$d\operatorname{Res}(L^n) \approx n \operatorname{Res}(L^{n-1} d(L)) \approx n \operatorname{Res}(d(L) L^{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.5}$$

Доказательство. Последнее соотношение следует из доказательства Утверждения 4.1.19: формула (4.1.21) остается верной также, если r_2 принадлежит $\Omega^1(C)$, а не C. Далее,

$$d\,\mathrm{Res}(L^n) = \mathrm{Res}\,d(L^n) \text{ [так как } d \text{ — дифференцирование]} = \\ = \mathrm{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} L^s d(L) L^{n-1-s}\Big) \overset{(4.1.21)}{\approx} \\ \approx \mathrm{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} L^{n-1-s} L^s d(L)\Big) = n\,\mathrm{Res}(L^{n-1}d(L)). \qquad \blacksquare$$

Следствие 4.5.6.

$$d\,\mathrm{Res}(L^{N+M}) \approx \frac{N+M}{N}\,\mathrm{Res}\Big(L^M d(L^N)\Big), \quad \forall\, N, M \in \mathbb{N}. \tag{4.5.7}$$

Доказательство. В силу (4.5.5), левая часть $\approx (N+M)\,\mathrm{Res}(L^{N+M-1}d(L))$. С другой стороны,

$$\mathrm{Res}[L^M d(L^N)] = \mathrm{Res}\Big(L^M \sum_{s=0}^{N-1} L^s d(L) L^{N-1-s}\Big) \approx N\,\mathrm{Res}(L^{N+M-1}d(L)). \qquad \blacksquare$$

Следствие 4.5.8. (Формула вычетов для $\mathcal{L}$)

$$d\,\mathrm{Res}(\mathcal{L}^{n/N}) \approx \frac{n}{N}\,\mathrm{Res}[\mathcal{L}^{n/N-1}d(\mathcal{L})], \quad \forall\, n > N. \tag{4.5.9}$$

Доказательство. Положим в формуле (4.5.7) $n = N + M$, $L^N = \mathcal{L}$. $\blacksquare$

Используем выведенные формулы вычетов в духе гамильтоновых вычислений, проведенных в главах 1 и 2. Положим

$$H_n = n^{-1}\,\mathrm{Res}(L^n), \tag{4.5.10}$$

$$L^n = \sum \xi^s p_s(n), \tag{4.5.11}$$

$$\mathcal{H}_n = Nn^{-1}\,\mathrm{Res}(\mathcal{L}^{n/N}), \tag{4.5.12}$$

$$\mathcal{L}^{n/N} = \sum \xi^s \pi_s(n). \tag{4.5.13}$$

Тогда из формулы (4.5.5) следует

$$d(H_{n+1}) \approx \mathrm{Res}\left(\sum dv_i \xi^{-i} \xi^s p_s(n)\right) = \sum dv_i p_{i-1}(n) \quad \Rightarrow \tag{4.5.14}$$

$$p_{i-1}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta v_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.15}$$

$${}_{\geqslant -1}(L^n) = \sum_{i \geqslant 0} \xi^{i-1} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta v_i}. \tag{4.5.16}$$

Замечание 4.5.17. Все наши формулы применим когда v_0 (или u_0) отсутствует. В этом случае все члены с v_0 следует исключить. Например, формула (4.5.15) примет вид

$$p_i(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta v_{i+1}}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5.18}$$

Аналогично, из формулы (4.5.9) следует

$$d(\mathcal{H}_{n+N}) \approx \operatorname{Res}\left(\sum du_i \xi^{N-1-i} \xi^s \pi_s(n)\right) = \sum du_i \pi^{(n)}_{i-N} \quad \Rightarrow \tag{4.5.19}$$

$$\pi_{i-N}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+N}}{\delta u_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.5.20}$$

$$\geqslant_{-N}(\mathcal{L}^{n/N}) = \sum_{i \geqslant 0} \xi^{i-N} \frac{\delta \mathcal{H}_{n+N}}{\delta u_i}. \tag{4.5.21}$$

4.6 Преобразование Лежандра

> Это головоломная задача — найти точный момент времени, подходящий, чтобы остановить ускорение в повышении страховых выплат, созданное понижающимися доходами, без преждевременного прерывания уменьшения страховых выплат, произведенного инфляцией.
>
> Алан Гринспэн, председатель Совета экономических советников при президенте Никсоне, из показаний в Сенате, 1974

В этом разделе мы определяем некоммутативное преобразование Лежандра и доказываем, что, как и абелевой классической механике, оно является инволютивным. Неабелева версия классической механики появляется в качестве следствия.

Пусть $C_1 = R\langle q_i^{(\nu)}, Q_\eta^{(\nu)}\rangle$, $C_2 = R\langle p_i^{(\nu)}, Q_\eta^{(\nu)}\rangle$ две дифференциальные алгебры. Для любого элемента $H \in C_1$, преобразование Лежандра $\Lambda_H : C_2 \to C_1$ определяется, как (дифференциальный) гомоморфизм над R, действующий на образующие C_2 по правилу:

$$\Lambda_H(\boldsymbol{p}) = \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \tag{4.6.1a}$$

$$\Lambda_H(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}. \tag{4.6.1b}$$

Аналогично, для любого $F \in C_2$, преобразование Лежандра $\Lambda_F : C_1 \to C_2$ определяется формулами

$$\Lambda_F(\boldsymbol{q}) = \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{p}}, \tag{4.6.2a}$$

$$\Lambda_F(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}. \tag{4.6.2b}$$

Теорема 4.6.3. Допустим, что $H \in C_1$ таково, что преобразование Лежандра $\Lambda_H : C_2 \to C_1$ *обратимо*. Положим

$$\mathcal{H}_1 = \Lambda_H^{-1}\left(\boldsymbol{q}^t \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}} - H\right), \quad \mathcal{H}_2 = \Lambda_H^{-1}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}^t}\boldsymbol{q} - H\right). \tag{4.6.4}$$

Так как $\mathcal{H}_1 \approx \mathcal{H}_2$, то преобразования Лежандра $\Lambda_{\mathcal{H}_1}$ и $\Lambda_{\mathcal{H}_2}$ совпадают: $\Lambda_{\mathcal{H}_1} = \Lambda_{\mathcal{H}_2}$. Обозначим это отображение $\Lambda_{\mathcal{H}}$. Тогда:

$$\Lambda_H^{-1} = \Lambda_{\mathcal{H}}; \tag{4.6.5}$$

$$H = \Lambda_{\mathcal{H}}^{-1}\left(\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}^t}\boldsymbol{p} - \mathcal{H}_1\right); \tag{4.6.6}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{Q}} = -\Lambda_H^{-1}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{Q}}\right). \tag{4.6.7}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{p}^t\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}} + d\boldsymbol{Q}^t\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{Q}} = \delta(\mathcal{H}_2) = \widehat{\delta}^+ d(\mathcal{H}_2) &\overset{(4.2.57)}{\approx} \\ \approx d(\mathcal{H}_2) = d\Lambda_H^{-1}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}^t}\boldsymbol{q} - H\right) &= d[\boldsymbol{p}^t\Lambda_H^{-1}(\boldsymbol{q}) - \Lambda_H^{-1}(H)] = \\ &= d\boldsymbol{p}^t\Lambda_H^{-1}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{p}^t\Lambda_H^{-1}(d\boldsymbol{q}) - \Lambda_H^{-1}d(H). \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

Далее,

$$\boldsymbol{p}^t\Lambda_H^{-1}(d\boldsymbol{q}) \approx \Lambda_H^{-1}(d\boldsymbol{q})^t\boldsymbol{p}, \tag{4.6.9a}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_H^{-1}(d(H)) &\overset{(4.2.57),\ (4.3.28)}{\approx} \Lambda_H^{-1}(\delta(H)) = \\ = \Lambda_H^{-1}\left(d\boldsymbol{q}^t\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}} + d\boldsymbol{Q}^t\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{Q}}\right) &= \Lambda_H^{-1}(d\boldsymbol{q})^t\boldsymbol{p} + d\boldsymbol{Q}^t\Lambda_H^{-1}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{Q}}\right). \end{aligned} \tag{4.6.9b}$$

Подставляя (4.6.9) в (4.6.8), получаем

$$d\boldsymbol{p}^t\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}} + d\boldsymbol{Q}^t\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{Q}} \approx d\boldsymbol{p}^t\Lambda_H^{-1}(\boldsymbol{q}) - d\boldsymbol{Q}^t\Lambda_H^{-1}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{Q}}\right) \quad \Rightarrow \tag{4.6.10}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}} = \Lambda_H^{-1}(\boldsymbol{q}), \tag{4.6.11}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{Q}} = -\Lambda_H^{-1}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{Q}}\right). \tag{4.6.12}$$

Так как $\dfrac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}} = \Lambda_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{q})$, то из (4.6.11) следует (4.6.5), тогда как (4.6.12) совпадает с (4.6.7).

Остается доказать (4.6.6), что мы перепишем, благодаря уже доказанной формуле (4.6.5), как

$$H = \Lambda_H\left(\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}^t}\boldsymbol{p} - \mathcal{H}_1\right). \tag{4.6.13}$$

Но

$$\Lambda_H\left(\frac{\delta\mathcal{H}_2}{\delta \boldsymbol{p}^t}\boldsymbol{p}\right) \overset{(4.6.11),\ (4.6.1a)}{=} \boldsymbol{q}^t\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \tag{4.6.14a}$$

$$\Lambda_H(\mathcal{H}_1) \overset{(4.6.4)}{=} \boldsymbol{q}^t\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}} - H, \tag{4.6.14b}$$

и формула (4.6.13) доказана. ∎

Замечание 4.6.15. В формуле (4.6.6) мы имеем точное равенство, а не эквивалентность $\approx$ по модулю тривиальных лагранжианов. Цена, которую мы платим за это, заключается в легком нарушении симметрии между H и $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H}_1 = \Lambda_H^{-1}\Big(q^t \frac{\delta H}{\delta q} - H\Big), \tag{4.6.16a}$$

$$H = \Lambda_{\mathcal{H}}^{-1}\Big(\frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta p^t} p - \mathcal{H}_1\Big). \tag{4.6.16b}$$

Упражнение 4.6.17. Покажите, что свойство $H \in C_1$ иметь обратимое преобразование Лежандра Λ_H не зависит от дифференциального расширения $R' \supset R$.

Применим теперь Теорему 4.6.3 к неабелевой версии классической механики. Пусть $m = 1$, $C_1 = R\langle q_i^{(1)}, q_i\rangle \subset R\langle q_i^{(n)}\rangle$, $C_2 = R\langle p_i, q_i\rangle$. Таким образом, для *лежандровых целей*, C_1 и C_2 трактуются как свободные ассоциативные алгебры, а *не дифференциальные*. Рассмотрим $H \in C_1$, и допустим, что преобразование Лежандра

$$\Lambda_H(p) = \frac{\partial^+ H}{\partial \dot q}, \quad \Lambda_H(q) = q, \tag{4.6.18}$$

обратимо; здесь мы не устояли перед соблазном написать $\dot q$ вместо $q^{(1)}$. Уравнение Эйлера-Лагранжа для H, $\delta(H) = 0$ в $R\langle q_i^{(n)}\rangle$ имеет вид

$$0 = \frac{\delta H}{\delta q_i} = \frac{\partial^+ H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^+ H}{\partial \dot q_i}\right), \tag{4.6.19}$$

и его можно переписать как систему уравнений 1-го порядка

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^+ H}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{\partial^+ H}{\partial q_i}, \tag{4.6.20a}$$

$$\frac{d}{dt}(q_i) = \dot q_i. \tag{4.6.20b}$$

По Теореме 4.6.3, эта система эквивалентна

$$\frac{d}{dt}(p_i) = -\frac{\partial^+ \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \Big(= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_i}\Big), \tag{4.6.21a}$$

$$\frac{d}{dt}(q_i) = \frac{\partial^+ \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \Big(= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_i}\Big), \tag{4.6.21b}$$

где

$$\mathcal{H} = \Lambda_H^{-1}\Big(\dot q \frac{\partial^+ H}{\partial \dot q} - H\Big). \tag{4.6.22}$$

Тем самым, мы приходим к некоммутативной гамильтоновой механике.

Упражнение 4.6.23. Рассмотрим

$$\mathcal{H} = |q|^2|p|^2 - \langle q, p\rangle\langle p, q\rangle, \tag{4.6.24}$$

где

$$|q|^2 = \sum q_i^2, \ |p|^2 = \sum p_i^2, \ \langle q, p\rangle = \sum q_i p_i, \ \langle p, q\rangle = \sum p_i q_i. \tag{4.6.25}$$

(i) Покажите, что уравнения движения (4.6.21) для гамильтониана $\mathcal{H}$ (4.6.24) имеют вид:

$$\dot{\mathbf{q}} = \ \mathbf{p}|\mathbf{q}|^2 + |\mathbf{q}|^2\mathbf{p} - \mathbf{q}\langle \mathbf{q},\mathbf{p}\rangle - \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle\mathbf{q}, \tag{4.6.26a}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{q}|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}|^2\mathbf{q} + \mathbf{p}\langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle + \langle \mathbf{q},\mathbf{p}\rangle\mathbf{p}; \tag{4.6.26b}$$

(ii) Покажите, что

$$\mathcal{H}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \approx \mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{p}); \tag{4.6.27}$$

(iii) Покажите, что следующее действие группы $SL_2(\mathcal{F})$ не меняет $\mathcal{H}$ и уравнения движения:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{p}}\\ \widetilde{\mathbf{q}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\mathbf{p} + a_{12}\mathbf{q}\\ a_{21}\mathbf{p} + a_{22}\mathbf{q}\end{pmatrix}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \tag{4.6.28}$$

[Подсказка: достаточно рассмотреть случай $a_{21} = 0$ и затем воспользоваться треугольным разложением SL_2 и формулой (4.6.27);]

(i^4) Покажите, что $\mathcal{H}$ коммутирует с

$$|\mathbf{p}|^2,\ |\mathbf{q}|^2,\ \langle \mathbf{p},\mathbf{q}\rangle \approx \langle \mathbf{q},\mathbf{p}\rangle; \tag{4.6.29}$$

(i^5) Обратимо ли преобразование Лежандра Λ_H?

> **Полагаю, я должен предостеречь: если моя речь показалась вам особенно ясной, то вы, вероятно, превратно меня поняли.**
>
> **Алан Гринспэн, Председатель Федерального Валютного Фонда, из речи 1988 года в Экономическом Клубе Нью-Йорка**

4.7 Локализация

В этом разделе мы выводим $\mathcal{A}$–форму некоммутативных вариационных производных.

Пусть $C = R\langle q_i^{(\nu)}, u^{(\nu)}\rangle$, $H \in C$. Если все переменные q и u принимают значения в ассоциативной невырожденной алгебре $\mathcal{A}$ с фиксированным ортонормальным базисом, то вычисления глав 1–3 наводят на мысль, что соответствующее отображение гамильтонианов есть

$$H \mapsto \mathcal{H} = Tr(\widehat{L}_H). \tag{4.7.1}$$

В силу формулы (3.8.42), это можно переписать как

$$H \mapsto \mathcal{H} = \sum_\alpha 1_{|\alpha} H_{|\alpha}. \tag{4.7.2}$$

Чтобы локализация была корректно определена, основное дифференциальное кольцо R должно быть *коммутативным*. При обсуждении локализации мы всегда будем считать это выполненным.

Теорема 4.7.3. Для любого $H \in C$,

$$\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right)_{|\alpha} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u_{|\alpha}}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant \dim(\mathcal{A}). \tag{4.7.4}$$

Доказательство. Это равенство можно переписать, как

$$\Big[\sum_{\nu}(-\partial)^{\nu}\Big(\frac{\partial^{+}H}{\partial u^{(\nu)}}\Big)\Big]_{|\alpha}=\sum_{\nu}(-\partial)^{\nu}\Big(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u^{(\nu)}_{|\alpha}}\Big), \tag{4.7.5}$$

так что оно следует из тождества

$$\Big(\frac{\partial^{+}H}{\partial u}\Big)_{|\alpha}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{|\alpha}}. \tag{4.7.6}$$

Это эквивалентно тождеству

$$\sum_{\alpha}Z_{|\alpha}\Big(\frac{\partial^{+}H}{\partial u}\Big)_{|\alpha}=\sum_{\alpha}Z_{|\alpha}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{|\alpha}},\quad \forall\, Z\in C. \tag{4.7.7}$$

Для левой части формулы (4.7.7) получаем

$$\sum_{\alpha}Z_{|\alpha}\Big(\frac{\partial^{+}H}{\partial u}\Big)_{|\alpha}=\Big(Z,\frac{\partial^{+}H}{\partial u}\Big)=Tr\,\widehat{L}_{\frac{\partial^{+}H}{\partial u}Z}\,. \tag{4.7.8}$$

Лемма 4.7.9.

$$H\in[C,C]\quad\Rightarrow\ \mathcal{H}=\sum_{\alpha}1_{|\alpha}H_{|\alpha}=0. \tag{4.7.10}$$

Доказательство. Для любого $x,y\in\mathcal{A}$, $Tr(\widehat{L}_{[x,y]})=Tr(\widehat{L}_{xy-yx})=Tr([\widehat{L}_x,\widehat{L}_y])=0.$ ▮

Так как, в силу (4.3.15),

$$\frac{\partial^{+}H}{\partial u}Z\approx\frac{\partial H}{\partial u}(Z)=\Big(Z\frac{\partial}{\partial u}\Big)(H), \tag{4.7.11}$$

то мы можем применить Лемму 4.7.9 для преобразования формулы (4.7.8) в

$$\sum Z_{|\alpha}\Big(\frac{\partial^{+}H}{\partial u}\Big)_{|\alpha}=Tr\,\widehat{L}_{(Z\frac{\partial}{\partial u})(H)}=\sum_{\alpha}1_{|\alpha}\Big[\Big(Z\frac{\partial}{\partial u}\Big)(H)\Big]_{|\alpha}. \tag{4.7.12}$$

С другой стороны, для правой части тождества (4.7.7) мы получаем

$$\sum_{\beta}Z_{|\beta}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_{|\beta}}=\sum Z_{|\beta}\frac{\partial}{\partial u_{|\beta}}(1_{|\alpha}H_{|\alpha})=\sum_{\alpha}1_{|\alpha}\sum_{\beta}Z_{|\beta}\frac{\partial H_{|\alpha}}{\partial u_{|\beta}}. \tag{4.7.13}$$

Сравнивая формулы (4.7.12) и (4.7.13), приходим к проверке следующего тождества:

$$\Big[\Big(Z\frac{\partial}{\partial u}\Big)(H)\Big]_{|\alpha}=\sum_{\beta}Z_{|\beta}\frac{\partial H_{|\alpha}}{\partial u_{|\beta}}. \tag{4.7.14}$$

Каждая часть этого тождества является дифференцированием по отношению к H, и каждая часть равна $Z_{|\alpha}$ при $H=u$. Следовательно, тождество верно. ▮

Замечание 4.7.15. Формула (4.7.4) aposteriori оказывается верна в *любом* базисе. Ортонормальный базис выбран для упрощения доказательства.

Теорема 4.7.3 и вычисления в §3.11 подсказывают, что все гамильтоновы структуры в локальной $\mathcal{A}$-форме, изученные в главах 1–3 могут оказаться локальными формами неких универсальных некоммутативных гамильтоновых представлений. Мы сможем показать, что это действительно так, после того, как будет развит некоммутативный гамильтонов формализм. Это будет сделано в следующей главе.

Глава 5

Некоммутативный гамильтонов формализм

> ...греческий джентльмен в соломенной шляпе, стоящий абсолютно неподвижно под легким наклоном ко Вселенной.
>
> Е.М. Форстер о Кавафисе, *Фарос и Фарильон* (1923)

В этой главе мы развиваем некоммутативный гамильтонов формализм и устанавливаем его соотношение с коммутативным.

5.1 Мать всех пуассоновых скобок

> Человек должен договориться со своей памятью не запоминать все подряд. Прекрасные памяти, такие, как у сэра Уильяма Гамильтона, вредят мышлению.
>
> Бенджамин Джоуэтт (1899)

В этом разделе мы определим понятие некоммутативной гамильтоновой структуры и установим основной результат гамильтонова формализма: что проверку тождества Якоби достаточно провести для *линейных* гамильтонианов. Как следствие, мы находим большой класс гамильтоновых матриц: кососимметрические операторы с матричными элементами в $Op_0(R)[\partial^\nu]$.

Мы стартуем с аксиом некоммутативного гамильтонова формализма. Образцом служит, конечно, чисто абелев случай; я следую близко к изложению последнего в главе 3 [Kup 1992].

Пусть $C = R\langle q_i^{(\nu)}\rangle$, $i \in \mathcal{I}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^m$. *Скобка Пуассона* $\{\ ,\ \}$ на C есть $\mathbb{Q}$–билинейное отображение $C \times C \to C$, индуцируемое отображением $\Theta : C \to D^{ev}(C)$, $H \mapsto X_H = \Theta(H)$:

$$\{H, F\} = X_H(F), \quad \forall\ H, F \in C. \tag{5.1.1}$$

Эти отображения должны удовлетворять следующим четырем аксиомам:
(a) Кососимметричность:

$$\{H, F\} \approx -\{F, H\}, \quad \forall\ H, F \in C; \tag{5.1.2a}$$

(b) Гамильтоновость:

$$X_{\{H,F\}} = [X_H, X_F], \quad \forall\, H, F \in C; \tag{5.1.2b}$$

(c) Операторная форма: пусть $\mathcal{N} = |\mathcal{I}|$, мощность множества $\mathcal{I}$. Тогда существует *оператор* $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$, то есть, элемент $\mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\partial^{\nu}])$, такой, что

$$\boldsymbol{X}_H = X_H(\boldsymbol{q}) = B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right), \quad \forall\, H \in C; \tag{5.1.2c}$$

(d) Стабильность: свойства (a)–(c) сохраняются при любом дифференциальном расширении $R' \supset R$.

Если эти аксиомы выполнены, отображение Θ называется *гамильтоновой структурой*, а матрица B *гамильтоновой матрицей*. Тождество Якоби тогда выводится следующим образом:

$$\begin{aligned}
\{H, \{F, G\}\} &= X_H X_F(G);\\
\{G, \{H, F\}\} &\approx -\{\{H, F\}, G\} = -X_{\{H,F\}}(G);\\
\{F, \{G, H\}\} &= X_F(\{G, H\}) \approx -X_F(\{H, G\}) = -X_F X_H(G).
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Складывая все вместе, получаем

$$\{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} \approx \tag{5.1.4a}$$

$$\approx \left([X_H, X_F] - X_{\{H,F\}}\right)(G), \tag{5.1.4b}$$

и последнее выражение равно нулю по формуле (5.1.2b). Таким образом,

$$\{H, \{F, G\}\} + \text{c.p.} \approx 0, \quad \forall\, H, F, G \in C' \tag{5.1.5}$$

где “c.p.” обозначает “циклические перестановки”.

Утверждение 5.1.6. Вместо свойства гамильтоновости (5.1.2b), мы можем потребовать выполнения тождества Якоби (5.1.5).

Доказательство. Нужно показать, что из (5.1.5) следует (5.1.2b). Зафиксируем H и F, и обозначим $X = [X_H, X_F] - X_{\{H,F\}}$. Тогда $X(G) \approx 0$, $\forall G \in C'$ и, согласно следующей Лемме, $X = 0$. ▮

Лемма 5.1.7. Если $X \in D^{ev}(C)$ и $X(C') \approx 0$ для любого $R' \supset R$, то $X = 0$.

Доказательство. Рассмотрим $R' = R\langle Q^{(\nu)} \rangle$, $G = q_i Q$. Тогда $X(G) = X_i Q \approx 0$. Следовательно, и $C' = R\langle q_i^{(\nu)}, Q^{(\nu)} \rangle$ выполняется равенство, для произвольного i :

$$0 = \frac{\delta}{\delta Q}[X(G)] = \frac{\delta}{\delta Q}(X_i Q) = X_i.$$ ▮

Основной задачей гамильтонова формализма является классификация гамильтоновых матриц. Предварительно необходимо вывести алгебраическую систему уравнений на элементы матрицы $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\partial^{\nu}])$, эквивалентную свойству этой матрицы быть гамильтоновой. Для этого, нужно переформулировать аксиомы (5.1.2a, b) в терминах матрицы B.

Утверждение 5.1.8. Кососимметричность скобки Пуассона эквивалентна кососимметричности матрицы B :

$$B^{\dagger} = -B. \tag{5.1.9}$$

Доказательство. Имеем

$$\{H,F\} = X_H(F) \approx \boldsymbol{X}^t_H \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}} = B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)^t \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}, \tag{5.1.10}$$

$$\{F,H\} \approx B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right)^t \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}} \approx \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B^{\dagger}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) \approx B^{\dagger}\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)^t \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}} \quad \Rightarrow$$

$$\{H,F\} + \{F,H\} \approx \left[(B+B^{\dagger})\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right]^t \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}} \approx 0.$$

Обозначим $\boldsymbol{X} = (B+B^{\dagger})\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)$. Тогда $X(F) \approx 0$, $\forall F \in C'$ и, по Лемме 5.1.7, $X = 0$. Итак,

$$(B+B^{\dagger})\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = 0, \quad \forall\, H \in C'.$$

Рассмотрим $H = q_j Q$ в $C' = R\langle q_i^{(\nu)}, Q^{(\nu)}\rangle$. Тогда

$$\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)_i = \delta_{ij} Q, \quad \left[(B+B^{\dagger})\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right]_i = (B+B^{\dagger})_{ij}(Q),$$

и из Леммы 5.1.11 следует $B + B^{\dagger} = 0$. ∎

Лемма 5.1.11. Если онератор $\mathcal{R} \in Op_0(C)[\partial^{\nu}]$ таков, что $\mathcal{R}(C') = 0$, $\forall R' \supset R$, то $\mathcal{R} = 0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{R} = \sum_{\nu} \mathcal{R}_{\nu} \partial^{\nu}$, $\mathcal{R}_{\nu} \in Op_0(C)$, тогда, в расширении $C' = R\langle q_i^{(\nu)}, Q^{(\nu)}\rangle$, имеем $\mathcal{R}(Q) = \sum \mathcal{R}_{\nu} Q^{(\nu)}$. Следовательно, $\mathcal{R}_{\nu} = 0$, $\forall \nu$. ∎

Далее мы будем считать, что матрица B кососимметрическая.

Утверждение 5.1.12. Равенство (5.1.2b) можно нереписать в виде

$$B\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\left[\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right] = D\left[B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right] B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - D\left[B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right] B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right). \tag{5.1.13}$$

Доказательство. Два эволюционных поля совпадают, если и только если совпадает результат их применения к вектору $\boldsymbol{q}$. Применяя каждую часть равенства (5.1.2b) к $\boldsymbol{q}$, получаем:

$$X_{\{H,F\}}(\boldsymbol{q}) = B\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}(\{H,F\}) \overset{(5.1.10)}{=} B\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\left[\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right],$$

$$[X_H, X_F|(\boldsymbol{q}) = X_H(\boldsymbol{X}_F) - X_F(\boldsymbol{X}_H) \overset{(4.3.7)}{=} D(\boldsymbol{X}_F)(\boldsymbol{X}_H) - D(\boldsymbol{X}_H)(\boldsymbol{X}_F) =$$

$$= D\left[B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right] B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - D\left[B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right] B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right).$$ ∎

Напомним, как $D^{ev}(C)$ действует на $Op_0(C)$ и $Op_0(C)[\partial^{\nu}]$:

$$[X(\mathcal{R})](\chi) = X(\mathcal{R}(\chi)) - \mathcal{R}(X(\chi)), \quad \forall\, X \in D^{ev}(C), \quad \forall\, \chi \in C. \tag{5.1.14}$$

Упражнение 5.1.15. Покажите, что

$$X(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\nu) = (\widehat{L}_{X(\psi)} \widehat{R}_\varphi + \widehat{L}_\psi \widehat{R}_{X(\varphi)})\partial^\nu, \quad \forall\, \varphi, \psi \in C, \quad \forall\, X \in D^{ev}(C). \tag{5.1.16}$$

Аналогично, если $\mathcal{R}$ — матрица из операторов, то $X \in D^{ev}(C)$ действует на $\mathcal{R}$ поэлементно. В частности, если $\mathcal{R} \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\partial^\nu])$ и $\boldsymbol{Y} \in C^{\mathcal{N}}$, то

$$\begin{aligned}[X(\mathcal{R})](\boldsymbol{Y}) &= X(\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})) - \mathcal{R}(X(\boldsymbol{Y})) = D(\mathcal{R}(\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{X}) - \mathcal{R}(D(\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{X})) = \\ &= [D(\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})) - \mathcal{R}D(\boldsymbol{Y})](\boldsymbol{X}) = ([D, \mathcal{R}](\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{X}).\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

Следствие 5.1.18. Для любого оператора $\mathcal{R} : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$, выражение $([D, \mathcal{R}](\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{X})$ является оператором относительно $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$.

Доказательство. По формуле (5.1.17), $([D, \mathcal{R}](\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{X}) = [X(\mathcal{R})](\boldsymbol{Y})$. Последнее выражение — оператор относительно $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, если учесть формулу (5.1.16) и выражение X в виде $X = \sum \partial^\nu (X_i) \dfrac{\partial}{\partial q_i^{(\nu)}}$. ∎

Замечание 5.1.19. Фиксируя нашу терминологию, мы резервируем термин *операторы* для матриц с матричными элементами в $Op_0(C)[\partial^\nu]$. Оператор Эйлера-Лагранжа δ в этом смысле не является оператором, но мы отдаем дань исторической традиции.

Лемма 5.1.20. Для любого $X \in D^{ev}(C)$, $H \in C, \boldsymbol{Y} \in C^{\mathcal{N}}$,

$$X\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}^t}\Big)\boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{X}^t D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)(\boldsymbol{Y}). \tag{5.1.21}$$

Доказательство. Так как $D\Big(\dfrac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)^\dagger = D\Big(\dfrac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)$ по формуле (4.4.22), то

$$X\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)^t \boldsymbol{Y} = \Big[D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)(\boldsymbol{X})\Big]^t(\boldsymbol{Y}) \approx \boldsymbol{X}^t D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)^\dagger(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{X}^t D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)(\boldsymbol{Y}). \qquad \blacksquare$$

Теперь мы готовы вывести первый основной результат гамильтонова формализма: формулу для вариационных производных от скобки Пуассона.

Теорема 5.1.22. Пусть $B: \ C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$ кососимметрический оператор. Тогда, для любых $H, F \in C$,

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\Big[\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big] = D\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) - D\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) B\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) + \Big\langle B, \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big\rangle, \tag{5.1.23}$$

где, для любых $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in C^{\mathcal{N}}$,

$$\langle B, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\rangle = ([D, B](\boldsymbol{Y}))^\dagger(\boldsymbol{Z}). \tag{5.1.24}$$

Доказательство. Вместо этого мы покажем, что

$$\boldsymbol{X}^t[\text{левая часть (5.1.23)}] \approx \boldsymbol{X}^t[\text{правая часть (5.1.23)}], \quad \forall\, X \in D^{ev}(C) \tag{5.1.25}$$

и затем сошлемся на Лемму Дюбуа-Реймона 4.2.52. Итак,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^t \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\Big[\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big] &\approx X\Big[\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big] = \\ = X\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)^t B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) &+ \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} X(B)\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) + \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B X\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big).\end{aligned} \tag{5.1.26}$$

Мы преобразуем отдельно каждое из трех слагаемых в выражении (5.1.26). Положим $\boldsymbol{Y} = \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{Z} = \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}$. Тогда

$$1)\quad X(\boldsymbol{Z})^t B(\boldsymbol{Y}) \overset{(5.1.21)}{\approx} \boldsymbol{X}^t D(\boldsymbol{Z}) B(\boldsymbol{Y}); \tag{5.1.27a}$$

$$2)\quad \boldsymbol{Z}^t X(B)(\boldsymbol{Y}) \overset{(5.1.17)}{=} \boldsymbol{Z}^t\{([D,B](\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{X})\} \approx \boldsymbol{X}^t([D,B](\boldsymbol{Y}))^\dagger(\boldsymbol{Z}); \tag{5.1.27b}$$

$$3)\quad \boldsymbol{Z}^t B X(\boldsymbol{Y}) \approx X(\boldsymbol{Y})^t B^\dagger(\boldsymbol{Z}) = -X(\boldsymbol{Y})^t B(\boldsymbol{Z}) \overset{(5.1.21)}{\approx} -\boldsymbol{X}^t(D(\boldsymbol{Y})B(\boldsymbol{Z}). \tag{5.1.27c}$$

Складывая все выражения (5.1.27a–c), получаем правую часть формулы (5.1.25). ▌

Следствие 5.1.28. Свойство гамильтоновости (5.1.2b) можно переписать в виде

$$B\Big(\Big\langle B, \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big\rangle\Big) = \Big\{[D,B]\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big\}B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) - \Big\{[D,B]\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big\}B\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big). \tag{5.1.29}$$

Доказательство. Согласно Утверждению 5.1.12, это свойство можно переписать в виде (5.1.13). Подставляя формулу (5.1.23) в левую часть формулы (5.1.13), получаем

$$\begin{aligned} B\Big(\Big\langle B, \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big\rangle\Big) + BD\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) - BD\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)D\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) = \\ = D\Big[B\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big]B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big) - D\Big[B\Big(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big)\Big]B\Big(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\Big), \end{aligned} \tag{5.1.30}$$

и формула (5.1.29) доказана. ▌

Теорема 5.1.31. *Для кососимметрического оператора $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$, свойство гамильтоновости (5.1.2b) выполняется для всех $H, F \in C'$, если и только если оно выполнено для всех H, F линейных по q : $H = \boldsymbol{q}^t \boldsymbol{y}$, $F = \boldsymbol{q}^t \boldsymbol{Z}$, $\forall \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in R'^N$.*

Доказательство. Если гамильтоново свойство выполнено при всех H, F, то оно конечно выполняется и для линейных, так что из формулы (5.1.29) следует необходимое условие

$$B(\langle B, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\rangle) = \{[D,B](\boldsymbol{Z})\}B(\boldsymbol{Y}) - \{[D,B](\boldsymbol{Y})\}B(\boldsymbol{Z}). \tag{5.1.32}$$

Наоборот, допустим, что равенство (5.1.32) удовлетворено для всех $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in R'^N$. По следствию 5.1.18, каждая часть этого равенства — оператор относительно $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$. По Лемме 5.1.11, это равенство выполнено для всех $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in C'^{\mathcal{N}}$. В частности, критерий (5.1.29) выполняется для всех $H, F \in C'$. ▌

Следствие 5.1.33. *Для данного кососимметрического оператора $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$, проверка критерия гамильтоновости (5.1.2b) эквивалентна проверке квадратичного тождества (5.1.32) в кольце $C' = R\langle q_i^{(\nu)}, Z_i^{(\nu)}, Y_i^{(\nu)}\rangle$.*

Доказательство. Уже доказано, что этот критерий эквивалентен тождеству (5.1.32), которое является тождеством (дифференциальных) операторов, действующим на компоненты Z_i и Y_i. ▌

Замечание 5.1.34. Кажется, что в ваши рассуждения, касающиеся дифференциальных расширений, закралась некоторая неточность, так как новые коэффициенты из R' больше не коммутируют с образующими из C. Этот второстепенный вопрос может быть разрешен либо требованием, чтобы свойство стабильности выполнялось для расширений вида $C' = R\langle q_i^{(\nu)}, \dots\rangle$, или отказом от требования, чтобы элементы из R и образующие C коммутировали с самого начала. Более радикальным средством будет вспомнить вычисления в §3.11 и осознать, что если формула (5.1.32), билинейная по $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$, верна для $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$, коммутирующих с q_i, то она верна и для произвольных некоммутирующих, то есть, в действительности, никакой проблемы нет. Читатель может попытаться найти ошибку в этом "радикальном средстве".

Упражнение 5.1.35. Покажите, что свойство гамильтоновости (5.1.2b) можно заменить требованием, чтобы тождество Якоби (5.1.5) удовлетворялось для произвольных *линейных* гамильтонианов $H, F, G \in C'$.

Мы завершим этот раздел описанием большого класса гамильтоновых матриц с постоянными коэффициентами.

Утверждение 5.1.36. Если матрица $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(R)[\partial^\nu])$ кососимметрическая и не зависит от q, то она гамильтонова.

Доказательство. Для такой матрицы, кососимметрической или нет,

$$[D, B](\boldsymbol{Y}) = 0, \quad \forall\, B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(R)[\partial^\nu]), \quad \forall\, \boldsymbol{Y} \in C'. \tag{5.1.37}$$

Действительно, $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in C'^{\mathcal{N}}$, формула (5.1.17) влечет $\{[D,B](\boldsymbol{Y})\}(\boldsymbol{X}) = [X(B)](\boldsymbol{Y})$, и правая часть обращается в ноль, так как $X(B) = 0$. Итак, $[D,B](\boldsymbol{Y}) = 0$. Следовательно, критерий (5.1.29) принимает вид $0 = 0$. ∎

Следствие 5.1.38. Симплектическая матрица

$$b^{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.39}$$

гамильтонова.

> Если бы существовал глагол, означающий "верить ошибочно", он бы не использовался в первом лице изьявительного наклонения настоящего времени.
>
> Виттгенштейн

5.2 Гамильтоновы отображения

В этом разделе мы выводим алгебраический критерий того, что отображение сохраняет скобки Пуассона.

Мы используем обозначения из §4.3. Рассмотрим гомоморфизм $\Phi : C = R\langle q_i^{(\nu)}\rangle \to C_1 = R\langle u_\eta^{(\nu)}\rangle$. Примем, что матрица $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\partial^\nu])$ определяет гамильтонову структуру в C, а матрица $B_1 \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}_1}(Op_0(C_1)[\partial^\nu])$ определяет гамильтонову структуру в C_1. Отображение Φ называется *гамильтоновым*, если

$$\Phi(\{H, F\}) \approx \{\Phi(H), \Phi(F)\}, \quad \forall\, H, F \in C'. \tag{5.2.1}$$

Нашей целью будет найти алгебраический критерий гамильтоновости Φ в терминах Φ, B, и B_1. Прежде всего, докажем следующее предложение.

Утверждение 5.2.2. Φ гамильтоново, если и только если

$$\Phi(\{H,F\}) = \{\Phi(H),\Phi(F)\}, \quad \forall\, H,F \in C'. \tag{5.2.3}$$

Доказательство. Так как $\{H,F\} = X_H(F)$, то формула (5.2.1) переписывается, как

$$(\Phi X_H - X_{\Phi(H)}\Phi)(F) \approx 0, \quad \forall\, H,F \in C', \tag{5.2.4}$$

и из Леммы 5.2.6 ниже следует, что это соотношение эквивалентно равенству

$$\Phi X_H = X_{\Phi(H)}\Phi, \quad \forall\, H \in C', \tag{5.2.5}$$

которое эквивалентно формуле (5.2.3). ▮

Лемма 5.2.6. Пусть $Z \in D^{ev}(C, C_1)$ таково, что $Z(F) \approx 0$, $\forall F \in C'$. Тогда $Z = 0$.

Замечание 5.2.7. $D^{ev}(C, C_1)$ обозначает множество дифференцирований из C в C_1, по отношению к Φ, коммутирующих с дифференцированиями ∂_s.

Доказательство Леммы 5.2.6. Возьмем $F = q_jQ$ в $R\langle q_i^{(\nu)}, Q^{(\nu)}\rangle$. Тогда $Z(F) = Z(q_j)Q \approx 0$. Следовательно

$$0 = \frac{\delta}{\delta Q}[Z(F)] = Z(q_j),$$

и так как j произвольно, то $Z(\boldsymbol{q}) = 0$, то есть $Z = 0$. ▮

Итак, Φ гамильтоново, если и только если выполнено равенство (5.2.5). Последнее означает, что гамильтоновы поля X_H в C и $X_{\Phi(H)}$ в C_1 связаны отображением Φ при всех $H \in C'$. Напомним, что Φ действует на матрицы из $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(Op_0(C)[\partial^\nu])$ поэлементно, по правилу

$$\Phi(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma) = \widehat{L}_{\Phi(\psi)} \widehat{R}_{\Phi(\varphi)} \partial^\sigma. \tag{5.2.8}$$

Теорема 5.2.9. Φ гамильтоново, если и только если

$$\Phi(B) = D(\boldsymbol{\Phi}) B_1 D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger \tag{5.2.10}$$

(знакомая формула, на вид такая же, как в абелевом случае).

Доказательство. (Абелев вид в доказательстве не нуждается.) Положим $Z_H = \Phi X_H - X_{\Phi(H)}\Phi$. В силу Утверждения 5.2.2, Φ гамильтоново, если и только если $Z_H = 0$, $\forall H \in C'$, что эквивалентно $Z_H(\boldsymbol{q}) = 0$, $\forall H \in C'$. Последнее уравнение можно переписать, как

$$\begin{aligned} 0 = Z_H(\boldsymbol{q}) = \Phi(\boldsymbol{X}_H) - X_{\Phi(H)}(\boldsymbol{\Phi}) = \Phi B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - D(\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{X}_{\Phi(H)}) = \\ = \Phi B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - D(\boldsymbol{\Phi}) B_1 \left(\frac{\delta \Phi(H)}{\delta \boldsymbol{q}}\right) \overset{(4.3.5)}{=} \Phi B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - D(\boldsymbol{\Phi}) B_1 D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = \\ = [\Phi(B) - D(\boldsymbol{\Phi}) B_1 D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger] \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right), \end{aligned}$$

откуда Φ гамильтоново, если и только если

$$[\Phi(B) - D(\boldsymbol{\Phi}) B_1 D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger] \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = 0, \quad \forall\, H \in C'. \tag{5.2.11}$$

Взяв H, линейный по q, и применив Лемму 5.1.11, приходим к критерию (5.2.10). ▮

Следствие 5.2.12. Вычисления из §3.11, где был проверен критерий (5.2.10), имеют универсальное некоммутативное значение, безотносительно к какой-либо локализации.

Каждый порядочный человек стыдится
своего правительства.

Х.Л. Менкен

5.3 Линейные и аффинные гамильтоновы операторы, алгебры Ли и 2-коциклы

В этом разделе мы исследуем гамильтоновы операторы, матричные элементы которых являются многочленами от q степени $\leqslant 1$. Как и в абелевом случае, такие операторы оказываются в однозначном соответствии с обобщенными два-коциклами алгебр Ли.

Пусть $\mathcal{R} \in Op(C) := Op_0(C)[\partial^\nu]$ есть оператор,

$$\mathcal{R} = \sum_\nu \mathcal{R}_\nu \partial^\nu, \quad R_\nu \in Op_0(C). \tag{5.3.1}$$

$\mathcal{R}$ называется *независящим* от переменных q, если $\mathcal{R}_\nu \in Op_0(R)$ для всех ν. $\mathcal{R}$ называется *линейным* по q, если каждый из $\mathcal{R}_\nu$ линеен по q. $\mathcal{R}$ называется *аффинным*, если он равен сумме независящего от q и линейного по q операторов. Та же терминология применяется к матричным операторам.

В этом разделе мы изучаем аффинные гамильтоновы операторы. Итак, пусть оператор $B : C^\mathcal{N} \to C^\mathcal{N}$ аффинный. Представим его в виде суммы

$$B = B^{\mathrm{lin}} + b^\omega, \tag{5.3.2}$$

где B^{lin} линеен по q и b^ω не зависит от q.

Упражнение 5.3.3. Покажите, что

$$\{B^\dagger = -B\} \quad \Leftrightarrow \quad \{(B^{\mathrm{lin}})^\dagger = -B^{\mathrm{lin}} \quad \& \quad (b^\omega)^\dagger = -b^\omega\}. \tag{5.3.4}$$

[Подсказка: Если занулить q, свойство кососимметричности сохраняется.]

Лемма 5.3.5. Пусть оператор $\mathcal{R} : C \to C$ линеен по q. Тогда

$$x\mathcal{R}(y) \approx \sum_i q_i (x * y)_i, \quad \forall\, x, y \in C, \tag{5.3.6}$$

где $(x * y)_i \in C$ обозначают некоторые билинейные выражения от x, y с коэффициентами из R, и каждое такое выражение есть *оператор* относительно и x, и y.

Доказательство. Это вполне очевидно. Возьмем

$$\mathcal{R} = \widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma, \tag{5.3.7}$$

где либо

$$\varphi \in R, \quad \psi = \sum q_i^{(\nu)} k_i^\nu, \quad k_i^\nu \in R, \tag{5.3.8a}$$

либо

$$\psi \in R, \quad \varphi = \sum k_i^\nu q_i^{(\nu)}, \quad k_i^\nu \in R. \tag{5.3.8b}$$

Тогда, для выражения $x\mathcal{R}(y) = \psi y^{(\sigma)}\varphi$ мы имеем либо

$$x\mathcal{R}(y) = \sum x q_i^{(\nu)} k_i^\nu y^{(\sigma)} \varphi \approx \sum q_i^{(\nu)} k_i^{(\nu)} y^{(\sigma)} \varphi x \sim \sum_i q_i \sum_\nu (-\partial)^\nu (k_i^\nu y^{(\sigma)} \varphi x),$$

либо

$$x\mathcal{R}(y) = \sum x\psi y^{(\sigma)} k_i^\nu q_i^{(\nu)} \approx \sum q_i^{(\nu)} x\psi y^{(\sigma)} k_i^\nu \sim \sum_i q_i \sum_\nu (-\partial)^\nu (x\psi y^{(\sigma)} k_i^\nu). \qquad \blacksquare$$

Итак,

$$\boldsymbol{X}^t B^{\mathrm{lin}}(\boldsymbol{Y}) \approx \sum_i q_i [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_i, \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in R'^{\mathcal{N}}, \tag{5.3.9}$$

где $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_i$ — некие билинейные выражения от $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, действующие как операторы (над R) на $\boldsymbol{X}$ и на $\boldsymbol{Y}$. Вдобавок, так как матрица B^{lin} кососимметрическая, то

$$[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]_i = -[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_i, \quad \forall\, i \in \mathcal{I}. \tag{5.3.10}$$

Иначе говоря, линейный по q кососимметрический оператор $B^{\mathrm{lin}} : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$ определяет антисимметричное умножение $[\,,\,] : R'^{\mathcal{N}} \times R'^{\mathcal{N}} \to R'^{\mathcal{N}}$ (и определяется им).

Аналогично, независящая от q кососимметрическая матрица b^ω определяет (и определяется ей) кососимметрическую билинейную форму $\omega : R'^{\mathcal{N}} \times R'^{\mathcal{N}} \to R'$ по правилу

$$\omega(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \approx \boldsymbol{X}^t b^\omega(\boldsymbol{Y}), \tag{5.3.11}$$

$$\omega(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \approx -\omega(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}), \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in R'^{\mathcal{N}}. \tag{5.3.12}$$

Теорема 5.3.13. Аффинная кососимметрическая матрица $B = B^{\mathrm{lin}} + b^\omega$ гамильтонова, если и только если умножение $[\,,\,]$, ассоциированное с линейной по q матрицей B^{lin} есть умножение в алгебре Ли, а билинейная форма ω, ассоциированная с независящей от q матрицей b^ω является (обобщенным) два-коциклом на этой алгебре Ли:

$$\omega([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}) + \text{c.p.} \approx 0, \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z} \in R'^{\mathcal{N}}. \tag{5.3.14}$$

Доказательство. Согласно Упражнению 5.1.35, B гамильтонова, если и только если

$$\{\{H,F\},G\} + \text{c.p.} \approx 0. \tag{5.3.15}$$

для всех H, F, G линейных по переменным q_i. Пусть

$$H = \boldsymbol{q}^t\boldsymbol{X}, \quad F = \boldsymbol{q}^t\boldsymbol{Y}, \quad G = \boldsymbol{q}^t\boldsymbol{Z}, \quad \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z} \in R'^{\mathcal{N}}. \tag{5.3.16}$$

тогда

$$\{H,F\} \overset{(5.1.10)}{\approx} \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = \boldsymbol{Y}^t(B^{\mathrm{lin}} + b^\omega)(\boldsymbol{X}) \approx \boldsymbol{q}^t[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}] + \omega(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}) \quad \Rightarrow \tag{5.3.17}$$

$$\begin{gathered}\{\{H,F\},G\} \approx \frac{\delta G}{\delta \boldsymbol{q}^t} B\left(\frac{\delta\{H,F\}}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = \\ = \boldsymbol{Z}^t(B^{\mathrm{lin}} + b^\omega)([\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]) \approx \boldsymbol{q}^t[\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]] + \omega(\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]) \quad \Rightarrow \\ \{\{H,F\},G\} + \text{c.p.} \approx \boldsymbol{q}^t\{[\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]] + \text{c.p.}\} + \{\omega(\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]) + \text{c.p.}\}.\end{gathered} \tag{5.3.18}$$

Следовательно, $B = B^{\mathrm{lin}} + b^{\omega}$ гамильтонова, если и только если

$$\boldsymbol{q}^t\{[Z,[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}] + \text{c.p.}\} + \{\omega(Z,[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]) + \text{c.p.}\} \approx 0, \quad \forall\, \boldsymbol{X},Y,Z \in R'^{\mathcal{N}}. \tag{5.3.19}$$

Применяя операцию $\dfrac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}$ к соотношению (5.3.19), находим, что B гамильтонова, если и только если

$$[Z,[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]] + \text{c.p.} = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{X},Y,Z \in R'^{\mathcal{N}}, \tag{5.3.20}$$

$$\omega(Z,[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]) + \text{c.p.} \approx 0, \quad \forall\, \boldsymbol{X},Y,Z \in R'^{\mathcal{N}}. \qquad \blacksquare \tag{5.3.21}$$

Замечание 5.3.22. Читатель заметит, что определение (дифференциальных) алгебр Ли, к которому мы пришли, существенно более общее, чем стандартное, в котором тождество Якоби требуется только для элементов из $R^{\mathcal{N}}$, но не для элементов из $R'^{\mathcal{N}}$ для всевозможных расширений $R' \supset R$. Другими словами, наши алгебры Ли *стабильны*: они не зависят от свойств основного кольца R.

Пример 5.3.23. Пусть $m = 1$, $\mathcal{N} = 1$, $C = R\langle q^{(n)}\rangle$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть

$$B^{\mathrm{lin}} = \mathrm{ad}_q, \quad b^{\omega} = \partial. \tag{5.3.24}$$

Тогда

$$\begin{aligned} q[X,Y] \approx X\,\mathrm{ad}_q(Y) = X(qY - Yq) \approx q(YX - XY) \quad &\Rightarrow \\ [X,Y] = YX - XY. \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

Этот коммутатор, конечно, удовлетворяет тождеству Якоби. Поэтому, $B^{\mathrm{lin}} = \mathrm{ad}_q$ есть гамильтонов (скалярный, то есть 1×1) оператор. Далее, $\omega(X,Y) = XY^{(1)}$, так что

$$\begin{aligned} \omega([Y,X],Z) + \text{c.p.} &= (XY - YX)Z^{(1)} + \text{c.p.} = (XYZ^{(1)} + \text{c.p.}) - (YXZ^{(1)} + \text{c.p.}) = \\ &= (XYZ^{(1)} + YZX^{(1)} + ZXY^{(1)}) - (YXZ^{(1)} + ZYX^{(1)} + XZY^{(1)}) \approx \\ &\approx (XYZ^{(1)} + X^{(1)}YZ + XY^{(1)}Z) - (YXZ^{(1)} + YX^{(1)}Z + Y^{(1)}XZ) = \\ &= (XYZ)^{(1)} - (YXZ)^{(1)} \sim 0. \end{aligned}$$

Итак, $\omega(X,Y) = XY^{(1)}$ есть два-коцикл. Следовательно,

$$B = \mathrm{const}_1\,\mathrm{ad}_q + \mathrm{const}_2\,\partial \tag{5.3.26}$$

является скалярной гамильтоновой матрицей.

Упражнение 5.3.27. Пусть $B_q = B_q^{\mathrm{lin}} + b^{\omega}$ — аффинная гамильтонова матрица в $C_q = R\langle q_i^{(\nu)}\rangle$. Рассмотрим, в кольце $C_{q,Q} = R\langle q_i^{(\nu)}, Q_i^{(\nu)}\rangle$, матрицу

$$B^{\mathrm{ad}} = \begin{pmatrix} B_q & B_Q \\ B_Q & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.3.28}$$

где $B_Q = B_Q^{\mathrm{lin}} + b^{\omega}$ обозначает матрицу B_q, в которой q_i заменены на Q_i. Покажите, что:

(i) матрица B^{ad} гамильтонова;

(ii) если матрице B_q отвечает алгебра Ли $\mathcal{G}$, то полупрямая сумма $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{ab}$ есть алгебра Ли, отвечающая матрице B^{ad} :

$$\left[\begin{pmatrix} X \\ \bar{X} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \bar{Y} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} [X,Y] \\ [X,\bar{Y}] - [Y,\bar{X}] \end{pmatrix}, \quad \forall\, X, Y, \bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{G}; \tag{5.3.29}$$

(iii) если $\omega(X,Y)$ — два-коцикл на $\mathcal{G}$, то

$$\omega\left(\begin{pmatrix} X \\ \bar{X} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y \\ \bar{Y} \end{pmatrix}\right) = \omega(X,\bar{Y}) + \omega(\bar{X},Y) \tag{5.3.30}$$

есть два-коцикл на $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{G}^{ab}$;
(i^4) если матрица B_q не аффинна, то B^{ad}, вообще говоря, не гамильтонова.

Пример 5.3.31. Над кольцом $C = C_{Va_1} = R\langle V^{(n)}, a_1^{(n)}\rangle$ рассмотрим гамильтонову матрицу (3.8.21) для иерархии Pot-ДВВ

$$B_{\mathrm{Pot}}^{\text{ДВВ}} = \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_V \\ \widehat{L}_V & \varepsilon\, \mathrm{ad}_{a_1} \end{pmatrix}, \tag{5.3.32}$$

где $\varepsilon = 1$. Нам известно, что эта матрица гамильтонова в рамках локального подхода, в $\mathcal{A}$–представлении. Выясним, гамильтонова ли она глобально, без какой-либо апелляции к $\mathcal{A}$. Согласно формуле (5.3.9),

$$\begin{gathered} (X_1, X_2) \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_V \\ \widehat{L}_V & \varepsilon\, \mathrm{ad}_{a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = -X_1Y_2V + X_2(VY_1 + \varepsilon a_1Y_2 - \varepsilon Y_2a_1) \approx \\ \approx V(-X_1Y_2 + Y_1X_2) + a_1\varepsilon(Y_2X_2 - X_2Y_2) \quad \Rightarrow \\ \left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -X_1Y_2 + Y_1X_2 \\ \varepsilon(Y_2X_2 - X_2Y_2) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5.3.33}$$

Следовательно, в двойном коммутаторе

$$\left[\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\right],$$

вторая компонента такая же, с точностью до умножения на ε, как в формуле (5.3.25) и, следовательно, с ней все в порядке, тогда как первая компонентна равна

$$-(-X_1Y_2 + Y_1X_2)Z_2 + Z_1\varepsilon(Y_2X_2 - X_2Y_2). \tag{5.3.34}$$

Суммируя циклически, получаем

$$\begin{aligned} &(X_1Y_2Z_2 + \text{c.p.}) - (Y_1X_2Z_2 + \text{c.p.}) + [\varepsilon Z_1(Y_2X_2 - X_2Y_2) + \text{c.p.}] = \\ &= (Z_1X_2Y_2 + \text{c.p.}) - (Z_1Y_2X_2 + \text{c.p.}) + [\varepsilon Z_1(Y_2X_2 - X_2Y_2) + \text{c.p.}], \end{aligned}$$

так что тождество Якоби выполняется, если и только если

$$\varepsilon = 1, \tag{5.3.35}$$

как и ожидалось.

Замечание 5.3.36. Введенные нами коммутаторы (5.3.25) и (5.3.33) отличаются знаком от общепринятых. Чтобы избавиться от раздражения, сменим знак в определении (5.3.9) и используем следующее:

$$\boldsymbol{q}^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \approx B^{\mathrm{lin}}(\boldsymbol{X})^t Y. \tag{5.3.37}$$

В такой форме это определение подходит для $\mathbb{Z}_2$–градуированной (или, в общем случае, Г–градуированной) ситуации.

Упражнение 5.3.38. Рассмотрим стандартную алгебру Ли $\mathcal{G} = \mathcal{G}_R = \mathrm{Lie}(R)$ порожденную ассоциативным кольцом R, с коммутатором $[X,Y] = XY - YX$. Покажите, что:

(i) отображение $\rho : \mathcal{G} \to \mathrm{End}(R)$,

$$\rho(X)(Y) = -YX, \quad \rho(X) = -\widehat{R}_X, \tag{5.3.39}$$

является представлением $\mathcal{G}$;

(ii) (противоположный по знаку) коммутатор (5.3.33):

$$\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} X_1Y_2 - Y_1X_2 \\ [X_2, Y_2] \end{pmatrix}, \tag{5.3.40}$$

представляет полупрямую сумму алгебр Ли $\mathcal{G} \underset{\rho}{\ltimes} R$.

Упражнение 5.3.41. Покажите, что: (i) матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{L}_V \\ \widehat{R}_V & -\mathrm{ad}_u \end{pmatrix} \tag{5.3.42}$$

гамильтонова над кольцом $C_{V,u} = R\langle V^{(n)}, u^{(n)}\rangle$;

(ii) изоморфизм $\Phi : C_{V,a_1} \to C_{V,u}$,

$$\Phi(V) = V, \quad \Phi(a_1) = VuV^{-1} \tag{5.3.43}$$

гамильтонов по отношению к гамильтоновым матрицам $B^{\mathrm{Pot}}_{\text{ДВВ}}$ (5.3.32) и B (5.3.42);

(iii) алгебра Ли $\mathcal{G}$, ассоциированная с матрицей $-B$ (5.3.42) имеет вид

$$\left[\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} X_2Y_1 - Y_2X_1 \\ X_2Y_2 - Y_2X_2 \end{pmatrix}. \tag{5.3.44}$$

Итак, $\mathcal{G}$ есть полупрямая сумма алгебр Ли: $\mathcal{G} = \mathcal{G}_R \underset{\widehat{L}}{\ltimes} R$, где $\widehat{L}$ является левым представлением алгебры Ли $\mathcal{G}_R$ в R :

$$[\widehat{L}(Y)](X) = \widehat{L}_Y(X) = YX. \tag{5.3.45}$$

(Таким образом, отображение Φ (5.3.43) преобразует $B(\mathcal{G}_R \underset{-\widehat{R}}{\ltimes} R)$ в $B(\mathcal{G}_R \underset{\widehat{L}}{\ltimes} R)$, то есть, $\widehat{L}$ в $-\widehat{R}$. Это своего рода некоммутативный аналог инволюции Картана.)

Упражнение 5.3.46. Покажите, что: (i) отображение φ_+ :

$$\varphi_+(V) = V, \quad \varphi_+(a) = V^{-1}a_1 \tag{5.3.47}$$

переводит гамильтонову матрицу $B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$ (5.3.32) в симплектическую матрицу

$$b^{can} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{5.3.48}$$

(ii) отображение φ_- :

$$\varphi_-(V) = V, \quad \varphi_-(u) = uV^{-1}, \tag{5.3.49}$$

преобразует гамильтонову матрицу B (5.3.42) опять в каноническую гамильтонову матрицу b^{can} (5.3.48).

Замечание 5.3.50. Конструкции глав 4 и 5 основаны на дифференциальных *полиномиальных* алгебрах. Чтобы включить в них переменные V^{-1}, появляющиеся в формуле (5.3.43) и §3.11, следует ввести некоторые лингвистические поправки. Они носят второстепенный характер и оставлены читателю в качестве упражнения.

Замечание 5.3.51. Пример 5.3.31 показывает, что матрица $D^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$ гамильтонова в двух смыслах: в локальной (то есть $\mathcal{A}$–) и глобальной форме, причем первая является локализацией последней. Не похоже, чтобы это было случайностью, и действительно, это не так. В следующем разделе мы докажем общий результат, из которого это наблюдение следует, как частный пример.

5.4 Локально-глобальный принцип

В этом разделе мы выясняем, что происходит с гамильтоновым формализмом при процедуре локализации.

Рассмотрим нашу стандартную дифференциальную алгебру $C = R\langle q_i^{(\nu)}, q_i^{-1}\rangle$, причем кольцо R считается *коммутативным*. Пусть $B : C^N \to C^N$ есть оператор. Пусть $\widetilde{C} = R[q^{(\nu)}_{i|\alpha}, q^{-1}_{i|\alpha}]$ — коммутативная дифференциальная алгебра компонент $\mathcal{A}$-значной локализации переменных q_i, $1 \leqslant \alpha \leqslant \widetilde{\ell} = \dim(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ ассоциативная невырожденная алгебра с единицей. Мы построим матрицу $\widetilde{B} \in \mathrm{Mat}_{\widetilde{\ell}N}(\widetilde{C}[\partial^\nu])$, и затем покажем, что $\widetilde{B}$ гамильтонова, если и только если гамильтонова B. Таким образом, свойство гамильтоновости оказывается локальным всякий раз, когда оно появляется в глобальной форме.

Каждому оператору $\mathcal{R} : C \to C$, $\mathcal{R} \in Op_0(C)[\partial^\nu]$, сопоставим оператор $\widetilde{\mathcal{R}} : \widetilde{C}^{\widetilde{\ell}} \to \widetilde{C}^{\widetilde{\ell}}$, $\widetilde{\mathcal{R}} \in \mathrm{Mat}_{\widetilde{\ell}}(\widetilde{C}[\partial^\nu])$, по правилу

$$\sum_\beta \widetilde{\mathcal{R}}^\beta_\alpha(Q_{|\beta}) = [\mathcal{R}(Q)]_{|\alpha}, \quad \forall\, Q \in C' = R\langle q_i^{(\nu)}, q_i^{-1}, X_i^{(\nu)}, Y_i^{(\nu)}\rangle. \tag{5.4.1}$$

Зафиксируем с этого момента ортонормальный базис в $\mathcal{A}$.

Лемма 5.4.2. Для операторов $\mathcal{R} : C \to C$ выполняется свойство

$$\widetilde{(\mathcal{R}^\dagger)} = \widetilde{\mathcal{R}}^\dagger. \tag{5.4.3}$$

Доказательство. Если $\mathcal{R} = \widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma$, то, по формуле (4.3.18), $(\mathcal{R})^\dagger = (-\partial)^\sigma \widehat{L}_\varphi \widehat{R}_\psi$. Далее,

$$\mathcal{R}(Q)_{|\alpha} = [(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \partial^\sigma (Q)]_{|\alpha} = (\psi Q^{(\sigma)} \varphi)_{|\alpha} = \sum_{psq\beta} (c_\alpha^{sq} c_s^{p\beta} \psi_{|p} \varphi_{|q} \partial^\sigma) Q_{|\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^\beta = \sum c_\alpha^{sq} c_s^{p\beta} \psi_{|p} \varphi_{|q} \partial^\sigma \quad \Rightarrow \tag{5.4.4}$$

$$(\widetilde{\mathcal{R}}^\dagger)_\alpha^\beta = (\widetilde{\mathcal{R}}_\beta^\alpha)^\dagger = (-\partial)^\sigma \sum c_\beta^{sq} c_s^{p\alpha} \psi_{|p} \varphi_{|q} \;\overset{c_1^{23} = c_3^{12}}{=}\; (-\partial)^\sigma \sum c_s^{q\beta} c_\alpha^{sp} \psi_{|p} \varphi_{|q}. \tag{5.4.5}$$

С другой стороны,

$$[(\mathcal{R}^\dagger)(Q)]_{|\alpha} = [(-\partial)^\sigma \varphi Q \psi]_{|\alpha} = (-\partial)^\sigma \sum c_\alpha^{sp} c_s^{q\beta} \psi_{|p} \varphi_{|q} Q_{|\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\widetilde{(\mathcal{R}^\dagger)}_\alpha{}^\beta = (-\partial)^\sigma \sum c_\alpha^{sp} c_s^{q\beta} \psi_{|p} \varphi_{|q},$$

что совпадает с (5.4.5). ∎

Если $\mathcal{R} : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$ — матричиый оператор, то мы поступим аналогично и получим оператор $\widetilde{R} : \widetilde{C}^{\mathcal{N}\widetilde{\ell}} \to \widetilde{C}^{\mathcal{N}\widetilde{\ell}}$. Если $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{ij})$, то $\widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{R}}_{ij|\alpha}{}^\beta$:

$$\sum_{j\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_{ij|\alpha}{}^\beta (Q_{j|\beta}) = [\sum_j \mathcal{R}_{ij}(Q_j)]_{|\alpha} \quad \Rightarrow \tag{5.4.6}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{ij|\alpha}{}^\beta = (\widetilde{\mathcal{R}}_{ij})_\alpha^\beta. \tag{5.4.7}$$

Следовательно, из Леммы 5.4.2 можно заключить, что

$$\widetilde{(\mathcal{R}^\dagger)} = \widetilde{\mathcal{R}}^\dagger. \tag{5.4.8}$$

Очевидно,

$$\widetilde{\mathcal{R}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R} = 0, \tag{5.4.9}$$

и для скаляриого, и для матрнчного оператора $\mathcal{R}$, и в обонх случаях отображенне: $\mathcal{R} \to \widetilde{\mathcal{R}}$ является представлеинем соответствующего кольца операторов. Следовательно, так как

$$(\widetilde{\mathcal{R} + \mathcal{R}^\dagger}) = \widetilde{\mathcal{R}} + \widetilde{\mathcal{R}}^\dagger,$$

то, для онератора $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$,

$$B^\dagger = -B \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{B}^\dagger = -\widetilde{B}. \tag{5.4.10}$$

Итак, мы можем теперь считать, что оператор B кососимметричен.

Теорема 5.4.11. Пусть оператор $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$ кососимметричен и $\widetilde{B}$ — его локализация. B и $\widetilde{B}$ гамильтоновы одновремению.

Доказательство. По Теореме 5.3.1, B гамильтонов, если я только если

$$B([D, B](Y))^\dagger (Z) = \{[D, B](Z)\} B(Y) - \{[D, B](Y)\} B(Z) \tag{5.4.12}$$

для произвольных $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in C'^{\mathcal{N}}$. Локализуя это равенство видим, что наша Теорема следует из тождества

$$[D, B]^\sim = [D^\sim, \widetilde{B}], \tag{5.4.13}$$

или, подробнее,

$$([D,B](\boldsymbol{Y}))^{\sim} = D[\widetilde{B}(\widetilde{\boldsymbol{Y}})] - \widetilde{B}D(\widetilde{\boldsymbol{Y}}), \tag{5.4.14}$$

где, в правой части, производная Фреше D принаждлежит кольцу $\widetilde{C}$, и вектор $\widetilde{\boldsymbol{Y}}$ определяется, согласно нашим предыдущим рассмотрениям, по правилу

$$\sum_{\alpha} \widetilde{\boldsymbol{Y}}_{i|\alpha} e^{\alpha} = \boldsymbol{Y}_i, \tag{5.4.15}$$

где (e^{α}) фиксированный ортонормальный базис в $\mathcal{A}$. С учетом определения операции локализации "$\sim$" в (5.4.1) и (5.4.6), формула (5.4.14) следует из следующей формулы:

$$D(\boldsymbol{Y})^{\sim} = D(\widetilde{\boldsymbol{Y}}), \tag{5.4.16}$$

или, покомпонентно:

$$\left[\left(\frac{DH}{Dq_i}\right)^{\sim}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{D\widetilde{H}_{|\alpha}}{Dq_{i|\beta}}, \quad \forall\, H \in C'. \tag{5.4.17}$$

Производные Фреше, входящие в искомую формулу (5.4.17), имеют разный смысл: в C', $\dfrac{DH}{Dq_i} \in Op_0(C')[\partial^{\nu}]$, тогда как в $\widetilde{C}'$, $\dfrac{D\widetilde{H}_{|\alpha}}{Dq_{i|\beta}} \in C'[\partial^{\nu}]$. Чтобы доказать формулу (5.4.17), сначала упростим ее, опустив тильды и переобозначив q_i через q :

$$\Big(\sum_{\nu} \frac{\partial H}{\partial q^{(\nu)}} \partial^{\nu}\Big)_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\nu} \frac{\partial H_{|\alpha}}{\partial q_{|\beta}^{(\nu)}} \partial^{\nu}. \tag{5.4.18}$$

Это следует из тождества (и эквивалентно ему)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial H_{|\alpha}}{\partial q_{|\beta}}. \tag{5.4.19}$$

Мы докажем это тождество в 3 шага: 1) проверка при $H = q$; 2) проверка при $H = q^{-1}$; 3) доказательство того, что если тождество верно при $H = F$ и $H = G$, то оно верно и при $H = FG$.
1) при $H = q$ тождество превращается в истинное равенство $(1)_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$;
2) если $H = q^{-1}$, то

$$\frac{\partial q^{-1}}{\partial q} = -\widehat{L}_{q-1}\widehat{R}_{q-1} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial q^{-1}}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta} = (-\widehat{L}_{q-1}\widehat{R}_{q-1})_{\alpha}^{\beta} \overset{(5.4.4)}{=} -\sum c_{\alpha}^{s\pi} c_{s}^{p\beta} q^{-1}{}_{|p} q^{-1}{}_{|\pi}. \tag{5.4.20}$$

С другой стороны, из формулы (3.8.36),

$$\frac{\partial q_{|\alpha}^{-1}}{\partial q_{|\beta}} = -\sum c_{s}^{\alpha p} c_{s}^{\beta\pi} q^{-1}{}_{|p} q^{-1}{}_{|\pi}, \tag{5.4.21}$$

что только кажется не совсем похожим на (5.4.20):

$$\sum_{s} c_{s}^{\alpha p} c_{s}^{\beta\pi} = \sum c_{s}^{\alpha p} c_{\pi}^{s\beta} \overset{\text{ассоциативность } \mathcal{A}}{=} \sum c_{\pi}^{\alpha s} c_{s}^{p\beta};$$

3) если

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta}=\left(\frac{\partial F_{|\alpha}}{\partial q_{|\beta}}\right),\quad \left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta}=\frac{\partial G_{|\alpha}}{\partial q_{|\beta}}, \tag{5.4.22}$$

то

$$\left(\frac{\partial(FG)}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta}=\left(\widehat{R}_G\frac{\partial F}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta}+\left(\widehat{L}_F\frac{\partial G}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta}=\sum c_{\alpha}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_{\alpha}^{\beta}G_{|\delta}+\sum c_{\alpha}^{\gamma\delta}F_{|\gamma}\left(\frac{\partial G}{\partial q}\right)_{\delta}^{\beta}=$$
$$\overset{(5.4.22)}{=}\sum c_{\alpha}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial F_{|\gamma}}{\partial q_{|\beta}}G_{|\delta}+F_{|\delta}\frac{\partial G_{|\delta}}{\partial q_{|\beta}}\right)=\frac{\partial}{\partial q_{|\beta}}\left(\sum c_{\alpha}^{\gamma\delta}F_{|\gamma}G_{|\delta}\right)=\frac{\partial(FG)_{|\alpha}}{\partial q_{|\beta}}. \quad ∎$$

Из Теоремы 5.4.11 следует, что, если только локальная гамильтонова матрица, полученная в главах 1–3 имеет глобальную форму, то глобальная матрица автоматически гамильтонова. В следующей главе мы убедимся, что *все* интегрируемые системы с локальной гамильтоновой формой, которые мы встречали в главах 1–3, являются глобально гамильтоновыми.

Упражнение 5.4.23. Формулы (3.3.30) и (5.4.17) выглядят различными. Объясните несоответствие.

Мы завершим этот раздел комментарием о локализации гамильтоновых отображений. В обозначениях §5.2, рассмотрим гомоморфизм $\Phi: C=R\langle q_i^{(\nu)},q_i^{-1}\rangle\to C_1=R\langle u_\eta^{(\nu)},u_\eta^{-1}\rangle$. Пусть $B: C^{\mathcal{N}}\to C^{\mathcal{N}}$ и $B_1: C_1^{\mathcal{N}_1}\to C_1^{\mathcal{N}_1}$ — кососимметрические гамильтоновы операторы, и $\widetilde{B},\widetilde{B}_1$ — соответствующие им локализации. Локализуем отображение Φ в отображение $\widetilde{\Phi}:\widetilde{C}\to\widetilde{C}_1$,

$$\widetilde{\Phi}(q_{i|\alpha})=[\Phi(q_i)]_{|\alpha} \quad \Rightarrow \tag{5.4.24}$$

$$\sum_{\alpha}\widetilde{\Phi}(q_{i|\alpha})e^{\alpha}=\sum_{\alpha}[\Phi(q_i)]_{|\alpha}e^{\alpha}=\Phi(q_i). \tag{5.4.25}$$

Утверждение 5.4.26. Φ гамильтоново, если и только если гамильтоново $\widetilde{\Phi}$.

Доказательство. Критерий гамильтоновости для Φ, (5.2.10),

$$0=\Phi(B)-D(\Phi)B_1D(\Phi)^{\dagger},$$

в форме для матричных элементов принимает вид

$$0=\Phi(B_{ij})-\sum_{k\ell}\frac{D\Phi_i}{Dq_k}(B_1)_{k\ell}\left(\frac{D\Phi_j}{Dq_\ell}\right)^{\dagger}. \tag{5.4.27}$$

Локализуя и используя формулы (5.4.17) и (5.4.6), мы приходим к критерию гамильтоновости для $\widetilde{\Phi}$. В силу формулы (5.4.9), эти критерии эквивалентны. ∎

Итак, если локально гамильтоновое преобразование Миуры из главы 3 имеет глобальную форму (а это всегда так, по построению), то глобальная форма также оказывается гамильтоновой.

История учит, что средства защиты от внешней угрозы
становятся инструментом тирании внутри страны.

Джеймс Мэдисон

5.5 Гамильтонов аналог гомоморфизма алгебр Ли

В этом разделе мы выводим нолезную формулу, описывающую, как гомоморфизм алгебры Ли можпо неревести па язык гамильтоновых отображений.

Пусть $\mathcal{G} = R^{\mathcal{N}}$ и $\mathcal{H} = R^{\mathcal{M}}$ две алгебры Ли, а $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ гомоморфизм алгебр Ли. Это означает, что φ есть онератор, удовлетворяющий условию

$$\varphi([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]) = [\varphi(\boldsymbol{X}),\varphi(\boldsymbol{Y})], \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in R'^{\mathcal{N}}. \tag{5.5.1}$$

Пусть C_A и C_u — две дифференциальные алгебры, над которыми онределены линейные гамильтоновы матрицы, $B = B(A)$ и $b = b(u)$, ассоциированные с алгебрами Ли $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ соответственно:

$$B(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}], \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in \mathcal{G}', \tag{5.5.2}$$

$$b(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{u}^t[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}], \quad \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{H}'. \tag{5.5.3}$$

Пусть гомоморфизм $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ задан матричиым оператором, который мы тоже обозначнм через φ :

$$\mathcal{G} \ni \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X}) \in \mathcal{H}. \tag{5.5.4}$$

Теорема 5.5.5. (i) Гомоморфизм $\Phi : C_A \rightarrow C_u$, заданный формулой

$$\Phi(\boldsymbol{A}) = \varphi^\dagger(\boldsymbol{u}) \tag{5.5.6}$$

является гамнльтоновым отображением между гамильтоновыми матрицами B и b;
(ii) Обратно, если гамильтоново отображение Φ задано формулой (5.5.6), то φ — гомоморфизм алгебр Ли.

Доказательство. В силу Теоремы 5.2.9, отображение Φ гамильтоново, если и только если

$$D(\boldsymbol{\Phi})bD(\boldsymbol{\Phi})^\dagger = \Phi(B). \tag{5.5.7}$$

Так как

$$D(\boldsymbol{\Phi}) = \varphi^\dagger, \tag{5.5.8}$$

то Φ гамильтоиово, если и только если

$$\varphi^\dagger b\varphi = \Phi(B), \tag{5.5.9}$$

что эквивалентно соотношению

$$[(\varphi^\dagger b\varphi)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y} \approx [\Phi(B)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y}, \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in R'^{N}. \tag{5.5.10}$$

Далее,

$$[(\varphi^\dagger b\varphi)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y} \approx [b\varphi(\boldsymbol{X})]^t\varphi(\boldsymbol{Y}) \overset{(5.5.3)}{\approx} \boldsymbol{u}^t[\varphi(\boldsymbol{X}),\varphi(\boldsymbol{Y})], \tag{5.5.11}$$

в то время, как

$$\begin{aligned}[\Phi(B)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y} = \Phi[B(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y}] \overset{(5.5.2)}{\approx} \Phi(\boldsymbol{A})^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \overset{(5.5.6)}{=} \\ = [\varphi^\dagger(\boldsymbol{u})]^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \approx \boldsymbol{u}^t\varphi([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]).\end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Сравнивая формулы (5.5.11) и (5.5.12), видим, что Φ гамильтоново, если и только если

$$[\varphi(\boldsymbol{X}),\varphi(\boldsymbol{Y})] = \varphi([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]), \quad \forall\, \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in \mathcal{G}'. \qquad \blacksquare$$

Мы используем этот результат в §7.2.

Глава 6

МКП= М+КП

В этой главе сначала выводятся некоммутативные гамильтоновы формы гамильтоновых иерархий, введенных в Главах 1–3. Затем мы анализируем динамические и гамильтоновы соотношения между КП и потенциальной иерархиями МКП. Оказывается, что фактор (Pot–МКП)/КП состоит из единственного скалярного поля.

6.1 КП, МКП, КдФ и другие уравнения, как некоммутативные гамильтоновы системы

В этом разделе мы возвращаемся к интегрируемым системам, изучавшимся в Главах 1–3 и переводим их локальные гамильтоновы формы в соответствующие глобальные гамильтоновы формы. Все вычисления основаны на некоммутативной формуле вычетов из §4.5.

Мы начнем с иерархии КП из §1.1, 1.2:

$$\partial_{t_n}(L) = [(L^n)_+, L] = |L, (L^n)_-| \tag{6.1.1}$$

$$L = \xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}, \tag{6.1.2}$$

$$L^n = \sum_{\kappa} \xi^{\kappa} p_{\kappa}(n). \tag{6.1.3}$$

Согласно формуле (1.2.21), n-й поток (6.1.1) иерархии КП можно переписать, как

$$\partial_{t_n}(A_i) = \sum_{\kappa, s\geqslant 0} \Big[\binom{\kappa}{s} \partial^s (p_\kappa(n) A_{i+\kappa-s}) - \binom{i}{s} A_{i+\kappa-s} (-\partial)^s (p_\kappa(n)) \Big]. \tag{6.1.4}$$

Согласно формуле (4.5.18),

$$p_\kappa(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_\kappa}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+, \tag{6.1.5}$$

$$H_n = n^{-1} \operatorname{Res}(L^n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.1.6}$$

Подставляя формулу (6.1.5) в выражение (6.1.4), находим

$$\partial_{t_n}(A_i) = \sum_{j\geqslant 0} B_{ij}^{\text{КП}} \left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_j} \right), \tag{6.1.7}$$

где

$$B_{ij}^{\text{КП}} = \sum_{\ell\geqslant 0}\Big[\binom{j}{\ell}\partial^\ell \widehat{R}_{A_{i+j-\ell}} - \binom{i}{\ell}\widehat{L}_{A_{i+j-\ell}}(-\partial)^\ell\Big]. \tag{6.1.8}$$

Согласно локально-глобальному принципу из §5.4, матрица $B^{\text{КП}}$ (6.1.8) гамильтонова. Однако, поучительно будет проверить гамильтоновость этой матрицы независимо от локализаций, и кроме того, позже нам понадобится знать лежащую в основе всего этого алгебру Ли. Имея в виду последующую иерархию МКП, рассмотрим следующее матричное *семейство* $B^r = B^r(A)$:

$$B_{ij}^r = -\sum_{\ell\geqslant 0}\Big[\binom{j+r}{\ell}\partial^\ell \widehat{R}_{A_{i+j+r-\ell}} - \binom{i+r}{\ell}\widehat{L}_{A_{i+j+r-\ell}}(-\partial)^\ell\Big], \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tag{6.1.9}$$

так что $B^{\text{КП}} = -B^0$. Чтобы проверить, что матрица B^r гамильтонова, мы вычислим соответствующую в основе алгебру и затем покажем, что она является *алгеброй* Ли. Согласно формуле (5.3.37),

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \approx B^r(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y} = \sum_{ij} B_{ij}^r(X_j)Y_i = \\
= -\sum\Big[\binom{j+r}{\ell}(X_j A_{i+j+r-\ell})^{(\ell)} - \binom{i+r}{\ell}(-1)^\ell A_{i+j+r-\ell}X_j^{(\ell)}\Big]Y_i \approx \qquad (6.1.10)\\
\approx -\sum A_{i+j+r-\ell}(-1)^\ell\Big[\binom{j+r}{\ell}Y_i^{(\ell)}X_j - \binom{i+r}{\ell}X_j^{(\ell)}Y_i\Big] \quad \Rightarrow
\end{gathered}$$

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_\kappa = \sum_{i+j+r-\ell=\kappa}(-1)^\ell\Big[-\binom{j+r}{\ell}Y_i^{(\ell)}X_j + \binom{i+r}{\ell}X_j^{(\ell)}Y_i\Big]. \tag{6.1.11}$$

Пусть $\mathcal{G}_L^r$ — подалгебра Ли $\xi^r\mathcal{G}$ алгебры Ли $\mathcal{G}$ обыкновенных дифференциальных операторов, $\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(R|\xi])$, где R — дифференциальная алгебра с дифференцированием ∂ (то есть, $m = 1$). Итак,

$$\boldsymbol{X} \longleftrightarrow \sum_j \xi^r\xi^j X_j = \widehat{X}, \quad \boldsymbol{Y} \longleftrightarrow \sum_i \xi^r\xi^i Y_i = \widehat{\boldsymbol{Y}}. \tag{6.1.12L}$$

Аналогично, пусть $\mathcal{G}_R^r$ обозначает подалгебру Ли $\mathcal{G}\xi^r$ в $\mathcal{G}$:

$$\boldsymbol{X} \longleftrightarrow \sum_j \xi^j X_j\xi^r = \widehat{X}, \quad \boldsymbol{Y} \longleftrightarrow \sum_i \xi^i Y_i\xi^r = \widehat{Y}. \tag{6.1.12R}$$

Тогда, в $\mathcal{G}_L^r$ имеем

$$\begin{gathered}
[\widehat{X},\widehat{Y}] = \sum(\xi^{r+j}X_j\xi^{r+i}Y_i - \xi^{r+i}Y_i\xi^{r+j}X_j) \overset{(1.3.36)}{=} \\
= \xi^r\sum\xi^{i+j+r-\ell}(-1)^\ell\Big[\binom{r+i}{\ell}X_j^{(\ell)}Y_i - \binom{r+j}{\ell}\boldsymbol{Y}_i^{(\ell)}X_j\Big], \qquad (6.1.13L)
\end{gathered}$$

и сравнивая с формулой (6.1.11), видим, что B^r — гамильтонова матрица, ассоциированная с алгеброй Ли $\mathcal{G}_L^r$:

$$B^r = B(\mathcal{G}_L^r). \tag{6.1.14L}$$

Аналогично, в $\mathcal{G}_R^r$ имеем

$$\begin{gathered}
[\widehat{X},\widehat{Y}] = \sum(\xi^j X_j\xi^{r+i}Y_i\xi^r - \xi^i Y_i\xi^{r+j}X_j\xi^r) \overset{(1.3.36)}{=} \\
= \sum\xi^{i+j+r-\ell}(-1)^\ell\Big[\binom{r+i}{\ell}X_j^{(\ell)}Y_i - \binom{r+j}{\ell}Y_i^{(\ell)}X_j\Big]\xi^r, \qquad (6.1.13R)
\end{gathered}$$

так что

$$B^r = B(\mathcal{G}_R^r). \tag{6.1.14R}$$

Упражнение 6.1.15. Покажите, что отображение $\mathcal{G}_L^r \to \mathcal{G}_R^r$:

$$\sum \xi^r \xi^j X_j \mapsto \sum \xi^j X_j \xi^r \tag{6.1.16}$$

является изоморфизмом алгебр Ли.

Итак, гамильтонова матрица $B^{\text{КП}}$ иерархии КП противоположна по знаку гамильтоновой матрице, ассоциированной с алгеброй Ли $\mathcal{G}$ (левосторонних) обыкновенных дифференциальных операторов над ассоциативным дифференциальным кольцом.

Далее, рассмотрим иерархию МКП из §2.1:

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = [{}_{\geqslant 1}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, {}_{\leqslant 0}(\mathcal{L}^n)], \tag{6.1.17}$$

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i \geqslant 0} a_i \xi^{-i} = \xi + a_0 + a_1 \xi^{-1} + \sum_{i \geqslant 0} w_i \xi^{-i-2}. \tag{6.1.18}$$

Полагая

$$\mathcal{L}^n = \sum_{\kappa \geqslant 0} \xi^\kappa p_\kappa(n), \tag{6.1.19}$$

получаем из формул (2.1.10) и (2.2.14):

$$\partial_{t_n}(a_0) = (\partial + \mathrm{ad}_{a_0})(p_0(n)), \tag{6.1.20a}$$

$$\partial_{t_n}(a_1) = (\partial + \mathrm{ad}_{a_0})(p_{-1}(n)) + \mathrm{ad}_{a_1}(p_0(n)), \tag{6.1.20b}$$

$$\partial_{t_n}(w_i) = \sum \left[\binom{j+1}{\ell} \partial^\ell \widehat{R}_{w_{i+j+1-\ell}} - \binom{i+1}{\ell} \widehat{L}_{w_{i+j+1-\ell}} (-\partial)^\ell \right] (p_{j+1}(n)). \tag{6.1.21}$$

Согласно формуле (4.5.15),

$$p_{i-1}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta a_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{6.1.22}$$

где

$$H_n = n^{-1} \operatorname{Res}(\mathcal{L}^n). \tag{6.1.23}$$

Следовательно,

$$p_0(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta a_1}, \quad p_{-1}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta a_0}, \tag{6.1.24}$$

$$p_{j+1}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta w_j}. \tag{6.1.25}$$

Подставляя формулы (6.1.24) и (6.1.25) в выражения (6.1.20) и (6.1.21) соответственно, находим гамильтонову матрицу $B^{\text{МКП}}$:

$$B^{\text{МКП}} = \left(\begin{array}{c|c} B^{\text{ДВВ}} & 0 \\ \hline 0 & -B^1 \end{array} \right), \tag{6.1.26}$$

где

$$B^{\text{ДВВ}} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \partial + \mathrm{ad}_{a_0} \\ \hline \partial + \mathrm{ad}_{a_0} & \mathrm{ad}_{a_1} \end{array}\right), \tag{6.1.27}$$

и $B^1 = B^1(w)$ определяется формулой (6.1.9). Матрица $B^{\text{МКП}}$ равна прямой сумме матриц $B^{\text{ДВВ}}$ и $-B^1(w)$. Эти слагаемые живут в различных пространствах, и гамильтоновость матрицы $-B^1$ была доказана выше. Итак, проверим свойство гамильтоновости для матрицы $B^{\text{ДВВ}}$ (6.1.27); эта проверка также обслуживает иерархию ДВВ из §2.4.

В силу формулы (5.3.37),

$$\begin{gathered} (a_0, a_1)\left[\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix}\right] \approx \left[\left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{ad}_{a_0} \\ \hline \mathrm{ad}_{a_0} & \mathrm{ad}_{a_1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \\ = (a_0X_1 - X_1a_0)Y_0 + (a_0X_0 - X_0a_0 + a_1X_1 - X_1a_1)Y_1 \approx \\ \approx a_0(X_1Y_0 - Y_0X_1 + X_0Y_1 - Y_1X_0) + a_1(X_1Y_1 - Y_1X_1) \quad \Rightarrow \end{gathered} \tag{6.1.28}$$

$$\left[\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} [X_1, Y_0] - [Y_1, X_0] \\ [X_1, Y_1] \end{pmatrix}, \tag{6.1.29}$$

так что соответствующая алгебра Ли равна полупрямой сумме $\mathcal{G} = \mathcal{G}_R \underset{\mathrm{ad}}{\ltimes} \mathcal{G}_R^{ab}$. Свободный член b матрицы $B^{\text{ДВВ}}$ (6.1.27) равен

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial, \tag{6.1.30}$$

так что соответствующая билинейная форма ω на $\mathcal{G}$ имеет вид

$$\omega(X, Y) = b(X)^t Y = X_1^{(1)} Y_0 + X_0^{(1)} Y_1. \tag{6.1.31}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \omega(X, [Y, Z]) + \text{c.p.} = X_1^{(1)}([Y_1, Z_0] - [Z_1, Y_0]) + X_0^{(1)}[Y_1, Z_1] + \text{c.p.} \approx \\ \approx ([X_1^{(1)}, Y_1]Z_0 + \text{c.p.}) - ([X_1^{(1)}, Z_1]Y_0 + \text{c.p.}) - ([Y_1, Z_1]^{(1)}X_0 + \text{c.p.}) = \\ = ([X_1^{(1)}, Y_1]Z_0 + \text{c.p.}) - ([Y_1^{(1)}, X_1]Z_0 + \text{c.p.}) - ([X_1, Y_1]^{(1)}Z_0 + \text{c.p.}) = 0. \end{gathered} \tag{6.1.32}$$

Таким образом, ω является два-коциклом на $\mathcal{G}$, и матрица $B^{\text{ДВВ}}$ гамильтонова.

Упражнение 6.1.33. Покажите, что в ассоциативном кольце R

$$r_1[r_2, r_3] \approx [r_1, r_2]r_3, \quad \forall\, r_1, r_2, r_3 \in R. \tag{6.1.34}$$

При переходе от иерархии МКП к потенциальной иерархии МКП при помощи отображения Pot (3.1.7):

$$\mathrm{Pot}(a_0) = -V^{(1)}V^{-1}, \quad \mathrm{Pot}(a_i) = a_i, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{6.1.35}$$

гамильтонова матрица $B^{\text{ДВВ}}$ (6.1.27) превращается в матрицу $B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$ (3.11.47):

$$B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}} = \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_V \\ \widehat{L}_V & \mathrm{ad}_{a_1} \end{pmatrix}. \tag{6.1.36}$$

В примере 5.3.31 было показано, что эта матрица гамильтонова. Согласно упражнению (3.11.45), отображение Pot гамильтоново. Следовательно, Pot-иерархия МКП имеет гамильтонову матрицу

$$B_{\mathrm{Pot}}^{\text{МКП}} = \left(\begin{array}{c|c} B_{\mathrm{Pot}}^{\text{ДВВ}} & 0 \\ \hline 0 & -B^1(w) \end{array}\right). \tag{6.1.37}$$

В §3.11 мы показали, что преобразованне Мнуры $\overline{\Phi}$:

$$\overline{\Phi}\Big(\xi + \sum A_\imath \xi^{-\imath-1}\Big) = V^{-1}\,\mathrm{Pot}\Big(\xi + \sum a_\imath \xi^{-\imath}\Big)V, \tag{6.1.38}$$

удовлетворяет тождеству (3.11.24). Таким образом, отображенне $\overline{\Phi}$ является гамильтоновым н переводит гамильтонову матрнцу $B^{\text{КП}}$ (6.1.8) иерархии КП в гамильтонову матрицу $B_{\mathrm{Pot}}^{\text{МКП}}$ (6.1.37) Pot–иерархии МКП.

Теперь рассмотрим иерархию КдФ (2.6.34):

$$\partial_{t_{2n+1}}(L_K) = [L_K, (L_K^{(2n+1/2)})_-], \tag{6.1.39}$$

$$L_K = \xi^2 + h, \tag{6.1.40}$$

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = 2\pi_{-1}(n)^{(1)}, \tag{6.1.41}$$

$$L_K^{(2n+1)/2} = \sum_\kappa \pi_\kappa(n)\xi^\kappa. \tag{6.1.42}$$

Из формулы вычетов (4.5.9) при $N = 2$ получаем

$$d\frac{2}{2n+3}\,\mathrm{Res}(L_K^{(2n+3)/2}) = \mathrm{Res}[d(L_K)\cdot L_K^{(2n+1)/2}] = dh\pi_{-1}(n) \quad \Rightarrow \tag{6.1.43}$$

$$\pi_{-1}(n) = \frac{\delta H_{2n+3}}{\delta h}, \tag{6.1.44}$$

где

$$H_{2n+3} = \frac{2}{2n+3}\,\mathrm{Res}[(\xi^2+h)^{(2n+3)/2}]. \tag{6.1.45}$$

Подставляя формулу (6.1.44) в равенство (6.1.41), приходим к гамильтоновой форме иерархии КдФ

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = 2\partial\Big(\frac{\delta H_{2n+3}}{\delta h}\Big). \tag{6.1.46}$$

Далее, иерархия НУШ (3.5.3):

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p}) = (\bar{L}^n)_+(\boldsymbol{p}), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = -(\boldsymbol{q})[(\bar{L}^n)_+]^\dagger, \tag{6.1.47}$$

$$\bar{L} = \xi + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{6.1.48}$$

$$\bar{L}^n = \sum_\kappa \xi^\kappa \bar{p}_\kappa(n). \tag{6.1.49}$$

Подставляя формулу (6.1.49) в уравнения даижеияя (6.1.47), получаем

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p}) = \sum_{\kappa\geqslant 0}(\bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\boldsymbol{p})^{(\kappa)}, \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = -\sum_{\kappa\geqslant 0}(-1)^\kappa \boldsymbol{q}^{(\kappa)}\bar{p}_\kappa(n). \tag{6.1.50}$$

Далее, полагая

$$\bar{H}_n = n^{-1}\,\mathrm{Res}(\bar{L}^n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.1.51}$$

получаем из формулы вычетов (4.5.5):

$$d(\bar{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}[d(\bar{L})\bar{L}^n] = \operatorname{Res}\big[(d\boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}d\boldsymbol{q})\sum \xi^\kappa \bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\big] \approx$$

$$\approx d\boldsymbol{p}^t \operatorname{Res}\big[\xi^{-1}\boldsymbol{q}\sum \xi^\kappa \bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\big] + d\boldsymbol{q}^t \operatorname{Res}\big[\sum \xi^\kappa \bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\boldsymbol{p}\xi^{-1}\big] \quad \Rightarrow \tag{6.1.52}$$

$$\frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\delta \boldsymbol{p}} = \operatorname{Res}\big[\xi^{-1}\boldsymbol{q}\sum \xi^\kappa \bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\big], \quad \frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\delta \boldsymbol{q}} = \operatorname{Res}\big[\sum \xi^\kappa \bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\boldsymbol{p}\xi^{-1}\big]. \tag{6.1.53}$$

Но

$$\operatorname{Res}\big[\xi^{-1}\boldsymbol{q}\sum \xi^\kappa \bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\big] \overset{(1.3.36)}{=} \operatorname{Res}\Big[\xi^{-1}\sum \xi^{\kappa-s}\binom{\kappa}{s}(-1)^s\boldsymbol{q}^{(s)}\bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n)\Big] =$$

$$= \sum_{\kappa\geqslant 0}(-1)^\kappa \boldsymbol{q}^{(\kappa)}\bar{\boldsymbol{p}}_\kappa(n), \tag{6.1.54a}$$

$$\operatorname{Res}\big[\sum \xi^k \bar{\boldsymbol{p}}_k(n)\boldsymbol{p}\xi^{-1}\big] = \operatorname{Res}\Big[\sum \binom{k}{s}(\bar{\boldsymbol{p}}_k(n)\boldsymbol{p})^{(s)}\xi^{k-s}\xi^{-1}\Big] = \sum_{k\geqslant 0}(\bar{\boldsymbol{p}}_k(n)\boldsymbol{p})^{(k)}. \tag{6.1.54b}$$

Следовательно, уравнения движения (6.1.50) иерархии НУШ имеют следующую гамильтонову форму:

$$\partial_{t_n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\bar{H}_{n+1}/\delta\boldsymbol{p}\\ \delta\bar{H}_{n+1}/\delta\boldsymbol{q}\end{pmatrix}. \tag{6.1.55}$$

Мы имеем также отображение Гиббонса Ψ (3.5.21):

$$\Psi\Big(\xi + \sum A_i\xi^{-i-1}\Big) = \xi + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{6.1.56}$$

$$\Psi(A_i) = (-1)^i\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(i)}. \tag{6.1.57}$$

Докажем гамильтоновость этого отображения между гамильтоновой структурой $B^{\text{КП}}$ (6.1.8) иерархии КП и гамильтоновой структурой $b^{can} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ (6.1.55) иерархии НУШ. Так как

$$\frac{D\Psi(A_i)}{D\boldsymbol{p}} = (-1)^i\widehat{R}_{\boldsymbol{q}^{(i)}}, \quad \frac{D\Psi(A_i)}{D\boldsymbol{q}} = (-1)^i\widehat{L}_{\boldsymbol{p}}\partial^i, \tag{6.1.58}$$

то (A_i, A_j)–компонента в выражении $D(\Psi)b^{can}D(\Psi)^\dagger$ из правой части критерия гамильтоновости (5.2.10) равна

$$-\frac{D\Psi(A_i)}{D\boldsymbol{q}^t}\left(\frac{D\Psi(A_j)}{D\boldsymbol{p}}\right)^\dagger + \frac{D\Psi(A_i)}{D\boldsymbol{p}^t}\left(\frac{D\Psi(A_j)}{D\boldsymbol{q}}\right)^\dagger =$$

$$= (-1)^{i+j}\big|-\widehat{L}_{\boldsymbol{p}^t}\partial^i\widehat{L}_{\boldsymbol{q}^{(j)}} + \widehat{R}_{\boldsymbol{q}^{(i)t}}(-\partial)^j\widehat{R}_{\boldsymbol{p}}\big] =$$

$$= -(-1)^{i+j}\sum_\ell \widehat{L}_{\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}^{(i+j-\ell)}}\binom{i}{\ell}\partial^\ell + (-1)^i\sum\binom{j}{\ell}(-1)^{j-\ell}\partial^\ell\widehat{R}_{\boldsymbol{q}^{(i+j-\ell)t}}\widehat{R}_{\boldsymbol{p}} = \tag{6.1.59}$$

$$= \Psi\Big(\sum_\ell\Big[-\binom{i}{\ell}\widehat{L}_{A_{i+j-\ell}}(-\partial)^\ell + \binom{j}{\ell}\partial^\ell\widehat{R}_{A_{i+j-\ell}}\Big]\Big) = \Psi(B^{\text{КП}}_{ij}).$$

Если $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ есть 1-компонентные скаляры, то упражнение 5.3.46 утверждает, что отображение Φ_{DN} (3.8.8b):

$$\Phi_{DN}(V) = q, \quad \Phi_{DN}(a_1) = qp, \tag{6.1.60}$$

задает гамильтонов изоморфизм между гамильтоновой матрицей $B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$ (6.1.36) иерархии Pot-ДВВ и симплектической гамильтоновой матрицей $b^{can} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ однокомпонентой иерархии *НУШ*.

Наконец, рассмотрим иерархию НУШП из §3.6:

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{a}) = {\geqslant_1}(\bar{\mathcal{L}}^n)(\boldsymbol{a}), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b})[\xi^{-1}\ ({\geqslant_1}(\bar{\mathcal{L}}^n))\xi]^{\dagger}, \tag{6.1.61}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \Lambda\xi^{-1}, \quad \Lambda = 1 + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{6.1.62}$$

$$\bar{\mathcal{L}}^n = \sum_k \xi^k \bar{p}_k(n) \quad \Rightarrow \tag{6.1.63}$$

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{a}) = \sum_{k\geqslant 0}[\bar{p}_{k+1}(n)\boldsymbol{a}]^{(k+1)}, \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{b}) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k[\boldsymbol{b}^{(k)}\bar{p}_{k+1}(n)]^{(1)}. \tag{6.1.64}$$

Полагая

$$\bar{H}_n = \operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}^n)/n \tag{6.1.65}$$

и используя формулу вычетов (4.5.5), получаем

$$\begin{aligned} d(\bar{H}_{n+1}) &\approx \operatorname{Res}[\bar{\mathcal{L}}^n d(\bar{\mathcal{L}})] = \operatorname{Res}[\bar{\mathcal{L}}^n \xi d(\Lambda^{-1})] = -\operatorname{Res}[\bar{\mathcal{L}}^n \xi \Lambda^{-1} d(\Lambda)\Lambda^{-1}] \approx \\ &\approx -\operatorname{Res}[d(\Lambda)\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2}] = -\operatorname{Res}[(d\boldsymbol{a}^t\xi^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^t\xi^{-1}d\boldsymbol{b})\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2}] \approx \\ &\approx -d\boldsymbol{a}^t \operatorname{Res}(\xi^{-1}\boldsymbol{b}\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2}) - d\boldsymbol{b}^t \operatorname{Res}(\xi^{-1}\bar{\mathcal{L}}^{n+2}\boldsymbol{a}\xi^{-1}) \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{6.1.66}$$

$$\frac{\delta \bar{H}_{n-1}}{\delta \boldsymbol{a}} = -\operatorname{Res}\Big(\xi^{-1}\boldsymbol{b}\sum \xi^{k-1}\bar{p}_k(n)\Big) = -\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \boldsymbol{b}^{(k)}\bar{p}_{k+1}(n), \tag{6.1.67a}$$

$$\frac{\delta \bar{H}_{n-1}}{\delta \boldsymbol{b}} = -\operatorname{Res}\Big(\sum \xi^{k-1}\bar{p}_k(n)\boldsymbol{a}\xi^{-1}\Big) = -\sum_{k\geqslant 0}[\bar{p}_{k+1}(n)\boldsymbol{a}]^{(k)}. \tag{6.1.67b}$$

Подставляя формулы (6.1.67) и уравнения движения (6.1.64), находим искомую гамильтонову форму иерархии НУШП:

$$\partial_{t_n}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial \begin{pmatrix} \delta\bar{H}_{n-1}/\delta\boldsymbol{a} \\ \delta\bar{H}_{n-1}/\delta\boldsymbol{b} \end{pmatrix}. \tag{6.1.68}$$

Упражнение 6.1.69. Покажите, что первый поток (3.6.7) иерархии НУШП,

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{(1)}, \quad \partial_{t_1}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^{(1)}, \tag{6.1.69}$$

можно также записать в гамильтоновой форме (6.1.68), если определить $\bar{H}_0$, как

$$\bar{H}_0 = \operatorname{Res}[\ln(\Lambda^{-1})] = -\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}. \tag{6.1.70}$$

6.2 Обращение необратимого преобразования Миуры между иерархиями МКП и КП

В конце улицы возвращающихся путешественников ждала приятная неожиданность в лице соседей, которые развлекли их, показывая цветные снимки грабителей, разворовывающих дом во время их отсутствия.

Билл Вон, *Половина битвы*

В этом разделе мы расширяем иерархию КП, надлежащим образом добавляя к ней одно скалярное поле V. Это превращает расширенное преобразование Миуры $\overline{\Phi}^{e}$ между расширенной иерархией КП (= ext-КП) и Pot-иерархией МКП в изоморфизм, как динамический, так и гамильтонов.

n-й поток иерархии ext-КП состоит из n-го потока иерархии КП

$$\partial_{t_n}(L) = [(L^n)_+, L] = [L, (L^n)_-], \tag{6.2.1}$$

$$L = \xi + \sum_{i \geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}, \tag{6.2.2}$$

и эволюционного уравнения на дополнительное скалярное поле V:

$$\partial_{t_n}(V) = -(V)((L^n)_+)^\dagger = -((L^n)_+)^\dagger(V), \tag{6.2.3}$$

так что V является своего рода "присоединенной собственной функцией".

Найдем гамильтонову форму новой иерархии. При

$$L^n = \sum_k \xi^k p_k(n), \tag{6.2.4}$$

мы имеем, согласно формуле (6.1.5):

$$(L^n)_+ = \sum_{k \geqslant 0} \xi^k p_k(n) = \sum_{k \geqslant 0} \xi^k \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_k} \quad \Rightarrow \tag{6.2.5}$$

$$\partial_{t_n}(V) = -(V) \sum_{k \geqslant 0} [\xi^k p_k(n)]^\dagger = -\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k V^{(k)} p_k(n) = \tag{6.2.6a}$$

$$= -\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k V^{(k)} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_k}. \tag{6.2.6b}$$

Таким образом, получаем следующую кандидатуру на роль гамильтоновой матрицы $B^{\text{ext-КП}}$ для иерархии ext-КП:

$$-B^{\text{ext-КП}} = \begin{array}{c} \\ V \\ A_i \end{array} \begin{array}{cc} V & A_j \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ -(-1)^i \widehat{R}_{V^{(i)}} \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} (-1)^j \widehat{L}_{V^{(j)}} \\ B^0_{ij}(A) \end{array} \right) \end{array}. \tag{6.2.7}$$

Эта матрица линейна по своим основным переменным. Следовательно, соответствующий коммутатор вычисляется по формуле (5.3.37) так:

$$(V, \boldsymbol{A}^t)\left[\begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}\right] \approx \left[-B^{\text{ext-КП}} \begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} y \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big[\sum_j (-1)^j V^{(j)} X_j\Big] y + \sum_i \Big[-(-1)^i x V^{(i)} + \sum_j B^0_{ij}(X_j)\Big] Y_i \approx$$

$$\approx V\Big[\sum_j (X_j y)^{(j)} - \sum_i (Y_i x)^{(i)}\Big] + \boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], \tag{6.2.8}$$

где коммутатор $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ в алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0$ определяется по формуле $(6.1.11|_{r=0})$. Следовательно,

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \widehat{X}(y) - \widehat{Y}(x) \\ [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \end{pmatrix}, \tag{6.2.9}$$

где $\widehat{X} = \sum \xi^j X_j$, $\widehat{Y} = \sum \xi^i Y_j$. Итак, матрица $-B^{\text{ext-КП}}$ есть гамильтонова матрица, ассоциированная с полупрямой суммой алгебр Ли $\mathcal{G}^0 \ltimes R$:

$$-B^{\text{ext-КП}} = B(\mathcal{G}^0 \ltimes R). \tag{6.2.10}$$

Согласно формуле (6.2.6), гамильтонианы иерархии ext-КП совпадают со старыми, $H_n = n^{-1}\operatorname{Res}(L^n)$, так что они по прежнему коммутируют. Следовательно, расширенные потоки также коммутируют.

Напомним, что преобразование Миуры $\overline{\Phi}$ (3.11.8):

$$\overline{\Phi}(A_i) = (-1)^i V^{-1} a_1 V^{(i)} + \sum_s V^{-1} w_s V^{(-1-s)} (-1)^{i-1-s} \binom{i}{s+1}, \tag{6.2.11}$$

$$\overline{\Phi}\Bigl(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Bigr) = V^{-1} \operatorname{Pot}\Bigl(\xi + \sum a_i \xi^{-i}\Bigr) V, \tag{6.2.12}$$

отображает иерархию КП в иерархию Pot–*М*КП, и является гамильтоновым отображением между гамильтоновой структурой $B^{\text{КП}} = -B^0(A)$ (6.1.8) иерархии КП и гамильтоновой структурой $B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}}$ (6.1.36) Pot-иерархии *М*КП. Продолжим отображение $\overline{\Phi}$ из КП в иерархию ext-КП, тождественным действием на V :

$$\overline{\Phi}^e(V) = V, \quad \overline{\Phi}^e(A_i) = \overline{\Phi}(A_i). \tag{6.2.13}$$

Теорема 6.2.14. Отображение $\overline{\Phi}^e$ является (i) обратимым;
(ii) гамильтоновым изоморфизмом;
(iii) а также динамическим изоморфизмом, то есть оно переводит иерархию ext-КП в иерархию Pot-МКП.

Доказательство. (i) Из формулы (6.2.12) видим, что отображение $\overline{\Phi}^e$ является сопряжением посредством V^{-1}. Следовательно,

$$(\overline{\Phi}^e)^{-1}\Bigl(\operatorname{Pot}\Bigl(\xi + \sum a_i \xi^{-i}\Bigr)\Bigr) = V\Bigl(\xi + \sum A_i \xi^{-i-1}\Bigr) V^{-1}; \tag{6.2.15}$$

(ii) Проверим критерий гамильтоновости (5.2.10). Так как

$$D(\overline{\Phi}^e) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & a_1 & w \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ \\ \overline{\Phi}(A_i) \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ & & \\ \dfrac{D\overline{\Phi}(A_i)}{DV} & \dfrac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Da_1} & \dfrac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Dw} \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.2.16}$$

$$B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & a_1 & w \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ \\ a_1 \\ \\ w \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\widehat{R}_V & \\ & & \mathbf{0} \\ \widehat{L}_V & \operatorname{ad}_{a_1} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & -B^1(w) \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.2.17}$$

$$D(\overline{\Phi}^e)^\dagger = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} V & \overline{\Phi}(A_j) \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ a_1 \\ w \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 1 & [D\overline{\Phi}(A_j)/DV]^\dagger \\ 0 & [D\overline{\Phi}(A_j)/Da_1]^\dagger \\ 0 & [D\overline{\Phi}(A_j)/Dw]^\dagger \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.2.18}$$

то для правой части критерия (5.2.10) получаем

$$D(\overline{\Phi}^e)B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}}D(\overline{\Phi}^e)^\dagger = \begin{array}{c|c|c} & V & \overline{\Phi}(A_j) \\ \hline V & 0 & -\widehat{R}_V\left(\dfrac{D\overline{\Phi}(A_j)}{Da_1}\right)^\dagger \\ \hline \overline{\Phi}(A_i) & \dfrac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Da_1}\widehat{L}_V & \overline{\Phi}(B^{\text{КП}}_{ij}) \end{array}, \tag{6.2.19}$$

здесь нижний правый угол в правой части, $\overline{\Phi}(B^{\text{КП}}_{ij})$, подытоживает вычисления §3.11. Сравнивая формулы (6.2.7) и (6.2.19) видим, что нам надо проверить тождество

$$(-1)^i\widehat{R}_{V^{(i)}} = \frac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Da_1}\widehat{L}_V. \tag{6.2.20}$$

Но, согласно формуле (3.11.8),

$$\overline{\Phi}(A_i) = (-1)^i V^{-1}\left[a_1V^{(i)} - \sum_s w_s V^{(i-1-s)}(-1)^s\binom{i}{s+1}\right] \quad \Rightarrow \tag{6.2.21}$$

$$\frac{D\overline{\Phi}(A_i)}{Da_1} = (-1)^i\widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{V^{(i)}}, \tag{6.2.22}$$

откуда и следует (6.2.20);
(iii) отображение $\overline{\Phi}^e$ гамильтоново, и переводит гамильтонианы H_n иерархии ext-КП в гамильтонианы $\text{Pot}(\mathcal{H}_n)$ иерархии Pot–МКП, при всех n :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}^e(nH_n) &= \overline{\Phi}^e\,\text{Res}(L^n) = \text{Res}[\overline{\Phi}(L)]^n = \text{Res}[V^{-1}\,\text{Pot}(\mathcal{L}^n)V] = \\ &= V^{-1}\,\text{Res}(\text{Pot}(\mathcal{L}^n))V \approx \text{Res}[\text{Pot}(\mathcal{L}^n)] = \text{Pot}\,\text{Res}(\mathcal{L})^n = n\,\text{Pot}(\mathcal{H}_n). \end{aligned}$$

Следовательно, соответствующие потоки также переводятся друг в друга. ▮

Итак, иерархию КП можно интерпретировать, как результат отщепления одного скалярного поля от Pot-иерархии МКП, а преобразование Миуры — как саму процедуру отщепления. Это чисто бесконечно-компонентный эффект. В следующем разделе мы исследуем естественный вопрос: можно ли итерировать эту процедуру.

6.3 M^{2}КП

В этом разделе анализируется проблема, допускает ли иерархия МКП дальнейшие модификации, и если да, то сколько раз. Мы также находим высшие аналоги гамильтоновой матрицы $B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}}$, как гамильтоновы формы, соответствующие алгебрам Ли $\mathcal{G}^r$ из §6.1, для всех $r \in \mathbb{Z}_+$.

Основной результат предыдущего раздела гласит, что расширению алгебры Ли $\mathcal{G}^0$ до полупрямой суммы $\mathcal{G}^0 \ltimes R$ отвечает расширение гамильтоновой матрицы $B(\mathcal{G}^0) = -B^{\text{КП}}$ до гамильтоновой матрицы $B(\mathcal{G}^0 \ltimes R) = -B^{\text{ext-КП}}$, и преобразование Миуры $\overline{\Phi}^e$ является гамильтоновым изоморфизмом. Так как обе гамильтоновы матрицы $B^{\text{МКП}}$ и $B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}}$ содержат гамильтонову подматрицу $-B(\mathcal{G}^1) = -B^1(w)$ в качестве слагаемого прямой суммы:

$$B^{\text{МКП}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a_0 & \qquad a_1 & \qquad w \end{array} \\ \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ w \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \partial + \mathrm{ad}_{a_0} & \\ \partial + \mathrm{ad}_{a_0} & \mathrm{ad}_{a_1} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -B^1(w) \end{array}\right) \end{array}, \tag{6.3.1}$$

$$B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & \qquad a_1 & \qquad w \end{array} \\ \begin{array}{c} V \\ a_1 \\ w \end{array} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -\widehat{R}_V & \\ \widehat{L}_V & \mathrm{ad}_{a_1} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -B^1(w) \end{array}\right) \end{array}, \tag{6.3.2}$$

то, если мы сможем проделать с гамильтоновой матрицей $-B^1(w)$ ту же (или подобную) операцию, какая была проделана с матрицей $-B^0(A)$, мы получим преобразование Миуры в иерархию МКП (и Pot–МКП) и также ее модификацию, которую придется обозначить м^{2}КП. В лучшем из миров эту процедуру можно итерировать бесконечно, получая бесконечную цепочку м$^{k+1}$КП $\longrightarrow$ м^{k}КП модифицированных иерархий КП и их преобразований Миуры. Конечно, никто никогда не видел эти иерархии, но помечтать-то мы можем? Кроме того, у нас есть один эвристический довод в поддержку существования такой бесконечной цепочки: если наложить связь

$$(L^N)_- = 0, \quad \text{при некотором} \quad N \in \mathbb{N}, \tag{6.3.3}$$

то, отщепляя за раз один дифференциальный множитель первой степени от дифференциального оператора N-й степени L^N, мы получим хорошо известную цепочку длины N модифицированных уравнений Лакса. Иерархию КП можно представить (что ошибочно, но полезно), как предел $N \to \infty$ этой картины, особенно если считать, что связь $(L^N)_- = 0$ *не* накладывается, а факторизация тем не менее проводится (с незначительными изменениями. Случай $N = 1$ был рассмотрен в §3.10.) Фактически, наше рассуждение показывает, что модификации *существуют*, так как отображение $L \to L^N$ является обратимым изоморфизмом; недостаток этой точки зрения в том, что факторизации не являются гамильтоновыми по отношению к рассматриваемой первой гамильтоновой структуре. Итак, нам придется оставить лаксову точку зрения и сосредоточиться на гамильтоновых аспектах.

Так как мы точно не знаем, что искать, следует сделать некоторые уточнения относительно предполагаемого результата. Руководствуясь результатами §3.11 и предыдущего раздела, многочисленными абелевыми результатами (и их бездисперсионными пределами), мы постулируем:

(i) преобразование Миуры имеет универсальную форму (3.11.8) раз и навсегда:

$$\overline{\Phi}(A_i) = (-1)^i V^{-1} a_1 V^{(i)} + \sum_s V^{-1} w_s V^{(i-1-s)} (-1)^{i-1-s} \binom{i}{s+1}; \tag{6.3.4}$$

(ii) гамильтонова матрица модифицированной системы расщепляется и имеет вид

$$B^{(r+1)}_{mod} = \begin{array}{c} \\ V \\ \\ a_1 \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & a_1 & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} * & * & \\ & & 0 \\ * & * & \\ \hline 0 & & -B^{(r+1)}(w) \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.3.5}$$

где элементы, отмеченные "$*$", принадлежат $Op_0(R_{Va_1})[\partial]$;
(iii) гамильтонова матрица очередной, еще неотмодифицированной, системы равна

$$-B^{(r)}(A). \tag{6.3.6}$$

(При $r = 0, 1$, мы знаем, что $B^{(0)} = B^0$, $B^{(1)} = B^1$. Правдоподобное предположение

$$B^{(r)} = B^r = B(\mathcal{G}^r), \quad \forall\, r \in \mathbb{Z}_+ \tag{6.3.7}$$

оказывается неверным при $r > 1$.);
(i^4) расширенное преобразование Миуры $\overline{\Phi}^e$ (6.2.9):

$$\overline{\Phi}^e(V) = V, \quad \overline{\Phi}^e(A_i) = \overline{\Phi}(A_i) \tag{6.3.8}$$

является гамильтоновым изоморфизмом. (Теорема 6.2.10 (i) говорит, что $\overline{\Phi}^e$ обратимо.) Соответствующая расширенная немодифицированная матрица $-B^{(r)e}$ имеет вид

$$-B^{(r)e} = \begin{array}{c|cc} & V & A_j \\ V & * & * \\ A_i & * & -B^{(r)}_{ij}(A) \end{array}, \tag{6.3.9}$$

где элементы, номеченные "$*$", лежат в $Op_0(R_{V,V^{-1}})[\partial]$. Отсюда следует, что гамильтонова (V, a_1)–подматрица размера 2×2 в модифицированной гамильтоновой матрице $B^{(r+1)}_{mod}$ (6.3.5) имеет вид

$$B^{(r+1)}_{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c} \\ V \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & a_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O} \\ -\mathcal{O}^\dagger & * \end{pmatrix} \end{array}, \quad \mathcal{O} \in Op_0(R_{V,V^{-1}})[\partial], \tag{6.3.10}$$

и расширенная гамильтонова матрица $-B^{(r)e}$ (6.3.9) имеет вид

$$-B^{(r)e} = \begin{array}{c} \\ V \\ A_i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & A_j \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-1)^j \mathcal{O} \widehat{L}_{V^{(j)}} \widehat{R}_{V^{-1}} \\ -(-1)^i \widehat{L}_{V^{-1}} \widehat{R}_{V^{(i)}} \mathcal{O}^\dagger & -B^{(r)}_{ij}(A) \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.3.11}$$

(i^5) матрицы $B^{(r)}$ "квазилинейны":

$$B^{(r)}_{ij}(A)\Big|_{A=0} = 0, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall\, r \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.3.12}$$

Заранее неясно, могут ли быть выполнены все эти естественные требования, или их нужно изменить, или вообще отступиться. Попробуем разрешить эту загадку.

Из свойств (i), (ii), (i^5) следует, что зануление всех w корректно и приводит к гамильтонову отображению Φ :

$$\Phi(A_i) = (-1)^i V^{-1} a_1 V^{(i)} \tag{6.3.13}$$

между гамильтоиовой матрицей $-B^{(r)}(A)$ (6.3.6) и гамильтоиовой матрицей $B^{(r+1)}_{\text{ДВВ}}$ (6.3.10) размера 2×2. Аналогичио, расширениое отображение Φ^e :

$$\Phi^e(V) = V, \quad \Phi^e(A_i) = (-1)^i V^{-1} a_1 V^{(i)}, \tag{6.3.14}$$

является гамильтоновым между гамильтоновыми матрицами $-B^{(r)e}$ (6.3.11) и той же $B^{(r+1)}_{\text{ДВВ}}$ (6.3.10). Первый иетривиальиый (= иеизвестный) случай отвечает $r = 1$. Для него матрицу $B^{(2)}_{\text{ДВВ}}$ можно найти.

Теорема 6.3.15. Положим

$$a = V^{-1} a_1, \tag{6.3.16}$$

$$B^{r+1}_{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c} \\ V \\ a \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & \quad a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -(-\partial)^r \\ \partial^r & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{6.3.17}$$

Тогда отображение Φ (6.3.13) между гамильтоиовыми матрицами $-B^r = -B(\mathcal{G}^r)$ (6.1.9) и $B^{r+1}_{\text{ДВВ}}$ (6.3.17) гамильтоиово. Кроме того, гамильтоиово отображение Φ^e (6.3.14) между гамильтоновой матрицей $B^{r+1}_{\text{ДВВ}}$ (6.3.17) и расширенной гамильтоновой матрицей

$$-B^{re} = \begin{array}{c} \\ V \\ A_i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & \qquad\qquad A_j \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-1)^j(-\partial)^r \widehat{L}_{V^{(j)}} \\ \hline -(-1)^i \widehat{R}_{V^{(i)}} \partial^r & B^r_{ij}(A) \end{array}\right) \end{array}, \tag{6.3.18}$$

нредставляющей полупрямую сумму алгебр Ли (см. (6.1.12R))

$$B^{re} = B(\mathcal{G}^r_R \ltimes R). \tag{6.3.19}$$

Доказательство. В переменых V, a, отображеиия Φ (6.3.13) и Φ^e (6.3.14) принимают вид

$$\Phi(A_i) = (-1)^i a V^{(i)}, \tag{6.3.20}$$

$$\Phi^e(V) = V, \quad \Phi^e(A_i) = (-1)^i a V^{(i)} \quad \Rightarrow \tag{6.3.21}$$

$$D(\Phi(A_i)) = (-1)^i (\widehat{L}_a \partial^i \mid \widehat{R}_{V^{(i)}}), \tag{6.3.22}$$

$$D(\Phi(A_j))^\dagger = (-1)^j \begin{pmatrix} \dfrac{(-\partial)^j \widehat{R}_a}{\widehat{L}_{V^{(j)}}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tag{6.3.23}$$

$$\begin{aligned} [D(\Phi) B^{r+1}_{\text{ДВВ}} D(\Phi)^\dagger]_{ij} &= (-1)^{i+j} [-\widehat{L}_a \partial^i (-\partial)^r \widehat{L}_{V^{(j)}} + \widehat{R}_{V^{(i)}} \partial^r (-\partial)^j \widehat{R}_a] = \\ &= -(-1)^{i+j+r} [\widehat{L}_a \partial^{i+r} \widehat{L}_{V^{(j)}} - \widehat{R}_{V^{(i)}} (-\partial)^{r+j} \widehat{R}_a] = \qquad (6.3.24) \\ = -(-1)^{i+j+r} \sum_\ell \Big[\binom{i+r}{\ell} & \widehat{L}_a \widehat{L}_{V^{(j+i+r-\ell)}} \partial^\ell - \binom{r+j}{\ell} (-\partial)^\ell \widehat{R}_{V^{(i+r+j-\ell)}} \widehat{R}_a \Big] = \\ = -\Phi\Big(\sum_\ell \Big[\binom{i+r}{\ell} & \widehat{L}_{A_{i+j+r-\ell}} (-\partial)^\ell - \binom{r+j}{\ell} \partial^\ell \widehat{R}_{A_{i+j+r-\ell}} \Big] \Big) = \Phi(-B^r_{ij}(A)), \end{aligned}$$

согласно формуле (6.1.9). Аналогично, для отображения Φ^e (6.3.21) имеем

$$D(\mathbf{\Phi}^e) = \begin{array}{c} \\ V \\ \Phi(A_i) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & a \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \dfrac{D\Phi(A_i)}{DV} & \dfrac{D\Phi(A_i)}{Da} \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.3.25}$$

$$D(\mathbf{\Phi}^e)^\dagger = \begin{array}{c|cc} & V & \Phi(A_j) \\ V & 1 & [D\Phi(A_j)/DV]^\dagger \\ a & 0 & [D\Phi(A_j)/Da]^\dagger \end{array} \quad \Rightarrow \tag{6.3.26}$$

$$D(\mathbf{\Phi}^e) B^{r+1}_{\text{ДВВ}} D(\mathbf{\Phi}^e)^\dagger =$$

$$= \begin{array}{c} \\ V \\ \Phi(A_i) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & \Phi(A_j) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -(-1)^j(-\partial)^r \widehat{L}_{V(j)} \\ \hline (-1)^i \widehat{R}_{V(i)} \partial^r & \Phi(-B^r_{ij}(A)) \end{array} \right) \end{array}, \tag{6.3.27}$$

что доказывает формулу (6.3.18). Далее, для формулы (6.3.19) имеем

$$\begin{aligned} (V, A^t)\left[\begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}\right] &\approx \left[B^{re}\begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} y \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} = \sum B^r_{ij}(X_j)Y_i + \\ &+ \left[\sum_j (-\partial)^r((-1)^{(j)}X_j)\right] y - \left[\sum_i (-1)^i x^{(r)} V^{(i)}\right] Y_i \approx \\ &\approx \boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] + V\left[\left(\sum_j \partial^j X_j \partial^r\right)(y) - \left(\sum_i \partial^i \boldsymbol{Y}_i \partial^r\right)(x)\right]. \end{aligned} \tag{6.3.28}$$

▮

Замечание 6.3.29. Для случая $r = 0$ мы должны получить что-то уже знакомое. Так ли это? При $r = 0$ матрица $B^1_{\text{ДВВ}}$ (6.3.17) равна

$$B^1_{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c|cc} & V & a \\ V & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \end{array}, \tag{6.3.30}$$

что, согласно упражнению 5.3.46 (i), получается из матрицы

$$B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}} = \begin{array}{c} V \\ a_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_V \\ \widehat{L}_V & \text{ad}_{a_1} \end{pmatrix} \tag{6.3.31}$$

при переходе от переменных V, a_1 к переменным V, a.

Упражнение 6.3.32. Покажите, что гамильтонова матрица $B^{r+1}_{\text{ДВВ}}$ (6.3.17) принимает вид, в переменных V, a_1 :

$$B^{r+1}_{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c} \\ V \\ a_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & a_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & -(-\partial)^r \widehat{R}_V \\ \hline \widehat{L}_V \partial^r & \widehat{L}_V \partial^r \widehat{L}_{V^{-1}a_1} - \widehat{R}_{V^{-1}a_1}(-\partial)^r \widehat{R}_V \end{array} \right) \end{array}. \tag{6.3.33}$$

Замечание 6.3.34. Как *угадать*, или даже *вывести*, матрицу $B^{r+1}_{\text{ДВВ}}$ (6.3.17)? Это будет объяснено (почти) в следующем разделе.

В принципе, мы решили задачу для случая $r = 1$: искомая гамильтонова матрица $B^{(2)}_{mod}$ есть просто $(\overline{\Phi}^{e})^{-1}(-B^{1e})$, где B^{1e} задается формулой (6.3.18). Посредством этого получается иерархия М^{2}КП. При этом, однако, не гарантируется, что полученная матрица $B^{(2)}_{mod}$ имеет постулированный блочный вид (6.3.5); она и не имеет. Давайте посмотрим, почему. Взглянем внимательнее на (A_0, A_0)–компоненту в равенстве, необходимом для гамильтоновости отображения $\overline{\Phi}$:

$$D(\overline{\Phi})B^{(r+1)}_{mod}D(\overline{\Phi})^{\dagger} = \overline{\Phi}(-B^{r}). \tag{6.3.35}$$

Согласно формуле (6.1.9),

$$B^{r}_{00} = -\sum_{\ell=0}^{r}\binom{r}{\ell}\left[\partial^{\ell}\widehat{R}_{A_{r-\ell}} - \widehat{L}_{A_{r-\ell}}(-\partial)^{\ell}\right]. \tag{6.3.35$'$}$$

Из формулы (6.3.4) ясно, что выражение $\overline{\Phi}(B^{r}_{00})$ не содержит w лишь при $r = 0$; при $r > 0$ в него всегда замешиваются некотрые из w. Однако,

$$\overline{\Phi}(A_0) = aV, \tag{6.3.36}$$

и, следовательно, w отсутствуют в (A_0, A_0)–матричном элементе левой части критерия (6.3.35). Противоречие.

Итак, наши аксиомы следует видоизменить. Расширенную форму $B^{(r)e}$ (6.3.11) и гамильтоново отображение $\overline{\Phi}$ (6.3.4) мы трогать не можем. Поэтому остается одна возможность: вместо вполне расщепленной формы (6.3.5) потребуем квазирасщепленную

$$B^{(r+1)}_{mod} = \begin{array}{c} \\ V \\ a \\ \boldsymbol{w} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & a & \boldsymbol{w} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O} & \mathbf{0} \\ -\mathcal{O}^{+} & (1) & (2) \\ \mathbf{0} & -(2)^{\dagger} & -B^{(r)} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{6.3.37}$$

где

$$\mathcal{O} \in Op_0(R_{V,V^{-1}})[\partial], \quad (1)|_{w=0} \in Op_0(R_{V,V^{-1},a})[\partial], \tag{6.3.38a}$$

$$(2) \in Op_0(R_{V,V^{-1},\boldsymbol{w}})[\partial], \quad (2)|_{w=0} = 0, \tag{6.3.38b}$$

$$B^{(r)}_{ij} \in Op(R_{V,V^{-1},\boldsymbol{w}})[\partial], \quad B^{(r)}|_{w=0} = 0. \tag{6.3.38c}$$

Нетрудно видеть, что матрица $B^{(2)}_{mod}$ имеет эту структуру, причем

$$(1) = \widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{w_0} - \widehat{L}_{w_0}\widehat{R}_{V^{-1}}, \tag{6.3.39}$$

и т.д.. Однако, остальные компоненты этой матрицы не кажутся разумными.

6.4 Представления Клебша

В этом разделе устанавливается некоммутативная версия абелевой теории квадратичных гамильтоновых отображений, ассоциированных с представлениями алгебр Ли.

В §6.1 мы доказали гамильтоновость отображения Ψ (6.1.57):

$$\Psi(A_{\imath}) = (-1)^{\imath}\boldsymbol{p}^{\imath}\boldsymbol{q}^{(\imath)}, \tag{6.4.1}$$

между симплектической гамильтоновой матрицей

$$b^{can} = \begin{array}{c|cc} & p & q \\ \hline p & 0 & -1 \\ q & 1 & 0 \end{array} \tag{6.4.2}$$

и гамильтоновой матрицей $-B^{\text{КП}} = B^0 = B(\mathcal{G})^0$. (Обратите внимание на смену знака.) В §6.3 мы доказали гамильтоновость отображения Φ (6.3.20):

$$\Phi(A_i) = (-1)^i a V^{(i)}, \tag{6.4.3}$$

между гамильтоновой матрицей

$$-B^{r+1}_{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c|cc} & V & a \\ \hline V & 0 & (-\partial)^r \\ a & -\partial^r & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & a & V \\ \hline a & 0 & -\partial^r \\ V & (-\partial)^r & 0 \end{array} \tag{6.4.4}$$

и гамильтоновой матрицей $B^r = B(\mathcal{G}^r)$ (6.1.9). (Опять, смена знака.) При $r = 0$, матрица $-B^1_{\text{ДВВ}}$ (6.4.4) совпадает с 1-компонентным случаем матрицы b^{can} (6.4.2), и это же совпадение имеет место для отображений Ψ (6.4.1) и Φ (6.4.3). Это наводит на мысль, что оба случая имеют общее обобщение, и действительно, беглая проверка вычисления (6.3.24) показывает, что матрицу $-B^{r+1}_{\text{ДВВ}}$ (6.4.4) можно заменить на матрицу

$$-B^{r+1}_{\text{ДВВ}} = \begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{V} \\ \hline \boldsymbol{a} & 0 & -1 \\ \boldsymbol{V} & (-1)^r 1 & 0 \end{array} \partial^r, \tag{6.4.5}$$

и отображение Φ (6.4.3) на отображение

$$\Phi(A_i) = (-1)^i \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{V}^{(i)}. \tag{6.4.6}$$

Новое гамильтоново отображение Φ (6.4.6) связывает новую гамильтонову структуру $-B^{r+1}_{\text{ДВВ}}$ (6.4.5) с гамильтоновой структурой $B^r = B(\mathcal{G}^r)$ (6.1.9).

Мы собираемся "объяснить" эти формулы, то есть, вывести их из чисто Ли-алгебраических рассмотрений, без каких-либо непосредственных проверок. Возможность такого объяснения подсказывается видом отображения Φ (6.4.6): оно квадратично, а в абелевых рамках имеется теория гамильтоновых квадратичных отображений, ассоциированных с представлениями алгебр Ли – так называемая теория представлений Клебша (о которых Клебш, естественно, не имел понятия.) Сейчас мы разовьем неабелеву версию этой теории.

Чтобы подготовить почву, сначала рассмотрим отображение Φ′ :

$$\Phi'(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{a}, \quad \Phi'(\boldsymbol{q}) = (-1)^r \boldsymbol{V}^{(r)}. \tag{6.4.7}$$

Тогда

$$D(\boldsymbol{\Phi}') \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D(\boldsymbol{\Phi}')^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial^r 1 \\ (-\partial)^r 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.4.8}$$

так что

$$\Phi(A_i) = (-1)^{i+r} \boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q}^{(i+r)} \tag{6.4.9}$$

является гамильтоновым отображением между канонической гамильтоновой матрицей b^{can} (6.4.2) и гамильтоновой матрицей $B^r = B(\mathcal{G}^r)$ (6.1.9). Это отображение мы выведем Ли-алгебраически. (См. ниже Замечание 6.4.58.)

Пусть R — ассоциативная дифференциальная алгебра с единицей и m коммутирующими дифференцированиями $\partial_1, \dots, \partial_m : R \to R$. В §5.3 было дано определение дифференциальной алгебры Ли, как билинейного кососимметрического дифференциального оператора $R^N \times R^N \to R^N$, удовлетворяющего тождеству Якоби $\forall R' \supset R$. Зафиксируем эту алгебру Ли и обозначим ее $\mathcal{H}$. *Представление* $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathcal{V} = R^{N_1}$ есть аддитивное отображение $\chi : \mathcal{H} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{V}) = \mathrm{Mat}_{N_1}(Op_0(R)[\partial^\nu])$, которое, по отношению к $\mathcal{H}$, является оператором и удовлетворяет тождеству

$$\chi([\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]) = [\chi(\boldsymbol{X}), \chi(\boldsymbol{Y})] := \chi(\boldsymbol{X})\chi(\boldsymbol{Y}) - \chi(\boldsymbol{Y})\chi(\boldsymbol{X}), \quad \forall\, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in R'^N. \tag{6.4.10}$$

Имея такое представление, мы можем построить новую алгебру Ли, $\mathcal{H} \ltimes \mathcal{V} = \mathcal{H} \ltimes_\chi \mathcal{V}$, называемую полупрямой суммой $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$, с коммутатором

$$\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] \\ \boldsymbol{X}.\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Y}.\boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{H}, \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}, \end{matrix} \tag{6.4.11}$$

где

$$\boldsymbol{X}.\boldsymbol{y} := [\chi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{y}). \tag{6.4.12}$$

Первое основное понятие в теории представлений Клебша — это ***дуальное представление***. Если дано представление χ, положим $\mathcal{V}^* = R^{N_1}$, и пусть $\chi^d : \mathcal{H} \to \mathrm{Diff}(\mathcal{V}^*)$ есть следующее аддитивное отображение:

$$\chi^d(\boldsymbol{X}) = -\chi(\boldsymbol{X})^\dagger, \quad \forall\, \boldsymbol{X} \in \mathcal{H}'. \tag{6.4.13}$$

Утверждение 6.4.14. Отображение χ^d является представлением.

Доказательство. Необходимо проверить, что

$$[\chi(\boldsymbol{X})\chi(\boldsymbol{Y})]^\dagger = \chi(\boldsymbol{Y})^\dagger \chi(\boldsymbol{X})^\dagger, \quad \forall\, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{H}', \tag{6.4.14$'$}$$

а это следует из скалярного тождества

$$(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)^\dagger = \mathcal{R}_2^\dagger \mathcal{R}_1^\dagger, \quad \forall\, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in Op_0(R)[\partial^\nu]. \tag{6.4.15}$$

Чтобы доказать его, используем определяющее соотношение (4.3.16) для сопряженного оператора:

$$[(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)^\dagger(x)]y \approx x\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2(y) \approx [\mathcal{R}_1^\dagger(x)]\mathcal{R}_2(y) \approx [\mathcal{R}_2^\dagger\mathcal{R}_1^\dagger(x)]y \quad \Rightarrow \tag{6.4.16}$$

$$(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)^\dagger(x) = \mathcal{R}_2^\dagger\mathcal{R}_1^\dagger(x), \quad \forall\, x \in R', \tag{6.4.17}$$

и равенство (6.4.15) доказано. ▮

Второе основное понятие в теории представлений Клебша — билинейное отображение

$$\nabla = \nabla_\chi : \mathcal{V} \times \mathcal{V}^* \to \mathcal{H}^* = R^N, \tag{6.4.18}$$

определенное соотношением

$$\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{x}\nabla_\chi\boldsymbol{y}) \approx \boldsymbol{y}^t(\boldsymbol{X}.\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{X} \in \mathcal{H}', \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}', \quad \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}'^*. \tag{6.4.19}$$

(В 0-мерном (то есть, когда никаких ∂ нет) абелевом случае, ∇_χ является отображением, дуальным к представлению $\chi : \mathcal{H} \to \mathrm{End}(\mathcal{V}) \approx \mathcal{V} \bigotimes \mathcal{V}^*$, так что $\chi^* = \nabla_\chi : \mathcal{V}^* \bigotimes \mathcal{V} \to \mathcal{H}^*$.)

Лемма 6.4.20.

$$\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}\nabla_{\chi^d}\boldsymbol{x}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}', \quad \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}'^*. \tag{6.4.21}$$

Доказательство. Для произвольного $\boldsymbol{X} \in \mathcal{H}'$ имеем

$$\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{y}) \approx \boldsymbol{y}^t[\chi(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{x})] \approx [\chi(\boldsymbol{X})^\dagger(\boldsymbol{y})]^t\boldsymbol{x} \approx -\boldsymbol{x}^t[\chi^d(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{y})] \approx -\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{y}\nabla_{\chi^d}\boldsymbol{x}), \tag{6.4.22}$$

и равенство (6.4.21) доказано. ▮

Пусть $B(\mathcal{H} \ltimes \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} B & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ обозначает гамильтонову матрицу, соответствующую алгебре Ли полупрямой суммы $\mathcal{H} \ltimes \mathcal{V}$:

$$\left[B(\mathcal{H} \ltimes \mathcal{V}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} B & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\dagger & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} =$$

$$= B(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y} + \mathcal{B}(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{Y} - \mathcal{B}^\dagger(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{y} \approx \tag{6.4.23}$$

$$\approx (\boldsymbol{A}^t, \boldsymbol{V}^t)\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}\right] \overset{(6.4.11)}{=} \boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] + \boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{X}.\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Y}.\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow$$

$$B(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y} \approx \boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}], \tag{6.4.24}$$

$$\boldsymbol{Y}^t\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \approx \mathcal{B}(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{Y} \approx -\boldsymbol{V}^t(\boldsymbol{Y}.\boldsymbol{x}) \overset{(6.4.19)}{\approx} -\boldsymbol{Y}^t(\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{V}) \quad \Rightarrow \tag{6.4.25}$$

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{V}, \quad \mathcal{B} = -(\cdot)\nabla_\chi \boldsymbol{V}. \tag{6.4.26}$$

Утверждение 6.4.27. Пусть $B \in \mathrm{Mat}_N(Op_0(C_A)[\partial^\nu|)$, $C_A = R\langle A^{(\nu)}\rangle$, есть гамильтонова матрица $B = B(\mathcal{H})$, определенная соотношением (6.4.24), и пусть $B(\mathcal{H} \times \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} B & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\dagger & 0 \end{pmatrix}$ – гамильтонова матрица над кольцом $C_{A,V}$, соответствующая алгебре Ли полупрямой суммы $\mathcal{H} \ltimes \mathcal{V}$. Рассмотрим отображение $inc : C_A \to C_{A,V}$:

$$inc(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}. \tag{6.4.28}$$

Отображение inc гамильтоново.

Доказательство. Так как, согласно формуле (6.4.28),

$$D(inc(\boldsymbol{A})) = (1, \boldsymbol{0}), \tag{6.4.29}$$

то доказательство следует из тождества

$$(1, \boldsymbol{0})\begin{pmatrix} B & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B}^\dagger & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B = inc(B). \quad ▮ \tag{6.4.30}$$

Теперь мы готовы доказать основной результат этого раздела.

Теорема 6.4.31. Пусть отображение $\Phi : C_{A,V} \to C_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}$ задается формулами:

$$\Phi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q}, \tag{6.4.32a}$$

$$\Phi(\boldsymbol{V}) = k\boldsymbol{q}, \quad k \in \mathcal{F}. \tag{6.4.32b}$$

Тогда Φ — гамильтоново отображение между гамильтоновыми матрицами $B(\mathcal{H} \ltimes_\chi \mathcal{V})$ и b^{can} (6.4.2).

Следствие 6.4.33. Отображение $\overline{\Phi}: C_A \to C_{p,q}$,

$$\overline{\Phi}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q}, \tag{6.4.34}$$

связывающее гамильтонову матрицу $B = B(\mathcal{H})$ (6.4.24) и симплектическую матрицу b^{can} (6.4.2), гамильтоново.

Доказательство. Отображение $inc: C_A \to C_{A,V}$ гамильтоново в силу Утверждения 6.4.27, и отображение Φ (6.4.32) — в силу Теоремы 6.4.31. Комбинируя их, получаем гамильтоново отображение $\overline{\Phi} = inc \circ \Phi$. ▮

Доказательство Теоремы 6.4.31. Временно обозначим

$$\boldsymbol{A}_{,p} = \frac{D\Phi(\boldsymbol{A})}{D\boldsymbol{p}}, \quad \boldsymbol{A}_{,q} = \frac{D\Phi(\boldsymbol{A})}{D\boldsymbol{q}}. \tag{6.4.35}$$

Тогда

$$D(\boldsymbol{\Phi}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{,p} & \boldsymbol{A}_{,q} \\ 0 & k\mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{,p}^\dagger & 0 \\ \boldsymbol{A}_{,q}^\dagger & k\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{6.4.36}$$

так что

$$D(\boldsymbol{\Phi})b^{can}D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{,p} & \boldsymbol{A}_{,q} \\ 0 & k\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{,p}^\dagger & 0 \\ \boldsymbol{A}_{,q}^\dagger & k\mathbf{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{,q} \boldsymbol{A}_{,p}^\dagger - \boldsymbol{A}_{,p} \boldsymbol{A}_{,q}^\dagger & -k\boldsymbol{A}_{,p} \\ \hline k\boldsymbol{A}_{,p}^\dagger & 0 \end{array} \right). \tag{6.4.37}$$

Итак, надо проверить, что

$$\Phi(B) = \boldsymbol{A}_{,q} \boldsymbol{A}_{,p}^\dagger - \boldsymbol{A}_{,p} \boldsymbol{A}_{,q}^\dagger, \tag{6.4.38}$$

$$\Phi(B) = -k\boldsymbol{A}_{,p}. \tag{6.4.39}$$

Начнем с носледнего тождества, (6.4.39). Имеем

$$\Phi(B)(\boldsymbol{x}) = \Phi(B(\boldsymbol{x})) \overset{(6.4.26)}{=} \Phi(-\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{V}) \overset{(6.4.32b)}{=} -k\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{q},$$

то есть, нриходим к тождеству

$$\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}_{,p}(\boldsymbol{x}), \tag{6.4.40}$$

которое очевидно, поскольку $\boldsymbol{p}\nabla\boldsymbol{q}$ билипейно по $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$,

$$\boldsymbol{A}_{,p}(\boldsymbol{x}) = \frac{D(\boldsymbol{p}\nabla\boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\nabla\boldsymbol{q}, \tag{6.4.41}$$

$$\boldsymbol{A}_{,q}(\boldsymbol{y}) = \frac{D(\boldsymbol{p}\nabla\boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p}\nabla\boldsymbol{y}. \tag{6.4.42}$$

Вместо формулы (6.4.38), докажем эквивалентиое ей соотношение

$$[\Phi(B)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y} \approx [(\boldsymbol{A}_{,q} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{,p} - \boldsymbol{A}_{,p} \boldsymbol{A}_{,q}^\dagger)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y}, \quad \forall\, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in R'^N. \tag{6.4.43}$$

Для левой части этого соотношения получаем

$$\begin{aligned}|\Phi(B)(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y} = \Phi(|B(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{Y}) \overset{(6.4.24)}{\approx} \Phi(\boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|) \overset{(6.4.32a)}{=}\\ = (\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q})^t[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \approx [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|^t(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q}) \overset{(6.4.19)}{\approx} \boldsymbol{q}^t(\chi[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}](\boldsymbol{p}))\\ \overset{\text{Так как } \chi \text{ — представление}}{=} \boldsymbol{q}^t\big([\chi(\boldsymbol{X})\chi(\boldsymbol{Y}) - \chi(\boldsymbol{Y})\chi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{p})\big).\end{aligned} \tag{6.4.44}$$

Для правой части соотношения (6.4.43) получаем

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{q}}\,\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{p}}^{\dagger} - \boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{q}}^{\dagger})(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{y} \approx\\ \approx [\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{p}}^{\dagger}(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{q}}^{\dagger}(\boldsymbol{Y}) - [\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{q}}^{\dagger}(\boldsymbol{X})]^t\boldsymbol{A}_{,\boldsymbol{p}}^{\dagger}(\boldsymbol{Y}).\end{aligned} \tag{6.4.45}$$

Лемма 6.4.46.

$$\left(\frac{D(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{p}}\right)^{\dagger}(\boldsymbol{X}) = -\chi^d(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{q}), \tag{6.4.47}$$

$$\left(\frac{D(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{q}}\right)^{\dagger}(\boldsymbol{X}) = \chi(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{p}). \tag{6.4.48}$$

Считая Лемму доказанной, мы можем преобразовать выражение (6.4.45) в

$$\begin{aligned}[-\chi^d(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{q})]^t\chi(\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{p}) - [\chi(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{p})]^t(-\chi^d(\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{q})) \approx\\ \approx \boldsymbol{q}^t[\chi(\boldsymbol{X})\chi(\boldsymbol{Y}) - \chi(\boldsymbol{Y})\chi(\boldsymbol{X})](\boldsymbol{p}),\end{aligned} \tag{6.4.49}$$

что совпадает с выражепием (6.4.44). ∎

Доказательство Леммы 6.4.46. Имеем,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^t\left(\frac{D(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{p}}\right)^{\dagger}(\boldsymbol{X}) \approx \boldsymbol{X}^t\frac{D(\boldsymbol{p}\nabla\chi \boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) \overset{(6.4.41)}{=}\\ = \boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{x}\nabla_\chi \boldsymbol{q}) \overset{(6.4.21)}{=} -\boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{q}\nabla_{\chi^d}\boldsymbol{x}) \overset{(6.4.19)}{\approx} -\boldsymbol{x}^t[\chi^d(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{q})],\end{aligned} \tag{6.4.50}$$

что доказывает формулу (6.4.47). Аналогично,

$$\boldsymbol{y}^t\left(\frac{D(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{q}}\right)^{\dagger}(\boldsymbol{X}) \approx \boldsymbol{X}^t\frac{D(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{q})}{D\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{y}) \overset{(6.4.42)}{=} \boldsymbol{X}^t(\boldsymbol{p}\nabla_\chi \boldsymbol{y}) \approx \boldsymbol{y}^t\chi(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{p}), \tag{6.4.51}$$

что доказывает формулу (6.4.48). ∎

В качестве иллюстрации к Теореме 6.4.31, рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{G}_L^r$ (6.1.12L):

$$\mathcal{G}_L^r = \{\widehat{X} = \sum_j \xi^{j+r}X_j \leftrightarrow \boldsymbol{X}\}. \tag{6.4.52}$$

Рассмотрим ее естествениое действие на R, как одномерное представление:

$$\chi(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{x}) = \sum(X_j\boldsymbol{x})^{(j+r)}. \tag{6.4.53}$$

Тогда, согласно формуле (6.4.19),

$$\boldsymbol{X}^t(x\nabla y) = \sum_j X_j(x\nabla y)_j \approx y\chi(\boldsymbol{X})(x) = y\sum(X_jx)^{(j+r)} \sim$$

$$\sim \sum(-1)^{j+r}y^{(j+r)}X_jx \approx \sum X_jxy^{(j+r)}(-1)^{j+r} \quad \Rightarrow \tag{6.4.54}$$

$$(x\nabla y)_j = xy^{(j+r)}(-1)^{j+r}, \tag{6.4.55}$$

и из Теоремы 6.4.31 следует однокомпонентная версия гамильтонова отображения (6.4.9). Чтобы получить много-компонентную версию, рассмотрим, вместо одномерного представления χ, прямую сумму из некоторого числа копий этого представления, и затем используем

Упражнение 6.4.56. Покажите, что если χ_1 и χ_2 — два представления $\mathcal{H}$ и $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$, то

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} \nabla_\chi \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix} = x_1\nabla_{\chi_1}\boldsymbol{y}_1 + x_2\nabla_{\chi_2}\boldsymbol{y}_2. \tag{6.4.57}$$

Замечание 6.4.58. Довольно забавно, но даже в чисто абелевом случае, современная теория представлений Клебша не была достаточно разработана, чтобы объяснить промежуточное гамильтоново отображение (6.4.6), где гамильтонова форма во вспомогательном пространстве Клебша не простая симплектическая, а включает дифференциальные операторы.

Упражнение 6.4.59. Доказать гамильтоновость отображения $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\boldsymbol{\Phi}(A_i) = (-1)^i \boldsymbol{p}^{(r)t}\boldsymbol{q}^{(i)}, \tag{6.4.60}$$

связывающего гамильтонову матрицу $B^r = B(\mathcal{G}^r)$ (6.1.9) и каноническую гамильтонову матрицу b^{can} (6.4.2).
[Подсказка : рассмотреть прямую сумму нескольких копий естественного одномерного представления алгебры Ли $\mathcal{G}^r_R$ (6.1.12R).]

6.5 Формула типа Концевича

> Французская армия до сих пор является
> лучшей военной машиной в Европе.
>
> Журнал *Time* (12 июня 1939)

В этом разделе выводится одна чисто некоммутативная формула некоммутативного вариационного исчисления. Хотя эта формула и не имеет коммутативного аналога, она напоминает теорему Эйлера об однородных функциях.

Иерархия КП

$$\partial_{t_n}(L) = [L,(L^n)_-], \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{6.5.1}$$

$$L = \xi + \sum_{i \geqslant 0} A_i\xi^{-i-1}, \tag{6.5.2}$$

приводит к следующим уравнениям движения для A_0 :

$$\partial_{t_n}(A_0) = \partial(\mathrm{Res}(L^n)). \tag{6.5.3}$$

Следовательно, выполняется не только

$$\partial_{t_n}(A_0) \approx 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{6.5.4}$$

но и более сильное соотношение

$$\partial_{t_n}(A_0) \sim 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{6.5.5}$$

С другой стороны, из гамильтоновой формы (6.1.7, 8) иерархии КП получаем

$$\partial_{t_n}(A_0) = \sum_j \Big[-\widehat{L}_{A_j} + \sum_\ell \binom{j}{\ell} \partial^\ell \widehat{R}_{A_{j-\ell}}\Big]\Big(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_j}\Big). \tag{6.5.6}$$

Отсюда следует, что

$$-\partial_{t_n}(A_0) \sim \sum_j [A_j, \frac{\delta H_{n+1}}{\delta A_j}]. \tag{6.5.7}$$

Тогда

$$\sum_j [A_j, \frac{\delta H}{\delta A_j}] \sim 0 \tag{6.5.8}$$

для всех $H = H_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Общим эмпирико-эвристическим принципом теории интегрируемых систем является следующий: если общая формула лагранжевого типа выполняется для бесконечного числа интегралов данной иерархии, то она должна быть верна для *любого* гамильтониана. Сейчас мы покажем, что этот принцип срабатывает для формулы (6.5.8):

Теорема 6.5.9. Пусть дифференцирования $\partial_1, \dots, \partial_m$ *тривиально* действуют на R (так что можно рассматривать случай $R = \mathbb{Z}$). Пусть H — произвольный элемент дифференциального кольца $C_A = R\langle A_i^{(\nu)}\rangle$. Тогда верна формула (6.5.8).

Замечание 6.5.10. (i) Существенно то, что дифференцирования $\partial_1, \dots, \partial_m$ действуют тривиально на все коэффициенты из R, входящие в H. Иначе формула (6.5.8) нарушится;

(ii) формула (6.5.8) верна также в случае разностного исчисления вместо дифференциального, которое мы сейчас рассматриваем. Это будет показано в §12.5. Более того, формула остается справедливой и в рамках более общего дифференциально-разностного исчисления;

(iii) В случае классической некоммутативной симплектической механики, то есть, когда дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_m$ нет и $(A_i) = (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, формула (6.5.8) переходит в

$$\sum_i \Big([p_i, \frac{\delta H}{\delta p_i}] + [q_i, \frac{\delta H}{\delta q_i}]\Big) = 0. \tag{6.5.11}$$

Эту формулу можно найти в статье Концевича [Kon 1993].

Доказательство Теоремы 6.5.9. Учитывая свойства R, достаточно рассмотреть случай

$$H = A_{j_1}^{(\nu_1)} \ \dots \ A_{j_n}^{(\nu_n)}. \tag{6.5.12}$$

Обозначим, для этого конкретного H,

$$\sqcap_s^+ = [A_{j_s}^{(\nu_s)})]^{-1} A_{j_s}^{(\nu_s)} \dots A_{j_n}^{(\nu_n)}, \quad \sqcap_s^- = A_{j_1}^{(\nu_1)} \dots A_{j_s}^{(\nu_s)} [A_{j_s}^{(\nu_s)}]^{-1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{6.5.13}$$

Тогда

$$\frac{\delta H}{\delta A_i} = \sum_{s=1}^{n} (-\partial)^{\nu_s} \delta^i_{j_s} (\sqcap^+_s \sqcap^-_s) \quad \Rightarrow \tag{6.5.14}$$

$$\sum_i A_i \frac{\delta H}{\delta A_i} = \sum_s A_{j_s} (-\partial)^{\nu_s} (\sqcap^+_s \sqcap^-_s) \sim \sum_s A^{(\nu_s)}_{j_s} \sqcap^+_s \sqcap^-_s, \tag{6.5.15}$$

$$\sum_i \frac{\delta H}{\delta A_i} A_i = \sum_s [(-\partial)^{\nu_s} (\sqcap^+_s \sqcap^-_s)] A_{j_s} \sim \sum_s \sqcap^+_s \sqcap^-_s A^{(\nu_s)}_{j_s}. \tag{6.5.16}$$

Вычитая формулу (6.5.16) из формулы (6.5.15), получаем

$$\sum_i [A_i, \frac{\delta H}{\delta A_i}] \sim \sum_s [A^{(\nu_s)}_{j_s}, \sqcap^+_s \sqcap^-_s], \tag{6.5.17}$$

и, в силу Леммы 6.5.18 ниже, правая часть формулы (6.5.17) обращается в ноль. ∎

Лемма 6.5.18. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — образующие свободиого ассоциативного кольца $\mathbb{Z}\langle u_1, \dots, u_n \rangle$. Положим

$$\sqcap^+_s = (u_s)^{-1} u_s \dots u_n, \quad \sqcap^-_s = u_1 \dots u_s (u_s)^{-1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{6.5.19}$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{n} [u_s, \sqcap^+_s \sqcap^-_s] = 0. \tag{6.5.20}$$

Доказательство. Имеем, обозначая $H = u_1 \dots u_n$:

$$\sum_{s=1}^{n} u_s \sqcap^+_s \sqcap^-_s = u_1 \sqcap^+_1 \sqcap_1 + \sum_{s=1}^{n-1} u_{s+1} \sqcap^+_{s+1} \sqcap^-_{s+1} = H + \sum_{s=1}^{n-1} u_{s+1} \dots u_n u_1 \dots u_s, \tag{6.5.21a}$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sqcap^+_s \sqcap^-_s u_s = \sqcap^+_n \sqcap^-_n u_n + \sum_{s=1}^{n-1} \sqcap^+_s \sqcap^-_s u_s = H + \sum_{s=1}^{n-1} u_{s+1} \dots u_n u_1 \dots u_s, \tag{6.5.21b}$$

и оба выражения совнадают. ∎

Замечание 6.5.22. (i) Так как

$$\sqcap^+_s \sqcap^-_s = \frac{\delta H}{\delta u_s}, \quad H = u_1 \dots u_n, \tag{6.5.23}$$

то наша лемма утверждает, что

$$\sum_{s=1}^{n} [u_s, \frac{\delta(u_1 \dots u_n)}{\delta u_s}] = 0; \tag{6.5.24}$$

(ii) из формулы (6.5.15) следует

$$\sum_i A_i \frac{\delta H}{\delta A_i} \approx \deg(H) H. \tag{6.5.25}$$

Это можно рассматривать, как некоммутатнвный варнационный аналог теоремы Эйлера об одиородных функциях;

(iii) для любого ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant n$, обозначим через 1_ℓ мультииндекс $(0,\dots,1,\dots,0)$ с единственной 1 на ℓ-м месте. Тогда имеется следующий аналог стандартной абелевой формулы:

$$\sum_i A_i^{(1_\ell)} \frac{\delta H}{\delta A_i} \approx 0, \quad \forall\, H \in R_0(A_i^{(\nu)}), \tag{6.5.26}$$

где R_0 — максимальное коммутативное подкольцо в R, на котором дифферепцирование ∂_ℓ действует тривиальпо.

Доказательство формулы (6.5.26). Прн H заданном формулой (6.5.12), мы имеем:

$$\sum A_i^{(1_\ell)} \frac{\delta H}{\delta A_i} \overset{(6.5.14)}{=} \sum_s A_{j_s}^{(1_\ell)} (-\partial)^{\nu_s} (\sqcap_s^+ \sqcap_s^-) \sim \sum_s A_{j_s}^{(\nu_s + 1_\ell)} \sqcap_s^+ \sqcap_s^- \approx$$

$$\approx \sum_s \sqcap_s^+ \partial_\ell (A_{j_s}^{(\nu_s)}) \sqcap_s^- = \partial_\ell(H) \sim 0. \qquad \blacksquare$$

> **Возьмите несколько листов бумаги и в течение трех дней систематически ... записывайте все, что приходит вам в голову.**
>
> **Людвиг Бори**, *Как стать оригинальным писателем за три дня*

6.6 Третья гамильтонова структура иерархии МКП

В этом разделе мы выводим третью гамильтонову структуру иерархин МКП, используя новые координаты в пространстве динамических переменных.

В обозначениях §2.1, нерархия МКП нмеет вид

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [{}_{>0}(\mathcal{L}^n), \mathcal{L}], \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{6.6.1}$$

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i \geqslant 0} a_i \xi^{-i}. \tag{6.6.2}$$

Положнм

$$\mathcal{L} = \xi \Lambda^{-1}, \tag{6.6.3}$$

$$\Lambda = 1 + \sum_{i \geqslant 0} R_i \xi^{-i-1}. \tag{6.6.4}$$

Из формулы вычетов, прн обозначении

$$\mathcal{L}^n = \sum \xi^s \pi_s(n), \tag{6.6.5}$$

следует:

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})] = \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n \xi (-\Lambda^{-1}) d(\Lambda) \Lambda^{-1}] \approx -\operatorname{Res}[d(\Lambda)\Lambda^{-1}\mathcal{L}^{n+1}] =$$

$$= -\operatorname{Res}[d(\Lambda)\xi^{-1}\mathcal{L}^{n+2}] = -\operatorname{Res}\Big(\sum dR_i \xi^{-i-1} \xi^{s-1} \pi_s(n+2)\Big) =$$

$$= -\sum dR_i \pi_{i+1}(n+2) \quad \Rightarrow$$

$$\pi_{i+1}(n) = -\frac{\delta \mathcal{H}_{n-1}}{\delta R_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad n > 1 \quad \Rightarrow \tag{6.6.6}$$

$${}_{>0}(\mathcal{L}^n) = \sum_{i \geqslant 0} \xi^{i+1} \frac{\delta(-\mathcal{H}_{n-1})}{\delta R_i}. \tag{6.6.7}$$

Временно обозначив $_{>0}(\mathcal{L}^n)$ через $\mathcal{R}$, из уравнений движения (6.6.1) находим

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = \partial_{\mathcal{P}}(\xi\Lambda^{-1}) = \xi(-\Lambda^{-1})\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda)\Lambda^{-1} = [\mathcal{R}, \mathcal{L}] = \mathcal{R}\xi\Lambda^{-1} - \xi\Lambda^{-1}\mathcal{R} \quad \Rightarrow$$
$$\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda) = \mathcal{R}\Lambda - \Lambda\xi^{-1}\mathcal{R}\xi. \tag{6.6.8}$$

В компонентах, эти уравнения принимают вид

$$\partial_{\mathcal{P}}(R_i) = \sum_{j\geqslant 0} B_{ij}^{\text{МКП}_3}(X_j), \quad X_j = \frac{\delta(-\mathcal{H}_{n-1})}{\delta R_j}, \tag{6.6.9}$$

с некоторой матрицей $B^{\text{МКП}_3}$. Проверим, что эта матрица гамильтонова. Она линейна, и выполняя рутинное вычисление, находим

$$B^{\text{МКП}_3}(X)^t Y \approx \sum B_{ij}^{\text{МКП}_3}(X_j)Y_i = \sum \partial_{\mathcal{P}}(R_i)Y_i = \sum \operatorname{Res}(\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda)\xi^i Y_i)$$
$$\left[\text{обозначая } \sum \xi^{j+1}X_j = \widehat{X}, \sum \xi^{i+1}Y_i = \widehat{Y}; \text{ и в силу (6.6.8)}\right] =$$
$$= \operatorname{Res}[(\widehat{X}\Lambda - \Lambda\xi^{-1}\widehat{X}\xi)\xi^{-1}\widehat{Y}] \approx \operatorname{Res}[\Lambda\xi^{-1}(\widehat{Y}\widehat{X} - \widehat{X}\widehat{Y})]. \tag{6.6.10}$$

Следовательно, матрица $-B^{\text{МКП}_3}$ гамильтонова, будучи ассоциирована с алгеброй Ли ${}^1\mathcal{G}$, где ${}^r\mathcal{G}$ $(= \mathcal{G}_L^r)$ — алгебра Ли ассоциативного кольца

$$\left\{\sum_{i\geqslant 0} \xi^{i+r}X_i | X_i \in R\right\}. \tag{6.6.11}$$

Проделанные нами рассуждения не включают поток номер 1, при $n = 1$, так как гамильтониан $\mathcal{H}_0$ не был определен. Как обычно, при обсуждении вопросов, связанных с третьей гамильтоновой структурой, мы должны отдельно проверить, что первый поток может быть записан в вычисленной гамильтоновой форме. Так как

$$_{>0}\mathcal{L} = \xi, \tag{6.6.12}$$

то первый поток является сдвигом по x:

$$\partial_{t_1}(R_i) = \partial(R_i), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.6.13}$$

С другой стороны, матрица $B^{\text{МКП}_3}$ та же, что и матрица $-B^r|_{r=1}$ (6.1.9) (только в других обозначениях), поэтому

$$B_{i0}^{\text{МКП}_3} = \widehat{R}_{R_{i+1}} + \partial\widehat{R}_{R_i} - \sum_{\ell} \binom{i+1}{\ell} \widehat{L}_{R_{i+1-\ell}}(-\partial)^{\ell}. \tag{6.6.14}$$

Следовательно,

$$B_{i0}^{\text{МКП}_3}(1) = R_{i+1} + \partial(R_i) - R_{i+1} = \partial(R_i), \tag{6.6.15}$$

что и требовалось, а соответствующий гамильтониан равен

$$\mathcal{H}_0 = R_0 \quad (= -\text{“}\operatorname{Res}[\ln(\mathcal{L})]\text{”}). \tag{6.6.16}$$

Упражнение 6.6.17. Объяснить, почему подход этого раздела не срабатывает для получения третьей гамильтоновой структуры иерархии КП.

Глава 7

Квазирелятивистская иерархия КП

В этой главе мы изучаем специальные однопараметрические деформации иерархий КП, МКП и НУШ, а также их гамильтоновы формы.

7.1 Вывод основных уравнений и коммутативность потоков

> Нетрудно подсчитать, что если расширять мир в соответствии с нынешней скоростью роста народонаселения, то через 2598 лет Земля будет расширяться со скоростью света. Развитие науки происходит еще быстрее. Несколько лет назад, по крайней мере в физике, мы дошли до того, что ожидаемое время жизни теории стало меньше, чем время публикации в среднем научном журнале. Следовательно, большинство теорий появляются мертворожденными и журналы делаются бесполезными, сохраняя лишь роль исторических документов.
>
> Тони Ротманн, *Физик на Мэдисон авеню*

В этом разделе определяется весьма специальная деформация уравнений Лакса. Доказано, что деформированные потоки корректно определены и коммутируют.

Абелева теория (матричных) уравнений Лакса развивается по следующей схеме. *Пусть* R — ***коммутативная*** дифференциальная алгебра над $\mathcal{F}$ с дифференцированием $\partial : R \to R$. Положим $C = C_A = R[A_i^{(l)}]$, $i \in \mathcal{I}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Пусть

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_C = \Big\{ \sum_{s<\infty} c_s \xi^s \mid c_s \in C \quad \text{или} \quad c_s \in \mathrm{Mat}_{(\cdot)}(C) \Big\} \qquad (7.1.1)$$

есть кольцо псевдо-дифференциальных операторов над C, скалярных или матричных. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и выберем в $\mathcal{O}$ следующий элемент:

$$L = \sum_{i=l.l.}^{N} u_i \xi^i \,, \quad l.l. = 0 \quad \text{или} \quad -\infty, \qquad (7.1.2)$$

где u_i принадлежат $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(C)$ и элемент u_N обратим в $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(\mathcal{F})$. Пусть $\mathcal{Z}(L)$ — централизатор L :

$$\mathcal{Z}(L) = \{ P \in \mathcal{O}_C \mid [P, L] = 0 \}. \qquad (7.1.3)$$

Для любого $P \in \mathcal{Z}(L)$, рассмотрим эволюционное дифференцирование ∂_P в C, определенное следующие равенством в $\mathcal{O}_C$:

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-]. \tag{7.1.4}$$

Дифференцирование ∂_P корректно определено если выбирать u_i дифференциально независимыми при $i < N$. Кроме того, если $Q \in \mathcal{Z}(L)$ есть другой элемент, то

$$[P, Q] = 0 \quad \Rightarrow \ [\partial_P, \partial_Q] = 0. \tag{7.1.5}$$

(Заметим, хотя здесь нам это и не понадобится, что абелева теория (Вильсона) предсказывает также, что если u_N полупрост и $u_{N-1} \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_{u_N})$, то $\mathcal{Z}(L)$ абелев и каждый однородный элемент $P \in \mathcal{Z}(L)$ однозначно определяется своим старшим коэффициентом, в качестве которого можно взять произвольный элемент центра централизатора u_N в $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(\mathcal{F})$.)

В некоммутативном царстве, которое мы исследуем, надо стартовать с R, являющегося просто ассоциативной дифференциальной алгеброй с единицей, не обязательно коммутативной; далее построить дифференциальную алгебру $C = C_A = R\langle A_i^{(l)}\rangle$, $0 \leqslant i < N - l.l.$, при обычном предположении, что элементы из R коммутируют с $A_i^{(\ell)}$; затем выбрать

$$L = u_N\xi^N + \sum_{i \geqslant 0} A_i \xi^{N-1-i}. \tag{7.1.6}$$

До сих пор мы всегда рассматривали случай

$$u_N = 1, \tag{7.1.7}$$

и читатель при желании может продолжать это. Но не составит дополнительного труда рассмотреть, *только в этом разделе*, более общий случай, когда u_N является постоянным обратимым элементом; наградой будет доказательство формулы, аналогичной (7.1.5), в этих более общих условиях.

Перейдем теперь к так называемой квазирелятивистской деформации уравнений Лакса (7.1.4). Ярлык “квазирелятивистская” оправдан происхождением приведенных далее анзацев из теории релятивистской цепочки Тоды (о которой см. в главе 15.)

Пусть ε — формальный параметр (можно считать, что он обратен к квадрату скорости света.) Положим

$$\mathcal{L} = (1 - \varepsilon u_N \xi)^{-1} L. \tag{7.1.8}$$

Таким образом, $\mathcal{L}$ принадлежит не $\mathcal{O}_C$, а $\widetilde{\mathcal{O}}_C$:

$$\widetilde{\mathcal{O}}_C := \mathcal{O}_C[[\varepsilon]]. \tag{7.1.9}$$

Пусть $\mathcal{P} \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$. Рассмотрим следующее эволюционное дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ в C :

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_+ + \mathcal{S}(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_- - \mathcal{S}(\mathcal{P}_-)], \tag{7.1.10}$$

где релятивистский символ $\mathcal{S} : \widetilde{\mathcal{O}}_C \to \mathrm{Mat}_{(\cdot)}[C((\varepsilon))]$ определен по правилу

$$\mathcal{S}\Big(\sum c_s \xi^s\Big) = \sum c_s u_N^{-s} \varepsilon^{-s}. \tag{7.1.11}$$

Заметим, что $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ не пуст, так как содержит все степени $\mathcal{L}$. Более подробно мы обсудим структуру $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ ниже, после формулы (7.1.31).

Теорема 7.1.12. Дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ корректно определено.

Доказательство. Так как $[\mathcal{P},\mathcal{L}]=0$,

$$[\mathcal{P}_+,\mathcal{L}]=[\mathcal{L},\mathcal{P}_-].$$

Таким образом, второе равенство в определении (7.1.10) следует из первого.

Из первого равенства в этом определение мы видим также, что

$$L_-=0 \quad \Rightarrow \partial_{\mathcal{P}}(L_-)=0, \tag{7.1.13}$$

так как

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}(L_-)&=[\partial_{\mathcal{P}}(L)]_-=[(1-\varepsilon u_N\xi)\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})]_-=\\&=\left((1-\varepsilon u_N\xi)[\mathcal{P}_++S(\mathcal{P}_-),(1-\varepsilon u_N\xi)^{-1}L]\right)_-.\end{aligned} \tag{7.1.14}$$

Далее, из второго равенства в определении $\partial_{\mathcal{P}}$ получаем

$$\begin{aligned}&\partial_{\mathcal{P}}(L)=(1-\varepsilon u_N\xi)\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})=\\&=L(\mathcal{P}_--S(\mathcal{P}_-))-(1-\varepsilon u_N\xi)(\mathcal{P}_--S(\mathcal{P}_-))(1-\varepsilon u_N\xi)^{-1}L.\end{aligned} \tag{7.1.15}$$

Обозначим, временно, для любого $\mathcal{P}_-\in\widetilde{\mathcal{O}}_-$:

$$\mathcal{P}_2=\mathcal{P}_--S(\mathcal{P}_-), \tag{7.1.16}$$

так что

$$\partial_{\mathcal{P}}(L)=L\mathcal{P}_2-(1-\varepsilon u_N\xi)\mathcal{P}_2(1-\varepsilon u_N\xi)^{-1}L. \tag{7.1.17}$$

Лемма 7.1.18.

$$\mathcal{P}_2(1-\varepsilon u_N\xi)^{-1}\in\widetilde{\mathcal{O}}_-\,. \tag{7.1.19}$$

Доказательство. Если $\mathcal{P}_-=\sum\limits_{s\geqslant 0}c_s\xi^{-s-1}$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2&=\sum_{s\geqslant 0}(c_s\xi^{-s-1}-c_su_N^{s+1}\varepsilon^{s+1})=\sum_s c_s\sum_{\ell=0}^{s}\xi^{-\ell}(u_N\varepsilon)^{s-\ell}(\xi^{-1}-u_N\varepsilon)=\\&=\Big[\sum_{s,\ell\geqslant 0}c_{s+\ell}\xi^{-\ell}(u_N\varepsilon)^s\Big]\xi^{-1}(1-\varepsilon u_N\xi).\qquad\blacksquare\end{aligned} \tag{7.1.20}$$

Далее, пусть

$$\mathcal{P}_2(1-\varepsilon u_N\xi)^{-1}=p\xi^{-1}+\bar{p}\xi^{-2}+O(\xi^{-3}). \tag{7.1.21}$$

Тогда из формулы (7.1.17) получаем:

$$\begin{aligned}&\sum_{\imath\geqslant 0}\partial_{\mathcal{P}}(A_\imath)\xi^{N-1-\imath}=\partial_{\mathcal{P}}(L)=\\&\quad=(u_N\xi^N+A_0\xi^{N-1}+\ldots)(p\xi^{-1}+\bar{p}\xi^{-2}+\ldots)(1-\varepsilon u_N\xi)-\\&\qquad-(1-\varepsilon u_N\xi)(p\xi^{-1}+\bar{p}\xi^{-2}\ +\ldots)(u_N\xi^N+A_0\xi^{N-1}\ +\ldots)=\\&\quad=[u_Np\xi^{N-1}+(Nu_Np^{(1)}+u_N\bar{p}+A_0p)\xi^{N-2}\ +\ldots](1-\varepsilon u_N\xi)-\\&\qquad-(1-\varepsilon u_N\xi)[pu_N\xi^{N-1}+(pA_0+\bar{p}u_N)\xi^{N-2}\ +\ldots]=\\&\quad=u_Np\xi^{N-1}-\varepsilon[u_Npu_N\xi^N+(Nu_Np^{(1)}+u_N\bar{p}+A_0p)u_N\xi^{N-1}]+\cdots-\\&\qquad-pu_N\xi^{N-1}+\varepsilon u_N\{pu_N\xi^N+[p^{(1)}u_N+pA_0+\bar{p}u_N]\xi^{N-1}\}+\cdots=\\&\quad=\{[u_N,p]-\varepsilon[u_N(N-1)p^{(1)}u_N+(A_0pu_N-u_NpA_0)]\}\xi^{N-1}\ +\ldots\,.\end{aligned} \tag{7.1.22}$$

Таким образом, дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ корректно определено, хотя и кажется переопределенным. ∎

Следствие 7.1.23. При $N = 1$ и $u_N = 1$ допустима самосогласованная связь

$$A_0 = 0. \tag{7.1.24}$$

Доказательство. Из формулы (7.1.22) получаем

$$\partial_{\mathcal{P}}(A_0) = [u_N, p] - \varepsilon(N-1)u_N p^{(1)} u_N + \varepsilon(u_N p A_0 - A_0 p u_N). \tag{7.1.25}$$

Следовательно, при $N = 1$ и $u_N = 1$ находим, что

$$\partial_{\mathcal{P}}(A_0) = \varepsilon[p, A_0]. \quad ∎ \tag{7.1.26}$$

Итак, *в* случае КП при $N = 1$, $u_1 = \mathbf{1}$, мы имеем право, и воспользуемся им, рассмотреть анзац

$$\mathcal{L} = (1-\varepsilon\xi)^{-1}\Big(\xi + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}\Big). \tag{7.1.27}$$

Замечание 7.1.28. Так как релятивистский символ S (7.1.11) *регулярен* по ε в $\widetilde{\mathcal{O}}_-$, то регулярно и эволюционное дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ (7.1.10). Таким образом, наши квазирелятивистские уравнения образуют регулярную деформацию, с параметром ε, уравнений Лакса, как в абелевой, так и неабелевой теории.

Пусть теперь $\mathcal{R} \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ будет другим элементом из централизатора, таким, что

$$[\mathcal{R}, \mathcal{P}] = 0, \tag{7.1.29}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) = [\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), \mathcal{R}] = [\mathcal{R}, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)], \tag{7.1.30}$$

$$\partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) = [\mathcal{R}_+ + S(\mathcal{R}_-), \mathcal{P}] = [\mathcal{P}, \mathcal{R}_- - S(\mathcal{R}_-)]. \tag{7.1.31}$$

Естественно, эти соотношения выполнены, если $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$ — степени $\mathcal{L}^{1/N}$. Давайте убедимся, что $X = \mathcal{L}^{1/N}$ существует. Можно считать, что $\bar{u} = u_N^{1/N}$ существует; если же нет, присоединим к $\mathcal{F}$ достаточное число корней N-й степени и будем работать с расширенным полем $\mathcal{F}^{ext}$. (В основном интересующем нас случае $u_N = 1$ ничего делать и не приходится.) Пусть сначала

$$X_0 = L^{1/N}. \tag{7.1.32}$$

X_0 существует согласно следующей модификации доказательства Леммы 3.9.44: пусть

$$X_0 = \bar{u}\xi + \sum_{i\geqslant 0} v_i \xi^{-i}; \tag{7.1.33}$$

нам надо решить уравнение

$$X_0^N = \Big(\bar{u}\xi + \sum_{i\geqslant 0} v_i \xi^{-i}\Big)^N = \bar{u}^N \xi^N + \sum_{i\geqslant 0} A_i \xi^{N-1-i}. \tag{7.1.34}$$

Коэффициент при ξ^{N-1-i} в левой его части равен

$$\sum_{\alpha+\beta=N-1} \bar{u}^\alpha v_i \bar{u}^\beta + \text{[члены зависящие от } v_j \text{ с } j < i] = A_i. \tag{7.1.35}$$

Так как u_N обратим в $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(\mathcal{F})$, то обратим и $\bar{u}$ в $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(\mathcal{F}^{ext})$. Следовательно, отображение $v \mapsto \sum_{\alpha+\beta=N-1} \bar{u}^\alpha v \bar{u}^\beta$ обратимо в $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(C^{ext})$, и мы можем решить уравнения (7.1.35) последовательно по i. Чтобы решить уравнение

$$X^{1/N} = \mathcal{L}, \tag{7.1.36}$$

перепишем его в виде

$$X^N = \mathcal{L} = (1 - \varepsilon u_N \xi)^{-1} L = \sum \varepsilon^\kappa u_N^\kappa \xi^\kappa L \tag{7.1.37}$$

и положим

$$X = \sum_{i \geqslant 0} X_i \varepsilon^i, \quad X_i \in \mathcal{O}_C. \tag{7.1.38}$$

Тогда коэффициент при ε^i, $i > 0$, в левой части уравнения (7.1.37) равен

$$\sum_{\alpha+\beta=i-1} X_0^\alpha X_i X_0^\beta + \text{ [члены содержащие } X_j \text{ с } j < i] = u_N^i \xi^i L. \tag{7.1.39}$$

Далее, $X_0 = \bar{u}\xi + \dots$ обратим, так как обратим $\bar{u}$. Тогда обратимо и отображение $X \mapsto \sum_{\alpha+\beta=i-1} X_0^\alpha X X_0^\beta$, и уравнение (7.1.39) решается последовательно по i. Это рассуждение годится в теории матричных уравнений Лакса. В чисто некоммутативной области, $u_N = \bar{u} = 1$,

$$X_0 = L^{1/N} = \xi + \sum v_i \xi^{-i} \tag{7.1.40}$$

существует в силу Леммы 3.9.44, и для уравнения (7.1.39) требуется другое рассуждение, приведенное ниже.

Лемма 7.1.41. Пусть

$$X_0 = \xi + \sum_{i \geqslant 0} v_i \xi^{-i} \in \bar{R}((\xi^{-1})), \quad \bar{R} = R\langle v_i^{(j)} \rangle, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.1.42}$$

Для любого фиксированного $M \in \mathbb{Z}_+$ следующее отображение обратимо в $\bar{R}((\xi^{-1}))$:

$$X \mapsto \sum_{\alpha+\beta=M} X_0^\alpha X X_0^\beta. \tag{7.1.43}$$

Доказательство. При $M = 0$ это отображение тождественно. Допустим, $M \in \mathbb{N}$. Пусть дан $Y = \sum^\kappa Y_s \xi^s \in \bar{R}((\xi^{-1}))$. Мы ищем $X = \sum^{\kappa-M} \bar{X}_s \xi^s \in \bar{R}((\xi^{-1}))$ такой, что

$$\sum_{\alpha+\beta=M} X_0^\alpha \sum^{\kappa-M} \bar{X}_s \xi^s X_0^\beta = \sum^\kappa Y_s \xi^s. \tag{7.1.44}$$

Удерживая старшие члены, получаем

$$M \bar{X}_{\kappa-M} = Y_\kappa \quad \Rightarrow \quad \bar{X}_{\kappa-M} = Y_\kappa / M. \tag{7.1.45}$$

Допустим теперь, что уже найдены $\bar{X}_{\kappa-M}, \bar{X}_{\kappa-M-1}, \dots, \bar{X}_{\kappa-M-\ell}$, такие, что равенство (7.1.44) выполняется для всех ξ^s при $s = \kappa, \kappa-1, \dots, \kappa-\ell$. Тогда для следующего члена, $X_{\kappa-M-\ell-1}$, получаем уравнение

$$M \bar{X}_{\kappa-M-\ell-1} + \text{ [члены содержащие } \bar{X}_{\kappa-M,\dots,}\bar{X}_{\kappa-M-\ell}] = Y_{\kappa-\ell-1}, \tag{7.1.45$'$}$$

а это соотношение, очевидно, разрешимо. ∎

Теперь мы можем доказать, что квазирелятивистские потоки коммутируют.

Теорема 7.1.46. Допустим, предположения (7.1.29-31) выполнены. Тогда

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{R}}] = 0. \tag{7.1.47}$$

Доказательство. Мы покажем

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{R}}](\mathcal{L}) = 0. \tag{7.1.48}$$

Имеем, в силу (7.1.31),

$$\partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_+) = [\mathcal{P}, \mathcal{R}_- - S(\mathcal{R}_-)]_+ = [\mathcal{P}_+, \mathcal{R}_- - S(\mathcal{R}_-)]_+ \quad \Rightarrow \tag{7.1.49}$$

$$\begin{gathered}\partial_{\mathcal{R}}\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = \partial_{\mathcal{R}}([\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}]) \overset{(7.1.49)}{=} \\ = [[\mathcal{P}_+, \mathcal{R}_- - S(\mathcal{R}_-)]_+, \mathcal{L}] + [S\partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}] + [\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), [\mathcal{R}_+ + S(\mathcal{R}_-), \mathcal{L}]].\end{gathered} \tag{7.1.50a}$$

Переставляя $\mathcal{P}$ и $\mathcal{R}$, получаем

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) = [[\mathcal{R}_+, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)]_+, \mathcal{L}] + [S\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-), \mathcal{L}]+ \\ +[\mathcal{R}_+ + S(\mathcal{R}_-), [\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}]].\end{aligned} \tag{7.1.50b}$$

Вычитая (7.1.50a) из (7.1.50b), получаем

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{R}}](\mathcal{L}) = [?, \mathcal{L}], \tag{7.1.51}$$

где

$$\begin{aligned}
? = {} & [\mathcal{R}_+, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)]_+ + [\mathcal{R}_- - S(\mathcal{R}_-), \mathcal{P}_+]_+ + \\
& + S[\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_+)] + [\mathcal{R}_+ + S(\mathcal{R}_-), \mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-)] = && (7.1.52) \\
= {} & [\mathcal{R}_+, \mathcal{P}_-]_+ + [\mathcal{R}_-, \mathcal{P}_+]_+ + [\mathcal{R}_+, \mathcal{P}_+] + && (7.1.53) \\
& + [\mathcal{R}_+, -S(\mathcal{P}_-)]_+ - [S(\mathcal{R}_-), \mathcal{P}_+]_+ + [\mathcal{R}_+, S(\mathcal{P}_-)] + [S(\mathcal{R}_-), \mathcal{P}_+] + && (7.1.54) \\
& + S[\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_-)] + [S(\mathcal{R}_-), S(\mathcal{P}_-)]. && (7.1.55)
\end{aligned}$$

Выражение (7.1.53), будучи “+”–частью уравнения (7.1.29), равно нулю:

$$0 = [\mathcal{R}, \mathcal{P}] = [\mathcal{R}, \mathcal{P}]_+ = [\mathcal{R}_+ + \mathcal{R}_-, \mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-]_+ = [\mathcal{R}_+, \mathcal{P}_-]_+ + [\mathcal{R}_-, \mathcal{P}_+]_+ + [\mathcal{R}_+, \mathcal{P}_+].$$

Выражение (7.1.54) равно нулю тождественно. Таким образом, нужно лишь показать, что выражение (7.1.55) равно нулю:

$$S[\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_-)] + [S(\mathcal{R}_-), S(\mathcal{P}_-)] = 0. \tag{7.1.56}$$

Преобразуем это выражение следующим образом: так как

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-) = [\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R})]_- \overset{(7.1.30)}{=} [\mathcal{R}, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)]_-, \tag{7.1.57}$$

то получаем

$$\begin{aligned}
S[\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_-)] &= S\big([\mathcal{R}, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)]_- - [\mathcal{P}, \mathcal{R}_- - S(\mathcal{R}_-)]_-\big) = \\
&= S\big([\mathcal{R}, -\mathcal{P}_+]_- - [\mathcal{P}, \mathcal{R}_-]_- + [\mathcal{R}_-, -S(\mathcal{P}_-)] - [\mathcal{P}_-, -S(\mathcal{R}_-)]\big) = \\
&= S\big([\mathcal{P}_+, \mathcal{R}_-]_- - [\mathcal{P}, \mathcal{R}_-]\big) + && (7.1.58) \\
&\quad + S\big([S(\mathcal{P}_-), \mathcal{R}_-] + [\mathcal{P}_-, S(\mathcal{R}_-)]\big). && (7.1.59)
\end{aligned}$$

Но

$$[\mathcal{P}_+,\mathcal{R}_-]_- - [\mathcal{P},\mathcal{R}_-]_- = [\mathcal{P}_+ - \mathcal{P},\mathcal{R}_-]_- = [-\mathcal{P}_-,\mathcal{R}_-]_- = -[\mathcal{P}_-,\mathcal{R}_-],$$

так что выражение (7.1.58) превращается в $-S([\mathcal{P}_-,\mathcal{R}_-])$, и следовательно

$$S[\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_-) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}_-)] = S\big(-[\mathcal{P}_-,\mathcal{R}_-] + [S(\mathcal{P}_-),\mathcal{R}_-] + [\mathcal{P}_-,S(\mathcal{R}_-)]\big). \qquad (7.1.60)$$

Подставляя это в тождество (7.1.56), еще недоказанное, приходим к проверке следующего тождества:

$$S\big([S(\mathcal{P}_-),\mathcal{R}_-] + [\mathcal{P}_-,S(\mathcal{R}_-)]\big) = S([\mathcal{P}_-,R_-]) + [S(\mathcal{P}_-),S(\mathcal{R}_-)]. \qquad (7.1.61)$$

Лемма 7.1.62. Для любого $X, Y \in \widetilde{C}[[\xi^{-1}]]$,

$$S\big([S(X),Y] + [X,S(Y)]\big) = S([X,Y]) + [S(X),S(Y)]. \qquad (7.1.63)$$

Доказательство. Пусть $X = x\xi^\kappa$, $Y = y\xi^s$. Тогда

$$[X,Y] = \sum_\ell \left[x\binom{\kappa}{\ell}y^{(\ell)} - y\binom{s}{\ell}x^{(\ell)}\right]\xi^{\kappa+s-\ell}, \qquad (7.1.64)$$

так что, по формуле (7.1.11),

$$S([X,Y]) = \sum_\ell \left[\binom{\kappa}{\ell}xy^{(\ell)} - \binom{s}{\ell}yx^{(\ell)}\right]u_N^{\ell-\kappa-s}\varepsilon^{\ell-\kappa-s}. \qquad (7.1.65a)$$

Далее,

$$[S(X),S(Y)] = [xu_N^{-\kappa}, yu_N^{-s}]\varepsilon^{-\kappa-s} = (xu_N^{-\kappa}yu_N^{-s} - yu_N^{-s}xu_N^{-\kappa})\varepsilon^{-\kappa-s}. \qquad (7.1.65b)$$

Затем,

$$[S(X),Y] = [xu_N^{-\kappa}\varepsilon^{-\kappa}, y\xi^s] = \varepsilon^{-\kappa}\left[xu_N^{-\kappa}y\xi^s - \sum_\ell \binom{s}{\ell}yx^{(\ell)}u_N^{-\kappa}\xi^{s-\ell}\right] \quad \Rightarrow$$

$$S([S(X),Y]) = xu_N^{-\kappa}yu_N^{-s}\varepsilon^{-\kappa-s} - \sum_\ell \binom{s}{\ell}yx^{(\ell)}u_N^{-\kappa}u_N^{\ell-s}\varepsilon^{-\kappa+\ell-s}. \qquad (7.1.65c)$$

Переставляя X и Y, получаем

$$S([X,S(Y)]) = -yu_N^{-s}xu_N^{-\kappa}\varepsilon^{-\kappa-s} + \sum_\ell \binom{\kappa}{\ell}xy^{(\ell)}u_N^{-s}u_N^{\ell-\kappa}\varepsilon^{-s+\ell-\kappa}. \qquad (7.1.65d)$$

Схема сокращений в доказываемом равенстве $\{(7.1.65)\ a + b = c + d\}$ такова: $a1, d2$; $a2, c2$; $b1, c1$; $b2, d1$. ▮

Из Леммы 7.1.62 заключаем, что тождество (7.1.61) верно. Тем самым доказана и Теорема 7.1.46. ▮

Из формул (7.1.30, 31) видим, что наша коммутирующая иерархия имеет бесконечный набор общих интегралов:

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathrm{Res}(\mathcal{R})) = \mathrm{Res}\,\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) = \mathrm{Res}([\ ,\ ]) \approx 0. \qquad (7.1.66)$$

Следующий раздел посвящен гамильтонову формализму построенных иерархий.

Замечание 7.1.67. Полагая $N = 1$, $u_N = 1$, $\mathcal{P} = \mathcal{L}$, легко видеть, что первый квазирелятивистский поток не изоморфен нерелятивистскому (1.1.24).

Упражнение 7.1.68. Покажите, что для $\mathcal{P}, \mathcal{R} \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ удовлетворяющих условиям (7.1.29-31), выполняется равенство

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathrm{Res}(\mathcal{R})) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathrm{Res}(\mathcal{P})) = [S(\mathcal{P}_-),\mathrm{Res}(\mathcal{R})] - [S(\mathcal{R}_-),\mathrm{Res}(\mathcal{P})]. \qquad (7.1.69)$$

7.2 Гамильтонов формализм для квазирелятивистских потоков

В этом разделе мы выводим (первую) гамильтонову форму для квазирелятивистских потоков, и определяем ассоциированные Ли-алгебраические объекты.

Рассмотрим формальный оператор Лакса из предыдущего разделе, но с ξ, собранными *слева:*

$$L = \xi^N + \sum_{i=0}^{N-1} \xi^i u_i + \sum_{i\geqslant 0} \xi^{-i-1} A_i, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{7.2.1}$$

чтобы облегчить применение формулы вычетов. Положим

$$\mathcal{L} = (1-\varepsilon\xi)^{-1} L = (1-\varepsilon\xi)^{-1}\Big[\xi^N + \sum_0^{N-1} \xi^i u_i + \sum_0^{\infty} \xi^{-i-1} A_i\Big], \tag{7.2.2}$$

и введем обозначения

$$\mathcal{L}^r = \sum_s p_s(r)\xi^s, \quad r \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}. \tag{7.2.3}$$

В отличие от вычислений во всех предыдущих главах, для $\mathcal{L}^r = \mathcal{P}$ мы вынуждены использовать *правую* форму, чтобы избежать сложности при вычислении релятивистского символа $S(\mathcal{P}_-)$. В свою очередь, это обусловливает выбор *левой* формы для L (7.2.1). Для

$$H_r = \frac{1}{r}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^r), \quad r \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}, \tag{7.2.4}$$

имеем из формулы вычетов (4.5.9):

$$\begin{aligned} d(H_{r+1}) &\approx \operatorname{Res}[\mathcal{L}^r d(\mathcal{L})] = \operatorname{Res}\Big[\sum p_s(r)\xi^s(1-\varepsilon\xi)^{-1}\Big(\sum \xi^i du_i + \sum \xi^{-i-1} dA_i\Big)\Big] = \\ &= \operatorname{Res}\Big[\sum p_s(r)\xi^s\varepsilon^k\xi^k\Big(\sum \xi^i du_i + \sum \xi^{-i-1} dA_i\Big)\Big] \approx \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} du_i \sum_{k\geqslant 0} p_{-i-k-1}(r)\varepsilon^k + \sum_{i\geqslant 0} dA_i \sum_{k\geqslant 0} p_{i-k}(r)\varepsilon^k \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

$$\frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_i} = \sum_{k\geqslant 0} p_{i-k-1}(r)\varepsilon^k, \quad 0 \leqslant i \leqslant N-1, \tag{7.2.6}$$

$$\frac{\delta H_{r+1}}{\delta A_i} = \sum_{k\geqslant 0} p_{i-k}(r)\varepsilon^k, \quad 0 \leqslant i < \infty. \tag{7.2.7}$$

Из последних даух формул мы заключаем, что

$$S((\mathcal{L}^r)_-) = \varepsilon\frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_0}, \tag{7.2.8}$$

$$p_{-j-1}(r) = \frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_j} - \varepsilon\frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_{j+1}}, \quad 0 \leqslant j < N-1, \tag{7.2.9}$$

$$p_{j+1}(r) = \frac{\delta H_{r+1}}{\delta A_{j+1}} - \varepsilon\frac{\delta H_{r+1}}{\delta A_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.2.10}$$

Из последней формулы имеем, для

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}^r : \tag{7.2.11}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ + \mathcal{S}(\mathcal{P}_-) &= \sum_{s\geqslant 0} p_s(r)\xi^s + \sum_{k\geqslant 0} p_{-k-1}(r)\varepsilon^{k+1} = \\ &= \sum_{s\geqslant 0} p_{s+1}(r)\xi^{s+1} + \sum_{k\geqslant 0} p_{-k}(r)\varepsilon^k \overset{(7.2.10),\ (7.2.7)|_{i=0}}{=} \\ = \sum_{s\geqslant 0}(x_{s+1} - \varepsilon x_s)\xi^{s+1} + x_0 &= \sum_{s\geqslant 0} x_s\xi^s - \varepsilon\sum_{s\geqslant 0} x_s\xi^{s+1} = \sum_{s\geqslant 0} x_s\xi^s(1-\varepsilon\xi), \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

где

$$x_s = \frac{\delta H_{r+1}}{\delta A_s}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.2.13}$$

Обозначая

$$\widehat{x} = \sum_{s\geqslant 0} x_s\xi^s = \sum_{s\geqslant 0}\frac{\delta H_{r+1}}{\delta A_s}\xi^s, \tag{7.2.14}$$

мы можем переписать формулу (7.2.12) в виде

$$\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-) = \widehat{x}(1-\varepsilon\xi). \tag{7.2.15}$$

Далее, из определения (7.1.10) имеем

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) &= [\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}] \quad \Rightarrow \\ \partial_{\mathcal{P}}(L) &= (1-\varepsilon\xi)[\mathcal{P}_+ + s(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}L - L[\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-)] \overset{(7.2.15)}{=} \\ &= (1-\varepsilon\xi)\widehat{x}L - L\widehat{x}(1-\varepsilon\xi), \end{aligned}$$

и окончательно

$$\partial_{\mathcal{P}}(L_-) = \sum_i \xi^{-i-1}\partial_{\mathcal{P}}(A_i) = [(1-\varepsilon\xi)\widehat{x}L_- - L_-\widehat{x}(1-\varepsilon\xi)]_- \,. \tag{7.2.16}$$

Следовательно,

$$\partial_{\mathcal{P}}(A_i) = \sum_j B^{\text{КП}\varepsilon}_{ij}(x_j), \tag{7.2.17}$$

с некоторым матричным оператором $B^{\text{КП}\varepsilon}$. Так как мы можем переписать формулу (7.2.16) в виде

$$\partial_{\mathcal{P}}(A_i) = \operatorname{Res}\{\xi^i[(1-\varepsilon\xi)\widehat{x}L_- - L_-\widehat{x}(1-\varepsilon\xi)]\}, \tag{7.2.18}$$

то находим отсюда, что

$$\begin{aligned} B^{\text{КП}\varepsilon}(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} &= \sum B^{\text{КП}\varepsilon}_{ij}(x_j)y_i \approx \sum \operatorname{Res}\{y_i\xi^i[(1-\varepsilon\xi)\widehat{x}\widehat{L}_- - L_-\widehat{x}(1-\varepsilon\xi)]\} = \\ &= \operatorname{Res}\{\widehat{y}[(1-\varepsilon\xi)\widehat{x}L_- - L_-\widehat{x}(1-\varepsilon\xi)]\} \approx \operatorname{Res}\{L_-([\widehat{y},\widehat{x}] - \varepsilon(\widehat{y}\xi\widehat{x} - \widehat{x}\xi\widehat{y}))\} \approx \\ &\approx \bar{B}^0(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} - \varepsilon\bar{B}^1(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y}, \end{aligned} \tag{7.2.19}$$

где

$$\bar{B}^0(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} \approx \operatorname{Res}(L_-[\widehat{y},\widehat{x}]), \tag{7.2.20}$$

$$\bar{B}^1(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} \approx \operatorname{Res}(L_-(\widehat{y}\xi\widehat{x} - \widehat{x}\xi\widehat{y})). \tag{7.2.21}$$

Таким образом,

$$B^{\text{КП}\varepsilon} = \bar{B}^0 - \varepsilon\bar{B}^1. \tag{7.2.22}$$

Вычислим матрицы $\bar{B}^0$ и $\bar{B}^1$. Чтобы найти их в один прием, положим

$$\bar{B}^r(\boldsymbol{X})^t Y \approx \operatorname{Res}(L_-(\widehat{Y}\xi^r\widehat{X} - \widehat{X}\xi^r\widehat{Y})), \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.2.23}$$

Тогда

$$\widehat{Y}\xi^r\widehat{X} - \widehat{X}\xi^r\widehat{Y} = \sum(Y_i\xi^{i+r}X_j\xi^j - X_j\xi^{j+r}Y_i\xi^i) =$$

$$= \sum\Big[Y_iX_j^{(\ell)}\binom{r+i}{\ell} - X_jY_i^{(\ell)}\binom{r+j}{\ell}\Big]\xi^{i+j+r-\ell} \quad \Rightarrow \tag{7.2.24}$$

$$\bar{B}^r(\boldsymbol{X})^tY \approx \sum\operatorname{Res}\Big\{\xi^{-k-1}A_k\Big[Y_iX_j^{(\ell)}\binom{r+i}{\ell} - X_jY_i^{(\ell)}\binom{r+j}{\ell}\Big]\xi^{i+j+r-\ell}\Big\} \approx$$

$$\approx \sum\Big[\binom{r+j}{\ell}X_j^{(\ell)}A_{i+j+r-\ell} - \binom{r+j}{\ell}(-\partial)^\ell(A_{i+j+r-\ell}X_j)\Big]Y_i \quad \Rightarrow \tag{7.2.25}$$

$$\bar{B}^r_{ij} = \sum_\ell\Big[\binom{r+i}{\ell}\widehat{R}_{A_{i+j+r-\ell}}\partial^\ell - \binom{r+j}{\ell}(-\partial)^\ell\widehat{L}_{A_{i+j+r-\ell}}\Big]. \tag{7.2.26}$$

Обозначим через $\bar{\mathcal{G}}$ алгебру Ли $\operatorname{Lie}(\bar{R}[\xi])$, и положим $\bar{\mathcal{G}}^r_R = \{\widehat{X}\xi^r|\widehat{X} \in \bar{\mathcal{G}}\}$. Приведенные вычисления показывают, что матрица $-\bar{B}^r$ ассоциирована с алгеброй Ли $\bar{\mathcal{G}}^r$. Таким образом, матрица $\bar{B}^r$ гамильтонова.

Теорема 7.2.27. (i) Матрица $B^{\text{КП}\varepsilon}$ (7.2.22) гамильтонова;
(ii) Матрицы $B^{\text{КП}\varepsilon}$ и $\bar{B}^0 = B^{\text{КП}0}$ гамильтоново эквивалентны.

Доказательство. Конечно, (i) следует из (ii), но и без свойства (ii), пока недоказанного, формула (7.2.19) показывает, что матрица $-B^{\text{КП}\varepsilon}$ ассоциирована с алгеброй Ли $\bar{\mathcal{G}}_{(\varepsilon)}$, с коммутатором

$$[\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}}]_\varepsilon = \widehat{x}(1 - \varepsilon\xi)\widehat{y} - \widehat{y}(1 - \varepsilon\xi)\widehat{x}, \tag{7.2.28}$$

то есть, с алгеброй Ли $\bar{\mathcal{G}}(1 - \varepsilon\xi)$. Последняя, очевидно, изоморфна самой $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_{(0)}$, в силу (формально) обратимого гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : \bar{\mathcal{G}}_{(\varepsilon)} \to \bar{\mathcal{G}}_{(0)} = \bar{\mathcal{G}}$:

$$\bar{\mathcal{G}}_{(\varepsilon)} \ni \widehat{x} \mapsto \widehat{X} = \widehat{\varphi(\boldsymbol{x})} = \widehat{x}(1 - \varepsilon\xi) \in \mathcal{G}_{(0)}. \tag{7.2.29}$$

Итак,

$$X_i = x_i - \varepsilon x_{i-1} = \varphi(\boldsymbol{x})_i = \sum_j \varphi_{ij}(x_j) \quad \Rightarrow \tag{7.2.30}$$

$$\varphi_{ij} = \delta_i^j - \varepsilon\delta_i^{j+1}. \tag{7.2.31}$$

Применяя Теорему 5.5.5, получаем гамильтоново отображение $\Phi : C_A \to C_{\bar{A}}$,

$$\Phi(A_i) = [\varphi^\dagger(\bar{\boldsymbol{A}})]_i = \sum_j(\varphi^\dagger)_{ij}(\bar{A}_j) = \sum_j\varphi_{ji}(\bar{A}_j) = \bar{A}_i - \varepsilon\bar{A}_{i+1}, \tag{7.2.32}$$

между гамильтоновыми матрицами $B^{\text{КП}\varepsilon} = \bar{B}^0(A) - \varepsilon\bar{B}^1(A)$ и $\bar{B}^0(\bar{A})$. ∎

Если коэффициенты u отсутствуют:

$$L = \xi + \sum_{i \geqslant 0} \xi^{-i-1} A_i,$$

то Теорема 7.2.27 дает искомую гамильтонову форму квазирелятивистской иерархии КП. Более того, так как получающаяся гамильтонова матрица $B^{\text{КП}\varepsilon}$ гамильтоново эквивалентна недеформированной матрице $B^{\text{КП}0} = B^{\text{КП}\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \bar{B}^0$, описывающей стандартную иерархию КП, то мы можем использовать гамильтоново преобразование Миуры из §6.2 чтобы вывести квазирелитивистский аналог иерархии МКП. (Так как теперь мы работаем с оператором Лакса в *левосторонней* форме, следует использовать зеркальные образы формул из §6.2.) Здесь мы не будем развивать эту тему. Вместо этого, в следующем разделе мы проанализируем квазирелятивистскую версию иерархии НУШ.

Упражнение 7.2.33. (i) Покажите, что для отображения Φ (7.2.22),

$$\Phi(\mathcal{L}) = (1 - \varepsilon\xi)^{-1}(\xi + \varepsilon \bar{A}_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi^{-i-1} \bar{A}_i; \tag{7.2.34}$$

(ii) Значит ли это, что, для $\bar{\mathcal{L}} = \Phi(\mathcal{L})$, гамильтонова форма уравнений

$$\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{L}}) = [\bar{\mathcal{P}}_+ + S(\bar{\mathcal{P}}_-), \bar{\mathcal{L}}] = [\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{P}}_- - S(\bar{\mathcal{P}}_-)], \quad \bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{L}}^n, \tag{7.2.35}$$

не зависит от ε?

Упражнение 7.2.36. (Здесь буква $\mathcal{L}$ относится не к квазирелятивистской деформации иерархии КП, а к иерархии МКП.) Положим

$$\mathcal{L} = \xi + \sum_{i \geqslant 0} \xi^{-i} a_i, \tag{7.2.37}$$

и рассмотрим уравнение

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}], \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n. \tag{7.2.38}$$

(i) Покажите, что гамильтонова матрица для него имеет вид

$$B^{\text{МКП}} = \begin{array}{c} \\ a_0 \\ \\ a_1 \\ \\ \boldsymbol{w} \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad a_0 \quad & \quad a_1 \quad & \quad \boldsymbol{w} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \partial + \mathrm{ad}_{a_0} & \\ & & \mathbf{0} \\ \partial + \mathrm{ad}_{a_0} & \mathrm{ad}_{a_1} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & \bar{B}^1(\boldsymbol{w}) \end{array} \right) \end{array}, \tag{7.2.39}$$

где $w_s = a_{s+2}$, а матрица $\bar{B}^1$ is задается формулой $(7.2.26)|_{r=1}$;
(ii) Докажите гамильтоновость отображения $\mathrm{Pot} : C_{a_0,a_1} \to C_{V,a_1}$,

$$\mathrm{Pot}(a_0) = V^{-1} V^{(1)}, \quad \mathrm{Pot}(a_1) = a_1, \tag{7.2.40}$$

между гамильтоновыми матрицами

$$B^{\text{ДВВ}} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \partial + \mathrm{ad}_{a_0} \\ \hline \partial + \mathrm{ad}_{a_0} & \mathrm{ad}_{a_1} \end{array} \right) \tag{7.2.41}$$

и

$$B^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \widehat{L}_V \\ \hline -\widehat{R}_V & \operatorname{ad}_{a_1} \end{array}\right); \tag{7.2.42}$$

(iii) Положим

$$B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}} = \left(\begin{array}{c|c} D^{\text{ДВВ}}_{\text{Pot}} & 0 \\ \hline 0 & \bar{B}^1(w) \end{array}\right). \tag{7.2.43}$$

Покажите, что преобразование Миуры $\Phi : C_A \to C_{V,a_1,w}$,

$$\Phi(A_i) = V^{(i)} a_1 V^{-1} + \sum_s \binom{i}{s+1} V^{(i-1-s)} w_s V^{-1}, \tag{7.2.44}$$

возникающее из анзаца

$$\Phi\Big(\xi + \sum \xi^{-i-1} A_i\Big) = V \operatorname{Pot}\Big(\xi + \sum \xi^{-i} a_i\Big) V^{-1}, \tag{7.2.45}$$

гамильтоново, между гамильтоновыми матрицами $B^{\text{КП}} = \bar{B}^0(A)$ (7.2.26)$|_{r=0}$ и $B^{\text{МКП}}_{\text{Pot}}$ (7.2.43).

Вернемся к незавершенному рассмотрению уравнений движения для переменных u, то есть, для L_+–части L. Из определения (7.1.10) следует

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(L_+) &= [(1-\varepsilon\xi)\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})]_+ = ((1-\varepsilon\xi)[\mathcal{L}, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)])_+ = \\ &= \big(L_+[\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)] - (1-\varepsilon\xi)[\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1} L_+\big)_+ . \end{aligned} \tag{7.2.46}$$

Чтобы продолжить, нам нужно применить формулы (7.2.8, 9) и переписать $\mathcal{S}(\mathcal{P}_-)$ и коэффициенты $\mathcal{P}_-$ в терминах вариационных производных гамильтонианов H_{r+1}. Однако, здесь встречается любопытное препятствие, отсутствовавшее в наших нерелятивистских рассмотрениях: формула (7.2.9) дает только $p_{-1}(r), \ldots, p_{-(N-1)}(r)$, тогда как полное вычисление выражения (7.2.46) требует, напротив, все коэффициенты $\mathcal{P}_-$. Ясно, что для преодоления этого препятствия требуется некоторая хитрая перегруппировка членов. Мы разобьем анализ этой проблемы в последовательность простых шагов.

1) Чтобы увидеть, что происходит, и избавиться от оставшегося случая $N = 1$, в котором u_0 *присутствует*, возьмем уравнение (7.1.26) (переобозначив A_0 через u_0):

$$\partial_{\mathcal{P}}(u_0) = -\varepsilon[u_0, \operatorname{Res}([\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}]. \tag{7.2.47}$$

Итак, надо вычислить выражение $[\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}$, входящее также в общую формулу (7.2.46). Опуская в обозначениях параметр r, имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-) &= \sum_{s\geqslant 0} p_{-s-1}(\xi^{-s-1} - \varepsilon^{s+1}) = \sum p_{-s-1} \sum_{\alpha+k=s} \xi^{-\alpha}\varepsilon^k(\xi^{-1} - \varepsilon) = \\ &= \sum_{\alpha,k\geqslant 0} p_{-1-\alpha-k}\xi^{-1-\alpha}\varepsilon^k(1-\varepsilon\xi) \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{7.2.48}$$

$$[\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1} = \sum_{\alpha,k\geqslant 0} p_{-1-\alpha-k}\xi^{-1-\alpha}\varepsilon^k, \tag{7.2.49}$$

$$\operatorname{Res}\left([\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}\right) = \sum_{k\geqslant 0} p_{-1-k}(r)\varepsilon^k = \frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_0}, \tag{7.2.50}$$

где в последнем равенстве применена формула $(7.2.6)|_{i=0}$. Подставляя формулу (7.2.50) в уравнение (7.2.47), завершаем рассмотрения случая $N = 1$:

$$\partial_{\mathcal{P}}(u_0) = -\varepsilon\, \mathrm{ad}_{u_0}\left(\frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_0}\right). \tag{7.2.51}$$

Далее считаем $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} 2)\quad (L_+\mathcal{P}_-)_+ &= \Big[\Big(\xi^N + \sum_0^{N-1} \xi^i u_i\Big) \sum_{j\geqslant 0} p_{j-1}\xi^{-j-1}\Big]_+ = \\ &= \Big[\Big(\xi^N + \sum \xi^i u_i\Big)\Big(\sum_0^{N-3} p_{-j-1}\xi^{-j-1} + p_{-N}\xi^{-N}\Big)\Big]_+ = \\ &= \Big[\Big(\xi^N + \sum_0^{N-1} \xi^i u_i\Big) \sum_0^{N-2} p_{-j-1}\xi^{-j-1}\Big]_+ + && (7.2.52\text{a}) \\ &\qquad + p_{-N}. && (7.2.52\text{b}) \end{aligned}$$

$$3)\quad [-L_+S(\mathcal{P}_-)]_+ \overset{(7.2.8)}{=} -\varepsilon\Big(\xi^N + \sum \xi^i u_i\Big)X_0, \tag{7.2.53}$$

где

$$X_i = \frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant N-1. \tag{7.2.54}$$

$$\begin{aligned} 4)\quad &\big(-(1-\varepsilon\xi)[\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}L_+\big)_+ \overset{(7.2.49)}{=} \\ &= \Big[-(1-\varepsilon\xi)\sum p_{-1-\alpha-k}\varepsilon^k\xi^{-1-k}\Big(\xi^N + \sum \xi^i u_i\Big)\Big]_+ = \\ &= -\Big[(1-\varepsilon\xi)\sum_{\alpha=0}^{N-1}\Big(\sum_{k\geqslant 0} p_{-1-\alpha-k}\varepsilon^k\Big)\xi^{-\alpha-1}\Big(\xi^N + \sum \xi^i u_i\Big)\Big]_+ + && (7.2.55\text{a}) \\ &\qquad + \varepsilon \sum_{k\geqslant 0} p_{-1-N-k}\varepsilon^k. && (7.2.55\text{b}) \end{aligned}$$

Комбинируя формулы (7.2.52b) и (7.2.55b), получаем

$$p_{-N} + \varepsilon\sum_{k\geqslant 0} p_{-1-N-k}\varepsilon^k = \sum_{k\geqslant 0} p_{-N-k}\varepsilon^k \overset{(7.2.6)|_{i=N-1}}{=} \frac{\delta H_{r+1}}{\delta u_{N-1}} = X_{N-1}. \tag{7.2.56}$$

Собирая вместе формулы (7.2.52a, 53, 55a, 56) и используя формулы (7.2.6) и (7.2.9), получаем

$$\begin{gathered} \partial_{\mathcal{P}}(L_+) = \sum_{i=0}^{N-1} \xi^i \partial_{\mathcal{P}}(u_i) = \\ = \Big[L_+ \sum_0^{N-2}(X_j - \varepsilon X_{j+1})\xi^{-j-1} - \varepsilon L_+X_0 - (1-\varepsilon\xi)\sum_{\alpha=0}^{N-1} X_\alpha \xi^{-\alpha-1}L_+\Big]_+ + X_{N-1}. \end{gathered} \tag{7.2.57}$$

Преобразуем эту громоздкую формулу следующим образом. Положим

$$\widehat{X} = \sum_{\alpha=0}^{N-1} X_\alpha \xi^{-\alpha-1}, \tag{7.2.58}$$

тогда

$$\Big(L_+ \sum_0^{N-2} X_j \xi^{-j-1}\Big)_+ + X_{N-1} = (L_+ \widehat{X})_+, \tag{7.2.59}$$

$$\Big(L_+ \sum_0^{N-2} (-\varepsilon X_{j+1})\xi^{-j-1} - \varepsilon L_+ X_0\Big)_+ = (-\varepsilon L_+ \widehat{X}\xi)_+ \quad \Rightarrow \tag{7.2.60}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(L_+) = \sum_0^{N-1} \xi^i \partial_{\mathcal{P}}(u_i) = [L_+ \widehat{X}(1-\varepsilon\xi) - (1-\varepsilon\xi)\widehat{X} L_+]_+. \tag{7.2.61}$$

Приравнивая коэффициенты при ξ^i в этом уравнении, приходим к системе равенств

$$\partial_{\mathcal{P}}(u_i) = \sum_{j=0}^{N-1} B_{ij}(X_j), \tag{7.2.62}$$

с некоторой *аффинной* матрицей B. Доказательство ее гамильтоновости требует некоторых усилий, так как нужно показать, что билинейная форма, отвечающая постоянной части B, является два-коциклом на соответствующей алгебре Ли. Чтобы избегнуть этой утомительной проверки, используем следующий прием. Положим

$$L' = \sum_{i=0}^{N} \xi^i u_i, \tag{7.2.63}$$

$$\widehat{x} = \widehat{X} + X_N \xi^{-N-1}, \tag{7.2.64}$$

и рассмотрим дифференцирование $\partial_x : C_u \to C_u$,

$$\partial_x(L') = [L'\widehat{x}(1-\varepsilon\xi) - (1-\varepsilon\xi)\widehat{x}L']_+ \,. \tag{7.2.65}$$

Таким образом, мы временно рассмотрим u_N, как *переменную*. Идея в том, чтобы доказать гамильтоновость соответствующей матрицы стандартными Ли-алгебраическими средствами, и только *в конце* положить $u_N = 1$. Уравнение (7.2.65), очевидно, имеет смысл. Записывая его в виде

$$\partial_x(u_i) = \mathrm{Res}(\xi^{-i-1}[L'\widehat{x}(1-\varepsilon\xi) - (1-\varepsilon)\widehat{x}L']) = \sum_{j=0}^{N} B'_{ij}(x_j), \tag{7.2.66}$$

с линейной по u матрицей B', получаем

$$\begin{aligned} B'(\boldsymbol{x})^t \boldsymbol{y} = \sum B'_{ij}(x_j) y_i \approx \mathrm{Res}(\widehat{y}[L'\widehat{x}(1-\varepsilon\xi) - (1-\varepsilon\xi)\widehat{x}L']) \approx \\ \approx \mathrm{Res}([\widehat{x}(1-\varepsilon\xi)\widehat{y} - \widehat{y}(1-\varepsilon\xi)\widehat{x}]L'). \end{aligned} \tag{7.2.67}$$

Таким образом, B' — гамильтонова матрица, отвечающая фактору алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\mathcal{O}_{\leqslant -1}(1-\varepsilon\xi))$ по идеалу $\mathrm{Lie}(\mathcal{O}_{\leqslant -N-2}(1-\varepsilon\xi))$, где

$$\mathcal{O}_{\leqslant k} = \{\sum_{s\leqslant k} c_s \xi^s | c_s \in R\}.$$

Строка, отвечающая u_N в гамильтоновой матрице B', находится из формулы (7.2.65):

$$\partial_x(u_N) = \varepsilon[x_0, u_N] = -\varepsilon\,\mathrm{ad}_{u_N}(X_0). \tag{7.2.68}$$

Таким образом, она состоит из нулей, за исключением позиции $(N, 0)$. Так как матрица B' кососимметрическая, то X_N действует лишь на строку, отвечающую u_0, и соответствующий матричный элемент равен

$$B'_{0N} = -\varepsilon\,\mathrm{ad}_{u_N}. \tag{7.2.69}$$

Таким образом, X_N становится невидимым при подстановке

$$u_N = 1 \tag{7.2.70}$$

в матрицу B' (7.2.66). Получающаяся матрица, а это как раз матрица B (7.2.62), остается гамильтоновой.

Таким образом, мы вывели гамильтонову форму квазирелятивистских уравнений Лакса. Это форма расщепляется на две части: гамильтонову матрицу B (7.2.62) в u–пространстве, и гамильтонову матрицу $B^{\text{КП}\varepsilon}$ (7.2.22) в A–пространстве.

Упражнение 7.2.71. Покажите, что в случае квазирелятивистского КдФ

$$\mathcal{L} = (1 - \varepsilon\xi)^{-1}(\xi^2 + \xi u_1 + u_0), \tag{7.2.72}$$

гамильтонова матрица B равна

$$B = \begin{array}{c|cc} & u_0 & u_1 \\ \hline u_0 & 2\partial + \mathrm{ad}_{u_1} - \varepsilon\,\mathrm{ad}_{u_0} & -\varepsilon(\mathrm{ad}_{u_1} + \partial) \\ u_1 & -\varepsilon(\mathrm{ad}_{u_1} + \partial) & 0 \end{array}. \tag{7.2.73}$$

7.3 Квазирелятивистская иерархия НУШ

Этот раздел является квазирелятивистской версией §3.5.

Положим

$$\bar{L} = \xi + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} = \xi + \sum_{i\geqslant 0}\xi^{-i-1}\boldsymbol{p}^{(i)t}\boldsymbol{q}, \tag{7.3.1}$$

и рассмотрим преобразование Гиббонса $\Psi : C_A = R\langle A_i^{(j)}\rangle \to C_{pq} = R\langle p_r^{(j)}, q_r^{(j)}\rangle$,

$$\Psi(L) = \Psi\Big(\xi + \sum \xi^{-i-1}A_i\Big) = \xi + \sum \xi^{-i-1}\boldsymbol{p}^{(i)t}\boldsymbol{q} = \bar{L}, \tag{7.3.2}$$

$$\Psi(A_i) = \boldsymbol{p}^{(i)t}\boldsymbol{q}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.3.3}$$

Утверждение 7.3.4. Формула (7.3.3) определяет гамильтоново отображение Ψ между гамильтоновой матрицей $\bar{B}^r$ (7.2.26) и гамильтоновой матрицей

$$\bar{b}^r = \begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \hline \boldsymbol{p} & \mathbf{0} & \partial^r\mathbf{1} \\ \boldsymbol{q} & -(-\partial)^r\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}. \tag{7.3.5}$$

Доказательство. Имеем

$$D(\Psi(A_i)) = (\widehat{R}_{\boldsymbol{q}}\partial^i \mid \widehat{L}_{\boldsymbol{p}(i)}), \tag{7.3.6}$$

$$D(\Psi(A_j))^\dagger = \begin{pmatrix} (-\partial)^j \widehat{L}_{\boldsymbol{q}} \\ \widehat{R}_{\boldsymbol{p}(j)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tag{7.3.7}$$

$$[D(\Psi)\bar{b}^r D(\Psi)^\dagger]_{ij} = \widehat{R}_{\boldsymbol{q}}\partial^{i+r}\widehat{R}_{\boldsymbol{p}(j)} - \widehat{L}_{\boldsymbol{p}(i)}(-\partial)^{j+r}\widehat{L}_{\boldsymbol{q}} = \tag{7.3.8}$$

$$= \sum_\ell \Big[\widehat{R}_{\boldsymbol{q}}\widehat{R}_{\boldsymbol{p}(j+i+r-\ell)}\binom{i+r}{\ell}\partial^\ell - \binom{j+r}{\ell}(-\partial)^\ell \widehat{L}_{\boldsymbol{p}(i+j+r-\ell)}\widehat{L}_{\boldsymbol{q}}\Big] = \tag{7.3.9}$$

$$= \Psi\Big(\sum_\ell \Big[\binom{i+r}{\ell}\widehat{R}_{A_{i+j+r-\ell}}\partial^\ell - \binom{j+r}{\ell}(-\partial)^\ell \widehat{L}_{A_{i+j+r-\ell}}\Big]\Big) = \Psi(\bar{B}^r_{ij}). \qquad \blacksquare$$

Следствие 7.3.10. Отображение Ψ (7.3.3) гамильтоново, между гамильтоновой матрицей $B^{\text{КП}\varepsilon}$ (7.2.22) и гамильтоновой матрицей

$$b^{\text{НУШ}\varepsilon} = \bar{b}^0 - \varepsilon\bar{b}^1 = \begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon\partial)1 \\ -(1+\varepsilon\partial)1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.3.11}$$

Доказательство. $B^{\text{КП}\varepsilon} = \bar{B}^0 - \varepsilon\bar{B}^1$. ∎

Давайте посмотрим, во что превращаются квазирелятивистские потоки КП

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_+ + \mathcal{S}(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}], \quad \mathcal{L} = (1-\varepsilon\xi)^{-1}\Big(\xi + \sum \xi^{-i-1}A_i\Big), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{7.3.12}$$

после перехода к переменным $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. Выберем

$$H = H_{n+1} = \frac{1}{n+1}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^{n+1}). \tag{7.3.13}$$

Согласно Теореме 7.2.27, поток (7.3.12) можно записать в виде

$$\partial_{\mathcal{P}}(A_i) = \sum_j B^{\text{КП}\varepsilon}_{ij}\Big(\frac{\delta H}{\delta A_j}\Big). \tag{7.3.14}$$

Согасно Следствию 7.3.10, этот поток переводится Ψ в поток

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = \quad (1-\varepsilon\partial)\Big(\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{q}}\Big), \tag{7.3.15a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{q}) = -(1+\varepsilon\partial)\Big(\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{p}}\Big), \tag{7.3.15b}$$

где

$$\bar{H} = \Psi(H). \tag{7.3.16}$$

По формулам (4.3.6), (7.3.7),

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{p}} \\ \frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{q}} \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} (-\partial)^i\widehat{L}_{\boldsymbol{q}} \\ \widehat{R}_{\boldsymbol{p}(i)} \end{pmatrix} \Psi\Big(\frac{\delta H}{\delta A_i}\Big) \quad \Rightarrow \tag{7.3.17}$$

$$\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{p}} = \sum_i (-\partial)^i\Big(\boldsymbol{q}\Psi\Big(\frac{\delta H}{\delta A_i}\Big)\Big) = \Psi\Big(\sum \frac{\delta H}{\delta A_i}\partial^i\Big)^\dagger(\boldsymbol{q}) \overset{(7.2.15)}{=}$$

$$= \{[\bar{\mathcal{P}}_+ + \mathcal{S}(\bar{\mathcal{P}}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}\}^\dagger(\boldsymbol{q}), \tag{7.3.18}$$

где

$$\bar{\mathcal{P}} = \Psi(\mathcal{P}). \tag{7.3.19}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \boldsymbol{q}} &= \sum \Psi\left(\frac{\delta H}{\delta A_i}\right)(\boldsymbol{p}^{(i)}) = \Psi\Big(\sum \frac{\delta H}{\delta A_i}\partial^i\Big)(\boldsymbol{p}) = \\ &= \{[\bar{\mathcal{P}}_+ + S(\bar{\mathcal{P}}_-)](1-\varepsilon\xi)^{-1}\}(\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{7.3.20}$$

Следовательно, уравнения движения (7.3.15) можно переписать в виде

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = (1-\varepsilon\partial)[\bar{\mathcal{P}}_+ + S(\bar{\mathcal{P}}_-)](1-\varepsilon\partial)^{-1}(\boldsymbol{p}), \tag{7.3.21a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{q}) = -[\bar{\mathcal{P}}_+ + S(\bar{\mathcal{P}}_-)]^{\dagger}(\boldsymbol{q}), \tag{7.3.21b}$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{L}}^n, \quad \bar{\mathcal{L}} = (1-\varepsilon\xi)^{-1}\bar{L}, \quad \bar{L} = \xi + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{q}. \tag{7.3.21c}$$

Это искомый квазирелятивистский аналог неабелевой иерархии НУШ из §3.5. Ее вложение Ψ (7.3.3) в квазирелятивистскую иерархию КП не зависит от ε.

Глава 8

Вторая конструкция интегралов иерархии КП

До сих пор мы работали с гамильтонианами вида $\operatorname{Res}(L^r)$. Существуют другие серии интегралов уравнений Лакса, ассоциированные с так называемыми формальными функциями Бейкера-Ахиезера. В этой главе развивается неабелева версия этого подхода.

8.1 Формулы Вильсона

В этом разделе описвается вторая конструкция интегралов для уравнений Лакса. Если интересоваться только описанием интегралов, а не установлением связей между интегралами, полученными при помощи различных конструкций, то можно обойтись без формальных собственных функций.

Уравнения Лакса

$$\partial_{P'}(L') = [P'_+, L'] = [L', P'_-], \quad [P', L'] = 0, \tag{8.1.1}$$

для оператора Лакса

$$L' = \xi^N + \sum_{i=0}^{\infty} u_i \xi^{N-2-i}, \tag{8.1.2}$$

эквивалентны универсальным уравнениям Лакса для оператора $L = (L')^{1/N}$:

$$L = \xi + \sum_{i \geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}. \tag{8.1.3}$$

Таким образом, мы можем сконцентрироваться на иерархии КП

$$\partial_{t_n}(L) = [(L^n)_+, L] = [L, (L^n)_-], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.1.4}$$

Разрешая формулу (8.1.3) относительно ξ, получаем

$$\xi = L - \sum_{i \geqslant 1} b_i L^{-i}, \quad b_i \in C_A, \quad \forall\, i. \tag{8.1.5}$$

Это эквивалентно

$$L_- = L - \xi = \sum_1 b_i L^{-i}. \tag{8.1.6}$$

Аналогично, для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$, мы можем выразить $(L^m)_-$ в виде ряда по L^{-1} :

$$(L^m)_- = \sum_{i\geqslant 1} d_i^{[m]} L^{-i} \quad \Rightarrow \tag{8.1.7}$$

$$b_i = d_i^{[1]}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{8.1.8}$$

Теорема 8.1.9. Для каждого $i \in \mathbb{N}$,

$$\partial_{t_m}(b_i) = \partial(d_i^{[m]}) + \sum_{\kappa+\ell=i} [b_k, d_\ell^{[m]}]. \tag{8.1.10}$$

Следовательно,

$$\partial_{t_m}(b_i) \approx 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}, \tag{8.1.11}$$

то есть, b_i являются интегралами иерархии КП.

Доказательство. Мы собираемся вычислить величины $\partial_{t_m}(L_-)$ и $\partial((L^m)_-)$ $[= \partial_{t_1}((L^m)_-)]$, каждую двумя разными способами. Во-первых,

$$\partial_{t_m}(L_-) = \partial_{t_m}(L) \overset{(8.1.4)}{=} [L, (L^m)_-], \tag{8.1.12a}$$

а с другой стороны, по формуле (8.1.6),

$$\partial_{t_m}(L_-) = \partial_{t_m}\left(\sum b_i L^{-i}\right) = \sum \partial_{t_m}(b_i) L^{-i} + \sum b_i [L^{-i}, (L^m)_-] \quad \Rightarrow \tag{8.1.12b}$$

$$[L, (L^m)_-] - \sum b_i [L^{-i}, (L^m)_-] = \sum \partial_{t_m}(b_i) L^{-i}. \tag{8.1.13}$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned}\partial[(L^m)_-] = [\xi, (L^m)_-] &\overset{(8.1.7)}{=} [\xi, \sum d_j^{[m]} L^{-j}] = \\ &= \sum \partial(d_j^{[m]}) L^{-j} + \sum d_j^{[m]} [\xi, L^{-j}].\end{aligned}$$

Согласно формуле (8.1.5),

$$\begin{aligned}&[\xi, L^{-j}] = [L - \sum b_i L^{-i}, L^{-j}] = -\sum [b_i, L^{-j}] L^{-i} \quad \Rightarrow \\ &\partial[(L^m)_-] = \sum \partial(d_j^{[m]}) L^{-j} - \sum d_j^{[m]} [b_i, L^{-j}] L^{-i}.\end{aligned} \tag{8.1.14a}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\partial[(L^m)_-] &= [\xi, (L^m)_-] = [L - \sum b_i L^{-i}, (L^m)_-] = \\ &= [L, (L^m)_-] - \sum b_i [L^{-i}, (L^m)_-] - \sum [b_i, (L^m)_-] L^{-i} \overset{(8.1.13)}{=} \\ &= \sum (\partial_{t_m}(b_i) - [b_i, (L^m)_-]) L^{-i}.\end{aligned} \tag{8.1.14b}$$

Приравнивая выражения (8.1.14b) и (8.1.14a), получаем

$$\sum [\partial_{t_m}(b_i) - \partial(d_i^{[m]})] L^{-i} = \sum \Big([b_i, (L^m)_-] - \sum d_j^{[m]} [b_i, L^{-j}] \Big) L^{-i}. \tag{8.1.15}$$

Далее,

$$[b_i, (L^m)_-] \overset{(8.1.7)}{=} [b_i, \sum d_j^{[m]} L^{-j}] = \sum d_j^{[m]} [b_i, L^{-j}] + \sum [b_i, d_j^{[m]}] L^{-j}. \tag{8.1.16}$$

Подставляя это в правую часть формулы (8.1.15), получаем

$$\sum[\partial_{t_m}(b_i) - \partial(d_i^{[m]})]L^{-i} = \sum[b_i, d_j^{[m]}]L^{-i-j}, \tag{8.1.17}$$

и формула (8.1.10) доказана, ▮

Это доказательство представляет собой непосредственную выкладку. Ее абелеву версию Вильсон [Wil 1981] назвал “не слишком проясняющей.” Более проясняющий подход развивается в следующем разделе.

8.2 Формулы Чередника-Флашки

В этом разделе вводится формализм формальных собственных функций и показывается, что старые интегралы, $n^{-1}\operatorname{Res}(L^n)$, эквивалентны новым, b_n, при всех n.

В обозначениях §1.5, пусть

$$K = \sum_{i\geqslant 0}\chi_i\xi^{-i}, \quad \chi_0 = 1, \tag{8.2.1}$$

есть одевающий оператор иерархии КП:

$$L = K\xi K^{-1} \tag{8.2.2}$$

я κ — формальный параметр, коммутирующий со всем. Расширим все наши кольца новым объектом, $\varphi = \varphi(\kappa)$, который неформально можно описать, как $e^{\kappa x}$: мы определим действие ξ^s (и ∂^s) на φ правилом

$$\xi^s(\varphi^\ell) = (\kappa\ell)^s\varphi^\ell, \quad \forall\, s, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{8.2.3}$$

Положим

$$\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}(\kappa) = K(\varphi) = \Big(\sum\chi_i\kappa^{-i}\Big)\varphi, \tag{8.2.4}$$

$$\psi = \widetilde{\psi}\varphi^{-1} = \sum_{i\geqslant 0}\chi_i\kappa^{-i} = 1 + \sum_{i\geqslant 1}\chi_i\kappa^{-i}. \tag{8.2.5}$$

Имеем

$$L(\widetilde{\psi}) = K\xi K^{-1}(K\varphi) = K(\kappa\varphi) = \kappa\widetilde{\psi}. \tag{8.2.6}$$

Таким образом, $\widetilde{\psi}$ является формальной собственной функцией L с собственным значением κ, а формула (8.2.5) показывает, что ψ есть нечто вроде символа K. Мы можем определить $\partial_{t_m}(\psi)$ для любого m.

Теорема 8.2.7. (Вердье-Вильсон) Верны соотношения

$$\partial(\psi)\psi^{-1} = -\sum_1 b_i\kappa^{-i}, \tag{8.2.8}$$

$$\partial_{t_m}(\psi)\psi^{-1} = \sum_1 d_i^{[m]}\kappa^{-i}, \tag{8.2.9}$$

где коэффициенты b_i и $d_i^{[m]}$ определены формулами (8.1.5) и (8.1.7) соответственно.

Доказательство. Согласно формуле (8.2.2),

$$L^s K = K\xi^s, \quad \forall\, s \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \tag{8.2.10}$$

$$K\xi = LK \overset{(8.1.5)}{=} \Big(\xi + \sum b_i L^{-i}\Big)K = \xi K + \sum b_i K \xi^{-i} \quad \Rightarrow \tag{8.2.11}$$

$$-\partial(K) = [K,\xi] = \sum b_i K \xi^{-i} = \sum b_i \chi_j \xi^{-i-j}. \tag{8.2.12}$$

Переходя к символам, это можно переписать в виде

$$-\sum \chi_i' \kappa^{-i} = \sum b_i \kappa^{-i} \chi_j \kappa^{-j} \quad \Rightarrow$$

$$-\psi' = \Big(\sum b_i \kappa^{-i}\Big)\psi, \tag{8.2.13}$$

что эквивалентно формуле (8.2.8). Далее, в силу уравнения (1.5.7),

$$\partial_{t_m}(K) = -[(L^m)_-]K \quad \Rightarrow \tag{8.2.14}$$

$$-\partial_{t_m}(K) = |(L^m)_-|K \overset{(8.1.7)}{=} \sum d_j^{[m]} L^{-j} K \overset{(8.2.10)}{=} \sum d_j^{[m]} K \xi^{-j} \quad \Rightarrow \tag{8.2.15}$$

$$-\sum \partial_{t_m}(\chi_i)\xi^{-i} = \sum d_j^{[m]} \chi_i \xi^{-i-j}, \tag{8.2.16}$$

и переход к символам превращает это в

$$-\sum \partial_{t_m}(\chi_i)\kappa^{-i} = \sum d_j^{[m]} \kappa^{-j} \sum \chi_i \kappa^{-i} \quad \Rightarrow$$

$$-\partial_{t_m}(\psi) = \Big(\sum d_j^{[m]} \kappa^{-j}\Big)\psi, \tag{8.2.17}$$

последнее равенство эквивалентно формуле (8.2.9). ▮

В абелевом случае Теорема 8.2.7 применяется следующим образом:

$$\partial_{t_m}\Big(-\sum b_i \kappa^{-i}\Big) = \partial_{t_m}[\partial(\psi)\psi^{-1}| = \partial_{t_m}\partial(\ln\psi) = \partial\partial_{t_m}(\ln\psi) =$$

$$= \partial[\partial_{t_m}(\psi)\psi^{-1}] = \partial\Big(-\sum d_i^{[m]} \kappa^{-i}\Big) \quad \Rightarrow \tag{8.2.18}$$

$$\partial_{t_m}(b_i) = \partial(d_i^{[m]}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{8.2.19}$$

Это и есть “просветляющая” выкладка. В неабелевой ситуации она не срабатывает, так как, вообще говоря, для дифференцирования X

$$X(\ln\psi) \neq X(\psi)\psi^{-1}. \tag{8.2.20}$$

Более того, если X и Y — пара коммутирующих дифференцирований, то

$$X(Y(\psi)\psi^{-1}) \neq Y(X(\psi)\psi^{-1}). \tag{8.2.21}$$

Однако, мы можем вывернуть формулу (8.1.10) наизнанку и прийти к следующему очевидному тождеству:

$$X(Y(\psi)\psi^{-1}) - Y(X(\psi)\psi^{-1}) = [X(\psi)\psi^{-1}, Y(\psi)\psi^{-1}], \tag{8.2.22}$$

для любой ψ вида (8.2.5) и любой пары коммутирующих дифференцирований X, Y, действующих на дифференциальном кольце $\mathcal{F}\langle\chi_i^{(\nu)}\rangle$. Это дает неабелев аналог выкладки (8.2.18).

Замечание 8.2.23. Коэффициенты χ_i в K и ψ *не принадлежат* исходному дифференциальному кольцу $\mathcal{F}\langle A_i^{(j)}\rangle$, порожденному коэффициентами A_i оператора L. Однако, Теорема 8.2.7 показывает, что, несмотря на это, коэффициенты $\partial(\psi)\psi^{-1}$ и $\partial_{t_m}(\psi)\psi^{-1}$ *принадлежат* ему.

Определим соотношения между старыми и новыми интегралами, $n^{-1}\operatorname{Res}(L^n)$ и b_n. Мы используем идею Флашки ([Fla 1983]), основанную на тождестве Чередника из [Che 1978].

Сначала перепишем формулы (8.2.8, 9) в терминах $\widetilde{\psi}$, вместо ψ :

$$\partial(\widetilde{\psi})\widetilde{\psi}^{-1} = \kappa - \sum_{1} b_i\kappa^{-i}, \tag{8.2.24}$$

$$\partial_{t_m}(\widetilde{\psi})\widetilde{\psi}^{-1} = -\sum_{1} d_i^{[m]}\kappa^{-i}, \tag{8.2.25}$$

и идентифицируем t_1 и x, а точнее, ∂_{t_1} и ∂. Мы можем это сделать, как видно из равенств

$$\partial_{t_1}(L) = \partial_{t_1}(L_-) = [L_+, L] = [\xi, L] = [\xi, L_-] = \partial(L_-). \tag{8.2.26}$$

Уравнивая в правах x и t_m, положим

$$\Psi = \exp\Bigl(\sum_{j\geqslant 2} t_j\kappa^j\Bigr)\widetilde{\psi} = \exp\Bigl(\sum_{1} t_j\kappa^j\Bigr)\psi. \tag{8.2.27}$$

Иначе говоря, мы вводим новый объект Φ такой, что

$$\partial_{t_m}(\Phi) = \kappa^m\Phi, \tag{8.2.28}$$

то есть, Φ можно воспринимать, как

$$\Phi = \exp\Bigl(\sum_{1} t_j\kappa^j\Bigr), \tag{8.2.29}$$

и полагаем

$$\Psi = \Phi\psi. \tag{8.2.30}$$

В этих обозначениях формулы (8.2.24, 25) принимают вид

$$\partial_{t_m}(\Psi)\Psi^{-1} = \kappa^m - \sum_{1} d_i^{[m]}\kappa^{-i}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8.2.31}$$

Лемма 8.2.32. Верно соотношение

$$[(L^m)_+(\Psi)]\Psi^{-1} = \kappa^m - \sum_{1} d_i^{[m]}\kappa^{-i}. \tag{8.2.33}$$

Доказательство. Так как

$$\Psi = \exp\Bigl(\sum_{2} t_j\kappa^j\Bigr)\widetilde{\psi}, \tag{8.2.34}$$

то достаточно доказать (8.2.33) для $\widetilde{\psi}$ вместо Ψ :

$$(L^m)_+(\widetilde{\psi}) = \Bigl(\kappa^m - \sum_{1} d_i^{[m]}\kappa^{-i}\Bigr)\widetilde{\psi}.$$

При $m = 1$ это тождество совпадает с формулой (8.2.24). Далее,

$$(L^m)_+(\widetilde{\psi}) = [L^m - (L^m)_-](\widetilde{\psi}) \overset{(8.2.8),\ (8.1.7)}{=} \kappa^m\widetilde{\psi} - \left(\sum d_i^{[m]} L^{-i}\right)\widetilde{\psi} = \\ = \left(\kappa^m - \sum d_i^{[m]}\kappa^{-i}\right)\widetilde{\psi},$$

что и требовалось. ▮

Таким образом,

$$\partial_{t_m}(\Psi) = (L^m)_+(\Psi). \tag{8.2.35}$$

Положим

$$b = b(\kappa) = \kappa - \sum_1 b_i\kappa^{-i}, \tag{8.2.36a}$$

$$\Lambda = \Lambda(\kappa) = \sum_{i=0}^{\infty}\kappa^{-i-1}(L^i)_+, \tag{8.2.36b}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\kappa) = 1 + \sum_{i=0}^{\infty}\kappa^{-i-1}\operatorname{Res}(L^i). \tag{8.2.36c}$$

Теорема 8.2.37. (Чередник)

$$(\xi - b)(\Lambda) = -\varepsilon. \tag{8.2.38}$$

Доказательство **(Вильсон).** Обе части данного равенства принадлежат кольцу $\mathcal{F}\langle A_i^{(j)}\rangle((\xi^{-1}))[[\kappa^{-1}]]$. Сравним коэффициенты при степенях κ. Коэффициент при κ^0 в левой части равен $-\kappa\kappa^{-1}(L^0)_+ = -1$, то же и в правой части. Слева, коэффициент при κ^{-r-1} равен

$$\xi(L^r)_+ - (L^{r+1})_+ + \sum b_i(L^{r-i})_+ = \xi(L^r)_+ - (L^{r+1})_+ + \left(\sum b_i L^{-i}L^r\right)_+ \overset{(8.1.6)}{=} \\ = \xi(L^r)_+ - (L^{r+1})_+ + [(L-\xi)L^r]_+ = \xi(L^r)_+ - (\xi L^r)_+ = -\operatorname{Res}(L^r),$$

и совпадает с соответствующим коэффициентом ряда $-\varepsilon$ в правой части. ▮

Пусть теперь $\widehat{\Psi} = \widehat{\Psi}(\lambda)$ обозначает копию $\Psi = \Psi(\kappa)$ с новым формальным параметром λ вместо κ. Применим к $\widehat{\Psi}$ тождество (8.2.38):

$$\partial\sum\kappa^{-i-1}(L^i)_+(\widehat{\Psi}) - b(\kappa)\sum\kappa^{-i-1}(L^i)_+(\widehat{\Psi}) = -\varepsilon(\kappa)\widehat{\Psi}, \tag{8.2.39}$$

и умножим справа на $\widehat{\Psi}^{-1}$:

$$\sum\kappa^{-i-1}\left(\partial\{[(L^i)_+(\widehat{\Psi})]\widehat{\Psi}^{-1}\} + [(L^i)_+(\widehat{\Psi})]\widehat{\Psi}^{-1}\partial(\widehat{\Psi})\widehat{\Psi}^{-1}\right) - \\ -b(\kappa)\sum\kappa^{-i-1}[(L^i)_+(\widehat{\Psi})]\widehat{\Psi}^{-1} = -\varepsilon(\kappa). \tag{8.2.40}$$

Положим

$$b = b(\kappa) = \kappa - \bar{b}(\kappa), \quad d^{[m]} = d^{[m]}(\kappa) = \kappa^m - \sum d_i^{[m]}\kappa^{-i} = \kappa^m - \bar{d}^{[m]}(\kappa). \tag{8.2.41}$$

Преобразуем отдельно каждое из трех слагаемых в левой части равенства (8.2.40), заменяя везде $[(L^i)_+(\widehat{\Psi})]\widehat{\Psi}^{-1}$ на $d^{[i]}(\lambda)$, в силу формулы (8.2.33):

$$1)\quad \sum \kappa^{-i-1}\partial\{|(L^i)_+(\widehat{\Psi})|\widehat{\Psi}^{-1}\} = \sum \kappa^{-i-1}\partial(d^{[1]}(\lambda)) =$$
$$= -\sum \kappa^{-i-1}\partial(\bar{d}^{[i]}(\lambda)); \tag{8.2.42}$$
$$2)\quad \sum \kappa^{-i-1}[(L^i)_+(\widehat{\Psi})]\widehat{\Psi}^{-1}\partial(\widehat{\Psi})\widehat{\Psi}^{-1} = \sum \kappa^{-i-1}d^{[i]}(\lambda)b(\lambda) =$$
$$= \sum \kappa^{-i-1}[\lambda - \bar{d}^{[i]}(\lambda), \lambda - \bar{b}(\lambda)] + b(\lambda)\sum \kappa^{-i-1}(\lambda^i - \bar{d}^{[i]}(\lambda)). \tag{8.2.43}$$

Используя формулу

$$\sum \kappa^{-i-1}\lambda^i = \frac{1}{\kappa - \lambda}, \tag{8.2.44}$$

преобразуем выражение (8.2.43) в

$$\sum \kappa^{-i-1}[\bar{d}^{[i]}(\lambda), \bar{b}(\lambda)] + \tag{8.2.45}$$
$$+\frac{b(\lambda)}{\kappa - \lambda} - b(\lambda)\sum \kappa^{-i-1}\bar{d}^{[i]}(\lambda); \tag{8.2.46}$$

$$3)\quad -b(\kappa)\sum \kappa^{-i-1}[(L^i)_+(\widehat{\Psi})]\widehat{\Psi}^{-1} = -b(\kappa)\sum \kappa^{-i-1}(\lambda^i - \bar{d}^{[i]}(\lambda)) =$$
$$= -\frac{b(\kappa)}{\kappa - \lambda} + b(\kappa)\sum \kappa^{-i-1}\bar{d}^{[i]}(\lambda). \tag{8.2.47}$$

Теперь скомбинируем выражение (8.2.42) с (8.2.45), и (8.2.46) с (8.2.47), и рассмотрим предел $\lambda \to \kappa$. Последняя комбинация превращается в $-\dfrac{\partial b}{\partial \kappa}$, а тождество (8.2.40) переходит в

$$\partial\left(-\sum \kappa^{-i-1}\bar{d}^{[i]}\right) - \sum \kappa^{-i-1}[\bar{b}, \bar{d}^{[i]}] = \frac{\partial b}{\partial \kappa} - \varepsilon. \tag{8.2.48}$$

Так как правая часть равна

$$1 + \sum ib_i\kappa^{-i-1} - 1 - \sum \kappa^{-i-1}\operatorname{Res}(L^i) = \sum_{1}[ib_i - \operatorname{Res}(L^i)]\kappa^{-i-1}, \tag{8.2.49}$$

то мы видим, что

$$ib_i - \operatorname{Res}(L^i) \approx 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{8.2.50}$$

Таким образом, новая серия интегралов, $\{b_i\}$, эквивалентна старой, $\{i^{-1}\operatorname{Res}(L^i)\}$. Более того, как и в абелевом случае, тождество (8.2.48) можно обратить, и получить формулу для b в терминах $\int \varepsilon$. Это делается в следующем разделе.

Упражнение 8.2.51. (i) В обозначениях формулы (8.2.22), покажите, что

$$X(\ln\psi) = X(\psi)\psi^{-1} \pmod{[\ ,\ ]}. \tag{8.2.52}$$

[Подсказка : покажите, что

$$X(b) = X(e^b)e^{-b} \pmod{[\ ,\ ]}\quad]; \tag{8.2.53}$$

(ii) Покажите, что

$$\ln(\varphi\psi) = \ln\varphi + \ln\psi \pmod{[\ ,\ ]}. \tag{8.2.54}$$

[Подсказка : используйте формулу Бэйкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, либо продифференцируйте по λ выражение $\ln(e^{\lambda a}e^{\lambda b})$ и используйте формулу (8.2.52).];
(iii) Верна ли в $\mathbb{Z}\langle x, y\rangle$ формула

$$(x+y)^n = \sum \binom{n}{\kappa} x^{\kappa} y^{n-\kappa} \pmod{[\ ,\ ]}\ ? \tag{8.2.55}$$

(iv) Получите отсюди, что в $\mathbb{Q}\langle x, y\rangle$

$$e^{x+y} \neq e^x e^y \pmod{[\ ,\ ]}. \tag{8.2.56}$$

8.3 Формула обращения

В этом разделе мы приводим тождество (8.2.48) к чисто абелевому виду и выясняем, можно ли построить неабелевы τ-функции.

Используя формулу (8.1.10), можно преобразовать левую часть формулы (8.2.24) следующим образом:

$$\begin{aligned} -\sum \kappa^{-m-1}\{\partial(\bar{d}^{[m]}) + [\bar{b}, \bar{d}^{[m]}]\} = -\sum \kappa^{-m-1}\Big\{\partial\Big(\sum d_i^{[m]}\kappa^{-i}\Big) + \\ + \sum [b_s\kappa^{-s}, d_\ell^{[m]}\kappa^{-\ell}]\Big\} = \\ = -\sum \kappa^{-m-1}\Big\{\sum \partial_{t_m}(b_i)\kappa^{-i} - \sum [b_s, d_\ell^{[m]}]\kappa^{-s-\ell} + \sum [b_s, d_\ell^{[m]}]\kappa^{-s-\ell}\Big\} = \\ = -\sum_{m,i\geqslant 1} \kappa^{-m-i-1}\partial_{t_m}(b_i). \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Следовательно, тождество (8.2.48) можно переписать в виде

$$-\sum \kappa^{-m-i-1}\partial_{t_m}(b_i) = \frac{\partial b}{\partial \kappa} - \varepsilon, \tag{8.3.2}$$

идентичном своему абелеву варианту. С учетом формулы (8.2.49), оно преобразуется к виду

$$ib_i - \mathrm{Res}(L^i) = -\sum_{m=1}^{i-1} \frac{\partial b_{i-m}}{\partial t_m}. \tag{8.3.3}$$

Далее, в силу формулы (1.1.66),

$$\frac{\partial\, \mathrm{Res}(L^i)}{\partial t_j} = \frac{\partial\, \mathrm{Res}(L^j)}{\partial t_i}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}. \tag{8.3.4}$$

Следовательно, если мыслить в терминах функций от набора времен $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots)$, существует функция $E = E(\boldsymbol{t})$ такая, что

$$\mathrm{Res}(L^i) = -\frac{\partial E}{\partial t_i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{8.3.5}$$

С этим обозначением, последовательность соотношений (8.3.3) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial t_i} = -ib_i - \sum_{m=1}^{i-1} \frac{\partial b_{i-m}}{\partial t_m}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{8.3.6}$$

Согласно хорошо (а может быть, н не очень) известной формуле обращения (см. напр. [Kup 1985a, Лемма 9.3.37, стр. 208]), эта носледовательность тождеств эквивалентна еднственному равенству

$$\sum b_i(\boldsymbol{t})\kappa^{-1} = E(t_1 - \kappa^{-1}, t_2 - \kappa^{-2}/2, t_3 - \kappa^{-3}/3, \dots) - E(\boldsymbol{t}). \tag{8.3.7}$$

С учетом формулы (8.2.8), его можно нереписать в виде

$$\partial_{t_1}(\psi)\psi^{-1} = E(\boldsymbol{t}) - E(\{t_i - \kappa^{-i}/i\}). \tag{8.3.8}$$

В абелевом случае можио продолжить следующим образом. Положим

$$E = \partial_{t_1} \ln(\tau^{-1}). \tag{8.3.9}$$

Так как $\partial_{t_1}(\psi)\psi^{-1} = \partial_{t_1} \ln \psi$, это равенство превращается в

$$\psi = \exp\Bigl(\sum_2 t_j \kappa^j\Bigr) \frac{1}{\tau(x)} \exp\Bigl(-\sum_1 \frac{\kappa^{-1}}{i} \frac{\partial}{\partial t_i}\Bigr). \tag{8.3.10}$$

В неабелевом случае это не годится, и формула (8.3.8) — это, вероятно, все, что можно получить. Другой подход к формуле (8.3.10) имеется в [Dic 1991, §7.7].

Часть B

Дискретное пространство, непрерывное время

Джонни самый обычный парень. Конечно, он грабит банки и людей, но в остальном он действительно точно такой же парень, как все.

Мэри Киндер, подруга Джона Диллингера

Глава 9

Сначала КП, потом МКП

> В лето господне 1415, Генрих V, король Англии, созвал прелатов и лордов своего королевства, и, под страхом проклятия, просил у них совета, на кого ему лучше обидеться, чтобы пойти войной — на королевство Шотландии или на королевство Франции.
>
> *Книга Плюскардена*, перевод Ф.Дж.Х. Скена

В этой главе строится иерархии дискретных интегрируемых систем типа КП и МКП, их одевающих версий, и преобразовании Миуры между ними. Затем, рассматриваются классический и квазиклассический пределы, и предел Богоявленского этих конструкций. Гамильтоновы аспекты не обсуждаются в этой главе,— это обсуждение можно найти в главе 12, после того, как соответствующий гамильтонов формализм будет развит в главе 11; основа гамильтонова формализма, вариационное исчисление, закладывается в следующей главе.

9.1 Эволюции по типу КП

В этом разделе рассматриваются различные иерархии дискретных интегрируемых систем и их простейшие специализации.

Пусть R — ассоциативная алгебра, как всегда, с единицей. Пусть $\Delta : R \to R$ — автоморфизм R. Например, $R = C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\Delta = \exp(\varepsilon\partial)$. В большинстве случаев, R будет коммутативной, вроде $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$. Положим $C = C_q = R\langle q_i^{(s)}\rangle$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}$, где $R\langle q_i^{(s)}\rangle$ ассоциативное кольцо, порожденное R и генераторами $q_i^{(s)}$; напомним, что элементы из R коммутируют с $q_i^{(s)}$. Продолжим действие Δ из R на C по правилу

$$\Delta(q_i^{(s)}) = q_i^{(s+1)}. \tag{9.1.1}$$

Если понимать q, как функции на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$, то Δ действует на них, как преобразование, двойственное сдвигу:

$$(\Delta f)(x) = f(x+\varepsilon), \quad \text{или} \quad (\Delta f)(n) = f(n+1). \tag{9.1.2}$$

Дифференцирование X в C над R называется *эволюционным*, если оно коммутирует с Δ :

$$X(q_i^{(s)}) = X(\Delta^s(q_i)) = \Delta^s X(q_i) = \Delta^s(X_i), \quad X_i = X(q_i), \tag{9.1.3}$$

где

$$q_i = q_i^{(0)}. \tag{9.1.4}$$

Алгебра Ли эволюционных дифференцирований обозначается $D^{ev} = D^{ev}(C)$. Обозначим $\mathcal{T} = \mathcal{T}(C) = \mathcal{T}_C = \mathrm{Im}(\Delta - 1)|_C$. Будем писать $a \sim 0$ если и только если $a \in \mathcal{T}$. Также, пусть $[\ ,\ ] = \mathrm{Com}(C)$ — абелево подпространство в C, порожденное коммутаторами. Положим $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T} + [\ ,\ ]$, и будем писать $a \approx 0$ если и только если $a \in \mathcal{T}^+$.

Упражнение 9.1.5. Покажите, что, $\forall\ X \in D^{ev}(C)$,

$$X(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, \tag{9.1.6}$$

$$X([\ ,\ ]) \subset [\ ,\ ], \tag{9.1.7}$$

$$X(\mathcal{T}^+) \subset \mathcal{T}^+. \tag{9.1.8}$$

Рассмотрим ассоциативное кольцо $R((\zeta^{-1}))$,

$$R((\zeta^{-1})) = \Big\{ \sum_{j<\infty} r_j \zeta^j | r_j \in R \Big\}, \tag{9.1.9}$$

с коммутационными соотношениями

$$(\bar{r}_s \zeta^s)(r_j \zeta^j) = \bar{r}_s \Delta^s(r_j) \zeta^{s+j}, \quad s, j \in \mathbb{Z}. \tag{9.1.10}$$

Вместо $\Delta^s(r)$ мы будем писать также $r^{(s)}$. Пусть отображение $\mathrm{Res} : R((\zeta^{-1})) \to R$ обозначает вычет:

$$\mathrm{Res}\Big(\sum r_j \zeta^j\Big) = r_0. \tag{9.1.11}$$

Термин “вычет” оправдан следующей леммой.

Лемма 9.1.12. Для любых $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in R((\zeta^{-1}))$,

$$\mathrm{Res}([\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2]) \approx 0. \tag{9.1.13}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\mathcal{R}_1 = \bar{r}\zeta^s$, $\mathcal{R}_2 = r\zeta^j$. Тогда

$$\mathrm{Res}([\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2]) = \mathrm{Res}([\bar{r}\zeta^s, r\zeta^j]) = \delta^0_{s+j}[\bar{r}r^{(s)} - r\bar{r}^{(-s)}] =$$

$$= \delta^0_{s+j}(\bar{r}r^{(s)} - \bar{r}^{(-s)}r + [\bar{r}^{(-s)}, r]) = \delta^0_{s+j}\Big\{(\Delta^s - 1)(\bar{r}^{(-s)}r) + [\bar{r}^{(-s)}, r]\Big\}. \qquad \blacksquare$$

Мы сохраним следующее обозначение из Части А: если $\mathcal{R} = \sum r_j \zeta^j$, то

$$\mathcal{R}_+ = \sum_{j \geqslant 0} r_j \zeta^j, \quad \mathcal{R}_- = \mathcal{R} - \mathcal{R}_+, \quad \mathcal{R}_{\geqslant \ell} = \sum_{j \geqslant \ell} r_j \zeta^j,$$

и аналогично для $\mathcal{R}_{\leqslant \ell}$, $\mathcal{R}_{> \ell}$, $\mathcal{R}_{< \ell}$. Теперь мы готовы построить различные иерархии КП-типа. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, и рассмотрим в $C_q((\zeta^{-1}))$ элемент

$$L = \zeta^N + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{N-1-i} q_i. \tag{9.1.14}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть $\partial_{t_n} = \partial_P$, $P = L^n$, будет эволюционным дифференцированием на C_q, заданным на генераторах q_i следующим равенством в $C_q((\zeta^{-1}))$:

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-]. \tag{9.1.15}$$

Так как $0 = [P, L] = [P_+ + P_-, L]$, то второе равенство в определении (9.1.15) следует из первого. Также, старшая степень ζ входящая в выражение $\partial_P(L) = [L, P_-]$, равна $N-1$, поэтому дифференцирование ∂_P корректно определено. Б силу Леммы 9.1.12, множество $\{\mathrm{Res}(L^n) | n \in \mathbb{N}\}$ дает интегралы для всех уравнений в иерархии (9.1.15).

Положим, для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$L^k = \sum_s p_s(\kappa)\zeta^s, \tag{9.1.16}$$

$$I_k = \{\text{двусторонний идеал в } C_q, \text{ порожденный } q_i^{(s)} \text{ при } i \geqslant \kappa\}. \tag{9.1.17}$$

Утверждение 9.1.18. Для каждого $\kappa \in \mathbb{Z}_+$,

$$\partial_P(I_\kappa) \subset I_\kappa. \tag{9.1.19}$$

Доказательство. Имеем

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [P_+, L]_{<N} = \Big[\sum_{s\geqslant 0} p_s(n)\zeta^s,\ \zeta^N + \sum \zeta^{N-1-i} q_i\Big]_{<N} =$$

$$= \sum_{i,s\geqslant 0} \zeta^{N-1-i+s}(p_s(n)^{(i+1-N-s)} q_i - [q_i p_s(n)]^{(-s)}) \quad \Rightarrow \tag{9.1.20}$$

$$\partial_P(q_i) = \sum_{s\geqslant 0} (p_s(n)^{(-N+1+i)} q_{i+s} - [q_{i+s} p_s(n)]^{(-s)}). \quad \blacksquare \tag{9.1.21}$$

Таким образом, можно рассмотреть любой конечный отрезок L :

$$L = \zeta^N + \sum_{i=0}^{(\cdot)} \zeta^{N-1-i} q_i. \tag{9.1.22}$$

Чтобы уравнения были нетривиальны, должно быть $P_- \neq 0$, что эквивалентно тому, что $(\cdot)$, верхний предел суммирования в формуле (9.1.22), был $\geqslant N$. Простейший возможный случай при $N = 1$:

$$L = \zeta + q_0 + \zeta^{-1} q_1. \tag{9.1.23}$$

Первый поток в соответствующей иерархии, с $P = L$ (9.1.23), выводится в следующем вычислении:

$$\partial_{t_1}(L) = \partial_{t_1}(q_0) + \zeta^{-1}\partial_{t_1}(q_1) = [L_+, L] = [\zeta + q_0,\ \zeta + q_0 + \zeta^{-1} q_1] =$$

$$= [\zeta + q_0,\ \zeta^{-1} q_1] = q_1 - q_1^{(-1)} + \zeta^{-1}(q_0^{(1)} q_1 - q_1 q_0) \quad \Rightarrow \tag{9.1.24}$$

$$\partial_{t_1}(q_0) = (1 - \Delta^{-1})(q_1), \tag{9.1.25a}$$

$$\partial_{t_1}(q_1) = q_0^{(1)} q_1 - q_1 q_0. \tag{9.1.25b}$$

Это — неабелева цепочка Тоды.

Аналогично, при $N = 1$ и

$$L = \zeta + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{-i} q_i, \tag{9.1.26}$$

соответствующая иерархия (9.1.15), называемая *иерархией КП*, имеет первый поток

$$\partial_{t_1}(L) = \sum \zeta^{-i}\partial_{t_1}(q_i) = [\zeta + q_0, \sum \zeta^{-i} q_i]$$
$$= \sum \zeta^{-i}(q_{i+1} - q_{i+1}^{(-1)} + q_0^{(i)} q_i - q_i q_0) \quad \Rightarrow \tag{9.1.27}$$
$$\partial_{t_1}(q_i) = (1 - \Delta^{-1})(q_{i+1}) + q_0^{(i)} q_i - q_i q_0, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.1.28}$$

Цепочка Тоды (9.1.25) возникает при обрыве $\{q_i = 0,\ i \geqslant 2\}$ потока КП (9.1.28).

Упражнение 9.1.29. Покажите, что для иерархии (9.1.15), определяемой оператором Лакса (9.1.14),

$$\partial_P(q_0) \sim 0, \quad P = L^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{9.1.30}$$

Убедимся теперь, что все потоки (9.1.15) коммутируют. Выберем $Q = L^{n_1}$. Чтобы показать, что

$$[\partial_P, \partial_Q] = 0 \quad \text{в} \quad C_q, \tag{9.1.31}$$

мы проверим равенство

$$[\partial_P, \partial_Q](L) = 0. \tag{9.1.32}$$

Имеем

$$\partial_P \partial_Q(L) = \partial_P([Q_+, L]) = [\partial_P(Q_+), L] + [Q_+, \partial_P(L)]. \tag{9.1.33}$$

Далее,

$$\partial_P(Q_+) = [\partial_P(Q)]_+ = [Q, P_-]_+ = [Q_+, P_-]_+ \quad \Rightarrow \tag{9.1.34}$$
$$\partial_P \partial_Q(L) = [[Q_+, P_-]_+, L] + [Q_+, [P_+, L]]. \tag{9.1.35}$$

Переставляя P и Q, получаем

$$\partial_Q \partial_P(L) = [[P_+, Q_-]_+, L] + [P_+, [Q_+, L]]. \tag{9.1.36}$$

Бычитая (9.1.36) из (9.1.35) получаем

$$[\partial_P, \partial_Q](L) = [?, L],$$

где

$$? = [Q_+, P_-]_+ - [P_+, Q_-]_+ + [Q_+, P_+] = [Q_+ + Q_-, P_+ + P_-]_+ = [Q, P]_+ = 0. \blacksquare \tag{9.1.36'}$$

Замечание 9.1.37. Приведенное доказательство идентично по *форме* доказательству Теоремы 1.1.33. Содержание, однако, различно.

Замечание 9.1.38. В отличие от Части А с непрерывным пространством, уравнения Лакса (9.1.15) при различных N *не изоморфны* друг другу. Причина в том, что, при $N \neq 1$,

$$\left(\zeta^N + \sum \zeta^{N-1-i} q_i\right)^{1/N} \quad \notin \quad C_q((\zeta^{-1})) \tag{9.1.39}$$

если только не $\Delta = 1$. Это можно увидеть по коэффициенту при ζ^{N-1}:

$$\left(\zeta^N + \sum \zeta^{N-1-i} q_i\right)^{1/N} = \zeta + \left(\frac{\Delta^{-N} - 1}{\Delta^{-1} - 1}\right)^{-1}(q_0) + \dots, \tag{9.1.40}$$

и оператор

$$\frac{\Delta^{-N} - 1}{\Delta^{-1} - 1} = \sum_{s=0}^{N-1} \Delta^{-s}, \tag{9.1.41}$$

не является, вообще говоря, обратимым.

Упражнение 9.1.42. Пусть $P = L^n$, $Q = L^{n_1}$.

(i) Покажите, что

$$\partial_P(Q) - \partial_Q(P) = [P_+, Q_+] - [P_-, Q_-]; \tag{9.1.43}$$

(ii) Получите отсюда, что

$$\partial_P \operatorname{Res}(Q) - \partial_Q \operatorname{Res}(P) = [\operatorname{Res}(P), \operatorname{Res}(Q)]. \tag{9.1.44}$$

В завершение этого раздела обсудим коротко "щелевую" специализацию. Допустим, мы наложили связь

$$\{q_i = 0, \quad \forall\, i \not\equiv -1 \pmod{\gamma}\} \tag{9.1.45}$$

при некотором фиксированном $\gamma \in 1 + \mathbb{N}$. Тогда оператор Лакса L (9.1.14) превращается в

$$\bar{L} = \zeta^N + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{N - \gamma i} q_{\gamma i - 1} = \zeta^N \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{-\gamma i} \bar{q}_i\Big). \tag{9.1.46}$$

Чтобы уравнения движения (9.1.15) имели смысл для такого специального $\bar{L}$, степень n в $\bar{P} = \bar{L}^n$ должна быть такой, чтобы

$$p_s(n) = 0, \quad \forall\, s \notin \gamma\mathbb{Z}, \tag{9.1.47}$$

см. формулу (9.1.16). Это происходит, если и только если

$$nN \equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{9.1.48}$$

В частности, для случая КП при $N = 1$,

$$\bar{L} = \zeta\Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{-\gamma i} \bar{q}_i\Big) = \zeta + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{1 - \gamma i} \bar{q}_i, \tag{9.1.49}$$

соответствующая иерархия имеет вид

$$\partial_{\bar{P}}(\bar{L}) = [\bar{P}_+, \bar{L}] = [\bar{L}, \bar{P}_-], \quad \bar{P} = \bar{L}^{\gamma n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.1.50}$$

Мы позже еще вернемся к ней.

9.2 Одевающая сцена

> **Я сильно сомневаюсь, что когда-нибудь наступит время, когда две свиньи, встретившись у кормушки, будут медлить, прежде чем плюхнуться в пойло, и та, что потолще, скажет другой, "После Вас, мой дорогой Альфонс."**
>
> **Элберт Хаббард**

В этом разделе мы организуем уравнения Лакса из §9.1 в бесконечную коммутирующую иерархию в пространстве одевающих переменных.

Рассмотрим еще одно разностное кольцо $C_{\mathcal{X}} = R\langle \mathcal{X}_i^{(s)} \rangle$, $i \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$. Пусть $K \in C_{\mathcal{X}}((\zeta^{-1}))$ — элемент вида

$$K = 1 + \sum_{i \geqslant 1} \mathcal{X}_i \zeta^{-i} = \sum_{i \geqslant 0} \mathcal{X}_i \zeta^{-i}, \quad \mathcal{X}_0 = 1. \tag{9.2.1}$$

Напомним, что мы зафиксировали $N \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть ∂_{t_n} обозначает эволюционное дифференцирование в $C_{\mathcal{X}}$, определенное на генераторах $\mathcal{X}$ в $C_{\mathcal{X}}$ следующим равенством в $C_{\mathcal{X}}((\zeta^{-1}))$:

$$\partial_{t_n}(K) = -(K\zeta^{Nn}K^{-1})_{-}K. \tag{9.2.2}$$

Так как обе части этого равенства принадлежат $C_{\mathcal{X}}((\zeta^{-1}))_{<0}$, то оно действительно определяет эволюционное дифференцирование ∂_{t_n}. Положим

$$L = K\zeta^{N}K^{-1}. \tag{9.2.3}$$

Так как $L \in C_{\mathcal{X}}((\zeta^{-1}))_{\leqslant N}$, и L имеет старший член ζ^N, то

$$L = \zeta^N + \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{N-i-1} q_i, \tag{9.2.4}$$

при некоторых $q_i \in C_{\mathcal{X}}$. Тогда

$$K\zeta^{Nn}K^{-1} = (K\zeta^{N}K^{-1})^n = L^n \in C_q((\zeta^{-1})) \quad \Rightarrow \tag{9.2.5}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_n}(L) = \partial_{t_n}(K\zeta^N K^{-1}) &= \partial_{t_n}(K)\zeta^N K^{-1} - K\zeta^N K^{-1}\partial_{t_n}(K)K^{-1} = \\ &= -P_{-}L + LP_{-} = [L, P_{-}], \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

где $P = L^n$. Таким образом, уравнения движения (9.2.2) в одевающем пространстве $C_{\mathcal{X}}$ индуцируют уравнения движения (9.2.6) в пространстве Лакса C_q.

Утверждение 9.2.7. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Тогда ∂_{t_n} и ∂_{t_m}, эволюционные дифференцирования на $C_{\mathcal{X}}$, коммутируют.

Доказательство. Повторим дословно доказательство Теоремы 1.5.11. Чтобы доказать

$$[\partial_{t_n}, \partial_{t_m}] = 0 \quad \text{в} \quad C_{\mathcal{X}}, \tag{9.2.8}$$

мы проверим, что

$$[\partial_{t_n}, \partial_{t_m}](K) = 0 \quad \text{в} \quad C_{\mathcal{X}}((\zeta^{-1})). \tag{9.2.9}$$

Имеем, с $P = K\zeta^{Nn}K^{-1}$ н $Q = K\zeta^{Nm}K^{-1}$:

$$\begin{aligned} \partial_{t_n}\partial_{t_m}(K) = \partial_{t_n}(-Q_{-}K) &= -[\partial_P(Q)]_{-}K - Q_{-}\partial_{t_n}(K) = \\ &= -[Q, P_{-}]_{-}K + Q_{-}P_{-}K \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{9.2.10}$$

$$[\partial_{t_n}, \partial_{t_m}](K) = ?K, \tag{9.2.11}$$

где

$$\begin{aligned} ? = [P_{-}, Q]_{-} - [Q_{-}, P]_{-} + [Q_{-}, P_{-}] &= [P_{-}, Q_{+} + Q_{-}]_{-} + [P_{+} + P_{-}, Q_{-}]_{-} - [P_{-}, Q_{-}] = \\ &= \big([P_{+} + P_{-}, Q_{+} + Q_{-}] - [P_{+}, Q_{+}]\big)_{-} = [P, Q]_{-} = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Одевающая версия щелевой специализации (9.1.45), (9.1.46) возникает при $K \in C_{\mathcal{X}}((\zeta^{-\gamma}))$, то есть, когда

$$K = 1 + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{-\gamma i} \mathcal{X}_{\gamma i}, \tag{9.2.13}$$

$$\mathcal{X}_i = 0 \quad \text{при} \quad i \not\equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{9.2.14}$$

9.3 Революции типа МКП

В этом разделе изучаются иерархии дискретных интегрируемых систем модифицированного типа.

В разностном кольце $C_Q((\zeta^{-1}))$, $C_Q = R\langle Q_i^{(s)}\rangle$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}$, выберем элемент

$$\mathcal{L} = \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{N-i} Q_i. \tag{9.3.1}$$

Напомним, что число $N \in \mathbb{N}$ фиксированно (хотя в конце концов мы скатимся к случаю $N = 1$, как наиболее интересному). Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$, положим $\mathcal{P} = \mathcal{L}^n$, и обозначим через $\partial_{\mathcal{P}} = \partial_{t_n}$ эволюционное дифференцирование на C_Q, заданное на генераторах Q_i следующим равенством в $C_Q((\zeta^{-1}))$:

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}]. \tag{9.3.2}$$

Обычным образом, доказывается что дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ корректно определено и имет бесконечное число интегралов $\{\mathrm{Res}(\mathcal{L}^m),\ m \in \mathbb{N}\}$. Для любого $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, положим

$$\mathcal{L}^\kappa = \sum_s \pi_s(\kappa)\zeta^s, \tag{9.3.3}$$

$$\mathcal{I}_\kappa = \{\text{двусторонний идеал в } C_Q, \text{ порожденный } Q_i^{(s)} \text{ при } i \geqslant \kappa\}. \tag{9.3.4}$$

Утверждение 9.3.5. Для каждого $\kappa \in \mathbb{Z}_+$,

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{I}_\kappa) \subset \mathcal{I}_{\kappa+1}. \tag{9.3.6}$$

Доказательство. Имеем

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}]_{\leqslant N} = \Big[\sum_{s \geqslant 1} \pi_s(n)\zeta^s, \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{N-i} Q_i\Big]_{\leqslant N} =$$

$$= \sum_{i,s \geqslant 0} \zeta^{N-i+s+1}\Big[\pi_{s+1}(n)^{(i-N-s-1)} Q_i - (Q_i \pi_{s+1}(n))^{(-s-1)}\Big]_{\leqslant N} \quad \Rightarrow \tag{9.3.7}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_i) = \sum_{s \geqslant 0}\Big[\pi_{s+1}(n)^{(i-N)} Q_{i+s+1} - (Q_{i+s+1}\pi_{s+1}(n))^{(-s-1)}\Big]. \quad \blacksquare \tag{9.3.8}$$

Таким образом, можно рассмотреть произвольный конечный обрыв $\mathcal{L}$, считая, что при $i > (\cdot\cdot)$ все Q_i обращаются в ноль:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{(\cdot\cdot)} \zeta^{N-i} Q_i. \tag{9.3.9}$$

Для нетривиальности уравнений движения (9.3.2) требуется $\mathcal{P}_{\leqslant 0} \neq 0$, откуда следует, что верхний предел суммирования $(\cdot\cdot)$ в формуле (9.3.9) должен быть $\geqslant N$. Простейший нетривиальный случай — при $N = 1$:

$$\mathcal{L} = \zeta Q_0 + Q_1, \tag{9.3.10}$$

и для этого $\mathcal{L}$ первый поток, с $\mathcal{P} = \mathcal{L}$, имеет вид:

$$\partial_{t_1}(\mathcal{L}) = \zeta\partial_{t_1}(Q_0) + \partial_{t_1}(Q_1) = [\mathcal{L}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\zeta Q_0, \zeta Q_0 + Q_1] =$$
$$= [\zeta Q_0, Q_1] = \zeta[Q_0 Q_1 - Q_1^{(-1)} Q_0] \quad \Rightarrow$$

$$\partial_{t_1}(Q_0) = Q_0 Q_1 - Q_1^{(-1)} Q_0, \tag{9.3.11a}$$

$$\partial_{t_1}(Q_1) = 0. \tag{9.3.11b}$$

Последнее уравнение, (9.3.11b), можно было бы предвидеть из формулы (9.3.6) при $\kappa = (\cdot\cdot) = 1 : \partial_{\mathcal{P}}(Q_{(..)}) = 0$. Из этой выкладки можно извлечь не одну мораль. Во-первых, чтобы испортить уравнение $\partial_{\mathcal{P}}(Q_{(..)}) = 0$, нам следует сохранить весь бесконечный хвост оператора $\mathcal{L}$ (9.3.1). Вторая альтернатива заключается в том, чтобы положить $Q_{(..)} = 1$, но считать, что $N = \infty$:

$$\mathcal{L} = \sum_{r}^{\infty} \zeta^i \bar{Q}_i + \zeta^{r-1}. \tag{9.3.12}$$

Однако, этот случай изоморфен схеме КП-типа из §9.1, с Δ и ζ замененными на Δ^{-1} и ζ^{-1} соответственно. Следовательно, мы можем отказаться от этой альтернативы.

Заодно, вычислим первый поток иерархии МКП, то есть, случай $N = 1$ оператора $\mathcal{L}$ (9.3.1):

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{1-i} Q_i. \tag{9.3.13}$$

Имеем

$$\partial_{t_1}(\mathcal{L}) = \sum \zeta^{1-i} \partial_{t_i}(Q_i) = [\mathcal{L}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\zeta Q_0, \sum \zeta^{-i} Q_{1+i}] =$$

$$= \sum \zeta^{1-i} [Q_0^{(i)} Q_{1+i} - Q_{i+1}^{(-1)} Q_0] \quad \Rightarrow \tag{9.3.14}$$

$$\partial_{t_1}(Q_i) = Q_0^{(i)} Q_{1+i} - Q_{i+1}^{(-1)} Q_0, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.3.15}$$

Упражнение 9.3.16. (i) Покажите, что для оператора МКП $\mathcal{L}$ (9.3.13) выполняется:

$$\partial_{\mathcal{P}}(\ln Q_0) \approx 0, \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{9.3.17}$$

[Подсказка : См. формулу (8.2.52)];
(ii) Покажите, что формула (9.3.17) остается верной и для оператора МКП $\mathcal{L}$ (9.3.1).

Проверим, что все потоки (9.3.2) коммутируют. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}' = \mathcal{L}^m$. Чтобы доказать

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}] = 0 \quad \text{в} \quad C_Q, \tag{9.3.18}$$

проверяем, что

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}](\mathcal{L}) = 0 \quad \text{в} \quad C_Q((\zeta^{-1})). \tag{9.3.19}$$

Имеем

$$\partial_{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}'}(\mathcal{L}) = \partial_{\mathcal{P}}\big([\mathcal{L}, \mathcal{P}'_{\leqslant 0}]\big) = [[\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}], \mathcal{P}'_{\leqslant 0}] + [\mathcal{L}, [\mathcal{P}', \mathcal{P}_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0}]. \tag{9.3.20}$$

Переставляя $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ получаем

$$\partial_{\mathcal{P}'} \partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [[\mathcal{L}, \mathcal{P}'_{\leqslant 0}], \mathcal{P}_{\leqslant 0}] + [\mathcal{L}, [\mathcal{P}, \mathcal{P}'_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0}]. \tag{9.3.21}$$

Вычитая (9.3.21) из (9.3.20), находим

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}](\mathcal{L}) = [\mathcal{L}, ?], \tag{9.3.22}$$

где

$$\begin{aligned} ? &= [\mathcal{P}_{\leqslant 0}, \mathcal{P}'_{\leqslant 0}] + [\mathcal{P}', \mathcal{P}_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0} - [\mathcal{P}, \mathcal{P}'_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0} = \\ &= \Big(-[\mathcal{P}'_{\leqslant 0}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] - [\mathcal{P}', \mathcal{P}_{\geqslant 1}] + [\mathcal{P}'_{\leqslant 0}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] + [\mathcal{P}'_{\leqslant 0}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}]\Big)_{\leqslant 0} = \\ &= [-\mathcal{P}' + \mathcal{P}'_{\leqslant 0}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}]_{\leqslant 0} = [-\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{P}'_{\geqslant 1}]_{\leqslant 0} = 0, \end{aligned} \tag{9.3.23}$$

как и следовало ожидать.

Упражнение 9.3.24. Покажите, что

$$\partial_{\mathcal{P}} \operatorname{Res}(\mathcal{P}') - \partial_{\mathcal{P}'} \operatorname{Res}(\mathcal{P}) = -[\operatorname{Res}(\mathcal{P}), \operatorname{Res}(\mathcal{P}')]. \tag{9.3.25}$$

В завершение этого раздела рассмотрим щелевую специализацию общего оператора Лакса $\mathcal{L}$ (9.3.1). Допустим, мы наложили связь

$$Q_i = 0, \quad i \not\equiv 0 \pmod{\gamma} \tag{9.3.26}$$

для некоторого фиксированного $\gamma \in 1 + \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{L}$ превращается в

$$\bar{\mathcal{L}} = \zeta^N \Big(\sum_{i \geqslant 0} \zeta^{-\gamma i} \bar{Q}_i\Big), \tag{9.3.27}$$

и уравнения движения (9.3.2) выдерживают эту связь если и только если $\mathcal{P} \in C_{\bar{Q}}((\zeta^{-\gamma}))$. Это случается при

$$nN \equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{9.3.28}$$

В частностн, для случая МКП при $N = 1$,

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{1-\gamma i} \bar{Q}_i, \tag{9.3.29}$$

соответствующая нерархия имеет вид

$$\partial_{\bar{\mathcal{P}}}(\bar{\mathcal{L}}) = [\bar{\mathcal{P}}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}] = [\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{P}}_{\leqslant 0}], \quad \bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{L}}^{\gamma n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.3.30}$$

Упражнение 9.3.31. Рассмотрите

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{N} \zeta^{N-i} Q_i. \tag{9.3.32}$$

Согласно формуле (9.3.2),

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_N) = 0, \tag{9.3.33}$$

так что можно положнть

$$Q_N = 1. \tag{9.3.34}$$

Покажите, что в этом случае все потоки тривиальны:

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = 0. \tag{9.3.35}$$

Всякий А, надоедающий или ранящий В под предлогом защиты или улучшения X, является негодяем.

Закон Менкена

9.4 Модифицированная одевающая сцена

Б этом разделе мы одеваем интегрируемые иерархии типа МКП из §9.3.

Рассмотрим разностное кольцо $C_{W,\tau} = R\langle W^{(s)}, W^{-1(s)}, \tau_j^{(s)}\rangle$, $j \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}$, и элемент

$$\mathcal{K} = W\mathcal{K}_0, \quad \mathcal{K}_0 = 1 + \sum_{j\geqslant 1} \tau_j \zeta^{-j} \tag{9.4.1}$$

из $C_{W,\tau}((\zeta^{-1}))$. Дли всех $n \in \mathbb{N}$, пусть ∂_{t_n} есть эволюционное дифференцирование на $C_{W,\tau}$ определяемое на генераторах W, τ_j следующим равенством в $C_{W,\tau}((\zeta^{-1}))$:

$$\partial_{t_n}(\mathcal{K}) = -(\mathcal{K}\zeta^{Nn}\mathcal{K}^{-1})_{\leqslant 0}\mathcal{K}. \tag{9.4.2}$$

Так как обе части этого равенства принадлежат подпространству $C_{W,\tau}((\zeta^{-1}))_{\leqslant 0}$, то дифференцирование ∂_{t_n} корректно определено. Положим

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}\zeta^N\mathcal{K}^{-1} \in C_{W,\tau}((\zeta^{-1}))_{\leqslant N}, \tag{9.4.3}$$

тогда

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = \partial_{t_n}(\mathcal{K})\zeta^N\mathcal{K}^{-1} - \mathcal{K}\zeta^N\mathcal{K}^{-1}\partial_{t_n}(\mathcal{K})\mathcal{K}^{-1} = [\mathcal{L}, (\mathcal{L}^n)_{\leqslant 0}]. \tag{9.4.4}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $N \in \mathbb{N}$, иерархия типа МКП из §9.3 живет внутри большей иерархии в одевающем пространстве $C_{W,\tau}$. Проверим, что эта одевающая иерархия коммутативна. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{K}\zeta^{Nn}\mathcal{K}^{-1}$, $\mathcal{P}' = \mathcal{K}\zeta^{Nm}\mathcal{K}^{-1}$, $\partial_{t_n} = \partial_{\mathcal{P}}$, $\partial_{t_m} = \partial_{\mathcal{P}'}$. Чтобы показать, что

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}] = 0 \quad \text{в} \quad C_{W,\tau}, \tag{9.4.5}$$

мы проверим, что

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}](\mathcal{K}) = 0 \quad \text{в} \quad C_{W,\tau}((\zeta^{-1})). \tag{9.4.6}$$

Имеем

$$\partial_{\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{P}'}(\mathcal{K}) = \partial_{\mathcal{P}}(-\mathcal{P}'_{\leqslant 0}\mathcal{K}) = -\big[\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}')\big]_{\leqslant 0}\mathcal{K} + (\mathcal{P}'_{\leqslant 0})(\mathcal{P}_{\leqslant 0})\mathcal{K} \quad \Rightarrow \tag{9.4.7}$$

$$[\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{P}'}](\mathcal{K}) = \,?\mathcal{K}, \tag{9.4.8}$$

где

$$\begin{aligned} ? &= [-\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}') + \partial_{\mathcal{P}'}(\mathcal{P})]_{\leqslant 0} + [\mathcal{P}'_{\leqslant 0}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] = \\ &= \big(-[\mathcal{P}', \mathcal{P}_{\leqslant 0}] + [\mathcal{P}, \mathcal{P}'_{\leqslant 0}]\big)_{\leqslant 0} + [\mathcal{P}'_{\leqslant 0}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] \overset{(9.3.23)}{=} 0. \end{aligned} \tag{9.4.9}$$

Щелевая специализация (9.3.26), (9.3.27) на лаксовом языке получается при $\mathcal{K} \in C_{W,\tau}((\zeta^{-\gamma}))$, то есть, когда мы берем $\mathcal{K}$ в виде

$$\mathcal{K} = W\Big(1 + \sum_{i\geqslant 1} \zeta^{-i\gamma}\tau_{\gamma i}\Big), \tag{9.4.10}$$

$$\tau_i = 0, \quad i \not\equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{9.4.11}$$

9.5 КП из МКП

> Мы похожи по разному.
>
> **Дейл Берра**

В этом разделе мы сначала расширяем иерархию МКП до ее потенциальной версии, Pot–МКП, и затем строим вложение иерархии КП в иерархию Pot–МКП. Как и в непрерывном случае, Pot–иерархия МКП расщепляется в сумму иерархии КП и единственного скалярного поля.

Сохраним обозначения из §9.1 и §9.3. Основная идея та же, что и в Части А: дан оператор Лакса МКП-типа

$$\mathcal{L} = \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{N-i} Q_i, \tag{9.5.1}$$

и мы хотим найти сопряжение, переводящее его в оператор Лакса КП-типа с постоянным старшим членом:

$$\mathcal{L} \mapsto V^{-1}\mathcal{L}V = \Phi\Big(\zeta^N + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{N-1-i}q_i\Big) = \Phi(L). \tag{9.5.2}$$

Чтобы осуществить это, нам нужны два ингредиента: во-первых, тождество

$$V^{-1}\zeta^N Q_0 V = \zeta^N \quad \Leftrightarrow \tag{9.5.3}$$

$$Q_0 = V^{(-N)}V^{-1}, \tag{9.5.4}$$

и во-вторых, поднятие уравнения движения для Q_0 в иерархии МКП (9.3.2) в соответствующее уравнение движения для V, если таковое существует.

Итак, пусть $C_Q^{\mathrm{Pot}} = C_{V,Q} = R\langle V^{(s)}, V^{(-1)(s)}, Q_j^{(s)}\rangle$, $j \in \mathbb{N}$, есть разностное кольцо для иерархии Pot-МКП, и $\mathrm{Pot} : C_Q \to C_Q^{\mathrm{Pot}}$ — (разностный) гомоморфизм, определяемый на генераторах Q из C_Q по формуле

$$\mathrm{Pot}(Q_0) = V^{(-N)}V^{-1}; \quad \mathrm{Pot}(Q_j) = Q_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{9.5.5}$$

Мы исключим Q_j при $j > 0$ из рассмотрения и сосредоточимся на вопросах, связанных с Q_0 и V. Из формул (9.3.2, 3) видим, что уравнение движения для Q_0 имеет вид

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_0) = Q_0\pi_0 - \pi_0^{(-N)}Q_0, \tag{9.5.6}$$

где

$$\pi_0 = \pi_0(n), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n. \tag{9.5.7}$$

Лемма 9.5.8. Пусть $X, Y \in D^{ev}(C_Q)$ таковы, что

$$X(Q_0) = Q_0 a - a^{(-N)}Q_0, \quad a \in C_Q, \tag{9.5.9}$$

$$Y(Q_0) = Q_0 b - b^{(-N)}Q_0, \quad b \in C_Q. \tag{9.5.10}$$

Тогда

$$[X,Y](Q_0) = Q_0 c - c^{(-N)}Q_0, \quad c = [a,b] + X(b) - Y(a). \tag{9.5.11}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} XY(Q_0) &= X(Q_0 b - b^{(-N)}Q_0) = \\ &= (Q_0 a - a^{(-N)}Q_0)b + Q_0 X(b) - X(b)^{(-N)}Q_0 - b^{(-N)}(Q_0 a - a^{(-N)}Q_0) = \\ &= Q_0(ab + X(b)) - (-ba + X(b))^{(-N)}Q_0 - a^{(-N)}Q_0 b - b^{(-N)}Q_0 a. \end{aligned} \tag{9.5.12}$$

Аналогично,

$$YX(Q_0) = Q_0(ba + Y(a)) - (-ab + Y(a))^{(-N)}Q_0 - b^{(-N)}Q_0 a - a^{(-N)}Q_0 b, \tag{9.5.13}$$

и формула (9.5.11) доказана. ∎

Таким образом, эволюционные дифференцирования вида (9.5.9) образуют подалгебру Ли, обозначим ее $\mathcal{G}_{ot}$, в алгебре Ли $D^{ev}(C_Q)$.

Лемма 9.5.14. Пусть $\bar X, \bar Y \in D^{ev}(C_{V,Q})$ таковы, что

$$\bar X(V) = -\bar a V, \quad \bar a \in C_{V,Q}, \tag{9.5.15}$$

$$\bar Y(V) = -\bar b V, \quad \bar b \in C_{V,Q}. \tag{9.5.16}$$

Тогда

$$[\bar X, \bar Y](V) = -\bar c V, \quad \bar c = [\bar a, \bar b] + \bar X(\bar b) - \bar Y(\bar a). \tag{9.5.17}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \bar X \bar Y(V) &= \bar X(-\bar b V) = -\bar X(\bar b)V + \bar b \bar a V \quad \Rightarrow \\ [\bar X, \bar Y](V) &= (-\bar X(\bar b) + \bar Y(\bar a) + \bar b \bar a - \bar a \bar b)V. \end{aligned}$$ ∎

Таким образом, получаем подалгебру Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{Pot}}$ в алгебре Ли $D^{ev}(C_{V,Q})$, состоящую из эволюционных дифференцирований типа (9.5.15).

Утверждение 9.5.18. Гомоморфизм $\mathrm{Pot} : C_Q \to C_{V,Q}$ (9.5.5) продолжается до гомоморфизма алгебр Ли $\mathrm{Pot} : \mathcal{G}_{ot} \to \mathcal{G}_{\mathrm{Pot}}$, по правилу

$$X \in \mathcal{G}_{ot}, \ X(Q_0) = Q_0 a - a^{(-N)}Q_0 \overset{\mathrm{Pot}}{\mapsto} \bar X \in \mathcal{G}_{\mathrm{Pot}}, \quad \bar X(V) = -\mathrm{Pot}(a)V. \tag{9.5.19}$$

Доказательство. Покажем, что

$$\mathrm{Pot} \circ X = \bar X \circ \mathrm{Pot}, \quad \forall\, X \in \mathcal{G}_{ot}. \tag{9.5.20}$$

Свойство лиевского гомоморфизма

$$\mathrm{Pot} \circ [X, Y] = [\bar X, \bar Y] \circ \mathrm{Pot} \tag{9.5.21}$$

следует отсюда автоматически.

Для проверки равенства (9.5.20) применим обе его части к Q_0:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot} \circ X(Q_0) &= \mathrm{Pot}(Q_0 a - a^{(-N)}Q_0) = V^{(-N)}V^{-1}\,\mathrm{Pot}(a) - \mathrm{Pot}(a^{(-N)})V^{(-N)}V^{-1}, \\ \bar X \circ \mathrm{Pot}(Q_0) &= \bar X(V^{(-N)}V^{-1}) = \\ &= (-\mathrm{Pot}(a)V)^{(-N)}V^{-1} - V^{(-N)}V^{-1}(-\mathrm{Pot}(a)V)V^{-1}. \end{aligned}$$ ∎

Вывод: иерархия Pot-МКП определяется, вдобавок к старым уравнениям движения для Q_j при $j > 0$, уравнением

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\operatorname{Pot}(\pi_0(n))V = -\operatorname{Pot}\operatorname{Res}(\mathcal{P})V, \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{9.5.22}$$

и эта иерархия остается коммутативной.

Замечание 9.5.23. В Лемме 9.5.8 и Утверждении 9.5.18, важен не сам элемент X из алгебры Ли $\mathcal{G}_{ot}$, а параметризующее его значение a, так как отображение $a \mapsto X$ имеет нетривиальное ядро (см. следующее упражнение).

Упражнение 9.5.24. Покажите, что: (i) если $Q_0 a - a^{(-N)} Q_0 = 0$, то $\operatorname{Pot}(a) = \mathrm{const}$; (ii) если $Q_0 a - a^{(-N)} Q_0 = 0$, то $a = \mathrm{const}$.

Теперь мы можем доказать, что преобразование Миуры $\mathcal{L} \mapsto L = V^{-1}\mathcal{L}V$ переводит иерархию Pot-МКП в иерархию КП. Опуская символ Pot, получаем:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(L) &= \partial_{\mathcal{P}}(V^{-1}\mathcal{L}V) = -V^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(V)V^{-1}\mathcal{L}V + V^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})V + V^{-1}\mathcal{L}\partial_{\mathcal{P}}(V) = \\ &= V^{-1}\pi_0 V L + V^{-1}[\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}]V - V^{-1}\mathcal{L}VV^{-1}(-\pi_0 V) = \\ &= [V^{-1}\pi_0 V, L] + [V^{-1}\mathcal{L}V, V^{-1}\mathcal{P}_{\leqslant 0}V] = [L, V^{-1}(\mathcal{P}_{\leqslant 0} - \pi_0)V] = \\ &= [L, V^{-1}\mathcal{P}_{-}V] = [L, (V^{-1}\mathcal{P}V)_{-}] = [L, P_{-}], \end{aligned} \tag{9.5.25}$$

где

$$P = V^{-1}\mathcal{P}V = V^{-1}\mathcal{L}^n V = (V^{-1}\mathcal{L}V)^n = L^n. \tag{9.5.26}$$

Как и в непрерывном случае §6.2, на языке L переменная V отщепляется от Pot-МКП системы, так что возникает разложение

$$\text{Pot-МКП} = V + \text{КП}, \tag{9.5.27}$$

где V обозначает одно скалярное поле. Это можно увидеть следующим образом. В компонентах, преобразование Миуры Φ (9.5.2) имеет вид

$$\Phi(q_i) = V^{(i+1-N)} Q_{i+1} V, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.5.28}$$

Следовательно, присоединяя V к переменным q_i, мы можем обратить это преобразование:

$$\Phi^{-1}(V,\ \{Q_{i+1} | i \geqslant 0\}) = (V,\ \{V^{-1(i+1-N)} q_i V^{-1} | i \geqslant 0\}). \tag{9.5.29}$$

Уравнения движения для q_i задаются уравнениями Лакса КП-типа (9.1.15), которые ничего, кроме q_i не содержат. В уравнение движения для V, (9.5.22), входит выражение $\operatorname{Pot}(\pi_0(n))$, которое можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pot}(\pi_0(n)) &= \operatorname{Pot}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n) = \operatorname{Pot}\operatorname{Res}[(VLV^{-1})^n] = \operatorname{Res}[(VLV^{-1})^n] = \\ &= \operatorname{Res}(VL^nV^{-1}) = V\operatorname{Res}(L^n)V^{-1} = Vp_0(n)V^{-1}. \end{aligned} \tag{9.5.30}$$

Итак, уравнения движения иерархии Pot-МКП в КП-представлении суть

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \tag{9.5.31a}$$

$$\partial_P(V) = -V\operatorname{Res}(P), \quad P = L^n. \tag{9.5.31b}$$

Заметим, что формула (9.5.28) для преобразования Миуры Φ означает, что это отображение совместно с щелевыми специализациями (9.1.45) и (9.3.26):

$$q_i = 0, \qquad i + 1 \not\equiv 0 \pmod{\gamma}, \tag{9.5.32a}$$

$$Q_i = 0, \qquad i \not\equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{9.5.32b}$$

9.6 Преобразование Миуры в одевающих пространствах

В этом разделе мы строим преобразование Миуры между одевающими пространствами типа КП и МКП, и затем показываем, что это преобразование Миуры согласовано, посредством процедуры одевания, с преобразованием Миуры из §9.5.

Напомним, что в §9.2 и §9.4 были построены уравнения движения для одевающих операторов:

$$\partial_P(K) = -P_-K, \quad P = K\zeta^{Nn}K^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.6.1}$$

$$K = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \mathcal{X}_i\zeta^{-i}, \tag{9.6.2}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{K}) = -\mathcal{P}_{\leqslant 0}\mathcal{K}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{K}\zeta^{Nn}\mathcal{K}^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.6.3}$$

$$\mathcal{K} = W\mathcal{K}_0, \quad \mathcal{K}_0 = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \tau_i\zeta^{-i}. \tag{9.6.4}$$

Беря вычет уравнения (9.6.3), получаем

$$\partial_{\mathcal{P}}(W) = -\pi_0 W, \quad \pi_0 = \pi_0(n) = \mathrm{Res}(\mathcal{P}). \tag{9.6.5}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{K}_0) &= \partial_{\mathcal{P}}(W^{-1}\mathcal{K}) = -W^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(W)W^{-1}\mathcal{K} + W^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{K}) = \\ &= W^{-1}\,\mathrm{Res}(\mathcal{P})W\mathcal{K}_0 - W^{-1}\mathcal{P}_{\leqslant 0}W\mathcal{K}_0 = -W^{-1}[\mathcal{P}_{\leqslant 0} - \mathrm{Res}(\mathcal{P})]W\mathcal{K}_0 = \\ &= -W^{-1}\mathcal{P}_-W\mathcal{K}_0 = -(W^{-1}\mathcal{P}W)_-\mathcal{K}_0 = -P_-\mathcal{K}_0, \end{aligned} \tag{9.6.6}$$

где

$$P = W^{-1}\mathcal{P}W = W^{-1}(\mathcal{K}\zeta^N\mathcal{K}^{-1})^nW = (W^{-1}\mathcal{K}\zeta^N\mathcal{K}^{-1}W)^n = (\mathcal{K}_0\zeta^N\mathcal{K}_0^{-1})^n. \tag{9.6.7}$$

Следовательно, отображение $\Phi : C_{\mathcal{X}} \to C_{W,\tau}$,

$$\Phi(K) = \mathcal{K}_0, \quad \Phi(\mathcal{X}_i) = \tau_i, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{9.6.8}$$

переводит уравнения движения КП-типа (9.6.1) в уравнения движения МКП-типа (9.6.3), и те и другие в одевающих пространствах.

Проверим, что при ограничении на подкольцо $C_q \subset C_{\mathcal{X}}$,

$$L = \zeta^N + \sum \zeta^{N-1-i}q_i = K\zeta^NK^{-1}, \tag{9.6.9}$$

преобразование Миуры (9.6.8) дает преобразование Миуры Φ (9.5.2) построенное в предыдущем разделе на языке $\{q\}$ и $\{V, Q\}$. Имеем:

$$\Phi(L) = \Phi(K\zeta^NK^{-1}) = \mathcal{K}_0\zeta^N\mathcal{K}_0^{-1} = W^{-1}\mathcal{K}\zeta^N\mathcal{K}^{-1}W = W^{-1}\mathcal{L}W. \tag{9.6.10}$$

Так как уравнения движения для V и W, соответственно (9.5.22) и (9.6.5), совпадают, мы можем идентифицировать W и V. Формула (9.6.10) при этом превращается и (9.5.2).

Заметим, что преобразование Миуры Φ (9.6.8) согласовано с щелевыми специализациями (9.2.13, 14) и (9.4.10, 11):

$$\Phi\Big(1 + \sum_{i\geqslant 1} \zeta^{-\gamma i}\mathcal{X}_{\gamma i}\Big) = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \zeta^{-\gamma i}\tau_{\gamma i}. \tag{9.6.11}$$

9.7 Классический предел

В этом разделе мы выясним, что произойдет со зданием, воздвигнутым к настоящему моменту, если положить $\Delta = 1$.

Если Δ — тождественный автоморфизм, решетка $\mathbb{Z}$ (на которой считаются определенными все переменные) стягивается в точку, значки (s) и т.п. исчезают, и мы попадаем в ситуацию чистой классической механики. Рассмотрим отдельно иерархии типа КП и МКП.

В случае КП мы можем заменить оператор Лакса

$$L_N = \zeta^N + \sum_{i\geqslant 0} \bar{q}_i \zeta^{N-1-i} \tag{9.7.1}$$

его корнем N-й степени,

$$L_1 = L = \zeta + \sum_{i\geqslant 0} q_i \zeta^{-i}, \tag{9.7.2}$$

так как операция $L \mapsto L^{1/N}$ является обратимым изоморфизмом и возражение, сделанное в Замечании 9.1.38 больше не применимо. Символ ζ теперь является просто средством градуировки. Уравнения движения имеют прежнюю форму (9.1.15):

$$\partial_{t_n}(L) = \partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.7.3}$$

причем первый поток, с $P = L$, служит классическим пределом уравнений (9.1.28):

$$\partial_{t_1}(q_i) = [q_0, q_i], \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.7.4}$$

Естественно, все потоки по прежнему коммутируют и имеют бесконечное число общих интегралов $\{\mathrm{Res}(L^n) | n \in \mathbb{N}\}$. Одевающая картина, однако, пропадает.

В случае МКП мы тоже можем заменить оператор Лакса

$$\mathcal{L}_N = \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{N-i} \bar{Q}_i \tag{9.7.5}$$

корнем N-й степени

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} = \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{1-i} Q_i, \tag{9.7.6}$$

где $Q_0 = \bar{Q}_0^{1/N}$; мы предполагаем, что существует корень N-й степени из $\bar{Q}_0$, иначе приходится вводить формальный символ $\bar{Q}_0^{1/N}$ вместо Q_0. Потоки

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = \partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}], \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.7.7}$$

по прежнему коммутируют и имеют бесконечный набор общих интегралов $\{\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) | n \in \mathbb{N}\}$. Уравнения движения для первого потока, с $\mathcal{P} = \mathcal{L}$, служат классическим пределом уравнений движения (9.3.15):

$$\partial_{t_1}(Q_i) = [Q_0, Q_{i+1}], \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.7.8}$$

Одевающая картина пропадает, как и Pot-МКП представление. Следовательно, преобразования Миуры между классической иерархией КП (9.7.3) и классической иерархией МКП (9.7.7) больше не существует. Однако, гамильтонов формализм, о котором мы до сих пор не вспоминали, выживает. Это станет видно в главе 12.

Упражнение 9.7.9. Покажите, что в классической иерархии КП (9.7.3) выполняется равенство

$$\partial_{t_n}(q_0) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{9.7.10}$$

Заметим, что классический предел, рассмотренный в этом разделе, сохраняет щелевые специализации (9.1.45) для потоков КП (9.7.3):

$$q_i = 0, \quad i + 1 \not\equiv 0 \pmod{\gamma} \tag{9.7.11}$$

и (9.3.26) для потоков МКП (9.7.7):

$$Q_i = 0, \quad i \not\equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{9.7.12}$$

9.8 Квазиклассический предел

> Мы держим путь в прекрасный Город Идеала. Мы знаем, что никогда его не достигнем — но предместья весьма приятны.
>
> Элберт Хаббард

Квазиклассический предел применяется всякий раз, когда классический приводит к тривиальным потокам. В этом разделе мы рассматриваем такие ситуации.

Классический предел иерархий типа КП и МКП из предыдущего раздела приводит к уравнениям движения со следующей структурой:

$$\partial_t(\forall_i) = \{\text{сумма коммутаторов}\}_i, \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.8.1}$$

Эта форма правой части следует из коммутаторной формы правых частей уравнений (9.7.3) и (9.7.7). Следовательно, эти правые части никогда не зануляются тождественно, так как

$$[L, P_-] \neq 0, \quad \forall\, P = L^n, \tag{9.8.2}$$

и

$$[\mathcal{L}, \mathcal{P}_-] \neq 0, \quad \forall\, \mathcal{P} = \mathcal{L}^n. \tag{9.8.3}$$

В конечном счете, причина неравенств (9.8.2) и (9.8.3) в том, что каждый из операторов L и $\mathcal{L}$ содержит *более, чем одну* переменную. Отсюда следует, что единственный способ преодолеть это препятствие заключается в том, чтобы рассмотреть всевозможные щелевые специализации (9.1.45) и (9.3.26) и выбрать из них те, для которых в операторах Лакса остается лишь одна переменная, после отбрасывания бесконечного остатка ряда при факторизации по идеалам I_k (9.1.17) и $\mathcal{I}_k$ (9.3.4) соответственно. Это, очевидно, невозможно в случае МКП (9.3.26), так как Q_0 приходится оставить, и для других Q уже нет места. Однако, в случае КП (9.1.45):

$$q_i = 0, \quad i + 1 \not\equiv 0 \pmod{\gamma}, \tag{9.8.4}$$

$$L = \zeta^N\Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{-\gamma i} q_{\gamma i}\Big), \tag{9.8.5}$$

мы можем ввести дополнительную связь

$$q_{\gamma i} = 0, \quad i > 1, \tag{9.8.6}$$

и придем окончательно к оператору Лакса

$$L = \zeta^N(1+\zeta^{-\gamma}q) = \zeta^N + \zeta^{-r}q, \tag{9.8.7}$$

при некотором $r = (\gamma - N) \in \mathbb{N}$ (чтобы обеспечить нетривиальность уравнений движения.) Если g.c.d.$(N, r) > 0$, то перенормировка $\Delta \mapsto \Delta^{\text{g.c.d.}}$, $\zeta \mapsto \zeta^{\text{g.c.d.}}$ сводит дело к случаю

$$\text{g.c.d.}(N, r) = 1. \tag{9.8.8}$$

Будем считать это условие выполненым.

Оператор Лакса (9.8.7) приводит к уравнениям движения

$$\partial_{t_n}(L) = \partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^{\gamma n} = (L^{N+r})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.8.9}$$

В классическом пределе это дает

$$\partial_{t_n}(q) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.8.10}$$

Мы получим квазиклассический предел в три шага. Во-первых, перепишем уравнения движения (9.8.9) в виде

$$\partial_{t_n}(L) = \zeta^{-r}\partial_{t_n}(q) = [L, P_-] = [\zeta^N + \zeta^{-r}q, \sum_{s<0}\zeta^{s(N+r)}\bar{p}_s(n)] =$$

$$= [\zeta^N, \zeta^{-N-r}\bar{p}_{-1}(n)] = \zeta^{-r}(1-\Delta^{-N})(\bar{p}_{-1}(n)) \quad \Rightarrow \tag{9.8.11}$$

$$\partial_{t_n}(q) = (1-\Delta^{-N})(\bar{p}_{-1}(n)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.8.12}$$

где

$$(L^{N+r})^n = \sum_s \zeta^{(N+r)s}\bar{p}_s(n). \tag{9.8.13}$$

Во-вторых, положим

$$\Delta = \exp(\varepsilon\partial), \quad \partial = \partial/\partial x, \tag{9.8.14}$$

где ε — формальный („малый") параметр. Тогда уравнения движения (9.8.12) превращаются в

$$\partial_{t_n}(q) = \varepsilon N \partial(\bar{p}_{-1}(n)) + O(\varepsilon^2). \tag{9.8.15}$$

Далее, $\bar{p}_{-1}(n)$ равен, с точностью до $O(\varepsilon)$, коэффициенту при λ^{-N-r} в ряде

$$[\lambda^N(1+q\lambda^{-N-r})]^{(N+r)n} = (\lambda^{N+r})^{Nn}\sum_{\kappa\geqslant 0}\binom{(N+r)n}{\kappa}q^\kappa\lambda^{-(N+r)\kappa}. \tag{9.8.16}$$

Выделяя член с $\kappa = (Nn+1)$, получаем

$$\bar{p}_{-1}(n) = q^{Nn+1}\binom{Nn+rn}{Nn+1} + O(\varepsilon). \tag{9.8.17}$$

Таким образом, уравнения движения (9.8.15) принимают вид

$$\partial_{t_n}(q) = \varepsilon\,\text{const}_n\,\partial(q^{Nn+1}) + O(\varepsilon^2), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9.8.18}$$

$$\text{const}_n = N\binom{Nn+rn}{Nn+1}. \tag{9.8.19}$$

Последний, третий шаг заключается в растяжении $t_n \mapsto t_n/\varepsilon\,\mathrm{const}_n$ и переходе к пределу $\varepsilon \to 0$, что и дает уравнения квазиклассического предела

$$\partial_{t_n}(q) = \partial(q^{Nn+1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.8.20}$$

Простейший, самый хороший случай — при $N = 1$:

$$L = \zeta + \zeta^{-r} q \tag{9.8.21}$$

приводит к иерархии

$$\partial_{t_n}(q) = \partial(q^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.8.22}$$

Эта иерархия коммутативна и имеет бесконечный общий набор интегралов

$$H_n = q^n/n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.8.23}$$

Более того, она *гамильтонова*, так как уравнения движения (9.8.22) можно переписать в виде

$$\partial_{t_n}(q) = \partial(q^{n+1}) = \partial\left(\frac{\delta H_{n+2}}{\delta q}\right). \tag{9.8.24}$$

Мы увидем позже в §12.4, что полная система (9.8.12), до перехода к квазиклассическому пределу, не имеет локальной гамильтоновой структуры.

Упражнение 9.8.25. Покажите, что уравнения движения (9.8.22) можно записать с помощью одно-параметрического семейства гамильтоновых форм:

$$\partial_{t_n}(q) = \partial(q^{n+1}) = (\partial + \mathrm{const}\,\mathrm{ad}_q)\left(\frac{\delta H_{n+2}}{\delta q}\right). \tag{9.8.26}$$

Замечание 9.8.27. Полностью дискретная иерархия уравнений Лакса, связанная с оператором $L = \zeta^N + \zeta^{-r} q$ (9.8.7) допускает также предел другого рода. Чтобы увидеть, откуда он берется, рассмотрим для простоты первый поток простейшего случая $N = 1$, то есть, оператор $L = \zeta + \zeta^{-r} q$ (9.8.21); при этом уравнение движения (9.8.12) превращается в

$$\partial_{t_n}(q) = (1 - \Delta^{-1})(\bar{p}_{-1}), \tag{9.8.28}$$

где

$$(\zeta + \zeta^{-r} q)^{r+1} = \sum_s (\zeta^{r+1})^s \bar{p}_s. \tag{9.8.29}$$

Упражнение 9.8.30. (i) Покажите, что, в обозначенях (9.8.29),

$$\bar{p}_{-1} = \sum_{0 \leqslant n,m} \quad \sum_{n+m \leqslant r-1} q^{(r-n-m)} q^{(-m)}; \tag{9.8.31}$$

(ii) Получите отсюда, что уравнение двяжения (9.8.28) имеет вид

$$\partial_{t_1}(q) = [q^{(1)} + \cdots + q^{(r)}]q - q[q^{(-1)} + \cdots + q^{(-r)}] = \tag{9.8.32a}$$

$$= [q + \cdots + q^{(r)}]q - q[q + \cdots + q^{(-r)}]. \tag{9.8.32b}$$

Следующее эвристическое рассуждение восходит к Богоявленскому, применившему его к абелевой версии уравнении (9.8.32) [Bog 1991, §2.1]. Положим $t_1 = t\,\mathrm{const}_r$

и будем считать q функцией от x, t, причем оператор Δ дуален сдвигу x на ε. Тогда уравнение движения (9.8.32) можно переписать в виде

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \mathrm{const}_r \Big\{ \Big[\sum_{\kappa=1}^{r} q(x+\kappa\varepsilon, t) \Big] q(x,t) - q(x,t) \Big[\sum_{\kappa=1}^{r} q(x-\kappa\varepsilon, t) \Big] \Big\}. \qquad (9.8.33)$$

Положим

$$\mathrm{const}_r = \varepsilon, \quad r = \varepsilon^{-1} c, \qquad (9.8.34)$$

для некоторой положительной вещественной постоянной c. Устремим $r \to \infty$, так что $\varepsilon \to 0$. Уравнение движения (9.8.33) тогда превращается в

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \Big[\int_{x}^{x+c} q(\theta,t)\, d\theta \Big] q(x,t) - q(x,t) \Big[\int_{x-c}^{x} q(\theta,t)\, d\theta \Big]. \qquad (9.8.35)$$

Можно показать, что все высшие потоки (9.8.12) допускают интегро-дифференциальный предел того же типа. Дальнейшие свойства абелевой версии системы (9.8.35) можно найти в статье Богоявленского [Bog 1991].

Замечание 9.8.36. Иерархию (9.8.22) можно интерпретировать, как неабелев аналог классической иерархии Бюргерса без вязкости

$$\partial_{t_n}(q) = \mathrm{const}_n\, q^n q_x. \qquad (9.8.37)$$

Однако, эта иерархия, (9.8.22), *существенно отличается* от бездисперсионного предела (отбрасывание всех производных по x порядка выше 1) неабелевых иерархий Бюргерса (2.5.31) и (2.5.34).

Замечание 9.8.38. Формула (9.8.12) показывает, что q является интегралом (и даже сохраняющейся плотностью) для всех потоков иерархии (9.8.9). В частности, первый поток (9.8.32), при $N = r = 1$, имеет вид

$$\partial_{t_1}(q) = q^{(1)} q - q q^{(-1)}. \qquad (9.8.39)$$

Его можно переписать в виде

$$\partial_{t_1}(q) = q^{(1)} q - q q^{(-1)} = (\widehat{R}_q \Delta \widehat{R}_q - \widehat{L}_q \Delta^{-1} \widehat{L}_q) \Big(\frac{\delta H}{\delta q} \Big), \quad H = q. \qquad (9.8.40)$$

Упражнение 9.8.41. Является ли форма (9.8.40) гамильтоновой?
[Подсказка : была бы, мы сделали бы из этого Упражнения Теорему.]

Смерть кладет предел всему.
Гораций

9.9 Факторизация КП и модифицированная цепочка Тоды

Этот раздел служит решеточным аналогом §3.10. В качестве приложения строится модифицированная цепочка Тоды.

В обозначениях §9.1, пусть дан оператор L (9.1.14):

$$L = \zeta^N + \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^{N-1-j} q_j. \tag{9.9.1}$$

Пусть

$$N = N_1 + \dots + N_n, \quad 1 < n \leqslant N + 1, \tag{9.9.2}$$

фиксированное разбиение N, такое, что

$$N_1, \dots, N_{n-1} \in \mathbb{N}; \quad N_n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.9.3}$$

Положим

$$F_i = \zeta^{N_i} + \sum_{s=0}^{N_i-1} \zeta^{N_i-1-s} v_{is}, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{9.9.4}$$

$$F_n = \zeta^{N_n} + \sum_{s=0}^{\infty} \zeta^{N_n-1-s} v_{ns}. \tag{9.9.5}$$

Рассмотрим $C_v = \mathcal{F}\langle v_{is}^{(j)} \rangle$ и гомоморфизм $\varphi_i : C_q \to C_v$,

$$\varphi_i(L) = F_i F_{i+1} \dots F_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_n, \tag{9.9.6}$$

где индексы i понимаются по модулю n. Таким образом,

$$\varphi_i(L) = F_i \varphi_{i+1}(L) F_i^{-1}. \tag{9.9.7}$$

Выберем $n_1 \in \mathbb{N}$, положим $P = L^{n_1}$, и обозначим через ∂_P эволюционное дифференцирование в C_q, определенное формулой (9.1.15):

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-]; \tag{9.9.8}$$

обозначим тем же символом ∂_P эволюционное дифференцирование в C_v, заданное формулами

$$\partial_P(F_i) = \ \ \varphi_i(P_+)F_i - F_i\varphi_{i+1}(P_+) \tag{9.9.9a}$$

$$= -\varphi_i(P_-)F_i + F_i\varphi_{i+1}(P_-). \tag{9.9.9b}$$

Теорема 9.9.10. (i) Эволюционное дифференцирование ∂_P (9.9.9) корректно определено;

(ii) Эволюционные дифференцирования ∂_P в кольцах C_q и C_v совместны относительно каждого из гомоморфизмов φ_i :

$$\partial_P \varphi_i = \varphi_i \partial_P, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{9.9.11}$$

(iii) Выберем $n_2 \in \mathbb{N}$ и положим $Q = L^{n_2}$. Тогда

$$[\partial_P, \partial_Q] = 0 \quad \text{в} \quad C_v. \tag{9.9.12}$$

Доказательство. (i) Следует проверить сначала, что формулы (9.9.9a) и (9.9.9b) дают один и тот же результат. Вычитая одну из другой, получаем

$$\varphi_i(P)F_i = F_i\varphi_{i+1}(P), \tag{9.9.13}$$

то есть

$$\varphi_i(P) = F_i \varphi_{i+1}(P) F_i^{-1}, \tag{9.9.14}$$

а это есть n_1-и степень тождества (9.9.7). Далее, из формул (9.9.9a) и (9.9.9b) следует, соответственно

$$\partial_P(F_i) \in C_v[\zeta], \quad 1 \leqslant i < n, \tag{9.9.15}$$

$$\partial_P(F_i) \in C_v((\zeta^{-1}))_{<N_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{9.9.16}$$

(ii) Имеем:

$$\begin{gathered}
\partial_P \varphi_i(L) \overset{(9.9.6)}{=} \partial_P(F_i F_{i+1} \dots F_{i-1}) \overset{(9.9.9a)}{=} \\
= \sum_{k=i}^{i-1} F_i \dots F_k F_k^{-1} [\varphi_k(P_+) F_k - F_k \varphi_{k+1}(P_+)] F_{k+1} \dots F_{i-1} = \\
= \varphi_i(P_+) F_i \dots F_{i-1} - F_i \dots F_{i-1} \varphi_i(P_+) = \varphi_i([P_+, L]) = \varphi_i \partial_P(L);
\end{gathered}$$

(iii) Имеем, в силу (9.9.9a):

$$\begin{gathered}
\partial_P \partial_Q(F_i) = \partial_P[\varphi_i(Q_+) F_i - F_i \varphi_{i+1}(Q_+)] \overset{(9.9.11)}{=} \\
= \varphi_i \partial_P(Q_+) F_i + \varphi_i(Q_+)[\varphi_i(P_+) F_i - F_i \varphi_{i+1}(P_+)] - \\
-[\varphi_i(P_+) F_i - F_i \varphi_{i+1}(P_+)] \varphi_{i+1}(Q_+) - F_i \varphi_{i+1} \partial_P(Q_+) \quad \Rightarrow \\
[\partial_P, \partial_Q](F_i) = \varphi_i(?) F_i - F_i \varphi_{i+1}(?),
\end{gathered} \tag{9.9.17}$$

где

$$? = \partial_P(Q_+) - \partial_Q(P_+) - [P_+, Q_+], \tag{9.9.18}$$

что равно нулю по формуле (9.1.36′). ▮

Замечание 9.9.19. Так как, согласно формуле (9.1.31), в C_q выполняется равенство $[\partial_P, \partial_Q] = 0$, то из части (ii) Теоремы 9.9.10 вытекает

$$0 = \varphi_i[\partial_P, \partial_Q](L) = [\partial_P, \partial_Q]\varphi_i(L). \tag{9.9.20}$$

Но чтобы вывести отсюда искомое равенство (9.9.12), надо доказать отдельно, что образы $\varphi_i(C_q)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, порождают кольцо C_v (или его поле частных).

Замечание 9.9.21. Доказанная Теорема 9.9.10 остается справедливой, даже если некоторые операторы $F_1, \dots, F_{n-1}$ (9.9.4) содержат отрицательные степени ζ :

$$F_i = \zeta^{N_i} + \sum_{s=0}^{u.\ell._i} \zeta^{N_i - 1 - s} v_{is}, \quad u.\ell._i = 0 \quad \text{или} \quad \infty, \quad 1 \leqslant i < n. \tag{9.9.22}$$

Замечание 9.9.23. Уравнения движения (9.9.9) можно записать в матричной форме, точно так же, как в непрерывном случае (3.10.46): пусть

$$F = \begin{pmatrix}
0 & F_1 & & & \\
 & 0 & F_2 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & F_{n-1} \\
F_n & & & & 0
\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n[C_v((\zeta^{-1}))], \tag{9.9.24a}$$

тогда

$$F^n = \mathrm{diag}(\varphi_1(L), \dots, \varphi_n(L)) \quad \Rightarrow \tag{9.9.24b}$$

$$F^{nn_1} = \mathrm{diag}(\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P)), \tag{9.9.24c}$$

и уравнения движения (9.9.9) собираются в матричное уравнение

$$\partial_P(F) = [(F^{nn_1})_+, F] = [F, (F^{nn_1})_-]. \tag{9.9.25}$$

Замечание 9.9.26. Обозначим через I_{ik} идеал в C_v, порожденный $v^{(j)}_{i\ell}$, при $\ell \geqslant k$. Уравнение (9.9.9a) показывает, что

$$\partial_P(I_{ik}) \subset I_{ik}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.9.27}$$

Это свойство позволяет делать различные самосогласованные обрывы. Например, если оператор L конечен:

$$L = \zeta^N + \sum_{s=0}^{N+M} \zeta^{N-1-s} q_s, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.9.28}$$

то конечен и F_n :

$$F_n = \zeta^{N_n} + \sum_{s=0}^{N_n+M} \zeta^{N_n-1-s} v_{ns}. \tag{9.9.29}$$

В частности, если L *максимально факторизован*, имеем:

$$F_i = \zeta + v_{i0}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{9.9.30a}$$

$$F_{N+1} = 1 + \sum_{s=0}^{M} \zeta^{-s-1} v_{N+1,s}. \tag{9.9.30b}$$

Цепочка Тоды (9.1.25) отвечает простейшему возможному случаю $N = 1, M = 0$:

$$L = \zeta + q_0 + \zeta^{-1} q_1, \tag{9.9.31}$$

$$F_1 = \zeta + u, \quad F_2 = 1 + \zeta^{-1} v. \tag{9.9.32}$$

Здесь

$$F_1 F_2 = \zeta + u + v + \zeta^{-1} u^{(1)} v, \tag{9.9.33a}$$

$$F_2 F_1 = \zeta + u + v^{(-1)} + \zeta^{-1} v u \quad \Rightarrow \tag{9.9.33b}$$

$$\varphi_1(q_0) = u + v, \qquad \varphi_1(q_1) = u^{(1)} v, \tag{9.9.34a}$$

$$\varphi_2(q_0) = u + v^{(-1)}, \quad \varphi_2(q_1) = v u. \tag{9.9.34b}$$

Упражнение 9.9.35. (i) Покажите, что первый поток модифицированной цепочки Тоды (9.9.31-34), при $n_1 = 1$, $P = L$, имеет вид

$$\partial_t(u) = vu - uv^{(-1)}, \tag{9.9.36a}$$

$$\partial_t(v) = u^{(1)} v - vu; \tag{9.9.36b}$$

(ii) Покажите, что второй поток модифицированной цепочки Тоды имеет вид

$$\partial_t(u) = (u^{(1)} + v)vu + vu(u + v^{(-1)}) - (u + v)uv^{(-1)} - uv^{(-1)}(u^{(-1)} + v^{(-1)}), \tag{9.9.37a}$$

$$\partial_t(v) = (u^{(1)} + v^{(1)})u^{(1)}v + u^{(1)}v(u + v) - (u^{(1)} + v)vu - vu(u + v^{(-1)}); \tag{9.9.37b}$$

(iii) Положим

$$P = L^n = \sum_s \zeta^s p_s(n). \tag{9.9.38}$$

Покажите, что

$$\partial_P(u) = \varphi_2(p_{-1}(n)) - \Delta^{-1}\varphi_1(p_{-1}(n)), \tag{9.9.39a}$$

$$\partial_P(v) = \varphi_1(p_{-1}(n)) - \varphi_2(p_{-1}(n)). \tag{9.9.39b}$$

Упражнение 9.9.40. Рассмотрим собственно случай КП, при $N = 1$:

$$L = \zeta + \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{-i} q_i, \tag{9.9.41}$$

$$F_1 = \zeta + u, \quad F_2 = 1 + \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{-i-1} v_i. \tag{9.9.42}$$

(i) Покажите, что

$$\varphi_1(q_0) = u + v_0, \tag{9.9.43a}$$

$$\varphi_1(q_{i+1}) = u^{(i+1)} v_i + v_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.9.43b}$$

$$\varphi_2(q_0) = u + v_0^{(-1)}, \tag{9.9.44a}$$

$$\varphi_2(q_{i+1}) = v_i u + v_{i+1}^{(-1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+; \tag{9.9.44b}$$

(ii) Покажите, что первый факторизованный поток, при $P = L$, имеет вид:

$$\partial_t(u) = v_0 u - u v_0^{(-1)}, \tag{9.9.45a}$$

$$\partial_t(v_i) = (1 - \Delta^{-1})(v_{i+1}) + (u^{(i+1)} + v_0^{(i)})v_i - v_i(u + v_0), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{9.9.45b}$$

Упражнение 9.9.46. Покажите, что кольцо частных, порожденное образами $\varphi_1(C_q), \ldots, \varphi_n(C_q)$, содержит кольцо C_v.

Глава 10

Некоммутативное дифференциально-разностное исчисление

В этой главе развивается вариационное исчисление, подходящее для дискретных интегрируемых иерархий из Главы 9. Соответствующий гамильтонов формализм будет построен в следующей главе.

10.1 Вариационный язык

В этом разделе развивается дифференциально-разностное вариационное исчисление, по образцу чисто дифференциального исчисления из §4.2.

Так как Часть B посвящена чисто дискретной (= разностной) точке зрения, читатель может быть озадачен “дифференциально-разностной” комбинацией в постановке задачи. Зачем утруждать себя более общим случаем, если нам нужна лишь чисто разностная версия? Ответ интересен и вовсе не очевиден: не важно, с чего начинать, с чисто разностной или дифференциально-разностной задачи, но когда мы переходим к построению вариационного комплекса, нам все равно приходится добавлять *одну новую, дифференциальную* степень свободы и заканчивать в дифференциально-разностной схеме.

Мы будем следовать параллельно §4.2, вставляя по дороге дискретные индексы.

Пусть G — дискретная группа. (Случай $G = \mathbb{Z}$ достаточен для большинства приложений.) Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, на котором действие G является автоморфизмом, и на котором действуют также m коммутирующих дифференцирований $\partial_1, \ldots, \partial_m$, и пусть эти два различных типа действий коммутируют друг с другом:

$$\widehat{g}\partial_s = \partial_s\widehat{g}, \quad \forall\, g \in G, \quad 1 \leqslant s \leqslant m. \tag{10.1.1}$$

(В предыдущей Главе было $\mathbb{Z} \ni s \leftrightarrow \widehat{s} = e^{\varepsilon s\partial/\partial x}$.)

Пусть $\mathcal{I}$ — множество индексов, и пусть $C = C(q) = C_q = R\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle$, $i \in \mathcal{I}$, $g \in G$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^m$, есть ассоциативная алгебра над R, свободно порожденная над R генераторами $q_i^{(g|\nu)}$. Мы сделаем C дифференциально-разностным кольцом, продолжая на C действие G автоморфизмами, и дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_m$, по правилам

$$\widehat{g}(q_i^{(h|\nu)}) = q_i^{(gh|\nu)}, \quad \partial_s(q_i^{(g|\nu)}) = q_i^{(q|\nu+1_s)}, \quad g, h \in G, \quad \nu \in \mathbb{Z}_+^m. \tag{10.1.2}$$

Если $e \in G$ — единичный элемент G, будем обозначать

$$q_i = q_i^{(e|0)}.$$

Таким образом,

$$q_i^{(g|\nu)} = \widehat{g}\partial^\nu(q_i). \tag{10.1.3}$$

Обозначим через $\mathrm{Der}(C)$ алгебру Ли дифференцирований C над R. Для любого $Z \in \mathrm{Der}(C)$ имеем

$$Z = \sum Z_i^{g|\nu} \frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}, \quad Z_i^{g|\nu} = Z(q_i^{(g|\nu)}), \tag{10.1.4a}$$

где $z\dfrac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}$ является дифференцированием C, действующее на генераторы C по правилу

$$\left(z\frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\right)\left(q_j^{(h|\sigma)}\right) = \delta_{jg\nu}^{ih\sigma} z. \tag{10.1.4b}$$

Следует помнить, что, вообще говоря,

$$\left(z\frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\right)(H) \neq z\frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}, \quad H \in C. \tag{10.1.5}$$

Обозначим $D^{ev}(C)$ подалгебру Ли в $\mathrm{Der}(C)$, состоящую из элементов, коммутирующих с действием G и ∂_s на C :

$$X \in D^{ev}(C) \quad \Leftrightarrow \quad X = \sum \widehat{g}\partial^\nu(X_i)\frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}, \quad X_i = X(q_i). \tag{10.1.6}$$

C–бимодуль дифференциальных форм $\Omega^1(C)$ состоит из выражений

$$\left\{\omega = \sum \psi_i^{g|\nu} dq_i^{(g|\nu)} \varphi_i^{g|\nu} \mid \text{конечные суммы; } \psi_i^{\cdots}, \varphi_i^{\cdots} \in C\right\}. \tag{10.1.7}$$

Действия $\mathrm{Der}(C)$ и ∂_s продолжаются на $\Omega^1(C)$, как и раньше: если $Z \in \mathrm{Der}(C)$ или $Z = \partial_s$, то

$$Z(\psi\omega\varphi) = Z(\psi)\omega\varphi + \psi Z(\omega)\varphi + \psi\omega Z(\varphi), \quad \omega \in \Omega^1(C), \quad \psi, \varphi \in C, \tag{10.1.8a}$$

$$Z(dq_i^{(g|\nu)}) = d(Z(q_i^{(g|\nu)})), \tag{10.1.8b}$$

где $d : C \to \Omega^1(C)$ — универсальное *дифференцирование* (над R), определенное на генераторах C по правилу

$$d(q_i^{(g|\nu)}) = dq_i^{(g|\nu)}. \tag{10.1.9}$$

Действие G на $\Omega^1(C)$ определяется формулой

$$\widehat{h}(\psi dq_i^{(g|\nu)}\varphi) = \widehat{h}(\psi)dq_i^{(hg|\nu)}\widehat{h}(\varphi). \tag{10.1.10}$$

Упражнение 10.1.11. Покажите, что:
(i) действия ∂_s на C и $\Omega^1(C)$ по прежнему коммутируют;
(ii) формула (10.1.1) остается верной на C и $\Omega^1(C)$;
(iii) дифференциал d коммутирует с действием G и ∂_s;
(i^4) $D^{ev}(C)$ коммутирует с действием G и ∂_s на $\Omega^1(C)$;
(i^5) $\mathrm{Der}(C)$ и d коммутируют.

Рассмотрим естественное спаривание $\langle\ ,\ \rangle$ между $\mathrm{Der}(C)$ и $\Omega^1(C)$:

$$\langle z\frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}},\ \psi dq_j^{(h|\sigma)}\varphi\rangle = \psi z\varphi\delta_{jg\nu}^{ih\sigma}. \tag{10.1.12}$$

Упражнение 10.1.13. Покажите, что

$$Z(H) = \langle Z, d(H)\rangle, \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C), \quad \forall\ H \in C. \tag{10.1.14}$$

Определим тенерь тривиальные элементы в C и $\Omega^1(C)$. Положим

$$\mathcal{T} = \sum_s \mathrm{Im}\,\partial_s + \sum_{g\in G} \mathrm{Im}(\widehat{g} - \widehat{e}) \quad (\text{в } C \text{ и } \Omega^1(C)). \tag{10.1.15}$$

Будем писать $H \sim 0$, если $H \in \mathcal{T} \subset C$, и $\omega \sim 0$, если $\omega \in \mathcal{T} \subset \Omega^1(C)$. Далее, пусть

$$\mathrm{Com}(C) = [C, C] = \Big\{\sum_\ell [\psi_\ell, \varphi_\ell] | \psi_\ell, \varphi_\ell \in C; \text{конечные суммы}\Big\}, \tag{10.1.16a}$$

$$\mathrm{Com}(\Omega^1(C)) = \Big\{\sum_\ell (\psi_\ell\omega_\ell - \omega_\ell\psi_\ell) | \psi_\ell \in C,\ \omega_\ell \in \Omega^1(C); \text{конечные суммы}\Big\}, \tag{10.1.16b}$$

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^+(C) = \mathcal{T}_C^+ = \mathcal{T} + \mathrm{Com}(C) \quad \text{в} \quad C, \tag{10.1.17a}$$

$$\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^+(\Omega^1(C)) = \mathcal{T}_{\Omega^1(C)}^+ = \mathcal{T} + \mathrm{Com}(\Omega^1(C)) \quad \text{в} \quad \Omega^1(C). \tag{10.1.17b}$$

Элементы $\mathcal{T}^+$ называются *тривиальными*; будем писать $(\cdot) \approx 0$ вместо $(\cdot) \in \mathcal{T}^+$.

Замечание 10.1.18. Чтобы не увеличивать объем книги, мы везде избегаем супер- и суперсимметричных аспектов, таких вещей, как иерархия супер-КП, и т.п.. Если бы мы работали в градуированной ситуации, пришлось бы вводить различные второстепенные изменения (в "знаках"). Например, в формуле (10.1.16a), коммутатор $[\psi_\ell, \varphi_\ell] = \psi_\ell\varphi_\ell - \varphi_\ell\psi_\ell$ пришлось бы заменить на градуированный

$$[\psi_\ell, \varphi_\ell] = \psi_\ell\varphi_\ell - (\widetilde{\psi}_\ell, \widetilde{\varphi}_\ell)\varphi_\ell\psi_\ell, \tag{10.1.19a}$$

и в формуле (10.1.16b) коммутатор $\psi_\ell\omega_\ell - \omega_\ell\psi_\ell$ заменять на выражение

$$\psi_\ell\omega_\ell - (\widetilde{\psi}_\ell, \widetilde{\omega}_\ell)\omega_\ell\psi_\ell, \tag{10.1.19b}$$

где $\widetilde{(\cdot)}$ есть градуировка $(\cdot)$, а $(\cdot, \cdot\cdot)$ есть функция "знака" [в случае $\mathbb{Z}_2$-градуировки равная $(-1)^{\widetilde{(\cdot)}\widetilde{(\cdot\cdot)}}$]. Если, вдобавок, дифференцирования $\partial_1, \ldots, \partial_m$ тоже градуированы, то надлежащие знаки следует расставить во всех предыдущих формулах и определениях. (В абелевом случае это сделано в [Кпр 1987]). Аналогичные замечания применимы и далее.

Упражнение 10.1.20. Покажите, что

$$d(\mathcal{T}^+(C)) \subset \mathcal{T}^+(\Omega^1(C)), \tag{10.1.21}$$

$$Z(\mathrm{Com}(\cdot)) \subset \mathrm{Com}(\cdot), \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C), \quad (\cdot) = C \quad \text{или} \quad \Omega^1(C), \tag{10.1.22}$$

$$X(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, \quad X(\mathcal{T}^+) \subset \mathcal{T}^+, \quad \forall\ X \in D^{ev}(C), \tag{10.1.23}$$

$$\langle \mathrm{Der}(C), \mathrm{Com}(\Omega^1(C))\rangle \subset \mathrm{Com}(C), \tag{10.1.24}$$

$$\langle D^{ev}(C), \mathcal{T}(\Omega^1(C))\rangle \subset \mathcal{T}(C), \tag{10.1.25}$$

$$\langle D^{ev}(C), \mathcal{T}^+(\Omega^1(C))\rangle \subset \mathcal{T}^+(C). \tag{10.1.26}$$

|Подсказка к (10.1.25): покажите, что

$$\langle X, \partial_s(\omega)\rangle = \partial_s(\langle X, \omega\rangle), \quad \langle X, \widehat{g}(\omega)\rangle = \widehat{g}(\langle X, \omega\rangle),\ \forall X \in D^{ev}(C),\ \forall \omega \in \Omega^1(C).\ ] \tag{10.1.27}$$

Положим

$$\Omega_0^1(C) = \Big\{\sum \psi_i dq_i \varphi_i \mid \text{конечные суммы};\ \psi_i, \varphi_i \in C\Big\}, \tag{10.1.28}$$

$$\Omega^{1+}(C) = \Big\{\sum dq_i^{(g|\nu)} \varphi_i^{g|\nu} \mid \text{конечные суммы};\ \varphi_i^{g|\nu} \in C\Big\}, \tag{10.1.29a}$$

$$\Omega_0^{1+}(C) = \Big\{\sum dq_i \varphi_i \mid \text{конечные суммы};\ \varphi_i \in C\Big\}. \tag{10.1.29b}$$

Пусть Flip : $\Omega^1(C) \to \Omega^{1+}(C)$ обозначает следующую проекцию:

$$\mathrm{Flip}(\psi dq_i^{(g|\nu)} \varphi) = dq_i^{(g|\nu)} \varphi \psi. \tag{10.1.30}$$

По определению,

$$\mathrm{Flip}(\Omega_0^1(C)) \subset \Omega_0^{1+}(C), \tag{10.1.31}$$

$$(\mathrm{Flip} - 1)(\Omega^1(C)) \subset \mathrm{Com}(\Omega^1(C)). \tag{10.1.32}$$

Пусть $\widehat{\delta} : \Omega^1(C) \to \Omega_0^1(C)$ обозначает проекцию

$$\widehat{\delta}(\psi dq_i^{(g|\nu)} \varphi) = \sum_{\sigma \subset \nu} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\sigma} \psi^{(g^{-1}|\sigma)} dq_i \varphi^{(g^{-1}|\nu - \sigma)}, \tag{10.1.33}$$

являющуюся алгебраической версией “интегрирования по частям”.

Упражнение 10.1.34. Покажите, что

$$\widehat{\delta}(\omega) \sim \omega, \quad \forall\ \omega \in \Omega^1(C), \tag{10.1.35}$$

$$(\langle Z, \mathrm{Flip}(\omega)\rangle - \langle Z, \omega\rangle) \in \mathrm{Com}(\Omega^1(C)), \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C). \tag{10.1.36}$$

Далее, введем отображение $d^+ : C \to \Omega^{1+}(C)$,

$$d^+ = \mathrm{Flip} \circ d. \tag{10.1.37}$$

Для любого $H \in C$, определим элементы $\dfrac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}} \in C$ посредством соотношения

$$d^+(H) = \sum dq_i^{(g|\nu)} \frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}, \tag{10.1.38}$$

так что

$$\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}, \mathrm{Flip}\, d(H)\Big\rangle. \tag{10.1.39}$$

Наконец, вариационные производные $\dfrac{\delta H}{\delta q_i}$ определяются по правилу

$$\delta(H) = \sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i}, \quad \forall\ H \in C. \tag{10.1.40}$$

$$\delta = \widehat{\delta} d^+ = \widehat{\delta}\, \mathrm{Flip} \circ d : C \to \Omega_0^{1+}(C). \tag{10.1.41}$$

Имеем:

$$\sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i} = \delta(H) = \widehat{\delta} d^+(H) \overset{(10.1.38)}{=}$$
$$= \widehat{\delta}\Big(\sum dq_i^{(g|\nu)} \frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\Big) = \sum dq_i \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu \left(\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\right), \tag{10.1.42}$$

откуда

$$\frac{\delta H}{\delta q_i} = \sum \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu \left(\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\right). \tag{10.1.43}$$

Операция δ называется *оператором Эйлера-Лагранжа.*

Утверждение 10.1.44.

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\mathcal{T}^+(\Omega^1(C))) = \{0\}. \tag{10.1.45}$$

Доказательство. 1) Покажем, что

$$\mathrm{Flip}(\mathrm{Com}(\Omega^1(C))) = \{0\} \tag{10.1.46}$$

путем проверки формулы

$$\mathrm{Flip} \circ \mathrm{ad}_\chi = 0, \quad \forall\, \chi \in C. \tag{10.1.47}$$

Действительно, обозначив $q = q_i^{(g|\nu)}$, имеем

$$\mathrm{Flip} \circ \mathrm{ad}_\chi(\psi dq\varphi) = \mathrm{Flip}(\chi\psi dq\varphi - \psi dq\varphi\chi) = dq\varphi(\chi\psi) - dq(\varphi\chi)\psi = 0;$$

2) Далее, формула

$$\mathrm{Flip} \circ \widehat{g} = \widehat{g} \circ \mathrm{Flip}, \quad \forall\, g \in G, \tag{10.1.48a}$$

немедленно следует из определений (10.1.10) и (10.1.30);

3) Далее, проверим формулу

$$\mathrm{Flip} \circ \partial_s = \partial_s \,\mathrm{Flip}\,. \tag{10.1.48b}$$

Имеем,

$$\mathrm{Flip} \circ \partial_s(\psi dq\varphi) = \mathrm{Flip}[\partial_s(\psi)dq\varphi + \psi\partial_s(dq)\varphi + \psi dq\partial_s(\varphi)] =$$
$$= dq\varphi\partial_s(\psi) + \partial_s(dq)\varphi\psi + dq\partial_s(\varphi)\psi = \partial_s(dq\varphi\psi) = \partial_s \,\mathrm{Flip}(\psi dq\varphi);$$

4) Наконец, из формул (10.1.48) следует, что

$$\mathrm{Flip}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}, \tag{10.1.49}$$

и оставшаяся часть формулы (10.1.45) следует из Упражнения 10.1.50. ▮

Упражнение 10.1.50. Покажите, что

$$\widehat{\delta}(\mathcal{T}) = \{0\}. \tag{10.1.51}$$

Следствие 10.1.52. Если $H \in C$ тривиален, то

$$\frac{\delta H}{\delta q} = 0.$$

Доказательство. Если $H \in \mathcal{T}^+(C)$, то $d(H) \in \mathcal{T}^+(\Omega^1(C))$ по формуле (10.1.21). Следовательно, $\delta(H) = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\, d(\mathcal{T}) = 0$ по формуле (10.1.45). ∎

Таким образом, вариационная производная убивает тривиальные лагранжианы.

Упражнение 10.1.53. (Лемма Дюбуа-Реймона)

$$\{\varphi \in C \quad \& \quad C\varphi \approx 0\} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0. \tag{10.1.54}$$

Упражнение 10.1.55. Выведите из формулы (10.1.54), что

$$\{\omega \in \Omega^1_0(C) \quad \& \quad \langle D^{ev}(C), \omega\rangle \approx 0\} \quad \Rightarrow \quad \omega = 0. \tag{10.1.56}$$

До сих пор, вариационные производные не были связаны с какими-либо "вариациями", то есть, элементами из $D^{ev}(C)$.

Теорема 10.1.57. (i) Если $\omega \in \Omega^{1+}_0(C)$ и $\omega \approx 0$, то $\omega = 0$;
(ii) Если $\omega \in \Omega^1(C)$ и $\omega \approx 0$, то $\langle D^{ev}(C), \omega\rangle \approx 0$;
(iii) Если $\omega \in \Omega^1(C)$ и $\langle D^{ev}(C), \omega\rangle \approx 0$, то $\omega \approx 0$;
(i^4) Проекция $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip} : \Omega^1(C) \to \Omega^{1+}_0(C)$ однозначно определяется соотношением

$$\langle X, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega)\rangle \approx \langle X, \omega\rangle, \quad \forall\, X \in D^{ev}(C);$$

(i^5) $\mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}) = \mathcal{T}^+(\Omega^1(C))$.

Доказательство. (ii) Это формула (10.1.26);
(i) Если $\omega \approx 0$, то $\langle D^{ev}(C), \omega\rangle \approx 0$ в силу (ii). Тогда $\omega = 0$ согласно (10.1.56);
(i^4) Однозначность следует из формулы (10.1.56). Существование следует из формул (10.1.32, 35), согласно которым

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) \approx \omega, \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(C), \tag{10.1.58}$$

и из (ii);
(i^5) Если $\omega \in \mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip})$, то есть $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$, то, в силу (10.1.58), $\omega \approx 0$. Таким образом, $\mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}) \subset \mathcal{T}^+$. Наоборот, если $\omega \in \mathcal{T}^+$, то есть $\omega \approx 0$, то, по той же формуле (10.1.58), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) \approx 0$. Следовательно, в силу (i), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$. Таким образом, $\mathcal{T}^+ \subset \mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip})$;
(iii) В силу (10.1.58) имеем $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) - \omega \approx 0$, $\forall\ \omega \in \Omega^1(C)$. Следовательно, в силу (ii), $\langle D^{ev}(C), \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) - \omega\rangle \approx 0$. Таким образом, если $\langle D^{ev}(C), \omega\rangle \approx 0$, то $\langle D^{ev}(C), \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega)\rangle \approx 0$. Следовательно, в силу (10.1.56), $\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$. Отсюда $\omega \approx \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(\omega) = 0$. ∎

Следствие 10.1.59. (Формула для первой вариации) Зафиксируем $H \in C$. Тогда

$$X(H) \approx \sum_i X_i \frac{\delta H}{\delta q_i} = \mathbf{X}^t \frac{\delta H}{\delta \mathbf{q}}, \quad \forall\, X \in D^{ev}(C), \quad X_i = X(q_i), \tag{10.1.60}$$

и это соотношение *однозначно определяет* вектор $\dfrac{\delta H}{\delta \mathbf{q}}$.

Доказательство. Однозначность следует из формулы (10.1.54). Далее,

$$X(H) \overset{(10.1.14)}{=} \langle X, d(H)\rangle \overset{(10.1.58),\ \text{Т. } 10.1.57(\text{ii})}{\approx}$$
$$\approx \langle X, \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\, d(H)\rangle \overset{(10.1.41)}{=} \langle X, \delta(H)\rangle = \langle X, \sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i}\rangle = \sum X_i \frac{\delta H}{\delta q_i}. \qquad \blacksquare$$

Упражнение 10.1.61. Покажите, что

$$d(H) \approx dq^t \frac{\delta H}{\delta q}, \quad \forall\, H \in C, \tag{10.1.62}$$

и это равенство однозначно определяет вектор $\frac{\delta H}{\delta q}$.

> Мне все равно, на каком языке поют оперу, при условии, что это язык, которого я не понимаю.
>
> Сэр Эдвард Эплтон (1955)

10.2 Естественные свойства вариационных производных

Этот раздел является дифференциально-разностной версией чисто дифференциального §4.3.

Пусть $C_1 = C(u) = R(u_\eta^{(g|\nu)})$ — другая дифференциально-разностная алгебра. (Дифференциально-разностный) гомоморфизм $\Phi : C \to C_1$ — это гомоморфизм над R, коммутирующий с действиями G и ∂_s. Таким образом, любой такой гомоморфизм однозначно определен вектором

$$\Phi = (\Phi_i), \quad \Phi_i = \Phi(q_i) \in C_1 : \tag{10.2.1}$$

$$\Phi(q_i^{(g|\nu)}) = \Phi(\widehat{g}\partial^\nu(q_i)) = \widehat{g}\partial^\nu(\Phi(q_i)) = \widehat{g}\partial^\nu(\Phi_i). \tag{10.2.2}$$

Любой такой Φ можно однозначно продолжить до гомоморфизма $\Phi : \Omega^1(C) \to \Omega^1(C_1)$, требуя, чтобы он коммутировал с дифференциалом d :

$$\Phi d_C = d_{C_1}\Phi : C \to \Omega^1(C_1), \tag{10.2.3}$$

так что

$$\Phi(\psi d\boldsymbol{q}_i^{(g|\nu)}\varphi) = \Phi(\psi) d(\widehat{g}\partial^\nu(\Phi_i))\Phi(\varphi). \tag{10.2.4}$$

Для любого $H \in C$, производная Фреше $D(H)$ является вектором из операторов, определяемым соотношением

$$X(H) = \sum_i \frac{DH}{Dq_i}(X_i) = \frac{DH}{D\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{X}) = D(H)(\boldsymbol{X}), \quad \forall\, X \in D^{ev}(C). \tag{10.2.5}$$

Чтобы найти формулу для производной Фреше $D(H)$, введем операторы $\dfrac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}} \in$ $Op_0(C)$, определенные по правилу

$$\frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(\chi) = \Big(\chi \frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\Big)(H); \tag{10.2.6}$$

напомним, что $Op_0(C)$ есть кольцо

$$Op_0(C) = \big\{\sum_s \widehat{L}_{\psi(s)}\widehat{R}_{\varphi(s)} \mid \text{конечные суммы; } \psi(s), \varphi(s) \in C\big\}. \tag{10.2.7}$$

Далее,

$$X(H) = \Big(\sum \widehat{g}\partial^\nu(X_i)\frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\Big)(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(\widehat{g}\partial^\nu(X_i)) = \sum_i \frac{DH}{Dq_i}(X_i) \quad \Rightarrow \tag{10.2.8}$$

$$\frac{DH}{Dq_i} = \sum_{g,\nu} \frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\widehat{g}\partial^\nu. \tag{10.2.9}$$

Итак, $\dfrac{DH}{Dq_i} \in Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu|$

Упражнение 10.2.10. Покажите, что:

(i) $$\frac{DH}{Dq_i}(\chi) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Big(H\big|_{q_i \mapsto q_i + \varepsilon\chi}\Big); \tag{10.2.11a}$$

(ii) $$\frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(\chi) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\Big(H\big|_{q_i^{(g|\nu)} \mapsto q_i^{(g|\nu)} + \varepsilon\chi}\Big); \tag{10.2.11b}$$

(iii) “частные производные” $\dfrac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}} \in C$ и $\dfrac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}} \in Op_0(C)$ связаны формулой

$$\frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(\chi) \equiv \chi\frac{\partial^+ H}{\partial q_i^{(g|\nu)}} \quad (\text{mod } \operatorname{Com}(C)), \quad \forall\, \chi \in C. \tag{10.2.12}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{R} \in Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu]$. Его *сопряженный*, $\mathcal{R}^\dagger \in Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu]$, определен посредством соотношения

$$x\mathcal{R}(y) \approx \mathcal{R}^\dagger(x)y, \quad \forall\, x, y \in C', \tag{10.2.13}$$

для произвольного расширения $C' \supset C$. Сопряженный оператор $\mathcal{R}^\dagger$ существует и единствен: единственность вытекает из формулы (10.1.54), и существование из следующего вычисления, в котором в качестве $\mathcal{R}$ берется $\widehat{L}_\psi\widehat{R}_\varphi\widehat{g}\partial^\sigma$:

$$x\mathcal{R}(y) = x\widehat{L}_\psi\widehat{R}_\varphi\widehat{g}\partial^\sigma(y) = x\psi y^{(g|\sigma)}\varphi \approx \varphi x\psi y^{(g|\sigma)} \sim$$

$$\sim [\widehat{g}^{-1}(-\partial)^\sigma(\varphi x\psi)]y = [(\widehat{g}^{-1}(-\partial)^\sigma\widehat{L}_\varphi\widehat{R}_\psi)(x)](y) \quad \Rightarrow \tag{10.2.14}$$

$$(\widehat{L}_\psi\widehat{R}_\varphi\widehat{g}\partial^\sigma)^\dagger = \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\sigma\widehat{L}_\varphi\widehat{R}_\psi. \tag{10.2.15}$$

Если $\mathcal{R}$ матричный, а не скалярный оператор, $\mathcal{R} \in \operatorname{Mat}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu])$, то определение (10.2.13) сопряженного оператора $\mathcal{R}^\dagger$ заменяется определением

$$\boldsymbol{x}^t\mathcal{R}(\boldsymbol{y}) \approx [\mathcal{R}^\dagger(\boldsymbol{x})]^t\boldsymbol{y}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in C'^{(\cdot)}, \quad \forall\, \boldsymbol{y} \in C'^{(\cdot\cdot)}, \tag{10.2.16}$$

и те же рассуждения, что и выше, доказывают единственность и существование сопряженного, а также дают формулу для матричных элементов

$$(\mathcal{R}^\dagger)_{\alpha\beta} = (\mathcal{R}_{\beta\alpha})^\dagger. \tag{10.2.17}$$

Лемма 10.2.18.

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(d(H)\chi) = \sum dq_i \left(\frac{DH}{Dq_i}\right)^\dagger (\chi), \quad \forall\ H \in C, \quad \forall\ \chi \in C'. \tag{10.2.19}$$

Доказательство. Из формулы (10.2.11b) следует, что

$$d(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(dq_i^{(g|\nu)}) \overset{(10.2.9)}{=} \sum \frac{DH}{Dq_i}(dq_i) \quad \Rightarrow \tag{10.2.20}$$

$$d(H)\chi = \left[\sum \frac{DH}{Dq_i}(dq_i)\right]\chi \approx \sum dq_i \left(\frac{DH}{Dq_i}\right)^\dagger (\chi). \tag{10.2.21}$$

Следовательно, по формуле (10.1.45),

$$\widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}(d(H)\chi) = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}\left[\sum dq_i \left(\frac{DH}{Dq_i}\right)^\dagger (\chi)\right] = \sum dq_i \left(\frac{DH}{Dq_i}\right)^\dagger (\chi),$$

как и требовалось; во втором равенстве использовался тот факт, что и $\widehat{\delta}$ и Flip действуют на $\Omega_0^{1+}(C)$ тождественно. ∎

Обозначим

$$\widehat{\delta}^+ = \widehat{\delta}\,\mathrm{Flip}, \tag{10.2.22}$$

и будем использовать значок $_1$ для различения операций в C_1 и C.

Лемма 10.2.23.

$$\widehat{\delta}_1^+ \Phi \widehat{\delta}^+ = \widehat{\delta}_1^+ \Phi : \quad \Omega^1(C) \to \Omega_0^{1+}(C_1). \tag{10.2.24}$$

Доказательство. Нам надо показать, что

$$\widehat{\delta}_1^+ \Phi(\widehat{\delta}^+ - 1) = 0. \tag{10.2.25}$$

Выберем $\omega \in \Omega^1(C)$. Согласно формуле (10.1.58), $(\widehat{\delta}^+ - 1)(\omega) \approx 0$. Так как Φ коммутирует с G и ∂_s, то

$$\Phi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_1, \quad \Phi(Com(\cdot)) \subset\ Com(\cdot)_1, \quad \Phi(\mathcal{T}^+) \subset \mathcal{T}_1^+. \tag{10.2.26}$$

Следовательно, $\Phi(\widehat{\delta}^+ - 1)(\omega)) \approx 0$. Отсюда, по формуле (10.1.45), $\widehat{\delta}_1^+ \Phi(\widehat{\delta}^+ - 1)(\omega) = 0$. ∎

Теперь мы можем получить основиой результат этого раздела.

Теорема 10.2.27. Для любого $H \in C$,

$$\frac{\delta \Phi(H)}{\delta \boldsymbol{u}} = D(\Phi)^\dagger \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = \sum_i D(\Phi_i)^\dagger \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_i}\right). \tag{10.2.28}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_\eta du_\eta \frac{\delta\Phi(H)}{\delta u_\eta} = \delta_1\Phi(H) = \widehat{\delta}_1^+ d\Phi(H) \overset{(10.2.3)}{=} \widehat{\delta}_1^+ \Phi d(H) \overset{(10.2.24)}{=}$$

$$= \widehat{\delta}_1^+ \Phi \widehat{\delta}^+ d(H) = \widehat{\delta}_1^+ \Phi \delta(H) = \widehat{\delta}_1^+ \Phi\Big(\sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i}\Big) = \widehat{\delta}_1^+ \Big[\sum d(\Phi_i)\Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_i}\Big)\Big] \overset{(10.2.19)}{=}$$

$$= \sum_\eta du_\eta \sum_i \Big(\frac{D\Phi_i}{Du_\eta}\Big)^\dagger \Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_i}\Big) \quad \Rightarrow \tag{10.2.29}$$

$$\frac{\delta\Phi(H)}{\delta u_\eta} = \sum_i \Big(\frac{D\Phi_i}{Du_\eta}\Big)^\dagger \Phi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_i}\Big), \tag{10.2.30}$$

что есть формула (10.2.28) в компонентах. ▮

10.3 Вариационный комплекс

В этом разделе мы вычисляем образ и ядро оператора Эйлера-Лагранжа δ. Изложение параллельно §4.4.

Пусть $\partial_{m+1} : R \to 0$ новое дифференцирование, действующее тривиально на R. Пусть $\bar{C} = R\langle q_i^{(g|\bar{\nu})}\rangle$, $i \in \mathcal{I}$, $g \in G$, $\bar{\nu} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$, — новая дифференциально-разностная алгебра. Вложим C в $\bar{C}$, отождествляя $q_i^{(g|\nu)}$ с $q_i^{(g|\nu|0)}$, в представлении $\mathbb{Z}_+^{m+1} \ni \bar{\nu} = (\nu|n) \in \mathbb{Z}_+^m \oplus \mathbb{Z}_+$. Пусть $\tau : \Omega^1(C) \to \bar{C}$ есть следующий гомоморфизм C–бимодулей:

$$\tau(\psi dq_i^{(g|\nu)}\varphi) = \psi q_i^{(g|\nu|1)}\varphi. \tag{10.3.1}$$

Очевидно,

$$\tau(Com(\Omega^1(C))) \subset Com(\bar{C}), \tag{10.3.2}$$

$$\tau\partial_s = \partial_s\tau, \quad 1 \leqslant s \leqslant m; \quad \tau\widehat{g} = \widehat{g}\tau, \quad \forall\, g \in G \quad \Rightarrow \tag{10.3.3}$$

$$\tau(\mathcal{T}(\Omega^1(C))) \subset \mathcal{T}(\bar{C}), \tag{10.3.4}$$

$$\tau(\mathcal{T}^+(\Omega^1(C))) \subset \mathcal{T}^+(\bar{C}). \tag{10.3.5}$$

Лемма 10.3.6.

$$\tau d(H) = \partial_{m+1}(H), \quad \forall\, H \in C. \tag{10.3.7}$$

Доказательство. Так как ∂_{m+1} действует тривиально на R, то ∂_{m+1} является эволюционным дифференцированием в $\bar{C}$, с

$$\partial_{m+1}(q) = q^{(e|0|1)}. \tag{10.3.8}$$

Следовательно,

$$\partial_{m+1}(H) = \Big(\sum q_i^{(g|\nu|1)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\Big)(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(q_i^{(g|\nu|1)}) =$$

$$= \tau\Big[\sum \frac{\partial H}{\partial q_i^{(g|\nu)}}(dq_i^{(g|\nu)})\Big] \overset{(10.2.20)}{=} \tau d(H).$$

▮

Чтобы различать вариационные онерации в $\bar{C}$ и C, будем ставить черту над операциими в $\bar{C}$: $\bar{\delta}$, и т.н..

Теорема 10.3.9. Последовательность

$$C \xrightarrow{\delta} \Omega_0^{1+}(C) \xrightarrow{\bar{\delta}\tau} \Omega_0^1(\bar{C}) \qquad (10.3.10)$$

явлиется комнлексом, то есть

$$\bar{\delta}\tau\delta = 0. \qquad (10.3.11)$$

Доказательство. Выберем $H \in C$. Тогда

$$\delta(H) = \widehat{\delta}^+ d(H) \overset{(10.1.58)}{\approx} d(H) \quad \Rightarrow \quad \tau\delta(H) \overset{(10.3.5)}{\approx} \tau d(H) \overset{(10.3.7)}{=} \partial_{m+1}(H) \sim 0.$$

Следовательно, по формуле (10.1.45), $\bar{\delta}\tau\delta(H) = 0$. ∎

Перепишем формулу (10.3.11) в компоиентах. Для этого, отождествнм $\Omega_0^{1+}(C)$ с $C^{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N} = |\mathcal{I}|$:

$$\mathcal{V} = \sum dq_i \mathcal{V}_i \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{V}' = (\mathcal{V}_i). \qquad (10.3.12)$$

Теорема 10.3.13. Для $\mathcal{V} \in \Omega_0^{1+}(C)$ равенство $\bar{\delta}\tau(\mathcal{V}) = 0$ эквивалентно равенству

$$D(\mathcal{V}') = D(\mathcal{V}')^\dagger. \qquad (10.3.14)$$

Доказательство. Имеем

$$\bar{\delta}\tau(\mathcal{V}) = \bar{\delta}\tau\Big(\sum_i dq_i \mathcal{V}_i\Big) = \bar{\delta}\Big(\sum q_i^{(e|0|1)} \mathcal{V}_i\Big) = \sum_j dq_j \frac{\delta}{\delta q_j}\Big(\sum_i q_i^{(e|0|1)} \mathcal{V}_i\Big) =$$

$$= \sum_j dq_j \sum_{g\nu n i} \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu(-\partial_{m+1})^n \frac{\partial^+}{\partial q_j^{(g|\nu|n)}}(q_i^{(e|0|1)} \mathcal{V}_i) =$$

$$= \sum_j dq_j \Big[\sum_{g\nu i} \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu \frac{\partial^+}{\partial q_j^{(g|\nu)}}(q_i^{(e|0|1)} \mathcal{V}_i) - \partial_{m+1}(\mathcal{V}_j)\Big].$$

Следовательно, равенство $\bar{\delta}\tau(\mathcal{V}) = 0$ эквивалентно системе равенств

$$\partial_{m+1}(\mathcal{V}_j) = \sum_{g\nu} \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu \frac{\partial^+}{\partial q_j^{(g|\nu)}}\Big(\sum_i q_i^{(e|0|1)} \mathcal{V}_i\Big), \quad \forall\, j \in \mathcal{I}. \qquad (10.3.15)$$

Так как ∂_{m+1} эволюционное дифференцированне, то из формул (10.2.5) и (10.3.8) следует

$$\partial_{m+1}(\mathcal{V}_j) = \sum_i \frac{D\mathcal{V}_j}{Dq_i}(q_i^{(e|0|1)}). \qquad (10.3.16)$$

Чтобы нреобразовать нравую часть равенства (10.3.15), нам попадобятся следующие две формулы:

$$\frac{\partial^+ Com(C')}{\partial q_j^{(g|\nu)}} = 0, \qquad (10.3.17)$$

$$\widehat{\delta}(\omega) = \sum dq_j \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_j^{(g|\nu)}}, \omega \Big\rangle, \quad \forall\, \omega \in \Omega^{1+}(C). \qquad (10.3.18)$$

Вторая из них очевидна. Чтобы доказать первую, применим Определение (10.1.39) и получим

$$\frac{\partial^{+}\operatorname{ad}_{\chi}(H)}{\partial q_j^{(g|\nu)}} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}, \operatorname{Flip} d(\operatorname{ad}_{\chi}(H))\Big\rangle = \Big\langle \frac{\partial}{\partial q_j^{(g|\nu)}}, \operatorname{Flip}(\operatorname{ad}_{\chi} d(H) - \operatorname{ad}_{H} d(\chi))\Big\rangle,$$

что равно нулю благодаря формуле (10.1.47).

Далее,

$$\sum_j dq_j\{\text{правая часть (10.3.15)}\} \overset{(10.3.17),\,(10.1.39)}{=}$$

$$= \sum dq_j \sum \widehat{g}^{-1}(-\partial)^{\nu}\Big\langle \frac{\partial}{\partial q_j^{(g|\nu)}}, \operatorname{Flip} d(\mathcal{V}_i q_i^{(e|0|1)})\Big\rangle =$$

$$= \sum dq_j \sum \widehat{g}^{-1}(-\partial)^{\nu}\Big\langle \frac{\partial}{\partial q_j^{(g|\nu)}}, \operatorname{Flip}(d(\mathcal{V}_i) q_i^{(e|0|1)})\Big\rangle \overset{(10.3.18)}{=}$$

$$= \sum_i \widehat{\delta}(\operatorname{Flip}(d(\mathcal{V}_i) q_i^{(e|0|1)})) \overset{(10.2.19)}{=} \sum dq_j \left(\frac{D\mathcal{V}_i}{Dq_j}\right)^{\dagger}(q_i^{(e|0|1)}) \quad \Rightarrow$$

$$\text{правая часть (10.3.15)} = \sum_i \left(\frac{D\mathcal{V}_i}{Dq_j}\right)^{\dagger}(q_i^{(e|0|1)}), \tag{10.3.19}$$

Сравнивая формулы (10.3.16) и (10.3.19), видим, что систему (10.3.15) можно переписать в виде

$$\sum_i \frac{D\mathcal{V}_j}{Dq_i}(q_i^{(e|0|1)}) = \sum_i \left(\frac{D\mathcal{V}_i}{Dq_j}\right)^{\dagger}(q_i^{(e|0|1)}), \quad \forall\, j \in \mathcal{I}. \tag{10.3.20}$$

Так как генераторы $q_i^{(e|0|1)}$ независимы над кольцом $Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^{\nu}]$, мы можем отбросить их из этого равенства:

$$\frac{D\mathcal{V}_j}{Dq_i} = \left(\frac{D\mathcal{V}_i}{Dq_j}\right)^{\dagger}, \quad \forall\, i, j \in \mathcal{I}. \tag{10.3.21}$$

С учетом формулы (10.2.17), система равенств (10.3.21) представляет собой поэлементную форму операторного тождества (10.3.14). ▮

Следствие 10.3.22.

$$D\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right) = \left[D\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)\right]^{\dagger}, \quad \forall\, H \in C. \tag{10.3.23}$$

Доказательство. Согласно формуле (10.3.11), $\bar{\delta}\tau(\delta(H)) = \bar{\delta}\tau\Big(\sum dq_i \frac{\delta H}{\delta q_i}\Big) = 0$, и Теорема 10.3.13 дает искомую результат для $\mathcal{V}' = \frac{\delta H}{\delta q}$. ▮

Теперь мы в состоянии найти образ вариационного оператора δ.

Теорема 10.3.24. Последовательность (10.3.10) точна, то есть, если $\mathcal{V} \in \Omega_0^{1+}(C)$ таков, что $\bar{\delta}\tau(\mathcal{V}) = 0$ то существует $H \in C$ такой, что $\mathcal{V} = \delta(H)$.

Доказательство. Пусть $A_t : C \to C[t]$ гомоморфизм над R, переводящий $q_i^{(g|\nu)}$ в $tq_i^{(g|\nu)}$, $\forall\ i \in \mathcal{I}$, $\forall\ g \in G$, $\forall\ \nu \in \mathbb{Z}_+^m$. A_t естественно продолжается на $Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu]$ по правилу

$$A_t(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \widehat{g} \partial^\nu) = \widehat{L}_{A_t(\psi)} \widehat{R}_{A_t(\varphi)} \widehat{g} \partial^\nu. \tag{10.3.25}$$

Мы также продолжим A_t на $\Omega_0^{1+}(C)$, с сохранением изоморфизма $\Omega_0^{1+}(C) \approx C^{\mathcal{N}}$:

$$A_t\Big(\sum dq_i \mathcal{V}_i\Big) = \sum dq_i A_t(\mathcal{V}_i). \tag{10.3.26}$$

Аналогичные формулы выполняются для естественного продолженя A_t из C на $\bar{C} = R\langle q_i^{(g|\nu|n)} \rangle$.

Лемма 10.3.27. $A_t(\mathrm{Ker}(\bar{\delta}\tau)) \subset \mathrm{Ker}(\bar{\delta}\tau)$ в $\Omega_0^{1+}(C)$.

Доказательство. Это следует из тождества

$$\bar{\delta}\tau A_t = A_t \bar{\delta}\tau \quad \text{на} \quad \Omega_0^{1+}(C), \tag{10.3.28}$$

которое верно, так как операция $\bar{\delta}\tau$ переводит $dq_i \mathcal{V}_i$ в $\sum_j dq_j \big[\frac{\delta}{\delta q_i}(q_i^{(e|0|1)} \mathcal{V}_i)\big]$ и, тем самым, сохраняет q-степень $\mathcal{V}_i$. ∎

Итак, стартовав с $\mathcal{V} \in \mathrm{Ker}(\widehat{\delta}\tau)$, мы получили

$$\bar{\delta}\tau A_t(\mathcal{V}) = 0. \tag{10.3.29}$$

Положим теперь

$$H = \int_0^1 dt \langle X^{rad},\ A_t(\mathcal{V}) \rangle, \tag{10.3.30}$$

где X^{rad} есть радиальное эволюционное поле:

$$\boldsymbol{X}^{rad} = \boldsymbol{q}, \quad X^{rad} = \sum q_i^{(g|\nu)} \frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}. \tag{10.3.31}$$

Мы собираемся показать, что

$$\delta(H) = \mathcal{V}. \tag{10.3.32}$$

В силу Следствия 10.1.59, это эквивалентно равенству

$$X(H) \approx \langle X, \mathcal{V} \rangle = \boldsymbol{X}^t \mathcal{V}', \quad \forall\ X \in D^{ev}(C). \tag{10.3.33}$$

Имеем,

$$X(H) = X\Big(\int_0^1 dt \langle X^{rad}, A_t(\mathcal{V}) \rangle\Big) = \int_0^1 dt\, X\Big(\sum_i q_i A_t(\mathcal{V}_i)\Big) =$$

$$= \sum_i \int_0^1 dt [X_i A_t(\mathcal{V}_i) + q_i X(A_t(\mathcal{V}_i))]. \tag{10.3.34}$$

Далее,

$$\sum_i q_i X(A_t(\mathcal{V}_i)) = \sum q_i \frac{D(A_t(\mathcal{V}_i))}{Dq_j}(X_j) \approx \sum \Big(\frac{D(A_t(\mathcal{V}))}{Dq_j}\Big)^\dagger (q_i) \cdot X_j \approx$$

$$\overset{(10.3.29,\ 21)}{\approx} \sum X_j \frac{D(A_t(\mathcal{V}_j))}{Dq_i}(q_i) = \sum_j X_j X^{rad}(A_t(\mathcal{V}_j)),$$

так что равенство (10.3.34) превращается в

$$X(H) \approx \sum_j X_j \int_0^1 dt[A_t(\mathcal{V}_j) + X^{rad} A_t(\mathcal{V}_j)]. \tag{10.3.35}$$

Так как дифференцирование X^{rad} — операция q-степени нуль, имеем:

$$X^{rad} A_t = A_t X^{rad}, \tag{10.3.36}$$

равенство (10.3.35) превращается в

$$X(H) \approx \sum_j X_j \int_0^1 dt A_t (1 + X^{rad})(\mathcal{V}_j), \tag{10.3.37}$$

и искомая формула (10.3.33) следует из тождества

$$\int_0^1 dt A_t (1 + X^{rad}) = 1 \quad \text{на} \quad C. \tag{10.3.38}$$

Чтобы доказать это тождество, возьмем моном $\chi \in C$. Тогда $(1 + X^{rad})(\chi) = [1 + \deg_q(\chi)]\chi$, так что

$$A_t(1 + X^{rad})(\chi) = [1 + \deg_q(\chi)] t^{\deg_q}(\chi)] t^{\deg_q(\chi)} \chi,$$

и следовательно

$$\int_0^1 dt A_t (1 + X^{rad})(\chi) = [1 + \deg_q(\chi)]\chi \int_0^1 dt\, t^{\deg_q(\chi)} = \chi. \qquad \blacksquare$$

Наконец, определим $\mathrm{Ker}(\delta)$.

Теорема 10.3.39. $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathcal{T}^+ + R$.

Доказательство. Мы используем формулу

$$\frac{\partial}{\partial t} A_t = t^{-1} A_t X^{rad} \quad \text{на} \quad C. \tag{10.3.40}$$

Записанная в виде

$$X^{rad} = (A_t)^{-1} t \frac{\partial}{\partial t} A_t, \tag{10.3.41}$$

она описывает два аддитивных отображения $C \to C$, каждое из которых переводит моном $\chi \in C$ в $\deg_q(\chi)\chi$. Итак, для любого $H \in C$,

$$\begin{aligned} H - H|_{q=0} = A_1(H) - A_0(H) = \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} A_t(H) &\overset{(10.3.40)}{=} \\ = \int_0^1 dt t^{-1} A_t X^{rad}(H) \approx \int_0^1 dt t^{-1} (X^{rad})^t \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}&. \end{aligned} \tag{10.3.42}$$

Следовательно, если $H \in \mathrm{Ker}(\delta)$, то есть $\dfrac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$, то

$$H \approx H|_{q=0} \in R. \qquad \blacksquare \tag{10.3.43}$$

10.4 Формула вычетов

> **Каждый раз играй по новому.**
>
> **Луи Армстронг**

В этом разделе мы создаем общий аппарат, который позволит выразить коэффициенты степеней L^n и $\mathcal{L}^n$ из Главы 9, как вариационные производные соответствующих вычетов. Эти формулы будут использованы в Главе 12 и далее, для вывода гамильтоновых форм различных дискретных интегрируемых иерархий.

В обозначениях §9.3, пусть $C = R\langle Q_i^{(s)}\rangle$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}$; позже мы рассмотрим также случай $i \in \mathbb{N}$, так что, полагая $q_i = Q_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}_+$, мы покроем все иерархии КП из §9.1.

Продолжив дифференциал $d : C \to \Omega^1(C)$ в кольцо разностных операторов $C((\zeta^{-1}))$, получим дифференцирование $d : C((\zeta^{-1})) \to \Omega^1(C)((\zeta^{-1}))$; итак, d коммутирует с ζ :

$$d\zeta^s = \zeta^s d, \quad \forall\, s \in \mathbb{Z}. \tag{10.4.1}$$

Также, продолжим естественным образом операцию Res с $C((\zeta^{-1}))$ в $\Omega^1(C)((\zeta^{-1}))$. Зафиксируем элемент

$$\mathcal{L} = \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{N-i} Q_i. \tag{10.4.2}$$

Теорема 10.4.3. (Формула вычетов для $\mathcal{L}$)

$$d\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n) \approx n\operatorname{Res}(\mathcal{L}^{n-1} d(\mathcal{L})) \approx n\operatorname{Res}(d(\mathcal{L})\mathcal{L}^{n-1})), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.4.4}$$

Доказательство. Второе равенство в формуле (10.4.4) следует из первого в силу Леммы 9.1.12, продолженной из $C((\zeta^{-1}))$ в $\Omega^1(C)((\zeta^{-1}))$ для одного из операторов, входящих в формулу (9.1.13).

Очевидно, формула (10.4.4) верна для $n = 0$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, имеем тогда

$$d\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n) = \operatorname{Res} d(\mathcal{L}^n) = \operatorname{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} \mathcal{L}^s d(\mathcal{L}) \mathcal{L}^{n-s-1}\Big) \overset{(9.1.13)}{\approx}$$

$$\approx \operatorname{Res}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} \mathcal{L}^{n-s-1} \mathcal{L}^s d(\mathcal{L})\Big) = n\operatorname{Res}(\mathcal{L}^{n-1} d(\mathcal{L})). \qquad \blacksquare$$

Это же доказательство проходит в случае

$$L = \zeta^N + \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{N-1-i} q_i, \tag{10.4.5}$$

$$d\operatorname{Res}(L^n) \approx n\operatorname{Res}(L^{n-1} d(L)) \approx n\operatorname{Res}(d(L)L^{n-1}), \; n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.4.6}$$

Применим эти формулы вычетов. Положим

$$\mathcal{H}_n = n^{-1}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n), \tag{10.4.7}$$

$$\mathcal{L}^n = \sum_s \pi_s(n) \zeta^s, \tag{10.4.8}$$

$$H_n = n^{-1}\operatorname{Res}(L^n), \tag{10.4.9}$$

$$L^n = \sum_s p_s(n) \zeta^s. \tag{10.4.10}$$

Формула (10.4.4) тогда дает

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}(\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})) = \operatorname{Res}\Big(\sum \pi_s(n)\zeta^s\zeta^{N-i}dQ_i\Big) = \sum_{i\geqslant 0}\pi_{i-N}(n)dQ_i \quad \Rightarrow \tag{10.4.11}$$

$$\pi_{i-N}(n) = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta Q_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.4.12}$$

Аналогично, формула (10.4.6) дает

$$d(H_{n+1}) \approx \operatorname{Res}(L^n d(L)) = \operatorname{Res}\Big(\sum p_s(n)\zeta^s\zeta^{N-1-i}dq_i\Big) = \sum_{i\geqslant 0}p_{i+1-N}(n)dq_i \quad \Rightarrow \tag{10.4.13}$$

$$p_{i+1-N}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.4.14}$$

Если $N = 1$, формулы (10.4.12, 14) принимают вид

$$\pi_{i-1}(n) = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1},}{\delta Q_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{10.4.15}$$

$$p_i(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.4.16}$$

Считая далее $N = 1$, рассмотрим щелевую специализацию (9.3.29) и (9.1.49). В случае МКП $(10.4.2)|_{N=1}$ получаем

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{1-\gamma i}\bar{Q}_i = \zeta\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-\gamma i}\bar{Q}_i, \tag{10.4.17}$$

$$\bar{\mathcal{L}}^{\gamma n} = \sum\bar{\pi}_s(\gamma n)\zeta^{\gamma s}, \tag{10.4.18a}$$

$$\bar{\mathcal{L}}^{\gamma n-1} = \sum\bar{\pi}_s(\gamma n-1)\zeta^{\gamma s-1}, \tag{10.4.18b}$$

$$d(\bar{\mathcal{H}}_{\gamma n}) \approx \operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}^{\gamma n-1}d(\mathcal{L})) = \operatorname{Res}\Big(\sum\pi_s(\gamma n-1)\zeta^{\gamma s-1}\zeta^{1-\gamma i}d(\bar{Q}_i)\Big) =$$

$$= \sum_{i\geqslant 0}\bar{\pi}_i(\gamma n-1)d\bar{Q}_i \quad \Rightarrow \tag{10.4.19}$$

$$\bar{\pi}_i(\gamma n-1) = \frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_{\gamma n}}{\delta\bar{Q}_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{10.4.20}$$

В случае КП $(10.4.5)|_{N=1}$, соответственно,

$$\bar{L} = \zeta(1 + \sum_{i\geqslant 1}\zeta^{-\gamma i}\bar{q}_i) \tag{10.4.21}$$

$$\bar{L}^{\gamma n} = \sum\bar{p}_s(\gamma n)\zeta^{\gamma s}, \tag{10.4.22}$$

$$\bar{L}^{\gamma n-1} = \sum\bar{p}_s(\gamma n-1)\zeta^{\gamma s-1}, \tag{10.4.23}$$

$$d(\bar{H}_{\gamma n}) \approx \operatorname{Res}(\bar{L}^{\gamma n-1}d(\bar{L})) = \operatorname{Res}\Big(\sum\bar{p}_s(\gamma n-1)\zeta^{\gamma s-1}\zeta^{1-\gamma i}d\bar{q}_i\Big) =$$

$$\sum_{i\geqslant 0}\bar{p}_i(\gamma n-1)d\bar{q}_i \quad \Rightarrow \tag{10.4.24}$$

$$\bar{p}_i(\gamma n-1) = \frac{\delta\bar{H}_{n\gamma}}{\delta\bar{q}_i}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{10.4.25}$$

Не сказано ничего такого, что бы не говорилось раньше.

Теренций (ок. 185–159 до н.э.)

Глава 11

Некоммутативный гамильтонов формализм над дифференциально-разностными кольцами

В этой главе развивается дифференциально-разностная версия некоммутативного гамильтонова формализма, обобщающая чисто дифференциальную версию из Главы 4. Общая техника применяется к дискретным интегрируемым иерархиям в следующей главе.

11.1 Основной результат гамильтонова формализма

В этом разделе выводится основной результат некоммутативного гамильтонова формализма: проверку тождества Якоби достаточно проводить для *линейных* гамильтонианов. В качестве следствия доказывается, что любой кососимметрический оператор с коэффициентами, не зависящими от полей, гамильтонов. Изложение в этом разделе близко к §5.1.

Мы сохраняем обозначения из Главы 10. Гамильтонова структура на кольце $C = R\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle$, это отображение $C \to D^{ev}(C)$, $H \mapsto X_H$, удовлетворяющее следующим 4 аксиомам:

(a) Кососимметричность:

$$\{H, F\} \approx -\{F, H\}, \quad \forall\, H, F \in C; \tag{11.1.1a}$$

(b) Гамильтоновость:

$$X_{\{H,F\}} = [X_H, X_F], \quad \forall\, H, F \in C; \tag{11.1.1b}$$

(c) Операторная форма: существует оператор $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$, $\mathcal{N} = |\mathcal{I}|$, $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^{\nu}])$, такой, что

$$X_H = X_H(\boldsymbol{q}) = B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right), \quad \forall\, H \in C; \tag{11.1.1c}$$

(d) Стабильность: свойства (a)–(c) остаются верны для любого дифференциально-разностного расширения $R' \supset R$. Здесь скобка Пуассона определенна стандартной формулой

$$\{H, F\} = X_H(F), \quad \forall\, H, F \in C. \tag{11.1.2}$$

Отображение $C \to D^{ev}(C)$ удовлетворяющее перечисленным аксиомам гамильтонова формализма называется *гамильтоновым отображением* или *гамильтоновой структурой*, а соответствующая матрица B называется *гамильтоновой матрицей*. Система алгебраических уравнений на матричные элементы, неоходимая и достаточная для того, чтобы данная матрица $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu])$ была гамильтоновой, называется "основным результатом гамильтонова формализма". Мы сейчас выведем этот результат.

Упражнение 11.1.3. (i) Покажите, что из аксиом (11.1.1) вытекает тождество Якоби

$$\{H, \{F, \bar{G}\}\} + \text{c.p.} \approx 0, \quad \forall\, H, F, \bar{G} \in C'; \tag{11.1.4}$$

(ii) Покажите, что гамильтоновость (11.1.1b) вытекает из оставшихся аксиом (11.1.1a, c, d) и тождества Якоби (11.1.4).

Упражнение 11.1.5. Покажите, что

$$\{X \in D^{ev}(C)\ \&\ X(C') \approx 0, \quad \forall\, R' \supset R\} \quad \Rightarrow \quad \{X = 0\}. \tag{11.1.6}$$

Упражнение 11.1.7. Покажите, что если $\mathcal{R} \in Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu]$ таков, что $\mathcal{R}(C') = 0$, $\forall\, R' \supset R$, то $\mathcal{R} = 0$.

Упражнение 11.1.8. Покажите, что свойство кососимметричности (11.1.1a) скобки Пуассона эквивалентно тому, что матрица B кососимметрична:

$$B^\dagger = -B. \tag{11.1.9}$$

С этого момента мы считаем данную матрицу B кососимметричной.

Упражнение 11.1.10. Покажите, что свойство гамильтоновости (11.1.1b) можно переписать в виде

$$B\frac{\delta}{\delta q}\left[\frac{\delta F}{\delta q^t} B\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)\right] = D\left[B\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right)\right] B\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right) - D\left[B\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)\right] B\left(\frac{\delta F}{\delta q}\right). \tag{11.1.11}$$

Если $X \in D^{ev}(C)$ и $\mathcal{R} \in Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu]$, то X действует на $\mathcal{R}$ по правилу

$$[X(\mathcal{R})](\chi) = X(\mathcal{R}(\chi)) - \mathcal{R}(X(\chi)), \quad \forall\, \chi \in C'. \tag{11.1.12}$$

Аналогично, если $\mathcal{R}$ матричный оператор, то X действует на $\mathcal{R}$ поэлементно. В частности, если $\mathcal{R} \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu])$, то

$$\begin{aligned}[X(\mathcal{R})](\boldsymbol{Y}) &= X(\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})) - \mathcal{R}(X(\boldsymbol{Y})) = D(\mathcal{R}(\boldsymbol{Y}))(X) - \mathcal{R}D(\boldsymbol{Y})(X) = \\ &= [D(\mathcal{R}(\boldsymbol{Y})) - \mathcal{R}D(\boldsymbol{Y})](X) = ([D, \mathcal{R}](\boldsymbol{Y}))(X).\end{aligned} \tag{11.1.13}$$

Упражнение 11.1.14. (i) Покажите, что

$$X(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \widehat{g}\partial^\nu) = (\widehat{L}_{X(\psi)}\widehat{R}_\varphi + \widehat{L}_\psi \widehat{R}_{X(\varphi)})\widehat{g}\partial^\nu, \quad \forall\, \varphi, \psi \in C, \tag{11.1.15}$$

(ii) Выведите из формул (11.1.13, 15) и выражения

$$X = \sum \widehat{g}\partial^\nu(X_i)\frac{\partial}{\partial q_i^{(g|\nu)}}\ , \tag{11.1.16}$$

что комбинация $([D, \mathcal{R}](\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{X})$ есть оператор относительно X и $\boldsymbol{Y}$, для любого $\mathcal{R} \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu])$.

Упражнение 11.1.17. Покажите, что для любых $X \in D^{ev}(C)$, $\boldsymbol{Y} \in C^{\mathcal{N}}$, $H \in C$,

$$X\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)^{t} \boldsymbol{Y} \approx X^{t} D\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)(\boldsymbol{Y}). \tag{11.1.18}$$

Упражпение 11.1.19. Пусть $B : C^{\mathcal{N}} \to C^{\mathcal{N}}$ кососимметрический онератор. Покажите, что для любых $H, F \in C$ вынолняется

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}\left[\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}^{t}} B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right] = D\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right) B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - D\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right) + \left\langle B, \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right\rangle, \tag{11.1.20}$$

где, для любых $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in C^{\mathcal{N}}$,

$$\langle B, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\rangle = ([D, B](\boldsymbol{Y}))^{\dagger}(\boldsymbol{Z}). \tag{11.1.21}$$

[Подсказка : см. доказательство Теоремы 5.1.22.]

Упражнение 11.1.22. Покажите, что свойство гамильтоиовости (11.1.1b), переписанное в виде (11.1.11), можно переписать далее, как

$$B\left(\left\langle B, \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right\rangle\right) = \left\{[D, B]\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right\} B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) - \left\{[D, B]\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right\} B\left(\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{q}}\right). \tag{11.1.23}$$

Упражнение 11.1.24. (“Основпой результат гамильтопова формализма”) Покажите, что для кососимметрической матрицы $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^{\nu}])$, свойство гамильтоновости (11.1.1b) выполняется для всех $H, F \in C'$, если и только если оно выполняется для всех H, F *линейных* но q : $H = \boldsymbol{q}^{t}\boldsymbol{Y}$, $F = \boldsymbol{q}^{t}\boldsymbol{Z}$, $\forall\, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in R'^{\mathcal{N}}$.

Упражнение 11.1.25. Покажите, что для данной кососимметрической матрицы $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^{\nu}])$, проверка критерия гамильтоновости (11.1.1b) эквивалентна нроверке квадратичного тождсства

$$B(\langle B, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\rangle) = \{[D, B](\boldsymbol{Z})\} B(\boldsymbol{Y}) - \{[D, B](\boldsymbol{Y})\} B(\boldsymbol{Z}) \tag{11.1.26}$$

в кольце $C' = R\langle q_i^{(g|\nu)}, \boldsymbol{Y}_i^{(g|\nu)}, \boldsymbol{Z}_i^{(g|\nu)}\rangle$.

Упражнение 11.1.27. Покажите, что свойство гамильтововости (11.1.1b) можво заменить требованием, чтобы тождество Якоби (11.1.4) выполнялось для произвольных *линейных* гамильтонианов $H, F, \bar{G}$.

Упражнение 11.1.28. (i) Покажите, что любая кососимметрическая матрица $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(R)[\widehat{g}, \partial^{\nu}])$ гамильтоиова;
(ii) Докажите гамильтоновость симнлектической матрицы

$$b^{can} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.1.29}$$

11.2 Гамильтоновы отображения

В этом разделе мы выводим алгебраический критерий того, что данный гомоморфизм сохраняет скобки Пуассона. Изложение нараллельно §5.2.

Будем использовать обозначения из §10.2 и §11.1. Пусть $\Phi : C = R\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle \to C_1 = R\langle u_\eta^{(g|\nu)}\rangle$ есть гомоморфизм. Допустим, нам даны кососимметрические матрицы $B \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu])$ н $B_1 \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{N}_1}(Op_0(C_1)[\widehat{g}, \partial^\nu])$ определяющие гамильтоновы структуры в кольцах C и C_1 соответственно. Отображение $\Phi : C \to C_1$ называется *гамильтоновым*, если

$$\Phi(\{H, F\}) \approx \{\Phi(H), \Phi(F)\}, \quad \forall\, H, F \in C'. \tag{11.2.1}$$

Упражнение 11.2.2. Обозначим через $D^{ev}(C, C_1)$ множество всех дифференцирований из C в C_1 (над R), относительно Φ, которое коммутнруют с действнями G и ∂_s. Покажите, что если $Z \in D^{ev}(C, C_1)$ таков, что $Z(F) \approx 0$, $\forall\, F \in C'$, то $Z = 0$.

Упражнение 11.2.3. Покажите, что отображенне Φ гамильтоново, еслн и только если

$$\Phi(\{H, F\} = \{\Phi(H), \Phi(F)\}, \quad \forall\, H, F \in C'. \tag{11.2.4}$$

Упражнение 11.2.5. Покажите, что Φ гамильтоново, если и только если

$$\Phi X_H = X_{\Phi(H)}\Phi, \quad \forall\, H \in C'. \tag{11.2.6}$$

Продолжим гомоморфизм Φ из C в $\mathrm{Mat}_{(\cdot)}(Op_0(C)[\widehat{g}, \partial^\nu])$, используя ноэлементно правило

$$\Phi(\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \widehat{g}\partial^\nu) = \widehat{L}_{\Phi(\psi)} \widehat{R}_{\Phi(\varphi)} \widehat{g}\partial^\nu, \quad \psi, \varphi \in C. \tag{11.2.7}$$

Упражнение 11.2.8. (Критерий гамильтоновости отображении) Покажите, что Φ гамильтоново, еслн и только если

$$\Phi(B) = D(\mathbf{\Phi}) B_1 D(\mathbf{\Phi})^\dagger, \quad \mathbf{\Phi} = (\Phi_i),\ \Phi_i = \Phi(q_i). \tag{11.2.9}$$

[Подсказка : см. доказательство Теоремы 5.2.9.]

Нет такого старика, который не считал бы,
что сможет прожить еще один год.

Цицерон

11.3 Аффинные гамильтоновы операторы, 2-коциклы на алгебрах Ли, и т.п.

Чем больше законов, тем меньше справедливости.

Цицерон

Линейные гамнльтоновы матрицы находятся во взаимно-однозиачном соответствии с алгебрами Ли; аффинные гамильтоновы матрицы находятся во взаимнооднозначном соответствии с обобщенными 2-коциклами на алгебрах Ли. Доказательства идентичны чисто дяфференциальному случаю из §5.3, за исключением того, что кое-где появляются G-индексы. То же самое касается оставшейся части Главы 5, §§5.4,5.5.

Упражнение 11.3.1. Покажите, что следующая матрица гамильтонова

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u & p_\beta & q^\beta \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ p_\alpha \\ q^\alpha \end{array} & \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_u & \widehat{L}_{p_\beta} & -\widehat{R}_{q^\beta} \\ -\widehat{R}_{p_\alpha} & 0 & -\delta_\alpha^\beta \\ \widehat{L}_{q_\alpha} & \delta_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (11.3.2)$$

Не потому ли это кажется чудом, что произошло так давно?

Ливий Андроникус (ок. 280–204 до н.э.)

Глава 12

Гамильтонов формализм для дискретных интегрируемых систем типа КП и МКП

В этой главе большая часть конструкций теории Лакса из Главы 9 облекается в гамильтоновы одеянии.

12.1 Системы типа КП

> **Господь сказал однажды — и я думаю правильно...**
>
> **Фельдмаршал Монтгомери**

В этом разделе выводится гамильтонова форма различных иерархий КП из §9.1.

Имея в виду окончательный результат, пока несформулированный, мы изменим обозначения для коэффициентов оператора Лакса L (9.1.14)

$$L = \zeta^N + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{N-1-i} q_i \tag{12.1.1}$$

следующим образом:

$$L = \zeta^N + \sum_{i=1}^{N-1} \zeta^i r_i + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} q_j; \tag{12.1.2}$$

подразумевается, что при $N = 1$ переменные r_i отсутствуют. Пусть

$$P = L^n = \sum_s p_s(n)\zeta^s, \tag{12.1.3}$$

$$H_n = n^{-1}\operatorname{Res}(L^n). \tag{12.1.4}$$

Формула вычетов (10.4.6) дает

$$d(H_{n+1}) \approx \operatorname{Res}(L^n d(L)) = \operatorname{Res}\Big(\sum p_s(n)\zeta^s\Big(\sum \zeta^i dr_i + \sum \zeta^{-j} dq_j\Big)\Big) =$$

$$= \sum_{1}^{N-1} p_{-i}(n) dr_i + \sum_{j \geqslant 0} p_j(n) dq_j \quad \Rightarrow \tag{12.1.5}$$

$$p_{-i}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta r_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \quad N > 1, \tag{12.1.6}$$

$$p_j(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.1.7}$$

Далее, из уравнений движения (9.1.15) получаем

$$\partial_P(L_{\leqslant 0}) = [P_+, L]_{\leqslant 0} = [P_+, L_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0} = \Big[\sum_{j \geqslant 0} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j} \zeta^j,\ \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{-i} q_i\Big]_{\leqslant 0}. \tag{12.1.8}$$

Мы видим, что переменные q_j отщепляются. Обозначая

$$X_j = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j}, \quad \widehat{X} = \sum_{j \geqslant 0} X_j \zeta^j, \tag{12.1.9}$$

получаем

$$\partial_P(q_i) = \operatorname{Res}(\zeta^i |\widehat{X}, L_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0}) = \operatorname{Res}(\zeta^i |\widehat{X}, L_{\leqslant 0}|) = \sum_j B_{ij}^{\text{КП}}(X_j), \tag{12.1.10}$$

где

$$\begin{aligned} B_{ij}^{\text{КП}}(X_j) &= \operatorname{Res}\Big(\zeta^i \Big[\sum X_j \zeta^j,\ \sum \zeta^{-\ell} q_\ell\Big]\Big) = \\ &= \operatorname{Res}\Big(\sum \zeta^{i+j-\ell} |X_j^{(\ell-j)} q_\ell - (q_\ell X_j)^{(-j)}|\Big) = \\ = X_j^{(i)} q_{i+j} - (q_{i+j} X_j)^{(-j)} &= (\widehat{R}_{q_{i+j}} \Delta^i - \Delta^{-j} \widehat{L}_{q_{i+j}})(X_j) \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{12.1.11}$$

$$B_{ij}^{\text{КП}} = \widehat{R}_{q_{i+j}} \Delta^i - \Delta^{-j} \widehat{L}_{q_{i+j}}. \tag{12.1.12}$$

Проверим, что матрица $B^{\text{КП}}$ (12.1.12) гамильтонова. Так как эта матрица линейна по q, мы должны предъявить соответствующую алгебру Ли. Из формулы (12.1.10) получаем

$$\begin{aligned} B^{\text{КП}}(\boldsymbol{X})^t \boldsymbol{Y} &= \sum B_{ij}^{\text{КП}}(X_j) Y_i \approx \sum Y_i B_{ij}^{\text{КП}}(X_j) = \operatorname{Res}\Big(\sum Y_i \zeta^i [\widehat{X}, L_{\leqslant 0}|\Big) = \\ = \operatorname{Res}(\widehat{Y} |\widehat{X}, L_{\leqslant 0}|) &\approx \operatorname{Res}(|\widehat{Y}, \widehat{X}| L_{\leqslant 0}) = \operatorname{Res}\Big(\sum [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}|_i \zeta^i \zeta^{-j} q_j\Big) = \\ &= \sum_i [\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}]_i q_i \approx \boldsymbol{q}^t [\boldsymbol{Y}, X]. \end{aligned} \tag{12.1.13}$$

Таким образом, $B^{\text{КП}} = -B^0$, где B^r гамильтонова матрица, соответствующая алгебре Ли $\mathcal{G}^r = \operatorname{Lie}(R[[\zeta]]\zeta^r)$:

$$\mathcal{G}^r = \Big\{\sum_{i \geqslant 0} X_i \zeta^{i+r} \mid X_i \in R\Big\}, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.1.14}$$

Случай $N = 1$ на этом заканчивается. Пусть теперь $N > 1$, так что в операторе Лакса L (12.1.2) имеется несколько переменных r_i. Из уравнений движения (9.1.15) находим

$$\partial_P(L_{>0}) = [L, P_-]_{>0} = [L_{>0}, P_-]_{>0} = \Big[\zeta^N + \sum_1^{N-1} \zeta^i r_i,\ \sum_{s<0} p_s(n)\zeta^s\Big]_{>0} =$$

$$= \Big[\zeta^N + \sum_i^{N-1} \zeta^i r_i,\ \sum_{s=1}^{N-1} p_{-s}(n)\zeta^{-s}\Big]_{>0} = \Big[\zeta^N + \sum_1^{N-1} \zeta^{N-i} r_i,\ \sum_1^{N-1} X_j\zeta^{-j}\Big]_{>0}, \quad (12.1.15)$$

где, согласно формуле (12.1.6),

$$X_j = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta r_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-1. \quad (12.1.16)$$

Мы видим, что переменные r_i также отщепляются. Покомпонентно, уравнения движения (12.1.15) принимают вид

$$\partial_P(r_i) = \sum_{j=1}^{N-1} B_{ij}^{(N)}(X_j), \quad (12.1.17)$$

где матрица $B^{(N)}$ получается при помощи следующего вычисления. Введем временно переменную

$$r_N\ (=1) \quad (12.1.18)$$

и соответствующий символ X_N. Таким образом, мы добавляем к матрице $B^{(N)}$ одну строку и один столбец, и получаем матрицу $B^{(N)e}$. Затем,

$$\partial_P(L_{>0}) = \Big[\sum_1^N \zeta^i r_i,\ \sum_1^N X_j\zeta^{-j}\Big]_{>0} = \Big(\sum \zeta^{i-j}\big[(r_i X_j)^{(j)} - X_j^{(j-i)} r_i\big]\Big)_{>0} \quad \Rightarrow$$

$$(12.1.19)$$

$$\partial_P(r_s) = \sum_{i-j=s} (\Delta^j \widehat{L}_{r_i} - \widehat{R}_{r_i}\Delta^{-s})(X_j), \quad 1 \leqslant i, s, j \leqslant N \quad \Rightarrow \quad (12.1.20)$$

$$B_{sj}^{(N)e} = \Delta^j \widehat{L}_{r_{s+j}} - \widehat{R}_{r_{s+j}}\Delta^{-s}, \quad 1 \leqslant s, j \leqslant N, \quad (12.1.21a)$$

где подразумевается, что

$$r_{(\cdot)} = 0 \quad \text{при} \quad (\cdot) > N. \quad (12.1.21b)$$

Как и следовало ожидать, X_N не входит в уравнения (12.1.20) и $\partial_P(r_N) = 0$. Следовательно, соответствующие r_N столбец и строка в матрице $B^{(N)e}$ состоят из нулей. Матрица $B^{(N)}$ возникает как $(N-1)\times(N-1)$ подматрица (в верхнем левом углу) матрицы $B^{(N)e}|_{r_N=1}$. Таким образом, чтобы показать, что аффинная матрица $B^{(N)}$ гамильтонова, достаточно показать, что это верно для линейной матрицы $B^{(N)e}$. Полагая

$$\widehat{X} = \sum_1^N X_j\zeta^{-j}, \quad (12.1.22)$$

получаем

$$B^{(N)e}(X)^t Y = \sum_1^N B_{s\ell}^{(N)e}(X_\ell)Y_s \approx \sum Y_s\partial_P(r_s) = \sum Y_s \operatorname{Res}(\zeta^{-s}[L_{>0}, \widehat{X}]) =$$

$$= \operatorname{Res}(\widehat{Y}[L_{>0}, \widehat{X}]) \approx \operatorname{Res}(L_{>0}[\widehat{X}, \widehat{Y}]) = \operatorname{Res}\Big(\sum \zeta^i r_i[\widehat{X}, \widehat{Y}]\Big) \approx \sum_1^N r_i[\widehat{X}, \widehat{Y}]_i, \quad (12.1.23)$$

откуда следует, что $B^{(N)e}$ является гамильтоновой матрицей соответствующей фактор-алгебре Ли $\mathcal{G}_{\leqslant -1}/\mathcal{G}_{\leqslant -N-1}$:

$$B^{(N)e} = B(\mathcal{G}_{\leqslant -1}/\mathcal{G}_{\leqslant -N-1}) \tag{12.1.24}$$

где $\mathcal{G}_{\leqslant -r}$ есть влгебра Ли $\mathrm{Lie}(R[[\zeta^{-1}]]\zeta^{-r})$, $r \in \mathbb{N}$. Таким образом, гамильтонова матрица каждой из иерархий КП-типа (ири различных значениях N) имеет блочный вид $B^{(N)} \oplus B^{\text{КП}}$. Полагая в этих матрицах $\Delta = 1$, мы получаем гамильтоновы матрицы для соответствующей иерархии в классическом пределе из §9.7. С другой стороны, из формул (12.1.12, 21) легко видеть, что щелевая специализации (9.1.45) не может быть наложена на нашу гамильтонову матрицу.

12.2 Системы типа МКП

В этом разделе мы выводим гамильтонову форму различных яерархий МКП из §9.3.

Предвосхищая расщепление переменных в $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$, сменим обозначение (9.3.1)

$$\mathcal{L} = \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{N-i} Q_i \tag{12.2.1}$$

иа обозначение

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{N} \zeta^i R_i + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j-1} Q_j. \tag{12.2.2}$$

Положим

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}^n = \sum_s \pi_s(n) \zeta^s, \tag{12.2.3}$$

$$\mathcal{H}_n = n^{-1} \operatorname{Res}(\mathcal{L}^n). \tag{12.2.4}$$

Тогда формула вычетов (10.4.4) даст

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}(\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})) &= \operatorname{Res}\left(\sum \pi_s(n)\zeta^s \left(\sum \zeta^i dR_i + \sum \zeta^{-j-1} dQ_i\right)\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{N} \pi_{-i}(n) dR_i + \sum_{j \geqslant 0} \pi_{j+1}(n) dQ_j \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{12.2.5}$$

$$\pi_{-i}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta R_i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \tag{12.2.6}$$

$$\pi_{j+1}(n) = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta Q_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.2.7}$$

Из уравнений движения (9.3.2) получаем

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}_-) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}]_- = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}_{\leqslant -2}]_{<0}. \tag{12.2.8}$$

Видим, что перемениые Q_j отщепляются. Положим

$$X_j = \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}}{\delta Q_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+ \ ; \quad \widehat{X} = \sum_{j \geqslant 0} X_j \zeta^{j+1}. \tag{12.2.9}$$

Тогда уравнения движения (12.2.8) дают

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}(Q_i) &= \operatorname{Res}(\zeta^{i+1}\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})) = \operatorname{Res}(\zeta^{i+1}[\widehat{X}, \mathcal{L}_{\leqslant -2}]) && (12.2.10)\\ &= \operatorname{Res}\Big(\sum \zeta^{i+1}[X_j\zeta^{j+1}, \zeta^{-s-2}Q_{s+1}]\Big)\\ &= \operatorname{Res}\Big(\zeta^{i+j-s}[X_j^{(s-j+1)}Q_{s+1} - (Q_{s+1}X_j)^{(-1-j)}]\Big)\\ &= \sum[X_j^{(i+1)}Q_{i+j+1} - (Q_{i+j+1}X_j)^{(-j-1)}] = \sum_j B_{ij}^Q(X_j), && (12.2.11)\end{aligned}$$

где

$$B_{ij}^Q = \widehat{R}_{Q_{i+j+1}}\Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{Q_{i+j+1}}. \tag{12.2.12}$$

Утверждение 12.2.13. Пусть B^r — гамильтонова матрица, ассоциированная с алгеброй Ли $\mathcal{G}^r$ (12.1.14). Тогда

$$B_{ij}^r = \Delta^{-j-r}\widehat{L}_{q_{i+j+r}} - \widehat{R}_{q_{i+j+r}}\Delta^{i+r}. \tag{12.2.14}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}B^r(X)^tY \approx q^t[X,Y] = \sum_s q_s[X,Y]_s = \sum q_s \operatorname{Res}([X_i\zeta^{i+r}, Y_j\zeta^{j+r}]\zeta^{-s-r}) =\\ = \sum \operatorname{Res} q_s([X_iY_j^{(i+r)} - Y_jX_i^{(i+r)}]\zeta^{i+j+r-s}) = \sum q_{i+j+r}[X_iY_j^{(i+r)} - Y_jX_i^{(i+r)}] \approx\\ \approx \sum[\Delta^{-i-r}(q_{i+j+r}X_i) - X_i^{(i+r)}q_{i+j+r}]Y_j \qquad \blacksquare \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$B^Q = -B^1. \tag{12.2.15}$$

Обратимся теперь к переменным R_i. Из уравнений движения (9.3.2) находим

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}_+) = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}]_+ = [\mathcal{L}_{\geqslant 0}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}]_{\geqslant 0}. \tag{12.2.16}$$

Мы видим, что переменные R_i также отщепляются. Положим

$$X_i = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta R_i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant N; \quad \widehat{X} = \sum_{i=0}^N X_i\zeta^{-i}. \tag{12.2.17}$$

Тогда формулы (12.2.6, 16) дают

$$\partial_{\mathcal{P}}(R_i) = \operatorname{Res}(\zeta^{-i}\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})) = \operatorname{Res}(\zeta^{-i}[\mathcal{L}_{\geqslant 0}, \widehat{X}]) = \tag{12.2.18}$$

$$= \operatorname{Res}\Big(\sum \zeta^{-i}[\zeta^sR_s, X_j\zeta^{-j}]\Big) = \operatorname{Res}\Big(\sum \zeta^{s-i-j}[(R_sX_j)^{(j)} - X_j^{(j-s)}R_s]\Big) =$$

$$= \sum_j[(R_{i+j}X_j)^{(j)} - X_j^{(-i)}R_{i+j}] = \sum_j B_{ij}^{[N]}(X_j), \tag{12.2.19}$$

где

$$B_{ij}^{[N]} = B_{ij}^{[N]R} = \Delta^j\widehat{L}_{R_{i+j}} - \widehat{R}_{R_{i+j}}\Delta^{-i}, \quad 0 \leqslant i,j \leqslant N, \tag{12.2.20a}$$

и подразумевается, что

$$R_{(\cdot)} = 0 \quad \text{при} \quad (\cdot) > N. \tag{12.2.20b}$$

Из сравнения формул (12.2.20) и (12.2.14) следует, что $B^{[N]}$ является гамильтоновой матрицей, ассоциированной с фактор-алгеброй Ли $\operatorname{Lie}(R[[\zeta^{-1}]])/\operatorname{Lie}(R[[\zeta^{-1}]]$

ζ^{-N-1}). Таким образом, для каждого N, иерархия МКП-типа (9.3.2) имеет гамильтонову матрицу расщепленного вида $B^{[N]} \oplus (-B^1)$. Полагая в ней, или в формулах (12.2.12, 20), $\Delta = 1$, приходим к гамильтоновой форме для классического предела иерархий типа МКП из §9.7. С другой стороны, легко видеть, что щелевая специализация (9.3.26) не совместна с гамильтоновыми матрицами B^Q (12.2.12) и $B^{[N]}$ (12.2.20).

12.3 Преобразование Миуры из КП в МКП гамильтоново

В этом разделе мы показываем, что конструкции из §9.5 являются гамильтоновыми отображениями, обслуживающими переход от иерархии МКП к иерархии Pot-МКП и вложение иерархии КП в Pot-МКП.

Преобразование Миуры $\Phi : C_{r,q} \to C_{V,R,Q}$ (9.5.2) в наших новых координатах из §§12.1, 12.2 записывается в виде

$$\Phi\Big(\zeta^N + \sum_1^{N-1} \zeta^i r_i + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} q_j\Big) = V^{-1}\Big(\sum_0^N \zeta^i R_i + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j-1} Q_j\Big) V, \tag{12.3.1}$$

$$R_N = V^{(-N)} V^{-1}, \tag{12.3.2}$$

откуда

$$\Phi(r_i) = V^{(-i)-1} R_i V, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \tag{12.3.3a}$$

$$\Phi(q_0) = V^{-1} R_0 V, \tag{12.3.3b}$$

$$\Phi(q_{j+1}) = V^{(j+1)-1} Q_j V, \quad j \in \mathbb{Z}_+; \tag{12.3.3c}$$

при $N = 1$ равенства (12.3.3a) нет.

Чтобы доказать гамильтоновость отображения Φ, надо сначала найти гамильтонову структуру в пространстве $\{V, R_1, \ldots, R_{N-1}; Q\}$, такую, чтобы уравнения движения Pot–МКП (9.3.2) и (9.5.22):

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}], \tag{12.3.4a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\operatorname{Pot}(\operatorname{Res}(\mathcal{P}))V, \quad \mathcal{P} = L^n, \tag{12.3.4b}$$

были гамильтоновыми, а гомоморфизм Pot (12.3.2) был гамильтоновым отображением.

Так как гамильтонова структура (12.2.12, 20) иерархии МКП расщепляется в R- и Q-блоки, а отображение Pot (12.3.2) влияет только лишь на одну из R_i, то мы можем игнорировать Q-часть и сконцентрироваться только на R-части.

Теорема 12.3.5. (i) Матрица $B^{[N]V}$:

$$B^{[N]V} = \begin{array}{c|cc} & R_j & V \\ \hline R_i & \bar{B}^{[N]R}_{ij} & \widehat{L}_V \delta_i^0 \\ V & -\widehat{R}_V \delta_j^0 & 0 \end{array}, \quad 0 \leqslant i, j < N, \tag{12.3.6}$$

гамильтонова. Здесь матрица $\bar{B}^{[N]R}$ совпадает с верхним левым улом размера $N \times N$ в матрице $B^{[N]R}$ (12.2.20), в которой R_N заменено на $\operatorname{Pot}(R_N) = V^{(-N)}V^{-1}$;

(ii) Отображение Pot (12.3.2) между гамильтоновыми матрицами $B^{[N]R}$ (12.2.20) и $B^{[N]V}$ (12.3.6) гамильтоново;
(iii) Pot–МКП уравнения движения (12.3.4) гамильтоновы, с блочной гамильтоновой матрицей $\{B^{[N]V}$ (12.3.6) $\oplus B^{Q}$ (12.2.12)$\}$, и функцией Гамильтона $\mathrm{Pot}(\mathcal{H}_{n+1}) = \mathrm{Pot}\,\mathrm{Res}(\mathcal{L}^{n+1})/(n+1)$.

Доказательство. (ii) При проверке гамильтонова тождества

$$\mathrm{Pot}(B^{[N]R}) = D(\mathrm{Pot}(\boldsymbol{R}))B^{[N]V}D(\mathrm{Pot}(\boldsymbol{R}))^{\dagger}, \tag{12.3.7}$$

следует обратить внимание только на последнюю, N-ю, строку: переход к сопряженной матрице делает излишней проверку для последнего столбца, а для остальных элементов матрицы равенство (12.3.7) дает непотревоженное тождество.

Из формулы (12.2.20) видим, что

$$B^{[N]R}_{Nj} = \delta^0_j(\widehat{L}_{R_N} - \widehat{R}_{R_N}\Delta^{-N}) \quad \Rightarrow \tag{12.3.8}$$

$$\mathrm{Pot}(B^{[N]R}_{Nj}) = \delta^0_j(\widehat{L}_{V^{(-N)}V^{-1}} - \widehat{R}_{V^{(-N)}V^{-1}}\Delta^{-N}). \tag{12.3.9}$$

С другой стороны,

$$\frac{D\,\mathrm{Pot}(R_N)}{DV} = \frac{D(V^{(-N)}V^{-1})}{DV} = -\widehat{L}_{V^{(-N)}V^{-1}}\widehat{\boldsymbol{R}}_{V^{-1}} + \widehat{R}_{V^{-1}}\Delta^{-N}, \tag{12.3.10}$$

так что (N,j)-й элемент матрицы в правой части равенства (12.3.7) равен

$$\frac{D\,\mathrm{Pot}(R_N)}{DV}(-\widehat{R}_V\delta^0_j) = \delta^0_j(\widehat{L}_{V^{(-N)}V^{-1}}\widehat{R}_{V^{-1}}\widehat{R}_V - \widehat{R}_{V^{-1}}\Delta^{-N}\widehat{R}_V), \tag{12.3.11}$$

что совпадает с выражением (12.3.9);
(iii) Так как отображение Pot тождественно на всех переменных кроме R_N, мы должны проверить только, что уравнение (12.3.4b),

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\mathrm{Pot}(\pi_0(n))V, \tag{12.3.12}$$

совпадает с уравнением движения, полученным при помощи гамильтоновой матрицы $B^{[N]V}$ (12.3.6),

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\widehat{R}_V\frac{\delta\,\mathrm{Pot}(\mathcal{H}_{n+1})}{\delta R_0}, \tag{12.3.13}$$

Это эквивалентно тождеству

$$\mathrm{Pot}(\pi_0(n)) = \frac{\delta\,\mathrm{Pot}(\mathcal{H}_{n+1})}{\delta R_0}. \tag{12.3.14}$$

Так как

$$\frac{\delta\,\mathrm{Pot}(\mathcal{H}_{n+1})}{\delta R_0} = \mathrm{Pot}\left(\frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta R_0}\right), \tag{12.3.15}$$

то достаточно показать, что

$$\pi_0(n) = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta R_0}, \tag{12.3.16}$$

а это есть формула (12.2.6) при $i = 0$;
(i) При $N = 1$, матрица $B^{[1]V}$ (12.3.6) равна

$$B^{[1]V} = \begin{array}{c|cc} & R_0 & V \\ \hline R_0 & \mathrm{ad}_{R_0} & \widehat{L}_V \\ V & -\widehat{\boldsymbol{R}}_V & 0 \end{array}, \tag{12.3.17}$$

и совпадает с матрицей (5.3.32).

При $N = 2$, матрица $B^{[2]V}$ (12.3.6) равна

$$B^{[2]V} = \begin{array}{c} \\ R_0 \\ R_1 \\ V \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_0 & R_1 & V \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{ad}_{R_0} & \Delta\widehat{L}_{R_1} - \widehat{R}_{R_1} & \widehat{L}_V \\ \widehat{L}_{R_1} - \widehat{R}_{R_1}\Delta^{-1} & \Delta\widehat{L}_{R_2} - \widehat{R}_{R_2}\Delta^{-1} & 0 \\ -\widehat{R}_V & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}, \tag{12.3.18}$$

где $R_2 = V^{(-2)}V^{-1}$. Ясно, что для $N > 1$ прямая проверка гамильтоновости матрицы $B^{[N]V}$ (12.3.6) требует длянных и утомительных вычислений. Молодой и бесстрашный читатель может, при желании, испытать свои силы, погузившись в них. Короткое доказательство гамильтоновости этой матрицы приведепо ниже в Следствии 12.3.32. ∎

Итак, мы собираемся продолжить, не предполагая, что матрица $B^{[N]V}$ гамильтонова (хотя это так). Эта временная уступка оказывается несущественной.

Теорема 12.3.19. Преобразование Миуры Φ (12.3.3) гамильтоново, между гамильтоновой матрицей $\{B^{(N)}$ (12.3.20) $\oplus B^{\text{КП}}$ (12.1.12)$\}$,

$$B^{(N)}_{ij} = B^{(N)\tau}_{ij} = \Delta^j \widehat{L}_{r_{i+j}} - \widehat{R}_{r_{i+j}}\Delta^{-i}, \quad r_N = 1, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N-1, \tag{12.3.20}$$

и матрицей $\{B^{[N]V}$ (12.3.6) $\oplus B^Q$ (12.2.12)$\}$ (гамильтоновость которой еще пе установлена).

Доказательство. Следует проверить тождество

$$D(\mathbf{\Phi})(B^{[N]V} \oplus B^Q)D(\mathbf{\Phi})^\dagger = \Phi(B^{(N)} \oplus B^{\text{КП}}). \tag{12.3.21}$$

Так как полностью выписать входящие сюда матрицы не хватит места, мы будем, при необходимости, разбивать их по столбцам.

Обозначим $D(\mathbf{\Phi})$ через J. Для этой матрицы имеем

$$J^V_{(\cdot)} = \begin{array}{c} \\ r_\alpha \\ q_0 \\ q_{i+1} \end{array} \begin{array}{c} V \\ \left(\begin{array}{c} \widehat{L}_{V^{(-\alpha)-1}R_\alpha} - \widehat{L}_{V^{(-\alpha)-1}}\widehat{R}_{V^{(-\alpha)-1}R_\alpha V}\Delta^{-\alpha} \\ \widehat{L}_{V^{-1}R_0} - \widehat{L}_{V^{-1}}\widehat{R}_{V^{-1}R_0 V} \\ \widehat{L}_{V^{(i+1)-1}Q_i} - \widehat{L}_{V^{(i+1)-1}}\widehat{R}_{V^{(i+1)-1}Q_i V}\Delta^{i+1} \end{array} \right) \end{array}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N-1, \tag{12.3.22a}$$

$$J^{R,Q}_{(\cdot)} = \begin{array}{c} \\ r_\alpha \\ q_0 \\ q_{i+1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R_\mu & Q_a \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} \delta^\mu_\alpha \widehat{L}_{V(-\alpha)-1}\widehat{R}_V & 0 \\ \delta^\mu_0 \widehat{L}_{V-1}\widehat{R}_V & 0 \\ 0 & \delta^a_i \widehat{L}_{V(i+1)-1}\widehat{R}_V \end{array} \right) \end{array}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant N-1. \tag{12.3.22b}$$

Для матрицы $b = B^{[N]V} \oplus B^Q$ имеем

$$b = \begin{array}{c} \\ V \\ R_\mu \\ Q_a \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V & R_\nu & Q_b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\delta^0_\nu \widehat{R}_V & 0 \\ \widehat{L}_V \delta^0_\mu & \bar{B}^{[N]R}_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & B^Q_{ab} \end{array} \right) \end{array}, \tag{12.3.23}$$

так что для произведения Jb получаем

$$(Jb)^{V,Q} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & (R_\nu) & Q_b \end{array} \\ \begin{array}{c} r_\alpha \\ q_0 \\ q_{i+1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \widehat{R}_V & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \widehat{L}_{V(i+1)-1}\widehat{R}_V B^Q_{ib} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{12.3.24}$$

Для пропущенного здесь столбца R_ν имеем

$$\begin{aligned} (Jb)^{R_\nu}_{r_\alpha} = \delta^0_\nu(-\widehat{L}_{V(\alpha)-1R_\alpha}\widehat{R}_V + \widehat{L}_{V(\alpha)-1}\widehat{R}_{R_\alpha V}\Delta^{-\alpha}) \\ + \widehat{L}_{V(-\alpha)-1}\widehat{R}_V(\Delta^\nu\widehat{L}_{R_{\alpha+\nu}} - \widehat{R}_{R_{\alpha+\nu}}\Delta^{-\alpha}) = \\ = (1-\delta^0_\nu)\widehat{L}_{V(-\alpha)-1}\widehat{R}_V(\Delta^\nu\widehat{L}_{R_{\alpha+\nu}} - \widehat{R}_{R_{\alpha+\nu}}\Delta^{-\alpha}). \end{aligned} \tag{12.3.25a}$$

Так как в матрицах (12.3.22) мы можем получить q_0-строку полагая формальио $\alpha = 0$ в r_α-строке, то можно списать $(Jb)^{R_\nu}_{q_0}$–элемент из формулы (12.3.25a):

$$(Jb)^{R_\nu}_{q_0} = (1-\delta^0_\nu)\widehat{L}_{V-1}\widehat{R}_V(\Delta^\nu\widehat{L}_{R_\nu} - \widehat{R}_{R_\nu}). \tag{12.3.25b}$$

Наконец,

$$(Jb)^{R_\nu}_{q_{i+1}} = \delta^0_\nu(-\widehat{L}_{V(i+1)-1Q_i}\widehat{R}_V + \widehat{L}_{V(i+1)-1}\widehat{R}_{Q_iV}\Delta^{i+1}), \tag{12.3.25c}$$

и, собирая вместе,

$$(Jb)^{R_\nu}_{(\cdot)} = \begin{array}{cc} & R_\nu \\ \begin{array}{c} r_\alpha \\ q_0 \\ q_{i+1} \end{array} & \begin{pmatrix} (1-\delta^0_\nu)\widehat{L}_{V(-\alpha)-1}\widehat{R}_V(\Delta^\nu\widehat{L}_{R_{\alpha+\nu}} - \widehat{R}_{R_{\alpha+\nu}}\Delta^{-\alpha}) \\ (1-\delta^0_\nu)\widehat{L}_{V-1}\widehat{R}_V(\Delta^\nu\widehat{L}_{R_\nu} - \widehat{R}_{R_\nu}) \\ \delta^0_\nu(-\widehat{L}_{V(i+1)-1Q_i}\widehat{R}_V + \widehat{L}_{V(i+1)-1}\widehat{R}_{Q_iV}\Delta^{i+1}) \end{pmatrix} \end{array}. \tag{12.3.26}$$

Напомннм, что во всех наших вычисленнях

$$R_{(\cdot)} = 0 \quad \text{при} \quad (\cdot) > N, \quad R_N = V^{(-N)}V^{(-1)}, \tag{12.3.27a}$$

$$r_{(\cdot)} = 0 \quad \text{при} \quad (\cdot) > N, \quad r_N = 1. \tag{12.3.27b}$$

Теперь для сопряженной матряцы $J^\dagger$ получаем, из формул (12.3.22):

$$J^{\dagger r_\beta}_{(\cdot)} = \begin{array}{cc} & r_\beta \\ \begin{array}{c} V \\ R_\nu \\ Q_{b+1} \end{array} & \begin{pmatrix} \widehat{R}_{V(-\beta)-1R_\beta} - \Delta^\beta\widehat{R}_{V(-\beta)-1}\widehat{L}_{V(-\beta)-1R_\beta V} \\ \delta^\nu_\beta\widehat{R}_{V(-\beta)-1}\widehat{L}_V \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{12.3.28a}$$

$$J^{\dagger q_0}_{(\cdot)} = \begin{array}{cc} & q_0 \\ \begin{array}{c} V \\ R_\nu \\ Q_{b+1} \end{array} & \begin{pmatrix} \widehat{R}_{V-1R_0} - \widehat{R}_{V-1}\widehat{L}_{V-1R_0V} \\ \delta^\nu_0\widehat{R}_{V-1}\widehat{L}_V \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{12.3.28b}$$

$$J^{\dagger q_{j+1}}_{(\cdot)} = \begin{array}{cc} & q_{j+1} \\ \begin{array}{c} V \\ R_\nu \\ Q_{b+1} \end{array} & \begin{pmatrix} \widehat{R}_{V(j+1)-1Q_j} - \Delta^{-j-1}\widehat{R}_{V(j+1)-1}\widehat{L}_{V(j+1)-1Q_jV} \\ 0 \\ \delta^j_b\widehat{R}_{V(j+1)-1}\widehat{L}_V \end{pmatrix} \end{array}. \tag{12.3.28c}$$

Умножая матрицу Jb (12.3.24, 26) на матрицу $J^\dagger$ (12.3.28), находим следующие матричные элементы произведения $JbJ^\dagger$ в левой части уравнения (12.3.21):

1) $$\begin{aligned}(JbJ^\dagger)^{r_\beta}_{r_\alpha} &= \widehat{L}_{V(-\alpha)-1}\widehat{R}_V(\Delta^\beta\widehat{L}_{R_{\alpha+\beta}} - \widehat{R}_{R_{\alpha+\beta}}\Delta^{-\alpha})\widehat{R}_{V(-\beta)-1}\widehat{L}_V = \\ &= \Delta^\beta\widehat{L}_{V(-\alpha-\beta)-1}\widehat{R}_{V(-\beta)}\widehat{L}_{R_{\alpha+\beta}}\widehat{R}_{V(-\beta)-1}\widehat{L}_V - \\ &\quad - \widehat{L}_{V(-\alpha)-1}\widehat{R}_V\widehat{R}_{R_{\alpha+\beta}}\widehat{R}_{V(-\alpha-\beta)-1}\widehat{L}_{V(-\alpha)}\Delta^{-\alpha} = \\ &= \Delta^\beta\widehat{L}_{V(-\alpha-\beta)-1R_{\alpha+\beta}V} - \widehat{R}_{V(-\alpha-\beta)-1R_{\alpha+\beta}V}\Delta^{-\alpha} \overset{(12.3.20)}{=} \Phi(B^{(N)}_{\alpha\beta}),\end{aligned}$$

как и требовалось;

2) $(JbJ^\dagger)^{q_0}_{r_\alpha} = (1-\delta^0_\nu)\delta^0_\nu = 0$, как и следовало ожидать;

3) $(JBJ^\dagger)^{q_j+1}_{r_\alpha} = 0$. Таким образом, r–переменные отщепляются. Далее,

4) $$\begin{aligned}(JbJ^\dagger)^{q_0}_{q_0} &= \widehat{R}_V(\widehat{R}_{V^{-1}R_0} - \widehat{R}_{V^{-1}}\widehat{L}_{V^{-1}R_0V}) + (1-\delta^0_\nu)\delta^0_\nu = \\ &= \widehat{R}_{V^{-1}R_0V} - \widehat{L}_{V^{-1}R_0V} = -\Phi(\mathrm{ad}_{q_0}) \overset{(12.1.12)}{=} \Phi(B^{\text{КП}}_{00});\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}(JbJ^\dagger)^{q_j+1}_{q_0} &= \widehat{R}_V[\widehat{R}_{V(j+1)-1Q_j} - \Delta^{-j-1}\widehat{R}_{V(j+1)-1}\widehat{L}_{V(j+1)-1Q_jV}] = \\ &= \widehat{R}_{V(j+1)-1Q_jV} - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{V(j+1)-1Q_jV} = \\ &= \Phi(\widehat{R}_{q_{j+1}} - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{q_{j+1}}) = \Phi(B^{\text{КП}}_{0,j+1});\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}(JbJ^\dagger)^{q_j+1}_{q_i+1} &= \widehat{L}_{V(i+1)-1}\widehat{R}_V(\widehat{R}_{Q_{i+j+1}}\Delta^{i+1} - \Delta^{j-1}\widehat{L}_{Q_{i+j+1}})\widehat{R}_V^{(j+1)-1}\widehat{L}_V = \\ &= \widehat{L}_{V(i+1)-1}\widehat{R}_{Q_{i+j+1}V}\widehat{R}_{V(i+j+2)-1}\widehat{L}_{V(i+1)}\Delta^{i+1} \\ &\quad - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{V(i+j+2)-1}\widehat{R}_{V(j+1)}\widehat{L}_{Q_{i+j+1}}\widehat{R}_{V(j+1)-1}\widehat{L}_V = \\ &= \widehat{R}_{V(i+j+2)-1Q_{i+j+1}V}\Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{V(i+j+2)-1Q_{i+j+1}V} = \\ &= \Phi(\widehat{R}_{q_{i+j+2}}\Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1}\widehat{R}_{q_{i+j+2}}) = \Phi(B^Q_{i+1,j+1}).\end{aligned}$$ ∎

Вернемся к недоконченному доказательству гамильтоновости матрицы $B^{[N]V}$ (12.3.6). Вместо этого, докажем гамильтоновость матрицы $b = B^{[N]V} \oplus B^Q$. Для этого расширим кольцо $C_{r,q}$ посредством V, в кольцо $C_{V,r,q}$. Продолженное соответственно отображение Φ становится при этом обратимым.

Теорема 12.3.29. (i) Продолженное преобразование Миуры является гамильтоновым, между матрицей $B^{[N]V} \oplus B^Q$ и матрицей $B^{(N)} \oplus B^{V\text{КП}}$, где

$$B^{V\text{КП}} = \begin{array}{c|cc} & V & q_i \\ \hline V & 0 & -\widehat{L}_V\delta^0_j \\ q_i & \widehat{R}_V\delta^0_i & B^{\text{КП}}_{ij} \end{array}, \tag{12.3.30}$$

(ii) Матрица $B^{V\text{КП}}$ гамильтонова;
(iii) Матрица $B^{(N)} \oplus B^{V\text{КП}}$ порождает уравнения движения (9.5.31)

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \tag{12.3.31a}$$

$$\partial_P(V) = -V\,\mathrm{Res}(P), \quad P = L^n, \tag{12.3.31b}$$

Следствие 12.3.32. Матрица $B^{[N]V}$ гамильтонова.

Доказательство. Действительно, в силу Теоремы 12.3.29 (i), (ii), матрица $B^{[N]V} \oplus B^Q$ гамильтонова, будучи просто образом гамильтоновой матрицы $B^{(N)} \oplus B^{V\text{КП}}$ при обратимом изоморфизме Φ^{-1}. ∎

Доказательство Теоремы 12.3.29. (iii) Уравнение движения (12.3.31b) имеет вид

$$\partial_P(V) = -Vp_0(n) \overset{(12.1.7)}{=} -V\frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_0},$$

и применяя V–строку матрицы $B^{V\text{КП}}$ (12.3.30) к вектору $(0, \dfrac{\delta H}{\delta q^t})^t$, получаем тот же результат;
(ii) Матрица $B^{V\text{КП}}$ линейна. Вычисляя соответствующий коммутатор, получаем

$$\begin{aligned}\left[B^{V\text{КП}}\begin{pmatrix} x \\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}\right]^t \begin{pmatrix} y \\ \boldsymbol{Y}\end{pmatrix} &= -VX_0y + xVY_0 + B^{\text{КП}}(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y} \approx \\ &\approx -V(X_0y - Y_0x) - \boldsymbol{q}^t[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}],\end{aligned} \qquad (12.3.33)$$

где $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ коммутатор в алгебре Ли $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0$ (12.1.14). Таким образом,

$$-\left[\begin{pmatrix} x \\ \widehat{X}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \widehat{Y}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} X_0y - Y_0x \\ [\widehat{X}, \widehat{Y}]\end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} X = \sum_{i\geqslant 0} X_i\zeta^i, \\ Y = \sum_{j\geqslant 0} Y_j\zeta^j. \end{array} \qquad (12.3.34)$$

Так как $\widehat{X} \mapsto \widehat{L}_{X_0}$ является (как легко видеть) представлепием алгебры Ли $\mathcal{G}$, то матрица $-B^{V\text{КП}}$ яаляется гамильтоповой матрицей, ассоциированной с полупрямой суммой алгебр Лн $\text{Lie}(R[[\zeta]]) \ltimes R$;
(i) Следует проверить тождество

$$D(\Phi)(B^{[N]V} \oplus B^Q)D(\Phi)^\dagger = \Phi(B^{(N)} \oplus B^{V\text{КП}}). \qquad (12.3.35)$$

Левая часть отлячается от левой части уже доказанного тождества (12.3.21) налнчием одной дополнительной строки в матрице $D(\Phi)$:

$$Extra = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & R_\nu & Q_a \end{array} \\ V & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}. \qquad (12.3.36)$$

и одиого дополнительиого столбца в матряце $D(\Phi)^\dagger$:

$$Extra^\dagger = \begin{array}{cc} & V \\ V & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \\ R_\nu & \\ Q_b & \end{array} \qquad Extra^\dagger = \begin{array}{c|c} & V \\ \hline V & 1 \\ R_\nu & 0 \\ Q_b & 0 \end{array}. \qquad (12.3.37)$$

Следовательно, в произведенни $D(\Phi)b$ получаем одну лишнюю строку

$$Extra \circ b = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} V & R_\nu & Q_b \end{array} \\ V & \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\delta^0_\nu\widehat{R}_V & 0 \end{array}\right) \end{array}. \qquad (12.3.38)$$

Следовательно, V–строка в левой части уравиения (12.3.35) содержит следующие элементы:

1) (V, V) : 0;
2) (V, r_β) : $-\delta^0_\nu\widehat{R}_V\delta^\nu_\beta(\dots) = 0$, так как $\beta > 0$;
3) (V, q_0) : $-\delta^0_\nu\widehat{R}_V\delta^\nu_0\widehat{R}_{V-1}\widehat{L}_V = -\widehat{L}_V$;
4) (V, q_{j+1}) : 0.

Опи совпадают с элементами V–строки матрицы $B^{(N)} \oplus B^{V\text{КП}}$. ▮

> Чего вы от меня хотите — пересказать то же самое на худшем английском?
>
> Роберт Фрост, в ответ на просьбу объяснить одно из его стихотворений

12.4 Щелевые редукции и вторая гамильтонова структура

В этом разделе обсуждаются препятствия, в форме *нелокальностей*, к существованию второй гамильтоновой структуры для неспециализированных дискретных интегрируемых систем и любой гамильтоновой структуры для их щелевых специализаций.

Мы начнем с чистой иерархии КП, чтобы иметь как можно более простую ситуацию:

$$L = \zeta + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} q_j, \tag{12.4.1}$$

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^n, \tag{12.4.2}$$

$$\partial_P(q_i) = \sum_j B_{ij}^{\text{КП}} \left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j} \right), \quad H_n = n^{-1} \operatorname{Res}(L^n), \tag{12.4.3}$$

$$B_{ij}^{\text{КП}} = \Delta^{-j} \widehat{L}_{q_{i+j}} - \widehat{R}_{q_{i+j}} \Delta^i. \tag{12.4.4}$$

Это формулы (12.1.2–4,7,10,12); имеем также

$$\partial_P(q_i) = \sum B_{ij}^{\text{КП}}(p_j(n)), \tag{12.4.5}$$

$$L^n = \sum_s p_s(n) \zeta^s, \tag{12.4.5$'$}$$

$$p_j(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.4.6}$$

Если возникает желание выразить уравнения движения (12.4.5) не в терминах H_{n+1} (12.4.6), а в терминах H_n, необходимо найти соотношение между $(L^n)_+$ и $(L^{n+1})_+$. Обычные рассуждения проводятся следующим образом. Распишем двойное тождество $L^{n+1} = L^n L = L L^n$:

$$\sum p_s(n+1)\zeta^s = \sum p_s(n)\zeta^s \Big(\zeta + \sum \zeta^{-j} q_j\Big) = \Big(\zeta + \sum \zeta^{-j} q_j\Big) \sum p_s(n)\zeta^s \quad \Rightarrow \tag{12.4.7}$$

$$p_s(n+1) = p_{s-1}(n) + \sum p_{s+j}(n) q_j^{(s)} = p_{s-1}(n)^{(1)} + \sum \big[q_j p_{s+j}(n)\big]^{(-j)}. \tag{12.4.8}$$

Мы видим, что успех этого подхода определяется тем, удастся или нет выразить

$p_{-1}(n)$ в терминах $\{p_j(n) | j \geqslant 0\}$. При $s = 0$, равенство (12.4.8) дает

$$p_{-1}(n) + \sum p_j(n) q_j = p_{-1}(n)^{(1)} + \sum \Delta^{-j}(q_j p_j(n)) \quad \Rightarrow \tag{12.4.9}$$

$$(1 - \Delta)(p_{-1}(n)) = \sum_{j \geqslant 1} (\Delta^j - 1)(q_j p_j(n)) + \sum_{j \geqslant 0} [q_j, p_j(n)] \quad \Rightarrow \tag{12.4.10}$$

$$p_{-1}(n) = -\sum_{j \geqslant 0} \frac{\Delta^j - 1}{\Delta - 1}(q_j p_j(n)) + (1 - \Delta)^{-1} \sum_{j \geqslant 0} [q_j, p_j(n)]. \tag{12.4.11}$$

К сожалению, в некоммутативном царстве второе слагаемое в правой части (12.4.11) нелокально, и губит все (локальное) предприятие.

Почти идентичные рассуждения показывают, почему, в отличие от коммутативного случая, (вторая) гамильтонова структура не существует, как локальный объект для щелевой редукции. Отборсим все черточки в формулах (10.4.21–25):

$$L = \zeta\Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{-\gamma i} q_i\Big), \tag{12.4.12}$$

$$L^{\gamma n} = \sum p_s(\gamma n) \zeta^{\gamma s}, \quad L^{\gamma n - 1} = \sum p_s(\gamma n - 1) \zeta^{\gamma s - 1}, \tag{12.4.13}$$

$$p_i(\gamma n - 1) = \frac{\delta H_{n\gamma}}{\delta q_i}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{12.4.14}$$

Уравнения движения

$$\partial_P(L) = [P_+, L], \quad P = L^{\gamma n}, \tag{12.4.15}$$

принимают вид

$$\partial_P(L) = \sum \zeta^{1-\gamma i} \partial_P(q_i) = \Big[\sum_{s \geqslant 0} p_s(\gamma n) \zeta^{\gamma s}, \sum \zeta^{1-\gamma j} q_j\Big]_- =$$

$$= \sum \zeta^{1-\gamma(j-s)} [p_s^{(\gamma j - \gamma s - 1)} q_j - (q_j p_s)^{(-\gamma s)}]_- , \quad p_s = p_s(\gamma n) \quad \Rightarrow \tag{12.4.16}$$

$$\partial_P(q_i) = \sum_{s \geqslant 0} \big[p_s^{(\gamma i - 1)} q_{i+s} - (q_{i+s} p_s)^{(-\gamma s)}\big], \quad p_s = p_s(\gamma n). \tag{12.4.17}$$

Сравнивая формулы (12.4.14) и (12.4.17) видим, что требуется выразить $(L^{\gamma n})_+$ в терминах $(L^{\gamma n - 1})_{\geqslant \gamma - 1}$. Расписывая двойное тождество $L^{\gamma n} = L^{\gamma n - 1} L = L L^{\gamma n - 1}$, получаем

$$\sum p_s(\gamma n) \zeta^{\gamma s} = \sum p_s(\gamma n - 1) \zeta^{\gamma s - 1}\Big(\zeta + \sum_1 \zeta^{1-\gamma j} q_j\Big) =$$

$$= \Big(\zeta + \sum_1 \zeta^{1-\gamma j} q_j\Big) \sum p_s(\gamma n - 1) \zeta^{\gamma s - 1},$$

откуда

$$p_s(\gamma n) = p_s(\gamma n - 1) + \sum p_{s+j}(\gamma n - 1) q_j^{(s)} =$$

$$= p_s(\gamma n - 1)^{(1)} + \sum [q_j p_{s+j}(\gamma n - 1)]^{(1 - \gamma j)}. \tag{12.4.18}$$

Нам требуется подставить $p_0(\gamma n)$ в уравнения движения (12.4.17), для этого требуется иметь $p_0(\gamma n - 1)$ в тождествах (12.4.18), а вариационная формула (12.4.14) дает только $p_i(\gamma n-1)$ при $i \in \mathbb{N}$. Поэтому мы опять полагаем $s=0$ в формуле (12.4.18), и получаем

$$(1-\Delta)(p_0(\gamma n-1)) = \sum_{j \geqslant 1} [\Delta^{1-\gamma j}(q_j p_j(\gamma n-1)) - p_j(\gamma n-1) q_j], \tag{12.4.19}$$

откуда, снова,

$$p_0(\gamma n-1) = -\sum_{j \geqslant 1} \frac{\Delta^{1-\gamma j}-1}{\Delta-1}(q_j p_j(\gamma n-1)) + (1-\Delta)^{-1} \sum_{j \geqslant 1} [q_j, p_j(\gamma n-1)], \tag{12.4.20}$$

неизбежная нелокальность сопутствующая некоммутативности.

Интерпретации дозволены, но факты священны.

Чарльз Прествич Скотт (1846–1932),
редактор *Manchester Guardian*

12.5 Формула типа Концевича

В этом разделе мы устанавливаем дифференциально-разностную версию чисто дифференциальной Теоремы 6.5.9.

Согласно формуле (9.1.30),

$$\partial_P(q_0) \sim 0, \quad \forall\, P = L^n, \tag{12.5.1}$$

$$L = \zeta^N + \sum \zeta^{N-1-i} q_i, \tag{12.5.2}$$

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-]. \tag{12.5.3}$$

С другой стороны, из гамильтоновой формы $\{B^{(N)}$ (12.1.17) $\oplus B^{\text{КП}}$ (12.1.12)$\}$ уравнений (12.5.3) получаем

$$\partial_P(q_0) = \partial_P(r_{N-1}) = (\Delta - \Delta^{-1})\left(\frac{\delta H}{\delta r_1}\right), \quad N > 1, \quad H = H_{n+1}, \tag{12.5.4}$$

$$\partial_P(q_0) = \sum_{j \geqslant 0} B^{\text{КП}}_{0j}\left(\frac{\delta H}{\delta q_j}\right) = \sum (\widehat{R}_{q_j} - \Delta^{-j}\widehat{L}_{q_j})\left(\frac{\delta H}{\delta q_j}\right) \sim \sum_{j \geqslant 0} [q_j, \frac{\delta H}{\delta q_j}], \quad N = 1. \tag{12.5.5}$$

Как и в §6.5, мы приходим к гипотезе, что

$$\sum_{j \geqslant 0} [q_j, \frac{\delta H}{\delta q_j}] \sim 0, \quad \forall\, H \in R_0\langle q_j^{(g|\nu)} \rangle, \tag{12.5.6}$$

где R_0 подкольцо R, на котором G действует тождественно, а ∂ — тривиально; например, годится $R_0 = \mathbb{Z}$. Доказательство близко следует доказательству Теоремы 6.5.9. Выберем в качестве H моном,

$$H = u_1 \dots u_n, \quad u_s = q_{i(s)}^{(g(s)|\nu(s))}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \tag{12.5.7}$$

и обозначим

$$\Pi_s^+ = u_s^{-1} u_s \ldots u_n, \quad \Pi_s^- = u_1 \ldots u_s u_s^{-1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{12.5.8}$$

Тогда

$$\frac{\delta H}{\delta q_i} = \sum_{s=1}^{n} \widehat{g(s)}^{-1} (-\partial)^{\nu(s)} (\Pi_s^+ \Pi_s^-) \delta^i_{i(s)} \quad \Rightarrow \tag{12.5.9}$$

$$\sum_i q_i \frac{\delta H}{\partial q_i} = \sum_s q_{i(s)} \widehat{g(s)}^{-1} (-\partial)^{\nu(s)} (\Pi_s^+ \Pi_s^-) \sim \sum_s q_{i(s)}^{(g(s)|\nu(s))} \Pi_s^+ \Pi_s^- =$$

$$= \sum u_s \Pi_s^+ \Pi_s^-, \tag{12.5.10}$$

$$\sum_i \frac{\delta H}{\delta q_i} q_i = \sum_s [\widehat{g(s)}^{-1} (-\partial)^{\nu(s)} (\Pi_s^+ \Pi_s^-)] q_{i(s)} \sim \sum \Pi_s^+ \Pi_s^- u_s \quad \Rightarrow \tag{12.5.11}$$

$$\sum [q_i, \frac{\delta H}{\delta q_i}] \sim \sum_s [u_s, \Pi_s^+ \Pi_s^-] \quad \overset{\text{Л. } 6.5.18}{=} \; 0.$$

12.6 Третья гамильтонова структура иерархии МКП

В этом разделе мы определяем третью гамильтонову структуру дискретной иерархии МКП при $N = 1$, посредством введения новых координат в пространстве динамических переменных.

В случае $N = 1$ иерархия МКП имеет вид

$$\mathcal{L} = \zeta \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} Q_j, \tag{12.6.1}$$

$$\partial_{t_n}(\mathcal{L}) = [(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]. \tag{12.6.2}$$

Положим

$$\Lambda = \sum_{j \geqslant 0} R_j \zeta^{-j} = \Big(\sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} Q_j\Big)^{-1}, \tag{12.6.3}$$

так что

$$\mathcal{L} = \zeta \Lambda^{-1}. \tag{12.6.4}$$

Очевидно, наборы переменных $\{R_j\}$ и $\{Q_j\}$ связаны обратимым изоморфизмом. Здесь мы будем придерживаться переменных R_j. Переменные типа R_j иногда будут называться G-координатами.

Находим, используя формулу вычетов и обозначение

$$\mathcal{L}^n = \sum_s \zeta^s \pi_s(n) : \tag{12.6.5}$$

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})] = \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n \zeta (-\Lambda^{-1}) d(\Lambda) \Lambda^{-1}] \approx - \operatorname{Res}[d(\Lambda) \Lambda^{-1} \mathcal{L}^{n+1}] =$$

$$= -\operatorname{Res}[d(\Lambda)\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+2}] = -\operatorname{Res}\Big(\sum dR_j\zeta^{-j}\zeta^{s-1}\pi_s(n+2)\Big) =$$

$$= -\sum_{j\geqslant 0} dR_j\pi_{j+1}(n+2) \quad \Rightarrow$$

$$\pi_{i+1}(n) = -\frac{\delta\mathcal{H}_{n-1}}{\delta R_i}, \quad i \in \mathbb{Z}_+,\ n > 1 \quad \Rightarrow \tag{12.6.6}$$

$$(\mathcal{L}^n)_{>0} = \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{j-1}\pi_{j+1}(n) = \zeta\sum_{j\geqslant 0}\zeta^j\frac{\delta(-\mathcal{H}_{n-1})}{\delta R_j}, \quad n > 1. \tag{12.6.7}$$

Обратившись теперь к уравнениям движения (12.6.2), получаем, обозначив $\partial_{t_n} = \partial_t$ и $(\mathcal{L}^n)_{>0} = \mathcal{R}$:

$$\partial_t(\mathcal{L}) = \partial_t(\zeta\Lambda^{-1}) = -\zeta\Lambda^{-1}\partial_t(\Lambda)\Lambda^{-1} = [\mathcal{R}, \mathcal{L}] = [\mathcal{R}, \zeta\Lambda^{-1}] = \mathcal{R}\zeta\Lambda^{-1} - \zeta\Lambda^{-1}\mathcal{R} \quad \Rightarrow$$

$$\partial_t(\Lambda) = \mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta = (\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta)_{\leqslant 0}. \tag{12.6.8}$$

При помощи формулы (12.6.7) и обозначений

$$X_j = \frac{\delta(-\mathcal{H}_{n-1})}{\delta R_j}, \quad \widehat{X} = \sum_{j\geqslant 0}\zeta^i X_j$$

перепишем уравнения движения (12.6.8) покомпонентно:

$$\partial_t(\Lambda) = \sum_{e\geqslant 0}\partial_t(R_i)\zeta^{-i} = \Big(\sum\zeta^{j+1}X_jR_j\zeta^{-i} - \sum R_i\zeta^{-i}\zeta^jX_j\zeta\Big)_{\leqslant 0} =$$

$$= \Big(\sum\big[(X_jR_i)^{(j+1)} - R_iX_j^{(j-i)}\big]\zeta^{j+1-i}\Big)_{\leqslant 0} =$$

$$= \sum\big[(X_jR_{i+j+1})^{(j+1)} - R_{i+j+1}X_j^{(-i-1)}\big]\zeta^{-i},$$

откуда

$$\partial_t(R_i) = \sum_{j\geqslant 0}(\Delta^{j+1}\widehat{R}_{R_{i+j+1}} - \widehat{L}_{R_{i+j+1}}\Delta^{-i-1})\left(\frac{\delta(-\mathcal{H}_{n-1})}{\delta R_j}\right). \tag{12.6.9}$$

Таким образом, мы пришли к матрице $B^{\text{МКП}_3}$:

$$B_{ij}^{\text{МКП}_3} = \Delta^{1+j}\widehat{R}_{R_{i+j+1}} - \widehat{L}_{R_{i+j+1}}\Delta^{-i-1}. \tag{12.6.10}$$

Покажем, что она гамильтонова. Имеем:

$$B^{\text{МКП}_3}(\boldsymbol{X})^tY \approx \sum Y_iB_{ij}(X_j) = \sum Y_i\partial_t(R_i) = \sum Y_i\operatorname{Res}[\partial_t(\Lambda)\zeta^i] \approx$$

$$\approx \sum\operatorname{Res}[\partial_t(\Lambda)\zeta^iY_i] = \operatorname{Res}[\partial_t(\Lambda)\widehat{Y}] = \operatorname{Res}[\zeta\widehat{X}\Lambda - \Lambda\widehat{X}\zeta)\widehat{Y}] \approx$$

$$\approx \operatorname{Res}[\Lambda(\widehat{Y}\zeta\widehat{X} - \widehat{X}\zeta\widehat{Y})] = \operatorname{Res}[\Lambda(\zeta^{-1}[\zeta\widehat{Y}, \zeta\widehat{X}])]. \tag{12.6.11}$$

Следовательно, матрица $B^{\text{МКП}_3}$ гамильтонова и, с точностью до знака, совпадает с матрицей, ассоциированной с алгеброй Ли ${}^1\mathcal{G}$:

$$B^{\text{МКП}_3} = -B({}^1\mathcal{G}), \tag{12.6.12}$$

где ${}^r\mathcal{G}$ алгебра Ли ассоциативного кольца

$$\Big\{\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{i+r}Z_i \mid Z_i \in R\Big\}. \tag{12.6.13}$$

Конечно, как полагается при работе с третьей гамильтоновой структурой, мы должны проверить отдельно случай первого потока, гамильтониан $\mathcal{H}_0$ которого не был определен. Для этого потока

$$(\mathcal{L}^1)_{>0} = \zeta Q_0 = \zeta R_0^{-1}, \tag{12.6.14}$$

я подставляя в уравнение (12.6.8), находим

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}(\Lambda) &= \sum \partial_{t_1}(R_i)\zeta^{-i} = \zeta R_0^{-1}\sum R_i\zeta^{-i} - \sum R_i\zeta^{-i}\zeta^{-1}\zeta R_0^{-1}\zeta = \\ &= \zeta R_0^{-1}\Big(R_0 + \sum R_{i+1}\zeta^{-i-1}\Big) - \Big(R_0 + \sum R_{i+1}\zeta^{-i-1}\Big)R_0^{-1}\zeta = \\ &= \sum\big[(R_0^{-1}R_{i+1})^{(1)} - R_{i+1}R_0^{(-i-1)-1}\big]\zeta^{-i} \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{12.6.15}$$

$$\begin{aligned} \partial_{t_1}(R_i) &= (R_0^{-1}R_{i+1})^{(1)} - R_{i+1}R_0^{(-i-1)-1} = (\Delta\widehat{R}_{R_{i+1}} - \widehat{L}_{R_{i+1}}\Delta^{-i-1})(R_0^{-1}) = \\ &= B_{i0}^{\text{МКП}_3}\left(\frac{\delta\mathcal{H}_0}{\delta R_0}\right), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{12.6.16}$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \ln R_0 \quad (= -\text{“}\operatorname{Res}(\ln\mathcal{L})\text{”}). \tag{12.6.17}$$

Упражнение 12.6.18. Определите причину, из-за которой нельзя получить подобным способом третью гамильтонову структуру для дискретной иерархии КП.

Замечание 12.6.19. Обозначим $I_k = I_k(R)$ идеал в пространстве переменных R_i, порожденный $R_i^{(s)}$ при $i \geqslant k$. Из формулы (12.6.9) следует

$$\partial_t(I_k) \subset I_{k+1}. \tag{12.6.20}$$

Таким образом, мы можем наложить на иерархию МКП самосогласованную связь

$$\{0 = R_{k+1} = R_{k+2} = \dots\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.6.21}$$

С учетом определения переменных R_i (12.6.3), отсюда следует, что иерархия МКП (12.6.2) допускает бесконечное число *нетривиальных* связей

$$\{Q_i = Q_i(Q_0, \dots, Q_k), \quad i > k\}, \tag{12.6.22}$$

заранее неочевидный факт. (“Тривиальные” связи

$$\{Q_i = 0,\ i > k\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \tag{12.6.23}$$

мы уже видели раньше.) В двух следующих главах нам встретятся еще другие примеры таких нетривиальных связей, как для КП, так и для МКП. Но пока что, взглянем на иерархию КП. Переходя к G–координатам

$$L = \zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i = \zeta\Big(1 + \sum\zeta^{-i-1}q_i\Big) = \zeta\bar{\Lambda}^{-1}, \tag{12.6.24}$$

$$\bar{\Lambda} = 1 + \sum_{i\geqslant 0} r_i\zeta^{-i-1} = \Big(1 + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i-1}q_i\Big)^{-1}, \tag{12.6.25}$$

приведем уравнения движения иерархии КП

$$\partial_t(L) = [\bar{\mathcal{R}}, L], \quad \bar{\mathcal{R}} = (L^n)_+, \tag{12.6.26}$$

к виду, аналогичному формуле (12.6.8):

$$\partial_t(\bar{\Lambda}) = \bar{\mathcal{R}}\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}\zeta^{-1}\bar{\mathcal{R}}\zeta = (\bar{\mathcal{R}}\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}\zeta^{-1}\bar{\mathcal{R}}\zeta)_{<0}. \tag{12.6.27}$$

Подставляя

$$\bar{\mathcal{R}} = \sum_{j\geqslant 0} \zeta^j X_j, \quad (X_j = \mathrm{Res}(\zeta^{-j}L^n)) \tag{12.6.28}$$

в формулу (12.6.27), получаем

$$\begin{aligned}
\partial_t(\bar{\Lambda}) &= \sum_{i\geqslant 0} \partial_t(r_i)\zeta^{-i-1} = \\
&= \Big\{\sum \zeta^j X_j\Big(1 + \sum r_i\zeta^{-i-1}\Big) - \Big(1 + \sum r_i\zeta^{-i-1}\Big)\zeta^{j-1}X_j\zeta\Big\}_- = \\
&= \Big\{\sum [(X_j r_i)^{(j)} - r_i X_j^{(j-i-2)}]\zeta^{j-i-1}\Big\}_- = \sum [X_j r_{i+j}^{(j)} - r_{i+j}X_j^{(-i-2)}]\zeta^{-i-1},
\end{aligned}$$

так что

$$\partial_t(r_i) = \sum_{j\geqslant 0} (\Delta^j \widehat{R}_{r_{i+j}} - \widehat{L}_{r_{i+j}}\Delta^{-i-2})(\mathrm{Res}(\zeta^{-j}L^n)). \tag{12.6.29}$$

Отсюда следует, что

$$\partial_t(I_k) \subset I_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{12.6.30}$$

где I_k идеал в пространстве r_i, порожденный $r_i^{(s)}$ при $i \geqslant k$. Таким образом, иерархия КП допускает связь

$$\{0 = r_{k+1} = r_{k+2} = \dots\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{12.6.31}$$

которая, на языке q_i (12.6.25), превращается в неочевидную связь

$$\{q_i = q_i(q_0, \dots, q_k), \quad i > k\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.6.31$'$}$$

Замечание 12.6.32. 3-я гамильтонова структура $B^{\text{МКП}_3}$ (12.6.10) иерархии МКП совместна с процедурой конечного обрыва оператора Λ (12.6.3):

$$\{0 = R_k = R_{k+1} = \dots\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{12.6.33}$$

Аналогично, 1-я гамильтонова структура B (12.2.12) иерархии МКП совместна с процедурой конечного обрыва в пространстве Q. Однако, так как конечные обрывы в различных пространствах *несовместны друг с другом*, возникает вопрос о совместности обрыва в одном наборе переменных с гамильтоновой структурой, полученной изначально в другом наборе.

Теорема 12.6.34. Обозначим временно через B^R гамильтонову матрицу $B^{\text{МКП}_3}$ (12.6.10), и пусть $\Phi : C_Q \to C_R$ обозначает изоморфизм (12.6.3):

$$\Phi\Big(\sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i}Q_i\Big) = \sum \zeta^{-i}\Phi(Q_i) = \Big(\sum_{j\geqslant 0} R_j\zeta^{-j}\Big)^{-1} = \Lambda^{-1}. \tag{12.6.35}$$

Пусть B^Q есть гамильтонова матрица B^R, переписанная в переменных Q :

$$B^Q = \Phi^{-1}(JB^RJ^\dagger), \quad J = \frac{D\Phi}{DR}. \tag{12.6.36}$$

Матрица B^Q не совместна с процедурой конечного обрыва в переменных Q.

Доказательство. Так как

$$\Phi_i = \Phi(Q_i) = \operatorname{Res}(\zeta^i \Lambda^{-1}),$$

то имеем

$$\begin{aligned} J_{ij}(X) = \frac{DQ_i}{DR_j}(X) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\Phi_i|_{R_j \mapsto R_j + \varepsilon X}) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \operatorname{Res}[\zeta^i(\Lambda + \varepsilon X \zeta^{-j})^{-1}| = \\ &= -\operatorname{Res}(\zeta^i \Lambda^{-1} X \zeta^{-j} \Lambda^{-1}) = -\sum_{k,s} \Phi \operatorname{Res}(\zeta^i \zeta^{-k} Q_k X \zeta^{-j} \zeta^{-s} Q_s) = \\ &= -\Phi\Big(\sum_{k+s=i-j} (Q_k X)^{(i-k)} Q_s \Big) = - \sum_{k+s=i-j} \Phi(\widehat{R}_{Q_S} \Delta^{-i-k} \widehat{L}_{Q_k})(X), \end{aligned} \qquad (12.6.37)$$

откуда

$$J_{ij} = - \sum_{k+s=i-j} \Phi(\widehat{R}_{Q_S} \Delta^{i-k} \widehat{L}_{Q_k}), \qquad (12.6.38)$$

Таким образом, матрица J нижне-треугольная,

$$(J_{ij})^\dagger = - \sum_{k+s=i-j} \Phi(\widehat{R}_{Q_k} \Delta^{k-i} \widehat{L}_{Q_S}), \qquad (12.6.39)$$

а $J^\dagger$ верхне-треугольная. Следовательно, по формуле (12.6.36)

$$B^Q_{i0} = \sum_{\alpha=0}^{i} \Phi^{-1}(J_{i\alpha} B^R_{\alpha 0} J^\dagger_{00}). \qquad (12.6.40)$$

Фиксируем $i \geqslant 2$ и наложим связь

$$\{0 = Q_i = Q_{i+1} = \dots\}. \qquad (12.6.41)$$

Покажем, что при этой связи B^Q_{i0} не равен нулю. Более того, увидим, что B^Q_{i0} не зануляется, даже если положить нулем *все* переменные Q кроме Q_0 и Q_1. В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}\Big(\sum R_j \zeta^{-j}\Big) &= (Q_0 + \zeta^{-1} Q_1)^{-1} = \\ = [(1 + \zeta^{-1} Q_1/Q_0) Q_0]^{-1} &= Q_0^{-1}(1 + \zeta^{-1} Q_1/Q_0)^{-1} = \\ &= Q_0^{-1} x^{-1} \sum_{s \geqslant 0} x \dots x^{(-s)} \zeta^{-s}, \quad x = -Q_1/Q_0, \end{aligned} \qquad (12.6.42)$$

так что

$$\bar{R}_j := \Phi^{-1}(R_j) = Q_0^{-1} x^{-1} x \dots x^{(-j)}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \qquad (12.6.43)$$

Следовательно,

$$-B^Q_{i0}[\Phi^{-1}(J^\dagger_{00})]^{-1} = \sum_{\alpha+k+s=i} \widehat{R}_{Q_s} \Delta^{i-k} \widehat{L}_{Q_k} (\Delta \widehat{R}_{\Phi^{-1}}(R_{\alpha+1}) - \widehat{L}_{\Phi^{-1}(R_{\alpha+1})} \Delta^{-\alpha-1}), \qquad (12.6.44)$$

я нужно оставить в этой сумме только 4 слагаемых с $0 \leqslant k, s \leqslant 1$, так как все Q_i при $i > 1$ равны нулю. Таким образом, $(k, s, \alpha) \in \{(0,0,i), (0,1,i-1), (1,0,i-1),$

$(1, 1, i-2)\}$, и правая часть формулы (12.6.44) превращается в

$$\widehat{R}_{Q_0}\Delta^{i}\widehat{L}_{Q_0}(\Delta\widehat{R}_{\bar{R}_{i+1}} - \widehat{L}_{\bar{R}_{i+1}}\Delta^{-i-1}) + \tag{12.6.45a}$$

$$+\widehat{R}_{Q_1}\Delta^{i}\widehat{L}_{Q_0}(\Delta\widehat{R}_{R_i} - \widehat{L}_{\bar{R}_i}\Delta^{-i}) + \tag{12.6.45b}$$

$$+\widehat{R}_{Q_0}\Delta^{i-1}\widehat{L}_{Q_1}(\Delta\widehat{R}_{\bar{R}_i} - \widehat{L}_{\bar{R}_i}\Delta^{-i}) + \tag{12.6.45c}$$

$$+\widehat{R}_{Q_1}\Delta^{i-1}\widehat{L}_{Q_1}(\Delta\widehat{R}_{\bar{R}_{i-1}} - \widehat{L}_{\bar{R}_{i-1}}\Delta^{-i+1}). \tag{12.6.45d}$$

Эти 8 членов разбиваются в 4 пары, со степенями Δ из $\{i+1, i, -1, 0\}$. Δ^0–члены, $b2$ и $d2$, комбинируются в

$$-\widehat{R}_{Q_1}\widehat{L}_{(\dots)^{(i-1)}}, \tag{12.6.46}$$

где

$$(\dots) = (Q_0\bar{R}_i)^{(1)} + Q_1\bar{R}_{i-1} \overset{(12.6.42,\ 43)}{=}$$

$$= Q_0^{(1)}x\dots x^{(1-i)} + Q_1x^{(-1)}\dots x^{(1-i)} = (Q_0^{(1)}x + Q_1)x^{-1}\dots x^{(1-i)} \neq 0, \tag{12.6.47}$$

так как

$$Q_0^{(1)}x + Q_1 = -Q_0^{(1)}Q_1Q_0^{-1} + Q_1. \qquad \blacksquare \tag{12.6.48}$$

Аналогичный результат верен для первой гамильтоновой структуры иерархии МКП при $N = 1$, заданной блочной матрицей $B^{[1]}$(12.2.20) $\oplus$ B^{Q}(12.2.12). Чтобы сформулировать этот результат, нам надо сперва сменить обозначения из §12.2: теперь

$$\mathcal{L} = \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{1-i}Q_i, \tag{12.6.49}$$

так что первая гамильтонова структура иерархии МКП задана матрицей

$$B^{Q} = \begin{array}{c} \\ Q_0 \\ Q_1 \\ Q_{i\geqslant 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad Q_0 \quad & \quad Q_1 \quad & Q_{j\geqslant 2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0}\Delta^{-1} & 0 \\ \Delta\widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0} & \mathrm{ad}_{Q_1} & 0 \\ 0 & 0 & B^{Q}_{ij} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{12.6.50a}$$

$$B^{Q}_{ij} = \widehat{R}_{Q_{i+j-1}}\Delta^{i-1} - \Delta^{-j+1}\widehat{L}_{Q_{i+j+1}}, \quad i, j \geqslant 2. \tag{12.6.50b}$$

Теорема 12.6.51. Обозначим временно через B^R гамильтонову матрицу B^Q (12.6.50) выраженную в переменных R_i при помощи изоморфизма $\Psi = \Phi^{-1}$:

$$\Psi\Big(\sum_{i\geqslant 0}R_i\zeta^{-i}\Big) = \sum\Psi(R_i)\zeta^{-i} = \Big(\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}Q_j\Big)^{-1} = \lambda^{-1}, \quad \lambda = \sum\zeta^{-j}Q_j, \tag{12.6.52}$$

$$B^R = \Psi^{-1}(JB^QJ^{\dagger}), \quad J = \frac{D\Psi}{DQ}. \tag{12.6.53}$$

Матрица B^R не совместна с конечным обрывом в переменных R.

Доказательство. Так как

$$\Psi_i = \Psi(R_i) = \mathrm{Res}(\lambda^{-1}\zeta^{i}),$$

то имеем

$$J_{ij}(X) = \frac{D\Psi_i}{DQ_j}(X) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(\Psi_i|_{Q_j\mapsto Q_j+\varepsilon X}) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{Res}[(\lambda+\varepsilon\zeta^{-j}X)^{-1}\zeta^i| =$$
$$= -\mathrm{Res}(\lambda^{-1}\zeta^{-j}X\lambda^{-1}\zeta^{-i}) = -\sum_{k,s}\Psi\,\mathrm{Res}(R_k\zeta^{-k}\zeta^{-j}XR_s\zeta^{-s}\zeta^i) =$$
$$= -\Psi\Big(\sum_{k+s=i-j}R_k(XR_s)^{(-k-j)}\Big) = -\sum_{k+s=i-j}\Psi(\widehat{L}_{R_k}\Delta^{-k-j}\widehat{R}_{R_s})(X) \quad \Rightarrow \tag{12.6.54}$$

$$J_{ij} = -\Psi\Big(\sum_{k+s=i-j}\widehat{L}_{R_k}\Delta^{-k-j}\widehat{R}_{R_s}\Big). \tag{12.6.55}$$

Таким образом, матрица J нижне-треугольная; следовательно, $J^{\dagger}$ верхне-треугольная, и находим:

$$\Psi(B^R_{i0}) = \sum_{\alpha=0}^{i} J_{i\alpha}B^Q_{\alpha 0}J^{\dagger}_{00}. \tag{12.6.56}$$

Далее, из формулы (12.6.50),

$$B^Q_{\alpha 0} = \delta^1_\alpha(\Delta\widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0}) \quad \Rightarrow \tag{12.6.57}$$

$$-B^R_{i0}|\Psi^{-1}(J^{\dagger}_{00})|^{-1} = -\Psi^{-1}(J_{i1})\Psi^{-1}(B^Q_{10}) =$$
$$= \sum_{k+s=i-1}\widehat{L}_{R_k}\Delta^{-k-1}\widehat{R}_{R_S}(\Delta\widehat{L}_{R_0^{-1}} - \widehat{R}_{R_0^{-1}}), \tag{12.6.58}$$

где в последнем из цепочки равенств использована формула

$$\Psi^{-1}(Q_0) = R_0^{-1}. \tag{12.6.59}$$

Далее, пусть наложена связь

$$\{0 = R_i = R_{i+1} = \ldots\}. \tag{12.6.60}$$

Чтобы показать, что при этом B^R_{i0} не обращается в ноль, соберем члены наименьшей по Δ степени в формуле (12.6.58). Таковой только одни, при $k = i-1$, $s = 0$:

$$\widehat{L}_{R_{i-1}}\Delta^{-i}\widehat{R}_{R_0}(-\widehat{R}_{R_0^{-1}}) = -\widehat{L}_{R_{i-1}}\Delta^{-i} \neq 0. \qquad \blacksquare \tag{12.6.61}$$

Наконец, исследуем первую гамильтонову структуру иерархии КП, заданную матрицей $B^{(q)}$ (12.1.12):

$$B^{(q)}_{ij} = \widehat{R}_{q_{i+j}}\Delta^i - \Delta^{-j}\widehat{L}_{q_{i+j}}. \tag{12.6.62}$$

Теорема 12.6.63. Обозначим через $\Phi : C_r \to C_q$ изоморфизм (12.6.25):

$$\Phi\Big(1+\sum_{i\geqslant 0}r_i\zeta^{-i-1}\Big) = 1+\sum\Phi(r_i)\zeta^{-i-1} = \Big(1+\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j-1}q_i\Big)^{-1} = \bar{\lambda}^{-1}, \tag{12.6.64a}$$

$$\bar{\lambda} = 1+\sum\zeta^{-j-1}q_j, \tag{12.6.64b}$$

и пусть $B^{(r)}$ есть гамильтонова матрица $B^{(q)}$ (12.6.62) переписанная в переменных r_i :

$$B^{(r)} = \Phi^{-1}(JB^{(q)}J^{\dagger}), \quad J = \frac{D\Phi}{Dq}. \tag{12.6.65}$$

Матрица $B^{(r)}$ не совместна с конечным обрывом в переменных r.

Доказательство. Из формулы (12.6.64a) находим

$$\Phi_i = \Phi(r_i) = \mathrm{Res}(\bar{\lambda}^{-1}\zeta^{i+1}) \quad \Rightarrow$$

$$J_{ij}(X) = \frac{D\Phi_i}{Dq_i}(X) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(\Phi_i|_{q_j\mapsto q_j+\varepsilon X}) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathrm{Res}[(\bar{\lambda}+\zeta^{-j-1}\varepsilon X)^{-1}\zeta^{i+1}] =$$
$$= -\mathrm{Res}(\bar{\lambda}^{-1}\zeta^{-j-1}X\bar{\lambda}^{-1}\zeta^{i+1}) =$$
$$= -\mathrm{Res}\,\Phi\Big[\Big(1+\sum r_k\zeta^{-k-1}\Big)\zeta^{-j-1}X\Big(1+\sum r_s\zeta^{-s-1}\Big)\zeta^{i+1}\Big] =$$
$$= -\delta_i^j X^{(-i-1)} - \Phi\Big[r_{i-j-1}X^{(-i-1)} + (Xr_{i-j-1})^{(-j-1)} + \sum_{k+s=i-j-2} r_k(Xr_s)^{(s-i)}\Big], \tag{12.6.66}$$

откуда

$$J_{ij} = -\delta_i^j\Delta^{-i-1} - \Phi\Big(\bar{L}_{r_{i-j-1}}\Delta^{-i-1} + \Delta^{-j-1}\widehat{R}_{r_{i-j-1}} + \sum_{k+s=i-j-2}\widehat{L}_{r_k}\Delta^{s-i}\widehat{R}_{r_s}\Big). \tag{12.6.67}$$

Такнм образом, матрнца J нижне-треугольная; значнт, $J^\dagger$ верхне-треугольная, с

$$J^\dagger_{00} = -\Delta^{-1}. \tag{12.6.68}$$

Следовательно, для фиксированного $i > 1$,

$$-B^{(r)}_{i0}\Delta = \Phi^{-1}\Big(\sum_{\alpha=0}^{i} J_{i\alpha}B^{(q)}_{\alpha 0}\Big) = \sum_{\alpha=0}^{i}\Big[(\delta_i^\alpha + \widehat{L}_{r_{i-\alpha-1}})\Delta^{-i-1}$$
$$+ \Delta^{-j-1}\widehat{R}_{r-\alpha-1} + \sum_{k,s}(\dots)\Delta^{s-t}(\dots)\Big]\Phi^{-1}(\widehat{L}_{q_\alpha} - \widehat{R}_{q_\alpha}\Delta^\alpha) =$$
$$= \sum_{\alpha>0}^{i}(\delta_i^\alpha + \widehat{L}_{r_{i-\alpha-1}})\Delta^{-i-1}\Phi^{-1}(\widehat{L}_{q_\alpha}) + \widehat{L}_{r_{i-1}}\Delta^{i-1}\Phi^{-1}(\widehat{L}_{q_0} - \widehat{R}_{q_0}) + \{\dots\}, \tag{12.6.69}$$

где $\{\dots\}$ обозначает все члены Δ–степенн $> -i-1$. Далее, наложим связь

$$\{0 = r_i = r_{i+1} = \dots\}, \tag{12.6.70}$$

н запншем выраженне (12.6.69), как произведенне

$$\Phi^{-1}(\widehat{L}_{q_i}) + \sum_{\alpha>0}^{i}\widehat{L}_{r_{i-\alpha-1}}\Phi^{-1}(\widehat{L}_{q_\alpha^{(-i-1)}}) + \widehat{L}_{r_{i-1}}\Phi^{-1}(\widehat{L}_{q_0^{(-i-1)}} - \widehat{R}_{q_0^{(-i-1)}}) \tag{12.6.71}$$

н Δ^{-i-1}. В этом выражении лишь один член содержит оператор правого умножения $\widehat{R}_{\dots}$, а именно

$$-\widehat{L}_{r_{i-1}}\Phi^{-1}(\widehat{R}_{q_0^{(-i-1)}}) = \widehat{L}_{r_{i-1}}\widehat{R}_{r_0^{(-i)}}. \tag{12.6.72}$$

Этот член не равен нулю. ▮

Упражненне 12.6.73. Покажите, что переход к потенциальной нерархнн МКП прн отображении Pot

$$\mathrm{Pot}(R_0) = VV^{(-1)-1}, \tag{12.6.74a}$$
$$\mathrm{Pot}(R_i) = R_i, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{12.6.74b}$$

является гамильтоновым между гамильтоновой матрицей $B^{\text{МКП}_3}$ (12.6.10) и следующей нелокальной матрицей B в координатах $\{V, R_{i>0}\}$:

$$B_{00} = (1 - \widehat{L}_{VV(-1)-1}\Delta^{-1})^{-1}\widehat{R}_{V(-1)}\cdot \\ \cdot(\Delta\widehat{R}_{R_1} - \widehat{L}_{R_1}\Delta^{-1})\widehat{L}_{V(-1)}(1 - \Delta\widehat{R}_{VV(-1)-1})^{-1}, \tag{12.6.75a}$$

$$B_{0j} = (1 - \widehat{L}_{VV(-1)-1}\Delta^{-1})^{-1}\widehat{R}_{V(-1)}(\Delta^{1+j}\widehat{R}_{R_{1+j}} - \widehat{L}_{R_{1+j}}\Delta^{-1}), \quad j > 0, \tag{12.6.75b}$$

$$B_{ij} = \Delta^{1+j}\widehat{R}_{R_{i+j+1}} - \widehat{L}_{R_{i+j+1}}\Delta^{-1-i}, \quad i, j > 0. \tag{12.6.75c}$$

Глава 13

Формы Гиббонса

В этой главе мы изучаем разностные версии специализаций типа Гиббонса дискретных интегрируемых систем, которые, в непрерывном случае, привели нас к иерархиям НУШ и НУШП в Главе 3.

13.1 Форма Гиббонса иерархии КП

В этом разделе рассматриваются некоммутативные версии систем типа Гиббонса, связанные с дискретными иерархиями типа КП.

Рассмотрим, в обозначениях §12.1,

$$L = \zeta^N + \sum_{1}^{N-1} \zeta^i r_i + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} q_j \tag{13.1.1}$$

оператор Лакса дискретной иерархии КП, при некотором фиксированном $N \in \mathbb{N}$; подразумевается, что при $N = 1$ переменных r_i нет. Представление Гиббонса, в двух словах, состоит в замене $\sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} q_i = L_{\leqslant 0}$ на билинейную форму $\boldsymbol{p}^t(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}$; вариации этой темы возможны и будут появляться.

Итак, пусть

$$\bar{L} = \zeta^N + \sum_{1}^{N-1} \zeta^i r_i + \boldsymbol{p}^t(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}. \tag{13.1.2}$$

n-й поток иерархии Гиббонса, связанной с оператором Лакса $\bar{L}$ (13.1.2) задается формулами

$$\partial_{t_n}(\bar{L}_{>0}) = [P_+, \bar{L}]_{>0} = [\bar{L}, P_-]_{>0}, \quad P = \bar{L}^n, \tag{13.1.3a}$$

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p}) = P_+(\boldsymbol{q}), \tag{13.1.3b}$$

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = -(P_+)^\dagger(\boldsymbol{q}). \tag{13.1.3c}$$

Введение формы Гиббонса (13.1.3) оправдывает следующее предложение.

Утверждение 13.1.4. Из уравнений движения (13.1.3) вытекает

$$\partial_P(\bar{L}) = [P_+, \bar{L}] = [\bar{L}, P_-], \quad \partial_P = \partial_{t_n}. \tag{13.1.5}$$

Доказательство. С учетом формулы (13.1.3а), мы должны показать, что

$$\partial_P(\bar{L}_{\leqslant 0}) = [P_+, \bar{L}]_{\leqslant 0}. \tag{13.1.6}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\partial_P(\bar{L}_{\leqslant 0}) = \\ &= \partial_P(\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}) = \partial_P(\boldsymbol{p})^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\partial_P(\boldsymbol{q}) \overset{(13.1.3\text{b,c})}{=} \\ &= P_+(\boldsymbol{p})^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}(P_+)^\dagger(\boldsymbol{q}) \quad \text{Л. 13.1.7 ниже} \\ &= (P_+\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q})_{\leqslant 0} - (\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}P_+)_{\leqslant 0} = [P_+, \bar{L}_{\leqslant 0}]_{\leqslant 0}. \end{aligned}$$

∎

Лемма 13.1.7. Если $\mathcal{O} \in C'[\zeta]$, $C = R\langle r_i^{(s)}, \boldsymbol{p}^{(s)}, \boldsymbol{q}^{(s)}\rangle$, то

$$(\mathcal{O}\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q})_{\leqslant 0} = \mathcal{O}(\boldsymbol{p})^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{13.1.8}$$

$$(\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}\mathcal{O})_{\leqslant 0} = \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{q}). \tag{13.1.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{O} = \bar{r}\zeta^s$, $\bar{r} \in C'$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$(\mathcal{O}\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q})_{\leqslant 0} = \sum_{j\geqslant 0} \bar{r}\zeta^s\boldsymbol{p}^t\zeta^{-s}\zeta^{-j}\boldsymbol{q} = \bar{r}\boldsymbol{p}^{(s)t}\sum\zeta^{-j}\boldsymbol{q} = \mathcal{O}(\boldsymbol{p})(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q},$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}\mathcal{O})_{\leqslant 0} &= \boldsymbol{p}^t\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}\zeta^{-s}\boldsymbol{q}\bar{r}\zeta^s = \\ &= \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}(\boldsymbol{q}\bar{r})^{(-s)} = \boldsymbol{q}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{q}). \end{aligned}$$

∎

Таким образом, иерархии Гиббонса (13.1.3) отображается в иерархию КП, и это вложение задается гомоморфизмом $\varphi : R\langle r_i^{(s)}, q_j^{(s)}\rangle \to R\langle r_i^{(s)}, \boldsymbol{p}^{(s)}, \boldsymbol{q}^{(s)}\rangle$ по формуле

$$\varphi\Big(\zeta^N + \sum_1^{N-1}\zeta^i r_i + \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}q_j\Big) = \zeta^N + \sum_1^{N-1}\zeta^i r_i + \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q} \quad \Rightarrow \tag{13.1.10}$$

$$\varphi(r_i) = r_i, \quad \varphi(q_j) = \boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{13.1.11}$$

Иерархия Гиббонса (13.1.3) коммутативна. Это можно показать чисто алгебраическими рассуждениями, подобными тем, что использовались в §3.5. Мы не нойдем этим путем, так как коммутативиость будет автоматически следовать из гамильтоновых свойств иерархии Гиббонса, котрые мы сейчас рассмотрим.

Полагая

$$\bar{H}_n = n^{-1}\operatorname{Res}(\bar{L}^n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13.1.12}$$

и испльзуя формулу вычетов (10.4.6), получаем

$$\begin{aligned} d(\bar{H}_{n+1}) &\approx \operatorname{Res}[\bar{L}^n d(\bar{L})] = \operatorname{Res}\Big(\sum\bar{p}_s(n)\zeta^s\Big[\sum\zeta^i dr_i + \sum\zeta^{-j}d(\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q})\Big]\Big) = \\ &= \sum_1^{N-1}\bar{p}_{-i}(n)dr_i + \sum_{j\geqslant 0}\bar{p}_j(n)(d\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^{(j)t}d\boldsymbol{q}), \end{aligned} \tag{13.1.13}$$

где

$$\bar{L}^n = \sum_s\bar{p}_s(n)\zeta^s. \tag{13.1.14}$$

Таким образом,

$$\bar{p}_{-i}(n) = \frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\delta r_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \tag{13.1.15}$$

$$\frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\delta p} = \sum_{j \geqslant 0} (q\bar{p}_j(n))^{(-j)}, \quad \frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\delta q} = \sum_{j \geqslant 0} \bar{p}_j(n) p^{(j)}. \tag{13.1.16}$$

Последние формулы можно переписать в виде

$$(P_+)^\dagger(q) = \frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\delta p}, \quad P_+(p) = \frac{\delta \bar{H}_{n+1}}{\bar{\delta} q}, \quad P = \bar{L}^n. \tag{13.1.17}$$

Следовательно, уравнения движения (13.1.3b,c) можно преобразовать к каноническому гамильтоновому виду

$$\partial_{t_n} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \bar{H}_{n+1}/\delta p \\ \delta \bar{H}_{n+1}/\delta q \end{pmatrix}, \tag{13.1.18}$$

Далее, подставим формулу (13.1.15) в уравнения движения (13.1.3a) для $\bar{L}_{>0}$ и повторим путь, приведший в §12.1 к гамильтоновой матрице $B^{(N)}$ для переменных r_i; мы опять придем к ней же, так как наличие или отсутствие q_j здесь не играет роли. Таким образом, иерархия Гиббонса гамильтонова, с расщепленной гамильтоновой структурой $B^{(N)} \oplus b^{can}$ ((12.1.17)⊕(13.1.18)).

Теорема 13.1.19. Гомоморфизм Гиббонса φ (13.1.11) задает гамильтоново отображение между гамильтоновыми структурами $B^{(N)} \bigoplus B^{\text{КП}}$ иерархии КП и $B^{(N)} \bigoplus b^{can}$ иерархии Гиббонса.

Доказательство. Так как отображение φ тождественно на r_i, требуется установить гамильтоновость отображении

$$\varphi(q_j) = p^{(j)} q, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{13.1.20}$$

между гамильтоновыми матрицами $B^{\text{КП}}$ (12.1.12) и b^{can} (13.1.18). Так как $B^{\text{КП}} = -B^0$, где B^r (12.2.14) есть гамильтонова матрица, соответствующая алгебре Ли $\mathcal{G}^r = \text{Lie}(R[[\zeta]]\zeta^r)$ (12.1.14), то свойство гамильтоновости φ эквивалентно случаю $r = 0$ следующей леммы. ∎

Лемма 13.1.21. Рассмотрим гамильтонову матрицу

$$b^r = \begin{pmatrix} 0 & 1\Delta^r \\ -1\Delta^{-r} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.1.22}$$

Отображение φ (13.1.20) между гамильтоновыми матрицами $-B^r$ и b^r гамильтоново.

Доказательство. Нужно проверить тождество

$$J b^r J^\dagger = \varphi(-B^r), \quad J = D(\varphi). \tag{13.1.23}$$

Имеем

$$J = q_i \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\widehat{R}_q \Delta^i \quad \Big| \quad \widehat{L}_{p(i)} \right) \end{array}, \tag{13.1.24}$$

$$J^\dagger = \begin{array}{c|c} & q_j \\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} & \begin{pmatrix} \Delta^{-1}\widehat{L}_q \\ \widehat{R}_{p(j)} \end{pmatrix} \end{array} \quad \Rightarrow \tag{13.1.25}$$

$$\begin{aligned} (Jb^r J^\dagger)_{ij} &= -\widehat{L}_{p(i)t}\Delta^{-r-j}\widehat{L}_q + \widehat{R}_q\Delta^{i+r}\widehat{R}_{p(j)t} = \\ &= -(\Delta^{-j-r}\widehat{L}_{p(i+j+r)t}\widehat{L}_q - \widehat{R}_q\widehat{R}_{p(i+j+r)t}\Delta^{i+r}) = \\ &= -(\Delta^{-j-r}\widehat{L}_{p(i+j+r)t_q} - \widehat{R}_{p(i+j+r)t_q}\Delta^{i+r}) \overset{(12.2.14),\ (13.1.20)}{=} -\varphi(B^r). \end{aligned}$$

■

Упражнение 13.1.26. (i) Докажите гамильтоновость отображения

$$p \mapsto \pi^{(r)}, \quad q \mapsto q, \tag{13.1.27}$$

между гамильтоновой матрицей $b^{(r)}$ (13.1.22) в координатах (p,q) и канонической гамильтоновой матрицей $b^{can} = b^0$ в координатах (π,q);
(ii) Получите отсюда, что гамильтоново отображение φ^r :

$$\varphi^r(q_j) = \pi^{(r+j)t}q, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{13.1.28}$$

между гамильтоновой матрицей $-B^r$ и канонической гамильтоновой матрицей $b^0 = b^{can}$.

Упражнение 13.1.29. Пусть R_{com} *коммутативное* кольцо, и $F, H \in R_{com}[[\tau]]$, причем $F = \dfrac{dH}{d\tau}$. Положим $\bar{H} = H|_{\tau=p^tq}$, и аналогично для $\bar{F}$. Покажите, что

$$\frac{\delta \bar{H}}{\delta p} = q\bar{F}, \quad \frac{\delta \bar{H}}{\delta q} = \bar{F}p. \tag{13.1.30}$$

Упражнение 13.1.31. Пусть $N = 1$. Покажите, что:
(i) первые два потока иерархии Гиббонса (13.1.3) имеют вид

$$\partial_{t_1}(p) = p^{(1)} + (p^tq)p, \tag{13.1.32a}$$

$$\partial_{t_1}(q) = -[q^{(-1)} + q(p^tq)], \tag{13.1.32b}$$

$$\partial_{t_2}(p) = p^{(2)} + [(1+\Delta)(p^tq)]p^{(1)} + [(p^tq)^2 + (1+\Delta)(p^tq^{(-1)}]p, \tag{13.1.33a}$$

$$\partial_{t_2}(q) = -\{q^{(-2)} + q^{(-1)}(1+\Delta^{-1})(p^tq) + q[(p^tq)^2 + (1+\Delta)(p^tq^{(-1)})]\}. \tag{13.1.33b}$$

[Подсказка : покажите сначала, что для

$$\bar{L} = \zeta + p^t(1-\zeta^{-1})^{-1}q \tag{13.1.34}$$

имеем

$$\bar{L}_+ = \zeta + p^tq, \tag{13.1.35}$$

$$(\bar{L}^2)_+ = \zeta^2 + [(1+\Delta)(p^tq)]\zeta + (p^tq)^2 + (1+\Delta)(p^tq^{(-1)}) \ ; \quad] \tag{13.1.36}$$

(ii) $\ln(p^tq^{(s)})$ не является интегралом иерархии Гиббонса (13.1.3) ни при каком $s \in \mathbb{Z}$.
[Подсказка : используйте формулы (13.1.30), чтобы показать, что

$$\partial_{t_1}\ln(p^tq^{(s)}) \approx (p^tq^{(s)})^{-1}(\Delta - 1)(p^tp^{(s-1)}). \quad] \tag{13.1.37}$$

Упражнение 13.1.38. Покажите, что форма Гиббонса (13.1.3) имеет классический предел, но не имеет квазиклассического.

13.2 Формы Гиббонса иерархии МКП

В этом разделе мы находим две формы Гиббонса дискретной иерархии МКП и определяем ассоциированные гамильтоновы феномены.

Рассмотрим, в обозначениях §12.2, оператор Лакса

$$\mathcal{L} = \sum_{0}^{N} \zeta^i R_i + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j-1} Q_j \tag{13.2.1}$$

дискретной иерархии МКП. Как известно из §12.2, соответствующая иерархия МКП гамильтонова, с блочной гамильтоновой структурой $B^{[N]} \oplus B^Q$ ((12.2.20)$\oplus$(12.2.12)).

Попытаемся найти форму Гиббонса иерархии МКП, подражая гамильтоновым рассуждениям из предыдущего раздела. Оставим переменные R_i в покое и сосредоточимся на Q_j. Согласно формуле (12.2.15), $B^Q = -B^1$. В силу Леммы 13.1.21 при $r = 1$, отображение φ :

$$\varphi(Q_j) = \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j)t} \boldsymbol{b}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{13.2.2}$$

гамильтоново, между гамильтоновыми матрицами B^Q и

$$b^1 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta 1 \\ \Delta^{-1} 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.2.3}$$

Следовательно, n-й поток иерархии МКП переводится в поток

$$\partial_{t_n}(\widetilde{\boldsymbol{a}}) = \Delta\left(\frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta \boldsymbol{b}}\right), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{b}) = -\Delta^{-1}\left(\frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta \widetilde{\boldsymbol{a}}}\right), \quad \widetilde{\mathcal{H}}_{n+1} = \varphi(\mathcal{H}_{n+1}). \tag{13.2.4}$$

Вычислим эти потоки. Имеем, по формуле (10.2.28):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta}{\delta \widetilde{\boldsymbol{a}}} \\ \dfrac{\delta}{\delta \boldsymbol{b}} \end{pmatrix} [\varphi(\mathcal{H})] = D(\varphi)^\dagger \varphi\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q}\right) = \varphi \begin{pmatrix} \sum \Delta^{-j}\left(\boldsymbol{b}\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q_j}\right) \\ \sum \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta Q_j} \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j)} \end{pmatrix}. \tag{13.2.5}$$

Обозначив

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \varphi(\mathcal{L}) = \sum_{0}^{N} \zeta^i R_i + \zeta^{-1} \widetilde{\boldsymbol{a}}^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{b}, \tag{13.2.6a}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}^n = \sum \widetilde{\pi}_s(n) \zeta^s, \tag{13.2.6b}$$

из формул (12.2.7) и (13.2.5) получим

$$\frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta \widetilde{\boldsymbol{a}}} = \sum_{j\geqslant 0} \Delta^{-j}(\boldsymbol{b} \widetilde{\pi}_{j+1}(n)) = \Delta[(\widetilde{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 1}]^\dagger(\boldsymbol{b}) = [(\widetilde{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 1} \Delta^{-1}]^\dagger(\boldsymbol{b}), \tag{13.2.7a}$$

$$\frac{\delta \widetilde{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta \boldsymbol{b}} = \sum_{j\geqslant 0} \widetilde{\pi}_{j+1}(n) \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j)} = [(\widetilde{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 1} \Delta^{-1}](\widetilde{\boldsymbol{a}}). \tag{13.2.7b}$$

Подставляя эти формулы в уравнения движения (13.2.4), получаем окончательно

$$\partial_{t_n}(\widetilde{\boldsymbol a}) = [\Delta(\widetilde{\mathcal L}^n)_{\geqslant 1}\Delta^{-1}](\widetilde{\boldsymbol a}), \tag{13.2.8a}$$

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol b) = -[(\widetilde{\mathcal L}^n)_{\geqslant 1}]^{\dagger}(\boldsymbol b). \tag{13.2.8b}$$

Это и есть форма Гиббонса иерархии МКП, которую мы искали. Эта форма по духу подобна форме (3.6.10) для непрерывного НУШП.

Упражнение 13.2.9. Покажите чисто алгебраическими (= не гамильтоновыми) рассуждениями, что из уравнений (13.2.8) следует

$$\partial_{t_n}(\widetilde{\mathcal L}_-) = [(\widetilde{\mathcal L}^n)_{\geqslant 1}, \widetilde{\mathcal L}]_- \ . \tag{13.2.10}$$

Заметим, что мы пришли к форме Гиббонса (13.2.8), используя гамильтоново отображение φ (13.2.2) из предыдущего раздела. Однако, в том разделе нам встречалось также другое гамильтоново отображение $\varphi^1 = \varphi^r$ $(13.1.28)|_{r=1}$:

$$\varphi^1(Q_j) = \boldsymbol a^{(j+1)t}\boldsymbol b, \tag{13.2.11}$$

из гамильтоновой структуры $B^Q = -B^1$ в гамильтонову структуру b^{can} :

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol a) = \frac{\delta\bar{\mathcal H}_{n+1}}{\delta\boldsymbol b}, \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol b) = -\frac{\delta\bar{\mathcal H}_{n+1}}{\delta\boldsymbol a}, \quad \bar{\mathcal H}_{n+1} = \varphi^1(\mathcal H_{n+1}). \tag{13.2.12}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol a = \widetilde{\boldsymbol a}^{(-1)}, \quad \widetilde{\boldsymbol a} = \boldsymbol a^{(1)}, \tag{13.2.13}$$

и мы можем вывести явный вид уравнений движения (13.2.12) используя уже вычисленные уравнения движения в переменных $(\widetilde{\boldsymbol a}, \boldsymbol b)$:

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol a) = (\bar{\mathcal L}^n)_{\geqslant 1}(\boldsymbol a), \tag{13.2.14a}$$

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol b) = -[(\bar{\mathcal L}^n)_{\geqslant 1}]^{\dagger}(\boldsymbol b), \tag{13.2.14b}$$

где

$$\bar{\mathcal L} = \varphi^1(\mathcal L) = \sum_0^N \zeta^i R_i + \boldsymbol a^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol b. \tag{13.2.15}$$

Формулы (13.2.14) задают вторую форму Гиббонса иерархии МКП. Она не так асимметрична как первая (13.2.8).

Упражнение 13.2.16. Пусть $N = 1$,

$$\bar{\mathcal L} = \zeta R_1 + R_0 + \boldsymbol a^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol b. \tag{13.2.17}$$

Проверьте, что

$$\bar{\mathcal L}_{\geqslant 1} = \zeta R_1, \tag{13.2.18}$$

$$(\bar{\mathcal L}^2)_{\geqslant 1} = R_1^{(1)}R_1^{(2)}\zeta^2 + [(R_1R_0)^{(1)} + R_0R_1^{(1)}]\zeta, \tag{13.2.19}$$

$$\mathrm{Res}(\bar{\mathcal L}^2) = R_0^2 + R_1^{(1)}(\boldsymbol a^{(1)t}\boldsymbol b) + (\boldsymbol a^t\boldsymbol b^{(-1)})R_1, \tag{13.2.20}$$

и получите отсюда, что первые два потока в соответствующей иерархии Гиббонса имеют вид

$$\partial_{t_1}(R_1) = R_1 R_0 - R_0^{(-1)} R_1, \tag{13.2.21a}$$

$$\partial_{t_1}(R_0) = R_1^{(1)}(\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)})R_1, \tag{13.2.21b}$$

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{a}) = (R_1\boldsymbol{a})^{(1)}, \tag{13.2.21c}$$

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-1)}R_1, \tag{13.2.21d}$$

$$\partial_{t_2}(R_1) = R_1\big[R_0^2 + R_1^{(1)}(\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})\big] - \big[R_0^{(-1)2} + (\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-2)})R_1^{(-1)}\big]R_1, \tag{13.2.22a}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_2}(R_0) = {} & R_1^{(1)}R_1^{(2)}(\boldsymbol{a}^{(2)t}\boldsymbol{b}) + \big[(R_1R_0)^{(1)} + R_0R_1^{(1)}\big](\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b}) - \\ & - (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-2)})R_1^{(-1)}R_1 - (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)})\big[R_1R_0 + R_0^{(-1)}R_1\big],\end{aligned} \tag{13.2.22b}$$

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{a}) = R_1^{(1)}R_1^{(2)}\boldsymbol{a}^{(2)} + \big[(R_1R_0)^{(1)} + R_0R_1^{(1)}\big]\boldsymbol{a}^{(1)}, \tag{13.2.22c}$$

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-2)}R_1^{(-1)}R_1 - \boldsymbol{b}^{(-1)}\big[R_1R_0 + R_0^{(-1)}R_1\big]. \tag{13.2.22d}$$

[Подсказка : для формулы (13.2.22a): вообще,

$$\partial_{t_n}(R_N) = R_N\bar{\pi}_0(n) - \bar{\pi}_0(n)^{(-N)}R_N, \tag{13.2.23}$$

где

$$\bar{\mathcal{L}}^n = \sum_s \bar{\pi}_s(n)\zeta^s, \quad \bar{\mathcal{L}} = \sum_0^N \zeta^i R_i + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}\ ; \quad] \tag{13.2.24}$$

[Подсказка : для формулы (13.2.22b): сначала докажите, что вообще,

$$\partial_{t_n}(R_0) = \partial_{t_n}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}). \tag{13.2.25}$$

(Это тождество будет проверено в следующем разделе.)]

Упражнение 13.2.26. Покажите, что формы Гиббонса иерархии МКП имеют классический предел, но не имеют квазиклассического.

13.3 Преобразование Миуры между формами Гиббонса иерархий КП и МКП

В этом разделе мы исследуем взаимосвязь между двумя различными конструкциями: преобразование Миуры как сопряжение, и форма Гиббонса иерархий КП и МКП. Возникают два новых явления. Во-первых, чтобы преобразование Миуры существовало, на форму Гиббонса следует наложить дополнительную связь. Во-вторых, когда эта связь наложена, гамильтонова форма почти исчезает.

Рассмотрим преобразование Миуры Φ (12.3.1) между свободными иерархиями КП и МКП,

$$\Phi\Big(\zeta^N + \sum_1^{N-1}\zeta^i r_i + \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}q_j\Big) = V^{-1}\Big(\sum_0^N \zeta^i R_i + \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j-1}Q_j\Big)V, \tag{13.3.1}$$

и попытаемся осуществить его в соответствующей форме Гиббонса:

$$\Psi(\bar{L}) = \Psi\Big(\zeta^N + \sum_{1}^{N-1} \zeta^i r_i + \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}\Big) =$$

$$= V^{-1}\Big(\sum_{0}^{N} \zeta^i R_i + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}\Big)V = V^{-1}\bar{\mathcal{L}}V. \tag{13.3.2}$$

Приравнивая соответствующие члены, можно расписать это операторное определение покомпонентно:

$$R_N = V^{(-N)}V^{-1}, \tag{13.3.3}$$

$$\Psi(r_i) = V^{(-i)-1}R_iV, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1, \tag{13.3.4}$$

$$\Psi(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}) = V^{-1}R_0V, \tag{13.3.5}$$

$$\Psi(\boldsymbol{p}) = V^{-1}\boldsymbol{a}, \tag{13.3.6a}$$

$$\Psi(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{b}V. \tag{13.3.6b}$$

Первое уравнение, (13.3.3), является определением гомоморфизма Pot, расширяющего иерархию МКП (редуцированную или нет) до ее потенциальной формы: из §9.5 мы знаем, что это расширения безразлично к судьбе всех переменных кроме R_N, и что это расширение управляется исключительно видом уравнения движения для R_N (9.5.6):

$$\partial_{t_n}(R_N) = R_N\bar{\pi}_0(n) - \bar{\pi}_0(n)^{(-N)}R_N, \quad \bar{\pi}_0(n) = \operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}^n), \tag{13.3.7}$$

которое продолжается, при отображении Pot (13.3.3), в уравнение движения для V (9.5.22):

$$\partial_{t_n}(V) = -\operatorname{Pot}(\bar{\pi}_0(n))V. \tag{13.3.8}$$

Формулы (13.3.4), (13.3.6) дают искомое определение преобразования Миуры Ψ; что касается формулы (13.3.5), то имеем:

$$\Psi(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q}) = \Psi(\boldsymbol{p})^t\Psi(\boldsymbol{q}) \overset{(13.3.6)}{=} V^{-1}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})V \overset{(13.3.5)}{=} V^{-1}R_0V, \tag{13.3.9}$$

и мы приходим к заключению, что, для существования преобразования Миуры, переменная R_0 в гиббонсовской форме оператора Лакса для МКП

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{1}^{N} \zeta^i R_i + R_0 + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b} \tag{13.3.10}$$

должна быть специализирована:

$$R_0 = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}. \tag{13.3.11}$$

Очевидно, чтобы иметь право накладывать эту связь, мы должны иметь соотношение

$$\partial_{t_n}(R_0 - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}) \in I_{constr}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{13.3.12}$$

где I_{constr} двустороний идеал, порожденый выражениями $\{(R_0 - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})^{(s)} \mid s \in \mathbb{Z}\}$.

Утверждение 13.3.13. Для иерархии МКП в форме Гиббонса из §13.2 выполняется равенство

$$\partial_{t_n}(R_0 - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{13.3.14}$$

Доказательство. Обозначая $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{L}}^n$ и $\partial_{\mathcal{P}} = \partial_{t_n}$, имеем

$$\partial_{\mathcal{P}}(R_0) = \partial_{\mathcal{P}}\operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}) = \operatorname{Res}\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{L}}) = \operatorname{Res}([\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}|) = \operatorname{Res}([\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}_-|) =$$

$$= \operatorname{Res}\Big(\Big[\sum_{s\geqslant 0}\bar{\pi}_{s+1}(n)\zeta^{s+1},\ \boldsymbol{a}^t\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j-1}\boldsymbol{b}\Big]\Big) = \sum_{s\geqslant 0}[\bar{\pi}_{s+1}(n)\zeta^{s+1}, \boldsymbol{a}^t\zeta^{-s-1}\boldsymbol{b}| =$$

$$= \sum_{s\geqslant 0}[\bar{\pi}_{s+1}(n)(\boldsymbol{a}^{(s+1)t}\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-s-1)})\bar{\pi}_{s+t}(n)^{(-s-1)}| = \mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{a})^t\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t(\mathcal{P}_{\geqslant 1})^\dagger(\boldsymbol{b})$$

$$\overset{(13.2.14)}{=} \partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{a})^t\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^t\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{b}) = \partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}). \qquad \blacksquare$$

С этого момента будем считать связь $R_0 = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}$ наложеной, и оператор Лакса $\bar{\mathcal{L}}$ (13.3.10) превращается в

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_1^N \zeta^i R_i + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.3.15}$$

Соответствующие уравнения движения

$$\partial_{t_n}(\bar{\mathcal{L}}_{\geqslant 1}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}]_{\geqslant 1} = [\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}|_{\geqslant 1}, \quad \mathcal{P} = \bar{\mathcal{L}}^n, \tag{13.3.16a}$$

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{a}) = \mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{a}), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{b}) = -(\mathcal{P}_{\geqslant 1})^\dagger(\boldsymbol{b}) \tag{13.3.16b}$$

могут быть названы 3-й формой Гиббонса дискретной иерархии МКП. Конечно, связь $R_0 = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}$ заставляет улетучиться гамильтонов формализм первых двух форм Гиббонса этой иерархии из §13.2; мы вскоре вернемся к гамильтоновым аспектам. Но сначала покончим с динамическими аспектами.

Теорема 13.3.17. Преобразование Миуры Ψ (13.3.4, 6) переводит 3-ю форму Гиббонса дискретную иерархии Pot–МКП (13.3.8, 16) в форму Гиббонса дискретной иерархии КП (13.1.3).

Доказательство. Опустим в обозначениях Ψ, Pot и n, и обозначим $\partial_{t_n} = \partial_t$. Во-первых, из уравнения (13.3.6a) находим

$$\partial_t(\boldsymbol{p}) = \partial_t(V^{-1}\boldsymbol{a}) = -V^{-1}\partial_t(V)V^{-1}\boldsymbol{a} + V^{-1}\partial_t(\boldsymbol{a})$$

$$= V^{-1}(\bar{\pi}_0\boldsymbol{a} + \mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{a})) = V^{-1}\mathcal{P}_{\geqslant 0}(\boldsymbol{a}) = (V^{-1}\mathcal{P}_{\geqslant 0}V)(V^{-1}\boldsymbol{a}) = P_{\geqslant 0}(\boldsymbol{p}),$$

а это есть уравнение движения (13.1.3b); во-вторых, из уравнения (13.3.6b) получаем

$$\partial_t(\boldsymbol{q}) = \partial_t(\boldsymbol{b}V) = \partial_t(\boldsymbol{b})V + \boldsymbol{b}\partial_t(V) = -[(\mathcal{P}_{\geqslant 1})^\dagger(\boldsymbol{b})]V - \boldsymbol{b}\bar{\pi}_0 V =$$

$$= -[(\mathcal{P}_{\geqslant 1} + \pi_0)^\dagger(\boldsymbol{b})]V = -[(\mathcal{P}_{\geqslant 0})^\dagger(\boldsymbol{b})]V \overset{\text{Л. 13.3.18 ниже}}{=} -(P_{\geqslant 0})^\dagger(\boldsymbol{q}),$$

а это есть уравнение движения (13.1.3c).

Лемма 13.3.18. Если $\mathcal{O} \in R'((\zeta^{-1}))$, то

$$(V^{-1}\mathcal{O}V)^\dagger(\boldsymbol{b}V) = \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{b})V. \tag{13.3.19}$$

Доказательство. Имеем,

$$(V^{-1}\mathcal{O}V)^\dagger = (\widehat{L}_{V^{-1}}\mathcal{O}\widehat{L}_V)^\dagger = \widehat{R}_V\mathcal{O}^\dagger\widehat{R}_{V^{-1}} \quad \Rightarrow$$

$$(V^{-1}\mathcal{O}V)^\dagger(\boldsymbol{b}V) = (\widehat{R}_V\mathcal{O}^\dagger\widehat{R}_{V^{-1}})(\boldsymbol{b}V) = \widehat{R}_V\mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{b}) = \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{b})V. \qquad \blacksquare$$

В-третьих, вместо того, чтобы показать, что оставшиеся уравнения движения (13.1.3a):

$$\partial_t(\bar{L}_{\geqslant 0}) = [P_+, \bar{L}]_{\geqslant 0}, \tag{13.3.20}$$

удовлетворены, мы покажем, что

$$\partial_t(\bar{L}) = [P_+, \bar{L}]. \tag{13.3.21}$$

Но это равенство следует из вычисления $\partial_t(\bar{L})$ как $\partial_t(V^{-1}\bar{\mathcal{L}}V)$, которое в точности воспроизводит схему §9.5, см. формулу (9.5.25). ▮

Упражнение 13.3.22. Пусть $N = 1$ и

$$\bar{\mathcal{L}} = \zeta R_1 + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.3.23}$$

Проверьте, что

$$\bar{\mathcal{L}}_{\geqslant 1} = \zeta R_1, \tag{13.3.24}$$

$$(\bar{\mathcal{L}}^2)_{\geqslant 1} = R_1^{(1)}R_1^{(2)}\zeta^2 + [R_1(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})]^{(1)}\zeta + (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})R_1^{(1)}\zeta, \tag{13.3.25}$$

и извлеките отсюда вид первых двух потоков в соответствующей иерархии Гиббонса

$$\partial_{t_1}(R_1) = R_1(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})^{(-1)}R_1, \tag{13.3.26a}$$

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{a}) = (R_1\boldsymbol{a})^{(1)}, \tag{13.3.26b}$$

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-1)}R_1, \tag{13.3.26c}$$

$$\partial_{t_2}(R_1) = R_1[(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})^2 + R_1^{(1)}(\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})] - [(\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-1)})^2 + (\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-2)})R_1^{(-1)}]R_1, \tag{13.3.27a}$$

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{a}) = R_1^{(1)}R_1^{(2)}\boldsymbol{a}^{(2)} + \{[R_1(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})]^{(1)} + (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})R_1^{(1)}\}\boldsymbol{a}^{(1)}, \tag{13.3.27b}$$

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-2)}R_1^{(-1)}R_1 - \boldsymbol{b}^{(-1)}[R_1(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})^{(-1)}R_1]. \tag{13.3.27c}$$

Рассмотрим теперь гамильтоновы свойства, если таковые имеются, 3-й иерархии Гиббонса (13.3.16). Чтобы язбежать нагромождений, рассмотрим простейший случай $N = 1$, так что мы находимся в рамках Упражнения 13.3.22. Из формулы вычетов получаем

$$\begin{aligned} d(\bar{\mathcal{H}}_{n+1}) &\approx \operatorname{Res}[\bar{\mathcal{L}}^n d(\bar{\mathcal{L}})] = \\ &= \operatorname{Res}\Big\{\sum \bar{\pi}_s(n)\zeta^s\big[\zeta dR_1 + d\boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}d\boldsymbol{b}\big]\Big\} \\ &\approx dR_1\bar{\pi}_{-1}(n) + d\boldsymbol{a}^t\sum_{j\geqslant 0}(\boldsymbol{b}\bar{\pi}_j(n))^{(-j)} + d\boldsymbol{b}^t\sum_{j\geqslant 0}\bar{\pi}_j(n)\boldsymbol{a}^{(j)} \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{13.3.28}$$

$$\bar{\pi}_{-1}(n) = \frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta R_1}, \tag{13.3.29}$$

$$[(\bar{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 0}]^\dagger(\boldsymbol{b}) = \frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta\boldsymbol{a}}, \tag{13.3.30a}$$

$$[(\bar{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 0}](\boldsymbol{a}) = \frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta\boldsymbol{b}}. \tag{13.3.30b}$$

Сравнивая формулы (13.3.16b) и (13.3.30) видим, что 1-я гамильтонова структура исчезла. Проверим, существует ли 2-я.

Расписывая двойное тождество

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}^n = \sum \bar{\pi}_s(n)\zeta^s = \bar{\mathcal{L}}\ \bar{\mathcal{L}}^{n-1} = [\zeta R_1 + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}] \sum \bar{\pi}_s(n-1)\zeta^s \\ = \bar{\mathcal{L}}^{n-1}\bar{\mathcal{L}} = \sum \bar{\pi}_s(n-1)\zeta^s[\zeta R_1 + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}],\end{aligned} \tag{13.3.31}$$

получаем

$$\bar{\pi}_s(n) = [R_1\bar{\pi}_{s-1}(n-1)]^{(1)} + \boldsymbol{a}^t \sum_{j\geqslant 0} [\boldsymbol{b}\bar{\pi}_{s+j}(n-1)]^{(-j)}, \tag{13.3.32}$$

$$\bar{\pi}_s(n) = \bar{\pi}_{s-1}(n-1)R_1^{(s)} + \sum_{j\geqslant 0} \bar{\pi}_{s+j}(n-1)(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-j)})^{(s+j)}. \tag{13.3.33}$$

Утверждение 13.3.34. Обозначим $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{H}}_n$. Тогда

$$\boldsymbol{a}^t\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{a}} - \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{b}^t}\boldsymbol{b} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta R_1}R_1 - \Delta\Big(R_1\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta R_1}\Big), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{13.3.35}$$

Доказательство. Положив $s = 0$ в формулах (13.3.32, 33) и используя соотношения (13.3.29, 30), получим в результате тождества

$$\bar{\pi}_0(n) = \Delta\Big(R_1\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta R_1}\Big) + \boldsymbol{a}^t\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{a}}, \tag{13.3.36}$$

$$\bar{\pi}_0(n) = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta R_1}R_1 + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{b}^t}\boldsymbol{b}. \tag{13.3.37}$$

Вычитая первое равенства из последнего, получаем искомую формулу (13.3.35). ∎

Утверждение 13.3.38. Уравнение движения для R_1 (13.3.16a) приводится к виду

$$\partial_{t_n}(R_1) = R_1\frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_n}{\delta\boldsymbol{b}^t}\boldsymbol{b} - \Delta^{-1}\left(\boldsymbol{a}^t\frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_n}{\Delta\boldsymbol{a}}\right)R_1. \tag{13.3.39}$$

Доказательство. Уравнение движения для R_1 (13.3.7) имеет вид

$$\partial_{t_n}(R_1) = R_1\bar{\pi}_0(n) - \bar{\pi}_0(n)^{(-1)}R_1. \tag{13.3.40}$$

При $\bar{\mathcal{H}}_n = \mathcal{H}$ имеем

$$R_1\bar{\pi}_0(n) \quad \overset{(13.3.37)}{=} R_1\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta R_1}R_1 + R_1\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{b}^t}\boldsymbol{b}, \tag{13.3.41a}$$

$$\bar{\pi}_0(n)^{(-1)}R_1 \quad \overset{(13.3.36)}{=} R_1\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta R_1}R_1 + \Delta^{-1}\Big(\boldsymbol{a}^t\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{a}}\Big)R_1, \tag{13.3.41b}$$

и формула (13.3.39) доказана. ∎

Таким образом, уравнение движения для R_1 (13.3.16a) выражается через вариационные производные гамильтонианов $\bar{\mathcal{H}}_n$. Можно ли найти подобную перезапись для оставшихся уравнений движения на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (13.3.16)? Рекуррентные формулы (13.3.32, 33) показывают, что это невозможно. На менее вычислительном уровне, нам надо выразить

$$[(\bar{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 1}](\boldsymbol{a}) \quad \text{и} \quad [(\bar{\mathcal{L}}^n)_{\geqslant 1}]^\dagger(\boldsymbol{b}) \tag{13.3.42}$$

через

$$[(\bar{\mathcal{L}}^{n-1})_{\geqslant 0}](\boldsymbol{a}), \quad [(\bar{\mathcal{L}}^{n-1})_{\geqslant 0}]^\dagger(\boldsymbol{b}), \quad \text{и} \quad \mathrm{Res}(\bar{\mathcal{L}}^{n-1}\zeta). \tag{13.3.43}$$

Очевидно, это нельзя сделать.

Упражнение 13.3.44. (i) Уравнения движения (13.3.26) для первого потока можно переписать в виде

$$\partial_{t_1}\begin{pmatrix} R_1 \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_{R_1}\Delta^{-1}\widehat{L}_{\boldsymbol{a}} & \widehat{L}_{R_1}\widehat{R}_{\boldsymbol{b}} \\ \widehat{R}_{\boldsymbol{a}}\Delta\widehat{L}_{R_1} & 0 & \Delta\widehat{L}_{R_1} \\ -\widehat{L}_{\boldsymbol{b}}\widehat{R}_{R_1} & -\widehat{R}_{R_1}\Delta^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\mathcal{H}/\delta R_1 \\ \delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{a} \\ \delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \tag{13.3.45}$$

где

$$\mathcal{H} = \operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}^1) = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}. \tag{13.3.46}$$

Гамильтонова ли кососимметрическая матрица в правой части формулы (13.3.45)? (ii) Уравнения движения (13.3.26, 27) для первых двух потоков можно переписать в виде

$$\partial_{t_n}\begin{pmatrix} R_1 \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{R}_{R_1}\Delta^{-1}\widehat{L}_{\boldsymbol{a}} & \widehat{L}_{R_1}\widehat{R}_{\boldsymbol{b}} \\ \widehat{R}_{\boldsymbol{a}}\Delta\widehat{L}_{R_1} & 0 & \Delta\widehat{L}_{R_1} + \widehat{L}_{\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}}\widehat{R}_{\boldsymbol{a}}\widehat{R}_{\boldsymbol{b}^t} \\ -\widehat{R}_{R_1}\widehat{L}_{\boldsymbol{b}} & -\widehat{R}_{R_1}\Delta^{-1} - \widehat{R}_{\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}} + \widehat{L}_{\boldsymbol{b}}\widehat{L}_{\boldsymbol{a}^t} & 0 \end{pmatrix}\delta(\bar{\mathcal{H}}_n), \tag{13.3.47}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = \operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}) = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}, \quad \bar{\mathcal{H}}_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Res}(\bar{\mathcal{L}}^2) \approx \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b})^2 + R_1(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}). \tag{13.3.48}$$

Гамильтонова ли кососимметрическая матрица в правой части формулы (13.3.47)? [Подсказка : для (ii) проверьте сначала случай, когда $R_1 = 0$ и оба $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ суть 1-компонентные скаляры.]

13.4 Четвертая форма Гиббонса иерархии МКП

> Не нужно особой проницательности, чтобы заметить и осудить стандартизацию американской жизни. Так много иностранных и местных комментаторов указывали на эту черту, в точности одними и теми же словами, что комментарии стандартизировались, и теперь их можно печатать тысячами на маленьких поздравительных открытках, все на один лад: 'Американская жизнь стала слишком стандартизированной.'
>
> Роберт Бенчли

В предыдущем разделе мы видели, что связь $R_0 = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}$ можно наложить, не разрушая динамику дискретной иерархии МКП в форме Гиббонса. В этом разделе мы находим аналогичные самосогласованные связи для всех остальных R_j.

Упражнение 13.4.1. В обозначениях Упражнения 13.3.2, с

$$\bar{\mathcal{L}} = \zeta R_1 + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{13.4.2}$$

покажите, что первый поток соответствующей иерархии, (13.3.26), допускает связь вида

$$R_1 = \boldsymbol{a}^{(\alpha)t}\boldsymbol{b}^{(\beta)}, \quad \text{некоторые} \quad \alpha, \beta, \tag{13.4.3}$$

в единственном случае

$$R_1 = \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}. \tag{13.4.4}$$

После наложения этой связи, оператор Лакса (13.4.2) превращается в

$$\bar{\mathcal{L}} = \zeta \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{t}\zeta(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.4.5}$$

Конечно, соотношение $R_1 = \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}$ может быть просто делом случая, особенностью 1-го потока, но в это не вернтся. Необходимо проинспектировать всю иерархию. Кроме того, для каждого $N \in \mathbb{N}$ имеется соответствующая иерархия Гиббонса с оператором Лакса $\bar{\mathcal{L}}$ (13.3.15):

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{1}^{N} \zeta^{i} R_i + \boldsymbol{a}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.4.6}$$

В случае $N > 1$, что служит для него аналогом связи $R_1 = \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}$?

Допуская сумасшедшую догадку, положим

$$R_i = \boldsymbol{a}^{(-i)t}\boldsymbol{b}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{13.4.7}$$

что превращает оператор Лакса $\bar{\mathcal{L}}$ (13.4.6) в

$$\bar{\mathcal{L}} = \boldsymbol{a}^{t}\zeta^{N}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.4.8}$$

Уравнения движения для этого $\bar{\mathcal{L}}$ наследуются из старого $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{a}) = \mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{a}), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{b}) = -(\mathcal{P}_{\geqslant 1})^{\dagger}(\boldsymbol{b}), \quad \mathcal{P} = \bar{\mathcal{L}}^{n}. \tag{13.4.9}$$

Чтобы показать, что связи (13.4.7) самосогласованы, нужно проверить равенство

$$\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{L}}_{>0}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}]_{>0}, \quad \partial_{\mathcal{P}} = \partial_{t_n}, \tag{13.4.10}$$

что мы проделаем в виде

$$\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{L}}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}]. \tag{13.4.11}$$

Разумеется, здесь $\bar{\mathcal{L}}$ задан формулой (13.4.8), учитывающей связь.

Обозначим временно $\mathcal{P}_{\geqslant 1} = \mathcal{O}$ и $\partial_{\mathcal{P}} = \partial_t$. Следует показать, что из равенств

$$\partial_t(\boldsymbol{a}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{a}), \quad \partial_t(\boldsymbol{b}) = -\mathcal{O}^{\dagger}(\boldsymbol{b}) \tag{13.4.12}$$

следует

$$\partial_t(\bar{\mathcal{L}}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}] = [\mathcal{O}, \bar{\mathcal{L}}]. \tag{13.4.12$'$}$$

Итак,

$$[\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}] = [\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] = [\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}]_{\leqslant N} = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{L}}]_{\leqslant N}, \tag{13.4.13}$$

то есть, вместо (13.4.12′) достаточно проверить равенство

$$\partial_t(\bar{\mathcal{L}}) = [\mathcal{O}, \bar{\mathcal{L}}]_{\leqslant N}. \tag{13.4.14}$$

Возьмем

$$\mathcal{O} = \bar{r}\zeta^{s}, \quad s \in \mathbb{Z}_{+}, \tag{13.4.15}$$

тогда уравнения движения (13.4.12) принимают вид

$$\partial_t(\boldsymbol{a}) = \bar{r}\boldsymbol{a}^{(s)}, \quad \partial_t(\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}\bar{r})^{(-s)} \quad \Rightarrow \tag{13.4.16}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\bar{\mathcal{L}}) &= \partial_t(\boldsymbol{a})^{t} \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{N-j}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^{t} \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{N-j}\partial_t(\boldsymbol{b}) = \\ &= \bar{r}\boldsymbol{a}^{(s)t} \sum \zeta^{N-j}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^{t} \sum \zeta^{N-j}(\boldsymbol{b}r)^{(-s)}, \end{aligned} \tag{13.4.17}$$

и, с другой стороны,

$$[\mathcal{O},\bar{\mathcal{L}}]_{\geqslant N}=\left(\bar{r}\zeta^{s}\boldsymbol{a}^{t}\sum\zeta^{N-j}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^{t}\sum\zeta^{N-j}\boldsymbol{b}\bar{r}\zeta^{s}\right)_{\leqslant N}=$$
$$=\bar{r}\zeta^{s}\boldsymbol{a}^{t}\zeta^{-s}\sum\zeta^{N-j}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^{t}\sum\zeta^{N-j}\zeta^{-s}\boldsymbol{b}\bar{r}\zeta^{s}=$$
$$=\bar{r}\boldsymbol{a}^{(s)t}\sum\zeta^{N-j}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^{t}\sum\zeta^{N-j}(\boldsymbol{b}\bar{r})^{(-s)},\tag{13.4.18}$$

что совпадает с выражением (13.4.17).

Как следствие, мы заключаем без дополнительных проверок, что все потоки 4-й иерархии Гиббонса с оператором Лакса $\bar{\mathcal{L}}$ (13.4.8) коммутируют: они являются ограничениями коммутирующих потоков на {"подмногообразие связя (13.4.7)"="фактор-кольцо $C_{R,a,b}/I_{constr}\approx C_{a,b}$"}. Как насчет гамильтоновости? Из формулы вычетов имеем

$$d(\bar{\mathcal{H}}_{n+1})\approx\operatorname{Res}[\bar{\mathcal{L}}^{n}d(\bar{\mathcal{L}})]=\operatorname{Res}\Big[\sum\bar{\pi}_{s}(n)\zeta^{s}\Big(d\boldsymbol{a}^{t}\sum\zeta^{N-j}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^{t}\sum\zeta^{N-j}d\boldsymbol{b}\Big)\Big]\approx$$
$$\approx d\boldsymbol{a}^{t}\sum_{j\geqslant0}(\boldsymbol{b}\bar{\pi}_{j-N}(n))^{(N-j)}+d\boldsymbol{b}^{t}\sum_{j\leqslant0}\bar{\pi}_{j-N}(n)\boldsymbol{a}^{(j-N)}\quad\Rightarrow\tag{13.4.19}$$
$$\frac{\delta\bar{\mathcal{H}}_{n+1}}{\delta\boldsymbol{a}}=[(\bar{\mathcal{L}}^{n})_{\geqslant-N}]^{\dagger}(\boldsymbol{b}),\quad\frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta\boldsymbol{b}}=[(\bar{\mathcal{L}}^{n})_{\geqslant-N}](\boldsymbol{a}).\tag{13.4.20}$$

Таким образом, гамильтоново представление невозможно.

Как насчет потенциальной формы? Гомоморфизм Pot (13.3.3) теперь превращается в

$$V^{(-N)}V^{-1}=R_{N}=\boldsymbol{a}^{(-N)t}\boldsymbol{b}.\tag{13.4.21}$$

Чтобы это отображение существовало, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ должны быть 1-компонентнуыми скалярами, и тогда

$$a=V,\quad b=V^{-1},\tag{13.4.22}$$

(с точностью до умножения V на обратимую постоянную), так что возникает дополнительная связь,

$$b=a^{-1}\tag{13.4.23}$$

которую следует наложить на оператор $\bar{\mathcal{L}}$ (13.4.8):

$$\bar{\mathcal{L}}=a\zeta^{N}(1-\zeta^{-1})^{-1}a^{-1}.\tag{13.4.24}$$

Возможно ли это? Имеем

$$\bar{\mathcal{L}}^{n}=a\zeta^{Nn}(1-\zeta^{-1})^{-n}a^{-1}\quad\Rightarrow\tag{13.4.25}$$
$$(\bar{\mathcal{L}}^{n})_{\geqslant1}=a\mathcal{O}_{n}a^{-1},\tag{13.4.26}$$
$$\mathcal{O}_{n}=\zeta^{Nn}\sum_{k=0}^{Nn-1}\binom{-n}{k}(-1)^{k}\zeta^{-k},\tag{13.4.27}$$

и уравнения движения (13.4.9) превращаются в согласованные уравнения

$$\partial_{t_n}(a)=a\mathcal{O}_{n}(1),\quad\partial_{t_n}(a^{-1})=-a^{-1}\mathcal{O}_{n}(1).\tag{13.4.28}$$

Сопряжение $\bar{\mathcal{L}}\mapsto V^{-1}\bar{\mathcal{L}}V$ становится бесполезным:

$$a\zeta^{N}(1-\zeta^{-1})^{-1}a^{-1}\mapsto a^{-1}[a\zeta^{N}(1-\zeta^{-1})^{-1}a^{-1}]a=\zeta^{N}(1-\zeta^{-1})^{-1}.\tag{13.4.29}$$

Упражнение 13.4.30. Формулы (13.3.6) предсказывают, что преобразование Миуры Ψ для оператора Лакса $\bar{\mathcal{L}}$ (13.4.25) имеет вид

$$p = V^{-1}a = 1, \quad q = bV = 1. \tag{13.4.31}$$

Увяжите эти формулы с уравнениями движеиия (13.1.3b,c)

$$\partial_t(p) = (L^n)_+(p), \quad \partial_t(q) = -[(L^n)_+]^\dagger(q). \tag{13.4.32}$$

Упражнение 13.4.33. Покажите, что иерархии (13.4.9) имеет классический предел, но не ямеет квазяклассического.

13.5 Полностью билинейная форма иерархии КП

В этом разделе мы устанавливаем для дискретиой иерархии КП аналог 4-й формы Гиббоиса, иайденной в предыдущем разделе для дискретной иерархии МКП.

В §13.1 мы стартовали с оператора Лакса дискретной иерархии КП

$$L = \zeta^N + \sum_{1}^{N-1} \zeta^i r_i + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} q_j \tag{13.5.1}$$

и заменили ее формой Гиббонса

$$\bar{L} = \zeta^N + \sum_{1}^{N-1} \zeta^i r_i + \boldsymbol{p}^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{q}. \tag{13.5.2}$$

Руководствуясь аналогией со связэью $R_i = \boldsymbol{a}^{(-i)t} \boldsymbol{b}$ из предыдущего раздела, наложим связи

$$r_i = \boldsymbol{p}^{(-i)t} \boldsymbol{q}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N - 1, \tag{13.5.3}$$

на оператор Лакса $\bar{L}$ (13.5.2). В результате приходим к оператору Лакса

$$\bar{L} = \zeta^N + \boldsymbol{p}^t \zeta^{N-1} (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{q}, \tag{13.5.4}$$

со старыми уравнениями движения (13.1.3b,c):

$$\partial_{t_n}(\boldsymbol{p}) = P_+(\boldsymbol{p}), \quad \partial_{t_n}(\boldsymbol{q}) = -(P_+)^\dagger(\boldsymbol{q}), \quad P = \bar{L}^n. \tag{13.5.5}$$

Чтобы показать, что связн (13.5.3) самосогласованы, необходимо проверить, что из уравненнй движения (13.5.5) следует тождество

$$\partial_P(\bar{L}) = [P_+, \bar{L}], \quad \partial_P = \partial_{t_n}. \tag{13.5.6}$$

Обозначнв временпо $P_+ = \mathcal{O}$, нмеем

$$[P_+, \bar{L}] = [\bar{L}, P_-] = [\bar{L}, P_-]_{<N} = [P_+, \bar{L}]_{<N} = [\mathcal{O}, \bar{L}]_{<N}, \tag{13.5.7}$$

я, с другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial_P(\bar{L}) &= \partial_P[\zeta^N + \boldsymbol{p}^t \zeta^{N-1} (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{q}] = \\ &= \mathcal{O}(\boldsymbol{p})^t \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{N-1-j} \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{N-1-j} \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{q}). \end{aligned} \tag{13.5.8}$$

Возьмем

$$\mathcal{O} = \bar{r}\zeta^{s}, \quad s \in \mathbb{Z}_{+}, \tag{13.5.9}$$

тогда выражение (13.5.7) превращается в

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O},\ \bar{L}]_{<N} &= [\bar{r}\zeta^{s}, \zeta^{N} + \boldsymbol{p}^{t}\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{N-1-j}\boldsymbol{q}]_{<N} \\
&= \bar{r}\zeta^{s}\boldsymbol{p}^{t}\zeta^{-s}\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{N-1-j}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^{t}\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{N-1-j}\zeta^{-s}\boldsymbol{q}\bar{r}\zeta^{s} \\
&= \bar{r}\boldsymbol{p}^{(s)t}\sum\zeta^{N-1-j}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^{t}\sum\zeta^{N-1-j}(\boldsymbol{q}\bar{r})^{(-s)} \\
&= \mathcal{O}(\boldsymbol{p})^{t}\sum\zeta^{N-1-j}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^{t}\sum\zeta^{N-1-j}\mathcal{O}^{\dagger}(\boldsymbol{q}),
\end{aligned}$$

и совпадает с выражением (13.5.8).

Чтобы убедиться в безнадежности гамильтоновой картины при $N > 1$ (случай $N = 1$ рассматривался в §13.1), используем формулу вычетов и получим

$$\begin{aligned}
d(\bar{H}_{n+1}) &\approx \operatorname{Res}[\bar{L}^{n}d(\bar{L})] = \operatorname{Res}\Big[\sum\bar{p}_{s}(n)\zeta^{s}\Big(d\boldsymbol{p}^{t}\sum\zeta^{N-1-j}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^{t}\sum\zeta^{N-1-j}d\boldsymbol{q}\Big)\Big] \approx \\
&\approx d\boldsymbol{p}^{t}\sum_{j\geqslant 0}(\boldsymbol{q}\bar{p}_{j+1-N}(n))^{(N-1-j)} + d\boldsymbol{q}^{t}\sum_{j\geqslant 0}\bar{p}_{j+1-N}(n)\boldsymbol{p}^{(j+1-N)},
\end{aligned} \tag{13.5.10}$$

откуда

$$\frac{\delta\bar{H}_{n+1}}{\delta\boldsymbol{p}} = [(\bar{L}^{n})_{\geqslant 1-N}]^{\dagger}(\boldsymbol{q}), \quad \frac{\delta H_{n+1}}{\delta\boldsymbol{q}} = (\bar{L}^{n})_{\geqslant 1-N}(\boldsymbol{p}), \tag{13.5.11}$$

так что, действительно, гамильтоново представление невозможно при $N > 1$. Простейший случай $N = 1$ оказался также наиболее богатым.

Упражнение 13.5.12. Покажите, что иерархия (13.5.5) имеет классический предел, но не имеет квазиклассического.

13.6 Пятая форма Гиббонса иерархии МКП

> Второй плакальщик
>
> Я был на пяти похоронах за шесть недель.
>
> Третий плакальщик
>
> Я тебя побил. Я за пять недель был на шести, не считая эти.
>
> Менкен, *Смерть. Философское обсуждение, Книга бурлесков*

В этом разделе мы рассматриваем форму Гиббонса иерархии МКП в G–координатах из §12.6.

Положим

$$\Lambda = 1 + \boldsymbol{A}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B} = 1 + \boldsymbol{A}^{t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^{t}\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}, \tag{13.6.1}$$

$$\mathcal{L} = \zeta^{N}\Lambda^{-1} = (\Lambda\zeta^{-N})^{-1}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{13.6.2}$$

и рассмотрим иерархию, у которой n-й поток имеет вид

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A}), \quad \partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{B}) = -(\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^{N})^{\dagger}(\boldsymbol{B}), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^{n}. \tag{13.6.3}$$

Утверждение 13.6.4. Из уравнений движения (13.6.3) следует уравнение движения

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}]. \tag{13.6.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = \partial_{\mathcal{P}}(\zeta^N \Lambda^{-1}) = -\zeta^N \Lambda^{-1} \partial_{\mathcal{P}}(\Lambda) \Lambda^{-1}, \tag{13.6.6}$$

$$[\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}] = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \zeta^N \Lambda^{-1}] = \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N \Lambda^{-1} - \zeta^N \Lambda^{-1} \mathcal{P}_{\geqslant 1}. \tag{13.6.7}$$

Следовательно, равенство (13.6.5) эквивалентно тождеству

$$\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda) = \mathcal{P}_{\geqslant 1} \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N. \tag{13.6.8}$$

Обозначим временно

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \mathcal{P}_{\geqslant 1} = \mathcal{L}^n - \mathcal{P}_{\geqslant 1} = \mathcal{P}_{\leqslant 0}. \tag{13.6.9}$$

Лемма 13.6.10.

$$\mathcal{P}_{\geqslant 1} \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N = -(\mathcal{P}' \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}' \zeta^N). \tag{13.6.11}$$

Доказательство. Перегруппировка члены позволяет записать это равенство в виде

$$\begin{aligned} &(\mathcal{P}_{\geqslant 1} + \mathcal{P}')\Lambda = \Lambda \zeta^{-N} (\mathcal{P}' + \mathcal{P}_{\geqslant 1}) \zeta^N \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}\Lambda = \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P} \zeta^N \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^n \Lambda \zeta^{-N} = \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{L}^n, \end{aligned}$$

что справедливо, так как $\Lambda \zeta^{-N} = \mathcal{L}^{-1}$. ▮

Лемма 13.6.12.

$$(\mathcal{P}_{\geqslant 1} \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N)_{\leqslant 0} = \mathcal{P}_{\geqslant 1} \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N. \tag{13.6.13}$$

Доказательство. Согласно формуле (13.6.11),

$$\mathcal{P}_{\geqslant 1} \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N = \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\leqslant 0} \zeta^N - \mathcal{P}_{\leqslant 0} \Lambda, \tag{13.6.14}$$

и в правой части равенства (13.6.14) члены Λ, $\zeta^{-N} \mathcal{P}_{\leqslant 0} \zeta^N$ и $\mathcal{P}_{\leqslant 0}$ принадлежат $C[[\zeta^{-1}]]$. ▮

Таким образом, требуемое тождество (13.6.8) можно переписать в виде

$$\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda) = (\mathcal{P}_{\geqslant 1} \Lambda - \Lambda \zeta^{-N} \mathcal{P}_{\geqslant 1} \zeta^N)_{\leqslant 0}. \tag{13.6.15}$$

Обозначим временно $\mathcal{P}_{\geqslant 1} = \mathcal{O}$. Тогда

$$\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda) = \partial_{\mathcal{P}}[1 + \boldsymbol{A}^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{B}] = \mathcal{O}(\boldsymbol{A})^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \bar{\mathcal{O}}^\dagger (\boldsymbol{B}), \tag{13.6.16}$$

где

$$\bar{\mathcal{O}} = \zeta^{-N} \mathcal{O} \zeta^N. \tag{13.6.17}$$

Таким образом, нам нужно проверить тождество

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{A})^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \bar{\mathcal{O}}^\dagger (\boldsymbol{B}) = (\mathcal{O}\Lambda - \Lambda \bar{\mathcal{O}})_{\leqslant 0}. \tag{13.6.18}$$

Возьмем

$$\mathcal{O} = \bar{r} \zeta^s, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{13.6.19}$$

тогдв для правой части равенства (13.6.18) получаем

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}\Lambda - \Lambda\bar{\mathcal{O}})_{\leqslant 0} &= \Big(\bar{r}\zeta^{s}[1 + \boldsymbol{A}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}] - [1 + \boldsymbol{A}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}]\zeta^{-N}\bar{r}\zeta^{s}\zeta^{N}\Big)_{\leqslant 0}\\ &= \bar{r}\zeta^{s}\boldsymbol{A}^{t}\zeta^{-s}\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{t}\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}\zeta^{-s}\boldsymbol{B}\zeta^{-N}\bar{r}\zeta^{s+N}\\ &= \bar{r}\boldsymbol{A}^{(s)t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}^{(-s)}\bar{r}^{(-s-N)}\\ &= \mathcal{O}(\boldsymbol{A})^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^{t}(1-\zeta^{-1})^{-1}(\zeta^{-N}\mathcal{O}\zeta^{N})^{\dagger}(\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$

что совпадает с левой частью равеиства (13.6.18). ▮

Упражнение 13.6.20. (i) Покажите, что при $N = 1$, первый поток иерархии (13.6.3) имеет вид

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{A}) = \left(\frac{1}{1+\boldsymbol{A}^{t}\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}, \tag{13.6.21a}$$

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{B}) = -\left(\boldsymbol{B}\frac{1}{1+\boldsymbol{A}^{t}\boldsymbol{B}}\right)^{(-1)}; \tag{13.6.21b}$$

(ii) Покажите, что этот поток может быть записан в гамильтоиовом виде

$$\partial_{t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\Delta 1\\ \Delta^{-1}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{A}\\ \delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{B}\end{pmatrix}, \tag{13.6.22}$$

где

$$\mathcal{H} = -\ln(1+\boldsymbol{A}^{t}\boldsymbol{B}). \tag{13.6.23}$$

Теорема 13.6.24. Все потоки 5-й иерархии Гиббонса (13.6.3) коммутируют.

Доказательство. Мы близко следуем дифференциальиой ситуации нз Теоремы 3.6.30. Выберем $n_1 \in \mathbb{N}$ н обозначим $\mathcal{R} = \mathcal{L}^{n_1}$. Тогда

$$\begin{gathered}\partial_{\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{A}) = \partial_{\mathcal{P}}\mathcal{R}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A}) = [\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R})]_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A}) + \mathcal{R}_{\geqslant 1}\mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A}) \quad \Rightarrow\\ [\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{R}}](\boldsymbol{A}) = ?(\boldsymbol{A}),\end{gathered}$$

где

$$? = [\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})]_{\geqslant 1} + [\mathcal{R}_{\geqslant 1}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}]. \tag{13.6.25}$$

Далее, по формуле (13.6.5),

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{R}] = [\mathcal{R}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] \quad \Rightarrow \tag{13.6.26}$$

$$\begin{aligned}? &= \big([\mathcal{R}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] - [\mathcal{P}, \mathcal{R}_{\leqslant 0}]\big)_{\geqslant 1} + [\mathcal{R}_{\geqslant 1}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}]\\ &= \big([\mathcal{R}_{\geqslant 1}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}] + [\mathcal{R}_{\geqslant 0}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}]\big)_{\geqslant 1} + [\mathcal{R}_{\geqslant 1}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}] \qquad (13.6.26')\\ &= \big([\mathcal{R}_{\geqslant 1} + \mathcal{R}_{\leqslant 0},\ \mathcal{P}_{\geqslant 1} + \mathcal{P}_{\leqslant 0}]\big)_{\geqslant 1} = [\mathcal{R}, \mathcal{P}]_{\geqslant 1} = 0.\end{aligned}$$

Апалогичпо, с $\bar{\mathcal{R}} = \zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^{N}$, н т.п.,

$$\begin{gathered}\partial_{\mathcal{P}}\partial_{\mathcal{R}}(\boldsymbol{B}) = -\partial_{\mathcal{P}}[(\bar{\mathcal{R}}_{\geqslant 1})^{\dagger}(\boldsymbol{B})] = -[\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{R}})_{\geqslant 1}]^{\dagger}(\boldsymbol{B}) + (\bar{\mathcal{R}}_{\geqslant 1})^{\dagger}(\bar{\mathcal{P}}_{\geqslant 1})^{\dagger}(\boldsymbol{B}) \quad \Rightarrow\\ [\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{R}}](\boldsymbol{B}) = !(\boldsymbol{B}),\end{gathered} \tag{13.6.27}$$

где

$$! = \left(|-\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{R}}) + \partial_{\mathcal{R}}(\bar{\mathcal{P}})]_{\geqslant 1}\right)^{\dagger} + [(\bar{\mathcal{R}}_{\geqslant 1})^{\dagger}, (\bar{\mathcal{P}}_{\geqslant 1})^{\dagger}| = (!')^{\dagger}, \tag{13.6.27'}$$

$$!' = [-\partial_{\mathcal{P}}(\bar{\mathcal{R}}) + \partial_{\mathcal{R}}(\bar{\mathcal{P}})]_{\geqslant 1} - |\bar{\mathcal{R}}_{\geqslant 1}, \bar{\mathcal{P}}_{\geqslant 1}] = \zeta^{-N} !'' \zeta^{N}, \tag{13.6.28}$$

$$!'' = [-\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) + \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})]_{\geqslant 1} - |\mathcal{R}_{\geqslant 1}, \mathcal{P}_{\geqslant 1}| \overset{(13.6.25)}{=} -? \overset{(13.6.26')}{=} 0. \qquad \blacksquare$$

Обратимся теперь к гамильтоновым аспектам иерархии (13.6.3). Формула вычетов дает, стандартным образом:

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})] = -\operatorname{Res}[\mathcal{L}^n \zeta^N \Lambda^{-1} d(\Lambda)\Lambda^{-1}] \approx -\operatorname{Res}[d(\Lambda)\Lambda^{-1}\mathcal{L}^n \zeta^N \Lambda^{-1}] =$$

$$= -\operatorname{Res}[d(\Lambda)\zeta^{-N}\mathcal{L}^{n+2}] = -\operatorname{Res}\Big(d\boldsymbol{A}^t \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} \boldsymbol{B} \zeta^{-N} \mathcal{L}^{n+2} + \boldsymbol{A}^t \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} d\boldsymbol{B} \zeta^{-N} \mathcal{L}^{n+2}\Big) \approx$$

$$\approx -d\boldsymbol{A}^t \sum_{j\geqslant 0} [\boldsymbol{B}\pi_{N+j}^{(-N)}(n+2)]^{(-j)} - d\boldsymbol{B}^t \sum_{j\geqslant 0} \pi_{N+j}^{(-N)}(n+2)\boldsymbol{A}^{(j)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}_{n-1}}{\delta \boldsymbol{A}} = -\sum_{j\geqslant 0} [\boldsymbol{B}\pi_{N+j}^{(-N)}(n)]^{(-j)}, \tag{13.6.29a}$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}_{n-1}}{\delta \boldsymbol{B}} = \sum_{j\geqslant 0} \pi_{N+j}^{(-N)}(n)\boldsymbol{A}^{(j)}. \tag{13.6.29b}$$

Из формул (13.6.3) видим, что нам нужны выражения $(\mathcal{L}^n)_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A})$ и $[\zeta^{-N}(\mathcal{L}^n)_{\geqslant 1}\zeta^N]^{\dagger}(\boldsymbol{B})$. Следовательно, формулы (13.6.29) не могут, для общего N, дать гамильтоново представление, случай $N = 1$, возможно, является исключением. При $N = 1$ получаем

$$-\frac{\delta \mathcal{H}_{n-1}}{\delta \boldsymbol{A}} = \Delta\Big(\sum_{j\geqslant 0} [\boldsymbol{B}\pi_{j+1}^{(-1)}(n)]^{(-j-1)}\Big) = \Delta[\zeta^{-1}(\mathcal{L}^n_{\geqslant 1})\zeta]^{\dagger}(\boldsymbol{B}), \tag{13.6.30a}$$

$$-\frac{\delta \mathcal{H}_{n-1}}{\delta \boldsymbol{B}} = \Delta^{-1}\Big(\sum_{j\geqslant 0} \pi_{(j+1)}(n)\boldsymbol{A}^{(j+1)}\Big) = \Delta^{-1}(\mathcal{L}^n)_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A}). \tag{13.6.30b}$$

Следовательно, уравнения движения (13.6.3) для $N = 1$ могут быть записаны в (3-м) гамильтоновом виде

$$\partial_{t_n} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta 1 \\ \Delta^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathcal{H}_{n-1}/\delta \boldsymbol{A} \\ \delta \mathcal{H}_{n-1}/\delta \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \quad n \in 1 + \mathbb{N}. \tag{13.6.31}$$

Оставшийся случай $n = 1$ покрыт формулами (13.6.22, 23).

Упражнение 13.0.32. Покажите, что иерархия (13.6.3) имеет классический предел, но не имеет квазиклассического.

Сравним гамильтонову структуру (13.6.31) 5-й формы Гиббонса (13.6.1, 2) при $N = 1$ с гамильтоновой формой свободной иерархии МКП в координатах G, которая изучалась в §12.6. При $N = 1$, гамильтонова форма для G–представления (12.6.1–3):

$$\mathcal{L} = \zeta\Big(\sum_{i\geqslant 0} R_i \zeta^{-i}\Big)^{-1}, \tag{13.6.33}$$

задается гамильтоновой матрицей $B^{\text{МКП}_3} = -B({}^1\mathcal{G})$ (12.6.10):

$$B({}^1\mathcal{G})_{ij} = \widehat{L}_{R_{i+j+1}}\Delta^{-i-1} - \Delta^{j+1}\widehat{R}_{R_{i+j+1}}. \tag{13.6.34}$$

На этом языке, 5-я форма Гиббонса (13.6.1, 2) определяет гомоморфизм $\varphi : C_R \to C_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}$:

$$\varphi\Big[\zeta\Big(\sum R_i\zeta^{-i}\Big)^{-1}\Big] = \zeta[1 + \boldsymbol{A}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}, \tag{13.6.35}$$

то есть

$$\varphi\Big(\sum_{i\geqslant 0} R_i\zeta^{-i}\Big) = \sum \varphi(R_i)\zeta^{-i} = 1 + \boldsymbol{A}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}, \tag{13.6.36}$$

и окончательно

$$\varphi(R_i) = \delta_i^0 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^{(-i)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{13.6.37}$$

Теорема 13.6.38. Гомоморфизм φ (13.6.37) гамильтонов между гамильтоновыми матрицами $B({}^1\mathcal{G})$ (13.6.34) и (13.6.31).

Доказательство. Это есть случай $r = 1$ Утверждения 13.6.39 ниже. ▮

Утверждение 13.6.39. Рассмотрим, для фиксированного $r \in \mathbb{Z}_+$, следующий гомоморфизм $\varphi : C_R \to C_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}}$:

$$\varphi(R_i) = \mathrm{const}(1-\delta_r^0)\delta_i^0 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^{(-i)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{13.6.40}$$

Пусть ${}^r\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(\zeta^r R[[\zeta]])$ обозначает алгебру Ли (12.6.13) ассоциативного кольца $\{\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{r+i}Z_i | Z_i \in R\} = \zeta^r R[[\zeta|]$. Рассмотрим гамильтонову матрицу

$$b^r = \begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{A} & 0 & -\Delta^r\mathbf{1} \\ \boldsymbol{B} & \Delta^{-r}\mathbf{1} & 0 \end{array}. \tag{13.6.41}$$

Тогда φ является гамильтоновым отображением между гамильтоновыми матрицами $B = B({}^r\mathcal{G})$ и b^r.

Доказательство. Во-первых, если $\widehat{X}, \widehat{Y} \in {}^r\mathcal{G}$, $\widehat{X} = \sum\zeta^{j+r}X_j$, $\widehat{Y} = \sum\zeta^{i+r}Y_i$, то

$$[\widehat{X},\widehat{Y}] = \zeta^r\sum\zeta^{i+j+r}(X_j^{(-i-r)}Y_i - Y_i^{(-j-r)}X_j) \quad \Rightarrow \tag{13.6.42}$$

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]_k = \sum_{i+j+r=k}(X_j^{(-i-r)}Y_i - Y_i^{(-j-r)}X_j) \quad \Rightarrow \tag{13.6.43}$$

$$B(\boldsymbol{X})^t\boldsymbol{Y} \approx \sum R_k[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}|_k \approx \sum[R_{i+j+r}X_j^{(-i-r)} - (X_jR_{i+j+r})^{(j+r)}]Y_i \quad \Rightarrow \tag{13.6.44}$$

$$B({}^r\mathcal{G})_{ij} = B_{ij} = \widehat{L}_{R_{i+j+r}}\Delta^{-i-r} - \Delta^{j+r}\widehat{R}_{R_{i+j+r}}. \tag{13.6.45}$$

Во-вторых, нам надо проверить тождество

$$\varphi(B) = Jb^rJ^\dagger, \quad J = D(\varphi). \tag{13.6.46}$$

Так как

$$J = \begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline R_i & \widehat{R}_{\boldsymbol{B}^{(-i)}} & \widehat{L}_{\boldsymbol{A}}\Delta^{-i} \end{array}, \tag{13.6.47a}$$

$$J^\dagger = \begin{array}{c|c} & R_j \\ \hline \boldsymbol{A} & \widehat{L}_{\boldsymbol{B}^{(-j)}} \\ \boldsymbol{B} & \Delta^j\widehat{R}_{\boldsymbol{A}} \end{array}, \tag{13.6.47b}$$

то получаем

$$(Jb^r J^\dagger)_{ij} = \widehat{L}_{A^i}\Delta^{-i-r}\widehat{L}_{B^{(-j)}} - \widehat{R}_{B^{(-i)i}}\Delta^{r+j}\widehat{R}_{A} =$$
$$= \widehat{L}_{A^iB^{(-i-j-r)}}\Delta^{-i-r} - \Delta^{j+r}\widehat{R}_{A^iB^{(-i-j-r)}} = \varphi(\widehat{L}_{R_{i+j+r}}\Delta^{-i-r} - \Delta^{j+r}\widehat{R}_{R_{i+j+r}}). \qquad \blacksquare$$

Упражнение 13.6.48. Докажите гамильтоновость гомоморфизма

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \mapsto \boldsymbol{A}^{(-r)}, \quad \boldsymbol{B} \mapsto \boldsymbol{B}, \tag{13.6.49}$$

между канонической гамильтоновой матрицей $b^0 = b^r|_{r=0}$ в координатах $(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{B})$ и гамильтоновой матрицей b^r (13.6.41) в координатах $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Упражнение 13.6.50. Покажите, что из уравнений движения (13.6.3) следует

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathrm{Res}(\Lambda)) = \mathrm{Res}(\Lambda)(\mathrm{Res}(\mathcal{P}))^{(-N)} - \mathrm{Res}(\mathcal{P})\,\mathrm{Res}(\Lambda), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n. \tag{13.6.51}$$

13.7 Форма Гиббонса иерархии КП в G–координатах

> Идея не отвечает за людей, которые в нее верят.
>
> Дон Маркиз

В этом разделе мы строим форму Гиббонса иерархии КП в G–координатах из §12.6.

Перепишем оператор Лакса L (9.1.14) общей иерархии КП

$$L = \zeta^N + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{N-1-i}q_i, \tag{13.7.1}$$

в координатах G :

$$L = \zeta^N\Lambda^{-1} = (\Lambda\zeta^{-N})^{-1}, \quad \Lambda = 1 + \sum_{i\geqslant 0} r_i\zeta^{-i-1}. \tag{13.7.2}$$

Уравнения движения для иерархии КП

$$\partial_P(L) = [P_+, L], \quad P = L^n, \tag{13.7.3}$$

принимают, на Λ–языке, вид

$$\partial_P(\Lambda) = P_+\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}P_+\zeta^N. \tag{13.7.4}$$

Так как $\Lambda = L^{-1}\zeta^N$, то

$$P_+\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}P_+\zeta^N = [P_+, L^{-1}]\zeta^N = [-P_-, L^{-1}]\zeta^N = ([-P_-, L^{-1}]\zeta^N)_-$$
$$= ([P_+, L^{-1}]\zeta^N)_- = (P_+\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}P_+\zeta^N)_- \ , \tag{13.7.5}$$

так что уравнения движения (13.7.4) можно преобразовать к виду

$$\partial_P(\Lambda) = (P_+\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}P_+\zeta^N)_-. \tag{13.7.6}$$

В качестве соответствующей формы Гиббонса мы заменим Λ на

$$\bar{\Lambda} = 1 + \boldsymbol{a}^t \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{13.7.7}$$

и постулируем следующие уравнения движения для $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\partial_P(\boldsymbol{a}) = \bar{P}_+(\boldsymbol{a}), \quad \partial_P(\boldsymbol{b}) = -(\zeta^{-N}\bar{P}_+\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b}), \tag{13.7.8}$$

$$\bar{P} = \bar{L}^n, \quad \bar{L} = \zeta^N \bar{\Lambda}^{-1}. \tag{13.7.9}$$

Чтобы оправдать это определение, проверим, что из уравнений движения (13.7.8, 9) вытекают уравнение движения КП (13.7.6):

$$\partial_P(\bar{\Lambda}) = (\bar{P}_+\bar{\Lambda} - \bar{\Lambda}\zeta^{-N}\bar{P}_+\zeta^N)_-. \tag{13.7.10}$$

Обозначим через $\mathcal{O}$ произвольный элемент $C[\zeta]$, и будем писать временно ∂_t вместо ∂_P. Мы хотим проверить, что из пары равенств

$$\partial_t(\boldsymbol{a}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{a}), \quad \partial_t(\boldsymbol{b}) = -(\zeta^{-N}\mathcal{O}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b}), \tag{13.7.11}$$

следует равенство

$$\partial_t(\bar{\Lambda}) = (\mathcal{O}\bar{\Lambda} - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{O}\zeta^N)_-. \tag{13.7.12}$$

Имеем,

$$\begin{aligned}
\partial_t(\bar{\Lambda}) &= \partial_t(1 + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}) = \\
&= \partial_t(\boldsymbol{a})^t\zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\partial_t(\boldsymbol{b}) = \\
&= \mathcal{O}(\boldsymbol{a})^t \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j-1}(\zeta^{-N}\mathcal{O}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b}).
\end{aligned} \tag{13.7.13}$$

Возьмем

$$\mathcal{O} = r\zeta^s, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{13.7.14}$$

тогда выражение (13.7.13) превращается в

$$r\boldsymbol{a}^{(s)t} \sum \zeta^{-j-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum \zeta^{-j-1}\boldsymbol{b}^{(-s)}r^{(-N-s)}, \tag{13.7.15}$$

а правая часть уравнения (13.7.12) превращается в

$$\begin{aligned}
&\Big[r\zeta^s\Big(1 + \boldsymbol{a}^t \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{-i-1}\boldsymbol{b}\Big) - \Big(1 + \boldsymbol{a}^t \sum_{i \geqslant 0} \zeta^{-i-1}\boldsymbol{b}\Big)\zeta^{-N}r\zeta^s\zeta^N\Big]_- = \\
&= \Big[r\boldsymbol{a}^{(s)t} \sum \zeta^{s-i-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum \zeta^{-i-1+s}\boldsymbol{b}^{(-s)}r^{(-N-s)}\Big]_- = \\
&= r\boldsymbol{a}^{(s)} \sum \zeta^{-j-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j-1}\boldsymbol{b}^{(-s)}r^{(-N-s)},
\end{aligned} \tag{13.7.16}$$

а эти два выражения в точности совпадают.

Упражнение 13.7.17. Покажите, что при $N = 1$ верна формула

$$\bar{L}_+ = \zeta - \boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b} \tag{13.7.18}$$

и докажите, что первый поток в этом случае задан уравнениями

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{(1)} - (\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}, \tag{13.7.19a}$$

$$\partial_{t_1}(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-1)} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}). \tag{13.7.19b}$$

Далее, покажем, что все потоки в иерархии Гиббонса (13.7.8, 9) коммутируют. Выберем $n_1 \in \mathbb{N}$, и обозначим $\bar{Q} = \bar{L}^{n_1}$. Тогда

$$\partial_P \partial_Q(\boldsymbol{a}) = \partial_P(\bar{Q}_+(\boldsymbol{a})) = (\partial_P(\bar{Q}_+) + \bar{Q}_+\bar{P}_+)(\boldsymbol{a}) \quad \Rightarrow \tag{13.7.20}$$

$$[\partial_P, \partial_Q](\boldsymbol{a}) = \bar{?}(\boldsymbol{a}), \tag{13.7.21}$$

где

$$\bar{?} = \partial_P(\bar{Q}_+) - \partial_Q(\bar{P}_+) - [\bar{P}_+, \bar{Q}_+], \tag{13.7.22}$$

так что

$$? = \partial_P(Q_+) - \partial_Q(P_+) - [P_+, Q_+] \quad \overset{(9.1.33–36')}{=} 0. \tag{13.7.23}$$

Аналогично,

$$\begin{gathered} \partial_P \partial_Q(\boldsymbol{b}) = -\partial_P[(\zeta^{-N}\bar{Q}_+\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b})] = \\ = \{-[\zeta^{-N}\partial_P(\bar{Q}_+)\zeta^N]^\dagger + (\zeta^{-N}\bar{Q}_+\zeta^N)^\dagger(\zeta^{-N}\bar{P}_+\zeta^N)^\dagger\}(\boldsymbol{b}) \quad \Rightarrow \\ [\partial_P, \partial_Q](\boldsymbol{b}) = \bar{!}^\dagger(\boldsymbol{b}), \end{gathered} \tag{13.7.24}$$

где

$$!^\dagger = -\{\zeta^{-N}[\partial_P(\bar{Q}_+) - \partial_Q(\bar{P}_+)]\zeta^N\}^\dagger + [(\zeta^{-N}\bar{Q}_+\zeta^N)^\dagger, (\zeta^{-N}\bar{P}_+\zeta^N)^\dagger]. \tag{13.7.25}$$

Теперь,

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)^\dagger = \mathcal{O}_2^\dagger\mathcal{O}_1^\dagger, \quad \forall\, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in C((\zeta^{-1})) \quad \Rightarrow \tag{13.7.26}$$

$$\begin{gathered} ! = -\zeta^{-N}|\partial_P(\bar{Q}_+) - \partial_Q(\bar{P}_+)|\zeta^N - [\zeta^{-N}\bar{Q}_+\zeta^N, \zeta^{-N}\bar{P}_+\zeta^N] = \\ = -\zeta^{-N}\{\partial_P(\bar{Q}_+) - \partial_Q(\bar{P}_+) - [\bar{Q}_+, \bar{P}_+]\}\zeta^N \quad \overset{(13.7.20)}{=} \\ = -\zeta^{-N}\bar{?}\zeta^N \quad \overset{(13.7.23)}{=} 0. \end{gathered} \tag{13.7.27}$$

Замечание 13.7.28. Кое-где в тексте, формула (13.7.26) принимает противоположную форму

$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2)^\dagger = \mathcal{O}_1^\dagger\mathcal{O}_2^\dagger. \tag{13.7.29}$$

Я надеюсь, это не собьет читателя с толку. В формуле (13.7.26) операторы $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ написаны *слева* от объектов, на которые они действуют, а в формуле (13.7.29) эти операторы написаны *справа* от объектов (и *действуют налево*).

13.8 Потенциальная иерархия МКП в G–координатах как неголономная динамическая иерархия, и ассоциированное преобразование Миуры

В этом разделе мы построим преобразование Миуры между иерархиями МКП и КП в формах Гиббонса в G–координатах, изучавшимися в §13.6 и §13.7.

Форма Гиббонса иерархии МКП в G–координатах задана формулами (13.6.1–3):

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{P}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{A}), \quad \partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{B}) = -(\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{B}), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{13.8.1}$$

$$\mathcal{L} = \zeta^N\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 1 + \boldsymbol{A}^t(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{13.8.2}$$

Форма Гиббонса иерархии КП в G–координатах задана формулами (13.7.7–9):

$$\partial_P(\boldsymbol{a}) = P_+(\boldsymbol{a}), \quad \partial_P(\boldsymbol{b}) = -(\zeta^{-N}P_+\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b}), \quad P = L^n, \tag{13.8.3}$$

$$L = \zeta^N\lambda^{-1}, \quad \lambda = 1 + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.8.4}$$

Если попытаться отобразить одну иерархию в другую, посредством сопряжения (9.5.2):

$$\Phi(L) = \zeta^N\Phi(\lambda^{-1}) = V^{-1}\mathcal{L}V = \zeta^N V^{(-N)-1}\Lambda^{-1}V, \tag{13.8.5}$$

то получим

$$\Phi(\lambda) = V^{-1}\Lambda V^{(-N)}, \tag{13.8.6}$$

откуда

$$\begin{aligned} 1 + \Phi(\boldsymbol{a})^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\Phi(\boldsymbol{b}) &= V^{-1}[1 + \boldsymbol{A}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}]V^{(-N)} = \\ &= V^{-1}[1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^t\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}]V^{(-N)}, \end{aligned} \tag{13.8.7}$$

что эквивалентно равенствам

$$1 = V^{-1}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})V^{(-N)} \tag{13.8.8}$$

$$\Phi(\boldsymbol{a}) = V^{-1}\boldsymbol{A}, \tag{13.8.9a}$$

$$\Phi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{B}V^{(-N)} \tag{13.8.9b}$$

Формула (13.8.8) очень интересна. Она показывает, что мы больше не можем перейти к потенциальной иерархии МКП, и вместо этого должны *присоединить* к иерархии МКП *новую переменную V неголономно связанную* со старыми переменными $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$V^{(-N)} = (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})^{-1}V. \tag{13.8.10}$$

Уравнение движения для V задается старой формулой (9.5.22)

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\operatorname{Res}(\mathcal{P})V, \tag{13.8.11}$$

где отображение Pot опущено из обозначений.

Первоочередной задачей является проверка совместности ("касательности") потока (13.8.1, 11) в пространстве $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, V\}$ со связью (13.8.8). Записывая последнюю в виде

$$V = (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})V^{(-N)}, \tag{13.8.12}$$

мы находим

$$\begin{aligned} &\partial_{\mathcal{P}}[V - (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})V^{(-N)}] = \\ &= -\operatorname{Res}(\mathcal{P})V - \partial_{\mathcal{P}}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})V^{(-N)} + (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})[\operatorname{Res}(\mathcal{P})]^{(-N)}V^{(-N)} = (\ldots)V^{(-N)}, \end{aligned} \tag{13.8.13}$$

где

$$(\ldots) = -\operatorname{Res}(\mathcal{P})(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}) - \partial_{\mathcal{P}}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}) + (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})[\operatorname{Res}(\mathcal{P})]^{(-N)}. \tag{13.8.14}$$

Таким образом, чтобы установить совместность, нужно проверить тождество в пространстве $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$

$$\partial_{\mathcal{P}}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}) = (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})[\operatorname{Res}(\mathcal{P})]^{(-N)} - \operatorname{Res}(\mathcal{P})(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}). \tag{13.8.15}$$

Проделать это непосредственно, используя уравнения движения (13.8.1), довольно тяжело. Легче оказывается доказать более общее тождество. Заметив, что

$$1+\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}=\mathrm{Res}(\Lambda), \tag{13.8.16}$$

мы можем переписать формулу (13.8.15) в виде

$$\mathrm{Res}\,\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda)=\mathrm{Res}(\Lambda)\,\mathrm{Res}(\zeta^{-N}\mathcal{P}\zeta^{N})-\mathrm{Res}(\mathcal{P})\,\mathrm{Res}(\Lambda). \tag{13.8.17}$$

Согласно Утверждению 13.6.4, левая часть формулы (13.8.17) преобразуется в силу формулы (13.6.8) к виду

$$\mathrm{Res}(\mathcal{P}_{\geqslant 1}\Lambda-\Lambda\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^{N})=\mathrm{Res}(\Lambda)\,\mathrm{Res}(\zeta^{-N}\mathcal{P}\zeta^{N})-\mathrm{Res}(\mathcal{P})\,\mathrm{Res}(\Lambda) \tag{13.8.18}$$

что далее переписывается в виде

$$\mathrm{Res}(\mathcal{P}_{\geqslant 1}\Lambda)+\mathrm{Res}(P)\,\mathrm{Res}(\Lambda)=\mathrm{Res}(\Lambda\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^{N})+\mathrm{Res}(\Lambda)\,\mathrm{Res}(\zeta^{-N}\mathcal{P}\zeta^{N}). \tag{13.8.19}$$

Упражнение 13.8.20. Покажите, что при $N=n=1$ обе части равенства (13.8.19) равны нулю.

Далее, так как

$$\mathcal{P}_{\geqslant 1}+\mathrm{Res}(\mathcal{P})=\mathcal{P}_{+}, \tag{13.8.21a}$$

$$\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^{N}+\mathrm{Res}(\zeta^{-N}\mathcal{P}\zeta^{N})=\zeta^{-N}\mathcal{P}_{+}\zeta^{N}, \tag{13.8.21b}$$

$$\mathrm{Res}(\Lambda\zeta^{-s})=0, \quad \forall\, s\in\mathbb{N}, \tag{13.8.22}$$

то тождество (13.8.19) можно переписать в виде

$$\mathrm{Res}(\mathcal{P}_{+}\Lambda)=\mathrm{Res}(\Lambda\zeta^{-N}\mathcal{P}_{+}\zeta^{N}). \tag{13.8.23}$$

Так как

$$\Lambda=(\zeta^{-N}\mathcal{L})^{-1}=\mathcal{L}^{-1}\zeta^{N}, \tag{13.8.24}$$

то тождество (13.8.23) можно преобразовать, как

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{Res}(\mathcal{P}_{+}\Lambda-\Lambda\zeta^{-N}\mathcal{P}_{+}\zeta^{N})=\mathrm{Res}[(\mathcal{P}_{+}\mathcal{L}^{-1}-\mathcal{L}^{-1}\mathcal{P}_{+})\zeta^{N}]\\&=\mathrm{Res}([\mathcal{P}_{+},\mathcal{L}^{-1}]\zeta^{N})\ \overset{\mathcal{P}=\mathcal{L}^{n}}{=}\ \mathrm{Res}([\mathcal{L}^{-1},\mathcal{P}_{-}]\zeta^{N}),\end{aligned} \tag{13.8.25}$$

что равно нулю, так как

$$\mathrm{ord}([\mathcal{L}^{-1},\mathcal{P}_{-}])\leqslant -N+(-1)=-N-1. \tag{13.8.26}$$

Таким образом, неголономная связь (13.8.12) действительно совместна с динамикой.

Замечание 13.8.27. Приведенные вычисления устанавливают тождества (13.8.17, 18) в общем случае, для $\Lambda=\mathcal{L}^{-1}\zeta^{N}$ и $\mathcal{L}=\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{N-i}Q_{i}$.

Теперь мы можем проверить, что преобразование Миуры Φ (13.8.9) совместно с динамикой. Это означает, что

$$\partial_{\mathcal{P}}\Phi=\Phi\partial_{P}. \tag{13.8.28}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}\Phi(\boldsymbol{a}) &= \partial_{\mathcal{P}}(V^{-1}\boldsymbol{A}) = -V^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(V)V^{-1}\boldsymbol{A} + V^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{A})\\ &= V^{-1}\operatorname{Res}(\mathcal{P})\boldsymbol{A} + V^{-1}\mathcal{P}_{>0}(\boldsymbol{A}) = (V^{-1}\mathcal{P}_{\geqslant 0}V)(V^{-1}\boldsymbol{A}) =\\ &= \Phi(P_+)\Phi(\boldsymbol{a}) = \Phi(P_+(\boldsymbol{a})) = \Phi\partial_P(\boldsymbol{a}),\end{aligned} \tag{13.8.29}$$

где использовано тождество

$$V^{-1}\mathcal{P}V = V^{-1}\mathcal{L}^n V = (V^{-1}\mathcal{L}V)^n = \Phi(L)^n = \Phi(L^n) = \Phi(P). \tag{13.8.30}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}-\partial_{\mathcal{P}}\Phi(\boldsymbol{b}) &= -\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{B}V^{(-N)}) = -\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{B})V^{(-N)} - \boldsymbol{B}\Delta^{-N}\partial_{\mathcal{P}}(V) =\\ &= [(\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{B})]V^{(-N)} + \boldsymbol{B}[\operatorname{Res}(\mathcal{P})]^{(-N)}V^{(-N)}.\end{aligned} \tag{13.8.31}$$

Преобразуем отдельно каждое из двух слагаемых в формуле (13.8.31), опуская Φ из обозначений:

$$\begin{aligned}[(\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{B})]V^{(-N)} &= (\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^N\widehat{L}_{V^{(-N)}})^\dagger(\boldsymbol{b}V^{(-N)-1}) =\\ = (\widehat{L}_{V^{(-N)-1}}\zeta^{-N}\mathcal{P}_{\geqslant 1}\zeta^N\widehat{L}_{V^{(-N)}})^\dagger(\boldsymbol{b}) &= (\zeta^{-N}P_{\geqslant 1}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b});\end{aligned} \tag{13.8.32.1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}[\operatorname{Res}(\mathcal{P})]^{(-N)}V^{(-N)} &= \boldsymbol{b}V^{(-N)-1}\operatorname{Res}(\zeta^{-N}\mathcal{P}\zeta^N)V^{(-N)} =\\ = \boldsymbol{b}\operatorname{Res}(\zeta^{-N}V^{-1}\mathcal{P}V\zeta^N) &= \boldsymbol{b}(\zeta^{-N}P\zeta^N) = (\widehat{L}_{\operatorname{Res}(P)^{(-N)}})^\dagger(\boldsymbol{b}).\end{aligned} \tag{13.8.32.2}$$

Складывая, получаем

$$(\zeta^{-N}P_{\geqslant 0}\zeta^N)(\boldsymbol{b}) = -\partial_P(\boldsymbol{b}), \tag{13.8.33}$$

как и требовалось.

13.9 Форма Гиббонса при щелевых редукциях

В этом разделе мы увидим, что происходит, если на идею щелевой специализации примерить форму Гиббонса.

Среди многочисленных вариаций, введенных в предыдущих разделах, выберем полные формы Гиббонса: (13.5.4), (13.4.8), (13.6.1, 2) и (13.7.7–9). Из них первые две имеют вид

$$L = \zeta^N + \boldsymbol{p}^t\zeta^{N-1}(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}, \tag{13.9.1}$$

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{a}^t\zeta^N(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{13.9.2}$$

Ясно, что эти формы слишком жестки, чтобы выдержать какую-либо щелевую специализацию; чтобы получить последнюю, следует вернуться к исходной щелевой формы негиббонсовских операторов Лакса (9.1.46) и (9.3.27):

$$\bar{L} = \zeta^N + \sum_{1\geqslant 1}\zeta^{N-\gamma_i}\bar{q}_i, \tag{13.9.3}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{N-\gamma_i}\bar{Q}_i. \tag{13.9.4}$$

Комбинируя идеи форм Гиббонса и щелевой специализации, приходим к следующим щелевым формам Гиббонса:

$$L = \zeta^N + \boldsymbol{p}^t \sum_{i\geqslant 1} \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q}, \tag{13.9.5a}$$

$$\partial_P(\boldsymbol{p}) = P_+(\boldsymbol{p}), \quad \partial_P(\boldsymbol{q}) = -(P_+)^\dagger(\boldsymbol{q}), \quad P = L^n, \quad nN \equiv 0 \pmod{\gamma}, \tag{13.9.5b}$$

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{a}^t \zeta^N (1-\zeta^{-\gamma})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{13.9.6a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{a}) = \mathcal{P}_{>0}(\boldsymbol{a}), \quad \partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{b}) = -(\mathcal{P}_{>0})^\dagger(\boldsymbol{b}), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \quad nN \equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{13.9.6b}$$

Начнем со случая КП (13.9.5). Имеем

$$\begin{aligned}
[P_+, L] = [P_+, L]_{<N} = [P_+, \zeta^N + \boldsymbol{p}^t \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q}]_{<N} = \\
= \Big(P_+\boldsymbol{p}^t \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q}P_+\Big)_{<N}.
\end{aligned} \tag{13.9.7}$$

Так как

$$P \in C((\zeta^{-\gamma})),$$

то возьмем P_+ в виде

$$P_+ = \bar{r}\zeta^{\gamma k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и подставим это в формулу (13.9.7). Получим:

$$\begin{aligned}
\bar{r}\zeta^{\gamma k}\boldsymbol{p}^t\zeta^{-\gamma k} \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}\zeta^{-\gamma k}\boldsymbol{q}\bar{r}\zeta^{\gamma k} = \\
= \bar{r}\boldsymbol{p}^{(\gamma k)t} \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t \sum_1 \zeta^{N-\gamma i}(\boldsymbol{q}\bar{r})^{(-\gamma k)} = \\
= P_+(\boldsymbol{p})^t \sum \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}^t \sum \zeta^{N-\gamma i}(P_+)^\dagger(\boldsymbol{q}) = \partial_P(L).
\end{aligned}$$

В частности, множество $\{\mathrm{Res}(L^n) |\, nN \equiv 0 \pmod{\gamma}\}$ является бесконечным набором общих интегралов для всех потоков (13.9.5).

Упражнение 13.9.8. Покажите, что все потоки (13.8.5) коммутируют.

Для случая МКП (13.9.6) имеем, аналогично:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}_{>0}, \mathcal{L}] = [\mathcal{P}_{>0}, \mathcal{L}]_{\leqslant N} = [\mathcal{P}_{>0}, \boldsymbol{a}^t \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{b}]_{\leqslant N} = \\
= \Big(\mathcal{P}_{>0}\boldsymbol{a}^t \sum_0 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{b}\mathcal{P}_{>0}\Big)_{\leqslant N} \quad [\text{при } \mathcal{P}_{>0} = \bar{r}\zeta^{k\gamma},\ k \in \mathbb{N}] = \\
= \bar{r}\zeta^{k\gamma}\boldsymbol{a}^t\zeta^{-k\gamma} \sum_0 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum_0 \zeta^{N-\gamma i}\zeta^{-\gamma k}\boldsymbol{b}\bar{r}\zeta^{k\gamma} = \\
= \bar{r}\boldsymbol{a}^{(k\gamma)t} \sum_0 \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum \zeta^{N-\gamma i}(\boldsymbol{b}\bar{r})^{(-\gamma k)} = \\
= \mathcal{P}_{>0}(\boldsymbol{a})^t \sum \zeta^{N-\gamma i}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t \sum \zeta^{N-\gamma i}(\mathcal{P}_{>0})^\dagger(\boldsymbol{b}) = \partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}).
\end{aligned}$$

Опять множество $\{\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) |\, nN \equiv 0 \pmod{\gamma}\}$ является бесконечным набором общих интегралов для всех потоков (13.9.6).

Упражнение 13.9.9. Покажите, что все потоки (13.9.6) коммутируют.

Третью полную форму Гиббонса, (13.6.1, 2):

$$\mathcal{L} = \zeta^N[1 + \boldsymbol{A}^t(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}, \tag{13.9.10}$$

мы заменяем анзацем

$$\mathcal{L} = \zeta^N[1 + \boldsymbol{A}^t(1 - \zeta^{-\gamma})^{-1}\boldsymbol{B}]^{-1}, \tag{13.9.11a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{A}) = \mathcal{P}_{>0}(\boldsymbol{A}), \quad \partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{B}) = -(\zeta^{-N}\mathcal{P}_{>0}\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{B}), \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \quad nN \equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{13.9.11b}$$

Упражнение 13.9.12. Пусть $N = 1, \gamma = 2, n = 2$. Покажите, что формулы (13.9.11) дают

$$(\mathcal{L}^2)_{>0} = [\zeta(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})^{-1}]^2, \tag{13.9.13}$$

и получите отсюда, что соответствующие уравнения движения суть

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{A}) = (1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})^{(1)-1}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})^{(2)-1}\boldsymbol{A}^{(2)}, \tag{13.9.14a}$$

$$\partial_{t_2}(\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}^{(-2)}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})^{(-2)-1}(1 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B})^{(-1)-1}. \tag{13.9.14b}$$

Повторяя шаг за шагом доказательство Утверждения 13.6.4, заменяя где следует ζ^{-1} на $\zeta^{-\gamma}$, находим, что из уравнений движеняя (13.9.11b) следует

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{>0}, \mathcal{L}]. \tag{13.9.15}$$

Отсюда, множество $\{\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) |\ nN \equiv 0 \pmod{\gamma}\}$ служит бесконечным набором общих интегралов для потоков (13.9.11).

Упражнение 13.9.16. Покажите, что все потоки иерархии (13.9.11) коммутируют.

Четвертую полную форму Гиббонса, (13.7.7–9):

$$\bar{L} = \zeta^N\bar{\Lambda}^{-1}, \quad \bar{\Lambda} = 1 + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{13.9.17}$$

заменим анзацем

$$\bar{L} = \zeta^N\bar{\Lambda}^{-1}, \quad \bar{\Lambda} = 1 + \boldsymbol{a}^t\zeta^{-\gamma}(1 - \zeta^{-\gamma})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{13.9.18a}$$

$$\partial_P(\boldsymbol{a}) = \bar{P}_+(\boldsymbol{a}), \quad \partial_P(\boldsymbol{b}) = -(\zeta^{-N}\bar{P}_+\zeta^N)^\dagger(\boldsymbol{b}), \quad \bar{P} = \bar{L}^n, \quad nN \equiv 0 \pmod{\gamma}. \tag{13.9.18b}$$

Повторяя рассуждения, применявшиеся к уравнениям (13.7.13–16), заменой ζ^{-1} на $\zeta^{-\gamma}$, приходим к следствию уравнений движения (13.9.18):

$$\partial_P(\bar{L}) = [\bar{P}_+, \bar{L}]. \tag{13.9.19}$$

Упражнение 13.9.20. Покажите, что все потоки иерархии (13.9.18) коммутируют.

Упражнение 13.9.21. Покажите, что все четыре щелевых иерархии Гиббонса, рассмотренные в этом разделе, имеют классический предел и ни одна не имеет квазиклассического.

Пожалуй, Перри вовремя умер; иначе он бы и Библию переложил на музыку.

Фредерик Делиус о композиторе сэре Чарльзе Перри

Глава 14

Гидродинамический анзац

> Читая лекции в Германии, всегда нужно вставлять какие-нибудь бессмысленные пасссажи, если хочешь избежать обвинений в поверхностном и неглубоком изложении предмета.
>
> Фредерик К. Коплстон, *Мемуары*

В этой главе вводится понятие гидродинамических представлений для дискретных иерархий КП и МКП, доказывается, что эти представления существуют, и из них извлекаются различные решеточные версии классического уравнения $u_t + uu_x = 0$.

14.1 Мотивировки

В этом разделе мы сначала рассматриваем коммутативную интерпретацию гидродинамического анзаца, эатем выдвигаем гипотезу о ее некоммутативном аналоге.

Дискретная иерархия КП при $N = 1$, с оператором Лакса

$$L = \zeta + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} q_j, \tag{14.1.1}$$

имеет первый поток (9.1.28);

$$\partial_t(q_i) = (1 - \Delta^{-1})(q_{i+1}) + q_0^{(i)} q_i - q_i q_0, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.1.2}$$

Допустим времепно, что все переменные q_i *коммутируют*. Тогда этот поток можпо переписать в виде

$$\partial_t(q_i) = (1 - \Delta^{-1})(q_{i+1}) + q_i(\Delta^i - 1)(q_0), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.1.3}$$

Квазиклассический предел этой системы равен

$$\partial_t(q_i) = q_{i+1,x} + i q_i q_{0,x}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.1.4}$$

Рассмотрим следующую 2-компонентную динамическую систему на пару функций $u = u(x,y,t)$ и $h = h(x,t)$:

$$\partial_t(u) = (u+h)_x u - u_y \int_0^y u_x(x,y')dy', \tag{14.1.5a}$$

$$\partial_t(h) = \Big(\int_0^h u\,dy\Big)_x. \tag{14.1.5b}$$

Можно интерпретировать $h = h(x,t)$ как высоту свободной поверхности над точкой x на дне $y = 0$, ограничивающей жидкость, скорость которой в точке (x,y) и в момент t имеет горизонтальную составляющую $u = u(x,y,t)$.

Утверждение 14.1.6. Положим

$$q_i = q_i(x,t) = \int_0^h u^i dy = \int_0^h u^i(x,y,t)dy. \tag{14.1.7}$$

Тогда из уравнений движения (14.1.5) следуют уравнения движения (14.1.4).

Доказательство. Имеем,

$$\partial_t(q_i) = \partial_t\Big(\int_0^h u^i dy\Big) = u^i|_h \partial_t(h) + \int_0^h iu^{i-1}\partial_t(u)dy. \tag{14.1.8}$$

Далее,

$$\int_0^h iu^{i-1}\partial_t(u)dy = \int_0^h iu^{i-1}dy\left[(u+h)_x u - u_y \int_0^y u_x dy'\right]. \tag{14.1.9}$$

Преобразуем отдельно каждое из 2 слагаемых в правой части равенства (14.1.9):

$$\begin{aligned}\int_0^h iu^{i-1}dy\,(u+h)_x u &= \int_0^h \Big(\frac{i}{i+1}\Big)(u^{i+1})_x dy + h_x \int_0^h iu^i dy = \\ &= \frac{i}{i+1}\Big(\int_0^h u^{i+1}dy\Big)_x - \frac{i}{i+1}u^{i+1}|_h h_x + ih_x q_i;\end{aligned} \tag{14.1.10}$$

$$\begin{aligned}-\int_0^h iu^{i-1}dy\,u_y \int_0^y u_x dy' &= -\int_0^h (u^i)_y dy \int_0^y u_x dy' = \\ &= -\int_0^h dy\Big(u^i \int_0^y u_x dy'\Big)_y + \int_0^h u^i dy\,u_x = \\ &= -\Big(u^i \int_0^y u_x dy'\Big)\Big|_0^h + \frac{1}{i+1}\int_0^h (u^{i+1})_x dy = \\ = -u^i|_h \int_0^h u_x dy + \frac{1}{i+1}&\Big(\int_0^h u^{i+1}dy\Big)_x - \frac{1}{i+1}u^{i+1}|_h h_x.\end{aligned} \tag{14.1.11}$$

Наконец, оставшееся 1-е слагаемое в правой части формулы (14.1.8) можно преобразовать в

$$u^i|_h \partial_t(h) = u^i|_h \Big(\int_0^h u\,dy\Big)_x = u^i|_h \Big(u|_h h_x + \int_0^h u_x dy\Big). \tag{14.1.12}$$

Складывая выражения (14.1.10–12) и используя равенство

$$h = q_0, \tag{14.1.13}$$

приходим к уравнениям движения (14.1.4). ▮

Теперь рассмотрим случай, когда скорость $u(x,y,t)$ *не зависит* от y. Тогда Утверждение 14.1.6 сводится к тому, что преобразование

$$q_i = hu^i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.1.14}$$

переводит 1+1-мерную гидродинамическую систему

$$\partial_t(u) = u(u+h)_x, \quad \partial_t(h) = (hu)_x, \tag{14.1.15}$$

в квазиклассическую систему (14.1.4). В свою очередь, это предложение является квазиклассическим пределом следующего утверждения.

Утверждение 14.1.16. Рассмотрим систему

$$\partial_t(u) = u(\Delta - 1)(u+h), \quad \partial_t(h) = (1-\Delta^{-1})(hu). \tag{14.1.17}$$

Тогда преобразование

$$q_i = hu \ldots u^{(i)} u^{(i)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.1.18}$$

переводит 2-компонентную систему (14.1.17) в (коммутативную) дискретную систему КП (14.1.3).

Доказательство. При $i = 0$, система (14.1.3) дает

$$\partial_t(q_0) = (1-\Delta^{-1})(q_1),$$

второе из уравнений (14.1.17). Теперь применим индукцию по i. Так как

$$q_{i+1} = q_i u^{(i)}, \tag{14.1.19}$$

то имеем, считая утверждение верным для $\partial_t(q_i)$:

$$\begin{aligned}\partial_t(q_{i+1}) &= \partial_t(q_i)u^{(i)} + q_i\Delta^i(\dot{u}) = \\ &= u^{(i)}[(1-\Delta^{-1})(q_{i+1}) + q_i(h^{(i)} - h)] + q_i u^{(i)}(\Delta^{i+1} - \Delta^i)(u+h) = \\ &= u^{(i)}q_{i+1} - u^{(i)}q_{i+1}^{(-1)} + q_{i+1}h^{(i)} - q_{i+1}h \\ &\quad + q_{i+1}u^{(i+1)} - q_{i+1}u^{(i)} + q_{i+1}h^{(i+1)} - q_{i+1}h^{(i)}.\end{aligned} \tag{14.1.20}$$

С другой стороны, мы должны показать

$$\begin{aligned}\partial_t(q_{i+1}) &= (1-\Delta^{-1})(q_{i+2}) + q_{i+1}(\Delta^{i+1} - 1)(h) = \\ &= q_{i+1}u^{(i+1)} - q_{i+1}^{(-1)}u^{(i)} + q_{i+1}h^{(i+1)} - q_{i+1}h.\end{aligned} \tag{14.1.21}$$

В выражении (14.1.20), 1-й и 6-й, и 3-й и 8-й, члены взаимно сокращаются. Сокращения между оставшимися элементами в выражениях (14.1.20) и (14.1.21) таковы: 2-й и 2-й; 4-й и 4-й; 5-й и 1-й; 7-й и 3-й. ∎

До сих пор мы обращали внимание только на первый поток, но подобные свойства можно доказать для всех высших потоков. Удивительно, но аналогичные (независимые от y) гидродинамические представления существуют для вполне некоммутативной дискретной иерархии КП. Мы докажем это утверждение в следующем разделе. Здесь же мы поведем непосредственную проверку для случая первого потока.

Положим

$$\partial_t(u) = (u+h)^{(1)}u - u(u+h), \quad \partial_t(h) = (1-\Delta^{-1})(uh), \tag{14.1.22}$$

$$q_i = u^{(i)-1}u^{(i)}\dots uh, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad \Rightarrow \tag{14.1.23}$$

$$q_{i+1} = u^{(i)}q_i. \tag{14.1.24}$$

Проверим, что отображение (14.1.23) переводит гидродинамическую систему (14.1.22) в поток КП (14.1.2). При $i = 0$ утверждение очевидно. Далее, применим индукцию по i :

$$\begin{aligned}\partial_t(q_{i+1}) &= \partial_t(u^{(i)}q_i) = \Delta^i(\partial_t(u))q_i + u^{(i)}\partial_t(q_i) = \\ &= \{[\Delta^{i+1}(u+h) - u^{(i)}]u^{(i)} - u^{(i)}h^{(i)}\}q_i + u^{(i)}[(1-\Delta^{-1})(q_{i+1}) + h^{(i)}q_i - q_ih] = \\ &= (u^{(i+1)} + h^{(i+1)} - u^{(i)})q_{i+1} + u^{(i)}[q_{i+1} - q_{i+1}^{(-1)}] - q_{i+1}h = \\ &= u^{(i+1)}q_{i+1} + h^{(i+1)}q_{i+1} - u^{(i)}q_{i+1}^{(-1)} - q_{i+1}h.\end{aligned} \tag{14.1.25}$$

С другой стороны, формула (14.1.2) предсказывает, что

$$\begin{aligned}\partial_t(q_{i+1}) &= (1-\Delta^{-1})(q_{i+2}) + h^{(i+1)}q_{i+1} - q_{i+1}h = \\ &= u^{(i+1)}q_{i+1} - u^{(i)}q_{i+1}^{(-1)} + h^{(i+1)}q_{i+1} - q_{i+1}h,\end{aligned} \tag{14.1.26}$$

и это совпадает с выражением (14.1.25).

Упражнение 14.1.27. Покажите, что для зеркального гидродинамического представления

$$q_i = hu\dots u^{(i)}u^{(i)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.1.28}$$

в отличие от (14.1.23), в $\{u, h\}$–пространстве не существует динамических систем совместных с 1-м потоком КП (14.1.2).

Замечание 14.1.29. В 2 + 1–мерном случае (когда зависимость от y не игнорируется) неизвестны ни некоммутативные аналоги динамической системы (14.1.5) и отображения моментов (14.1.7), ни их дисперсионные аналоги для *коммутативной* иерархии КП. Это одна из величайших тайн во всей теории интегрируемых систем.

Упражнение 14.1.30. Покажите, что первый *коммутативный* поток КП (14.1.3) допускает связь гидродинамического типа

$$q_i = huu^{(\gamma)}\dots u^{(\gamma i)}u^{(\gamma i)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.1.31}$$

если и только если $\gamma = 1$.

14.2 Гамильтонов подход в случае КП

В этом разделе мы доказываем, используя гамильтонов формализм, что дискретная иерархия КП допускает гидродинамическое представление.

Суть гидродинамического представления (14.1.23)

$$q_i = \frac{1}{u^{(i)}}u^{(i)}\dots uh, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.2.1}$$

состоит в наложении на дискретные потоки КП бесконечного числа связей

$$q_{i+2} = q_1^{(i+1)} \frac{1}{q_0^{(i+1)}} \dots q_1^{(1)} \frac{1}{q_0^{(1)}} q_1, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.2.2}$$

так как соотношения

$$q_0 = h, \quad q_1 = uh \tag{14.2.3}$$

можно обратить

$$h = q_0, \quad u = q_1 \frac{1}{q_0}, \tag{14.2.4}$$

и подставить обратно в формулы гидродинамического представления (14.2.1). Таким образом, уравнения движения для u и h однозначно определенны первыми двумя уравнениями движения для q_0 и q_1 в каждом потоке КП

$$\partial_P(L) = [P_+, L], \quad L = P^n, \tag{14.2.5a}$$

$$L = \zeta + \sum_{j \leqslant 0} \zeta^{-j} q_j. \tag{14.2.5b}$$

Возникает вопрос: как убедиться, что вся эта бесконечная совокупность связей не приводит к противоречию?

Напомним, что n-й дискретный поток КП (14.2.5) можно записать в гамильтоновом виде (12.1.10)

$$\partial_P(q_i) = \sum_j B_{ij}^{\text{КП}} \left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j} \right), \tag{14.2.6}$$

где гамильтонова матрица $B^{\text{КП}}$ задана формулой (12.1.12):

$$B_{ij}^{\text{КП}} = \widehat{R}_{q_{i+j}} \Delta^i - \Delta^{-j} \widehat{L}_{q_{i+j}}. \tag{14.2.7}$$

Теорема 14.2.8. Пусть B^{HD} есть следующая кососимметрическая матрица:

$$B^{HD} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad u & \qquad\qquad h \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ h \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u \\ \widehat{R}_u - \Delta^{-1} \widehat{L}_u & -\operatorname{ad}_h \end{pmatrix} \end{array}. \tag{14.2.9}$$

Тогда

(i) Матрица B^{HD} гамильтонова;

(ii) Гидродинамическое представление $\Phi : C_q \to C_{u,h}$, определенное на генераторах q_i формулой (14.2.1) является гамильтоновым отображением.

Доказательство. (ii) Следует проверить тождество

$$D(\Phi) B^{HD} D(\Phi)^\dagger = \Phi(B^{\text{КП}}). \tag{14.2.10}$$

Обозначая $D(\Phi)$ через J, получаем

$$J = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \qquad\qquad u & \qquad\qquad\qquad h \end{array} \\ \begin{array}{c} q_0 \\ q_{i+1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{u^{(i)} \dots u^{(s)} u^{(s)-1}} \widehat{R}_{u^{(s)-1} u^{(s)} \dots uh} \Delta^s & \widehat{L}_{u^{(i)} \dots u} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{14.2.11}$$

$$JB^{HD} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \qquad\qquad u & \qquad\qquad h \end{array} \\ \begin{array}{c} q_0 \\ q_{i+1} \end{array} & \begin{pmatrix} \widehat{R}_u - \Delta^{-1} \widehat{L}_u & -\operatorname{ad}_h \\ \widehat{L}_{u^{(i)} \dots u} (\widehat{R}_u - \Delta^{-1} \widehat{L}_u) & (*) \end{pmatrix} \end{array}, \tag{14.2.12}$$

где

$$(*) = \widehat{L}_{u^{(i)}\dots u}(\widehat{R}_h - \widehat{L}_h) + \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{u^{(i)}\dots u^{(s)}u^{(s)-1}} \widehat{R}_{u^{(s)-1}u^{(s)}\dots uh} \Delta^s (\widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u). \tag{14.2.13}$$

Второе слагаемое в правой части выражения (14.2.13) можно преобразовать к виду

$$\sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{u^{(i)}\dots u^{(s)}u^{(s)-1}} \widehat{R}_{u^{(s)}\dots uh} \Delta^{s+1} - \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{u^{(i)}\dots u^{(s)}} \widehat{R}_{u^{(s)-1}u^{(s)}\dots uh} \Delta^s =$$
$$= \widehat{R}_{u^{(i)}\dots uh} \Delta^{i+1} - \widehat{L}_{u^{(i)}\dots u} \widehat{R}_h.$$

Следовательно,

$$(*) = \widehat{R}_{u^{(i)}\dots uh} \Delta^{i+1} - \widehat{L}_{u^{(i)}\dots uh} = \Phi(\widehat{R}_{q_{i+1}} \Delta^{i+1} - \widehat{L}_{q_{i+1}}). \tag{14.2.14}$$

Далее,

$$J^{\dagger} = \begin{array}{c} \\ u \\ h \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_0 & \qquad\qquad q_{j+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \sum_{s=0}^{j} \Delta^{-s} \widehat{L}_{u^{(s)-1}u^{(s)}\dots uh} \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u^{(s)}u^{(s)-1}} \\ 1 & \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u} \end{pmatrix} \end{array} \quad \Rightarrow \tag{14.2.15}$$

$$(JB^{HD}J^{\dagger})_{q_0q_0} = -\,\mathrm{ad}_h = \Phi(\widehat{R}_{q_0} - \widehat{L}_{q_0}) = \Phi(B^{\text{КП}}_{q_0q_0}); \tag{14.2.16}$$

$$(JB^{HD}J^{\dagger})_{q_{i+1}q_0} = (*) = \Phi(\widehat{R}_{q_{i+1}} \Delta^{i+1} - \widehat{L}_{q_{i+1}}) = \Phi(B^{\text{КП}}_{q_{i+1}q_0}); \tag{14.2.17}$$

$$(JB^{HD}J^{\dagger})_{q_{i+1}q_{j+1}} = (\widehat{R}_{u^{(i)}\dots uh} \Delta^{i+1} - \widehat{L}_{u^{(i)}\dots uh}) \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u} + \tag{14.2.18a}$$

$$+\widehat{L}_{u^{(i)}\dots u}(\widehat{R}_u - \Delta^{-1}\widehat{L}_u) \sum_{s=0}^{j} \Delta^{-s} \widehat{L}_{u^{(s)-1}u^{(s)}\dots uh} \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u^{(s)}u^{(s)-1}}. \tag{14.2.18b}$$

Преобразуем выражение (14.2.18b):

$$(\widehat{R}_u - \Delta^{-1}\widehat{L}_u) \sum_{s=0}^{j} (\dots) =$$
$$= \sum_{s=0}^{j} \Delta^{-s} \widehat{L}_{u^{(s)-1}u^{(s)}\dots uh} \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u^{(s)}} - \sum_{s=0}^{j} \Delta^{-s-1} \widehat{L}_{u^{(s)}\dots uh} \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u^{(s)}u^{(s)-1}} =$$
$$= \widehat{L}_h \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u} - \Delta^{-j-1} \widehat{L}_{u^{(j)}\dots uh} \quad \Rightarrow$$
$$\widehat{L}_{u^{(i)}\dots u}(\widehat{R}_u - \Delta^{-1}\widehat{L}_u) \sum_{s=0}^{j} (\dots) = \widehat{L}_{u^{(i)}\dots uh} \widehat{R}_{u^{(j)}\dots u} - \Delta^{-j-1} \widehat{L}_{u^{(i+j+1)}\dots uh} \quad \Rightarrow$$
$$(JB^{HD}J^{\dagger})_{q_{i+1}q_{j+1}} = \widehat{R}_{u^{(j+i+1)}\dots uh} \Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1} \widehat{L}_{u^{(i+j+1)}\dots uh} =$$
$$= \Phi(\widehat{R}_{q_{i+j+2}} \Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1} \widehat{L}_{q_{i+j+2}}) = \Phi(B^{\text{КП}}_{q_{i+1}q_{j+1}});$$

(i) Из (ii) следует, что матрица B^{HD} задает гамильтонову структуру $B^{\text{КП}}$ на “подмногообразии” (14.2.2) (или, эквивалентно, на соответствующем фактор-кольце.) Следовательно, матрица B^{HD} гамильтонова.

Альтернативно, гамильтоновость матрицы B^{HD} можно проверить непосредственно, следующим образом. Так как эта матрица линейна, просто вычислим соответствующий коммутатор:

$$\left[B^{HD}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right]^t\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} = (X_2^{(1)}u - uX_2)Y_1 + (X_1u - (uX_1)^{(-1)} - [h, X_2])Y_2 \approx$$

$$\approx u(Y_1X_2^{(1)} - X_1Y_2^{(1)} - X_2Y_1 + Y_2X_1) - h[X_2, Y_2] \quad \Rightarrow \tag{14.2.19}$$

$$-\left[\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}(X_2Y_1 - Y_1X_2^{(1)}) - (Y_2X_1 - X_1Y_2^{(1)})\\ [X_2, Y_2]\end{pmatrix}. \tag{14.2.20}$$

Таким образом, (минус) коммутатор отвечает полупрямой сумме алгебры Ли

$$\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(R) \propto R, \tag{14.2.21}$$

где представление $\mathrm{Lie}(R)$ на R задается, как

$$\mathrm{Lie}(R) \ni X \longmapsto \widehat{L}_X - \widehat{R}_{X^{(1)}}. \tag{14.2.22}$$

Согласно Упражнению 14.2.23 ниже, это действительно представление; следовательно, коммутатор (14.2.20) удовлетворяет тождеству Якоби, и матрица B^{HD} гамильтонова. ∎

Упражнение 14.2.23. Покажите, что следующее отображение является представлением:

$$\mathrm{Lie}(R) \ni X \longmapsto \widehat{L}_X - \widehat{R}_{X^{(s)}}, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{14.2.24}$$

Упражнение 14.2.25. Пусть B^r (12.2.14) — гамильтонова матрица ассоциированная с алгеброй Ли $\mathcal{G}^r$:

$$B^r_{ij} = \Delta^{-j-r}\widehat{L}_{q_{i+j+r}} - \widehat{R}_{q_{i+j+r}}\Delta^{i+r}. \tag{14.2.26}$$

Далее, рассмотрим матрицу

$$b^r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad u & \qquad\qquad\qquad h \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ h \end{array}\ \Phi & \begin{pmatrix} 0 & \widehat{R}_{q_{r+1}/h}\Delta^{r+1} - \widehat{L}_u\widehat{R}_{q_r/h}\Delta^r \\ \Delta^{-r}\widehat{R}_u\widehat{L}_{q_r/h} - \Delta^{-r-1}\widehat{L}_{q_{r+1}/h} & \widehat{R}_{q_r}\Delta^r - \Delta^{-r}\widehat{L}_{q_r} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{14.2.27}$$

где Φ — гидродинамическое представление (14.2.1). Покажите, что:

(i) матрица b^r (14.2.27) гамильтонова;

(ii) Φ задает гамильтоново отображение между гамильтоновыми матрицами b^r и $-B^r$.

[Подсказка : в случае $r = 0$ — это Теорема 14.2.8.]

Упражнение 14.2.28. (i) Покажите, что для любой гамильтоновой системы с гамильтоновой структурой B^{HD} (14.2.9) над кольцом $C_{u,h} = \mathcal{F}\langle u^{(s)}, h^{(s)}\rangle$ выполняется

$$\partial_t(h) \sim 0. \tag{14.2.29}$$

(ii) Верно ли это для матрицы b^r (14.2.27) при $r > 0$?

[Подсказка : см. §12.5.]

14.3 Алгебраическая интерпретация случая КП

Боже, если ты есть, спаси мою душу, если она у меня есть.
Эрнест Ренан (1823–1892)

В этом разделе мы заново получаем, чисто алгебраическими средствами, в обход гамильтонова формализма, гидродинамическое представление дискретной иерархии КП.

В ситуации, когда требуется установить, что данное преобразование переводит данную динамическую систему в другую, причем известно, что они обе гамильтоновы, использование гамильтонова аппарата, как правило, является наиболее действенным способом. Недостаток гамильтонова подхода заключается в чрезвычайной эффективности, с которой он маскирует алгебраические механизмы, логика которых зачастую радикально отличается от гамильтоновой логики. Этот недостаток становится проклятием, когдв незначительное изменение ситуации выводят ее, полностью или частично, из гамильтоновой области. Именно эта неприятность подстерегает нас в теории гидродинамических представлений: хотя мы и справились со случаем КП в §14.2 при помощи простых гамильтоновых рассуждений, такие рассуждения, ни простые, ни сложные, не срабатывают в случае МКП. Это становится ясно с одного взгляда на *блочную структуру* гамильтоновой матрицы (12.2.12, 20) дискретной иерархии МКП: даже если гидродинамическая форма для МКП и существует, она не может быть гамильтоновой. Вывод: в проблеме существования гидродинамической формы нам прядется изобретать не-гамильтоновский метод. Ясно, что он должен напоминать, по крайней мере по духу, конструкции различных форм Гиббонса из главы 13, где нам также приходилось работать с парами полей (хотя я векторнозначных, а не скалярных), через которые выражалось все бесконечное число переменных Лакса.

Такой метод не сложно разработать. В сущности, он выводятся однозначно из единственного предположения, что он существует. Этот процесс можно воспроизвести, читая приведенные ниже доказательства задом наперед, что оставляется читателю и качестве поучительного упражнения. Мы же ограничимся формальным изложением результатов, начиная со случая КП. Случай случае МКП рассматривается в следующем разделе.

Пусть $\mathcal{R} \in C[\zeta]$, $C = C_{u,h}$, есть произвольный фиксированный элемент:

$$\mathcal{R} = \sum_{s \geqslant 0} \bar{r}_s \zeta^s; \tag{14.3.1}$$

в последствии в качестве $\mathcal{R}$ будет взит $(L^n)_+$, где

$$L = \zeta + (1 - \zeta^{-1} u)^{-1} h \tag{14.3.2}$$

есть образ свободного оператора Лакса дискретной иерархия КП при гидродинамическом представлении (14.1.18):

$$\begin{aligned} L = \Phi(\zeta + \sum \zeta^{-j} q_j) &= \zeta + h + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j-1} u^{(j)} \dots uh = \\ &= \zeta + h + \sum_{j \geqslant 0} (\zeta^{-1} u)^{j+1} h = \zeta + (1 - \zeta^{-1} u)^{-1} h. \end{aligned} \tag{14.3.3}$$

Рассмотрим, с этим фиксированным $\mathcal{R}$, следующую динамическую систему, где $\partial_{\mathcal{R}}$ обозначается через ∂_t :

$$\partial_t(u) = (\widehat{R}_u\Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}[\mathcal{R}(1-\zeta^{-1}u)^{-1}]), \tag{14.3.4a}$$

$$\partial_t(h) = \mathrm{Res}([\mathcal{R}, L]), \tag{14.3.4b}$$

Теорема 14.3.5. Из уравнений движения (14.3.4) следует, что

$$\partial_t(L) = [\mathcal{R}, L]_{\leqslant 0}. \tag{14.3.6}$$

Доказательство. Все наши уравнения линейны по $\mathcal{R}$, так что достаточно рассмотреть

$$\mathcal{R} = \bar{r}\zeta^s, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.3.7}$$

Тогда

$$\partial_t(u) = (\widehat{R}_u\Delta - \widehat{L}_u)(\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s) = \Delta[\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s]u - u\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s, \tag{14.3.8a}$$

$$\partial_t(h) = \bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s h - (\zeta^{-1}u)^s h\bar{r}\zeta^s. \tag{14.3.8b}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\partial_t(L) &= -(1-\zeta^{-1}u)^{-1}(-\zeta^{-1}\partial_t(u))(1-\zeta^{-1}u)^{-1}h + (1-\zeta^{-1}u)^{-1}\partial_t(h) = \\ &= (1-\zeta^{-1}u)^{-1}[\zeta^{-1}\partial_t(u)(1-\zeta^{-1}u)^{-1}h + \partial_t(h)],\end{aligned} \tag{14.3.9}$$

в то время как

$$\begin{aligned}[\mathcal{R}, L]_{\leqslant 0} &= [\bar{r}\zeta^s, \zeta + (1-\zeta^{-1}u)^{-1}h]_{\leqslant 0} = (\bar{r}\zeta^s(1-\zeta^{-1}u)^{-1}h - (1-\zeta^{-1}u)^{-1}h\bar{r}\zeta^s)_{\leqslant 0} = \\ &= \bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s(1-\zeta^{-1}u)^{-1}h - (1-\zeta^{-1}u)^{-1}(\zeta^{-1}u)^s h\bar{r}\zeta^s.\end{aligned} \tag{14.3.10}$$

Мы должны проверить, что $\{(14.3.9) = (14.3.10)\}$. Умножая слева на $(1-\zeta^{-1}u)$ и используя формулы (14.3.8), сводим это к проверке следующего тождества:

$$\begin{aligned}&\zeta^{-1}\{\Delta[\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s]u - u\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s\}(1-\zeta^{-1}u)^{-1}h + \\ &+\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s h - (\zeta^{-1}u)^s h\bar{r}\zeta^s = \\ &= (1-\zeta^{-1}u)\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s(1-\zeta^{-1}u)^{-1}h - (\zeta^{-1}u)^s h\bar{r}\zeta^s.\end{aligned} \tag{14.3.11}$$

Последние члены в обоих частях этого равенства взаимно сокращаются. Умножая остаток справа на $h^{-1}(1-\zeta^{-1}u)$, находим:

$$\begin{aligned}&\zeta^{-1}\{\Delta[\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s]u - u\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s\} + \bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s(1-\zeta^{-1}u) = \\ &= (1-\zeta^{-1}u)\bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s,\end{aligned}$$

то есть,

$$\zeta^{-1}[f^{(1)}u - uf] + f(1-\zeta^{-1}u) = (1-\zeta^{-1}u)f, \tag{14.3.12}$$

где временно введено обозначение

$$f = \bar{r}\zeta^s(\zeta^{-1}u)^s \in C. \tag{14.3.13}$$

Далее, равенство (14.3.12), после вычитания f из обеих частей, превращается в

$$\zeta^{-1}[f^{(1)}u - uf] = f\zeta^{-1}u - \zeta^{-1}uf, \tag{14.3.14}$$

что очевидно. ∎

Следствие 14.3.15. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, гидродинамическая форма n-го потока *дискретной* иерархии КП имеет вид

$$\partial_t(u) = (\widehat{R}_u\Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}[(L^n)_+(1-\zeta^{-1}u)^{-1}]), \tag{14.3.16a}$$

$$\partial_t(h) = \mathrm{Res}([(L^n)_+, L]). \tag{14.3.16b}$$

Доказательство. Согласно Теореме 14.3.5 при $\mathcal{R} = (L^n)_+$, из уравнений движения (14.3.16) вытекает, что

$$\partial_t(L) = [(L^n)_+, L]_{\leqslant 0} = [(L^n)_+, L], \tag{14.3.17}$$

и те же рассуждения, что и в начале §14.2, показывают, что гидродинамическая форма единственна. ∎

В заключение обсудим алгебраические свойства гидродинамической формы (14.3.16).

Упражнение 14.3.18. (i) Покажите, что первый гидродинамический поток (14.1.22) допускает связь

$$u = h^{(1)}; \tag{14.3.19}$$

(ii) Покажите, что при этой связи он имеет вид

$$\partial_t(h) = h^{(1)}h - hh^{(-1)}. \tag{14.3.20}$$

Теорема 14.3.21. Гидродинамические потоки (14.3.16) выдерживают связь $\{u = h^{(1)}\}$ (14.3.19).

Доказательство. При этой связи оператор Лакса $L = \zeta + (1-\zeta^{-1}u)^{-1}h$ (14.3.2) превращается в

$$\begin{aligned} L = \zeta + (1-\zeta^{-1}u)^{-1}u^{(-1)} &= [1 + (1-\zeta^{-1}u)^{-1}u^{(-1)}\zeta^{-1}]\zeta = \\ &= [1 + (1-\zeta^{-1}u)^{-1}\zeta^{-1}u]\zeta = (1-\zeta^{-1}u)^{-1}\zeta, \end{aligned}$$

откуда

$$(1-\zeta^{-1}u)^{-1} = L\zeta^{-1}, \tag{14.3.22a}$$

$$u = \zeta - \zeta^2L^{-1}. \tag{14.3.22b}$$

Уравнение движения (14.3.16a) для u, с учетом формул (14.3.21, 22a), имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_t(u) &= (\widehat{R}_u\Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}[(L^n)_+L\zeta^{-1}]) = (\widehat{R}_u\Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}(L^nL\zeta^{-1})) = \\ &= (\widehat{R}_u\Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}(L^{n+1}\zeta^{-1})) = \mathrm{Res}(\zeta L^{n+1}\zeta^{-2}u - uL^{n+1}\zeta^{-1}) \overset{(14.3.22b)}{=} \\ &= \mathrm{Res}[\zeta L^{n+1}\zeta^{-2}(\zeta - \zeta^2L^{-1}) - (\zeta - \zeta^2L^{-1})L^{n+1}\zeta^{-1}] = \mathrm{Res}(\zeta^2L^n\zeta^{-1} - \zeta L^n) = \\ &= (\Delta^2 - \Delta)(\mathrm{Res}(L^n\zeta)) = (\Delta^2 - \Delta)(p_{-1}(n)) = \mathrm{Res}(\zeta[L, (L^n)_-]\zeta^{-1}) = \\ &= \Delta\,\mathrm{Res}([L, (L^n)_-]) = \Delta\,\mathrm{Res}([(L^n)_+, L]) \overset{(14.3.16b)}{=} \Delta\partial_t(h) = \partial_t(h^{(1)}), \end{aligned}$$

где мы использовали формулу

$$L^n = \sum_s p_s(n)\zeta^s. \quad ∎ \tag{14.3.23}$$

Следствие 14.3.24. При связи $\{h = u^{(-1)}\}$, 2-компонентное гидродинамическое представление (14.3.16) превращается в скалярную иерархию

$$\partial_t(u) = \mathrm{Res}(\zeta[(L^n)_+, L]\zeta^{-1}), \quad L = (1 - \zeta^{-1}u)^{-1}\zeta. \qquad (14.3.25)$$

Соответствующее гидродинамическое представление Φ (14.1.23) превращается в отображение $\overline{\Phi}$:

$$\overline{\Phi}(q_i) = \Delta^{-1}(u^{(i)} \dots u). \qquad (14.3.26)$$

Как правило, хорошие старые времена объясняются плохой памятью.

Ф.П. Адамс

14.4 Гидродинамическая форма иерархии МКП

В этом разделе мы выводим гидродинамическую форму дискретной иерархии МКП, используя алгебраический подход из предыдущего раздела.

Для дискретной иерархии МКП с $N = 1$, первый поток (9.3.15) имеет вид

$$\partial_t(Q_i) = Q_0^{(i)}Q_{i+1} - Q_{i+1}^{(-1)}Q_0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \partial_t = \partial_{t_1}. \qquad (14.4.1)$$

Утверждение 14.4.2. Отображение $\Psi : C_Q \to C_{U,H}$,

$$Q_i = U^{(i)-1}U^{(i)} \dots UH, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \qquad (14.4.3)$$

переводит динамическую систему

$$\partial_t(U) = [(HU)^{(1)} - UH]U, \qquad (14.4.4a)$$

$$\partial_t(H) = [HU - (UH)^{(-1)}]H \qquad (14.4.4b)$$

в первый поток МКП (14.4.1).

Доказательство. При $i = 0$, уравнение движения (14.4.1) предсказывает, что

$$\partial_t(Q_0) = \partial_t(H) = HQ_1 - Q_1^{(-1)}H = HUH - (UH)^{(-1)}H,$$

что согласуется м уравнением (14.4.4b). Далее применим индукцию по i. Так как

$$Q_{i+1} = U^{(i)}Q_i, \qquad (14.4.5)$$

то получаем

$$\begin{aligned} \partial_t(Q_{i+1}) &= \partial_t(U^{(i)}Q_i) = \Delta^i(\partial_t(U))Q_i + U^{(i)}\partial_t(Q_i) = \\ &= [(HU)^{(i+1)} - (UH)^{(i)}]U^{(i)}Q_i + U^{(i)}[Q_0^{(i)}Q_{i+1} - Q_{i+1}^{(-1)}Q_0] = \\ &= (HU)^{(i+1)}Q_{i+1} - U^{(i)}Q_{i+1}^{(-1)}Q_0 = H^{(i+1)}Q_{i+2} - Q_{i+2}^{(-1)}Q_0, \end{aligned}$$

как и положено по формуле (14.4.1). ∎

Замечание 14.4.6. Так как мы отказализь от гамильтонона формализма, по крайней мере временно, то использование буквы H в качестве переменной (а не гамильтониана) в модифицированной гидродинамической форме (14.4.3, 4) не должно приводить к недоразумениям.

Таким образом, первый поток МКП (14.4.1) допускает гидродинамическое представление. У нас нет оснований считать первый поток хоть в чем-то исключительным. Действительно, проводи анализ подобный тому, что привел, в §14.3, к гидродинамической форме дискретной иерархии КП, мы приходим к следующему результату.

Теорема 14.4.7. Зафиксируем элемент $\mathcal{R} \in C[\zeta]\zeta$, $C = C_{U,H}$, и рассмотрим динамическую систему

$$\partial_t(U) = (\widehat{R}_U\Delta - \widehat{L}_U)(\mathrm{Res}[\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}]), \tag{14.4.8a}$$

$$\partial_t(H) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[\mathcal{R}, \mathcal{L}]). \tag{14.4.8b}$$

Из уравнений движения (14.4.8) следует, что

$$\partial_t(\mathcal{L}) = [\mathcal{R}, \mathcal{L}]_{\leqslant 1}, \tag{14.4.9}$$

где

$$\mathcal{L} = \Psi\bigl(\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{1-i}Q_i\bigr) = \zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H. \tag{14.4.10}$$

Доказательство. Опять, так как все линейно по $\mathcal{R}$, можно взять $\mathcal{R} = \bar{r}\zeta^s$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned}\partial_t(\mathcal{L}) &= -\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}(-\zeta^{-1}\partial_t(U))(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H + \zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}\partial_t(H) = \\ &= \zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}[\zeta^{-1}\partial_t(U)(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H + \partial_t(H)],\end{aligned} \tag{14.4.11}$$

$$\begin{aligned}&[\mathcal{R}, \mathcal{L}]_{\leqslant 1} = [\bar{r}\zeta^s, \zeta\sum_{j\geqslant 0}(\zeta^{-1}U)^jH]_{\leqslant 1} = \\ &= \bar{r}\zeta^s\zeta(\zeta^{-1}U)^s(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H - \zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}(\zeta^{-1}U)^sH\bar{r}\zeta^s.\end{aligned} \tag{14.4.12}$$

Таким образом, искомое равенство (14.4.9), в виде $\{(14.4.11) = (14.4.12)\}$, превращается, после умножения слева на $(1-\zeta^{-1}U)\zeta^{-1}$, в

$$\zeta^{-1}\partial_t(U)(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H + \partial_t(H) = \tag{14.4.13ℓ}$$

$$= (1-\zeta^{-1}U)\bar{r}^{(-1)}\zeta^s(\zeta^{-1}U)^s(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H - (\zeta^{-1}U)^sH\bar{r}\zeta^s. \tag{14.4.13r}$$

Уравнения движения (14.4.8) при $\mathcal{R} = \bar{r}\zeta^s$ принимают вид

$$\partial_t(U) = (\widehat{R}_U\Delta - \widehat{L}_U)(\bar{r}^{(-1)}\zeta^s(\zeta^{-1}U)^s) = f^{(1)}U - Uf, \tag{14.4.14a}$$

$$f = \bar{r}^{(-1)}\zeta^s(\zeta^{-1}U)^s \in C, \tag{14.4.14b}$$

$$\partial_t(H) = \zeta^{-1}[\bar{r}\zeta^s, \zeta(\zeta^{-1}U)^sH] = fH - (\zeta^{-1}U)^sH\bar{r}\zeta^s. \tag{14.4.15}$$

Подставляя формулы (14.4.14, 15) в недоказанное пока тождество (14.4.13), приходим к равенству

$$\zeta^{-1}[f^{(1)}U - Uf](1-\zeta^{-1}U)^{-1}H + fH = (1-\zeta^{-1}U)f(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H. \tag{14.4.16}$$

Умножая это справа на $H^{-1}(1-\zeta^{-1}U)$ и слева на ζ, получаем

$$f^{(1)}U - Uf + \zeta f(1-\zeta^{-1}U) = \zeta(1-\zeta^{-1}U)f, \tag{14.4.17}$$

очевидное тождество. ▮

Следствие 14.4.18. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, гидродинамическая форма n-го потока дискретной иерархии МКП имеет вид

$$\partial_t(U) = (\widehat{R}_U \Delta - \widehat{L}_U)(\mathrm{Res}|\zeta^{-1}(\mathcal{L}^n)_{>0}\, \zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}]), \tag{14.4.19a}$$

$$\partial_t(H) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]). \tag{14.4.19b}$$

Доказательство. Согласно Теореме 14.4.7 при $\mathcal{R} = (\mathcal{L}^n)_{>0}$, из уравнения движения (14.4.19) следует

$$\partial_t(\mathcal{L}) = [(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]_{\leqslant 1} = |(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}|, \tag{14.4.20}$$

и если гидродинамическая форма существует, то она единственна. ∎

В завершение раздела обсудим алгебраические свойства гидродинамических потоков, отвечающих дискретной иерархии МКП. Из формул (14.4.4) видим, что первый гидродинамический поток удовлетворяет соотношению

$$[\partial_{t_1}(U)U^{-1}]^{(-1)} = \partial_{t_1}(H)H^{-1}. \tag{14.4.21}$$

Случайно ли это?

Упражнение 14.4.22. (i) Покажите, что второй гидродинамический поток (14.4.8), при $\mathcal{R} = (\mathcal{L}^2)_{>0}$, имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_{t_2}(U) = \{&H^{(1)}H^{(2)}U^{(2)}U^{(1)} + [(HUH)^{(1)} + UHH^{(1)}]U^{(1)} - \\ &-UHH^{(1)}U^{(1)} - U[HUH + (UH)^{(-1)}H]\}U,\end{aligned} \tag{14.4.23a}$$

$$\begin{aligned}\partial_{t_2}(H) = \{&HH^{(1)}U^{(1)}U - U^{(-1)}U^{(-2)}H^{(-2)}H^{(-1)} + [HUH + (UH)^{(-1)}H]U - \\ &-(UH)^{(-1)}[HU + (UH)^{(-1)}]\}H;\end{aligned} \tag{14.4.23b}$$

(ii) Проверьте, что для этого потока выполняется тождество

$$[\partial_{t_2}(U)U^{-1}]^{(-1)} = \partial_{t_2}(H)H^{-1}. \tag{14.4.24}$$

Теорема 14.4.25. n-е гидродинамическое представление дискретной иерархии МКП, уравнение (14.4.8) при $\mathcal{R} = (\mathcal{L}^n)_{>0}$, удовлетворяет соотношению

$$[\partial_{t_n}(U)U^{-1}]^{(-1)} = \partial_{t_n}(H)H^{-1}. \tag{14.4.26}$$

Доказательство. Мы докажем это тождество в виде

$$[\partial_t(U)/U]^{(-1)}H = \partial_t(H), \tag{14.4.27}$$

где ∂_t обозначает ∂_{t_n}. Используя очевидные соотношения

$$\Delta^s \,\mathrm{Res}(\cdot) = \mathrm{Res}[\zeta^s(\cdot)\zeta^{-s}], \quad \forall\, s \in \mathbb{Z}, \tag{14.4.28}$$

$$f|\mathrm{Res}(\cdot)]\bar{f} = \mathrm{Res}[f(\cdot)\bar{f}|, \quad \forall\, f, \bar{f} \in C, \tag{14.4.29}$$

преобразуем формулу (14.4.8a) следующим образом:

$$\begin{aligned}\partial_t(U) &= \mathrm{Res}[\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}\zeta^{-1}U - U\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}] \\ &\qquad [\text{так как } (1-\zeta^{-1}U)^{-1} = 1 + (1-\zeta^{-1}U)^{-1}\zeta^{-1}U\ ]\end{aligned} \tag{14.4.30}$$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{Res}[\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}\zeta^{-1}U - U\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}\zeta^{-1}U] = \\ &= \mathrm{Res}[(1-U\zeta^{-1})\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}\zeta^{-1}U].\end{aligned} \tag{14.4.31}$$

Следовательно,

$$[\partial_t(U)U^{-1}]^{(-1)}H = \mathrm{Res}[\zeta^{-1}(1-U\zeta^{-1})\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H]. \tag{14.4.32}$$

Аналогично, преобразуя формулу (14.4.8b) получаем:

$$\begin{aligned}\partial_t(H) &= \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H - \zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H\mathcal{R}]) = \\ &= \mathrm{Res}[\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H - (1-\zeta^{-1}U)^{-1}H\mathcal{R}].\end{aligned} \tag{14.4.33}$$

Нам надо проверить тождество $\{(14.4.32) = (14.4.33)\}$. Вычитая из обеих частей выражение

$$\mathrm{Res}[\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H], \tag{14.4.34}$$

приходим к проверке следующего тождества:

$$\mathrm{Res}[\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H] = \tag{14.4.35a}$$

$$= \mathrm{Res}[(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H\mathcal{R}]. \tag{14.4.35b}$$

Положим

$$\mathcal{R}' = \mathcal{L}^n - \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}' \in C[[\zeta^{-1}]]. \tag{14.4.36}$$

Тогда, для выражения (14.4.35a) получаем

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}[\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H] = \\ &= \mathrm{Res}[\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{L}^n\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H] - \mathrm{Res}[\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{R}'\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H] = \\ &= \mathrm{Res}(\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{L}^n\mathcal{L}) - 0 = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+1}).\end{aligned} \tag{14.4.37a}$$

Аналогично, для выражения (14.4.35b) получаем

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}[(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H\mathcal{R}] = \\ &= \mathrm{Res}[(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H\mathcal{L}^n] - \mathrm{Res}[(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H\mathcal{R}'] = \\ &= \mathrm{Res}(\zeta^{-1}\mathcal{L}\mathcal{L}^n) - H\,\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+1} - H\mathcal{L}^n).\end{aligned} \tag{14.4.37b}$$

Следовательно, тождество (14.4.35) превращается в

$$\mathrm{Res}(\zeta^{-1}U\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+1}) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+1} - H\mathcal{L}^n) \quad \Leftrightarrow \tag{14.4.38}$$

$$\mathrm{Res}(H\mathcal{L}^n) = \mathrm{Res}[(1-\zeta^{-1}U)\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+1}] \quad \Leftrightarrow \tag{14.4.39}$$

$$\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) = \mathrm{Res}[H^{-1}(1-\zeta^{-1}U)\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+1}], \tag{14.4.40}$$

что можно переписать в виде

$$\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n) = \mathrm{Res}([\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}H]^{-1}\mathcal{L}^{n+1}), \tag{14.4.41}$$

а это очевидно, так как

$$[\zeta(1-\zeta^{-1}U)H)^{-1}\mathcal{L}^{n+1} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}^{n+1} = \mathcal{L}^n. \qquad \blacksquare$$

Следствие 14.4.42. (i) Каждый гидродинамический поток (14.4.19) выдерживает связь

$$U = H^{(1)}; \tag{14.4.43}$$

(ii) При этой связи редуцированный скалярный гидродинамический поток и соответствующее гидродинамическое представление Ψ (14.4.31) можно записать как

$$\partial_t(U) = (\widehat{R}_U \Delta - \widehat{L}_U)(\mathrm{Res}[\zeta^{-1}(\mathcal{L}^n)_{>0}\zeta(1 - \zeta^{-1}U)^{-1}|), \tag{14.4.44a}$$

$$\mathcal{L} = \zeta(1 - \zeta^{-1}U)^{-1}U^{(-1)}, \tag{14.4.44b}$$

$$\overline{\Psi}(Q_i) = \Delta^{-1}(U^{(i)} \dots U), \tag{14.4.44c}$$

или как

$$\partial_t(H) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]), \tag{14.4.45a}$$

$$\mathcal{L} = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H, \tag{14.4.45b}$$

$$\overline{\Psi}(Q_i) = H^{(i)} \dots H. \tag{14.4.45c}$$

Доказательство. (i) Согласно Теореме 14.4.25,

$$\partial_t(U) = \Delta[\partial_t(H)H^{-1}]U = \partial_t(H^{(1)})H^{(1)-1}U. \tag{14.4.46}$$

Связь $\{U = H^{(1)}\}$ обращает уравнения движения для U (14.4.46) в тождество;
(ii) Формулы (14.4.44, 45) вытекают из подстановки соотношений $H = U^{(-1)}$ и $U = H^{(1)}$ в уравнения движения (14.4.19a) и (14.4.19b) соответственно, и в формулу (14.4.3). ▮

14.5 Гидродинамическое преобразование Миуры

В этом разделе исследуется влияние гидродинамического представления на преобразование Миуры.

В §9.5 мы построили преобразование Миуры, переводящее решения Pot–иерархии МКП в решения иерархии КП. С другой стороны, в §14.2 мы выяснили, что гидродинамическое представление является результатом выражения всех переменных $\{Q_{i+2} | i \geqslant 0\}$ через Q_0 и Q_1. Так как, по формуле (9.5.4),

$$Q_0 = V^{(-1)}V^{-1}, \tag{14.5.1}$$

то Pot–иерархия МКП наследует свою гидродинамическую форму от МКП.

Давайте посмотрим, какого сорта оператор Лакса мы получим для КП, сопрягая гидродинамический оператор Лакса $\mathcal{L}$ (14.4.10) для МКП:

$$\mathcal{L} = \zeta(1 - \zeta^{-1}U)^{-1}H, \tag{14.5.2}$$

$$L = V^{-1}\mathcal{L}V = V^{-1}\zeta(1 - \zeta^{-1}U)^{-1}HV, \tag{14.5.3}$$

где, согласно формуле (14.5.1),

$$H = V^{(-1)}V^{-1}. \tag{14.5.4}$$

Утверждение 14.5.5.

$$V^{-1}[\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}V^{(-1)}V^{-1}]V = \zeta + (1-h\zeta^{-1})^{-1}h, \tag{14.5.6a}$$

$$h = V^{-1}UV^{(-1)}. \tag{14.5.6b}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} V^{-1}[\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}V^{(-1)}V^{-1}]V - \zeta = V^{-1}\zeta(1-\zeta^{-1}U)^{-1}V^{(-1)} - V^{-1}\zeta V^{(-1)} = \\ = V^{-1}\zeta[(1-\zeta^{-1}U)^{-1}-1]V^{(-1)} = V^{-1}\zeta[\zeta^{-1}U(1-\zeta^{-1}U)^{-1}]V^{(-1)} = \\ = V^{-1}U(1-\zeta^{-1}U)^{-1}V^{(-1)}. \end{aligned} \tag{14.5.7}$$

Следовательно, равенство (14.5.6) эквивалентно

$$V^{-1}U(1-\zeta^{-1}U)^{-1}V^{(-1)} = (1-h\zeta^{-1})^{-1}h \quad \Leftrightarrow \tag{14.5.8}$$

$$V^{(-1)-1}(1-\zeta^{-1}U)U^{-1}V = h^{-1}(1-h\zeta^{-1}), \tag{14.5.9}$$

что эквивалентно паре уравнений

$$V^{(-1)-1}U^{-1}V = h^{-1}, \tag{14.5.10a}$$

$$V^{(-1)-1}\zeta^{-1}V = \zeta^{-1}, \tag{14.5.10b}$$

из них первое является определением h (14.5.6b), а второе тождеством. ∎

Далее,

$$\begin{aligned} L = \zeta + (1-h\zeta^{-1})^{-1}h = [1+(1-h\zeta^{-1})^{-1}h\zeta^{-1}]\zeta = (1-h\zeta^{-1})^{-1}\zeta = (1-\zeta^{-1}h^{(1)})^{-1}\zeta \\ = (1-\zeta^{-1}u)^{-1}\zeta, \end{aligned} \tag{14.5.11}$$

где

$$u = h^{(1)} = V^{(1)-1}U^{(1)}V. \tag{14.5.12}$$

Вывод: преобразование Миуры (14.5.12) переводит n-й поток Pot-иерархии МКП в гидродинамической форме в n-й поток скалярной подиерархии (14.3.25) иерархии КП в гидродинамической форме. Таким образом, это преобразование Миуры переводит 2-компонентную иерархию (V, U) в *скалярную* (u), — редкая ситуация.

Более того, связь $U = H^{(1)}$ (14.4.43) для гидродинамической иерархии МКП продолжается до связи

$$U = H^{(1)} = [V^{(-1)}V^{-1}]^{(1)} = VV^{(1)-1} \tag{14.5.13}$$

в гидродинамическую Pot-иерархии МКП. Преобразование Миуры (14.5.12) при этом превращается в

$$u = V^{(1)-1}U^{(1)}V = V^{(2)-1}V, \tag{14.5.14}$$

а это есть отображение между двумя *скалярными* иерархиями.

Упражнение 14.5.15. (i) Покажите, что первый поток этих скалярных иерархий имеет вид, соответственно:

$$\partial_t(H) = H[H^{(1)} - H^{(-1)}]H, \tag{14.5.16}$$

$$\partial_t(V) = -VV^{(1)-1}V^{(-1)}, \tag{14.5.17}$$

$$\partial_t(u) = u^{(1)}u - uu^{(-1)}; \tag{14.5.18}$$

(ii) Проверьте, что отображение (14.5.14) переводит V–поток (14.5.17) в u–поток (14.5.18).

Упражнение 14.5.19. (i) Покажите, что поток (14.5.16) можно переписать в виде

$$\partial_t(H^{-1}) = (\Delta^{-1} - \Delta)(H); \tag{14.5.20}$$

(ii) Покажите, что это уравнение записывается в гамильтоновом виде

$$\partial_t(v) = (\Delta^{-1} - \Delta)\left(\frac{\delta \ln v}{\delta v}\right) = (\Delta^{-1} - \Delta)\frac{\delta}{\delta v}(-\ln H), \quad v = H^{-1}. \tag{14.5.21}$$

Упражнение 14.5.22. (i) Покажите, что второй гидродинамический поток МКП (14.4.23) превращается, при связи $\{U = H^{(1)}\}$, в

$$\partial_t(H^{-1}) = (\Delta^{-1} - \Delta)(HH^{(1)}H + HH^{(-1)}H); \tag{14.5.23}$$

(ii) Покажите, что это уравнение записывается в гамильтоновом виде

$$\partial_t(v) = (\Delta^{-1} - \Delta)\frac{\delta}{\delta v}\left(-\frac{1}{v}\frac{1}{v^{(1)}}\right) = (\Delta^{-1} - \Delta)\frac{\delta}{\delta v}(-HH^{(1)}), \quad v = H^{-1}. \tag{14.5.24}$$

(iii) Покажите, что гамильтонов вид

$$\partial_t(v) = (\Delta^{-1} - \Delta)\left(\frac{\delta(\dots)}{\delta v}\right) \tag{14.5.25}$$

превращается, после замены переменных

$$H = v^{-1}, \tag{14.5.26}$$

в

$$\partial_t(H) = \widehat{L}_H\widehat{R}_H(\Delta^{-1} - \Delta)\widehat{L}_H\widehat{R}_H\left(\frac{\delta(\dots)}{\delta H}\right) = H\Big[(\Delta^{-1} - \Delta)\Big(H\frac{\delta(\dots)}{\delta H}H\Big)\Big]H; \tag{14.5.27}$$

(i^4) Покажите, что отображение $H = V^{(-1)}V^{-1}$ между гамильтоновой структурой (14.5.27) в H-координатах и нелокальной структурой

$$\partial_t(V) = (\widehat{L}_{V^{(-1)}V^{-1}}\Delta^{-1} - 1)^{-1}\widehat{R}_{V^{(-1)}}(\Delta^{-1} - \Delta)\widehat{L}_{V^{(-1)}}(\Delta\widehat{R}_{V^{(-1)}V^{-1}} - 1)^{-1}\left(\frac{\delta(\dots)}{\delta V}\right) \tag{14.5.28}$$

в V-координатах гамильтоново;
(i^5) Уравнение движения (14.5.18) можно переписать в виде

$$\partial_t(u) = (\widehat{R}_u\Delta\widehat{R}_u - \widehat{L}_u\Delta^{-1}\widehat{L}_u)\left(\frac{\delta(\dots)}{\delta u}\right), \tag{14.5.29}$$

где $(\dots) = u$. Является ли форма (14.5.29) гамильтоновой?

Формулы (14.5.20–27) наводят на мысль, что при редукции $\{U = H^{(1)}\}$ все потоки гидродинамической иерархии МКП (14.4.45a,b) гамильтоновы, с гамильтоновой структурой (14.5.27) *четвертой* степени:

$$\partial_{t_n}(H) = \operatorname{Res}(\zeta^{-1}[(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]) = \tag{14.5.30a}$$

$$= H\Big[(\Delta - \Delta^{-1})\Big(H\frac{\delta\mathcal{H}_{n-1}}{\delta H}H\Big)\Big]H, \tag{14.5.30b}$$

$$\mathcal{H}_n = n^{-1}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n), \quad \mathcal{L} = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H, \tag{14.5.31}$$

где, при $n = 0$, по определению

$$\mathcal{H}_0 = \ln H. \tag{14.5.32}$$

Это действительно так. Доказательство разбивается на 4 этапа.

1) Положим

$$\mathcal{L}^n = \sum_s \zeta^s p_s(n), \tag{14.5.33}$$

Тогда

$$\partial_{t_n}(H) = \operatorname{Res}(\zeta^{-1}[(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]) = \operatorname{Res}(\zeta^{-1}[\mathcal{L}, (\mathcal{L}^n)_{\leqslant 0}]) = \\ = \operatorname{Res}(\zeta^{-1}[\zeta H, p_0(n)]) = Hp_0(n) - p_0(n)^{(-1)}H. \tag{14.5.34}$$

Таким образом, уравнение движения (14.5.30a) можно переписать в виде

$$\partial_{t_n}(H) = Hp_0(n) - p_0(n)^{(-1)}H. \tag{14.5.35}$$

2) По формуле вычетов,

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}[d(\mathcal{L})\mathcal{L}^n]. \tag{14.5.36}$$

Далее,

$$d(\mathcal{L}) = d[\zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H] = -\zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}(-dH\zeta^{-1})(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H + \\ + \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}dH = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}dH[\zeta^{-1}(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H + 1]. \tag{14.5.37}$$

Так как

$$\zeta^{-1}(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H + 1 = H^{-1}[H\zeta^{-1}(1 - H\zeta^{-1})^{-1} + 1]H = H^{-1}(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H, \tag{14.5.38}$$

то получаем

$$d(\mathcal{L}) = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}dHH^{-1}(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H = \mathcal{L}H^{-1}dHH^{-1}\zeta^{-1}\mathcal{L} \quad \Rightarrow \tag{14.5.39}$$

$$d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \operatorname{Res}(\mathcal{L}H^{-1}dHH^{-1}\zeta^{-1}\mathcal{L}\mathcal{L}^n) \approx \operatorname{Res}(dHH^{-1}\zeta^{-1}\mathcal{L}^{n+2}H^{-1}) = \\ = dHH^{-1}p_1(n+2)H^{-1} \quad \Rightarrow \tag{14.5.40}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta H} = H^{-1}p_1(n+2)H^{-1} \quad \Rightarrow \tag{14.5.41a}$$

$$p_1(n) = H\frac{\delta\mathcal{H}_{n-1}}{\delta H}H. \tag{14.5.41b}$$

Формула (14.5.41b) была доказана прн $n > 1$. При $n = 1$, $\mathcal{L} = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H = \zeta H + H^{(1)}H + \ldots$, так что

$$p_0(1) = H^{(1)}H, \tag{14.5.42}$$

$$p_1(1) = H, \tag{14.5.43a}$$

и последняя формула дает:

$$H\frac{\delta\mathcal{H}_0}{\delta H}H = H\frac{\delta \ln H}{\delta H}H = H = p_1(1). \tag{14.5.43b}$$

Таким образом, формула (14.5.41b) верна для всех $n \in \mathbb{N}$. 3) Подставляя формулу (14.5.41b) в формулу (14.5.30b) и используя равенство (14.5.35), приходим к проверке следующего тождества:

$$Hp_0(n) - p_0(n)^{(-1)}H = H[(\Delta - \Delta^{-1})(p_1(n))]H. \tag{14.5.44}$$

4) Так как

$$(H\zeta^{-1})^{\ell}H = \zeta^{-\ell}H^{(\ell)}\dots H, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.5.45}$$

то имеем

$$\mathcal{L} = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H = \zeta\sum_{\ell\geqslant 0}(H\zeta^{-1})^{\ell}H = \sum_{\ell\geqslant 0}\zeta^{1-\ell}\sqcap_{\ell}, \tag{14.5.46}$$

где

$$\sqcap_{\ell} := H^{(\ell)}\dots H. \tag{14.5.47}$$

Следовательно, расписывая двойное тождество

$$\mathcal{L}^{n+1} = \mathcal{L}^{n}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{L}^{n}, \tag{14.5.48}$$

$$\sum_{s}\zeta^{s}p_s(n+1) = \sum_{k}\zeta^{k}p_k(n)\sum_{\ell\geqslant 0}\zeta^{1-\ell}\sqcap_{\ell} = \sum_{\ell\geqslant 0}\zeta^{1-\ell}\sqcap_{\ell}\sum_{k}\zeta^{k}p_k(n), \tag{14.5.49}$$

получаем

$$p_s(n+1) = \sum_{\ell\geqslant 0}p_{s+\ell-1}^{(\ell-1)}(n)\sqcap_{\ell} = \sum_{\ell\geqslant 0}\sqcap^{(1-\ell-s)}p_{s+\ell-1}(n). \tag{14.5.50}$$

В частности, при $s = 0, 1$, формулы (14.5.50) дают:

$$p_0(n+1) = \sum_{\ell\geqslant 0}p_{\ell-1}^{(\ell-1)}(n)\sqcap_{\ell} = p_{-1}^{(-1)}(n)\sqcap_0 + \sum_{\ell\geqslant 0}p_{\ell}^{(\ell)}(n)\sqcap_{\ell+1} = \tag{14.5.51a}$$

$$= \sum_{\ell\geqslant 0}\sqcap_{\ell}^{(1-\ell)}p_{\ell-1}(n) = \sqcap_0^{(1)}p_{-1}(n) + \sum_{\ell\geqslant 0}\sqcap_{\ell+1}^{(-\ell)}p_{\ell}(n), \tag{14.5.51b}$$

$$p_1(n+1) = \sum_{\ell\geqslant 0}p_{\ell}^{(\ell-1)}(n)\sqcap_{\ell} = \tag{14.5.52a}$$

$$= \sum_{\ell\geqslant 0}\sqcap_{\ell}^{(-\ell)}p_{\ell}(n). \tag{14.5.52b}$$

Применяя операторы $\widehat{L}_H$ и $\widehat{R}_H\Delta^{-1}$ соответственно к формулам (14.5.51a,b), вычитая результаты, вспоминая, что $H = \sqcap_0$, и используя тождества

$$\sqcap_{\ell+1} = \sqcap_{\ell}^{(1)}\sqcap_0, \quad \sqcap_{\ell+1}^{(-\ell-1)} = \sqcap_0\sqcap_{\ell}^{(-\ell-1)}, \tag{14.5.53}$$

получаем

$$\begin{aligned}Hp_0(n+1) - p_0(n+1)^{(-1)}H &= \sum_{\ell\geqslant 0}\big(\sqcap_0 p_{\ell}^{(\ell)}(n)\,\sqcap_{\ell+1} - \sqcap_{\ell+1}^{(-\ell-1)}\,p_{\ell}^{(-1)}(n)\sqcap_0\big) = \\ &= \sqcap_0\sum_{\ell\geqslant 0}\big(p_{\ell}^{(\ell)}(n)\,\sqcap_{\ell}^{(1)} - \sqcap_{\ell}^{(-\ell-1)}\,p_{\ell}^{(-1)}(n)\big)\sqcap_0 = \sqcap_0\Big[\Big(\sum_{\ell\geqslant 0}p_{\ell}^{(\ell-1)}(n)\sqcap_{\ell}\Big)^{(1)} - \\ &\quad -\Big(\sum_{\ell\geqslant 0}\sqcap_{\ell}^{(-\ell)}p_{\ell}(n)\Big)^{(-1)}\Big]\sqcap_0 \\ &\overset{(14.5.52a,b)}{=} H[(\Delta - \Delta^{-1})(p_1(n+1))]H.\end{aligned} \tag{14.5.54}$$

Это доказывает тождество (14.5.44) при $n > 1$. При $n = 1$, формулы (14.5.42, 43a) при подстановке в уравнение (14.5.44) дают тождество

$$HH^{(1)}H - HH^{(-1)}H = H[(\Delta - \Delta^{-1})(H)]H. \tag{14.5.55}$$

> Не может быть боязливости, если жизнь всего одна.
>
> Кеннет Сирайт, в письме Е.М. Форстер

14.6 Гидродинамическая форма иерархии КП в G–координатах

> Меня попросили написать автобиографию, и я буду признателен любому, кто сообщит мне, что я делал между 1960 и 1974 гг.
>
> Джеффри Бернард, из письма в *Spectator*

В этом разделе устанавливается гидродинамическая форма общей иерархии КП в G–координатах.

Мы начинаем с общей иерархии КП в G–координатах

$$L = \zeta^N \Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 1 + \sum_{i \geqslant 0} r_i \zeta^{(-i-1)}, \tag{14.6.1}$$

$$\partial_P(\Lambda) = \mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^N = (\mathcal{R}\Lambda - \zeta^{-N}\mathcal{R}\Lambda)_- \, , \quad \mathcal{R} = (L^n)_+. \tag{14.6.2}$$

Случай $N = 1$ был описан уравнениями (12.6.24–30), и именно с него сейчас удобно начать.

Упражнение 14.6.3. Покажите, что при $N = n = 1$ уравнение движения (14.6.2) принимает вид

$$\partial_t(r_i) = (\Delta - 1)(r_{i+1}) + r_i r_0^{(-i-1)} - r_0^{(1)} r_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.6.4}$$

Упражнение 14.6.5. Допустим временно, что переменные r_i *коммутируют* друг с другом. Покажите, что динамическая система (14.6.4) допускает связь

$$r_{k+1} = r_k u^{(\gamma k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad u = r_0^{-1} r_1, \tag{14.6.6}$$

если и только если

$$\gamma = -1. \tag{14.6.7}$$

Упражнение 14.6.8. Вернемся к некоммутирующим r_i.
(i) Покажите, что динамическая система (14.6.4) при связи

$$r_{k+1} = r_k u^{(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad u = r_0^{-1} r_1, \tag{14.6.9}$$

превращается в

$$\partial_t(u) = uh^{(-2)} - h^{(-1)}u + u(u - u^{(-1)}), \tag{14.6.10a}$$

$$\partial_t(h) = (\Delta - 1)(hu) + hh^{(-1)} - h^{(1)}h, \tag{14.6.10b}$$

где

$$h = r_0, \quad u = h^{-1} r_1; \tag{14.6.11}$$

(ii) Покажите, что динамическая система (14.6.4) не уважает связь

$$r_{k+1} = u^{(-k)} r_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad u = r_1 r_0^{-1}. \tag{14.6.12}$$

Таким образом, мы пришли к следующей форме гидродинамической связи:

$$r_k = hu \dots u^{(-k)} u^{(-k)-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.6.13}$$

При этой связи оператор Λ превращается в

$$\begin{aligned} 1 + h\zeta^{-1} + hu\zeta^{-2} + huu^{(-1)}\zeta^{-3} + \dots = 1 + h(1 + u\zeta^{-1} + uu^{(-1)}\zeta^{-2} + \dots)\zeta^{-1} = \\ = 1 + h \sum_{\ell \geqslant 0} (u\zeta^{-1})^{\ell} \zeta^{-1} = 1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}. \end{aligned} \tag{14.6.14}$$

Таким образом,

$$\Lambda = 1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}, \tag{14.6.15}$$

$$L = \zeta^{N}[1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}]^{-1}. \tag{14.6.16}$$

Теорема 14.6.17. Для любого $\mathcal{R} \in C_{u,h}[\zeta]$, из уравнений движения

$$\partial_t(u) = (\widehat{R}_u - \widehat{L}_u \Delta^{-1})(\mathrm{Res}[(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}\mathcal{R}\zeta^{N+1}]), \tag{14.6.18a}$$

$$\partial_t(h) = \mathrm{Res}[\mathcal{R}h(1 - u\zeta^{-1})^{-1} - h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}\mathcal{R}\zeta^{N+1}], \tag{14.6.18b}$$

следует

$$\partial_t(\Lambda) = (\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^{N})_-. \tag{14.6.19}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \partial_t(\Lambda) = \partial_t[1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}] = \partial_t(h)(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1} - \\ -h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}(-\partial_t(u)\zeta^{-1})(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1} = \\ = [\partial_t(h) + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\partial_t(u)\zeta^{-1}](1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}. \end{aligned} \tag{14.6.20}$$

Далее, примем

$$\mathcal{R} = r\zeta^{s}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.6.21}$$

Тогдв

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^{N})_- = \\ = \{r\zeta^{s}[1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}] - [1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}]r^{(-N)}\zeta^{s}\}_- = \\ = r\zeta^{s}h(u\zeta^{-1})^{s} \sum_{\ell \geqslant 0} (u\zeta^{-1})^{\ell}\zeta^{-1} - h\sum_{\ell \geqslant 0}(u\zeta^{-1})^{\ell}(u\zeta^{-1})^{s} r^{(-N)}\zeta^{s} = \\ = rh^{(s)}\zeta^{s}(u\zeta^{-1})^{s}(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1} - h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}(u\zeta^{-1})^{s} r^{(-N-1)}\zeta^{s}\zeta^{-1}. \end{aligned} \tag{14.6.22}$$

Следовательно, равенство (14.6.19) превращается в

$$\partial_t(h) + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\partial_t(u)\zeta^{-1} = a - h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}b(1 - u\zeta^{-1}), \tag{14.6.23}$$

$$a = rh^{(s)}\zeta^{s}(u\zeta^{-1})^{s}, \quad b = (u\zeta^{-1})^{s} r^{(-N-1)}\zeta^{s}, \tag{14.6.24}$$

где $a, b \in C_{u,h}$. Беря вычет уравнения (14.6.23), получаем

$$\begin{aligned} \partial_t(h) = a - hb = \\ = rh^{(s)}\zeta^s(u\zeta^{-1})^s - h(u\zeta^{-1})^s r^{(-N-1)}\zeta^s = \\ = \operatorname{Res}[r\zeta^s h(1-u\zeta^{-1})^{-1} - h(1-u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1} r\zeta^s\zeta^{N+1}] = \\ = \operatorname{Res}[\mathcal{R}h(1-u\zeta^{-1})^{-1} - h(1-u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}\mathcal{R}\zeta^{N+1}], \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (14.6.25) \\ \\ \\ (14.6.26) \end{aligned}$$

и последнее равенство совпадает с уравнением (14.6.18b). Подставляя формулу (14.6.25) обратно в уравнение (14.6.23), получаем

$$-hb + h(1-u\zeta^{-1})^{-1}\partial_t(u)\zeta^{-1} = -h(1-u\zeta^{-1})^{-1}b(1-u\zeta^{-1}). \qquad (14.6.27)$$

Умножая слева на $(1-u\zeta^{-1})h^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} \partial_t(u)\zeta^{-1} = (1-u\zeta^{-1})b - b(1-u\zeta^{-1}) = \\ = -u\zeta^{-1}b + bu\zeta^{-1} = [bu - ub^{(-1)}]\zeta^{-1}, \end{aligned} \qquad (14.6.28)$$

так что

$$\begin{aligned} \partial_t(u) = bu - ub^{(-1)} = (\widehat{R}_u - \widehat{L}_u\Delta^{-1})(b) = \\ = (\widehat{R}_u - \widehat{L}_u\Delta^{-1})(\operatorname{Res}[(1-u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}\mathcal{R}\zeta^{N+1}]), \end{aligned} \qquad (14.6.29)$$

что совпадает с (14.6.18a). ▮

Следствие 14.6.30. Гидродинамическая иерархия КП в G–координатах имеет вид

$$\partial_P(u) = (\widehat{R}_u - \widehat{L}_u\Delta^{-1})\{(\operatorname{Res}[(1-u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1}]\}, \qquad (14.6.31a)$$

$$\partial_P(h) = \operatorname{Res}[P_+h(1-u\zeta^{-1})^{-1} - h(1-u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1}], \qquad (14.6.31b)$$

$$P = L^n, \quad L = \zeta^N\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 1 + h(1-u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}. \qquad (14.6.31c)$$

Доказательство. Это следует из Теоремы 14.6.17 и единственности гидродинамической формы. ▮

Следствие 14.6.32. Гидродинамическая форма (14.6.31) допускает связь

$$\{u = 0\} \qquad (14.6.33)$$

превращающую ее в

$$\partial_P(h) = \operatorname{Res}(P_+h - h\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1}), \qquad (14.6.34a)$$

$$P = L^n, \quad L = \zeta^N\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 1 + h\zeta^{-1}. \qquad (14.6.34b)$$

Доказательство. Очевидно. ▮

Упражнение 14.6.35. Покажите, что динамическая система (14.6.10) допускает связь

$$\{u = h^{(-1)}\}, \qquad (14.6.36)$$

превращающую ее в

$$\partial_t(u) = \partial_t(h) = 0. \qquad (14.6.37)$$

Теорема 14.6.38. Гидродинамическая иерархия КП в G–координатах (14.6.31) допускает связь (14.6.36), обращающую ее в тривиальный поток (14.6.37).

Доказательство. При $u = h^{(-1)}$,

$$\Lambda = 1 + h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1} = 1 + h(1 - \zeta^{-1}h)^{-1}\zeta^{-1} = \zeta[1 + \zeta^{-1}h(1 - \zeta^{-1}h)^{-1}]\zeta^{-1} = \\ = \zeta(1 - \zeta^{-1}h)^{-1}\zeta^{-1} \quad \Rightarrow \tag{14.6.39}$$

$$L = \zeta^N\Lambda^{-1} = \zeta^N\zeta(1 - \zeta^{-1}h)\zeta^{-1} = \zeta^N(1 - h\zeta^{-1}) = \zeta^{N-1}(\zeta - h^{(1)}) = L_+. \tag{14.6.40}$$

Следовательно,

$$P_+ = P = L^n, \tag{14.6.41}$$

$$h(1 - u\zeta^{-1})^{-1} = (\Lambda - 1)\zeta = (L^{-1}\zeta^N - 1)\zeta \quad \Rightarrow \tag{14.6.42}$$

$$P_+h(1 - u\zeta^{-1})^{-1} = L^n(L^{-1}\zeta^N - 1)\zeta = (L^{n-1}\zeta^{N+1} - L^n\zeta) \in C[\zeta]\zeta, \tag{14.6.43}$$

$$h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1} = (L^{-1}\zeta^N - 1)\zeta\zeta^{-N-1}L^n\zeta^{N+1} = \\ = (L^{n-1}\zeta^{N+1} - \zeta^{-N}L^n\zeta^{N+1}) \in C[\zeta]\zeta \quad \Rightarrow \tag{14.6.44}$$

$$\mathrm{Res}[(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1}] = h^{-1}\,\mathrm{Res}(L^{n-1}\zeta^{N+1} - \zeta^{-N}L^n\zeta^{N+1}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_t(u) = 0,$$

$$\partial_t(h) = \mathrm{Res}[P_+h(1 - u\zeta^{-1})^{-1} - h(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1}] = \\ = \mathrm{Res}(L^{n-1}\zeta^{N+1} - L^n\zeta - L^{n-1}\zeta^{N+1} + \zeta^{-N}L^n\zeta^{N+1}) = 0.$$ ∎

14.7 Гидродинамическая форма иерархии МКП в G–координатах

> В 1884 французские власти пересмотрели дело Поля Хьюберта, отбывшего к тому времени 21 год пожизненного заключения, так как они наконец осознали, что он был осужден по обвинению в убийстве самого себя.

В этом разделе определяется гидродинамическая форма общей иерархии МКП в G–координатах.

Случай $N = 1$ общей иерархии МКП в G-координатах

$$\mathcal{L} = \zeta^N\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = \sum_{i\geqslant 0} R_i\zeta^{-i}, \tag{14.7.1}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\Lambda) = (\mathcal{P}_{>0})\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}(\mathcal{P}_{>0})\zeta^N = [(\mathcal{P}_{>0})\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}(\mathcal{P}_{>0})\zeta^N]_{\leqslant 0}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{14.7.2}$$

рассматривался в §12.6. В этом случае первый поток при $n = 1$ задается формулой (12.6.16):

$$\partial_t(R_i) = (R_0^{-1}R_{i+1})^{(1)} - R_{i+1}R_0^{(-i-1)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.7.3}$$

Упражнение 14.7.4. Допустим, что переменные R_i *коммутируют*. Покажите, что поток (14.7.3) допускает связь

$$R_{k+1} = R_k U^{(k\gamma)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad U = R_0^{-1} R_1, \tag{14.7.5}$$

если и только если

$$\gamma = -1. \tag{14.7.6}$$

Упражнение 14.7.7. Вернемся к некоммутативности.
(i) Покажите, что поток (14.7.3) при связи

$$R_{k+1} = R_k U^{(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad U = R_0^{-1} R_1, \tag{14.7.8}$$

превращается в

$$\partial_t(U) = U[H^{(-1)-1} U - U^{(-1)} H^{(-2)-1}], \tag{14.7.9a}$$

$$\partial_t(H) = U^{(1)} - HUH^{(-1)-1}, \tag{14.7.9b}$$

где, как обычно,

$$H = R_0; \tag{14.7.10}$$

(ii) Покажите, что поток (14.7.3) не допускает связь

$$R_{k+1} = U^{(-k)} R_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad U = R_1 R_0^{(-1)}. \tag{14.7.11}$$

Таким образом, мы пришли к рассмотрению гидродинамического представления вида

$$R_{k+1} = HU \ldots U^{(-k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \quad R_0 = H. \tag{14.7.12}$$

При этом представлении, оператор Λ (14.7.1) превращается в

$$\Lambda = R_0 + \sum_{i \geqslant 0} R_{i+1} \zeta^{-i-1} = H\big(1 + \sum_{i \geqslant 0} U \ldots U^{(-i)} \zeta^{-i-1}\big) =$$

$$= H\big[1 + \sum_{i \geqslant 0} (U\zeta^{-1})^{i+1}\big] = H(1 - U\zeta^{-1})^{-1} \quad \Rightarrow \tag{14.7.13}$$

$$\Lambda = H(1 - U\zeta^{-1})^{-1} \quad \Rightarrow \tag{14.7.14}$$

$$\Lambda^{-1} = (1 - U\zeta^{-1}) H^{-1}, \quad \mathcal{L} = \zeta^N (1 - U\zeta^{-1}) H^{-1}. \tag{14.7.15}$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}_{>0} = \mathcal{L} \quad \text{при} \quad N > 1. \tag{14.7.16}$$

Таким образом, при $N > 1$, все наши потоки становятся тривиальными. С этого момента будем считать

$$N = 1. \tag{14.7.17}$$

Теорема 14.7.18. Зафиксируем $\mathcal{R} \in C_{U,H}[\zeta]\zeta$. Тогда из уравнений движения

$$\partial_t(U) = (\widehat{R}_U - \widehat{L}_U \Delta^{-1})\{\mathrm{Res}[(1 - U\zeta^{-1})^{-1} \zeta^{-N} \mathcal{R} \zeta^N]\}, \tag{14.7.19a}$$

$$\partial_t(H) = \mathrm{Res}(\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N} \mathcal{R} \zeta^N), \tag{14.7.19b}$$

вытекает

$$\partial_t(\Lambda) = (\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N} \mathcal{R} \zeta^N)_{\leqslant 0}. \tag{14.7.20}$$

Доказательство. Имеем,

$$\begin{aligned} \partial_t(\Lambda) &= \partial_t[H(1-U\zeta^{-1})^{-1}] = \\ &= \partial_t(H)(1-U\zeta^{-1})^{-1} - H(1-U\zeta^{-1})^{-1}(-\partial_t(U)\zeta^{-1})(1-U\zeta^{-1})^{-1} = \\ &= [\partial_t(H) + H(1-U\zeta^{-1})^{-1}\partial_t(U)\zeta^{-1}](1-U\zeta^{-1})^{-1}. \end{aligned} \tag{14.7.21}$$

С другой стороны, при

$$\mathcal{R} = r\zeta^s, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{14.7.22}$$

находим

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^N)_{\leqslant 0} &= [r\zeta^s H(1-U\zeta^{-1})^{-1} - H(1-U\zeta^{-1})^{-1}r^{(-N)}\zeta^s]_{\leqslant 0} = \\ &= r\zeta^s H(U\zeta^{-1})^s(1-U\zeta^{-1})^{-1} - H(1-U\zeta^{-1})^{-1}(U\zeta^{-1})^s r^{(-N)}\zeta^s = \\ &= a(1-U\zeta^{-1})^{-1} - H(1-U\zeta^{-1})^{-1}b, \end{aligned} \tag{14.7.23a}$$

$$a = r\zeta^s H(U\zeta^{-1})^s, \quad b = (U\zeta^{-1})^s r^{(-N)}\zeta^s. \tag{14.7.23b}$$

Так как $a, b \in C_{U,H}$, то приравнивая выражения (14.7.21) и (14.7.23), мы можем переписать равенство (14.7.20) как

$$\partial_t(H) + H(1-U\zeta^{-1})^{-1}\partial_t(U)\zeta^{-1} = a - H(1-U\zeta^{-1})^{-1}b(1-U\zeta^{-1}). \tag{14.7.24}$$

Беря вычет этого равенства, находим

$$\partial_t(H) = a - Hb = \tag{14.7.25}$$

$$\begin{aligned} &= r\zeta^s H(U\zeta^{-1})^s - H(U\zeta^{-1})^s r^{(-N)}\zeta^s = \\ &= \mathrm{Res}[\mathcal{R}H(1-U\zeta^{-1})^{-1} - H(1-U\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^N] = \\ &= \mathrm{Res}(\mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^N), \end{aligned} \tag{14.7.26}$$

а это есть уравнение (14.7.19b). Подставляя формулу (14.7.25) обратно в уравнение (14.7.24), получаем

$$H(1-U\zeta^{-1})^{-1}\partial_t(U)\zeta^{-1} = Hb - H(1-U\zeta^{-1})b(1-U\zeta^{-1}). \tag{14.7.27}$$

Умножая слева на $(1-U\zeta^{-1})H^{-1}$, получаем

$$\partial_t(U)\zeta^{-1} = (1-U\zeta^{-1})b - b(1-U\zeta^{-1}) = [bU - Ub^{(-1)}]\zeta^{-1} \quad \Rightarrow \tag{14.7.28}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(U) &= bU - Ub^{(-1)} = (\widehat{R}_U - \widehat{L}_U\Delta^{-1})(b) = (\widehat{R}_U - \widehat{L}_U\Delta^{-1})[(U\zeta^{-1})^s r^{(-N)}\zeta^s] = \\ &= (\widehat{R}_U - L_U\Delta^{-1})\{\mathrm{Res}[(1-U\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N}\mathcal{R}\zeta^N]\}, \end{aligned} \tag{14.7.29}$$

что совпадает с (14.7.19a). ∎

Следствие 14.7.30. Гидродинамическое представление иерархии МКП (14.7.1, 2) принимает вид

$$\partial_{\mathcal{P}}(U) = (\widehat{R}_U - \widehat{L}_U\Delta^{-1})\{\mathrm{Res}[(1-U\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-N}\mathcal{P}_{>0}\zeta^N]\}, \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{14.7.31a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(H) = \mathrm{Res}(\mathcal{P}_{>0}\Lambda - \Lambda\zeta^{-N}\mathcal{P}_{>0}\zeta^N), \tag{14.7.31b}$$

$$\Lambda = H(1-U\zeta^{-1})^{-1}, \quad \mathcal{L} = \zeta\Lambda^{-1} = \zeta(1-U\zeta^{-1})H^{-1}. \tag{14.7.31c}$$

Упражнение 14.7.32. (i) Поток (14.7.9) превращается в тривиальный при связи

$$\{U = 0\}. \tag{14.7.33}$$

Покажите, что это верно для всех потоков (14.7.31).
[Подсказка : $\mathcal{L}_{>0} = \mathcal{L}$];
(ii) Поток (14.7.9) рационален по H, но становится полиномиальным после замены

$$\bar{H} = H^{-1} \tag{14.7.34}$$

Более того, новый поток превращается в тривиальный при наложении связи

$$\{\bar{H} = 0\}.$$

Покажите, что это же верно для всей иерархии (14.7.31):
(iii) Проверьте, что

$$\partial_t(U^{(1)}/H) = 0 \tag{14.7.35}$$

для потока (14.7.9).

Последнее равенство, (14.7.35), можно легко объяснить формулой (14.7.31c), которая гласит, что

$$\mathcal{L} = \zeta Q_0 + Q_1, \quad Q_0 = \bar{H} = H^{-1}, \quad Q_1 = -U^{(1)}/H, \tag{14.7.36}$$

и, в силу формулы (9.3.6) (или как-нибудь иначе)

$$\partial_t(Q_1) = 0 \quad \text{при} \quad \{0 = Q_2 = Q_3 = \dots\}. \tag{14.7.37}$$

Таким образом, гидродинамическая форма иерархии МКП в G–координатах эквивалентна обрыву

$$\{0 = Q_2 = Q_3 = \dots\} \tag{14.7.38}$$

этой иерархии в исходных Q–координатах, с

$$\mathcal{L} = \sum \zeta^{1-i} Q_i. \tag{14.7.39}$$

В частности, эта гидродинамическая форма гамильтонова, с гамильтоновой структурой заданной гамильтоновой матрицей $B^{[1]}$ (12.2.20). Мы можем также разобраться с преобразованием Миуры. Так как $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}$, то

$$L_+ = (V^{-1}\mathcal{L}V)_+ = V^{-1}\mathcal{L}_+V = V^{-1}\mathcal{L}V = L. \tag{14.7.40}$$

Это показывает, что преобразование Миуры переводит все гидродинамические потоки МКП (14.7.31) в тривиальные потоки на языке КП. Этот факт можно увидеть также из следующего вычисления: тождество $V^{-1}\mathcal{L}V = L$,

$$V^{-1}[\zeta H(1 - U\zeta^{-1})^{-1}]V = \zeta[1 + h\{1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}]^{-1}, \tag{14.7.41}$$

эквивалентно, как легко видеть, равенствам

$$H = VV^{(-1)-1}, \tag{14.7.42}$$

$$u = V^{(-2)-1}U^{(-1)}V^{(-3)}, \tag{14.7.43a}$$

$$h = V^{(-1)-1}UV^{(-2)}. \tag{14.7.43b}$$

Последние два уравнения показывают, что полученные таким образом u и h связаны соотношением $u = h^{(-1)}$, и Теорема 14.6.38 гласит, что в этом случае

$$\partial_t(u) = \partial_t(h) = 0.$$

Замечание 14.7.44. Иерархия МКП в G-координатах имеет (третью) гамильтонову структуру $B^{\text{МКП}_3}$, заданную формулой (12.6.10). Она наследуется гидродинамическим представлением (14.7.31); это свойство является частным случаем $r = 1$ следующей теоремы.

Теорема 14.7.45. Пусть ${}^r\mathcal{G} = \mathrm{Lie}(\zeta^r R[\zeta])$, и $B^r = B({}^r\mathcal{G})$ есть соответствующая гамильтонова матрица:

$$B^r_{ij} = \widehat{L}_{R_{i+j+r}}\Delta^{-i-r} - \Delta^{j+r}\widehat{R}_{R_{i+j+r}}. \tag{14.7.46}$$

Пусть $\Phi : C_{(R)} \to C_{U,H}$ задает гидродинамический гомоморфизм (14.7.12):

$$\Phi(R_k) = HU\dots U^{(-k)}U^{(-k)-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.7.47}$$

Пусть b^{rHD} есть следующая кососимметрическая матрица:

$$b^{rHD} = \begin{array}{c} \\ U \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad U \qquad\qquad & \qquad\qquad H \qquad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \widehat{L}_{q_{r+1}}\Delta^{-r-1} - \widehat{L}_{q_r}\widehat{R}_U\Delta^{-r} \\ \Delta^r\widehat{L}_U\widehat{R}_{q_r} - \Delta^{r+1}\widehat{R}_{q_{r+1}} & \widehat{L}_{\Phi(R_r)}\Delta^{-r} - \Delta^r\widehat{R}_{\Phi(R_r)} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{14.7.48}$$

где

$$q_i = H^{-1}\Phi(R_i) = U\dots U^{(-i)}U^{(-i)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.7.49}$$

Тогда
(i) Матрица b^{rHD} гамильтонова;
(ii) Гидродинамическое отображение Φ (14.7.47) гамильтоново.

Доказательство. (i) Так как Φ является гомоморфизмом на, то (i) следует из (ii);
(ii) Следует проверить тождество

$$\Phi(B^r) = Jb^{rHD}J^\dagger, \tag{14.7.50}$$

где

$$J = \begin{array}{c} \\ R_0 \\ R_{i+1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} U \quad & \quad H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ D_{i+1} & \widehat{R}_{0i+1} \end{pmatrix} \end{array}, \tag{14.7.51}$$

$$D_{i+1} = \frac{D\Phi(R_{i+1})}{Du} = \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{Hq_s}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s}. \tag{14.7.52}$$

Рассмотрим 3 типа матричных элементов в равенстве (14.7.50): $(0,0)$; $(i+1,0)$; $(i+1,j+1)$.

$$\begin{aligned} 1)\quad (Jb^{rHD}J^\dagger)_{00} = b^{rHD}_{HH} &= \widehat{L}_{\Phi(R_r)}\Delta^{-r} - \Delta^r\widehat{R}_{\Phi(R_r)} = \\ &= \Phi(\widehat{L}_{R_r}\Delta^{-r} - \Delta^r\widehat{R}_{R_r}) = \Phi(B^r_{00}); \end{aligned} \tag{14.7.53}$$

$$2)\quad (Jb^{rHD}J^\dagger)_{i+1,0} = D_{i+1}(b^{rHD})_{UH} + \widehat{R}_{q_{i+1}}(b^{rHD})_{HH} =$$

$$= \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{Hq_s}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s}\widehat{L}_{q_r}(\widehat{L}_{u^{(-r)}}\Delta^{-1} - \widehat{R}_u)\Delta^{-r} + \tag{14.7.54a}$$

$$+ \widehat{R}_{0i+1}(\widehat{L}_{Hq_r}\Delta^{-r} - \Delta^r\widehat{R}_{Hq_r}). \tag{14.7.54b}$$

Упростим сумму (14.7.54a) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum \widehat{L}_{Hq_s}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s}\widehat{L}_{q_r}(\widehat{L}_{u^{(-r)}}\Delta^{-1}-\widehat{R}_u)=\\
&=\sum \widehat{L}_{Hq_s}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}(\widehat{L}_{q_{r+1}^{(-s)}}\Delta^{-s-1}-\widehat{L}_{q_r^{(-s)}}\widehat{R}_{u^{(-s)}}\Delta^{-s})=\\
&=\sum(\widehat{L}_{Hq_s q_{r+1}^{(-s)}}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s-1}-\\
&-\widehat{L}_{Hq_s q_r^{(-s)}}\widehat{R}_{u^{(-s)}q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s}) \stackrel{(14.7.57\text{a,b})\ \text{ниже}}{=}\\
&=\sum_{s=0}^{i}\widehat{L}_{Hq_{r+s+1}}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s-1}-\sum_{s=0}^{i}\widehat{L}_{Hq_{r+s}}\widehat{R}_{q_{i+1-s}^{(-s)}}\Delta^{-s} \stackrel{\text{все телескопирует}}{=}\\
&=\widehat{L}_{Hq_{r+i+1}}\Delta^{-i-1}-\widehat{L}_{Hq_r}\widehat{R}_{0i+1} \quad\Rightarrow\\
&\{(14.7.54a)\}=\widehat{L}_{Hq_{r+i+1}}\Delta^{-r-i-1}-\widehat{L}_{Hq_r}\widehat{R}_{q_{i+1}}\Delta^{-r}.
\end{aligned}\tag{14.7.55}$$

Утверждение 14.7.56. Имеем:

$$q_s q_\ell^{(-s)}=q_{s+\ell},\tag{14.7.57a}$$

$$u^{(-s)}q_\ell^{(-s-1)}=q_{\ell+1}^{(-s)}.\tag{14.7.57b}$$

Доказательство. Очевидно. ▮

Комбинируя выражения (14.7.54b, 55) получаем

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}_{Hq_{r+i+1}}\Delta^{-r-i-1}-\widehat{R}_{q_{i+1}}\Delta^r\widehat{R}_{Hq_r}=\\
&=\widehat{L}_{Hq_{r+i+1}}\Delta^{-r-i-1}-\Delta^r\widehat{R}_{Hq_r q_{i+1}^{(-r)}} \stackrel{(14.7.57\text{a})}{=}\\
&=\widehat{L}_{Hq_{r+i+1}}\Delta^{-r-i-1}-\Delta^r\widehat{R}_{Hq_{r+i+1}}=\Phi(\widehat{L}_{R_{r+i+1}}\Delta^{-r-i-1}-\Delta^r\widehat{R}_{R_{r+i+1}})=\Phi(B^r_{i+1,0});
\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}
(Jb^{rHD}J^\dagger)_{i+1,j+1}&=\widehat{R}_{q_{i+1}}(b^{rHD})_{HV}D^\dagger_{j+1}+D_{i+1}(b^{rHD})_{UH}\widehat{L}_{q_{j+1}}+\\
&+\widehat{R}_{q+1}(b^{rHD})_{HH}\widehat{L}_{q_{j+1}}=\\
&=\widehat{R}_{q_{i+1}}\Delta^r(\widehat{L}_u\widehat{R}_{q_r}-\Delta\widehat{R}_{q_{r+1}})\sum_{s=0}^{j}\Delta^s\widehat{L}^{(-s-1)}_{q_{j-s}}\widehat{R}_{Hq_s}+ &&(14.7.58\text{a})\\
&+\sum_{s=0}^{i}\widehat{L}_{Hq_s}\widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}}\Delta^{-s}(\widehat{L}_{q_{r+1}}\Delta^{-1}-\widehat{L}_{q_r}\widehat{R}_u)\Delta^{-r}\widehat{L}_{q_{j+1}}+\\
& &&(14.7.58\text{b})\\
&+\widehat{R}_{q_{i+1}}(\widehat{L}_{Hq_r}\Delta^{-r}-\Delta^r\widehat{R}_{Hq_r})\widehat{L}_{q_{j+1}}. &&(14.7.58\text{c})
\end{aligned}$$

Начнем с суммы (14.7.58a). Она равна произведению $\widehat{R}_{q_{i+1}}\Delta^r$ на

$$\begin{aligned}
&\sum(\Delta^s\widehat{L}_{u^{(-s)}}\widehat{R}_{q_r^{(-s)}}\widehat{L}_{q_{j-s}^{(-s-1)}}\widehat{R}_{Hq_s}-\Delta^{s+1}\widehat{R}_{q_{r+1}^{(-s)}}\widehat{L}_{q_{j-s}^{(-s-1)}}\widehat{R}_{Hq_s})=\\
&=\sum(\Delta^s\widehat{L}_{u^{(-s)}q_{j-s}^{(-s-1)}}\widehat{R}_{Hq_s q_r^{(-s)}}-\Delta^{s+1}\widehat{L}_{q_{j-s}^{(-s-1)}}\widehat{R}_{Hq_s q_{r+1}^{(-s)}}) \stackrel{(14.7.57\text{b,a})}{=}\\
&=\sum_{s=0}^{j}\widehat{L}_{q_{j+1-s}^{(-s)}}\widehat{R}_{Hq_{s+r}}-\sum_{s=0}^{j}\Delta^{s+1}\widehat{L}_{q_{j-s}^{(-s-1)}}\widehat{R}_{Hq_{s+r+1}} \stackrel{\text{телескопирует}}{=}
\end{aligned}$$

$$= \widehat{L}_{q_{j+1}} \widehat{R}_{Hq_r} - \Delta^{j+1} \widehat{R}_{Hq_{j+r+1}} \quad \Rightarrow$$

$$\{(14.7.58a)\} = \widehat{R}_{0i+1} \Delta^r (\widehat{L}_{q_{j+1}} \widehat{R}_{Hq_r} - \Delta^{j+1} \widehat{R}_{Hq_{j+r+1}}). \tag{14.7.59a}$$

Далее, сумма $\{(14.7.58b)\} = (\dots)\Delta^{-r}\widehat{L}_{q_{j+1}}$, где

$$(\dots) = \sum \widehat{L}_{Hq_s} \widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}} (\widehat{L}_{q_{r+1}^{(-s)}} \Delta^{-s-1} - \widehat{L}_{q_r^{(-s)}} \widehat{R}_{u^{(-s)}} \Delta^{-s}) =$$

$$= \sum (\widehat{L}_{Hq_s q_{r+1}^{(-s)}} \widehat{R}_{q_{i-s}^{-s-1}} \Delta^{(-s-1)} - \widehat{L}_{Hq_s q_r^{(-s)}} \widehat{R}_{u^{(-s)} q_{i-s}^{(-s-1)}} \Delta^{-s}) \overset{(14.7.57\text{a,b})}{=}$$

$$= \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{Hq_{s+r+1}} \widehat{R}_{q_{i-s}^{(-s-1)}} \Delta^{-s-1} - \sum_{s=0}^{i} \widehat{L}_{Hq_{s+r}} \widehat{R}_{q_{i+1-s}^{(-s)}} \Delta^{-s} \overset{\text{телескопирует}}{=}$$

$$= \widehat{L}_{Hq_{i+r+1}} \Delta^{-i-1} - \widehat{L}_{Hq_r} \widehat{R}_{q_{i+1}} \quad \Rightarrow$$

$$\{(14.7.58b)\} = (\widehat{L}_{Hq_{i+r+1}} \Delta^{-i-1} - \widehat{L}_{Hq_r} \widehat{R}_{q_{i+1}}) \Delta^{-r} \widehat{L}_{q_{j+1}}. \tag{14.7.59b}$$

Комбннирун выражения (14.7.59a,b & 58c), получаем

$$\widehat{L}_{Hq_{i+r+1}} \Delta^{-i-1} \Delta^{-r} \widehat{L}_{q_{j+1}} - \widehat{R}_{q_{i+1}} \Delta^r \Delta^{j+1} \widehat{R}_{Hq_{j+r+1}} =$$

$$= \widehat{L}_{Hq_{i+r+1} q_{j+1}^{(-i-r-1)}} \Delta^{-i-r-1} - \Delta^{j+r+1} \widehat{R}_{Hq_{j+r+1} q_{i+1}^{(-j-r-1)}} \overset{(14.7.57\text{a})}{=}$$

$$= \widehat{L}_{Hq_{i+r+j+2}} \Delta^{-i-r-1} - \Delta^{j+r+1} \widehat{R}_{Hq_{j+r+i+2}} =$$

$$= \Phi(\widehat{L}_{R_{i+j+r+2}} \Delta^{-i-r-1} - \Delta^{j+r+1} \widehat{R}_{R_{i+j+r+2}}) = \Phi(B^r_{i+1,j+1}). \qquad \blacksquare$$

Упражнение 14.7.60. (i) Покажите, что для $r = 1$, гамильтонова матрнца b^{1HD} $(14.7.48)|_{r=1}$, выраженная в переменных (14.7.36)

$$Q_0 = H^{-1}, \quad Q_1 = -U^{(1)} H^{-1}, \tag{14.7.61}$$

превращается в

$$b^{1HD} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \qquad Q_0 & \qquad\qquad Q_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} Q_0 \\ Q_1 \end{array} & \begin{pmatrix} \widehat{L}_{Q_0} \widehat{R}_{Q_1} \Delta \widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0} \Delta^{-1} \widehat{L}_{Q_1} \widehat{R}_{Q_0} & (\widehat{R}_{Q_0} \Delta^{-1} - \widehat{L}_{Q_0}) \widehat{L}_{Q_1} \widehat{R}_{Q_1} \\ \widehat{L}_{Q_1} \widehat{R}_{Q_1} (\Delta \widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0}) & \widehat{L}_{Q_1} \operatorname{ad}_{Q_1} \widehat{R}_{Q_1} \end{pmatrix} \end{array}; \tag{14.7.62}$$

(ii) Проверьте, что прнменецне к вектору

$$\delta(\ln Q_0) = \begin{pmatrix} Q_0^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{14.7.63}$$

матрнцы b^{1HD} (14.7.62) дает первый поток МКП

$$\partial_{t_1}(Q_0) = Q_0 Q_1 - Q_1^{(-1)} Q_0, \quad \partial_{t_1}(Q_1) = 0; \tag{14.7.64}$$

(iii) Матрица b^{1HD} (14.7.62), кажется, противоречит Теореме 12.6.34. Разрешите это противоречие.

Замечание 14.7.65. Гндродинамическая форма МКП, рассмотренная нами, $\mathcal{L} = \zeta Q_0 + Q_1$ (14.7.31c, 36), является частным случаем $k = 2$ общей связн

$$\{0 = Q_k = Q_{k+1} = \dots\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{14.7.66}$$

накладываемой на оператор Лакса для МКП $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta^{1-i} Q_i$. Это наблюдение подсказывает, что обобщенное понятие гидродинамического представления существует и для других значений k. Это предположение верно. Так как окончательная форма записи этого представления может зависеть от субъективного вкуса и мастерства, мы не станем далее разрабатывать эту соблазнительную тему и оставим ее для развлечения читателя.

14.8 Некоммутативные решеточные аналоги иерархии Бюргерса без вязкости

В этом разделе обсуждаются различные дискретные аналоги иерархии Бюргерса без вязкости. Все они оказываются различными скалярными подиерархиями гидродинамической формы, изученной в предыдущих разделах.

Мы начнем с гидродинамической формы КП (14.3.16):

$$\partial_t(u) = (\widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}[(L^n)_+ (1 - \zeta^{-1} u)^{-1}]), \tag{14.8.1a}$$

$$\partial_t(h) = \mathrm{Res}([(L^n)_+, L]), \tag{14.8.1b}$$

$$L = \zeta + (1 - \zeta^{-1} u)^{-1} h. \tag{14.8.1c}$$

Утверждение 14.8.2. Гидродинамический поток КП (14.8.1) допускает связь

$$\{h = 0\}. \tag{14.8.3}$$

Доказательство. Мы должны показать, что

$$\{\mathrm{Res}([(L^n)_+, L])\}|_{h=0} = 0. \tag{14.8.4}$$

Имеем

$$\{\mathrm{Res}([(L^n)_+, L])\}|_{h=0} = \mathrm{Res}([(L^n)_+|_{h=0}, L|_{h=0}]) = \mathrm{Res}([\zeta^n, \zeta]) = 0. \qquad \blacksquare$$

При связи $\{h = 0\}$, оставшееся уравнение движения для u, (14.8.1a), превращается в

$$\begin{aligned} \partial_t(u) = (\widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}[(L^n)_+|_{h=0} (1 - \zeta^{-1} u)^{-1}) = \\ = (\widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u)(\mathrm{Res}[\zeta^n (1 - \zeta^{-1} u)^{-1}]) = \\ = (\widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u)[\zeta^n (\zeta^{-1} u)^n] = (\widehat{R}_u \Delta - \widehat{L}_u)(u^{(n-1)} \dots u) = u^{(n)} \dots u - u u^{(n-1)} \dots u = \\ = (u^{(n)} - u) u^{(n-1)} \dots u. \end{aligned} \tag{14.8.5}$$

Б квазиклассическом пределе, это превращается в

$$\partial_t(u) = n u_x u^n, \tag{14.8.6}$$

и совпадает с пределом нулевой дисперсии (2.5.31) дифференциальной иерархии Бюргерса (2.5.12).

Упражнение 14.8.7. Выведите формулу (14.8.5) непосредственно из гамильтоновой матрицы B^{HD} (14.2.9).

Упражнение 14.8.8. Покажите, что гидродинамические потоки КП (14.8.1) допускают связь

$$\{u = 0\}, \tag{14.8.9}$$

и что эта связь превращает все эти потоки в тривиальные.

Далее мы рассмотрим результат наложения связи $\{h = u^{(-1)}\}$ (14.3.19) на гидродинамический поток КП (14.8.1). Согласно формулам (14.3.23, 21), получающаяся скалярная иерархия имеет вид

$$\partial_t(u) = (\Delta^2 - \Delta)[\mathrm{Res}(L^n\zeta)], \tag{14.8.10}$$

$$L = (1 - \zeta^{-1}u)^{-1}\zeta. \tag{14.8.11}$$

Классический предел этих потоков, в случае $\Delta = 1$, тривиален. Квазиклассический предел имеет вид

$$\partial_t(u) = \partial_x(\mathrm{Res}(\bar{L}^n\lambda)) = \partial(\mathrm{Res}[(1 - \lambda^{-1}u)^{-n}\lambda^{n+1}] = \mathrm{const}_n\,\partial(u^{n+1}), \tag{14.8.12}$$

где

$$\bar{L} = (1 - \lambda^{-1}u)^{-1}\lambda = \sum \lambda^{j+1}u^j, \tag{14.8.13}$$

$$\mathrm{const}_n = \binom{-n}{n+1}(-1)^{n+1}. \tag{14.8.14}$$

Уравнение (14.8.12) по существу совпадает с (9.8.22); каждое из них служит квазиклассическим пределом соответствующей дискретной иерархии, (14.8.10) и (9.8.11). Эти последние выглядят совершенно различными, но легко убедиться, что их 1-й и 2-й потоки изоморфны.

Гипотеза 14.8.15. Иерархии (14.8.10) и (9.8.11, 12) изоморфны.

Далее, имеем иерархию (14.4.45),

$$\partial_t(H) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[\mathcal{L}, (\mathcal{L}^n)_{\leqslant 0}]), \tag{14.8.16a}$$

$$\mathcal{L} = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H. \tag{14.8.16b}$$

Так как классический предел этой скалярной иерархии тривиален, то квазиклассическому предел существует. Формула (14.5.35), записанная в виде

$$\partial_t(H) = H(1 - \Delta^{-1})\,\mathrm{Res}(L^n) - [H, \Delta^{-1}\,\mathrm{Res}(L^n)], \tag{14.8.17}$$

имеет, согласно формуле (14.5.30), следующий квазиклассический предел:

$$\partial_t(H) = 2H\partial\left(H\frac{\delta(\dots)}{\delta H}H\right)H. \tag{14.8.18}$$

Формулы (14.5.16, 20) показывают, что иерархия (14.8.18) отлична от предыдущих, так как ее квазиклассический предел имеет вид

$$\partial_t(H^{-1}) = \mathrm{const}_n\,\partial_x(H^n), \quad \partial_t(H) = -\,\mathrm{const}_n\,H\partial_x(H^n)H. \tag{14.8.19}$$

Далее, имеем иерархию (14.6.34):

$$\partial_P(h) = \mathrm{Res}(P_+h - h\zeta^{-N-1}P_+\zeta^{N+1}), \tag{14.8.20a}$$

$$P = L^n, \quad L = \zeta^N(1 + h\zeta^{-1})^{-1}. \tag{14.8.20b}$$

Так как классический предел этой иерархии тривиален, квазиклассический существует. Он, точно так же, изоморфен некоторой из уже обсуждавшихся в этом разделе иерархий.

Замечание 14.8.21. Другие скалярные иерархии появятся в главе 15. (См. также уравнение (9.8.32).)

14.9 Одевающая форма гидродинамического представления

В этом разделе мы распространяем понятие гидродинамического представления на одевающие пространства и затем показываем, что в них они не существуют.

Суть гидродинамического представления в лаксовых пространствах заключается в возможности свести бесконечно-компонентные динамические системы, типа КП или МКП, к уравнениям на первые две компоненты, причем это сведение имеет весьма специальный вид. Отбрасывая это последнее требование, приходим к понятию обобщенного гидродинамического представлении, когда способ выражении всех переменных через первые две не уточнится. Дальнейшие обобщения возможны, если вместо двух рассматривать первые $\ell > 2$ компонент, — сюда мы не будем углубляться.

Имея гидродинамические представления (14.2.2)

$$r_{i+2} = r_1^{(i+1)} \frac{1}{r_0^{(i+1)}} \dots r_1^{(1)} \frac{1}{r_0^{(1)}} r_1 \frac{1}{r_0} r_0, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.9.1}$$

где $r_i = q_i$ и $r_i = Q_i$ для иерархий КП и МКП, соответственно; и зная о существовании одевающей точки зрения на динамику в пространстве Лакса, выраженную уравнениями (9.2.3) и (9.4.3):

$$L = K\zeta K^{-1}, \tag{14.9.2}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}\zeta\mathcal{K}^{-1}, \tag{14.9.3}$$

$$L = \zeta + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} q_j, \quad K = \sum_{i\geqslant 0} \chi_i \zeta^{-i}, \quad \chi_0 = 1, \tag{14.9.4}$$

$$\mathcal{L} = \zeta \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} Q_j, \quad \mathcal{K} = W \sum_{i\geqslant 0} \tau_i \zeta^{-j}, \quad \tau_0 = 1; \tag{14.9.5}$$

можем ли мы, имея все это, согласовать эти две конструкции?

Чтобы подобрать ключ к проблеме, распишем тождества (14.9.2, 3):

$$\begin{gathered} LK = \left(\zeta + \sum \zeta^{-j} q_j\right) \sum \chi_i \zeta^{-i} = \zeta + \sum_{s\geqslant 0} \chi_{s+1}^{(1)} \zeta^{-s} + \sum (q_i \chi_i)^{(-j)} \zeta^{-i-j} = \\ = K\zeta = \sum \chi_i \zeta^{-i+1} = \zeta + \sum \chi_{s+1} \zeta^{-s} \quad \Rightarrow \\ \sum_{i+j=s} (q_i \chi_i)^{(-j)} = (1 - \Delta)(\chi_{s+1}), \quad s \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{14.9.6}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\mathcal{K} = \zeta\left(\sum \zeta^{-j} Q_j\right) W \sum \tau_i \zeta^{-i} = \sum\sum (Q_j W \tau_i)^{(-j)} \zeta^{-i-j} = \\ = \mathcal{K}\zeta = \left(W \sum \tau_i \zeta^{-i}\right)\zeta = \zeta \sum (W\tau_i)^{(-1)} \zeta^{-i} \quad \Rightarrow \\ \sum_{i+j=s} (Q_j W \tau_i)^{(-j)} = (W\tau_s)^{(-1)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \end{gathered} \tag{14.9.7}$$

Формулы (14.9.6) показывают, что q_s можно выразить через $\chi_1, \dots, \chi_{s+1}$; формулы (14.9.7) показывают, что Q_s можно выразить через $W, \tau_0, \dots, \tau_s$. Таким образом, гидродинамические формулы (14.9.1) в лаксовых пространствах приводят к бесконечному числу связей в соответствующих одевающих пространствах. Поэтому естественно определить аналог гидродинамического представления в одевающих пространствах, как разрешение всех этих связей в виде:

$$\chi_{s+3} = \{\text{функции от } \chi_1, \chi_2\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{14.9.8}$$

$$\tau_{s+2} = \{\text{функции от } W, \tau_1\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{14.9.9}$$

Ниже мы увидим, что такое разрешение не возможно.

Начнем со случая КП (14.9.6). Три первых соотношений, для $s = 0, 1, 2$, дают:

$$q_0 = (1-\Delta)(\chi_1), \tag{14.9.10}$$

$$q_0\chi_1 + q_1^{(-1)} = (1-\Delta)(\chi_2), \tag{14.9.11}$$

$$q_0\chi_2 + (q_1\chi_1)^{(-1)} + q_2 = (1-\Delta)(\chi_3). \tag{14.9.12}$$

Мы покажем, что не существует функции $\chi_3 = \chi_3(\chi_1, \chi_2)$ для которой уравнение (14.9.12) превратилось бы в тождество, если q_2 в этом уравнении заменить на

$$q_2 = q_1^{(1)}\frac{1}{q_0^{(1)}}q_1. \tag{14.9.13}$$

Идея такова: правая часть равенства (14.9.12) ~ 0. Левая часть является полиномом степени 2 по χ_2, если уравнения (14.9.10, 11) использовать для выражения q_0 и q_1 через χ_1 и χ_2 :

$$q_0 = (1-\Delta)(\chi_1), \tag{14.9.14a}$$

$$q_1 = (\Delta-\Delta^2)(\chi_2) - [(\Delta-\Delta^2)(\chi_1)]\chi_1^{(1)}. \tag{14.9.14b}$$

Так как левая часть уравнения (14.9.12) тривиальна, таков же и ее старший (квадратичный) член по χ_2, который равен χ_2-символу q_2 :

$$[\Delta^2(1-\Delta)(\chi_2)]\frac{1}{(\Delta-\Delta^2)(\chi_1)}[\Delta(1-\Delta)(\chi_2)]. \tag{14.9.15}$$

Но этот член не может быть тривиальным, так как в квазиклассическом пределе $\Delta = \exp(\varepsilon\partial_x)$ он равен

$$\varepsilon\chi_{2,x}\frac{1}{\chi_{1,x}}\chi_{2,x} + O(\varepsilon^2), \tag{14.9.16}$$

а это, очевидно, нетривиальное выражение.

Далее, случай МКП (14.9.7). Три первых уравнений (14.9.7), при $s = 0, 1, 2$, дают

$$Q_0W = W^{(-1)}, \tag{14.9.17}$$

$$Q_0W\tau_1 + (Q_1W)^{(-1)} = (W\tau_1)^{(-1)}, \tag{14.9.18}$$

$$Q_0W\tau_2 + (Q_1W\tau_1)^{(-1)} + (Q_2W)^{(-2)} = (W\tau_2)^{(-1)}. \tag{14.9.19}$$

Подставляя уравнения (14.9.17, 18) в уравнение (14.9.19), находим

$$W^{(-1)}\tau_2 + [(W\tau_1)^{(-1)} - W^{(-1)}\tau_1]\tau_1^{(-1)} + (Q_2W)^{(-2)} = W^{(-1)}\tau_2^{(-1)}, \tag{14.9.20}$$

или

$$[(\Delta^{-1} - 1)(\tau_1)]\tau_1^{(-1)} + W^{(-1)-1}(Q_2 W)^{(-2)} = (\Delta^{-1} - 1)(\tau_2). \tag{14.9.21}$$

Покажем, что если в последнем уравнении τ_2 считать функцией от W и τ_1, а Q_2 заменить выражением

$$Q_2 = Q_1^{(-1)} \frac{1}{Q_0^{(1)}} Q_1 = \dots \tag{14.9.22}$$

то уравнение (14.9.21) становится бессмысленным. Действительно, правая часть ~ 0. Для левой часть, в квазиклассическом пределе, находим

$$Q_0 \overset{(14.9.17)}{=} 1 + O(\varepsilon),$$

$$Q_1 W \overset{(14.9.18)}{=} \Delta[W^{(-1)}(\tau_1^{(-1)} - \tau_1)] = -W\tau_{1,x}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow$$

$$Q_1 = -\varepsilon W \tau_{1,x} W^{-1} + O(\varepsilon^2) \quad \Rightarrow$$

$$Q_2 \overset{(14.9.22)}{=} \varepsilon^2 W(\tau_{1,x})^2 W^{-1} + O(\varepsilon^3) \quad \Rightarrow$$

$$\text{левая часть (14.9.21)} = -\varepsilon\tau_1\tau_{1,x} + O(\varepsilon^2) + \varepsilon^2(\tau_{1,x})^2 + O(\varepsilon^3) = -\varepsilon(\tau_1\tau_{1,x} + O(\varepsilon)) \not\sim 0.$$

Эта история — хотя в ней нет ничего правдивого — убедит, я надеюсь, моих читателей в пользе математического анализа.

Раймонд Смуллиан, *Эта книга не нуждается в названии*

Глава 15

Релятивистская цепочка Тоды и родственные системы

> Цель хорошего названия состоит в том, чтобы сделать все последующее по возможности излишним для того, кто что-либо знает о предмете.
>
> Сэмюэл Батлер, *Записные книжки*

Эта глава является дискретным аналогом квазирелятивистской главы 7. Мы определяем квазирелятивистский анзац, показываем, что он корректно определен и приводит к бесконечной коммутирующей иерархии с бесконечным числом интегралов. Затем мы находи гамильтоновы, Гиббонсовские и гидродинамические формы, и сингулярное решение квазирелятивистской иерархии КП. Глава заканчивается деформациями иерархии МКП.

15.1 Квазирелятивистский анзац и его основные свойства

Этот раздел является решеточным аналогом §7.1. Мы определяем квазирелятивистскую деформацию дискретной иерархии КП, проверяем, что она коммутативна, и затем проверяем, что в простейшем варианте она сводится к релятивистской цепочке Тоды.

В обозначениях КП-типа из §9.1, пусть

$$L = \zeta + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i} q_i \tag{15.1.1}$$

есть оператор Лакса дискретной иерархии КП

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15.1.2}$$

Пусть ε — формальный параметр, неформально обратный к скорости света в квадрате. Положим

$$\mathcal{L} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1} L = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}\Big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i} q_i\Big) \in \widetilde{\mathcal{O}}, \tag{15.1.3}$$

где $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}[[\varepsilon]]$, $\mathcal{O} = C((\zeta^{-1}))$, $C = C_q = R\langle q_i^{(s)}\rangle$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}$. Пусть $S : C[[\zeta^{-1}]][[\varepsilon]] \to \widetilde{C} = C[[\varepsilon]]$ обозначает следующий релятивистский символ:

$$S\Big(\sum_s \bar{r}_s\zeta^{-s}\Big) = \sum_s \bar{r}_s\varepsilon^s, \quad \bar{r}_s \in \widetilde{C}. \tag{15.1.3$'$}$$

Для каждого $\mathcal{P} = \mathcal{L}^n$, $n \in \mathbb{N}$, определим эволюционное дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ на C, со значениями в $C[[\varepsilon]]$, по формуле

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-)]. \tag{15.1.4}$$

Не вполне ясно, имеет ли эта формула смысл, так что прежде всего разрешим этот вопрос.

Теорема 15.1.5. Дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ корректно определено.

Доказательство. Обозначим

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-), \quad \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}_-). \tag{15.1.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(L) = (1-\varepsilon\zeta)\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) &= (1-\varepsilon\zeta)[\mathcal{P}_1, (1-\varepsilon\zeta)^{-1}L] = (1-\varepsilon\zeta)[(1-\varepsilon\zeta)^{-1}L, \mathcal{P}_2] = \\ &= (1-\varepsilon\zeta)\mathcal{P}_1(1-\varepsilon\zeta)^{-1}L - L\mathcal{P}_1 = \qquad (15.1.7a) \\ &= L\mathcal{P}_2 - (1-\varepsilon\zeta)\mathcal{P}_2(1-\varepsilon\zeta)^{-1}L. \qquad (15.1.7b) \end{aligned}$$

Если оборвать L :

$$L = \zeta + \sum_{i=0}^{M} \zeta^{-i} q_i, \tag{15.1.8}$$

то, в силу формулы (15.1.7a),

$$\partial_{\mathcal{P}}(L) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\geqslant -M}. \tag{15.1.9}$$

Остается показать, что

$$\partial_{\mathcal{P}}(L) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{<1}. \tag{15.1.10}$$

Лемма 15.1.11. Для любого $\mathcal{R} \in \widetilde{\mathcal{O}}_-$,

$$[\mathcal{R} - S(\mathcal{R})](1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1} \in \widetilde{\mathcal{O}}_-. \tag{15.1.12}$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{R} = \bar{r}\zeta^{-s-1}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{15.1.13}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{R} - S(\mathcal{R}) = \bar{r}(\zeta^{-s-1} - \varepsilon^{s+1}) &= \bar{r}\sum_{\ell=0}^{s} \zeta^{-\ell}\varepsilon^{s-\ell}(\zeta^{-1} - \varepsilon) = \\ &= \bar{r}\sum_{\ell=0}^{s} \zeta^{-\ell-1}\varepsilon^{s-\ell}(1 - \varepsilon\zeta). \qquad \blacksquare \qquad (15.1.14) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{P}_2 = \bar{\mathcal{P}}(1-\varepsilon\zeta), \tag{15.1.15}$$

при некотором

$$\bar{\mathcal{P}} = p\zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{-}. \tag{15.1.16}$$

Тогда уравнение (15.1.7b) дает

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}(L) = L\bar{\mathcal{P}}(1-\varepsilon\zeta) - (1-\varepsilon\zeta)\bar{\mathcal{P}}L = \\ = [L,\bar{\mathcal{P}}] + \varepsilon(\zeta\bar{\mathcal{P}}L - L\bar{\mathcal{P}}\zeta).\end{aligned} \tag{15.1.17}$$

Член $\varepsilon(\zeta\bar{\mathcal{P}}L - L\bar{\mathcal{P}}\zeta)$ в целом дает вклад

$$\varepsilon[\zeta(p\zeta^{-1}+\dots)(\zeta+\dots) - (\zeta+\dots)(p\zeta^{-1}+\dots)\zeta] \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\leqslant 0}.$$

То же с членом $[L,\bar{\mathcal{P}}]$. Тем самым формула (15.1.10) доказана. ∎

Упражнение 15.1.18. Допустим, мы взяли оператор Лакса $\mathcal{L}$ (15.1.3) в более общей форме

$$\mathcal{L} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}\Big(\zeta^N + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{N-1-i}q_i\Big). \tag{15.1.19}$$

В каком именно месте нарушится доказательство Теоремы 15.1.5?

Покажем, что все квазирелятивистские потоки (15.1.4) коммутируют. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{L}^{n_1}$ — некоторая другая степень $\mathcal{L}$.

Теорема 15.1.20. Эволюционные дифференцирования $\partial_{\mathcal{P}}$ и $\partial_{\mathcal{R}}$ коммутируют.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$[\partial_{\mathcal{P}},\partial_{\mathcal{R}}](\mathcal{L}) = 0.$$

Повторяя шаг за шагом доказательство Теоремы 7.1.46, приходим к тождеству (7.1.61): для любых $X, Y \in \widetilde{C}[[\zeta^{-1}]]$,

$$S([S(X),Y] + [X,S(Y)]) = S([X,Y]) + [S(X),S(Y)]. \tag{15.1.21}$$

Выберем $X = x\zeta^{-k}$, $Y = y\zeta^{-s}$, $x, y \in \widetilde{C}$, $k, s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$[S(X),Y] = \varepsilon^k[x, y\zeta^{-s}] = \varepsilon^k[xy - yx^{(-s)}]\zeta^{-s},$$

$$S([S(X),Y]) = \varepsilon^{k+s}[xy - yx^{(-s)}] \quad \Rightarrow$$

$$\{\text{левая часть (15.1.21)}\} = [xy - yx^{(-s)} - yx + xy^{(-k)}]\varepsilon^{k+s}, \tag{15.1.22}$$

$$[X,Y] = [xy^{(-k)} - yx^{(-s)}]\zeta^{-k-s},$$

$$S([X,Y]) = [xy^{(-k)} - yx^{(-s)}]\varepsilon^{k+s}, \tag{15.1.23}$$

$$[S(X),S(Y)] = [\varepsilon^k x, \varepsilon^s y] = \varepsilon^{k+s}(xy - yx), \tag{15.1.24}$$

и $\{(15.1.22) = (15.1.23) + (15.1.24)\}$. ∎

Как следствие, квазирелятивистская иерархия КП (15.1.4) имеет бесконечный набор общих интегралов $\{\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n)\}$. В §15.3 мы определим гамильтонову структуру этой иерархии. Сейчас же, давайте рассмотрим простейший возможный поток: первый поток при максимально оборванном L :

$$L = \zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1. \tag{15.1.25}$$

Тогда

$$\mathcal{P}_- = \mathcal{L}_- = [(1-\varepsilon\zeta)^{-1}(\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1)]_- = \Big[\sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s\zeta^s(\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1)\Big]_- = \zeta^{-1}q_1, \tag{15.1.26}$$

$$S(\mathcal{P}_-) = \varepsilon q_1^{(-1)}, \tag{15.1.27}$$

$$\mathcal{P}_- - S(\mathcal{P}) = q_1^{(-1)}(\zeta^{-1} - \varepsilon) = \zeta^{-1}q_1(1-\varepsilon\zeta). \tag{15.1.28}$$

Следовательно, по формуле (15.1.17),

$$\begin{gathered}\partial_{\mathcal{P}}(L) = \partial_{\mathcal{P}}(q_0) + \varepsilon^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(q_1) = [\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1, \zeta^{-1}q_1]_+ \\ +\varepsilon\big[\zeta\zeta^{-1}q_1(\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1) - (\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1)\zeta^{-1}q_1\zeta\big] = \\ = q_1 - q_1^{(-1)} + \zeta^{-1}[q_0^{(1)}q_1 - q_1q_0] + \varepsilon\big([q_1q_0 - q_0q_1^{(-1)}] + \zeta^{-1}[q_1^{(1)}q_1 - q_1q_1^{(-1)}]\big) \quad \Rightarrow\end{gathered} \tag{15.1.29}$$

$$\partial_{t_1}(q_0) = (1-\Delta^{-1})(q_1) + \varepsilon[q_1q_0 - q_0q_1^{(-1)}], \tag{15.1.30a}$$

$$\partial_{t_1}(q_1) = q_0^{(1)}q_1 - q_1q_0 + \varepsilon(\Delta - 1)[q_1q_1^{(-1)}]. \tag{15.1.30b}$$

Это есть некоммутативный аналог релитивистской цепочки Тоды.

Упражнение 15.1.31. Покажите, что

$$\bar{H}_0 = \varepsilon^{-1}\ln(1+\varepsilon q_0) \tag{15.1.32}$$

является интегралом релятивистской цепочки Тоды (15.1.30).

Теорема 15.1.33. **$\bar{H}_0 = \varepsilon^{-1}\ln(1+\varepsilon q_0)$ служит интегралом для всей иерархии релятивистской цепочки Тоды, и даже всей квазирелятивистской иерархии КП.**

Доказательство. Докажем сначала тождество

$$\partial_{\mathcal{P}}(q_0) = [\varepsilon^{-1}(\Delta - 1) + \widehat{R}_{q_0}\Delta - \widehat{L}_{q_0}]S(\mathcal{P}_-). \tag{15.1.34}$$

Обозначнм временно

$$\mathcal{P}_- = \sum_{s\geqslant 0}\varphi_s\zeta^{-s-1}, \quad X = \varepsilon^{-1}\mathcal{S}(\mathcal{P}_-) = \sum_{s\geqslant 0}\varphi_s\varepsilon^s. \tag{15.1.35}$$

Согласно формуле (15.1.7b), $\partial_{\mathcal{P}}(q_0)$ равно

$$\operatorname{Res}\Big[\big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i\big)\sum_{s\geqslant 0}\varphi_s(\zeta^{-s-1} - \varepsilon^{s+1})\Big] - \tag{15.1.36a}$$

$$-\operatorname{Res}\Big[(1-\varepsilon\zeta)\Big(\sum_{s\geqslant 0}\varphi_s\zeta^{-s-1} - \sum_{s\geqslant 0}\varphi_s\varepsilon^{s+1}\Big)\Big(\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\zeta^{k+1} + \sum_{k,i\geqslant 0}\varepsilon^k\zeta^{k-i}q_i\Big)\Big]. \tag{15.1.36b}$$

Первое выражение, (15.1.36a), равняется

$$\varphi_0^{(1)} - \varepsilon q_0 X. \tag{15.1.37a}$$

Второе выражение, (15.1.36b), переписывается в виде

$$-\operatorname{Res}\Big[\Big(\sum\varphi_s\zeta^{-s-1} - \varepsilon\sum\varphi_s^{(1)}\zeta^{-s} - \varepsilon X + \varepsilon^2X^{(1)}\zeta\Big)\Big(\sum\varepsilon^k\zeta^{k+1} + \sum\varepsilon^k\zeta^{k-i}q_i\Big)\Big],$$

и равняется

$$-\sum_{s\geqslant 0}\varphi_s\Big(\varepsilon^s+\sum_{i\geqslant 0}\varepsilon^{s+1+i}q_i\Big)+\varepsilon\Big(\sum_{s\geqslant 0}\varphi^{(1)}_{s+1}\varepsilon^s+\sum_{s,i}\varphi^{(1)}_s\varepsilon^{s+i}q_i\Big)+\varepsilon X\sum\varepsilon^i q_i-$$

$$-\varepsilon^2X^{(1)}\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k q_{k+1}=-X+(X-\varphi_0)^{(1)}+\varepsilon X^{(1)}q_0. \qquad (15.1.37\text{b})$$

Складывая выражения (15.1.37), получаем

$$\partial_{\mathcal{P}}(q_0)=-X+X^{(1)}+\varepsilon(X^{(1)}q_0-q_0X), \qquad (15.1.38)$$

это и есть тождество (15.1.34).

Далее,

$$\partial_{\mathcal{P}}[\ln(1+\varepsilon q_0)]=\partial_{\mathcal{P}}\Big[\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\varepsilon^n q_0^n/n\Big]\approx$$

$$\approx\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\varepsilon^n q_0^{n-1}\partial_{\mathcal{P}}(q_0)\ \overset{(15.1.38)}{=}$$

$$=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\varepsilon^n q_0^{n-1}[(-X+X^{(1)})_+\varepsilon(X^{(1)}q_0-q_0X)]\approx$$

$$\approx\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\varepsilon^{n+1}[-q_0^n+(q_0^n)^{(-1)}]X+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\varepsilon^{n+1}[(q_0^n)^{(-1)}-q_0^n]X=0. \qquad \blacksquare$$

15.2 На краю Вселенной

Большое, напечатанное красным объявление, расклееное на всех заборах и фонарях города Глендэйл, Калифорния:

> Слушайте рассказ о Великом Открытии
> Астронома-Евангелиста Кнокса
>
> АД ОБНАРУЖЕН!
>
> В наши дни исследований и открытий, с достоверностью обнаружена планета, на которой пламя ада поглотит неправедных. Замечательные слайды "Горящего Мира" будут показываться в течение просветляющей лекции
>
> "УЧАСТЬ ГРЕШНИКА"
>
> М-р Кнокс ответит на вопрос — "Как Долго Будет Гореть Ад?"
>
> Knox Tabernacle, Corner Brand and California

В этом разделе мы показываем, что квазирелятивистская дискретная иерархия КП допускает связь

$$\{q_0=-\text{скорость света в квадрате}\}. \qquad (15.2.1)$$

Квазирелятивистские конструкции из предыдущего раздела регулярны по ε; при $\varepsilon=0$ мы получаем старую, нерелятивистскую, дискретную иерархию КП. Эта картина согласуется с общим духом обобщений физических теорий: новая, более точная, теория является *регулярной деформацией* старой. Например, специальная теория относительности является регулярной деформацией Ньютоновой механики, с ("малым") параметром деформации обратным к скорости света. Явлениям, экспериментам, формулам, или конструкциям, *сингулярно* зависящим от параметра деформации невозможно придать очевидный физический смысл. Тем не менее.

Уравнение движения для q_0 в релятивистской цепочке Тоды, (15.1.30a), допускает очевидное решение

$$q_0 = -\varepsilon^{-1}. \tag{15.2.2}$$

Оставшееся уравнение движения для q_1, (15.1.30b), *регулярно* зависит от ε :

$$\partial_{t_1}(q_1) = \varepsilon(\Delta - 1)(q_1 q_1^{(-1)}), \tag{15.2.3}$$

дискретная некоммутативная версия невязкого уравнения Бюргерса.

Теорема 15.2.4. Квазирелятивистская иерархия КП (15.1.4) допускает сингулярную связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$.

Доказательство. С учетом формулы (15.1.17), нужно показать, что

$$\mathrm{Res}\{\left([L, \bar{\mathcal{P}}] + \varepsilon(\zeta\bar{\mathcal{P}}L - L\bar{\mathcal{P}}\zeta)\right)\big|_{q_0=-\varepsilon^{-1}}\} = 0. \tag{15.2.5}$$

Имеем, с

$$\bar{\mathcal{P}}\big|_{q_0=-\varepsilon^{-1}} = p_1\zeta^{-1} + p_2\zeta^{-2} + \cdots : \tag{15.2.6}$$

$$[L, \bar{\mathcal{P}}]\big|_{q_0=\varepsilon^{-1}} = [\zeta - \varepsilon^{-1} + \ldots,\ p_1\zeta^{-1} + p_2\zeta^{-2} + \ldots] = (\Delta - 1)(p_1) + \ldots, \tag{15.2.7}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon(\zeta\bar{\mathcal{P}}L - L\bar{\mathcal{P}}\zeta)\big|_{q_0=-\varepsilon^{-1}} = \\ = \varepsilon\zeta(p_1\zeta^{-1} + p_2\zeta^{-2} + \ldots)(\zeta - \varepsilon^{-1} + \ldots) - \varepsilon(\zeta - \varepsilon^{-1} + \ldots)(p_1\zeta^{-1} + p_2\zeta^{-2} + \ldots)\zeta = \\ = \varepsilon[p_1^{(1)}\zeta - p_1^{(1)}\varepsilon^{-1} + p_2^{(1)} + \ldots] - \varepsilon[\zeta p_1 + p_2^{(1)} - \varepsilon^{-1}p_1 + \ldots] = (1 - \Delta)(p_1) + \ldots, \end{gathered} \tag{15.2.8}$$

где "…" обозначает члены отрицательной степени по ζ. Складывая выражения (15.2.7) и (15.2.8) и беря вычет, получаем ноль. ▮

Гипотеза 15.2.9. Оставшиеся уравнения движения для $q_1, \ldots$, получающиеся при наложении связи $q_0 = -\varepsilon^{-1}$ на квазирелятивистскую иерархию КП (15.1.4) *регулярны* по ε.

Замечание 15.2.10. Каковы *причины* лежащие в основе существования связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$? Провалиться мне на месте, если я знаю. Очень похоже, что существует по крайней мере еще одна подобная связь.

Упражнение 15.2.11. (i) Покажите, что уравнения релятивистской цепочки Тоды (15.1.30) допускают связь

$$q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1, \tag{15.2.12}$$

при которой они сводятся к уравнениям

$$\partial_t(q_1) = \varepsilon q_1(1 - \Delta^{-1})(q_1); \tag{15.2.13}$$

(ii) Покажите, что если $q_2 \neq 0$ в квазирелятивистской иерархии КП (15.1.4), то связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$ не может быть наложена.

Вы и я являемся исключением из законов природы: Вы поднимаетесь благодаря своему глубокомыслию, а я тону благодаря своему легкомыслию.

Сидней Смит своему брату

15.3 Гамильтонов формализм для квазирелятивистской иерархии КП

В этом разделе мы выводим гамильтонову структуру квазирелятивистской иерархии КП, показываем, что эта структура гамильтоново изоморфна ее нерелятивистской версии, и выводим, как следствие этого изоморфизма, квазирелятивистскую иерархию МКП.

В обозначениях §15.1, пусть

$$H_n = n^{-1}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15.3.1}$$

$$\mathcal{L}^n = \sum_s p_s(n)\zeta^s. \tag{15.3.2}$$

Формула вычетов дает:

$$\begin{aligned} d(H_{n+1}) &\approx \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})] = \operatorname{Res}[\mathcal{L}^n(1-\varepsilon\zeta)^{-1}\sum \zeta^{-j}dq_j] \approx \\ &\approx \sum_j dq_j \operatorname{Res}\Big[\sum_{sk} p_s(n)\varepsilon^k\zeta^{s+k-j}\Big] = \sum_j dq_j \sum_k p_{j-k}(n)\varepsilon^k \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{15.3.3}$$

$$\frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j} = \sum_{k\geqslant 0} p_{j-k}(n)\varepsilon^k, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{15.3.4}$$

Обозначим

$$x_j = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta q_j}, \quad \widehat{x} = \sum_{j\geqslant 0} x_j\zeta^j. \tag{15.3.5}$$

Систему уравнений (15.3.4) можно преобразовать в эквивалентную систему

$$x_0 = \sum_{k\geqslant 0} p_{-k}(n)\varepsilon^k, \tag{15.3.6a}$$

$$x_{j+1} - \varepsilon x_j = p_{j+1}(n), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{15.3.6b}$$

Далее, для $\mathcal{P} = \mathcal{L}^n$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-) &= \sum_{j\geqslant 0} p_j(n)\zeta^j + \sum_{k>0} p_{-k}(n)\varepsilon^k = \\ &= \sum_{j>0} p_j(n)\zeta^j + \sum_{k\geqslant 0} p_{-k}(n)\varepsilon^k \overset{(15.3.6)}{=} \\ = \sum_{j\geqslant 0}(x_{j+1} - \varepsilon x_j)\zeta^{j+1} + x_0 &= \sum_{j\geqslant 0} x_j\zeta^j(1-\varepsilon\zeta) = \widehat{x}(1-\varepsilon\zeta). \end{aligned} \tag{15.3.7}$$

Следовательно, по формуле (15.1.7a)

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(L) &= (1-\varepsilon\zeta)[\widehat{x}(1-\varepsilon\zeta), (1-\varepsilon\zeta)^{-1}L] = (1-\varepsilon\zeta)\widehat{x}L - \widehat{L}x(1-\varepsilon\zeta) = \\ &= [(1-\varepsilon\zeta)\widehat{x}L - L\widehat{x}(1-\varepsilon\zeta)]_{\leqslant 0} = [(1-\varepsilon\zeta)\widehat{x}L_{\leqslant 0} - L_{\leqslant 0}\widehat{x}(1-\varepsilon\zeta)]_{\leqslant 0} \quad \Rightarrow \end{aligned} \tag{15.3.8}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(q_i) = \sum_{j\leqslant 0} B_{ij}^{\text{КП}\varepsilon}\left(\frac{\delta \operatorname{Res}(\mathcal{L}\mathcal{P})}{\delta q_i}\right) = \sum B_{ij}^{\text{КП}\varepsilon}(x_j), \tag{15.3.9}$$

с некоторой матрицей $B^{\text{КП}\epsilon}$ линейной по q_i. Чтобы идентифицировать эту матрицу, проделаем стандартные вычисления

$$B^{\text{КП}\varepsilon}(\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} = \sum B^{\text{КП}\epsilon}_{ij}(x_j)y_i = \sum \partial_P(q_i)y_i = \sum \operatorname{Res}[\partial_P(L)\zeta^i y_i] \overset{(15.3.8)}{=}$$

$$= \operatorname{Res}([(1-\varepsilon\zeta)\widehat{x}L_{\leqslant 0} - L_{\leqslant 0}\widehat{x}(1-\varepsilon\zeta)]\widehat{y}) \approx \operatorname{Res}(\widehat{L}_{\leqslant 0}[\widehat{y}(1-\varepsilon\zeta)\widehat{x} - \widehat{x}(1-\varepsilon\zeta)\widehat{y}]) = \tag{15.3.10}$$

$$= \operatorname{Res}(L_{\leqslant 0}[\widehat{y},\widehat{x}]) - \varepsilon \operatorname{Res}[L_{\leqslant 0}(\widehat{y}\zeta\widehat{x} - \widehat{x}\zeta\widehat{y})] \quad \Rightarrow \tag{15.3.11}$$

$$-B^{\text{КП}\varepsilon} = B^0 - \varepsilon B^1, \tag{15.3.12}$$

где B^r гамильтонова матрица ассоциированная с алгеброй Ли $\mathcal{G}^r$ ассоциативного кольца $R[[\zeta]]\zeta^r$. Формула (15.3.10) показывает также, что $-B^{\text{КП}\varepsilon}$ есть гамильтонова матрица ассоциированная с алгеброй Ли $\mathcal{G}_{(\varepsilon)}$ ассоциативного кольца $R[[\zeta]](1-\varepsilon\zeta)$. Согласно формуле (12.2.14)

$$B^r_{ij} = \Delta^{-r-j}\widehat{L}_{q_{i+j+r}} - \widehat{R}_{q_{i+j+r}}\Delta^{r+i} \quad \Rightarrow \tag{15.3.13}$$

$$B^{\text{КП}\epsilon}_{ij} = (\widehat{R}_{q_{i+j}}\Delta^i - \Delta^{-j}\widehat{L}_{q_{i+j}}) - \varepsilon(\widehat{R}_{q_{i+j+1}}\Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{q_{i+j+1}}). \tag{15.3.14}$$

Как в §7.2, обратимый гомоморфизм алгебры Ли $\varphi : \mathcal{G}_{(\varepsilon)} \to \mathcal{G}_{(0)} = \mathcal{G}^0$,

$$\mathcal{G}_{(\varepsilon)} \ni \widehat{x} \mapsto \widehat{X} = \widehat{\varphi(\boldsymbol{x})} = \widehat{x}(1-\varepsilon\zeta) \in \mathcal{G}_{(0)}, \tag{15.3.15}$$

$$X_i = x_i - \varepsilon x_{i-1} = \varphi(\boldsymbol{x})_i = \sum \varphi_{ij}(x_j) \quad \Rightarrow \tag{15.3.16}$$

$$\varphi_{ij} = \delta^j_i - \varepsilon\delta^{j+1}_i, \tag{15.3.17}$$

индуцирует обратимое гамильтоново отображение $\widehat{\Phi} : C_q \to C_{\bar{q}}$,

$$\widehat{\Phi}(q_i) = [\varphi^\dagger(\bar{\boldsymbol{q}})]_i = \sum_j (\varphi^\dagger)_{ij}(\bar{q}_j) = \sum \varphi_{ji}(\bar{q}_j) = \bar{q}_i - \varepsilon\bar{q}_{i+1}, \tag{15.3.18}$$

между гамильтоновыми матрицами $B^{\text{КП}\epsilon} = B^{\text{КП}\epsilon}(q)$ и $B^{\text{КП}} = B^{\text{КП}0} = B^{\text{КП}}(\bar{q})$. Комбинируя это гамильтоново отображение с гамильтоновым преобразованием Миуры $\Phi : C_{\bar{q}} \to C_{V,Q}$ между иерархиями КП и МКП из §12.3, приходим к гамильтонову отображению $\Phi\widehat{\Phi} : C_q \to C_{V,Q}$, которое переводит гамильтонианы $\operatorname{Res}([(1-\varepsilon\zeta)^{-1}L]^n)$ в соответствующие гамильтонианы в кольце $C_{V,Q}$; набор потоков, порожденных этими гамильтонианами образует то, что можно назвать квазирелятивистской иерархией МКП.

Упражнение 15.3.19. Покажите, что гамильтониан $H_1 = \operatorname{Res}(\mathcal{L}) = q_0 + \varepsilon q_1$ принадлежит ядру гамильтоновой структуры $B^{\text{КП}\varepsilon}$ (15.3.12), то есть

$$\sum_{j\geqslant 0} B^{\text{КП}\epsilon}_{ij}\left(\frac{\delta H_1}{\delta q_j}\right) = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}_+. \tag{15.3.20}$$

Упражнение 15.3.21. Согласно формулам (15.3.12, 13), гамильтонова матрица релятивистской цепочки Тоды равна

$$B^{RT} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad\quad q_0 & \quad\quad\quad\quad q_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_0 \\ q_1 \end{array} & \begin{pmatrix} -\operatorname{ad}_{q_0} + \varepsilon(\Delta^{-1}\widehat{L}_{q_1} - \widehat{R}_{q_1}\Delta) & \widehat{R}_{q_1} - \Delta^{-1}\widehat{L}_{q_1} \\ -\widehat{L}_{q_1} + \widehat{R}_{q_1}\Delta & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{15.3.22a}$$

(i) Покажите, что

$$H_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^2) \approx \frac{1}{2}(q_0 + \varepsilon q_1)^2 + q_1(1 + \varepsilon q_0^{(1)} + \varepsilon^2 q_1^{(1)}); \tag{15.3.22b}$$

(ii) Проверьте, что матрица B^{RT} (15.3.22a) и гамильтониан H_2 (15.3.22b) порождают уравнения движения релятивистской цепочки Тоды (15.1.30);
(iii) Покажите, что матрица B^{RT} (15.3.22a) и гамильтониан $-\varepsilon^{-1}\bar{H}_0$ (15.1.32) порождают уравнения движения

$$\partial_t(q_0) = \frac{1}{1+\varepsilon q_0^{(1)}}q_1 - q_1^{(-1)}\frac{1}{1+\varepsilon q_0^{(-1)}} = (1-\Delta^{-1})(q_1) + O(\varepsilon), \tag{15.3.23a}$$

$$\partial_t(q_1) = \frac{q_1}{\varepsilon}\frac{1}{1+\varepsilon q_0} - \frac{1}{\varepsilon q_0^{(1)}}\frac{q_1}{\varepsilon} = q_0^{(1)}q_1 - q_1 q_0 + O(\varepsilon) \tag{15.3.23b}$$

другой интегрируемой деформации классической цепочки Тоды. (Согласно Теореме 15.1.33, поток (15.3.23) коммутирует со всеми потоками иерархии релятивистской цепочки Тоды. Заметим, что поток (15.3.23) не определен при связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$.);
(i^4) Покажите, что гамильтонова матрица $B^{\text{КП}\varepsilon}$ (15.3.12) и гамильтониан $-\varepsilon^{-1}\bar{H}_0 = -\varepsilon^{-2}\ln(1+\varepsilon q_0)$ порождают следующие уравнениями движения:

$$\begin{aligned}\partial_t(q_i) &= \frac{1}{(1+\varepsilon q_0)^{(i+1)}}q_{i+1} - \left(q_{i+1}\frac{1}{1+\varepsilon q_0}\right)^{(-1)} + \left(\frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}\right)^{(i)} q_i - q_i\frac{q_0}{1+\varepsilon q_0} = \\ &= (1-\Delta^{-1})(q_{i+1}) + q_0^{(i)}q_i - q_i q_0 + O(\varepsilon), \quad i \in \mathbb{Z}_+\end{aligned} \tag{15.3.24}$$

другой интегрируемой деформации иерархии КП (9.1.28). (Согласно Теореме 15.1.33, поток (15.3.24) коммутирует со всей квазирелятивистской иерархией КП (15.1.4). Как и выше, этот поток не определен на связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$.)

Смысл этого потока отчасти загадочен. Мы будем называть его тенью квазирелятивистского уравнения КП; точно так же, поток (15.3.23) будем называть теневой релятивистской цепочкой Тоды.

Упражнение 15.3.25. Покажите, что теневой квазирелятивистский поток КП (15.3.24) имеет представление Лакса

$$\partial_t(\mathcal{L}) = [Sh, \mathcal{L}], \quad \mathcal{L} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}\big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i\big), \tag{15.3.26a}$$

$$Sh = \frac{1}{1+\varepsilon q_0}(\zeta + q_0) = \zeta + \frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}(1-\varepsilon\zeta). \tag{15.3.26b}$$

Природа этого представления столь же загадочна, как природа самой теневой динамики.

Упражнение 15.3.27. Поток (15.3.24) оказался деформацией первого потока нерелятивистской иерархии КП. Можно ли было предсказать этот результат без вычислений?
[Подсказка : Рассмотрите гамильтониан

$$-\varepsilon^{-1}\bar{H}_0 + \varepsilon^{-1}H_1 = \frac{q_0^2}{2} + q_1 + O(\varepsilon).\ ] \tag{15.3.28}$$

Упражнение 15.3.29. (i) Покажите, что тень релятивистской цепочки Тоды (15.3.23) допускает связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$, при которой поток превращается в

$$\partial_t(q_1) = \frac{1}{\varepsilon^3}\left(\frac{1}{q_1^{(1)}}q_1 - 1\right); \tag{15.3.30}$$

(ii) Покажите, что при связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$, интегралы $H_n = n^{-1}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^n)$ превращаются в константы, а интеграл $\ln(1+\varepsilon q_0)$ в интеграл

$$H = \ln q_1. \tag{15.3.31}$$

15.4 Квазирелятивистская форма Гиббонса

Этот раздел является разностным аналогом §7.3. Здесь мы выводим квазирелятивистскую версию формы Гиббонса для дискретной иерархии КП из §13.1.

Согласно Лемме 13.1.21, отображение $\varphi : \widetilde{C}_{\boldsymbol{q}} \to \widetilde{C}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}$,

$$\varphi(q_j) = \boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{15.4.1}$$

между гамильтоновой матрицей $b = b^0 - \varepsilon b^1$:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & (1-\varepsilon\Delta)\mathbf{1} \\ -(1+\varepsilon\Delta^{-1})\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{15.4.2}$$

и гамильтоновой матрицей $B^{\mathrm{КП}\varepsilon} = -(B^0 - \varepsilon B^1)$ (15.3.12) квазирелятивистской иерархии КП является гамильтоновым. Следовательно, последняя иерархия порождает соответствующую бесконечную иерархию в пространстве $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. Найдем ее явный вид.

Пусть $\bar{H} = \varphi(H_{n+1})$, где $H_{n+1} = (n+1)^{-1}\operatorname{Res}(\mathcal{L}^{n+1})$ (15.3.1) есть гамильтониан n-го потока квазирелятивистской иерархии КП. Соответствующие уравнения движения в пространстве $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ порожденны гамильтоновой матрицей b (15.4.2):

$$\partial_P(\boldsymbol{p}) = (1-\varepsilon\Delta)\left(\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{q}}\right), \tag{15.4.3a}$$

$$\partial_P(\boldsymbol{q}) = -(1+\varepsilon\Delta^{-1})\left(\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{p}}\right). \tag{15.4.3b}$$

Согласно формуле (10.2.28),

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{p}} \\ \frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{q}} \end{pmatrix} = D(\boldsymbol{\varphi})^{\dagger}\varphi\left(\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{q}}\right), \tag{15.4.4}$$

где, к сожалению, вектор $\boldsymbol{q}$ в разных частях имеет различный, но, несомненно, очевидный смысл. Далее, из определения (15.4.1) видим, что

$$D(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \hline q_j & \widehat{R}_{\boldsymbol{q}}\Delta^j & \widehat{L}_{\boldsymbol{p}(j)} \end{array} \quad \Rightarrow \tag{15.4.5}$$

$$D(\boldsymbol{\varphi})^\dagger = \begin{array}{c|c} & q_j \\ \hline \boldsymbol{p} & \Delta^{-j}\widehat{L}_{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{q} & \widehat{R}_{\boldsymbol{p}(j)} \end{array} \quad \Rightarrow \tag{15.4.6}$$

$$\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{p}} = \sum_j (\Delta^{-j}\widehat{L}_{\boldsymbol{q}})\varphi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_j}\Big) = \varphi\Big[\sum\Delta^{-j}\Big(\boldsymbol{q}\frac{\delta H}{\delta q_j}\Big)\Big] \overset{(15.3.5\ ,7)}{=}$$

$$= \varphi\big([\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}_-)|(1-\varepsilon\zeta)^{-1}\big)^\dagger(\boldsymbol{q}), \tag{15.4.7a}$$

$$\frac{\delta\bar{H}}{\delta\boldsymbol{q}} = \sum\widehat{R}_{\boldsymbol{p}(j)}\varphi\Big(\frac{\delta H}{\delta q_j}\Big) = \varphi\Big(\sum\frac{\delta H}{\delta q_j}\Delta^j\Big)(\boldsymbol{p}) =$$

$$= \varphi\big([\mathcal{P}_+ + S(\mathcal{P}-)](1-\varepsilon\zeta)^{-1}\big)(\boldsymbol{p}). \tag{15.4.7b}$$

Подставляя формулы (15.4.7) в формулы (15.4.3) и обозначая

$$\bar{\mathcal{P}} = \varphi(\mathcal{P}), \tag{15.4.8}$$

получаем

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{p}) = (1-\varepsilon\zeta)[\bar{\mathcal{P}}_+ + S(\bar{\mathcal{P}}_-)](1-\varepsilon\zeta)^{-1}(\boldsymbol{p}), \tag{15.4.9a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{q}) = -[\bar{\mathcal{P}}_+ + S(\bar{\mathcal{P}}_-)]^\dagger(\boldsymbol{q}), \tag{15.4.9b}$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{L}}^n, \quad \bar{\mathcal{L}} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}(\zeta + \boldsymbol{p}^t\zeta^{-1}\boldsymbol{q}), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{15.4.9c}$$

Это искомый вид квазирелятивистской иерархии Гиббонса. Вид уравнений (15.4.9) почти идентичен дифференциальному квазирелятивистскому НУШ (7.3.21). При $\varepsilon = 0$, восроизводится нерелятивистская форма Гиббонса (13.1.3), как и следует ожидать.

15.5 Гидродинамические формы квазирелятивистской иерархии КП

В этом разделе мы применяем гидродинамический анзац из Главы 14 к квазирелятивистской иерархии КП. Результат состоит из двух различных гидродинамических представлений.

Согласно Упражнению 14.2.25, гидродинамическое представление $\Phi : \widetilde{C}_q \to \widetilde{C}_{u,h}$ (14.2.1)

$$\Phi(q_i) = u^{(i)-1}u^{(i)}\dots uh, \quad i\in\mathbb{Z}_+, \tag{15.5.1}$$

задает гамильтонова отображение между гамильтоновыми матрицами $B^{\text{КП}\varepsilon} = -(B^0 - \varepsilon B^1)$ (15.3.12) квазирелятивистской иерархии КП и $b = b^0 - \varepsilon b^1$:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -\widehat{L}_u + (1+\varepsilon\widehat{L}_u)\widehat{R}_u\Delta - \varepsilon\widehat{R}_{u^{(1)}u}\Delta^2 \\ \widehat{R}_u - \Delta^{-1}\widehat{L}_u(1+\varepsilon\widehat{R}_u) + \varepsilon\Delta^{-2}\widehat{L}_{u^{(1)}u} & -\operatorname{ad}_h - \varepsilon(\widehat{R}_{uh}\Delta - \Delta^{-1}\widehat{L}_{uh}) \end{pmatrix} \tag{15.5.2}$$

соответствующей гидродинамической иерархии. Эта последняя, таким образом, построена.

Однако, имеется еще и другая гидродинамическая форма этой же квазирелятивистской иерархии КП. Она возникает в результате применения гидродинамического отображения Φ, вместо q_i, к переменным $\bar{q}_i$, определяемым гамильтоновым гомоморфизмом $\widehat{\Phi}$ (15.3.18). Вывод: квазирелятивистское отображение $\Phi_\varepsilon : \widetilde{C}_q \to \widetilde{C}_{u,h}$, $\Phi_\varepsilon(q_i) = \Phi\widehat{\Phi}(q_i)$:

$$\Phi_\varepsilon(q_i) = (1 - \varepsilon u^{(i)})u^{(i)-1}u^{(i)} \dots uh \tag{15.5.3}$$

между гамильтоновой матрицей $B^{\text{КП}\varepsilon} = -(B^0 - \varepsilon B^1)$ квазирелятивистской иерархии КП и гамильтоновой матрицей $B^{HD} = b^0$ (14.2.9) соответствующей (второй) гидродинамической иерархии является гамильтоновым.

Замечание 15.5.4. Изоморфизм $\widehat{\Phi}$ (15.3.18) возникает из изоморфизма φ (15.3.15). Очевидно, можно построить сколько угодно подобных формальных изоморфизмов, и, соответственно, множество гидродинамических форм.

Упражнение 15.5.5. Используя алгебраический подход из §14.3, вывести явную гидродинамическую форму уравнений движения ε-деформации уравнения (14.3.4) для каждого из гидродинамических представлений, (15.5.1) и (15.5.3).

Наиболее ценной чертой человека является чувство истины, указывающее, чему не верить.

Эврипид

15.6 Деформация иерархии МКП

Некоторые мужчины целуют и молчат, некоторые целуют и рассказывают; но Джордж Мур рассказал и не поцеловал.

Сюзан Митчелл

В этом разделе строится однопараметрическая деформация иерархии МКП. Эта деформация чем-то напоминает квазирелятивистский анзац, но обладает другими свойствами. В частности, то что служит ее гамильтоновой матрицей, некососимметрично. Тем не менее, эта иерархия допускает преобразование Миуры в недеформированную иерархию КП.

Иерархия МКП вводит квазирелятивистскую картину только опосредованно, через гамильтоновость преобразование Миуры. Аналог квазирелятивистского анзаца $L_{\text{nonrelat}} \mapsto L_{\text{relativ}} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}L_{\text{nonrelat}}$ (15.1.3) для иерархии МКП неизвестен. Ниже мы рассмотрим деформации этой иерархии, следующего сорта.

Пусть

$$\mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{N-j} Q_j, \tag{15.6.1}$$

и пусть $S : \widetilde{C}[[\zeta]] \to \widetilde{C}$, $\widetilde{C} = C[[\varepsilon]]$, $C = C_Q = R\langle Q_j^{(s)}\rangle$ есть следующий символ:

$$S(\sum \bar{r}_s \zeta^s) = \sum \bar{r}_s \varepsilon^s. \tag{15.6.2}$$

Для каждого $\mathcal{P} = \mathcal{L}^n$, $n \in \mathbb{N}$, определим эволюционное дифференцирование $\partial_{\mathcal{P}}$ в C по формуле

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1} - S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0} + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]. \qquad (15.6.3)$$

При $\varepsilon = 0$ эта иерархия сводится к иерархии МКП. Мы собираемся показать, что эта деформированная иерархия корректно определена и коммутативна.

Второе равенство в формуле (15.6.3) показывает, что

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) \in \widetilde{C}((\zeta^{-1}))_{\leqslant N}. \qquad (15.6.4)$$

С другой стороны, если $\mathcal{L}$ имеет только конечное число членов,

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{N+M} \zeta^{N-j} Q_j, \qquad (15.6.5)$$

то первое равенство в формуле (15.6.3) показывает, что

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) \in \widetilde{C}((\zeta^{-1}))_{\geqslant -M} \quad &\Rightarrow \qquad (15.6.6) \\ \partial_{\mathcal{P}}(Q_{N+M}) = O(\varepsilon), & \qquad (15.6.7) \end{aligned}$$

почти точно так же, как в недеформированном случае иерархии МКП из §9.3.

Далее, пусть $\mathcal{R} = \mathcal{L}^{n_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{L}) &= \partial_{\mathcal{P}}([\mathcal{R}_{\geqslant 1} - S(\mathcal{R}_{\geqslant 1}), \mathcal{L}]) = \\ &= [(1-S)\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}_{\geqslant 1}), \mathcal{L}] + [(1-S)(\mathcal{R}_{\geqslant 1}), [(1-S)(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{L}]] \quad \Rightarrow \qquad (15.6.8) \\ [\partial_{\mathcal{P}}, \partial_{\mathcal{R}}](\mathcal{L}) &= [?, \mathcal{L}], \qquad (15.6.9) \end{aligned}$$

где

$$? = (1-S)([\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})]_{\geqslant 1}) + [(1-S)(\mathcal{R}_{\geqslant 1}), (1-S)(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]. \qquad (15.6.10)$$

Далее,

$$\begin{aligned} [\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})]_{\geqslant 1} &= [\mathcal{P}_{\geqslant 1} - \mathcal{S}(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{R}]_{\geqslant 1} - [\mathcal{R}_{\geqslant 1} - S(\mathcal{R}_{\geqslant 1}), \mathcal{P}]_{\geqslant 1} = \\ &= [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{R}_{\geqslant 1}] + [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{R}_{\leqslant 0}]_{\geqslant 1} - [\mathcal{S}(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{R}_{\geqslant 1}] + \\ &+ [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{R}_{\geqslant 1}] + [\mathcal{P}_{\leqslant 0}, \mathcal{R}_{\geqslant 1}]_{\geqslant 1} + [\mathcal{S}(\mathcal{R}_{\geqslant 1}), \mathcal{P}_{\geqslant 1}] = \\ &= [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{R}_{\geqslant 1}] - [S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{R}_{\geqslant 1}] - [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, S(\mathcal{R}_{\geqslant 1})] = \qquad (15.6.11) \\ &= [X, Y] - [S(X), Y] - [X, S(Y)], \qquad (15.6.12) \end{aligned}$$

где временно введено обозначение

$$X = \mathcal{P}_{\geqslant 1}, \quad Y = \mathcal{R}_{\geqslant 1}. \qquad (15.6.13)$$

Из формулы (15.6.12) находим

$$\begin{aligned} S([\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{R}) - \partial_{\mathcal{R}}(\mathcal{P})]_{\geqslant 1}) &= S([\mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{R}_{\geqslant 1}]) - S([S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{R}_{\geqslant 1}] + [\mathcal{P}_{\geqslant 1}, S(\mathcal{R}_{\geqslant 1})]) = \\ &= S([X, Y]) - S([S(X), Y] + [X, S(Y)]) \quad \Rightarrow \qquad (15.6.14) \\ ? = [X, Y] - [S(X), Y] &- [X, S(Y)] - S([X, Y]) + S([S(X), Y]) + \\ + S([X, S(Y)]) + [Y, X] &- [Y, S(X)] + [X, S(Y)] + [S(Y), S(X)] = \\ = S([S(X), Y] + [X, S(Y)]) &- S([X, Y]) - [S(X), S(Y)], \qquad (15.6.15) \end{aligned}$$

что равно нулю согласно следующей Лемме.

Лемма 15.6.16. Для любого $X, Y \in \widetilde{C}[|\zeta]]$,

$$S([X,Y]) + |S(X), S(Y)] = S([S(X), Y] + [X, S(Y)]). \tag{15.6.17}$$

Доказательство. Пусть $X = x\zeta^s$, $Y = y\zeta^k$, $s, k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$S([X,Y]) = S([xy^{(s)} - yx^{(k)}|\zeta^{s+k}) = [xy^{(s)} - yx^{(k)}|\varepsilon^{s+k}, \tag{15.6.18}$$

$$[S(X), S(Y)] = [x, y]\varepsilon^{s+k}, \tag{15.6.19}$$

$$\begin{aligned} -S([S(X),Y] + [X,S(Y)]) &= -S(\varepsilon^s[xy - yx^{(k)}]\zeta^k + \varepsilon^k[xy^{(s)} - yx]\zeta^s) = \\ &= -\varepsilon^{s+k}([x,y] + xy^{(s)} - yx^{(k)}). \end{aligned} \tag{15.6.20}$$

Складывая равенства (15.6.18–20) получаем ноль. ▮

Таким образом, все деформированые потоки МКП коммутируют и имеют бесконечное множество общих *недеформированных* интегралов $\{\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n)\}$.

Упражнение 15.6.21. Покажите, что при $N = 1$ первый деформированный поток МКП нмеет вид

$$\partial_{t_1}(Q_i) = Q_0^{(i)}Q_{i+1} - Q_{i+1}^{(-1)}Q_0 + \varepsilon(Q_iQ_0^{(1)} - Q_0^{(i)}Q_i), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{15.6.22}$$

это деформация формулы (9.3.15).

Упражнение 15.6.23. Покажите, что гидродинамическое нредставление Ψ (14.4.3):

$$\Psi(Q_i) = U^{(i)-1}U^{(i)}\ldots UH, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{15.6.24}$$

нереводит систему

$$\partial_{t_1}(U) = H^{(1)}(U^{(1)} - \varepsilon)U - UH(U - \varepsilon), \tag{15.6.25a}$$

$$\partial_{t_1}(H) = H(U - \varepsilon)H + \varepsilon HH^{(1)} - (UH)^{(-1)}H, \tag{15.6.25b}$$

являющуюся деформацией формулы (14.4.4), в систему (15.6.22).

Упражнение 15.6.26. Пусть $N = 1$. Покажите, что каждый деформированый поток МКП (15.6.3) имеет гидродииамическое представлеине

$$\partial_{\mathcal{P}}(U) = (\widehat{R}_U\Delta - \widehat{L}_U)[\mathrm{Res}(\zeta^{-1}[\mathcal{P}_{\geqslant 1} - S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]\zeta(1 - \zeta^{-1}U)^{-1})], \tag{15.6.27a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(H) = \mathrm{Res}(\zeta^{-1}[\mathcal{P}_{\geqslant 1} - \mathcal{S}(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \zeta(1 - \zeta^{-1}U)^{-1}H]). \tag{15.6.27b}$$

[Подсказка : См. Теорему 14.4.7.]

Обратимся теперь к гамильтоновым аспектам деформированной иерархии МКП (15.6.3). С этого момента мы будем считать $N = 1$, так как все гамильтоновы эффекты видны уже в этом случае. Используя обозначения

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}^n = \sum \pi_s(n)\zeta^s, \tag{15.6.28}$$

$$\mathcal{H}_n = n^{-1}\,\mathrm{Res}(\mathcal{L}^n), \tag{15.6.29}$$

и формулу вычетов, находим

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}_{n+1}) \approx \mathrm{Res}[\mathcal{L}^n d(\mathcal{L})] = \mathrm{Res}\Big(\sum \pi_s(n)\zeta^s\zeta^{1-j}dQ_j\Big) \approx \sum dQ_j\pi_{j-1}(n) \quad \Rightarrow \\ \pi_{j-1}(n) = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta Q_j}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{15.6.30}$$

В частности,

$$\mathcal{P}_{\geqslant 1} = \sum_{j\geqslant 0} x_{j+2}\zeta^{j+1}, \tag{15.6.31}$$

$$S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}) = \sum_{j\geqslant 0} x_{j+2}\varepsilon^{j+1}, \tag{15.6.32}$$

где

$$x_j = \frac{\delta\mathcal{H}_{n+1}}{\delta Q_j}. \tag{15.6.33}$$

Из второго равенства в формуле (15.6.3) находим

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}_{\geqslant 0}) &= \zeta\partial_{\mathcal{P}}(Q_0) + \partial_{\mathcal{P}}(Q_1) = [\mathcal{L},\ \mathcal{P}_{\leqslant 0} + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]_{\geqslant 0} = \\
&= [\mathcal{L}_{\geqslant 0},\ \mathcal{P}_{\leqslant 0} + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]_{\geqslant 0} = [\zeta Q_0 + Q_1,\ \pi_0(n) + \pi_{-1}(n)\zeta^{-1} + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]_{\geqslant 0} = \\
&= \zeta\big(Q_0[x_1 + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})] - [x_1 + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})]^{(-1)}Q_0\big) + \qquad (15.6.34\text{a}) \\
&\quad + (Q_0x_0)^{(1)} - x_0Q_0 + [Q_1, x_1 + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1})] \quad \Rightarrow \qquad (15.6.34\text{b})
\end{aligned}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_0) = (\widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0}\Delta^{-1})(x_1) + \sum_{j\geqslant 0}(\widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0}\Delta^{-1})\varepsilon^{j+1}(x_{j+2}), \tag{15.6.35a}$$

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_1) = (\Delta\widehat{L}_{Q_0} - \widehat{R}_{Q_0})(x_0) + \operatorname{ad}_{Q_1}(x_1) + \sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^{j+1}\operatorname{ad}_{Q_1}(x_{j+2}). \tag{15.6.35b}$$

Аналогично, из первого равенства (15.6.3) получаем

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}_{<0}) &= \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j-1}\partial_{\mathcal{P}}(Q_{j+2}) = [\mathcal{P}_{\geqslant 1} - S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}), \mathcal{L}]_{<0} = \\
&= [\sum_{j\geqslant 0} x_{j+2}(\zeta^{j+1} - \varepsilon^{j+1}),\ \sum_{s\geqslant 0}\zeta^{-s-1}Q_{s+2}]_{<0}.
\end{aligned} \tag{15.6.36}$$

Обозначая

$$w_i = Q_{i+2}, \quad y_i = x_{i+2}, \tag{15.6.37}$$

и используя формулы (12.2.10–12), получаем

$$\partial_{\mathcal{P}}(w_i) = \sum_{j\geqslant 0} B^{Q\varepsilon}_{ij}(y_j), \tag{15.6.38}$$

где

$$B^{Q\varepsilon}_{ij} = \widehat{R}_{w_{i+j+1}}\Delta^{i+1} - \Delta^{-j-1}\widehat{L}_{w_{i+j+1}} + \varepsilon^{j+1}(\widehat{L}_{w_i} - \widehat{R}_{w_i}\Delta^{i+1}) \tag{15.6.39}$$

В итоге, уравнения движения (15.6.3) записываются теперь в виде

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_i) = \sum_j B^{\text{МКП}\varepsilon}_{ij}\left(\frac{\delta H_{n+1}}{\delta Q_j}\right), \tag{15.6.40}$$

где матрица $B^{\text{МКП}\varepsilon}$ задана формулами (15.6.35, 39). Мы видим, что при $\varepsilon \neq 0$ эта матрица *не кососимметрическая* — новое, редко встречающееся явление.

Упражнение 15.6.41. (i) Покажите, что первый поток деформированной иерархии МКП при $N = 1$ (15.6.22) допускает последовательность связей

$$\{Q_{M+1} = \varepsilon Q_M,\ Q_{M+2} = \varepsilon^2 Q_M,\ \dots\} \tag{15.6.42}$$

для любого фиксированного $M \in \mathbb{Z}_+$, что есть деформация знакомой связи $\{Q_{M+1} = Q_{M+2} = \cdots = 0\}$ для недеформированной иерархии МКП;
(ii) Покажите, что для $M = 1$ соответствующая редуцированная система имеет вид

$$\partial_{t_1}(Q_0) = Q_0(Q_1 + \varepsilon Q_0^{(1)}) - (Q_1^{(-1)} + \varepsilon Q_0)Q_0, \tag{15.6.43a}$$

$$\partial_{t_1}(Q_1) = \varepsilon(\Delta - 1)(Q_1^{(-1)}Q_0), \tag{15.6.43b}$$

являющийся деформацией системы (9.3.11);
(iii) Покажите, что при $M = 1$ и $\varepsilon \neq 0$, связь (15.6.42), можно рассматривать как гамильтоново (= совместное) отображение $\psi : C_Q \to C_{\bar{Q}_0,\bar{Q}_1}$,

$$\psi(Q_0) = \bar{Q}_0, \quad \psi(Q_1) = \bar{Q}_1, \quad \psi(Q_{i+2}) = \varepsilon^{i+1}\bar{Q}_1, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{15.6.44}$$

между (не гамильтоновой) матрицей $B^{\text{МКП}\varepsilon}$ (15.6.40) в пространстве Q_i и громоздкой матрицей в пространстве $(\bar{Q}_0, \bar{Q}_1)$.

Теорема 15.6.45. Для каждого фиксированного $M \in \mathbb{Z}_+$, связь (15.6.42) может быть наложена на все потоки деформированной иерархии МКП (15.6.3),

Доказательство. При наложении деформированной связи (15.6.42) оператор Лакса $\mathcal{L}$ (15.6.1) превращается в

$$\mathcal{L} = \sum_{0 \leqslant j < M} \zeta^{N-j} Q_j + \zeta^{N-M}(1 - \varepsilon\zeta^{-1})^{-1} Q_M, \tag{15.6.46}$$

где при $M = 0$ первое слагаемое отсутствует. Обозначим, на протяжении этого доказательства,

$$Q = Q_M, \quad \mathcal{R} = \mathcal{P}_{\geqslant 1}. \tag{15.6.47}$$

Из первого равенства в уравнении (15.6.3) находим

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}_{>N-M}) = [(1 - S)(\mathcal{R}), \mathcal{L}]_{>N-M} = [(1 - S)(\mathcal{R}), \mathcal{L}_{>N-M}]_{>N-M}; \tag{15.6.48}$$

уравнения движения для Q_j при $j < M$ тем самым фиксированы. Мы *определяем* уравнение движения для $Q = Q_M$ формулой

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_M) = Q_M S(\mathcal{R}) - (\mathcal{R}_\varepsilon)^\dagger (Q_M), \tag{15.6.49}$$

где, для элемента $U \in \widetilde{C}[[\zeta]]$, $U = \sum_{s \geqslant 0} u_s \zeta^s$,

$$U_\varepsilon := \sum u_s \zeta^s \varepsilon^s. \tag{15.6.50}$$

Чтобы оправдать формулу (15.6.49), содержащую общую информацию об уравнениях движения для всех Q_{j+M} подчиненных связи (15.6.42), покажем, что из уравнений (15.6.48, 49) вытекает равенство

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [(1 - S)(\mathcal{R}), \mathcal{L}],$$

которое мы проверим в эквивалентной, благодаря второму равенству из (15.5.3), форме

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [(1 - S)(\mathcal{R}), \mathcal{L}]_{\leqslant N}. \tag{15.6.51}$$

С учетом (15.6.48), формула (15.6.51) эквивалентна равенству

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}_{\leqslant N-M}) = [(1-S)(\mathcal{R}), \mathcal{L}]_{\leqslant N-M} = [(1-S)(\mathcal{R}), \mathcal{L}_{\leqslant N-M}]_{\leqslant N-M}, \qquad (15.6.52)$$

которое можно переписать в виде

$$\zeta^{N-M}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(Q) = [(1-S)(\mathcal{R}), \zeta^{N-M}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q]_{\leqslant N-M}. \qquad (15.6.53)$$

С учетом формулы (15.6.49), равенство (15.6.53) эквивалентно тождеству

$$\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}[QS(U) - (U_{\varepsilon})^{\dagger}(Q)] = [(1-S)(U),\ \zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q]_{\leqslant r}, \qquad (15.6.54)$$
$$\forall\, r \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, U \in \widetilde{C}[[\zeta]].$$

Лемма 15.6.55. Имеем

$$[U\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q]_{\leqslant r} = S(U)\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q, \qquad (15.6.56)$$
$$[\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}QU]_{\leqslant r} = \zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}(U_{\varepsilon})^{\dagger}(Q). \qquad (15.6.57)$$

Доказательство. Выберем $U = u\zeta^{s}$, $s \in \mathbb{Z}_{+}$. Тогда

$$|U\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q|_{\leqslant r} = \Big(u\zeta^{s}\sum_{k\geqslant 0}\zeta^{r-k}\varepsilon^{k}Q\Big)_{\leqslant r} = u\zeta^{s}\sum\zeta^{r-k-s}\varepsilon^{k+s}Q =$$
$$= u\varepsilon^{s}\sum\zeta^{r-k}\varepsilon^{k}Q = S(u\zeta^{s})\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q,$$

что доказывает формулу (15.6.56). Аналогично,

$$[\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}QU]_{\leqslant r} = \Big(\sum_{k\geqslant 0}\zeta^{r-k}\varepsilon^{k}Qu\zeta^{s}\Big)_{\leqslant r} = \sum\zeta^{r-k-s}\varepsilon^{k+s}Qu\zeta^{s} =$$
$$= \sum\zeta^{r-k}\varepsilon^{k}(Qu)^{(-s)}\varepsilon^{s} = \zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}(u\Delta^{s}\varepsilon^{s})^{\dagger}(Q),$$

что совпадает с (15.6.57). ∎

При помощи Леммы 15.6.55, правая часть формулы (15.6.54) превращается в

$$[U - S(U),\ \zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q]_{\leqslant r} =$$
$$= S(U)\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q - \zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}(U_{\varepsilon})^{\dagger}(Q) - S(U)\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q +$$
$$+\zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}QS(U) = \zeta^{r}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}[QS(U) - (U_{\varepsilon})^{\dagger}(Q)],$$

что есть левая часть формулы (15.6.54). ∎

Упражнение 15.6.58. Покажите, что при $N = 1$, $M = 0$, первый поток (15.6.22) соответствующей иерархии задает некоммутативную решеточную версию невязкого уравнения Бюргерса

$$\partial_{t_1}(Q_0) = \varepsilon(1-\Delta^{-1})(Q_0Q_0^{(1)}). \qquad (15.6.59)$$

Обратимся теперь к вопросу о преобразовании Миуры для деформированной иерархии МКП (15.6.3). Из ее коммутаторной формы вытекает, что все недеформированные конструкции из §9.5 проходят. В частности, уравнение движения для Q_0,

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_0) = Q_0\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_0^{(-N)}Q_0, \qquad (15.6.60)$$
$$\bar{\pi}_0 = \pi_0(n) + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}) = \mathrm{Res}(\mathcal{P}) + S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}) = S(\mathcal{P}_{\geqslant 0}), \qquad (15.6.61)$$

продолжается до уравнения движения (9.5.19) для V :

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\operatorname{Pot}(\bar{\pi}_0)V, \tag{15.6.62}$$

$$\operatorname{Pot}(Q_0) = V^{(-N)}V^{-1}. \tag{15.6.63}$$

Преобразование Миуры совпадает с недеформированным из §9.5:

$$\mathcal{L} \mapsto L = V^{-1}\mathcal{L}V. \tag{15.6.64}$$

Опуская символ Pot, получаем

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}(L) &= -V^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(V)V^{-1}\mathcal{L}V + V^{-1}\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L})V + V^{-1}\mathcal{L}\partial_{\mathcal{P}}(V) = \\ &= V^{-1}\Big\langle \bar{\pi}_0\mathcal{L} + [P_{\geqslant 1} - S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}),\ \mathcal{L}] - \mathcal{L}\bar{\pi}_0 \Big\rangle V = \\ &= V^{-1}[\bar{\pi}_0 + \mathcal{P}_{\geqslant 1} - S(\mathcal{P}_{\geqslant 1}),\ \mathcal{L}|V = V[\operatorname{Res}(\mathcal{P}) + \mathcal{P}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}]V = \\ &= V^{-1}[\mathcal{P}_{\geqslant 0}, \mathcal{L}] = [P_{\geqslant 0}, L],\end{aligned} \tag{15.6.65}$$

где

$$P = V^{-1}\mathcal{P}V = V^{-1}\mathcal{L}^nV = (V^{-1}\mathcal{L}V)^n = L^n. \tag{15.6.66}$$

Таким образом, преобразование Миуры переводит деформированную иерархию МКП в недеформированную иерархию КП, причем преобразование Миуры одно и то же в обоих случаях, деформированном и недеформированном.

Упражнение 15.6.67. Как это возможно?
[Подсказка : МКП=М+КП.]

Рассказ о преобразовании Миуры можно закончить прямо сейчас, добавив только, что поскольку на языке МКП имеется деформированный обрыв (15.6.42), то отсюда следует скрытое ранее свойство иерархии КП, а именно, что она допускает связь

$$L = \zeta^N + V^{-1}\sum_{0<j<M}\zeta^{N-j}Q_jV + V^{-1}\zeta^{N-M}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}Q_MV = \tag{15.6.68a}$$

$$= \zeta^N + \sum_{0<j<M}\zeta^{N-j}q_j + p\zeta^{N-M}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}q, \tag{15.6.68b}$$

являющуюся образом (15.6.42) при преобразовании Миуры. Это есть ε-деформация 1-компонентной версии формы Гиббонса в случае $M = N$ (13.1.2), а также случая $M = 1$ формы Гиббонса (13.5.4). Немедленно выписывается и векторная версия этой деформации

$$L = \zeta^N + \sum_{0<j<M}\zeta^{N-j}q_j + \boldsymbol{p}^t\zeta^{N-M}(1-\varepsilon\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}. \tag{15.6.69}$$

Интересно, что с точки зрения этой новой деформированной формы Гиббонса формальный параметр равен $1-\varepsilon$ а не ε.

Как прекрасно, что большинство наших
неприятностей не случаются!

Элберт Хаббард

Часть С

Дискретное пространство-время

Мы хотим, чтобы сюжет начинался с землетрясения и заканчивался драматической развязкой.

Сэм Голдвин

Глава 16

Что такое представление Лакса и его дискретно-временной аналог

> О старой Югославии говорили: шесть республик, пять народов, четыре языка, три религии, два алфавита — и одна Партия.
>
> Норман Стоун, в *The National Interest* (зима 1992/93)

Ниже мы рассматриваем эволюцию понятия "представление Лакса с непрерывным временем" и устанавливаем его дискретно-временной аналог.

Пусть $\mathcal{V}$ — конечномерное векторное пространство и $Op(\mathcal{V})$ — пространство линейных операторов на нем. Пусть $L = L(t)$ — гладкая кривая в пространстве $Op(\mathcal{V})$. Допустим, что оператор $L(t)$ в любой момент времени остается в одном и том же классе смежности, и существует гладкая кривая $U = U(t)$ в пространстве $Op(\mathcal{V})$ такая, что

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}. \tag{16.1}$$

Тогда спектр (= набор собственных значений) L не меняется со временем. Эквивалентно, величины

$$H_n = Tr(L^n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16.2}$$

служат постоянными движения для L. Дифференцируя уравнение (16.1) по времени t, находим

$$\begin{aligned}\partial_t(L) = \partial_t(U)L(0)U^{-1} - UL(0)U^{-1}\partial_t(U)U^{-1} = [\partial_t(U)U^{-1}, L] = \\ = [P, L],\end{aligned} \tag{16.3}$$

где

$$P = P(t) = \partial_t(U)U^{-1}. \tag{16.4}$$

Уравнения вида

$$\partial_t(L) = [P, L], \quad P = \text{некоторая функция} \tag{16.5}$$

называются *уравнениями Лакса*. Если пространство $\mathcal{V}$ является фазовым для динамической системы, уравнения движения которой (или хотя бы их следствие) можно привести к лаксовой форме (16.5), то последняя называется *представлением Лакса* для этой динамической системы. Из формы Лакса вытекает ряд тождеств

$$\partial_t(L^n) = [P, L^n], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{16.6}$$

Следовательно,

$$\partial_t[Tr(L^n)] = Tr[\partial_t(L^n)] = Tr([P, L^n]) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{16.7}$$

поскольку

$$\{\text{след коммутатора} = 0.\} \tag{16.8}$$

Таким образом, из формы Лакса тоже вытекает, что набор $H_n = Tr(L^n)$ задает константы движения.

Все уравнения движения в прикладной физике, механике, математической физике являются дифференциальными. Наличие представления Лакса для данной динамической системы является исключительным событием и, как правило, ведет к интегрируемости этой системы, в том или ином смысле. Насколько мне известно, нет интегрируемых конечномерных систем, для которых не найдено представление Лакса. Однако, представление Лакса описывает не само движение, и даже не эволюцию на малых временах, но лишь скорость движения. Чтобы получить настоящую эволюцию во времени из данного представления Лакса (16.3), следует перейти от него к его проинтегрированной форме (16.1). Согласно формуле (16.4), это сводится к решению дифференциального уравнения на U :

$$\partial_t(U) = PU, \quad U(0) = 1, \tag{16.9}$$

при заданном P. Очевидно, что, вообще говоря, это нельзя сделать явно, хотя в частных случаях это возможно.

Далее, имеются различные перспективы. Можно заявить, что формула (16.1), представляющая общее решение в любой момент времени, является неоправданной роскошью, и то, что в действительности необходимо, это дискретно-временной аналог формы Лакса (16.3). Такой аналог должен выражать оператор $L(t + \Delta t) = \widetilde{L}$ в терминах $L(t) = L$. Как может выглядеть такое уравнение? Из формулы (16.1) находим

$$L(t + \Delta t) = U(t + \Delta t)U(t)^{-1}U(t)L(0)U(t)^{-1}U(t)U(t + \Delta t)^{-1} = \mathcal{P}L\mathcal{P}^{-1}, \tag{16.10}$$

где

$$\mathcal{P} = U(t + \Delta t)U(t)^{-1} = 1 + \Delta t P + O((\Delta t)^2). \tag{16.11}$$

Мы видим, что опять, решение проблемы: как перейти от (инфинитезимальной) формы Лакса (16.3) к ее дискретно-временному аналогу (16.10), *в общем случае* невозможно. Но это возможно *в частных случаях*, хотя сейчас это и кажется сомнительным. Как всегда, дьявол кроется в деталях. Оставшиеся главы в Части C описывают такие неправдоподобные ситуации, которые, как ни странно, покрывают большинство систем, встречавшихся в Части B. Но пока воздержимся от изумления и благодарностей.

Вместо этого, рассмотрим различные воплощения представления Лакса. Одно из них — дифференциальное представление Лакса, основной инструмент Части A. Здесь L является дифференциальным или псевдодифференциальным оператором, формулы (16.5, 6) не меняются, но выкладка (16.7) заменяется следующей:

$$\partial_t[\mathrm{Res}(L^n)] = \mathrm{Res}[\partial_t(L)] = \mathrm{Res}([P, L^n]) \approx 0, \tag{16.12}$$

так как

$$\{\text{вычет коммутатора тривиален}\}. \tag{16.13}$$

Дискретизация по времени дифференциальных уравнений Лакса, несомненно, является дефективной идеей, плохо поставленной вследствие переопределенности дискретно-временного анзаца (16.10). На физическом уровне аргументации, если бы такая дискретно-временная схема существовала, она давала бы непрерывное по параметру Δt семейство отображений между пространствами динамических переменных в моменты t и $t+\Delta t$, *локальных* по x, что противоречит физической интуиции и математическому опыту, согласно которым решения дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, задаются *интегральными* формулами. Я не претендую на то, что приведенное рассуждение является строгим доказательством, это лишь эвристические соображения, показывающие, почему дифференциальные уравнения Лакса нельзя дискретизировать по времени без одновременной дискретизации по пространству. Если это и возможно, никто этого не делал.

Вероятно, пора упомянуть, что возможны и другие определения понятия дискретизации по времени. То, которое мы здесь принимаем, задается анзацем (16.10), что можно описать словами, как сохранение, **в точности**, интегралов представления Лакса с непрерывным временем, *и* наличие пошаговой эволюции, непрерывно зависящей от шага Δt. (Другие определения вкратце обсуждаются в разделе "Замечания и Комментарии".) Интересной чертой нашего определения является то, что, для данной динамической системы и ее представлении Лакса, дискретизация по времени может быть *неединственной*, по той причине, что и форма Лакса для данной системы не единственна: уравнение $\partial_t(L) = [P, L]$ можно заменить на эквивалентное уравнение

$$\partial_t(L) = [P + (\text{что угодно, коммутирующее с } L), L]. \tag{16.14}$$

Цепочка Тоды служит типичным (но не единственным) примером, когда такая неединственность может быть дискретизована по времени; мы увидим это позже в §19.2.

Другим примером формы Лакса служат разностные представления Лакса, основной инструмент Части B. Здесь L — элемент алгебры Ли $C((\zeta^{-1}))$ (или его варианты в квазирелятивистских конструкциях), формулы (16.5, 6, 12, 13) сохраняются, а смысл понятий "вычет" и "тривиальный гамильтониан" подправляется должным образом. Именно эту картину мы и будем дискретизировать по времени в Части C.

Зафиксируем теперь основной инструмент этой части, дискретно-временной анзац; различные его версии появятся по мере необходимости. Чтобы избежать значительных усложнений, приводящих к незначительным улучшениям, примем $N = 1$. В случае КП

$$L = \zeta + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j} q_j, \tag{16.15}$$

с первым потоком

$$\partial_t(L) = [L_+, L] = [\zeta + q_0, L], \tag{16.16}$$

выберем анзац (16.10), определяющий один шаг временной эволюции, в виде

$$[1 + h(\zeta+\alpha)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta+\alpha)], \quad \widetilde{L} = L(t+\Delta t), \tag{16.17}$$

где формальный параметр h является неопределенной дифференцируемой функцией от Δt :

$$h\big|_{\Delta t=0} = 0, \quad \frac{dh}{d\Delta t}\Big|_{\Delta t=0} \neq 0, \tag{16.18}$$

а α является неизвестной функцией от h и q_j, которую надо подобрать так, чтобы обратить уравнение (16.17) в тождество.

В случае МКП

$$\mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{1-j} Q_j, \tag{16.19}$$

с первым потоком

$$\partial_t(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}_{>0}, \mathcal{L}] = [\zeta Q_0, \mathcal{L}], \tag{16.20}$$

мы берем анзац дискретно-временной эволюции (16.10) в виде

$$(1 + h\zeta\beta)\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(1 + h\zeta\beta), \tag{16.21}$$

где β есть другая неизвестная функция от h и Q_j, которую следует найти, чтобы уравнение (16.21) стало тождеством.

Пока все выглядит подозрительно легким, чтобы не сказать тривиальным. В чем подвох? Рассмотрим простейший возможный случай типа КП, а именно случай цепочки Тоды, с оператором

$$L = \zeta + q_0 + \zeta^{-1} q_1. \tag{16.22}$$

Уравнение для шага по времени (16.17) превращается в

$$\begin{gathered}
[1 + h(\zeta + \alpha)](\zeta + \widetilde{q}_0 + \zeta^{-1}\widetilde{q}_1) = \\
= (1 + h\zeta)\zeta + h\alpha\zeta + \widetilde{q}_0 + \zeta^{-1}\widetilde{q}_1 + h(\zeta\widetilde{q}_0 + \widetilde{q}_1) + h\alpha\widetilde{q}_0 + h\zeta^{-1}\alpha^{(1)}\widetilde{q}_1 = \\
= (\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1)[1 + h(\zeta + \alpha)] = \\
= \zeta(1 + h\zeta) + h\zeta\alpha + q_0 + \zeta^{-1}q_1 + h(\zeta q_0^{(-1)} + q_1^{(-1)}) + h(q_0\alpha + \zeta^{-1}q_1\alpha),
\end{gathered}$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\widetilde{q}_0 + \alpha^{(-1)} = \alpha + q_0^{(-1)}, \tag{16.23}$$

$$(1 + h\alpha)\widetilde{q}_0 + h\widetilde{q}_1 = q_0(1 + h\alpha) + hq_1^{(-1)}, \tag{16.24}$$

$$(1 + h\alpha^{(1)})\widetilde{q}_1 = q_1(1 + h\alpha). \tag{16.25}$$

Уравнения (16.23) и (16.25) дают эволюцию q_0 и q_1, соответственно, в терминах неизвестной функции α. Для нее, оставшееся уравнение (16.24) дает уравнение

$$(1 + h\alpha)[q_0^{(-1)} + \alpha - \alpha^{(-1)}] + h\frac{1}{1 + h\alpha^{(1)}}q_1(1 + h\alpha) = q_0(1 + h\alpha) + hq_1^{(-1)}. \tag{16.26}$$

Оно выглядит совершенно безнадежным. Чтобы отделить некоммутативность от других трудностей, предположим на минуту, что *все коммутативно*. Тогда, умножив на $1 + h\alpha^{(1)}$, получим

$$\begin{gathered}
(1 + h\alpha)[1 + h\alpha^{(1)}|(1 - \Delta^{-1})(\alpha) = (1 + h\alpha)[1 + h\alpha^{(1)}](1 - \Delta^{-1})(q_0) + \\
+ hq_1^{(-1)}[1 + h\alpha^{(1)}] - hq_1(1 + h\alpha).
\end{gathered} \tag{16.27}$$

Следовательно, если искать α в виде формального степенного ряда по h :

$$\alpha = \sum_{s\geqslant 0} \alpha_s h^s, \tag{16.28}$$

то формула (16.27) расщепляется в последовательность уравнений

$$(1 - \Delta^{-1})(\alpha_0) = (1 - \Delta^{-1})(q_0), \tag{16.29a}$$

$$(1 - \Delta^{-1})(\alpha_{s+1}) = \{\text{выражение, содержащее } \alpha_0, \ldots, \alpha_s\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{16.29b}$$

Следовательно, суть дела, помимо некоммутативности, заключается в *нелокальности* уравнений, происходящих из дискретно-временного анзаца. Если эта нелокальность может быть проинтегрирована, проблема дискретизации по времени допускает решение. Нет, значит нет. (С постоянными интегрирования всегда можно разобраться, скажем, при помощи соображений размерности или других.)

Упражнение 16.30. (i) Предполагая, что в уравнении (16.26) все коммутирует, поделите на $(1+h\alpha)$ и найдите α;
(ii) Пусть коммутативность не предполагается. Разделите справа на $(1+h\alpha)$ и найдите α.

До сих пор мы обсуждали примеры дискретизации по времени первого потока иерархии. Для n-го потока, очевидно, следует взять анзацы

$$\Big[1+h\Big(\zeta^n+\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{n-1-i}\alpha_i\Big)\Big]\widetilde{L}=L\Big[1+h\Big(\zeta^n+\sum_{i=0}^{n}\zeta^{n-1-i}\alpha_i\Big)\Big], \tag{16.31}$$

$$\Big(1+h\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{n-i}\beta_i\Big)\widetilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}\Big(1+h\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{n-i}\beta_i\Big), \tag{16.32}$$

для случаев КП и МКП соответственно. Вместо этого, можно просто проитерировать n раз шаг эволюции, отвечающий первому потоку:

$$[1+h_k(\zeta+\alpha_k)]L(t_k+\Delta t_k)=L(t_k)[1+h_k(\zeta+\alpha_k)],\quad k=1,\dots,n, \tag{16.33}$$

и следовательно

$$1+h\Big(\zeta^n+\sum_{i=0}^{n-1}\zeta^{n-1-i}\alpha_i\Big)=[1+h_n(\zeta+\alpha_n)|\dots[1+h_1(\zeta+\alpha_1)],\quad \Delta t=\sum\Delta t_k, \tag{16.34}$$

формулы для случая МКП аналогичны. Таким образом, достаточно решить проблему дискретизации по времени для первого потока, и именно эта загадка будет занимать нас на протяжении всей Части С.

Упражнение 16.35. Покажите, что временная эволюция (16.10)

$$\widetilde{L}=\mathcal{P}L\mathcal{P}^{-1} \tag{16.36}$$

является условием совместности линейных задач

$$L\psi=\lambda\psi, \tag{16.37a}$$

$$\widetilde{\psi}=\mathcal{P}\psi. \tag{16.37b}$$

Упражнение 16.38. Рассмотрим оператор Лакса иерархии КдФ, $L=\xi^2+u$, и анзац

$$[1+h(\xi^3+\alpha\xi+\beta)]\widetilde{L}=L[1+h(\xi^3+\alpha\xi+\beta)], \tag{16.39}$$

с подходящими α,β, обеспечивающими однородность равенства. Покажите, что из этого анзаца следует:

$$\widetilde{u}=u, \tag{16.40a}$$

$$\zeta^3+\alpha\zeta+\beta=(L^{3/2})_+, \tag{16.40b}$$

$$(3u^2+u_{xx})_x=0. \tag{16.40c}$$

Упражнение 16.41. Рассмотрим, вместо уравнения Лакса (16.3), уравнение

$$\partial_t(L) = [P, L]L^{\alpha} + L^{\beta}[Q, L], \tag{16.42}$$

при некоторых α, β, P, Q. Покажите, что:

(i) $$\partial_t(L^n) = [P, L^n]L^{\alpha} + L^{\beta}[Q, L^n], \quad n \in \mathbb{Z}_+; \tag{16.43a}$$

(ii) $$\partial_t\, Tr(L^n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{16.43b}$$

Упражнение 16.44. Пусть R ассоциативное кольцо, $A, B \in \mathrm{Mat}_N(R)$. Покажите, что

$$Tr([A, B]) \in \mathrm{Com}(R). \tag{16.45}$$

Глава 17

Системы типа КП

В этой главе строится дискретизации по времени эволюции первого потока из решеточной иерархии КП и показывается, что эта эволюция приводит к корректному непрерывному пределу, что она гамильтонова, и допускает и Гиббонсовское, и гидродинамическое представления. Исследуются также родственные системы.

17.1 Иерархия КП

В этом разделе мы определием явную форму дискретизации по времени эволюции первого потока из иерархии КП и проверяем, что в пределе $\Delta t \to 0$ возникает корректный поток с непрерывным временем.

Расписывая определяющее уравнение (16.17):

$$[1+h(\zeta+\alpha)]\Big(\zeta+\sum\zeta^{-j}\widetilde{q}_j\Big)=\Big(\zeta+\sum\zeta^{-j}q_j\Big)[1+h(\zeta+\alpha)], \tag{17.1.1}$$

находим

$$(1+h\zeta)\zeta+h\zeta\alpha^{(-1)}+\sum\zeta^{-j}\widetilde{q}_j+h\sum\zeta^{1-j}\widetilde{q}_j+h\sum\zeta^{-j}\alpha^{(j)}\widetilde{q}_j= \tag{17.1.2a}$$

$$=\zeta(1+h\zeta)+h\zeta\alpha+\sum\zeta^{-j}q_j+h\sum\zeta^{1-j}q_j^{(-1)}+h\sum\zeta^{-j}q_j\alpha, \tag{17.1.2b}$$

и это равенство эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\alpha^{(-1)}+\widetilde{q}_0=\alpha+q_0^{(-1)}, \tag{17.1.2.$-$1}$$

$$[1+h\alpha^{(j)}]\widetilde{q}_j+h\widetilde{q}_{j+1}=q_j(1+h\alpha)+hq_{j+1}^{(-1)}, \quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{17.1.2j}$$

Это довольно любопытная система. Уравнение с номером j определяет шаг временной эволюции для $q_{j+1}, j=0,1,2,\ldots$, а уравнения на α нет. Что-то пропущено. Что именно, можно подсмотреть в примере с цепочкой Тоды (16.22–25): наш оператор L слишком длинен. Нам следует быть аккуратнее при работе с бесконечно-компонентными системами. Выход очевиден: надо взять конечный отрезок L,

$$L=\zeta+\sum_0^M\zeta^{-j}q_j, \quad M\in\mathbb{N}, \tag{17.1.3}$$

и *только в конце*, когда и если все, что надо найти, будет найдено, мы сможем доставить себе удовольствие, устремляя $M \to \infty$. Итак, вместо системы (17.1.2), мы приходим к рассмотрению системы

$$\widetilde{q}_0 + \alpha^{(-1)} = q_0^{(-1)} + \alpha, \tag{17.1.4}$$

$$[1 + h\alpha^{(j)}]\widetilde{q}_j + h\widetilde{q}_{j+1} = q_j(1 + h\alpha) + hq_{j+1}^{(-1)}, \quad 0 \leqslant j < M, \tag{17.1.5j}$$

$$[1 + h\alpha^{(M)}]\widetilde{q}_M = q_M(1 + h\alpha). \tag{17.1.5M}$$

Утверждение 17.1.6. Положим

$$q_{j|s} = \frac{1}{1 + h\alpha^{(j-s)}} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(j)}} q_j, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.1.7}$$

так что

$$q_{j|0} = \frac{1}{1 + h\alpha^{(j)}} q_j, \tag{17.1.8}$$

$$q_{j|s+1} = \frac{1}{1 + h\alpha^{(j-s-1)}} q_{j|s}. \tag{17.1.9}$$

В этих обозначениях, систему (17.1.5) можно разрешить относительно $\widetilde{q}_j$, следующим образом:

$$\widetilde{q}_j = q_{j|0}(1 + h\alpha) - \sum_{s>0} (-h)^s [\Delta^{-1}(q_{j+s|s-1}) - q_{j+s|s}(1 + h\alpha)], \tag{17.1.10j}$$

где подразумевается, что

$$q_j = 0 \quad \text{при} \quad j > M. \tag{17.1.11}$$

Доказательство. Докажем формулы (17.1.10) обратной индукцией по j, стартуя с $j = M$. (При $j > M$ эти формулы тривиальны). При $j = M$ формула (17.1.10M) дает

$$\widetilde{q}_M = q_{M|0}(1 + h\alpha) = \frac{1}{1 + h\alpha^{(M)}} q_M(1 + h\alpha), \tag{17.1.12}$$

что эквивалентно уравнению (17.1.5M).

Допустим, формула (17.1.10j) была доказана для всех $j > i$. При $j = i$ формула (17.1.5i) и предположение индукции дают:

$$\widetilde{q}_i = \frac{1}{1 + h\alpha^{(i)}} q_i(1 + h\alpha) + \frac{h}{1 + h\alpha^{(i)}} [q_{i+1}^{(-1)} - q_{i+1|0}(1 + h\alpha)] + \tag{17.1.13a}$$

$$+ \frac{h}{1 + h\alpha^{(i)}} \sum_{s>0} (-h)^s [\Delta^{-1}(q_{i+1+s|s-1}) - q_{i+1+s|s}(1 + h\alpha)]. \tag{17.1.13b}$$

Выражение (17.1.13a) можно переписать в виде

$$q_{i|0}(1 + h\alpha) - (-h)[\Delta^{-1}(q_{i+1|0}) - q_{i+1|1}(1 + h\alpha)]. \tag{17.1.14}$$

Выражение (17.1.13b) можно переписать, при помощи тождества (17.1.9), как

$$-\sum_{s>0} (-h)^{s+1} [\Delta^{-1}(q_{i+1+s|s}) - q_{i+1+s|1+s}(1 + h\alpha)]. \tag{17.1.15}$$

Складывая (17.1.14) и (17.1.15) получаем правую часть формулы (17.1.10i). ▮

Чтобы преобразовать систему (17.1.5) в явный шаг временной эволюции, осталось определить α в системе (17.1.10). Для этого мы используем оставшееся уравнение (17.1.4). При помощи формулы (17.1.10zero) находим:

$$0 = \widetilde{q}_0 - \alpha - \Delta^{-1}(q_0 - \alpha) =$$

$$= q_{0|0}(1 + h\alpha) - \sum_{s>0}(-h)^s[\Delta^{-1}(q_{s|s-1}) - q_{s|s}(1 + h\alpha)] - \alpha - \Delta^{-1}(q_0 - \alpha). \quad (17.1.16)$$

Дели справа на $(1 + h\alpha)$, получаем

$$0 = \left[\frac{1}{1 + h\alpha}(q_0 - \alpha) - (q_0 - \alpha)^{(-1)}\frac{1}{1 + h\alpha}\right] + \quad (17.1.17a)$$

$$+ \sum_{s>0}(-h)^s\left[q_{s|s} - \Delta^{-1}(q_{s|s-1})\frac{1}{1 + h\alpha}\right]. \quad (17.1.17b)$$

Далее, по формуле (17.1.9),

$$q_{s|s} = \frac{1}{1 + h\alpha}q_{s|s-1}. \quad (17.1.18)$$

Подставляя это в выражение (17.1.17b), мы можем переписать уравнение (17.1.17) в виде

$$[\widehat{L}_{(1+h\alpha)^{-1}} - \widehat{R}_{(1+h\alpha)^{-1}}\Delta^{-1}][q_0 - \alpha + \sum_{s>0}(-h)^s q_{s|s-1}] = 0, \quad (17.1.19)$$

что имеет решение

$$q_0 - \alpha + \sum_{s>0}(-h)^s q_{s|s-1} = 0. \quad (17.1.20)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1 + h\alpha^{(1)}} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}} q_s. \quad (17.1.21)$$

Дели слева на $(1 + h\alpha)$, это уравнение можно далее нереписать как

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}} q_s. \quad (17.1.22)$$

Так как эти формулы не содержат M, то *теперь* мы можем нерейти к пределу $M \to \infty$. В частности, из формулы (17.1.21) получаем:

$$\alpha = q_0 - hq_1 + O(h^2), \quad (17.1.23)$$

откуда

$$1 + h\alpha = 1 + hq_0 + O(h^2), \quad (17.1.24)$$

$$[1 + h\alpha^{(s)}]^{-1} = 1 - hq_0^{(s)} + O(h^2), \quad (17.1.25)$$

и подставляя эти соотношения в формулы временной эволюции (17.1.10j), находим

$$\widetilde{q}_j = [1 - hq_0^{(j)}]q_j(1 + hq_0) + h[\Delta^{-1}(q_{j+1}) - q_{j+1}] + O(h^2) \quad \Rightarrow \quad (17.1.26)$$

$$\frac{\widetilde{q}_j - q}{h} = (\Delta^{-1} - 1)(q_{j+1}) + q_j q_0 - q_0^{(j)} q_j + O(h), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (17.1.27)$$

В пределе $h \to 0$ воспроизводится система (9.1.28), если взять h равным *минус* Δt. Причину появления загадочного минуса можно найти в главе 16: переходя от формулы (16.10) к формулам (16.17) и (16.21) мы поменяли, для удобства вычислений, переменные с тильдой и без тильды, так что теперь $\widetilde{L}$ обозначает $L(t-\Delta t)$, а не $L(t+\Delta t)$. Я надеюсь, что это недоразумение не смертельно.

Читатель может теперь проверить, согласуется ли его решение Упражнения 16.30 (ii) с обрывом $\{0 = q_2 = q_3 \dots\}$ формулы (17.1.21), в виде

$$\alpha = q_0 - \frac{h}{1+h\alpha^{(1)}} q_1. \tag{17.1.28}$$

Упражнение 17.1.29. Введем следующую градуировку в кольце $C[[h]]$, $C = C_q$:

$$\mathrm{rk}(q_i^{(s)}) = i+1, \quad \mathrm{rk}(\alpha^{(s)}) = 1, \quad \mathrm{rk}(h) = -1. \tag{17.1.30}$$

Покажите, что если

$$\alpha = \sum_{i \geqslant 0} \alpha_i h^i, \quad \alpha_i \in C, \tag{17.1.31}$$

есть однородное веса $\mathrm{rk} = 1$ решение уравнения (17.1.19), то α автоматически удовлетворяет уравнению (17.1.20).
[Подсказка : Используйтие уравнение (17.1.17).]

Упражнение 17.1.32. Обратим направление времени в определения анзаца (17.1.1):

$$[1 + h(\zeta + \alpha)]L = \widetilde{L}[1 + h(\zeta + \alpha)], \tag{17.1.33}$$

конечно, α в этих уравнениях *различны*.
(i) Покажите, что разрешение этого анзаца приводит к следующим аналогам формул (17.1.10j,17.1.21, 22):

$$\widetilde{q}_j = [1 + h\alpha^{(j)}]q_{j|0} - \sum_{s>0} (-h\Delta^{-1})^s \{\Delta(q_{j+s|s-1}) - [1 + h\alpha^{(j+s)}]q_{j+s|s}\}, \tag{17.1.34}$$

$$[\widehat{R}_{(1+h\alpha)^{-1}} - \widehat{L}_{(1+h\alpha)^{-1}}\Delta]\Big(q_0 - \alpha + \sum_{s>0} (-h\Delta^{-1})^s \Big[q_s \frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s-1)}}\Big]\Big) = 0, \tag{17.1.35}$$

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0} (-h\Delta^{-1})^s \Big[q_s \frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s-1)}}\Big], \tag{17.1.36}$$

$$\frac{\alpha}{1+h\alpha} = \sum_{s \geqslant 0} (-h\Delta^{-1})^s \Big[q_s \frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}\Big], \tag{17.1.37}$$

где теперь

$$q_{j|s} = q_j \frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+; \tag{17.1.38}$$

(ii) Покажите, что

$$\alpha = q_0 - hq_1^{(-s)} + O(h^2), \tag{17.1.39}$$

$$1 + h\alpha^{(s)} = 1 + hq_0^{(s)} + O(h^2), \tag{17.1.40}$$

$$[1 + h\alpha^{(s)}]^{-1} = 1 - hq_0^{(s)} + O(h^2), \tag{17.1.41}$$

$$\frac{\widetilde{q}_j - q_j}{h} = (1 - \Delta^{-1})(q_{j+1}) + q_0^{(j)} q_j - q_j q_0 + O(h), \quad j \in \mathbb{Z}_+; \tag{17.1.42}$$

(iii) Обозначим

$$\bar{\alpha} = (1 + h\alpha)^{-1} = 1 + O(h). \tag{17.1.43}$$

Покажите, что уравнение (17.1.37) можно переписать в виде

$$\bar{\alpha} = 1 + \sum_{s \geqslant 0} \Delta^{-s}[q_s(-h\bar{\alpha}) \dots (-h\bar{\alpha}^{(s)})], \tag{17.1.44}$$

а уравнение (17.1.22) в виде

$$\bar{\alpha} = 1 + \sum_{s \geqslant 0} (-h\bar{\alpha}) \dots (-h\bar{\alpha}^{(s)}) q_s. \tag{17.1.45}$$

Остается вопрос, является ли дискретно-временная эволюция (17.1.10, 21) иерархии КП гамильтоновым отображением. Ясно, что так как наш анзац сводится к сопряжению оператора Лакса L, то не должно быть сомнений в том, что получающееся отображение сохраняет (первую) гамильтонову структуру, отвечающую этому оператору Лакса. (Аналогичные заклинания применимы и к другим операторам Лакса.) Еще более ясно, что никакие общие слова не заменят честного доказательства. И уж совсем ясно, что прямая проверка гамильтоновости требует головоломных вычислений, не говоря о молодости и смелости, необходимых добровольному проверяльщику; несоответствие между требуемым усилием и важностью ожидаемого результата делает неблагоразумной трату времени на эту проблему,— конечно, если только не найдется обходной путь, позволяющий избегнуть прямой проверки. Такой путь будет обсуждаться в следующем разделе.

Упражнение 17.1.46. Пусть $C_\alpha = R\langle\alpha^{(s)}\rangle$, $\widetilde{C}_\alpha = C_\alpha[[h]]$.
(i) Покажите, что

$$\{\mathrm{Ker}[\widehat{L}_{(1+h\alpha)^{-1}} - \widehat{R}_{(1+h\alpha)^{-1}}\Delta^{-1}] \quad \text{в} \quad \widetilde{C}_\alpha\} = R. \tag{17.1.47}$$

[Подсказка : Если $X \in \mathrm{Ker}[\dots]$, положите

$$X = \sqcap Y \sqcap^{-1}, \tag{17.1.48}$$

где $\sqcap$ есть генератор расширения $\widetilde{C}_\alpha$, удовлетворяющий соотношению

$$\sqcap^{(-1)} = \frac{1}{1 + h\alpha} \sqcap \quad]; \tag{17.1.49}$$

(ii) Используйте это для прямого доказательства Упражнения 17.1.29.

Замечание 17.1.50. Содержание этого раздела можно вкратце изложить так: существует единственный однородный веса $\mathrm{rk} = 1$ элемент $\alpha \in C[[h]]$, обслуживающий анзац $[1 + h(\zeta + \alpha)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta + \alpha)]$ (17.1.1), причем все идеалы вида

$$\{0 = q_{M+1} = q_{M+2} = \dots\}, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.1.51}$$

сохраняются при временной эволюции $L \mapsto \widetilde{L}$; эти же свойства верны для анзаца с обращением времени $[1 + h(\zeta + \alpha)]L = \widetilde{L}[1 + h(\zeta + \alpha)]$ (17.1.33).

При работе с параметрами, определяющими шаг временной эволюции, типа α из этого раздела, мы всегда будем считать эти параметры *однородными* в подходящей градуировке.

17.2 Форма Гиббонса и ее симплектические свойства

В этом разделе мы находим дискретизацию по времени формы Гиббонса иерархии КП из §13.1. Затем показываем, что так определенный шаг по времени есть симплектическое отображение, и заключаем отсюда, что шаг по времени для полной иерархии КП, построенный в §17.1 является гамильтоновым отображением.

Форма Гиббонса оператора Лакса для КП

$$L = \zeta + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{-j} q_j \tag{17.2.1}$$

имеет вид

$$L = \zeta + \boldsymbol{p}^t (1 - \zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{q}. \tag{17.2.2}$$

Однако, для конечного отрезка L

$$L = \zeta + \sum_{0}^{M} \zeta^{-j} q_j, \tag{17.2.3}$$

который в §17.1 являлся необходимым прмежуточным звеном в выводе дискретно-временной эволюции иерархии КП, формы Гиббонса не существует. Следовательно, логика дискретизации по времени должна быть более тонкой, чем в §17.1.

В качестве дискретной по времени версии уравнений Гиббонса (13.1.3):

$$\partial_t(\boldsymbol{p}) = (\zeta + \boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}^{(1)} + (\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q})\boldsymbol{p}, \tag{17.2.4a}$$

$$\partial_t(\boldsymbol{q}) = -[(\zeta + \boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q})^\dagger](\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{q}^{(-1)} - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q}), \tag{17.2.4b}$$

возьмем

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = [1 + h(\zeta + \alpha)]^{-1}(\boldsymbol{p}), \tag{17.2.5a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = [1 + h(\zeta + \alpha)]^{\dagger}(\boldsymbol{q}), \tag{17.2.5b}$$

где

$$\alpha = (\widetilde{\boldsymbol{p}}^t \boldsymbol{q})(1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t \boldsymbol{q})^{-1}, \tag{17.2.6}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \widetilde{\boldsymbol{p}}^t \boldsymbol{q} \quad \left(= \{[1 + h(\zeta + \alpha)]^{-1}(\boldsymbol{p})\}^t \boldsymbol{q}\right). \tag{17.2.7}$$

Мы собираемся показать, что преобразование Гиббонса

$$q_j = \boldsymbol{p}^{(j)t} \boldsymbol{q}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.2.8}$$

переводит временную эволюцию (17.2.5, 7) в пространстве $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ во временную эволюцию (17.1.10, 22) в КП-пространстве.

Утверждение 17.2.9. Система (17.1.10, 22) эквивалентна системе (17.1.2, 22).

Доказательство. В процессе доказательства Утверждения 17.1.6 мы эффективно доказали эквивалентность систем (17.1.10) и $\{(17.1.10|_{j=0})$ и $(17.1.2j); \ \forall\ j \geqslant 0).\}$ Следовательно, системы (17.1.10, 22) и $(17.1.10|_{j=0},\ 2j,\ 22)$ эквивалентны. Далее, наш вывод формулы (17.1.22) доказывает эквивалентность систем $(17.1.10|_{j=0}, 22)$ и $(17.1.2. -1, 22)$. ▮

Теперь мы готовы проверить, что из уравнений (17.2.5, 7) следуют, при преобразовании Гиббонса (17.2.8), уравнении (17.1.2, 22).

Лемма 17.2.10.

$$[1+h(\zeta+\alpha)]^{-1}=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}\zeta^s. \tag{17.2.11}$$

Доказательство. Имеем

$$[1+h(\zeta+\alpha)]^{-1}=\Big[(1+h\alpha)\Big(1+\frac{h}{1+h\alpha}\zeta\Big)\Big]^{-1}=\Big(1+\frac{h}{1+h\alpha}\zeta\Big)^{-1}\frac{1}{1+h\alpha}=$$
$$=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\Big(\frac{1}{1+h\alpha}\zeta\Big)^s\frac{1}{1+h\alpha}=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}\zeta^s. \qquad \blacksquare$$

Следствие 17.2.12. При преобразовании Гиббонса (17.2.8),

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}q_s=\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}. \tag{17.2.13}$$

Таким образом, формула (17.1.22) восстанавливается из (17.2.7). Другими словами, преобразование Гиббонса (17.2.8) переводит α в пространстве Лакса в α в пространстве Гиббонса.

Доказательство. Имеем

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}\overset{(17.2.5a)}{=}\{[1+h(\zeta+\alpha)]^{-1}(\boldsymbol{p})\}^t\boldsymbol{q}\overset{(17.2.11)}{=}$$
$$=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}\boldsymbol{p}^{(s)t}\boldsymbol{q}=\sum(-h)^s\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}q_s. \qquad \blacksquare$$

На очереди формулы (17.1.2j). Надо показать, что

$$[1+h\alpha^{(j)}](\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)t}\widetilde{\boldsymbol{q}})+h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j+1)t}\widetilde{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}(1+h\alpha)+h\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}^{(-1)}. \tag{17.2.14}$$

Левая часть этого равенства преобразуется, согласно формулам (17.2.5), в

$$\{[1+h\alpha^{(j)}]\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j)}+h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(j+1)}\}^t\widetilde{\boldsymbol{q}}=\{\Delta^j[(1+h\alpha)\widetilde{\boldsymbol{p}}+h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}]\}^t\widetilde{\boldsymbol{q}}=\Delta^j(\boldsymbol{p})^t\widetilde{\boldsymbol{q}}=$$
$$=\boldsymbol{p}^{(j)t}(\boldsymbol{q}+h\boldsymbol{q}^{(-1)}+h\boldsymbol{q}\alpha)=\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}(1+h\alpha)+h\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}^{(-1)},$$

а это — правая часть равенства (17.2.14).

Наконец, оставшееся непроверенным уравнение (17.1.2. − 1):

$$\widetilde{q}_0+\alpha^{(-1)}=\alpha+q_0^{(-1)},$$

можно переписать в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\widetilde{\boldsymbol{q}}+\alpha^{(-1)}=\alpha+\boldsymbol{p}^{(-1)t}\boldsymbol{q}^{(-1)}.$$

В силу формулы (17.2.5b, 7) это эквивалентно

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}^t[\boldsymbol{q}(1+h\alpha)+h\boldsymbol{q}^{(-1)}]+\alpha^{(-1)}=\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}(1+h\alpha)+\boldsymbol{p}^{(-1)t}\boldsymbol{q}^{(-1)}.$$

Сократив члены и применив Δ, преобразуем это к виду

$$\alpha = [\boldsymbol{p} - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}]^t\boldsymbol{q} \overset{(17.2.5\text{в})}{=} \left([1 + h(\zeta + \alpha)](\widetilde{\boldsymbol{p}}) - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}\right)^t\boldsymbol{q} = (1 + h\alpha)\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}, \tag{17.2.15}$$

что верно в силу (17.2.7).

Таким образом, временная эволюция в пространстве Гиббонса $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ покрывает временную эволюцию в пространстве КП $\{q_j\}$. Покажем теперь, что эволюция в пространстве Гиббонса задает симплектическое отображение. Для этого перепишем уравнение (17.2.5) в виде

$$\boldsymbol{p} = [1 + h(\zeta + \alpha)](\widetilde{\boldsymbol{p}}) = \widetilde{\boldsymbol{p}} + h(\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)} + \alpha\widetilde{\boldsymbol{p}}) = (1 + h\alpha)\widetilde{\boldsymbol{p}} + h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}, \tag{17.2.16a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = [1 + h(\zeta + \alpha)]^\dagger(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}(1 + h\alpha) + h\boldsymbol{q}^{(-1)}. \tag{17.2.16b}$$

Используя формулу (17.2.7) в виде

$$1 + h\alpha = \frac{1}{1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}}, \tag{17.2.17}$$

мы можем переписать систему (17.2.16) далее, как

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}}\widetilde{\boldsymbol{p}} + h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}, \tag{17.2.18a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}\frac{1}{1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}} + h\boldsymbol{q}^{(-1)}. \tag{17.2.18b}$$

Далее, пусть

$$S = S(\widetilde{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}) = \frac{\ln(1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q})}{-h} + h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}^{(-1)}. \tag{17.2.19}$$

Тогда

$$\frac{\delta S}{\delta\widetilde{\boldsymbol{p}}} = \boldsymbol{q}\frac{1}{1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}} + h\boldsymbol{q}^{(-1)}, \tag{17.2.20a}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{q}} = \frac{1}{1 - h\widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}}\widetilde{\boldsymbol{p}} + h\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}. \tag{17.2.20b}$$

Отображение шаг по времени (17.2.18) может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{q}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{q}} = \frac{\delta S}{\delta\widetilde{\boldsymbol{p}}}. \tag{17.2.21}$$

Согласно результатам Приложений A4, §A4.4 (или из стандартного курса физики), формулы (17.2.21) описывают симплектическое отображение с производящей функцией $S(\widetilde{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q})$. Из этого факта мы можем заключить, что шаг по времени (17.1.10, 22) для полной системы КП есть гамильтоново отображение, следующим образом. Согласно Теореме 13.1.19, отображение Гиббонса (17.2.8) гамильтоново между канонической гамильтоновой структурой в $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$-пространстве и гамильтоновой структурой $B^{\text{КП}}$ (12.1.12) в КП-пространстве. Взяв достаточно большое число независимых компонент для векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, мы получим сколь угодно большое число независимых комбинаций $q_j = \boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}$. Временная эволюция этих q_j идентична эволюции комбинаций $\boldsymbol{p}^{(j)t}\boldsymbol{q}$ в кольце $C_{p,q}$. Однако, в КП-пространстве, эволюция q_j зависит от *всех* остальных q_i. Чтобы справиться с этим, рассмотрим спачала связь $h^r = 0$

для некоторого фиксированного $r \in \mathbb{N}$. Тогда, для любого фиксированного $M \in \mathbb{N}$, можно выбрать размерность $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ настолько большой, чтобы эволюция M первых q_j, по модулю h^r, описывалась точно, как предписано преобразованием Гиббонса, и тогда скобки Пуассона между любыми двумя элементами из кольца $C\langle q_j^{(s)}\rangle$, $j < M$, сохраняются при шаге по времени. Теперь устремим $r \to \infty$, $M \to \infty$, и все в порядке.

Упражнение 17.2.22. Покажите, что шаг по времени для системы Гиббонса (17.2.5, 7) имеет вид

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}}{-h} = (\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q})\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}^{(1)} + O(h), \tag{17.2.23a}$$

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{q}}{-h} = -[\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}^t \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}^{(-1)}] + O(h), \tag{17.2.23b}$$

что согласуется с формулами (17.2.4).

Обсудим вкратце схему с обратным временем для формы Гиббонса. Для этого просто поменяем местами переменные с тильдой и без. Уравнения движения (17.2.5–7) примут вид

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = [1 + h(\zeta + \alpha)](\boldsymbol{p}), \tag{17.2.24a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = \{[1 + h(\zeta + \alpha)]^\dagger\}^{-1}(\boldsymbol{q}), \tag{17.2.24b}$$

$$\alpha = (\boldsymbol{p}^t \widetilde{\boldsymbol{q}})(1 - h\boldsymbol{p}^t \widetilde{\boldsymbol{q}})^{-1}, \tag{17.2.25}$$

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \boldsymbol{p}^t \widetilde{\boldsymbol{q}} \quad \left(= \boldsymbol{p}^t \{1 + h(\zeta + \alpha)]^\dagger\}^{-1}(\boldsymbol{q})\right). \tag{17.2.26}$$

Формулы (17.1.2j) и (17.1.2. -1) с переставленными тильдами не требуют новой проверки, если мы проверим, что после преобразования Гиббонса (17.2.8) решение α уравнения (17.1.37) в пространстве Лакса:

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \sum_{s \geqslant 0} (-h\Delta^{-1})^s \left[q_s \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}} \right], \tag{17.2.27}$$

превращается в решение α уравнения (17.2.26) в пространстве Гиббонса.

Лемма 17.2.28.

$$\{[1 + h(\zeta + \alpha)]^\dagger\}^{-1} = \sum_{s \geqslant 0} (-h\zeta^{-1})^s \widehat{R}_{\frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}}. \tag{17.2.29}$$

Доказательство. Обозначив

$$\bar{\alpha} = (1 + h\alpha)^{-1}, \tag{17.2.30}$$

имеем

$$[1 + h(\zeta + \alpha)]^\dagger = (\widehat{L}_{1+h\alpha} + h\zeta)^\dagger = \widehat{R}_{1+h\alpha} + h\zeta^{-1} = (1 + h\zeta^{-1}\widehat{R}_{\bar{\alpha}})\widehat{R}_{1+h\alpha}, \tag{17.2.31}$$

откуда

$$\{[1 + h(\zeta + \alpha)]^\dagger\}^{-1} = [(1 + h\zeta^{-1}\widehat{R}_{\bar{\alpha}})\widehat{R}_{1+h\alpha}]^{-1} = \widehat{R}_{\bar{\alpha}} \sum_{s \geqslant 0} (-h\zeta^{-1}\widehat{R}_{\bar{\alpha}})^s =$$

$$= \widehat{R}_{\bar{\alpha}} \Big(1 + \sum_{s > 0} (-h)^s \widehat{R}_{\bar{\alpha}^{(-1)}} \ldots \widehat{R}_{\bar{\alpha}^{(-s)}} \zeta^{-s} \Big) = \widehat{R}_{\alpha} + \sum_{s > 0} (-h)^s \widehat{R}_{\bar{\alpha}^{(-s)} \ldots \bar{\alpha}} \zeta^{-s} =$$

$$= \sum_{s \geqslant 0} (-h\zeta^{-1})^s \widehat{R}_{\bar{\alpha} \ldots \bar{\alpha}^{(s)}}. \qquad \blacksquare$$

Следовательно, после преобразования Гиббонса (17.2.8), правая часть формулы (17.2.27) превращается в

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta^{-1})^s[\boldsymbol{p}^{(s)t}\boldsymbol{q}\bar{\alpha}\ldots\bar{\alpha}^{(s)}]=\boldsymbol{p}^t(\ldots), \tag{17.2.32}$$

где

$$(\ldots)=\sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta^{-1})^s[\boldsymbol{q}\bar{\alpha}\ldots\bar{\alpha}^{(s)}]=\Big(\sum(-h\zeta^{-1})^s\widehat{R}_{\bar{\alpha}\ldots\bar{\alpha}^{(s)}}\Big)(\boldsymbol{q})\quad\overset{(17.2.29)}{=}$$

$$=\{[1+h(\zeta+\alpha)]^{\dagger}\}^{-1}(\boldsymbol{q})\quad\overset{(17.2.24\mathrm{b})}{=}\widetilde{\boldsymbol{q}}.$$

Следовательно, правая часть (17.2.32) превращается в

$$\boldsymbol{p}^t\widetilde{\boldsymbol{q}}\quad\overset{(17.2.26)}{=}\frac{\alpha}{1+h\alpha},$$

и это совпадает с левой частью формулы (17.2.27).

Шаг по времени (17.2.24) симплектичен с производящей функцией

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}(\boldsymbol{p},\widetilde{\boldsymbol{q}})=\frac{\ln(1-h\boldsymbol{p}^t\widetilde{\boldsymbol{q}})}{-h}+h\boldsymbol{p}^t\widetilde{\boldsymbol{q}}^{(-1)}, \tag{17.2.33}$$

причем формулу (17.2.24) надо заменить на

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}=\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\widetilde{\boldsymbol{q}}},\quad \boldsymbol{q}=\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\boldsymbol{p}}. \tag{17.2.34}$$

Точно также, как и раньше, отсюда следует, что обратная по времени эволюция КП (17.1.34, 36) сохраняет 1-ю гамильтонову структуру иерархии КП, — очевидное заключение, так как эта эволюция обратна к прямой временной эволюции (записанной в старых координатах), и отображение, обратное к гамильтоновому, также гамильтоново.

Замечание 17.2.35. В коммутативном случае решеточная иерархия КП имеет локальную 2-ю гамильтонову структуру. Похоже, что шаг по времени, построенный в предыдущем разделе, является гамильтоновым отображением также и по отношению к ней.

Упражнение 17.2.36. Покажите, что из формул (17.2.24) для обратного шага следует

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{p}}{h}=\boldsymbol{p}^{(1)}+(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}+O(h), \tag{17.2.37a}$$

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{q}}{h}=-\boldsymbol{q}^{(-1)}-\boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{q})+O(h). \tag{17.2.37b}$$

17.3 Гидродинамическая форма

В этом разделе мы показываем, что пошаговую эволюцию по времени, построенную в §17.1 для пространства КП, можно корректно ограничить на пошаговую эволюцию в гидродинамическом подпространстве, и эта последняя эволюция гамильтонова.

Гидродинамическая форма иерархии КП возникает в результате наложения бесконечного числа связей (14.2.2)

$$q_{j+2} = q_1^{(j+1)} \frac{1}{q_0^{(j+1)}} \dots q_1^{(1)} \frac{1}{q_0^{(1)}} q_1, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.3.1}$$

Мы знаем из §14.2, что это наложение корректно определено и гамильтоново. Теперь мы проверим, что такое же двойное заключение применимо также к дискретно-временной эволюции, причем гамильтоновость гидродинамической формы следует из: {корректности определения (пока недоказанной); гамильтоновости временной эволюцией в КП пространстве (доказанной в конце §17.2); и Теоремы 14.2.8.}

Проверим, что временная эволюция (17.1.10, 22) в КП пространстве выдерживает связи (17.3.1), которые мы перепишем в виде

$$q_{j+1} = u^{(j)} q_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.3.2}$$

$$u = q_1/q_0, \quad \bar{h} = q_0, \tag{17.3.3}$$

где черточка над высотой поверхности жидкости $\bar{h}$, которая ранее обозначалась просто h, поставлена, чтобы отличать ее от формального параметра h, описывающего эволюцию на шаг времени Δt. Согласно Утверждению 17.2.9, требуется наложить связи (17.3.2) на систему (17.1.2, 22). Уравнение на α (17.1.22) превращается просто в

$$\frac{\alpha}{1+h\alpha} = \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s \frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}} \frac{1}{u^{(s)}} u^{(s)} \dots u\bar{h}. \tag{17.3.4}$$

Уравнение (17.1.2. – 1) дает эволюцию $\bar{h} = q_0$:

$$\tilde{\bar{h}} = \alpha + \Delta^{-1}(\bar{h} - \alpha). \tag{17.3.5}$$

Уравнение (17.1.2j) превращается в

$$[1 + h(\alpha + \tilde{u})]^{(j)} \tilde{q}_j = q_j(1+h\alpha) + hu^{(j-1)} q_j^{(-1)}, \tag{17.3.6j}$$

где подразумевается, что

$$q_j = u^{(j)-1} u^{(j)} \dots u\bar{h}. \tag{17.3.7}$$

Заменяя j на $j+1$ в уравнения (17.3.6j), находим

$$[1 + h(\alpha + \tilde{u})^{(j+1)}] \tilde{q}_{j+1} = q_{j+1}(1+h\alpha) + hu^{(j)} q_{j+1}^{(-1)},$$

что можно переписать в виде

$$[1 + h(\alpha + \tilde{u})^{(j+1)}] \tilde{u}^{(j)} \tilde{q}_j = u^{(j)} q_j (1+h\alpha) + hu^{(j)} u^{(j-1)} q_j^{(-1)} =$$

$$= u^{(j)} [q_j(1+h\alpha) + hu^{(j-1)} q_j^{(-1)}] \overset{(17.3.6j)}{=} u^{(j)} [1 + h(\alpha + \tilde{u})^{(j)}] \tilde{q}_j,$$

что эквивалентно равенству

$$[1 + h(\alpha + \tilde{u})^{(j+1)}] \tilde{u}^{(j)} = u^{(j)} [1 + h(\alpha + \tilde{u})^{(j)}],$$

которое, окончательно, эквивалентно *независящему* от j уравнению

$$|1 + h(\alpha + \tilde{u})^{(1)}] \tilde{u} = u[1 + h(\alpha + \tilde{u})|. \tag{17.3.8}$$

Следовательно, система уравнений $\{(17.1.2j) \mid j = 0,1,\dots\}$ эквивалентна системе $\{(17.1.2|_{j=0})$ & $(17.3.8)\}$. При $j = 0$, уравнение $(17.1.2j)$ можно списать с формулы $(17.3.6|_{j=0})$:

$$[1+h(\alpha+\widetilde{u})]\widetilde{\bar{h}} = \bar{h}(1+h\alpha)+h(u\bar{h})^{(-1)}. \tag{17.3.9}$$

В результате, мы остались с эволюционным уравнением для u, (17.3.8), *двумя эволюционными* уравнениями для $\bar{h}$, (17.3.5, 9), и уравнением на α (17.3.4). Система кажется переопределенной, но мы сейчас покажем, что это впечатление обманчиво, показав, в обратимой манере, что α–уравнение (17.3.4) *выводится* из u– и $\bar{h}$–уравнений (17.3.8, 5, 9).

Продемонстрируем это следующим образом. Подставим формулу (17.3.5) в формулу (17.3.9) и разделим результат слева на $[1+h(\alpha+\widetilde{u})]$:

$$\alpha-\alpha^{(-1)}+\bar{h}^{(-1)} = \frac{1}{1+h(\alpha+\widetilde{u})}\bar{h}(1+h\alpha)+h\Big(\frac{1}{[1+h(\alpha+\widetilde{u})]^{(1)}}u\bar{h}\Big)^{(-1)}. \tag{17.3.10}$$

Перепишем формулу (17.3.8) в виде

$$u = [1+h(\alpha+\widetilde{u})^{(1)}]\widetilde{u}\frac{1}{1+h(\alpha+\widetilde{u})} \tag{17.3.11}$$

и подставим ее в правую часть уравнения (17.3.10):

$$\alpha-\alpha^{(-1)}+\bar{h}^{(-1)} = \frac{1}{1+h(\alpha+\widetilde{u})}\bar{h}(1+h\alpha)+h\Big(\widetilde{u}\frac{1}{1+h(\alpha+\widetilde{u})}\bar{h}\Big)^{(-1)}. \tag{17.3.12}$$

Обозначим

$$X = \frac{1}{1+h(\alpha+\widetilde{u})}\bar{h} = \bar{h}+O(h). \tag{17.3.13}$$

Тогда уравнение (17.3.12) превращается в

$$\alpha-\alpha^{(-1)}+[1+h(\alpha+\widetilde{u})^{(-1)}]X^{(-1)} = X(1+h\alpha)+h\widetilde{u}^{(-1)}X^{(-1)}, \tag{17.3.14}$$

которое можно переписать в виде

$$\alpha-\alpha^{(-1)}+[1+h\alpha^{(-1)}]X^{(-1)} = X(1+h\alpha). \tag{17.3.15}$$

Деля справа на $(1+h\alpha)$, получим:

$$\frac{\alpha}{1+h\alpha}-\alpha^{(-1)}\frac{1}{1+h\alpha}+[1+h\alpha^{(-1)}]X^{(-1)}\frac{1}{1+h\alpha}-X = 0. \tag{17.3.16}$$

Будем, временно, воспринимать это как уравнение на X в кольце $C_\alpha[[h]]$, и искать однородное решение веса $\mathrm{rk}=1$ в градуировке

$$\mathrm{rk}(u^{(s)}) = \mathrm{rk}(\bar{h}^{(s)}) = \mathrm{rk}(\alpha^{(s)}) = -\,\mathrm{rk}(h) = 1, \quad s\in\mathbb{Z}. \tag{17.3.17}$$

Очевидно, если такое решение существует, оно единственно. Перепишем уравнение (17.3.16) как

$$(\widehat{R}_{(1+h\alpha)^{-1}}\Delta^{-1}\widehat{L}_{1+h\alpha}-1)\Big(X-\frac{\alpha}{1+h\alpha}\Big) = 0. \tag{17.3.18}$$

Его однородное решение равно

$$X = \frac{\alpha}{1+h\alpha}. \tag{17.3.19}$$

Согласно формуле (17.3.13), это можно переписать, как

$$\frac{\alpha}{1+h\alpha} = \frac{1}{1+h(\alpha+\widetilde{u})}\bar{h}. \tag{17.3.20}$$

Обозначим

$$Y = [1+h(\alpha+\widetilde{u})]^{-1} = 1 + O(h). \tag{17.3.21}$$

Согласно формуле (17.3.8),

$$Y^{-1} = 1 + h\alpha + hY^{(1)}uY^{-1}, \tag{17.3.22}$$

что можно переписать, как

$$1 - hY^{(1)}u = (1+h\alpha)Y. \tag{17.3.23}$$

Лемма 17.3.24. Следующий ряд по h удовлетворяет уравнению (17.3.23):

$$Y = \sum_{s\geqslant 0}(-h)\frac{1}{(1+h\alpha)\dots[1+h\alpha^{(s)}]}\frac{1}{u^{(s)}}u^{(s)}\dots u. \tag{17.3.25}$$

Доказательство. Для ряда (17.3.25) имеем:

$$Y = \frac{1}{1+h\alpha} + \frac{1}{1+h\alpha}\sum_{s>0}\frac{(-h)^s}{[1+h\alpha^{(1)}]\dots[1+h\alpha^{(s)}]}u^{(s-1)}\dots u, \tag{17.3.26}$$

откуда для правой части уравнения (17.3.23) получаем:

$$(1+h\alpha)Y = 1 + \sum_{s\geqslant 0}\frac{(-h)^{s+1}}{[1+h\alpha^{(1)}]\dots[1+h\alpha^{(s+1)}]}u^{(s)}\dots u. \tag{17.3.27}$$

С другой стороны, для левой части этого уравнения получаем выражение

$$1 - hY^{(1)}u = 1 + \sum_{s\geqslant 0}\frac{(-h)^{s+1}}{[1+h\alpha^{(1)}]\dots[1+h\alpha^{(s+1)}]}\frac{1}{u^{(s+1)}}u^{(s+1)}\dots u^{(1)}u, \tag{17.3.28}$$

совпадающее с (17.3.27). ∎

Формула (17.3.25) дает *какое-то* решение уравнения (17.3.23). Однако, переписав это уравнение в виде

$$Y = 1 - h[Y^{(1)}u + \alpha Y], \tag{17.3.29}$$

мы видим, что оно имеет единственное решение, регулярное по h, значит мы его и нашли. Подставляя это решение в формулы (17.3.21, 20) приходим к искомой формуле (17.3.4). Конец.

Упражнение 17.3.30. Покажите, что

$$\alpha = (1-hu)\bar{h} + O(h^2), \tag{17.3.31}$$

и получите, что временная эволюция в гидродинамическом представлении имеет вид

$$\frac{\widetilde{u}-u}{-h} = (\bar{h}+u)^{(1)}u - u(\bar{h}+u) + O(h), \tag{17.3.32a}$$

$$\frac{\widetilde{\bar{h}}-\bar{h}}{-h} = (1-\Delta^{-1})(u\bar{h}) + O(h), \tag{17.3.32b}$$

в согласия с формулами (14.1.22).

Упражнение 17.3.33. Покажите, что гидродинамическая переменная α определяется уравнением

$$\alpha = \bar{h} - h[1 + h\alpha^{(1)}]^{-1}\alpha^{(1)}\bar{h}^{(1)-1}u\bar{h}. \tag{17.3.34}$$

Так как гидродинамическая эволюция возникает при ограничении эволюции КП на "2-мерное подмногообразие" (17.3.1), и так как при таком ограничении гамильтонова структура $B^{\text{КП}}$ превращается в гамильтонову структуру B^{HD} (14.2.9), то гидродинамическая эволюция является гамильтоновым отображение (более точно, однопараметрическим семейством гамильтоновых отображений) в гамильтоновой структуре B^{HD}. Займемся проблемой гидродинамической формы с обратным временем. Переставляя переменные с тильдой и без тильды, получаем:

1) Из уравнения (17.1.2. − 1):

$$\tilde{\bar{h}} = (1 - \Delta)(\alpha) + \bar{h}^{(1)}; \tag{17.3.35}$$

2) Из уравнений (17.1.2j), в форме уже выведенных уравнений (17.3.8, 9):

$$[1 + h(\alpha + u)^{(1)}]u = \tilde{u}[1 + h(\alpha + u)], \tag{17.3.36}$$

$$[1 + h(\alpha + u)]\bar{h} = \tilde{\bar{h}}(1 + h\alpha) + h(\tilde{u}\tilde{\bar{h}})^{(-1)}; \tag{17.3.37}$$

3) Из α–уравнения (17.1.37):

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \sum_{s \geqslant 0}(-h\Delta^{-1})^s\Big[u^{(s)-1}u^{(s)} \ldots u\bar{h}\frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}}\Big]. \tag{17.3.38}$$

Гимнастика, проделанная при анализе прямого времени, чрезвычайно упрощает последующие вычисления. Действительно, дополнительное $\tilde{\bar{h}}$–уравнение в тройке (17.3.35–37) (скажем, уравнение (17.3.37)) приводит, с учетом формулы (17.3.20), к соотношению

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \frac{1}{1 + h(\alpha + u)}\tilde{\bar{h}}. \tag{17.3.39}$$

Приводя к общему знаменателю и используя формулу (17.3.35), получаем

$$(1 + h\alpha + hu)\alpha = [\alpha + (\bar{h} - \alpha)^{(1)}](1 + h\alpha), \tag{17.3.39$'$}$$

что можно переписать в виде

$$u\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = (\bar{h} - \alpha)^{(1)}/h. \tag{17.3.40}$$

Мы собираемся показать, что уравнение (17.3.40) следует из определяющего α–уравнения (17.3.38). Действительно, левую часть равенства (17.3.40) можно переписать в виде

$$\sum_{s \geqslant 0}(-h\Delta^{-1})^s\Big[u^{(s)} \ldots u\bar{h}\frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}}\Big]. \tag{17.3.41ℓ}$$

Для правой часть равенства (17.3.40) используем определяющее уравнение на α в виде (17.1.36):

$$\begin{aligned}
(\bar{h} - \alpha)^{(1)}/h = (-h\Delta^{-1})^{-1}(\alpha - \bar{h}) = \\
= (-h\Delta^{-1})^{-1}\sum_{s > 0}(-h\Delta^{-1})^s\Big[u^{(s)-1}u^{(s)} \ldots u\bar{h}\frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s-1)}}\Big] = \\
= \sum_{s \geqslant 0}(-h\Delta^{-1})^s\Big[u^{(s)} \ldots u\bar{h}\frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}}\Big],
\end{aligned} \tag{17.3.41r}$$

и это совпадает с (17.3.41ℓ).

Опять, обратная по времени гидродинамическая эволюция (17.3.35, 36, 38) гамильтонова относительно гамильтоновой матрицы B^{HD} (14.2.9).

Упражнение 17.3.42. (i) Покажите, что в случае обратного времени α удовлетворяет соотношению

$$\alpha = \bar{h} - h(u\bar{h})^{(-1)} + O(h^2); \tag{17.3.43}$$

(ii) Выведите из уравнений движения (17.3.35, 36), что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{h} = (\bar{h} + u)^{(1)}u - u(u + \bar{h}) + O(h), \tag{17.3.44a}$$

$$\frac{\widetilde{\bar{h}} - \bar{h}}{h} = (1 - \Delta^{-1})(u\bar{h}) + O(h). \tag{17.3.44b}$$

Согласно Теореме 14.3.21, предел $h \to 0$ дискретно-временной системы (17.3.22), непрерывная система (14.1.22), допускает связь

$$\bar{h} = u^{(-1)}. \tag{17.3.45}$$

Проверим, что эта связь совместна и с дискретной системой. Это означает, что мы должны проверить совместность следующих уравнений:

A) В случае прямого времени:

1) $\widetilde{u}$–уравнение (17.3.8):

$$[1 + h(\alpha + \widetilde{u})]^{(1)}\widetilde{u} = u[1 + h(\alpha + \widetilde{u})]; \tag{17.3.46}$$

2) $\widetilde{u}$–уравнение (17.3.20):

$$1 + h(\alpha + \widetilde{u}) = u^{(-1)}(1 + h\alpha)\alpha^{-1}; \tag{17.3.47}$$

3) α–уравнение (17.3.4):

$$\frac{\alpha}{1 + h\alpha} = \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}} u^{(s-1)} \dots u^{(-1)}; \tag{17.3.48}$$

4) $\widetilde{\bar{h}}$–уравнение (17.3.5):

$$\widetilde{u}^{(-1)} = u^{(-2)} + (1 - \Delta^{-1})(\alpha). \tag{17.3.49}$$

a) Подставляя формулу (17.3.47) в равенство (17.3.46), получаем

$$u[(1 + h\alpha)/\alpha]^{(1)}\widetilde{u} = uu^{(-1)}(1 + h\alpha)/\alpha,$$

или

$$\widetilde{u} = [\alpha/(1 + h\alpha)]^{(1)}u^{(-1)}(1 + h\alpha)/\alpha. \tag{17.3.50}$$

Это надо сравнить с выражением для $\widetilde{u}$ из уравнения (17.3.47):

$$\widetilde{u} = [u^{(-1)}(1 + h\alpha)/\alpha - (1 + h\alpha)]/h. \tag{17.3.51}$$

Приравнивая эти два выражения, находим

$$[h\alpha/(1 + h\alpha)]^{(1)}u^{(-1)} = u^{(-1)} - \alpha,$$

или

$$[-1/(1+h\alpha)]^{(1)}u^{(-1)} = -\alpha,$$

так что

$$u^{(-1)} = (1+h\alpha^{(1)})\alpha; \tag{17.3.52}$$

b) Используя обозначение $\bar{\alpha} = (1+h\alpha)^{-1}$, α–уравнение (17.3.48) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1+h\alpha} &= \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\bar{\alpha}\ldots\bar{\alpha}^{(s)}u^{(s-1)}\ldots u^{(-1)} = \\ &= \bar{\alpha}\Big[1-h\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\bar{\alpha}^{(1)}\ldots\bar{\alpha}^{(s+1)}u^{(s)}\ldots u\Big]u^{(-1)} = \\ &= \bar{\alpha}\Big[1-h\Big(\frac{\alpha}{1+h\alpha}\Big)^{(1)}\Big]u^{(-1)} = \frac{1}{1+h\alpha}\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}u^{(-1)}, \end{aligned} \tag{17.3.53}$$

то есть

$$u^{(-1)} = (1+h\alpha^{(1)})\alpha,$$

и это совпадает с уравнением (17.3.52);

c) Подставляя формулу (17.3.52) в $\widetilde{u}$–уравнение (17.3.50), получаем

$$\widetilde{u} = \alpha^{(1)}(1+h\alpha). \tag{17.3.54}$$

Формула (17.3.49), с другой стороны, диктует

$$\widetilde{u} = u^{(-1)} + (\Delta-1)(\alpha) \overset{(17.3.52)}{=} [1+h\alpha^{(1)}]\alpha + \alpha^{(1)} - \alpha = \alpha^{(1)}(1+h\alpha),$$

и это совпадает с формулу (17.3.54).

Вывод: эволюция со связью $\{u = \bar{h}^{(1)}\}$ задается формулами (17.3.54, 52):

$$\widetilde{u} = \alpha^{(1)}(1+h\alpha), \quad u^{(-1)} = (1+h\alpha^{(1)})\alpha, \tag{17.3.55}$$

или, эквивалентно,

$$\widetilde{\bar{h}} = \alpha(1+h\alpha^{(-1)}), \quad \bar{h} = (1+h\alpha^{(1)})\alpha. \tag{17.3.56}$$

Это можно выразить в терминах *едиственного скалярного поля* α :

$$(1+h\widetilde{\alpha}^{(1)})\widetilde{\alpha} = \alpha(1+h\alpha^{(-1)}). \tag{17.3.57}$$

Упражнение 17.3.58. Получите из этого уравнения, что

$$\frac{\widetilde{\alpha}-\alpha}{-h} = \alpha^{(1)}\alpha - \alpha\alpha^{(-1)} + O(h), \tag{17.3.59}$$

в согласии с формулами (17.3.56) и (14.3.20).

B) В случае обратного времени:

1) $\widetilde{\bar{h}}$-уравнение (17.3.35):

$$\widetilde{u}^{(-1)} = (1-\Delta)(\alpha) + u; \tag{17.3.60}$$

2) $\widetilde{u}$-уравнение (17.3.36):

$$[1+h(\alpha+u)]^{(1)}u = \widetilde{u}[1+h(\alpha+u)]; \tag{17.3.61}$$

3) $\tilde{\tilde{h}}$–уравнение (17.3.39):

$$[1+h(\alpha+u)]\frac{\alpha}{1+h\alpha}=\tilde{u}^{(-1)}; \tag{17.3.62}$$

4) α–уравнение (17.3.40):

$$\alpha^{(1)}=u-hu\frac{\alpha}{1+h\alpha}. \tag{17.3.63}$$

a) α–уравнение (17.3.63) можно преобразовать к виду

$$\alpha^{(1)}=u\Big(1-\frac{h\alpha}{1+h\alpha}\Big)=u\frac{1}{1+h\alpha} \quad \Leftrightarrow$$
$$u=\alpha^{(1)}(1+h\alpha); \tag{17.3.64}$$

b) $\tilde{u}$–уравнение (17.3.62), в виде

$$\tilde{u}=[1+h(\alpha+u)]^{(1)}[\alpha/(1+h\alpha)]^{(1)}, \tag{17.3.65}$$

при подстановке в уравнение (17.3.61) дает

$$u=\left(\frac{\alpha}{1+h\alpha}\right)^{(1)}[1+h(\alpha+u)]=\left(\frac{\alpha}{1+h\alpha}\right)^{(1)}(1+h\alpha)+h\left(\frac{\alpha}{1+h\alpha}\right)^{(1)}u \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{1+h\alpha}\right)^{(1)}u=\left(\frac{\alpha}{1+h\alpha}\right)^{(1)}(1+h\alpha),$$

и это есть уравнение (17.3.64);

c) $\tilde{\tilde{h}}$–уравнение (17.3.60), с учетом формулы (17.3.64), эквивалентно

$$[\tilde{u}^{(-1)}=] \quad \tilde{\tilde{h}}=\alpha-\alpha^{(1)}+\alpha^{(1)}(1+h\alpha)=(1+h\alpha^{(1)})\alpha. \tag{17.3.66}$$

Это надо сравнить с формулой (17.3.62):

$$\tilde{u}^{(-1)}=[1+h(\alpha+u)](1+h\alpha)^{-1}\alpha. \tag{17.3.67}$$

Приравнивая эти два уравнения, находим

$$1+h(\alpha+u)=(1+h\alpha^{(1)})(1+h\alpha)=1+h\alpha+h\alpha^{(1)}(1+h\alpha) \quad \Leftrightarrow$$
$$hu=h\alpha^{(1)}(1+h\alpha),$$

что совпадает с (17.3.64).

Вывод: эволюция с обратным временем при связи $\{u=\bar{h}^{(1)}\}$ превращается в

$$\tilde{\tilde{h}}=(1+h\alpha^{(1)})\alpha, \quad \bar{h}=\alpha(1+h\alpha^{(-1)}). \tag{17.3.68}$$

В терминах α, это есть обращенное во времени уравнение (17.3.57):

$$\tilde{\alpha}(1+h\tilde{\alpha}^{(-1)})=(1+h\alpha^{(1)})\alpha. \tag{17.3.69}$$

17.4 Иерархия КП в G–координатах

В этом разделе строится дискретно-временная эволюция первого потока КП в G–координатах. Неестественное предположение, что полученная эволюция, хоть и отличается по форме, идентична эволюция, построенной в §17.1, ведет к странным заключениям о некоммутативных формальных степенных рядах.

Иерархия КП

$$\partial_P(L) = [P_+, L], \quad P = L^n, \tag{17.4.1a}$$

$$L = \zeta + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i} q_i, \tag{17.4.1b}$$

в G–координатах

$$L = \zeta\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 1 + \sum_{i\geqslant 0} r_i \zeta^{-i-1} = \Big(1 + \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{-j-1} q_j\Big)^{-1}, \tag{17.4.1c}$$

принимает вид (12.6.27)

$$\partial_P(\Lambda) = P_+\Lambda - \Lambda\zeta^{-1}P_+\zeta. \tag{17.4.2}$$

В частности, первый поток с $P = L$ имеет вид (14.6.4):

$$\partial_t(r_i) = (\Delta - 1)(r_{i+1}) + r_i r_0^{(-i-1)} - r_0^{(1)} r_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.4.3}$$

Зададимся целью построить дискретизацию этого потока. Сопряжение, как шаг по времени (16.17) приводит в данном случае к анзацу:

$$[1 + h(\zeta + A)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta + A)], \tag{17.4.4a}$$

где мы пишем A вместо α из предыдущих разделов, так как заранее неизвестно, к чему мы придем, когда переведем этот анзац на Λ–язык:

$$[1 + h(\zeta + A)]\widetilde{\Lambda} = \Lambda[1 + h(\zeta + A^{(-1)})]. \tag{17.4.4b}$$

Расписывая это уравнение, находим:

$$\begin{aligned}
&[1 + h(\zeta + A)]\widetilde{\Lambda} = [(1 + hA) + h\zeta]\Big(1 + \sum \widetilde{r}_i \zeta^{-i-1}\Big) = \\
&= 1 + hA + \sum (1 + hA)\widetilde{r}_i \zeta^{-i-1} + h\zeta + h\widetilde{r}_0^{(1)} + h\sum \widetilde{r}_{i+1}^{(1)} \zeta^{-i-1} = \\
&= \Lambda[1 + h(\zeta + A^{(-1)})] = \Big(1 + \sum r_i \zeta^{-i-1}\Big)[(1 + hA^{(-1)}) + h\zeta] = \\
&= 1 + hA^{(-1)} + \sum r_i (1 + hA^{(-i-2)})\zeta^{-i-1} + hr_0 + h\sum r_{i+1} \zeta^{-i-1},
\end{aligned}$$

а это есть

$$A + \widetilde{r}_0^{(1)} = A^{(-1)} + r_0, \tag{17.4.5}$$

$$(1 + hA)\widetilde{r}_i + h\widetilde{r}_{i+1}^{(1)} = r_i(1 + hA^{(-i-2)}) + hr_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.4.6i}$$

Мы сталкиваемся здесь с той же проблемой недоопределенности, что и в §17.1: уравнение (17.4.6i) говорит, как найти временную эволюцию r_{i+1}, если уже определены эволюции для r_j при $j \leqslant i$, а A все время остается свободной. Это тот же чисто бесконечномерный эффект. Чтобы преодолеть недоопределенность, заметим, что непрерывный поток (17.4.5) совместен с процедурой отбрасывания произвольного бесконечного остатка оператора Λ :

$$\{0 = r_{M+1} = r_{M+2} = \dots\}, \quad \forall\, M \in \mathbb{Z}_+; \tag{17.4.7}$$

потребуем этого же от пошаговой эволюция. Это приводит к замене бесконечной системы уравнений (17.4.6i) на конечную:

$$(1+hA)\widetilde{r}_i + h\widetilde{r}^{(1)}_{i+1} = r_i(1+hA^{(-i-2)}) + hr_{i+1}, \quad 0 \leqslant i < M, \tag{17.4.8i}$$

$$(1+hA)\widetilde{r}_M = r_M(1+hA^{(-M-2)}). \tag{17.4.8M}$$

Это система, вместе с $\widetilde{r}_0$–уравнением (17.4.5), имеет $M+2$ уравнения на $M+2$ неизвестных $r_0, \dots r_M, A$. Попробуем ее решить, а затем проанализировать переход к пределу $M \to \infty$.

Теорема 17.4.9. Систему (17.4.8) можно переписать в виде

$$\widetilde{r}_i = \frac{1}{1+hA} r_i(1+hA^{(-i-2)}) - \sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s-1)}} \Big\{ r^{(s-1)}_{i+s} - $$

$$ - \frac{1}{1+hA^{(s)}} r^{(s)}_{i+s}[1+hA^{(-i-2)}] \Big\}, \tag{17.4.10}$$

где подразумевается, что

$$r_j = 0 \quad \text{при} \quad j > M. \tag{17.4.11}$$

Доказательство. Формулу (17.4.8M) можно переписать в виде

$$\widetilde{r}_M = \frac{1}{1+hA} r_M(1+hA^{(-M-2)}), \tag{17.4.12}$$

и формула (17.4.10) при $i = M$ дает то же самое. Спускаясь по i в формуле (17.4.8i), мы последовательно находим выражения для всех $\widetilde{r}_i$ через переменные без тильды. То, что так полученные выражения действительно совпадают с выражениями (17.4.10), эквивалентно тому, что для последних (17.4.8i) обращаются в тождества, как показано в следующей лемме. ▮

Лемма 17.4.13. Величины $\widetilde{r}_i$, определенные формулой (17.4.10) удовлетворяют тождествам (17.4.8i).

Доказательство. Формула (17.4.10) дает:

$$(1+hA)\widetilde{r}_i = r_i(1+hA^{(-i-2)}) + hr_{i+1} + \tag{17.4.14}$$

$$+ h\sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r^{(s)}_{i+s+1} +$$

$$+ \sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r^{(s)}_{i+s}[1+hA^{(-i-2)}], \tag{17.4.15a}$$

$$h\widetilde{r}^{(1)}_{i+1} = \frac{h}{1+hA^{(1)}} r^{(1)}_{i+1}(1+hA^{(-i-2)}) - h\sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r^{(s)}_{i+1+s} + \tag{17.4.15b}$$

$$+ h\sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s+1)}} r^{(s+1)}_{i+1+s}[1+hA^{(-i-2)}]. \tag{17.4.15c}$$

При сложении этих двух выражений в формуле (17.4.15) взаимно сокращаются следующие члены: $\{a1$ и $b2\}$, $\{a2, b1$ и $c\}$. То, что остается от выражения (17.4.14), совпадает с правой частью формулы (17.4.8i). ▮

В формулах (17.4.10) нет явной зависимости от M. Следовательно, *теперь* мы можем перейти к пределу $M \to \infty$; это сводится к отказу от (17.4.11). В частности, для $i = 0$ получаем

$$\widetilde{r}_0 = \frac{1}{1+hA} r_0(1+hA^{(-2)}) - \tag{17.4.16a}$$

$$-\sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s-1)}} r_s^{(s-1)} + \tag{17.4.16b}$$

$$+\sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r_s^{(s)} (1+hA^{(-2)}). \tag{17.4.16c}$$

Преобразуем выражения (17.4.16b,c) следующим образом:

$$b) \quad -(1+hA^{(-1)}) \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \left[\frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r_s^{(s)}\right]^{(-1)} + r_0^{(-1)}, \tag{17.4.16b$'$}$$

$$c) \quad \sum_{s\geqslant 0} \frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r_s^{(s)} (1+hA^{(-2)}) - \frac{1}{1+hA} r_0 (1+hA^{(-2)}). \tag{17.4.16c$'$}$$

Следовательно, обозначая временно

$$\theta = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s)}} r_s^{(s)}, \tag{17.4.17}$$

находим

$$\widetilde{r}_0 = r_0^{(-1)} - (1-hA^{(-1)})\theta^{(-1)} + \theta(1+hA^{(-2)}). \tag{17.4.18}$$

Привлечем теперь оставшееся $\widetilde{r}_0$-уравнение (17.4.5):

$$\widetilde{r}_0 = r_0^{(-1)} + A^{(-2)} - A^{(-1)} = \tag{17.4.19}$$

$$= r_0^{(-1)} - (1+hA^{(-1)})h^{-1} + h^{-1}(1+hA^{(-2)}). \tag{17.4.20}$$

Сравнивая формулы (17.4.18, 20), получаем требуемое уравнение на A :

$$(\widehat{R}_{1+hA^{(-2)}} - \Delta^{-1}\widehat{L}_{1+hA})(-h^{-1}+\theta) = 0. \tag{17.4.21}$$

Лемма 17.4.22.

$$\operatorname{Ker}(\widehat{R}_{\mu^{(-2)}} - \Delta^{-1}\widehat{L}_\mu) = \{\operatorname{const} \mu^{(-1)}\} \quad \text{в} \quad C_\mu. \tag{17.4.23}$$

Доказательство. X принадлежит $\operatorname{Ker}(\dots)$, если и только если

$$X\mu^{(-2)} = \mu^{(-1)} X^{(-1)}, \tag{17.4.24a}$$

или, иначе,

$$X = \mu^{(-1)} X^{(-1)} \frac{1}{\mu^{(-2)}}. \tag{17.4.24b}$$

Итерируя это соотношение, находим

$$X = \mu^{(-1)}\mu^{(-2)}X^{(-2)}\frac{1}{\mu^{(-3)}}\frac{1}{\mu^{(-2)}} = \cdots = \mu^{(-1)}\dots\mu^{(-n)}X^{(-n)}\frac{1}{\mu^{(-n-1)}}\cdots\frac{1}{\mu^{(-2)}}. \tag{17.4.25}$$

Это показывает, что X не может зависеть от $\mu^{(s)}$ при $s \geqslant 0$ или $s < -1$. Таким образом, X может зависеть лишь от $\mu^{(-1)}$, следовательно X коммутирует с $\mu^{(-1)}$, и формула (17.4.24b) переписывается в виде

$$X/\mu^{(-1)} = (X/\mu^{(-1)})^{(-1)}, \tag{17.4.26}$$

откуда

$$X/\mu^{(-1)} = \text{const}. \qquad \blacksquare \tag{17.4.27}$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$\operatorname{Ker}(\widehat{R}_{\mu^{(-2)}} - \Delta^{-1}\widehat{L}_\mu) = \{\mathcal{F}[[h]]\mu^{(-1)}\} \quad \text{в} \quad C_\mu[[h]]. \tag{17.4.28}$$

Отсюда следует, что в градуировке

$$\mathbf{rk}(\zeta) = -\mathbf{rk}(h) = 1, \quad \mathbf{rk}(r_s^{(j)}) = s+1, \quad \mathbf{rk}(A^{(j)}) = 1, \tag{17.4.29}$$

уравнение (17.4.21), переписанное как

$$(\widehat{R}_{1+hA^{(-2)}} - \Delta^{-1}\widehat{L}_{1+hA})(-1+h\theta) = 0, \tag{17.4.30}$$

имеет пространство однородных веса $\mathrm{rk} = 0$ решений вида

$$0 = -1 + h\theta + \text{const}(1+hA)^{(-1)}, \tag{17.4.31}$$

где const *не зависит* от h. Так как A регулярен по h, эта константа должна равняться 1, и окончательно получаем:

$$-A^{(-1)} = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hA}\cdots\frac{1}{1+hA^{(s)}}r_s^{(s)}. \tag{17.4.32}$$

Упражнение 17.4.33. (i) Покажите, что

$$A = -r_0^{(1)} + h(r_1^{(2)} - r_0^{(2)}r_0^{(1)}) + O(h^2); \tag{17.4.34}$$

(ii) Получите отсюда, что

$$\frac{\widetilde{r}_i - r_i}{-h} = (\Delta - 1)(r_{i+1}) + r_i r_0^{(-i-1)} - r_0^{(1)}r_i + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.4.35}$$

в согласии с формулой (17.4.3);

(iii) Покажите, что

$$r_0 = -q_0^{(-1)}, \tag{17.4.36}$$

$$r_1 = q_0^{(-1)}q_0^{(-2)} - q_1^{(-2)}, \tag{17.4.37}$$

(i^4) Когда в анзаце (17.4.4), определяющем временную эволюцию, используется α вместо A,

$$[1 + h(\zeta + \alpha)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta + \alpha)], \tag{17.4.38}$$

формула (17.1.21) определяет α через уравнение

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s \frac{1}{1+h\alpha^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}} q_s, \tag{17.4.39}$$

так что

$$\alpha = q_0 - hq_1 + O(h^2). \tag{17.4.40}$$

Покажите, что

$$A = \alpha + O(h^2); \tag{17.4.41}$$

(I^5) Используя обозначение

$$\bar{\alpha} = (1+h\alpha)^{-1}, \quad \bar{A} = (1+hA)^{-1}, \tag{17.4.42}$$

покажите, что определяющие уравнения (17.1.22) и (17.4.32) можно переписать в виде

$$\bar{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\dagger}|_{\zeta \mapsto -h\bar{\alpha}\zeta}(1), \tag{17.4.43}$$

$$\frac{A}{1+hA} = -\sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \frac{1}{1+hA} \cdots \frac{1}{1+hA^{(s+1)}} r_s^{(s+1)}, \tag{17.4.44}$$

$$\bar{A}^{-1} = \Lambda^{\dagger}|_{\zeta \mapsto -h\zeta\bar{A}}(1), \tag{17.4.45}$$

где в формулах (17.4.43, 45) значок подстановки означает следующее:

$$(\Lambda^{-1})^{\dagger}|_{\zeta \mapsto -h\bar{\alpha}\zeta} = 1 + \sum_{s\geqslant 0} \widehat{R}_{q_s} (-h\bar{\alpha}\zeta)^{s+1}, \tag{17.4.46}$$

$$\Lambda^{\dagger}|_{\zeta \mapsto -h\zeta\bar{A}} = 1 + \sum_{s\geqslant 0} (1 - h\zeta\bar{A})^{s+1} \widehat{R}_{r_s}, \tag{17.4.47}$$

для

$$\Lambda = 1 + \sum_{s\geqslant 0} r_s \zeta^{-s-1}, \quad \Lambda^{-1} = 1 + \sum_{s\geqslant 0} \zeta^{-s-1} q_s. \tag{17.4.48}$$

Формула (17.4.41) наводит на следующее предположение.

Гипотеза 17.4.49. Решения уравнений (17.4.39) и (17.4.32) совпадают:

$$\alpha = A. \tag{17.4.50}$$

Это по настоящему загадочно. Чтобы вывести определяющие уравнения для α и A мы использовали *несовместимые* конечномерные приближения, а именно, сохранение идеалов

$$\{0 = q_{M+1} = q_{M+2} = \dots\}, \ \forall\, M \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.4.51}$$

и

$$\{0 = r_{M+1} = r_{M+2} = \dots\}, \ \forall\, M \in \mathbb{Z}_+ \tag{17.4.52}$$

в q– и r–пространствах соответственно. Гипотеза эквивалентна свойству, сохранения *всех* этих идеалов каждой из временных эволюций.

Утверждение 17.4.53.

$$A = \alpha + O(h^3). \tag{17.4.54}$$

Доказательство. Вычисляя по модулю h^3, имеем:

$$A^{(-1)} \overset{(17.4.32)}{=} -\frac{1}{1+hA}r_0 + h\frac{1}{1+hA}\frac{1}{1+hA^{(1)}}r_1^{(1)} - h^2r_2^{(2)},$$

откуда

$$A = -r_0^{(1)} + O(h), \tag{17.4.55}$$

$$A^{(-1)} = -(1 - hA + h^2A^2)r_0 + h[1 - h(A + A^{(1)})]r_1^{(1)} - h^2r_2^{(2)},$$

и если

$$A = -r_0^{(1)} + xh + yh^2, \tag{17.4.56}$$

то

$$\begin{gathered} -r_0 + x^{(-1)}h + y^{(-1)}h^2 = -r_0 + h(-r_0^{(1)} + xh)r_0 - h^2r_0^{(1)}r_0^{(1)}r_0 + \\ +hr_1^{(1)} - h^2(-r_0^{(1)} - r_0^{(2)})r_1^{(1)} - h^2r_2^{(2)}, \end{gathered}$$

так что

$$x = r_1^{(2)} - r_0^{(2)}r_0^{(1)}, \tag{17.4.57}$$

$$y = (xr_0)^{(1)} - r_0^{(2)}r_0^{(2)}r_0^{(1)} + (r_0^{(2)} + r_0^{(3)})r_1^{(2)} - r_2^{(3)} = \tag{17.4.58a}$$

$$= (r_1^{(3)} - r_0^{(3)}r_0^{(2)})r_0^{(1)} - r_0^{(2)}r_0^{(2)}r_0^{(1)} + (r_0^{(2)} + r_0^{(3)})r_1^{(2)} - r_2^{(3)}. \tag{17.4.58b}$$

Далее,

$$\alpha \overset{(17.1.22)}{=} q_0 - h\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}q_1 + h^2q_2 = q_0 - h(1 - h\alpha^{(1)})q_1 + h^2q_2 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = q_0 - hq_1 + h^2(q_2 + q_0^{(1)}q_1). \tag{17.4.59}$$

Далее,

$$\begin{gathered} 1 + r_0\zeta^{-1} + r_1\zeta^{-2} + r_2\zeta^{-3} + \dots = (1 + \zeta^{-1}q_0 + \zeta^{-2}q_1 + \zeta^{-3}q_2 + \dots)^{-1} = \\ = 1 - \zeta^{-1}q_0 - \zeta^{-2}q_1 - \zeta^{-3}q_2 + \zeta^{-1}q_0\zeta^{-1}q_0 + \zeta^{-1}q_0\zeta^{-2}q_1 + \\ +\zeta^{-2}q_1\zeta^{-1}q_0 - \zeta^{-1}q_0\zeta^{-1}q_0\zeta^{-1}q_0 \quad \Rightarrow \end{gathered}$$

$$r_0 = -q_0^{(-1)}, \tag{17.4.60a}$$

$$r_1 = -q_1^{(-2)} + q_0^{(-1)}q_0^{(-2)}, \tag{17.4.60b}$$

$$r_2 = -q_2^{(-3)} + q_0^{(-1)}q_1^{(-3)} + q_1^{(-2)}q_0^{(-3)} - q_0^{(-1)}q_0^{(-2)}q_0^{(-3)}. \tag{17.4.60c}$$

Следовательно,

$$x \overset{(17.4.57)}{=} -q_1 + q_0^{(1)}q_0 - q_0^{(1)}q_0 = -q_1, \tag{17.4.61a}$$

$$\begin{gathered} y \overset{(17.4.58a)}{=} (-q_1^{(1)})(-q_0) + q_0^{(1)}q_0^{(1)}q_0 - (q_0^{(1)} + q_0^{(2)})(-q_1 + q_0^{(1)}q_0) - \\ -(-q_2 + q_0^{(2)}q_1 + q_1^{(1)}q_0 - q_0^{(2)}q_0^{(1)}q_0) = q_2 + q_0^{(1)}q_1, \end{gathered} \tag{17.4.61b}$$

так что, по формуле (17.4.55),

$$A = q_0 - hq_1 + h^2(q_2 + q_0^{(1)}q_1), \tag{17.4.62}$$

и это совпадает с α (17.4.59). ∎

Чтобы прочувствовать, насколько странна гипотеза 17.4.49, полезно рассмотреть ее классический предел. В этом случае имеем два формальных степенных ряда с некоммутативными коэффициентами:

$$r(\lambda) = 1 + \sum_{i \geqslant 0} r_i \lambda^{i+1}, \quad q(\lambda) = 1 + \sum_{i \geqslant 0} q_i \lambda^{i+1}, \tag{17.4.63}$$

таких, что

$$r(\lambda) q(\lambda) = 1 \tag{17.4.64}$$

при λ рассматривается, как формальный параметр *коммутирующий* со всем. Затем, рассмотрим $\bar{\alpha}$ и $\bar{A}$,

$$\bar{\alpha} = 1 + O(h) \in C_q[[h]], \quad \bar{A} = 1 + O(h) \in C_r[[h]], \tag{17.4.65}$$

как единственные решения уравнений

$$\bar{\alpha} = [1 + \sum_{s \geqslant 0} (-h\bar{\alpha})^{s+1} q_s] = q(-h\bar{\alpha}), \tag{17.4.66a}$$

$$\bar{A} = [1 + \sum_{s \geqslant 0} (-h\bar{A})^{s+1} r_s]^{-1} = 1/r(-h\bar{A}). \tag{17.4.66b}$$

(Знак h, конечно, неважен).

Гипотеза 17.4.67. Решения уравнений (17.4.66a) и (17.4.66b) совпадают.

Заметим, что если эта гипотеза верна, то из нее следует, что

$$r(-h\bar{\alpha}) q(-h\bar{\alpha}) = 1, \tag{17.4.68}$$

несмотря на то, что $\bar{\alpha}$ *не коммутирует* с коэффициентами r_i и q_i формального степенного ряда. Иначе, это можно выразить, как

$$\left(\frac{1}{q}\right)(-h\bar{\alpha}) = \frac{1}{q(-h\bar{\alpha})} \tag{17.4.69}$$

при условии, что $\bar{\alpha}$ служит решением уравнения (17.4.66a).

По существу, происхождение этих гипотез, и им подобных, таково: мы регуляризуем недоопределенную бесконечномерную проблему двумя несовместимыми способами и все же ожидаем, что окончательный результат не зависит от выбора процедуры регуляризации, как если бы он имел некий глубокий инвариантный смысл.

Замечание 17.4.70. В Гипотезе 17.4.67 формальные степенные ряды $r(\lambda)$ и $q(\lambda) = r(\lambda)^{-1}$ *унимодулярны*, то есть имеют единичный младший коэффициент. Более общая форма этой гипотезы, без ограничения унимодулярности, появится в §18.5, как результат конечномерных регуляризаций в МКП-картине.

Замечание 17.4.71. "Большая" Гипотеза 17.4.49 имеет две составляющие: решеточность и некоммутативность. Если убрать решетку переходом к классическому пределу, получим "малую" Гипотезу 17.4.67 о некоммутативных формальных степенных рядах. Если далее убрать некоммутативность, получим тавтологию. С другой стороны, если сначала убрать некоммутативность из большой Гипотезы 17.4.49, мы получим нечто странное и, пока, неизвестное.

Утверждение 17.4.72. Большая Гипотеза 17.4.49 верна, когда

$$\{0 = q_1 = q_2 = \dots\}. \tag{17.4.73}$$

Доказательство. Обозначая

$$q = q_0, \tag{17.4.74}$$

получаем:

$$\Lambda = 1 + \sum_{s\geqslant 0} r_s \zeta^{-s-1} = (1 + \zeta^{-1} q)^{-1} = 1 + \sum_{s\geqslant 0} (-\zeta^{-1} q)^{s+1} \quad \Rightarrow \tag{17.4.75}$$

$$r_s = (-1)^{s+1} q^{(-1)} \dots q^{(-s-1)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.4.76}$$

Формула (17.4.39) превращается в

$$\alpha = q_0 = q, \tag{17.4.77}$$

и формула (17.4.32) сводит обсуждаемую гипотезу к тождеству

$$-q^{(-1)} = \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \frac{1}{1 + hq} \cdots \frac{1}{1 + hq^{(s)}} (-1)^{s+1} q^{(s-1)} \dots q^{(-1)}, \tag{17.4.78}$$

или

$$q = \sum_{s\geqslant 0} h^s \frac{1}{1 + hq^{(1)}} \cdots \frac{1}{1 + hq^{(s+1)}} q^{(s)} \dots q. \tag{17.4.79}$$

Это тождество в кольце $C_q[[h]]$ служит частный случай следующей леммы. ▮

Лемма 17.4.80. Пусть $R = \mathbb{Z}\langle x_0, x_1, \dots\rangle$ кольцо многочленов от бесконечного числа некоммутирующих образующих x_i. Тогда в $R[[h]]$:

$$\sum_{s\geqslant 0} h^s \frac{1}{1 + hx_1} \cdots \frac{1}{1 + hx_{s+1}} x_s \dots x_0 = x_0. \tag{17.4.81}$$

Доказательство. Обозначим через X_0 левую часть формулы (17.4.81). Тогда

$$X_0 = x_0 + O(h), \tag{17.4.82}$$

$$X_0 = \frac{1}{1 + hx_1} (1 + hX_1) x_0, \tag{17.4.83}$$

где

$$X_r = \sum_{s\geqslant 0} h^s \frac{1}{1 + hx_{r+1}} \cdots \frac{1}{1 + hx_{r+s+1}} x_{r+s} \dots x_r. \tag{17.4.84}$$

Таким образом,

$$X_r = \Delta^r (X_0), \tag{17.4.85}$$

где Δ^r — гомоморфизм R над $\mathbb{Z}$, переводящий x_s в x_{s+r}. Далее, если

$$X_0 = x_0 + hy^{r+1} + O(h^{r+2})), \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.4.86}$$

то равенство (17.4.83) в виде

$$(1 + hx_1) X_0 = (1 + hX_1) x_0 \tag{17.4.87}$$

дает, по модулю $O(h^{r+2})$:

$$x_0 + yh^{r+1} + hx_1x_0 = x_0 + hx_1x_0,$$

откуда

$$y = 0, \quad X_0 = x_0. \qquad \blacksquare$$

Замечание 17.4.88. Формулу (17.4.81) можно интерпретировать, как некоммутативный аналог геометрической прогрессии. Последняя возникает, если положить

$$x = x_0 = x_1 = \dots, \tag{17.4.89}$$

так что формула (17.4.81) превращается в

$$\frac{x}{1+hx}\sum_{s\geqslant 0}\left(\frac{hx}{1+hx}\right)^s = x. \tag{17.4.90}$$

Замечание 17.4.91. В q_0 нет ничего особенного. Вместо вырождения (17.4.73), выбрасывающего все q_i кроме q_0, можно с тем же успехом рассмотреть вырождепяе

$$\{q_i = 0, \quad \forall\, i \neq \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{17.4.92}$$

Тогда, с $q_\ell = q$, имеем

$$\begin{aligned}\Lambda = 1 + \sum_{s\geqslant} r_s\zeta^{-s-1} = (1+\zeta^{-\ell-1}q)^{-1} = 1 + \sum_{n\geqslant 1}(-\zeta^{-\ell-1}q)^n =\\ = 1 + \sum(-1)^n q^{(-\ell-1)}\dots q^{(-n\ell-n)}\zeta^{-n(\ell+1)},\end{aligned}$$

так что из всех r_i ненулевыми оказываются только

$$r_{n(\ell+1)-1} = (-1)^n q^{(-\ell-1)}\dots q^{(-n\ell-n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17.4.93}$$

Уравнение (17.4.39) превращается в

$$Q := (-h)^\ell q_\ell = (1+h\alpha^{(\ell)})\dots(1+h\alpha^{(1)})(1+h\alpha)\frac{\alpha}{1+h\alpha}, \tag{17.4.94}$$

а Гипотеза 17.4.49 сводится к тождеству

$$\alpha \overset{?}{=} -\sum_{n\geqslant 1}(-h)^{n(\ell+1)-1}\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\dots\frac{1}{1+h\alpha^{(n\ell+n)}}(-1)^n q^{((n-1)(\ell+1))}\dots q \tag{17.4.94}$$

$$= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}(-h)^{n-1}\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\dots\frac{1}{1+h\alpha^{(n\ell+n)}}Q^{((n-1)(\ell+1))}\dots Q, \tag{17.4.95}$$

где подразумевается, что Q — функция от α, заданная формулой (17.4.94). Обозначим через X выражение (17.4.95), тогда

$$X = \frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\dots\frac{1}{1+h\alpha^{(\ell+1)}}[1+hX^{(\ell+1)}]Q. \tag{17.4.96}$$

Это можно переписать в виде

$$X = \frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\dots\frac{1}{1+h\alpha^{(\ell+1)}}[1+hX^{(\ell+1)}](1+h\alpha^{(\ell)})\dots(1+h\alpha^{(1)})\alpha \tag{17.4.97}$$

в предположении, что $\ell > 0$ (случай $\ell = 0$ покрыт Утверждением 17.4.72). Далее, уравнение (17.4.97) дает, при итерации, единственный элемент

$$X \in \mathbb{Z}\langle\alpha^{(j)}\rangle[[h]], \quad X = \alpha + O(h). \tag{17.4.98}$$

С другой стороны, $X = \alpha$ обращает уравнение (17.4.97) в тождество. Таким образом, X *совпадает* с α.

Замечание 17.4.99. Нет ничего особенного и в q_i по сравнению с r_i. Можно, аналогично, проверить большую Гипотезу для случая

$$\Lambda^{-1} = 1 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i-1} q_i = (1 + r_\ell \zeta^{-\ell-1})^{-1}.$$

Это оставляется читателю, как упражнение. Вместо этого мы сейчас докажем большую Гипотезу 17.4.49.

Теорема 17.4.100. Если

$$\Big(1 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i-1} q_i\Big)\Big(1 + \sum_{j\geqslant 0} r_j \zeta^{-j-1}\Big) = 1 \tag{17.4.101}$$

и α удовлетворяет тождеству

$$\alpha = (1 + h\alpha) \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}} q_s, \tag{17.4.102}$$

то α также удовлетворяет тождеству

$$-\alpha = \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \frac{1}{1 + h\alpha^{(1)}} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s+1)}} r_s^{(s+1)}. \tag{17.4.103}$$

Доказательство. Разворачивая формулу (17.4.101), находим

$$q_0 + r_0^{(1)} = 0, \tag{17.4.104.0}$$

$$q_{k+1} + r_{k+1}^{(k+2)} + \sum_{i+j=k} (q_i r_j)^{(j+1)} = 0. \tag{17.4.104.$k+1$}$$

Умножая формулу (17.4.104.k) слева на

$$(1 + h\alpha)(-h)^k \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(k)}}$$

и суммируя по k, паходим:

$$0 = (1 + h\alpha) \sum_{k\geqslant 0} (-h)^k \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(k)}} q_k + \tag{17.4.105a}$$

$$+ (1 + h\alpha) \sum_{k\geqslant 0} (-h)^k \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(k)}} r_k^{(k+1)} + \tag{17.4.105b}$$

$$+ (1 + h\alpha) \sum_{i,j\geqslant 0} (-h)^{i+j+1} \frac{1}{1 + h\alpha} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(i+j+1)}} (q_i r_j)^{(j+1)}. \tag{17.4.105c}$$

Преобразуем эти слагаемые отдельно:

$$a)\ = \alpha\ ^{(17.4.102)}; \tag{17.4.106}$$

$$b)\ = (1+h\alpha)\sum_{j\geqslant 0}(-h)^{j+1}\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(j)}}\Big(\sum{}'\Big)r_j^{(j+1)}, \tag{17.4.107}$$

где

$$\Big(\sum{}'\Big) = \sum_{i\geqslant 0}(-h)^i\frac{1}{1+h\alpha^{(j+1)}}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(j+1+i)}}q_i^{(j+1)} =$$

$$= \Delta^{j+1}\Big[\sum_{i\geqslant 0}(-h)^i\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(i)}}q_i\Big] \overset{(17.4.102)}{=} \Delta^{j+1}\left(\frac{\alpha}{1+h\alpha}\right) \quad \Rightarrow$$

$$c)\ = (1+h\alpha)\sum_{j\geqslant 0}(-h)^{j+1}\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(j)}}\frac{\alpha^{(j+1)}}{1+h\alpha^{(j+1)}}r_j^{(j+1)}. \tag{17.4.108}$$

Складывая это с b), получаем:

$$0 = a)+b)+c) = \alpha + (1+h\alpha)\sum_{j\geqslant 0}(-h)^j\frac{1}{1+h\alpha}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(j)}}\Big[1+\frac{(-h)\alpha^{j+1}}{1+h\alpha^{(j+1)}}\Big]r_j^{(j+1)} =$$

$$= \alpha + \sum_{j\geqslant 0}(-h)^j\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(j+1)}}r_j^{(j+1)},$$

и это совпадает с требуемым тождеством (17.4.103). ▮

Обсудим вкратце эволюцию с обращенным временем. Переставив переменные с тильдой и без в уравнениях (17.4.4–6, 8), получаем в результате уравнения

$$\widetilde{r}_0 + A^{(-1)} = r_0^{(1)} + A_0, \tag{17.4.109}$$

$$\widetilde{r}_i(1+hA^{(-i-2)}) + h\widetilde{r}_{i+1} = (1+hA)r_i + hr_{i+1}^{(1)}, \quad i\in\mathbb{Z}_+; \tag{17.4.110i}$$

$$\widetilde{r}_i(1+hA^{(-i-2)}) + h\widetilde{r}_{i+1} = (1+hA)r_i + hr_{i+1}^{(1)}, \quad 0\leqslant i< M, \tag{17.4.111i}$$

$$\widetilde{r}_M(1+hA^{(-M-2)}) = (1+hA)r_M. \tag{17.4.111M}$$

Упражнение 17.4.112. (i) Покажите, что систему (17.4.111) можно переписать в виде

$$\widetilde{r}_i = (1+hA)r_i\frac{1}{1+hA^{(-i-2)}} - \sum_{s>0}(-h)^s\Big[r_{i+s}^{(1)} -$$

$$-(1+hA)r_{i+s}\frac{1}{1+hA^{(-i-s-2)}}\Big]\frac{1}{1+hA^{(-i-s-1)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-i-2)}}; \tag{17.4.113i}$$

(ii) Покажите, что исключение одного из $\widetilde{r}_0$ из уравнений (17.4.109) и $(17.4.113|_{i=0})$ может быть приведено к виду (17.4.21) с

$$\theta = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s r_s\frac{1}{1+hA^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-2)}}; \tag{17.4.114}$$

(iii) Покажите, что

$$-A^{(-1)} = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s r_s\frac{1}{1+hA^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-2)}}; \tag{17.4.115}$$

(i^4) Покажите, что

$$A = -r_0^{(1)} + h(-r_0^{(1)} r_0 + r_1^{(1)}) + O(h^2) \tag{17.4.116}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{r}_i - r_i}{h} = (\Delta - 1)(r_{i+1}) + r_{i+1} r_0^{(-i-1)} - r_0^{(1)} r_i + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.4.117}$$

в согласии с формулой (17.4.3);
(i^5) Покажите, что

$$A = \alpha \pmod{O(h^2)}, \tag{17.4.118}$$

где α — решение уравнения (17.1.36):

$$\alpha = \Big[\sum_{s \geqslant 0} (-h)^s q_s^{(-s)} \frac{1}{1 + h\alpha^{(-s)}} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha}\Big](1 + h\alpha); \tag{17.4.119}$$

(i^6) Покажите, что решения A и α уравнения (17.4.115) и (17.4.119) совпадают.

17.5 Форма Гиббонса в G–координатах

В этом разделе мы дискретизируем по времени первый поток в форме Гиббонса иерархии КП в G–координатах, предмет §13.7, и показываем, что получающаяся эволюция по времени совместна с полученной в предыдущем разделе.

Иерархии КП в G–координатах (17.4.1, 2):

$$\partial_P(\Lambda) = P_+\zeta - \Lambda\zeta^{-1}P_+\zeta, \quad P = (\zeta\Lambda^{-1})^n, \quad \Lambda = 1 + \sum_{i \geqslant 0} r_i \zeta^{-i-1}, \tag{17.5.1}$$

имеет форму *Гиббонса* (13.7.7–9):

$$\partial_P(\boldsymbol{a}) = \bar{P}_+(\boldsymbol{a}), \quad \partial_P(\boldsymbol{b}) = -(\zeta^{-1}\bar{P}_+\zeta)^\dagger(\boldsymbol{b}), \quad \bar{P} = (\zeta\bar{\Lambda}^{-1})^n, \tag{17.5.2a}$$

$$\bar{\Lambda} = 1 + \boldsymbol{a}^t \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{17.5.2b}$$

При отображении $\Phi : C_r \to C_{a,b}$,

$$\Phi\Big(1 + \sum_{i \geqslant 0} r_i \zeta^{-i-1}\Big) = \Phi(\Lambda) = \bar{\Lambda} = 1 + \boldsymbol{a}^t \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{17.5.3a}$$

$$\Phi(r_i) = \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b}^{-i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.5.3b}$$

уравнения движения (17.5.1) переходят в уравнения движения (17.5.2). Это было показано в §13.7. В частности, первый поток (17.4.3), с $P = \zeta\Lambda^{-1}$:

$$\partial_t(r_i) = (\Delta - 1)(r_{i+1}) + r_i r_0^{(-i-1)} - r_0^{(1)} r_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.5.4}$$

переходит в соответствующий первый поток (13.7.19):

$$\partial_t(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{(1)} - (\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = (\zeta - \boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}), \tag{17.5.5a}$$

$$\partial_t(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-1)} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}) = -[\zeta^{-1}(\zeta - \boldsymbol{a}^{(1)t}(\boldsymbol{b}))\zeta]^\dagger(\boldsymbol{b}). \tag{17.5.5b}$$

В §17.4 мы построили дискретизацию потока (17.5.4) при помощи анзаца (17.4.4, 32):

$$[1+h(\zeta+A)]\widetilde{\Lambda}=\Lambda[1+h(\zeta+A^{(-1)})], \tag{17.5.6}$$

$$-A^{(-1)}=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hA}\cdots\frac{1}{1+hA^{(s)}}r_s^{(s)}. \tag{17.5.7}$$

Теперь мы хотим дискретизировать поток (17.5.5) так, чтобы он оставался совместным, при преобразовании Гиббонса Φ (17.5.3), с временной эволюцией (17.5.6 ,7).

Для этого, положим

$$c=\Phi(A), \tag{17.5.8}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}=[1+h(\zeta+c)]^{-1}(\boldsymbol{a}), \tag{17.5.9a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}=\{\zeta^{-1}[1+h(\zeta+c)]\zeta\}^{\dagger}(\boldsymbol{b}). \tag{17.5.9b}$$

Чтобы показать, что это и есть искомая временная эволюции, следует проверить, что

$$\widetilde{[\Phi(\Lambda)]}=\Phi(\widetilde{\Lambda}), \tag{17.5.10}$$

что эквивалентно равенству

$$[1+h(\zeta+c)]\widetilde{\bar{\Lambda}}=\bar{\Lambda}[1+h(\zeta+c^{(-1)})]. \tag{17.5.11}$$

Расписывая, получаем

$$(1+hc)\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\sum\zeta^{-j-1}\widetilde{\boldsymbol{b}}+1+hc+h\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)t}\sum\zeta^{-j}\widetilde{\boldsymbol{b}}+h\zeta= \tag{17.5.12a}$$

$$=\boldsymbol{a}^t\sum\zeta^{-j-1}\boldsymbol{b}(1+hc^{(-1)})+1+hc^{(-1)}+h\boldsymbol{a}^t\sum\zeta^{-j}\boldsymbol{b}^{(-1)}+h\zeta, \tag{17.5.12b}$$

что эквивалентно системе

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)t}\widetilde{\boldsymbol{b}}+c=\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}+c^{(-1)}, \tag{17.5.13a}$$

$$[(1+hc)\widetilde{\boldsymbol{a}}+h\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)}]^t\widetilde{\boldsymbol{b}}^{(-j-1)}=\boldsymbol{a}^t[\boldsymbol{b}(1+hc^{(-1)})+h\boldsymbol{b}^{(-1)}]^{(-j-1)}, \quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{17.5.13b}$$

Последнее уравнение следует из определения $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ (17.5.9). Для проверки оставшегося равенства (17.5.13a), сначала перепишем уравнения движения (17.5.9) как

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}\overset{(17.2.11)}{=}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hc}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s)}}\boldsymbol{a}^{(s)}, \tag{17.5.14a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}(1+hc^{(-1)})+h\boldsymbol{b}^{(-1)}. \tag{17.5.14b}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)t}\widetilde{\boldsymbol{b}}=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hc^{(1)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s+1)}}\boldsymbol{a}^{(s+1)t}[\boldsymbol{b}(1+hc^{(-1)})+h\boldsymbol{b}^{(-1)}]=$$

$$=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hc^{(1)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s+1)}}\left[\Phi(r_s^{(s+1)})(1+hc^{(-1)})+h\Phi(r_{s+1}^{(s+1)})\right]=$$

$$=\left\{\Phi\Delta\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hA}\cdots\frac{1}{1+hA^{(s)}}r_s^{(s)}\Big]\right\}(1+hc^{(-1)})+ \tag{17.5.15a}$$

$$+\Phi\left\{-(1+hA)\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hA}\cdots\frac{1}{1+hA^{(s)}}r_s^{(s)}-\frac{1}{1+hA}r_0\Big]\right\} \tag{17.5.15b}$$

Согласно формуле (17.5.7), эти два слагаемых можно преобразовать к виду

$$\Big\{\{\Phi\Delta(-A^{(-1)})\}(1+hc^{(-1)})-\Phi\{(1+hA)(-A^{(-1)})-r_0\}\Big\}=$$
$$=-c(1+hc^{(-1)})+(1+hc)c^{(-1)}+\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}=-c+\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}-c^{(-1)},\tag{17.5.16}$$

и соотношение (17.5.13a) доказано.

Упражнение 17.5.17. Покажите, что

$$c=-\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b}+O(h)\tag{17.5.18}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{a}}{-h}=\boldsymbol{a}^{(1)}-(\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+O(h),\tag{17.5.19a}$$

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{b}}{-h}=-\boldsymbol{b}^{(1)}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)})+O(h),\tag{17.5.19b}$$

в согласии с формулами (17.5.5).

Эволюция с обратным временем оказывается даже легче. Меняя местами переменные с тильдой и без в формулах (17.5.11–14), мы снова приходим к проверке соотношения (17.5.13a), теперь записанного в виде

$$\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b}+c=\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}}^{(-1)}+c^{(-1)},\tag{17.5.20}$$

для

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}=h\boldsymbol{a}^{(1)}+(1+hc)\boldsymbol{a},\tag{17.5.21a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}=\{[1+h(\zeta+c^{(-1)})]^{\dagger}\}^{-1}(\boldsymbol{b}),\tag{17.5.21b}$$

и где A теперь удовлетворяет уравнению (17.4.115):

$$-A^{(-1)}=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\boldsymbol{r}_s\frac{1}{1+hA^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-2)}}.\tag{17.5.22}$$

Согласно формуле (17.2.29), уравненяе для $\widetilde{\boldsymbol{b}}$ (17.5.21b) можно переписать в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{b}}=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\boldsymbol{b}^{(-s)}\frac{1}{1+hc^{(-s-1)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(-1)}}.\tag{17.5.23}$$

Следовательно,

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}}^{(-1)}=\big[h\boldsymbol{a}^{(1)}+(1+hc)\boldsymbol{a}\big]^t\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\boldsymbol{b}^{(-s-1)}\frac{1}{1+hc^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(-2)}}=$$
$$=\Phi\Big\{\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\big[h\boldsymbol{r}^{(1)}_{s+1}+(1+hA)\boldsymbol{r}_s\big]\frac{1}{1+hA^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-2)}}\Big\}=$$
$$=\Phi\Big\{-\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\boldsymbol{r}^{(1)}_s\frac{1}{1+hA^{(-s-1)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-1)}}(1+hA^{(-1)})-\boldsymbol{r}^{(1)}_0\Big]\Big\}+$$
$$+(1+hc)\Phi\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\boldsymbol{r}_s\frac{1}{1+hA^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hA^{(-2)}}\Big]\overset{(17.5.22)}{=}$$
$$=\Phi[A(1+hA^{(-1)})]+\Phi(\boldsymbol{r}^{(1)}_0)+(1+hc)\Phi(-A^{(-1)})=$$
$$=c(1+hc^{(-1)})+\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b}-(1+hc)c^{(-1)}=c+\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b}-c^{(-1)},\tag{17.5.24}$$

что дает искомое соотношение (17.5.20).

Упражнение 17.5.25. Покажите, что

$$c = -\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b} + O(h) \tag{17.5.26}$$

и получите что

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}}{h} = \boldsymbol{a}^{(1)} - (\boldsymbol{a}^{(1)t}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} + O(h), \tag{17.5.27a}$$

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}}{h} = -\boldsymbol{b}^{(-1)} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(-1)}) + O(h), \tag{17.5.27b}$$

в согласии с формулами (17.5.5).

17.6 Гидродинамическая форма в G–координатах

В этом разделе мы дискретизируем по времени первый поток в гидродинамической форме иерархии КП в G–координатах, предмет §14.6, и показываем, что получающаяся эволюция по времени совместна с построенной в §17.4.

Иерархии КП в G–координатах (17.4.1, 2):

$$\partial_P(\Lambda) = P_+\Lambda - \Lambda\zeta^{-1}P_+\zeta, \quad P = (\zeta\Lambda^{-1})^n, \quad \Lambda = 1 + \sum_{i\geqslant 0} r_i\zeta^{-i-1}, \tag{17.6.1}$$

имеет гидродинамическую форму (14.6.31):

$$\partial_P(u) = (\widehat{R}_u - \widehat{L}_u\Delta^{-1})\{\mathrm{Res}[(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-2}\bar{P}_+\zeta^2|\}, \tag{17.6.2a}$$

$$\partial_P(H) = \mathrm{Res}\big[\bar{P}_+H(1 - u\zeta^{-1})^{-1} - H(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-2}\bar{P}_+\zeta^2\big], \tag{17.6.2b}$$

$$\bar{P} = (\zeta\bar{\Lambda}^{-1})^n, \quad \bar{\Lambda} = 1 + H(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}. \tag{17.6.2c}$$

(То, что сейчас обозначается H, было h в §14.6.) В гидродинамическом представлении отображение $\Phi : C_r \to C_{u,H}$,

$$\Phi\Big(1 + \sum_{i\geqslant 0} r_i\zeta^{-i-1}\Big) = \Phi(\Lambda) = \bar{\Lambda} = 1 + H(1 - u\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}, \tag{17.6.3a}$$

$$\Phi(r_i) = Hu\ldots u^{(-i)}u^{(-i)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{17.6.3b}$$

переводит уравнения движения (17.6.1) в уравнения движения (17.6.2). Это было доказано в §14.6. В частности, первый поток (17.4.3), с $P = \zeta\Lambda^{-1}$:

$$\partial_t(r_i) = (\Delta - 1)(r_{i+1}) + r_i r_0^{(-i-1)} - r_0^{(1)}r_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.6.4}$$

переходит в соответствующий гидродинамический поток (14.6.10):

$$\partial_t(u) = u(H^{(-2)} - u^{(-1)}) + (u - H^{(-1)})u, \tag{17.6.5a}$$

$$\partial_t(H) = H^{(1)}(u^{(1)} - H) + H(H^{(-1)} - u). \tag{17.6.5b}$$

В §17.4 был дискретизирован поток (17.6.4), при помощи анзаца (17.4.4, 32):

$$[1 + h(\zeta + A)]\widetilde{\Lambda} = \Lambda[1 + h(\zeta + A^{(-1)})], \tag{17.6.6}$$

$$-A^{(-1)} = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1 + hA}\cdots\frac{1}{1 + hA^{(s)}}r_s^{(s)}. \tag{17.6.7}$$

Зададимся целью построить дискретизацию потока (17.6.5), так, чтобы сохранить совместность, при гидроднинамическом отображении Φ (17.6.3), с временной эволюцией (17.6.6 ,7). План следующий: положим

$$[1+h(\zeta+c)]\widetilde{\bar{\Lambda}} = \bar{\Lambda}[1+h(\zeta+c^{(-1)})], \tag{17.6.8}$$

с некоторой неизвестной $c \in C_{u,H}[[h]]$. Система (17.6.8) оказывается переопределенной, и это накладывает следующее уравнение на c :

$$-c^{(-1)} = \Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \frac{1}{1+hc}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s)}}H^{(s)}u^{(s)}\dots u\Big]u^{-1}. \tag{17.6.9}$$

С учетом формулы (17.6.3b) имеем

$$\Phi(r_s^{(s)}) = H^{(s)}u^{(s)}\dots uu^{-1} \quad \Rightarrow \tag{17.6.10}$$

$$c = \Phi(A). \tag{17.6.11}$$

Перейдем к деталям. Расписывая равенство (17.6.8), получаем:

$$[1+h(\zeta+c)]\widetilde{\bar{\Lambda}} = [(1+hc)+h\zeta][1+\widetilde{H}(1-\widetilde{u}\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}] =$$

$$= 1+hc+h\zeta+(1+hc)\widetilde{H}(1-\widetilde{u}\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1}+h\widetilde{H}^{(1)}\zeta(1-\widetilde{u}\zeta^{-1})^{-1}\zeta^{-1} = \tag{17.6.12a}$$

$$= \bar{\Lambda}[1+h(\zeta+c^{(-1)})] = [1+H(1-u\zeta^{-1})^{-1}][(1+hc^{(-1)})+h\zeta] =$$

$$= 1+hc^{(-1)}+h\zeta+H(1-u\zeta^{-1})^{-1}(1+hc^{(-2)})\zeta^{-1}+hH(1-u\zeta^{-1})^{-1}. \tag{17.6.12b}$$

Беря вычет этого равенства, находим

$$c+\widetilde{H}^{(1)} = c^{(-1)}+H. \tag{17.6.13}$$

То, что осталось, умножим справа на ζ и соберем члены с ζ^{-j}:

$$(1+hc)\widetilde{H}(\widetilde{u}\zeta^{-1})^j + h\widetilde{H}^{(1)}\widetilde{u}^{(1)}(\widetilde{u}\zeta^{-1})^j = \tag{17.6.14a}$$

$$= H[(u\zeta^{-1})^j(1+hc^{(-2)})+h(u\zeta^{-1})^j u]. \tag{17.6.14b}$$

Это можно переписать в виде

$$[(1+hc)\widetilde{H}+h\widetilde{H}^{(1)}(\widetilde{u}^{(1)}](\widetilde{u}\zeta^{-1})^j = H(u\zeta^{-1})^j[1+h(u+c^{(-2)})]. \tag{17.6.15}$$

При $j=0$ это дает

$$(1+hc)\widetilde{H}+h\widetilde{H}^{(1)}\widetilde{u}^{(1)} = H[1+h(u+c^{(-2)})]. \tag{17.6.16}$$

Подставляя это обратно в (17.6.15), находим

$$[1+h(u+c^{(-2)})](\widetilde{u}\zeta^{-1})^j = (u\zeta^{-1})^j[1+h(u+c^{(-2)})], \tag{17.6.17}$$

что эквивалентно едиственному равенству

$$\widetilde{u}\zeta^{-1} = [1+h(u+c^{(-2)})]^{-1}u\zeta^{-1}[1+h(u+c^{(-2)})], \tag{17.6.18}$$

то есть

$$\widetilde{u} = f^{-1}uf^{(-1)}, \quad f = 1+h(u+c^{(-2)}). \tag{17.6.19}$$

Таким образом, мы вывели эволюционные уравнения для $\widetilde{u}$ (17.6.19) и $\widetilde{H}$ (17.6.13). Оставшееся уравнение (17.6.16) интерпретируется, как соотношение для определения c. Перепишем его как

$$(1+hc)\widetilde{H} + h[\widetilde{H}^{(1)}/f^{(1)}]u^{(1)}f = Hf, \tag{17.6.20}$$

и поделим справа на f :

$$(1+hc)\widetilde{H}/f + h[\widetilde{H}^{(1)}/f^{(1)}]u^{(1)} = H. \tag{17.6.21}$$

Обозначим

$$\mu = 1 + hc, \tag{17.6.22}$$

и подставим в (17.6.21) соотношение

$$hu^{(1)} = f^{(1)} - \mu^{(-1)} \tag{17.6.23}$$

следующие из определения f (17.6.19):

$$\mu\widetilde{H}/f + [\widetilde{H}^{(1)}/f^{(1)}][f^{(1)} - \mu^{(-1)}] = H. \tag{17.6.24}$$

Согласно формуле (17.6.13),

$$H = \widetilde{H}^{(1)} + c - c^{(-1)} = \widetilde{H}^{(1)} + h^{-1}(1-\Delta^{-1})(\mu). \tag{17.6.25}$$

Подставим это в (17.6.24):

$$\mu\widetilde{H}/f - (\widetilde{H}/f)^{(1)}\mu^{(-1)} = h^{(-1)}(1-\Delta^{-1})(\mu). \tag{17.6.26}$$

Обозначим

$$X = \widetilde{H}/f. \tag{17.6.27}$$

Тогда (17.6.26) превращается в

$$(\widehat{L}_\mu - \Delta\widehat{R}_{\mu^{(-2)}})(X) = (\widehat{L}_\mu - \Delta\widehat{R}_{\mu^{(-2)}})(h^{-1}), \tag{17.6.28}$$

откуда

$$X = h^{-1} + \operatorname{Ker}(\widehat{L}_\mu - \Delta\widehat{R}_{\mu^{(-2)}}) = h^{-1} + \mathrm{const}\,\mu^{(-1)} = h^{-1} + \mathrm{const}(1+hc^{-1)}). \tag{17.6.29}$$

Так как

$$X = \widetilde{H}/f = H + O(h)$$

регулярен по h, то const должна равняться $-h^{-1}$, так что

$$X = -c^{(-1)} \quad \Rightarrow \tag{17.6.30}$$

$$\widetilde{H} = -c^{(-1)}f = -c^{(-1)}[1 + h(u + c^{(-2)})]. \tag{17.6.31}$$

Сравнивая это с (17.6.13), находим

$$c^{(-2)} + H^{(-1)} - \mathrm{c}^{(-1)} = -c^{(-1)}[1 + h(u + c^{(-2)})], \tag{17.6.32}$$

так что, окончательно,

$$H^{(-1)} + hc^{(-1)}u = -(1 + hc^{(-1)})c^{(-2)}. \tag{17.6.33}$$

Переписав это как

$$c = -H^{(1)} - h(c^{(1)}u^{(2)} + c^{(1)}c), \tag{17.6.34}$$

видим, что существует единственный $c \in C_{u,H}[[h]]$ удовлетворяющий этому уравнению. Чтобы показать, что этот c служит также единственным решением уравнения (17.6.9), покажем, что (17.6.33) вытекает из (17.6.9). Для левой части равенства (17.6.33) получаем:

$$\begin{aligned} H^{(-1)} + hc^{(-1)}u &= H^{(-1)} - h\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \frac{1}{1+hc}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s)}}H^{(s)}u^{(s)}\dots u = \\ &= [1+hc^{(-1)}]\Big[\sum_{s\geqslant -1}(-h)^{(s+1)}\frac{1}{1+hc^{(-1)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s)}}H^{(s)}u^{(s)}\dots u^{(-1)}\Big]u^{(-1)-1} = \\ &= [1+hc^{(-1)}]\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hc^{(-1)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s-1)}}H^{(s-1)}u^{(s-1)}\dots u^{(-1)}\Big]u^{(-1)-1} = \\ &= [1+hc^{(-1)}]\Delta^{-1}\Big\{\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{1+hc}\cdots\frac{1}{1+hc^{(s)}}H^{(s)}u^{(s)}\dots u\Big]u^{-1}\Big\} = \\ &= [1+hc^{(-1)}]\Delta^{-1}(-\mathrm{c}^{(-1)}) = -(1+hc^{(-1)})c^{(-2)}, \end{aligned}$$

и это равно правой части равенства (17.6.33).

Упражнение 17.6.35. Покажите, что

$$c = -H^{(1)} + hH^{(2)}(u^{(2)} - H^{(1)}) + O(h^2) \tag{17.6.36}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{-h} = u(H^{(-2)} - u^{(-1)}) + (u - H^{(-1)})u + O(h), \tag{17.6.37a}$$

$$\frac{\widetilde{H} - H}{-h} = H^{(1)}(u^{(1)} - H) + H(H^{(-1)} + u) + O(h), \tag{17.6.37b}$$

в согласии с формулами (17.6.5).

Мы видели в §14.6, что гидродинамическая иерархия (17.6.2) допускает два типа связей: $\{u = 0\}$ (14.6.33) и $\{u = H^{(-1)}\}$ (14.6.36). Обе эти связи выдерживают только что построенную дискретизацию:

Во-первых, при $u = 0$, определяющее уравнение (17.6.33) превращается в

$$H = -(1+hc)c^{(-1)}, \tag{17.6.38}$$

$\widetilde{u}$–уравнение (17.6.19) превращается в $\widetilde{u} = 0$, и $\widetilde{H}$–уравнение (17.6.16) превращается в

$$\widetilde{H} = (1+hc)^{-1}H[1+hc^{(-2)}] \quad \overset{(17.6.36)}{=} -\mathrm{c}^{(-1)}[1+hc^{(-2)}]. \tag{17.6.39}$$

Это дает дискретизацию одного из решеточных аналогов уравнения Бюргерса без вязкости, уравнения $(17.6.5\mathrm{b})|_{u=0}$:

$$\partial_t(H) = HH^{(-1)} - H^{(1)}H. \tag{17.6.40}$$

На c–языке, из уравнений (17.6.38, 39) следует

$$(1+h\widetilde{c})\widetilde{\mathrm{c}}^{(-1)} = \mathrm{c}^{(-1)}[1+hc^{(-2)}]. \tag{17.6.41}$$

Так как

$$c = -H^{(1)} + O(h), \tag{17.6.42}$$

то в пределе $h \to 0$ получаем

$$\partial_t(c) = -cc^{(-1)} + c^{(1)}c. \tag{17.6.43}$$

Мы видим, что отображение

$$H \mapsto -H^{(1)}, \quad t \mapsto -t \tag{17.6.44}$$

является симметрией уравнения (17.6.40). Более того, уравнение (17.6.41) является интегрируемой дискретизацией по времени уравнения (17.6.43), и эта дискретизация того же самого *нового* и *таинственного* типа, что и уравнение (17.3.57): оно не разрешено явно относительно $\widetilde{c}$. (Фактически, $c = \alpha^{(1)}$.);

Во-вторых, при $u = H^{(-1)}$, c-уравнение (17.6.33) превращается в

$$[1 + hc^{(-1)}]H^{(-1)} = -(1 + hc^{(-1)})c^{(-2)}, \tag{17.6.45}$$

откуда

$$c = -H^{(1)}. \tag{17.6.46}$$

Из уравнения (17.6.13) тогда следует

$$\widetilde{H} = c^{(-2)} + H^{(-1)} - c^{(-1)} = -H^{(-1)} + H^{(-1)} + H = H, \tag{17.6.47}$$

тогда как уравнение (17.6.19) дает

$$\widetilde{u} = \{1 + h[H^{(-1)} + (-H^{(-1)})]\}^{-1} u \{1 + h[H^{(-2)} + (-H^{(-2)})]\} = u. \tag{17.6.48}$$

Эти уравнения согласуются с Теоремой 14.6.38.

После того, как анализ эволюции с прямым временем проделан, вычисления для обратного времени сильно упрощаются. Мы просто меняем местами переменные с тильдой и без тильды, конечно, не считая c, в уравнениях (17.6.13, 15–19, 31):

$$c + H^{(1)} = c^{(-1)} + \widetilde{H}, \tag{17.6.49}$$

$$[(1 + hc)H + hH^{(1)}u^{(1)}](u\zeta^{-1})^j = \widetilde{H}(\widetilde{u}\zeta^{-1})^j[1 + h(\widetilde{u} + c^{(-2)})], \tag{17.6.50}$$

$$(1 + hc)H + hH^{(1)}u^{(1)} = \widetilde{H}[1 + h(\widetilde{u} + c^{(-2)})], \tag{17.6.51}$$

$$u = f^{-1}\widetilde{u}f^{(-1)}, \quad f = 1 + h(\widetilde{u} + c^{(-2)}), \tag{17.6.52}$$

$$H = -c^{(-1)}[1 + h(\widetilde{u} + c^{(-2)})]. \tag{17.6.53}$$

Эти уравнения интерпретируются следующим образом:
1) Формула (17.6.49) дает $\widetilde{H}$-эволюцию:

$$\widetilde{H} = H^{(1)} + c - c^{(-1)}; \tag{17.6.54}$$

2) После этого, из формулы (17.6.51) получаем

$$f = 1 + h(\widetilde{u} + c^{(-2)}) = [H^{(1)} + c - c^{(-1)}]^{-1}[(1 + hc)H + hH^{(1)}u^{(1)}]; \tag{17.6.55}$$

3) Затем, из формулы (17.6.52) следует $\widetilde{u}$-эволюция:

$$\widetilde{u} = fu/f^{(-1)}; \tag{17.6.56}$$

4) Соотношение для c (17.6.59), при помощи формулы (17.6.55), превращается в

$$H = -c^{(-1)}[H^{(1)} + c - c^{(-1)}]^{-1}[(1+hc)H + hH^{(1)}u^{(1)}]. \tag{17.6.57}$$

Последнее соотношение можно нреобразовать к виду

$$c = -H^{(1)} - h[c + H^{(1)}u^{(1)}H^{-1}]c^{(-1)}, \tag{17.6.58}$$

так что элемент c существует и единствен в $C_{u,H}[[h]]$. Это надо сравнить с уравнением на $c = \Phi(A)$, получающимся из формулы (17.4.115):

$$-c^{(-1)} = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s Hu\ldots u^{(-s)}u^{(-s)-1}\frac{1}{1+hc^{(-s-2)}}\cdots\frac{1}{1+hc^{(-2)}}. \tag{17.6.59}$$

Чтобы проверить, что эти два c совпадают, несмотря на внешиее различие, перепишем (17.6.58) как

$$-c(1+hc^{(-1)}) = H^{(1)}[1 + hu^{(1)}H^{-1}c^{(-1)}]. \tag{17.6.60}$$

Испольэуя формулу (17.6.59) и сокращение $\bar{c} = (1+hc)^{-1}$, правую часть равенства (17.6.60) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned}
H^{(1)}[1 + hu^{(1)}H^{-1}c^{(-1)}] &= H^{(1)}\Big[1 - h\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s u^{(1)}\ldots u^{(1-s)}\bar{c}^{(-s-2)}\ldots\bar{c}^{(-2)}\Big] = \\
&= \Delta\Big\{H + \Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}Hu\ldots u^{(-s-1)}u^{(-s-1)-1}\bar{c}^{(-s-3)}\ldots\bar{c}^{(-2)}\Big]\bar{c}^{(-2)-1}\Big\} = \\
&= \Delta\Big\{\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s Hu\ldots u^{(-s)}u^{(-s)-1}\bar{c}^{(-s-2)}\ldots\bar{c}^{(-2)}\Big](1+hc^{(-2)})\Big\} = \\
&= \Delta\{[-c^{(-1)}](1+hc^{(-2)})\} = -c(1+hc^{(-1)}),
\end{aligned}$$

и это равно левой части формулы (17.6.60).

Упражнение 17.6.61. Покажите, что

$$c = -H^{(1)} + hH^{(1)}(u^{(1)} - H) + O(h^2) \tag{17.6.62}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{h} = u(H^{(-2)} - u^{(-1)}) + (u - H^{(-1)})u + O(h), \tag{17.6.63a}$$

$$\frac{\widetilde{H} - H}{h} = H^{(1)}(u^{(1)} - H) + H(H^{(-1)} - u) + O(h), \tag{17.6.63b}$$

в согласии с формулами (17.6.5).

Когда $u = 0$, из формулы (17.6.52) следует

$$\widetilde{u} = 0, \tag{17.6.64}$$

формула (17.6.53) превращается в

$$H = -c^{(-1)}[1 + hc^{(-2)}], \tag{17.6.65}$$

и формула (17.6.54) дает

$$\widetilde{H} = -c[1 + hc^{(-1)}] + c - c^{(-1)} = -(1 + hc)c^{(-1)}. \tag{17.6.66}$$

Сравнение с формулами (17.6.38, 39) подтверждает, что мы получили дискретизацию с обратным временем цепочки (17.6.40). На языке c, получаем перевернутое по времени уравиение (17.6.41):

$$\widetilde{c}^{(-1)}[1 + h\widetilde{c}^{(-2)}] = (1 + hc)c^{(-1)}. \tag{17.6.67}$$

Наконец, при $u = H^{(-1)}$, c-уравненне (17.6.60) превращается в

$$-c(1 + hc^{(-1)}) = H^{(1)}[1 + hc^{(-1)}] \quad \Rightarrow \tag{17.6.68}$$

$$c = -H^{(1)}. \tag{17.6.69}$$

Из $\widetilde{H}$-уравнения (17.6.49) при этом следует

$$\widetilde{H} = -c^{(-1)} = H. \tag{17.6.70}$$

Подставляя эти два соотношения в формулу (17.6.51), получаем

$$[1 - hH^{(1)}]H + hH^{(1)}H = H[1 + h(\widetilde{u} - H^{(-1)})] \quad \Rightarrow \tag{17.6.71}$$

$$\widetilde{u} = H^{(-1)} = u, \tag{17.6.72}$$

что опять согласуется с Теоремой 14.6.38.

Между началом и концом жизни разница в
одну букву — "creation" и "cremation".

Бирбом Три

17.7 Факторизованное КП и модифицированная цепочка Тоды

В этом разделе мы дискретизируем по времени большинство конструкций из §9.9.

В §9.9 изучался следующий трюк: если

$$L = \zeta^N + \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{N-1-j} q_j, \tag{17.7.1a}$$

$$F_i = \zeta^{N_i} + \sum_{s=0}^{N_i - 1} \zeta^{N_i - 1 - s} v_{is}, \quad i \leqslant i < n, \tag{17.7.1b}$$

$$F_n = \zeta^{N_n} + \sum_{s=0}^{\infty} \zeta^{N_n - 1 - s} v_{ns}, \tag{17.7.1c}$$

$$N = N_1 + \cdots + N_n; \quad N_i \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant i < n; \quad N_n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.7.1d}$$

то уравнения движения

$$\partial_P(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^m \tag{17.7.2}$$

и

$$\partial_P(F_i) = \phi_i(P_+)F_i - F_i\phi_{i+1}(P_+) = \qquad (17.7.3a)$$
$$= -\phi_i(P_-)F_i + F_i\phi_{i+1}(P_-), \quad i \in \mathbb{Z}_n. \qquad (17.7.3b)$$

совместны относительно гомоморфизмов $\phi_i : C_q \to C_v$,

$$\phi_i(L) = F_iF_{i+1}\dots F_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_n. \qquad (17.7.4)$$

Если поток (17.7.2) каким-лнбо образом дискретизирован при помощи анзаца

$$\mathcal{O}\widetilde{L} = L\mathcal{O}, \qquad (17.7.5)$$

то факторизованный поток (17.7.3) может быть аналогичио дискретизирован анзацем

$$\phi_i(\mathcal{O})\widetilde{F}_i = F_i\phi_{i+1}(\mathcal{O}), \quad i \in \mathbb{Z}_n, \qquad (17.7.6)$$

так что эти две временные эволюции будут совместиы относительно каждого из гомоморфизмов ϕ_i.

Проблема в следующем: не гарантируется, что уравнения (17.7.6) имеют смысл. Для задач такого типа не установлено общей теоремы, за следующим едиственным исключеиием.

Возьмем $N = 1 = N_1$, $N_2 = 0$, то есть случай собствеино КП. В обозначениях Упражнения 9.9.40 нмеем:

$$L = \zeta + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i} q_i, \qquad (17.7.7)$$

$$F_1 = \zeta + u, \quad F_2 = 1 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i-1} v_i, \qquad (17.7.8)$$

$$\phi_1(q_i) = u^{(i)} v_{i-1} + v_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \qquad (17.7.9a)$$

$$\phi_2(q_i) = v_{i-1} u + v_i^{(-1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \qquad (17.7.9b)$$

где мы ввели очень полезиое обозиачение

$$v_{-1} = 1. \qquad (17.7.10)$$

Первый поток, с $P = L$, имеет вид (9.9.45):

$$\partial_t(u) = v_0 u - u v_0^{(-1)}, \qquad (17.7.11a)$$

$$\partial_t(v_i) = (1 - \Delta^{-1})(v_{i+1}) + (u^{(i+1)} + v_0^{(i)})v_i - v_i(u + v_0), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \qquad (17.7.11b)$$

Чтобы дискретизировать по времеия эту картииу, примем анзац (17.7.6) я положим

$$[1 + h(\zeta + \alpha_1)]\widetilde{F}_1 = F_1[1 + h(\zeta + \alpha_2)], \qquad (17.7.12a)$$

$$[1 + h(\zeta + \alpha_2)]\widetilde{F}_2 = F_2[1 + h(\zeta + \alpha_1)]. \qquad (17.7.12b)$$

Времеино мы считаем α_1 и α_2 иеизвестными элементами в $C_{u,v}[[h]]$, и только потом попытаемся доказать, что, фактически,

$$\alpha_1 = \phi_1(\alpha), \quad \alpha_2 = \phi_2(\alpha), \qquad (17.7.13)$$

в согласии с анзацем (17.7.6). Здесь α задается формулой (17.1.21):

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s \frac{1}{1+h\alpha^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}} q_s, \tag{17.7.14}$$

и для нас будет удобно иметь это уравнение в виде

$$\frac{1}{1+h\alpha} = 1 + \sum_{s\geqslant 0} (-h)^{s+1} \frac{1}{1+h\alpha} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}} q_s. \tag{17.7.15}$$

Раскрывая уравнение (17.7.12a), получаем:

$$\begin{aligned} [1+h(\zeta+\alpha_1)]\widetilde{F}_1 &= |(1+h\alpha_1)+h\zeta|(\zeta+\widetilde{u}) = \\ &= (1+h\alpha_1)\zeta + h\zeta^2 + (1+h\alpha_1)\widetilde{u} + h\zeta\widetilde{u} = \\ = F_1[1+h(\zeta+\alpha_2)] &= (\zeta+u)[(1+h\alpha_2)+h\zeta] = \\ &= \zeta(1+h\alpha_2) + h\zeta^2 + u(1+h\alpha_2) + hu\zeta, \end{aligned} \tag{17.7.16}$$

что эквивалентно

$$\alpha_1^{(-1)} + \widetilde{u} = \alpha_2 + u^{(-1)}, \tag{17.7.17a}$$

$$(1+h\alpha_1)\widetilde{u} = u(1+h\alpha_2). \tag{17.7.17b}$$

Удобно работать с

$$\beta = \frac{1}{1+h\alpha_1}, \quad \gamma = \frac{1}{1+h\alpha_2} \tag{17.7.18}$$

вместо α_1 и α_2. В этих обозначениях, уравнения (17.7.17) принимают вид:

$$\widetilde{u} = u^{(-1)} + \frac{1}{h\gamma} - \frac{1}{h\beta^{(-1)}}, \tag{17.7.19a}$$

$$\widetilde{u} = \beta u \gamma^{-1}. \tag{17.7.19b}$$

Исключение $\widetilde{u}$ приводит к первому соотношению на β, γ :

$$h\beta^{(-1)}u^{(-1)}\gamma + \beta^{(-1)} - \gamma = h\beta^{(-1)}\beta u. \tag{17.7.20}$$

Далее, уравнение (17.7.12b):

$$\begin{aligned} [1+h(\zeta+\alpha_2)]\widetilde{F}_2 &= [(1+h\alpha_2)+h\zeta]\Big(1+\sum \zeta^{-i-1}\widetilde{v}_i\Big) = \\ = 1 + h\alpha_2 + h\zeta + \sum \zeta^{-i-1}&(1+h\alpha_2)^{(i+1)}\widetilde{v}_i + h\widetilde{v}_0 + h\sum \zeta^{-i-1}\widetilde{v}_{i+1} = \end{aligned} \tag{17.7.21a}$$

$$\begin{aligned} = F_2[1+h(\zeta+\alpha_1)] &= \Big(1+\sum \zeta^{-i-1}v_i\Big)|(1+h\alpha_1)+h\zeta] = \\ = 1 + h\alpha_1 + h\zeta + \sum \zeta^{-i-1}&v_i(1+h\alpha_1) + hv_0^{(-1)} + h\sum \zeta^{-i-1}v_{i+1}^{(-1)} \end{aligned} \tag{17.7.21b}$$

эквивалентно системе

$$\alpha_2 + \widetilde{v}_0 = \alpha_1 + v_0^{(-1)}, \tag{17.7.22}$$

$$(1+h\alpha_2^{(i+1)})\widetilde{v}_i + h\widetilde{v}_{i+1} = v_i(1+h\alpha_1) + hv_{i+1}^{(-1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.7.23i}$$

Это система недоопределена, и мы регуляризуем ее знакомой процедурой:

$$(1+h\alpha_2^{(i+1)})\widetilde{v}_i + h\widetilde{v}_{i+1} = v_i(1+h\alpha_1) + hv_{i+1}^{(-1)}, \quad 0 \leqslant i < M, \tag{17.7.24i}$$

$$(1+h\alpha_2^{(M+1)})\widetilde{v}_M = v_M(1+h\alpha_1), \tag{17.7.24M}$$

где подразумевается, что

$$\{0 = v_{M+1} = v_{M+2} = \dots\}. \tag{17.7.25}$$

Очевидно, эта связь уважает непрерывный поток (17.7.11).

Утверждение 17.7.26. Систему (17.7.24) можно привести к виду

$$\widetilde{v}_i = \gamma^{(i+1)} v_i \beta^{-1} - \sum_{s>0} (-h)^s \gamma^{(i+1)} \dots \gamma^{(i+s)} [v_{i+s}^{(-1)} - \gamma^{(i+s+1)} v_{i+s} \beta^{-1}]. \tag{17.7.27}$$

Доказательство. При $i \geqslant M$, формула (17.7.27) согласуется с формулами (17.7.24M, 25). Остается проверить, удовлетворяют ли величины (17.7.27) соотношению (17.7.24i). Имеем:

$$\begin{aligned}
(1+h\alpha_2^{(i+1)})\widetilde{v}_i &= \frac{1}{\gamma^{(i+1)}}\widetilde{v} = \\
&= v_i\beta^{-1} + h[v_{i+1}^{(-1)} - \gamma^{(i+2)} v_{i+1} \beta^{-1}] + \\
&= h \sum_{s>0} (-h)^s \gamma^{(i+2)} \dots \gamma^{(i+s+1)} [v_{i+s+1}^{(-1)} - \gamma^{(i+s+2)} v_{i+s+1} \beta^{-1}], \\
h\widetilde{v}_{i+1} &= h\gamma^{(i+2)} v_{i+1} \beta^{-1} - \\
&- h \sum_{s>0} (-h)^s \gamma^{(i+2)} \dots \gamma^{(i+1+s)} [v_{i+1+s}^{(-1)} - \gamma^{(i+s+2)} v_{i+1+s} \beta^{-1}].
\end{aligned}$$

Складывая, получаем:

$$(1+h\alpha_2^{(i+1)})\widetilde{v}_i + h\widetilde{v}_{i+1} = v_i\beta^{-1} + hv_{i+1}^{(-1)},$$

что совпадает с (17.7.24i). ∎

Перейдем теперь к пределу $M \to \infty$. Затем, полагая $i = 0$ в формуле (17.7.27), находим

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_0 &= \gamma^{(1)} v_0 \beta^{-1} - \sum_{s>0} (-h)^s \gamma^{(1)} \dots \gamma^{(s)} v_s^{(-1)} + \sum_{s>0} (-h)^s \gamma^{(1)} \dots \gamma^{(s+1)} v_s \beta^{-1} = \\
&= \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \gamma^{(1)} \dots \gamma^{(s+1)} v_s \beta^{-1} - \sum_{s>0} (-h)^s \gamma^{(1)} \dots \gamma^{(s)} v_s^{(-1)}.
\end{aligned} \tag{17.7.28}$$

Сравнивая это с уравнением для $\widetilde{v}_0$ (17.7.22), получаем второе соотношение между α_1 и α_2 :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -v_0^{(-1)} + \widetilde{v}_0 = \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \gamma^{(1)} \dots \gamma^{(s+1)} v_s \beta^{-1} - \gamma^{-1} \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \gamma \dots \gamma^{(s)} v_s^{(-1)}. \tag{17.7.29}$$

Первое уравнение на α_1 и α_2, получающееся при исключении $\widetilde{u}$ из системы (17.7.17), имеет вид

$$\alpha_1^{(-1)} - \alpha_2 = u^{(-1)} - \widetilde{u} = u^{(-1)} - \beta u \gamma^{-1}. \tag{17.7.30}$$

Система (17.7.29, 30) на α_1 и α_2 показывает, что существует единственная пара элементов $\alpha_1, \alpha_2 \in C_{u,v}[[h]]$. Докажем теперь, что эти α_1 и α_2 удовлетворяет формулам (17.7.13). Из формул (17.5.15, 9) имеем

$$\beta = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\dots\beta^{(s)}(u^{(s)}v_{s-1}+v_s), \tag{17.7.31}$$

$$\gamma = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{(s+1)}\gamma\dots\gamma^{(s)}(v_{s-1}u+v_s^{(-1)}). \tag{17.7.32}$$

План таков: мы проверим, что β и γ определенные этими формулами удовлетворяют соотношениям (17.7.29, 30). Последнее соотношение было переписанно в терминах β, γ в формуле (17.7.20). Первое можно переписать в виде

$$\gamma - \beta = -\sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma\dots\gamma^{(s+1)}v_s + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma\dots\gamma^{(s)}v_s^{(-1)}\beta, \tag{17.7.33}$$

Теорема 17.7.34. Если β и γ определены формулами (17.7.31, 32), то:

$$(i) \quad \beta = \frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\sigma, \tag{17.7.35}$$

где

$$\sigma = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma^{(1)}\dots\gamma^{(s+1)}v_s = \gamma^{-1}\sum, \tag{17.7.36}$$

$$\sum = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\dots\gamma^{(s)}v_{s-1}; \tag{17.7.37}$$

$$(ii) \quad \gamma = \frac{1}{(1-h\beta u)^{(-1)}}\beta^{(-1)}(1-h\beta u); \tag{17.7.38}$$

$$(iii) \quad \gamma = \sigma^{(-1)}(1-h\beta u); \tag{17.7.39}$$

$$(i^4) \quad \beta = (1-h\beta u)\sigma. \tag{17.7.40}$$

Доказательство. (i) Мы *определим* β по формуле (17.7.35) и затем проверям, что β–уравнение (17.7.31) выполняется, если дано γ–уравнение (17.7.32).

Из формулы (17.7.35) получаем

$$\beta\dots\beta^{(s)} = \frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\dots\gamma^{(s)}\sigma^{(s)}. \tag{17.7.41}$$

Следовательно, проверяемое β–уравнение (17.7.31) превращается в

$$\frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\sigma \overset{?}{=} 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\dots\gamma^{(s)}\sigma^{(s)}(u^{(s)}v_{s-1}+v_s), \tag{17.7.42}$$

или

$$\gamma\sigma \overset{?}{=} \sigma^{(-1)} + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma\dots\gamma^{(s)}[(\sigma u)^{(s)}v_{s-1}+\sigma^{(s)}v_s]. \tag{17.7.43}$$

Лемма 17.7.44.

$$\sigma u = \frac{1}{h\gamma}\sigma^{(-1)} - \frac{1}{h}. \tag{17.7.45}$$

Доказательство. Определяющее γ–уравнение (17.7.32) можно переписать в виде

$$\gamma = 1 - \sum u + (\sigma - 1)^{(-1)} = -h \sum u + \sigma^{(-1)}. \tag{17.7.46}$$

Следовательно,

$$u = \frac{1}{h\sum}(\sigma^{(-1)} - \gamma), \tag{17.7.47}$$

$$\sigma u = \sigma \frac{1}{h\sum}(\sigma^{(-1)} - \gamma) = \gamma^{-1} \sum \frac{1}{h\sum}(\sigma^{(-1)} - \gamma) = \frac{1}{h\gamma}\sigma^{(-1)} - \frac{1}{h}. \quad ∎ \tag{17.7.48}$$

Из формулы (17.7.45) находим

$$(\sigma u)^{(s)} = \frac{1}{h\gamma^{(s)}}\sigma^{(s-1)} - \frac{1}{h}. \tag{17.7.49}$$

Подставляя это в уравнение (17.7.43), получаем

$$\begin{aligned} \gamma\sigma - \sigma^{(-1)} \overset{?}{=} & \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma \ldots \gamma^{(s)}\Big[\frac{1}{h\gamma^{(s)}}\sigma^{(s-1}v_{s-1} - \frac{1}{h}v_{s-1}\Big] + \\ & = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma \ldots \gamma^{(s)}\sigma^{(s)}v_s = \\ = -\sigma^{(-1)}v_{-1} + & \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s}\gamma \ldots \gamma^{(s)}v_{s-1} = -\sigma^{(-1)} + \sum = -\sigma^{(-1)} + \gamma\sigma; \end{aligned}$$

(ii) Из формул (17.7.35, 48),

$$1 - h\beta u = 1 - h\frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\sigma u = 1 - \frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\Big[\frac{1}{\gamma}\sigma^{(-1)} - 1\Big] = \frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma. \tag{17.7.50}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(1-h\beta u)^{(-1)}}\beta^{(-1)}(1 - h\beta u) = \Big[\frac{1}{\gamma^{(-1)}}\sigma^{(-2)}\Big]\Big[\frac{1}{\sigma^{(-2)}}\gamma^{(-1)}\sigma^{(-1)}\Big]\Big[\frac{1}{\sigma^{(-1)}}\gamma\Big] = \gamma;$$

(iii) Это есть формула (17.7.50);
(i^4) Подставляя (iii) в (i), получаем

$$\beta = \frac{1}{\sigma^{(-1)}}\Big[\sigma^{(-1)}(1 - h\beta u)\Big]\sigma = (1 - h\beta u)\sigma. \qquad ∎$$

Теперь мы можем справиться с тождествами (17.7.20) и (17.7.33), выдвинутыми в качестве гипотезы. Первое можно переписать в виде

$$-(1 - h\beta u)^{(-1)}\gamma = -\beta^{(-1)}(1 - h\beta u),$$

что есть формула (17.7.38), а второе можно преобразовать к виду

$$\gamma + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma \ldots \gamma^{(s+1)}v_s = \Big[1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\gamma \ldots \gamma^{(s)}v_s^{(-1)}\Big]\beta, \tag{17.7.51}$$

что совпадает с (17.7.35).

Упражнение 17.7.52. Покажите, что

$$\alpha_1 = u + v_0 + O(h), \quad \alpha_2 = u + v_0^{(-1)} + O(h) \tag{17.7.53}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{-h} = v_0 u - u v_0^{(-1)} + O(h), \tag{17.7.54a}$$

$$\frac{\widetilde{v}_i - v_i}{-h} = (1 - \Delta^{-1})(v_{i+1}) + (u + v_0^{(-1)})^{(i+1)} v_i - v_i(u + v_0) + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.7.54b}$$

в согласии с формулами (17.7.11).

Замечание 17.7.55. Исключение $\widetilde{u}$ из системы (17.7.17) приводит к уравнению

$$0 = \frac{1}{1 + h\alpha_1} u(1 + h\alpha_2) - u^{(-1)} + \alpha_1^{(-1)} - \alpha_2 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{1 + h\alpha_1^{(-1)}} u^{(-1)}\right]^{(1)} (1 + h\alpha_2) - u^{(-1)} = \frac{(1 + h\alpha_2) - (1 + h\alpha_1^{(-1)})}{h}, \tag{17.7.56}$$

которое имеет *сингулярное решение*

$$\frac{1}{1 + h\alpha_1} u = \frac{1}{h} \quad \Rightarrow \tag{17.7.57}$$

$$\alpha_1 = u - \frac{1}{h}. \tag{17.7.58}$$

Аналогично, уравнение (17.7.29) с исключенным $\widetilde{v}_0$, в виде

$$\frac{(1 + h\alpha_1) - (1 + h\alpha_2)}{h} = \left(\frac{1}{1 + h\alpha_2}\right) Y(1 + h\alpha_1) - Y, \tag{17.7.59a}$$

$$Y = \gamma^{-1} \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s \gamma \ldots \gamma^{(s)} v_s^{(-1)}, \tag{17.7.59b}$$

имеет сингулярное решение

$$\frac{1}{1 + h\alpha_2} Y = \frac{1}{h} \quad \Rightarrow \tag{17.7.60}$$

$$\alpha_2 = Y - \frac{1}{h} = \gamma^{-1} \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s \gamma \ldots \gamma^{(s)} v_s^{(-1)} - \frac{1}{h}. \tag{17.7.61}$$

Эти решения не имеют смысла для дискретизации по времени. Однако, они подсказывают нечто другое. Рассмотрим, для ясности, простейший случай модифицированной цепочки Тоды, когда

$$q_i = 0, \quad i > 1; \quad v_i = 0, \quad i > 0. \tag{17.7.62}$$

Тогда формула (17.7.61) превращается в

$$\alpha_2 = v_0^{(-1)} - \frac{1}{h}. \tag{17.7.63}$$

Следовательно, анзац временной эволюции (17.7.12) превращается в

$$(\zeta+u)(\zeta+\widetilde{u})=(\zeta+u)(\zeta+v_0^{(-1)}) \tag{17.7.64a}$$

$$(\zeta+v_0^{(-1)})(1+\zeta^{-1}\widetilde{v}_0)=(1+\zeta^{-1}v_0)(\zeta+u) \quad \big[=(\zeta+v_0^{(-1)})(1+\zeta^{-1}u)\big], \tag{17.7.64b}$$

и имеет решение

$$\widetilde{u}=v_0^{(-1)}, \quad \widetilde{v}_0=u. \tag{17.7.65}$$

Это задает *дискретную симметрию* модифицированной цепочки Тоды (9.9.36):

$$\partial_t(u)=vu-uv^{(-1)}, \tag{17.7.66a}$$

$$\partial_t(v)=u^{(1)}v-vu. \tag{17.7.66b}$$

Упражнение 17.7.67. Проверьте, что отображение (17.7.65) действительно задает симметрию системы (17.7.66).

Упражнение 17.7.68. Систему (17.7.64) можно переписать в виде

$$\widetilde{F}_1=(F_1^{-1})(F_1)(F_2\zeta), \tag{17.7.69a}$$

$$\widetilde{F}_2=(F_2\zeta)^{-1}(F_2)(F_1). \tag{17.7.69b}$$

Это подсказывает, что если положить

$$F_1=\zeta+\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}u_i, \quad F_2=1+\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i-1}v_i, \tag{17.7.70}$$

то эволюционное отображение (17.7.69), в виде

$$\widetilde{u}_i=v_i^{(-1)}, \quad \widetilde{v}_i=u_i, \quad i\in\mathbb{Z}_+, \tag{17.7.71}$$

будет являться дискретной симметрией соответствующей факторизованной иерархии КП (17.7.3). Так ли это?

Обратимся теперь к эволюция с обращенным временем. Переставляя тильды в уравнениях (17.7.17, 22, 23), находим

$$\alpha_1+u^{(1)}=\alpha_2^{(1)}+\widetilde{u}, \tag{17.7.72a}$$

$$(1+h\alpha_1)u=\widetilde{u}(1+h\alpha_2), \tag{17.7.72b}$$

$$\alpha_2^{(1)}+v_0^{(1)}=\alpha_1^{(1)}+\widetilde{v}_0, \tag{17.7.73}$$

$$(1+h\alpha_2^{(i+1)})v_i+hv_{i+1}=\widetilde{v}_i(1+h\alpha_1)+h\widetilde{v}_{i+1}^{(-1)}, \quad i\in\mathbb{Z}_+. \tag{17.7.74i}$$

Упражнение 17.7.75. (i) Покажите, что регуляризованные уравнения (17.7.74) имеют вид

$$\widetilde{v}_i=\frac{1}{\gamma^{(i+1)}}v_i\beta-\sum_{s>0}(-h)^s\Big[v_{i+s}^{(1-s)}-\frac{1}{\gamma^{(i+1)}}v_{i+s}^{(-s)}\beta^{(-s)}\Big]\beta^{(1-s)}\dots\beta, \quad i\in\mathbb{Z}_+, \tag{17.7.76i}$$

где

$$\beta=(1+h\alpha_1)^{-1}, \quad \gamma=(1+h\alpha_2)^{-1}; \tag{17.7.77}$$

(ii) Покажите, что исключение $\widetilde{v}_0$ из формул (17.7.73) и ($17.7.76_{i=0}$) приводит к соотношению

$$\gamma = \sigma^{(-1)}\beta\frac{1}{\sigma}, \tag{17.7.78}$$

где

$$\sigma = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}v_s^{(-s)}\beta^{(-s)}\dots\beta = \sum\frac{1}{\beta^{(1)}}, \tag{17.7.79}$$

$$\sum = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s v_{s-1}^{(1-s)}\beta^{(1-s)}\dots\beta^{(1)}; \tag{17.7.80}$$

(iii) Покажите, что исключение $\widetilde{u}$ из формул (17.7.72a) и (17.7.72b) приводит к соотношению

$$\beta = (1 - hu\gamma)\gamma^{(1)}\frac{1}{(1 - hu\gamma)^{(1)}}; \tag{17.7.81}$$

(i^4) Покажите, что если α_1 и α_2 определены, как $\phi_1(\alpha)$ и $\phi_2(\alpha)$, где α задается формулой (17.1.37), что приводит к уравнениям

$$\beta = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}[uv_{s-1}^{(-s)} + v_s^{(-s)}|\beta^{(-s)}\dots\beta, \tag{17.7.82a}$$

$$\gamma = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}[v_{s-1}u + v_s^{(-1)}]^{(-s)}\gamma^{(-s)}\dots\gamma, \tag{17.7.82b}$$

то эти β и γ удовлетворяет требуемым соотношениям (17.7.78, 81), и вдобавок:

$$u\sigma^{(-1)} = \frac{1}{h}(\sigma\frac{1}{\beta} - 1), \tag{17.7.83}$$

$$(1 - hu\gamma)\sigma = \beta, \tag{17.7.84}$$

$$\sigma^{(-1)}(1 - hu\gamma) = \gamma; \tag{17.7.85}$$

(i^5) Покажите, что

$$\alpha_1 = u + v_0 + O(h), \quad \alpha_2 = u + v_0^{(-1)} + O(h), \tag{17.7.86}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{h} = v_0 u - uv_0^{(-1)} + O(h), \tag{17.7.87a}$$

$$\frac{\widetilde{v}_i - v_i}{h} = (1 - \Delta^{-1})(v_{i+1}) + [u + v_0^{(-1)}]^{(i+1)}v_i - v_i(u + v_0) + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{17.7.87b}$$

в согласии с формулами (17.7.11).

Я должен сказать в ее защиту, что когда ей объясняют мои шутки, и у нее есть время подумать над ними, она смеется весьма оживленно.

Сидней Смит о соседке

Глава 18

Системы типа МКП

В этой главе мы делаем с МКП то же, что в предыдущей делали с КП.

18.1 Иерархия МКП

В этом разделе мы находим дискретно-временную версию первого потока решеточной иерархии МКП при $N = 1$, и удостоверяемся, что эта дискретная по времени эволюция имеет корректный непрерывный по времени предел.

Мы хотим разрешить уравнение (16.21):

$$(1 + h\zeta\beta)\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(1 + h\zeta\beta), \tag{18.1.1}$$

для оператора Лакса

$$\mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{1-j} Q_j \tag{18.1.2}$$

иерархии МКП, с первым потоком (9.3.15):

$$\partial_t(Q_j) = Q_0^{(j)} Q_{j+1} - Q_{j+1}^{(-1)} Q_0, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.1.3}$$

Расписывая уравнение (18.1.1), получаем:

$$\begin{gathered}
(1 + h\zeta\beta)\widetilde{\mathcal{L}} = (1 + h\zeta\beta) \sum \zeta^{1-j} \widetilde{Q}_j = \\
= \sum \zeta^{1-j} \widetilde{Q}_j + h\zeta^2 \beta^{(-1)} \widetilde{Q}_0 + h \sum \zeta^{1-j} \beta^{(j)} \widetilde{Q}_{j+1} = \\
= \mathcal{L}(1 + h\zeta\beta) = \sum \zeta^{1-j} Q_j (1 + h\zeta\beta) = \sum \zeta^{1-j} Q_j + h\zeta^2 Q_0^{(-1)} \beta + h \sum \zeta^{1-j} Q_{j+1}^{(-1)} \beta,
\end{gathered}$$

что эквивалентно системе

$$\beta^{(-1)} \widetilde{Q}_0 = Q_0^{(-1)} \beta, \tag{18.1.4}$$

$$\widetilde{Q}_j + h\beta^{(j)} \widetilde{Q}_{j+1} = Q_j + hQ_{j+1}^{(-1)} \beta, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.1.5j}$$

Нам надо решить систему (18.1.4, 5j). Как и в §17.1 для случая КП, эта система недоопределена: из уравнения (18.1.4) получаем

$$\widetilde{Q}_0 = \frac{1}{\beta^{(-1)}} Q_0^{(-1)} \beta, \tag{18.1.6}$$

и далее, если $\widetilde{Q}_0, \ldots, \widetilde{Q}_j$ уже найдены, то уравнение (18.1.5j) дает $\widetilde{Q}_{j+1}$. Для β отдельного уравнения нет. Мы применяем то же средство, что и в случае КП. Рассмотрим конечный отрезок $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{M} \zeta^{1-j} Q_j \tag{18.1.7}$$

для некоторого $M \in \mathbb{N}$, и только после того, как все будет решено для этого фиксированного конечного M, мы перейдем к пределу $M \to \infty$. Таким образом, вместо уравнений (18.1.5j) имеем сейчас

$$\widetilde{Q}_j + h\beta^{(j)}\widetilde{Q}_{j+1} = Q_j + hQ_{j+1}^{(-1)}\beta, \quad 0 \leqslant j < M, \tag{18.1.8j}$$

$$\widetilde{Q}_M = Q_M. \tag{18.1.8M}$$

Обозначим

$$\delta_i = \widetilde{Q}_i - Q_i. \tag{18.1.9}$$

Утверждение 18.1.10. Система (18.1.8) может быть разрешена в виде

$$\delta_i = \frac{1}{\beta^{(i-1)}} \sum_{s>0} (-h)^s \beta^{(i-1)} \ldots \beta^{(i+s-2)} \theta_{i+s}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.1.11}$$

где

$$\theta_i = \beta^{(i-1)} Q_i - Q_i^{(-1)}\beta, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.1.12}$$

и подразумевается, что

$$Q_i = 0 \quad \text{при} \quad i > M. \tag{18.1.13}$$

Доказательство. Система (18.1.8) принимает в новых обозначениях вид

$$\delta_j + h\beta^{(j)}\delta_{j+1} = -h\theta_{j+1}, \quad 0 \leqslant j < M, \tag{18.1.14j}$$

$$\delta_j = 0, \quad j \geqslant M. \tag{18.1.14M}$$

При $j \geqslant M$, формула (18.1.11) дает правильный результат $\delta_j = 0$. Остается проверить, что формула (18.1.11) решает набор уравнений (18.1.14j). Достаточно преобразовать (18.1.11) следующим образом:

$$\delta_i = \frac{1}{\beta^{(i-1)}}(-h)\beta^{(i-1)}\theta_{i+1} + \sum_{\ell>0} (-h)^{\ell+1} \beta^{(i)} \ldots \beta^{(i+\ell-1)} \theta_{i+\ell+1} =$$

$$= -h\theta_{i+1} - h\beta^{(i)} \frac{1}{\beta^{(i)}} \sum_{\ell>0} (-h)^{\ell} \beta^{(i+1-1)} \ldots \beta^{(i+1+\ell-2)} \theta_{i+1+\ell} = -h\theta_{i+1} - h\beta^{(i)}\delta_{i+1}. \quad \blacksquare$$

Итак, у нас теперь есть формулы для эволюции каждого из Q_j, и мы можем рассматривать оставшееся уравнение (18.1.6) как уравнение на β. Это уравнение дает:

$$\delta_0 = \widetilde{Q}_0 - Q_0 = \frac{1}{\beta^{(-1)}} Q_0^{(-1)}\beta - Q_0 = \frac{1}{\beta^{(-1)}}[Q_0^{(-1)}\beta - \beta^{(-1)}Q_0] = -\frac{1}{\beta^{(-1)}}\theta_0. \tag{18.1.15}$$

Сравнивая это с выражением (18.1.11) при $i = 0$, получаем

$$-\frac{1}{\beta^{(-1)}}\theta_0 = \frac{1}{\beta^{(-1)}} \sum_{s>0} (-h)^s \beta^{(-1)} \ldots \beta^{(s-2)} \theta_s. \tag{18.1.16}$$

Согласно формуле (18.1.12), это можно переписать в виде

$$\frac{1}{\beta^{(-1)}}Q_0^{(-1)}\beta - Q_0 = \sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{\beta^{(-1)}}\beta^{(-1)} \dots \beta^{(s-2)}(\beta^{(s-1)}Q_s - Q_s^{(-1)}\beta) =$$
$$= \sum_{s>0}(-h)^s \Big(\beta \dots \beta^{(s-1)}Q_s - \frac{1}{\beta^{(-1)}}\Delta^{-1}[\beta \dots \beta^{(s-1)}Q_s]\beta\Big), \qquad (18.1.17)$$

или как

$$(1 - \widehat{R}_\beta \Delta^{-1}\widehat{L}_{\beta^{-1}})\Big[\frac{1}{\beta^{(-1)}} \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \beta^{(-1)} \dots \beta^{(s-1)}Q_s\Big] = 0. \qquad (18.1.18)$$

Лемма 18.1.19.

$$\operatorname{Ker}(1 - \widehat{R}_\beta \Delta^{-1}\widehat{L}_{\beta^{-1}}) = \operatorname{const}\beta \quad \text{в} \quad C_\beta[[h]]. \qquad (18.1.20)$$

Доказательство. Пусть $X \in \operatorname{Ker}(1 - \widehat{R}_\beta \Delta^{-1}\widehat{L}_{\beta^{-1}})$. Достаточно рассмотреть случай $X \in C_\beta$. Имеем

$$X = \frac{1}{\beta^{(-1)}}X^{(-1)}\beta = \frac{1}{\beta^{(-1)}}\Big[\frac{1}{\beta^{(-2)}}X^{(-2)}\beta^{(-1)}\beta\Big] =$$
$$= \dots = \frac{1}{\beta^{(-1)}} \cdots \frac{1}{\beta^{(-n)}}X^{(-n)}\beta^{(1-n)} \dots \beta. \qquad (18.1.21)$$

X не может содержать $\beta^{(s)}$ при $s > 0$, так как для $n \gg 0$ правая часть формулы (18.1.21) будет содержать только $\beta^{(s)}$ при $s \leqslant 0$. Аналогично, пусть s наименьший возможный такой, что X содержит $\beta^{(s)}$. Если $s < 0$ то, при $n = -s$, правая часть будет содержать $\beta^{(-2s)}$–член, и в левой не будет ничего похожего. Таким образом, X есть функция от β. Тогда, из формулы (18.1.21) следует, что эта функция линейна по β — иначе не будет баланса $\beta^{(-n)}$–членов. С другой стороны, $X = \operatorname{const}\beta$, очевидно, решает уравнение (18.1.21). ∎

Применяя Лемму 18.1.19 к уравнению (18.1.18), мы можем выписать его решение в виде

$$\operatorname{const}\beta = Q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s\beta \dots \beta^{(s-1)}Q_s, \qquad (18.1.22)$$

где "const" понимается в h–смысле, то есть, это ряд по h. В естественной градуировке

$$\operatorname{rk}(\zeta) = -\operatorname{rk}(h) = 1, \quad \operatorname{rk} Q_s^{(j)} = s, \quad \operatorname{rk}(\beta^{(j)}) = 0, \qquad (18.1.22')$$

"const" должна иметь $\operatorname{rk} = 0$, то есть, она не зависит от h. Нулю она не может равняться, иначе соотношение (18.1.22) превращается в противоречие. Следовательно, растягивая одновременно β и h, мы можем превратить эту постоянную в 1. Таким образом,

$$\beta = Q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s\beta \dots \beta^{(s-1)}Q_s. \qquad (18.1.23)$$

Формулы (18.1.11, 23) дают искомую дискретно-временную версию потока (18.1.3).

Упражнение 18.1.24. Покажите, что

$$\beta = Q_0(1 - hQ_1) + O(h^2) \qquad (18.1.25)$$

и установите, что

$$\frac{\widetilde{Q}_i - Q_i}{-h} = Q_0^{(i)} Q_{i+1} - Q_{i+1}^{(-1)} Q_0 + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.1.26}$$

в согласии с формулой (18.1.3).

Рассмотрим теперь эволюцию с обратным временем. Меняя местами переменные с тильдой и без тильды в формулах (18.1.4, 8), получаем

$$\beta^{(-1)} Q_0 = \widetilde{Q}_0^{(-1)} \beta, \tag{18.1.27}$$

$$Q_j + h\beta^{(j)} Q_{j+1} = \widetilde{Q}_j + h\widetilde{Q}_{j+1}^{(-1)} \beta, \quad 0 \leqslant j < M, \tag{18.1.28j}$$

$$Q_M = \widetilde{Q}_M. \tag{18.1.28M}$$

Уравнение (18.1.28j) можно переписать в виде

$$0 = (\widetilde{Q}_j - Q_j) + h(\widetilde{Q}_{j+1} - Q_{j+1})^{(-1)} \beta + h(Q_{j+1}^{(-1)} \beta - \beta^{(j)} Q_{j+1}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\delta_j + h\delta_{j+1}^{(-1)} \beta = h\theta_{j+1}, \tag{18.1.29}$$

в обозначепиях (18.1.9, 12).

Утверждение 18.1.30. Уравнення (18.1.28) можно переписать в виде

$$\delta_i = -\sum_{s>0} (-h)^s \theta_{i+s}^{(1-s)} \beta^{(1-s)-1} \beta^{(1-s)} \ldots \beta, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.1.31}$$

при обычном соглашенин (18.1.13).

Доказательство. Формула (18.1.31) при $i = M$ дает $\delta_M = 0$, то же, что уравнение (18.1.28M). Для проверки того, что уравнение (18.1.29) удовлетворено выражением (18.1.31), достаточно заметить, что

$$\delta_i = -(-h)\theta_{i+1} + \sum_{s>1} (-h)^s \theta_{i+s}^{(1-s)} \beta^{(2-s)} \ldots \beta = h\theta_{i+1} - h\sum_{s>0} (-h)^s \theta_{i+1+s}^{(-s)} \beta^{(1-s)} \ldots \beta =$$

$$= h\theta_{i+1} - h\Delta^{-1}\Big[\sum_{s>0} (-h)^s \theta_{i+1+s}^{(1-s)} \beta^{(1-s)-1} \beta^{(1-s)} \ldots \beta\Big]\beta = h\theta_{i+1} - h\delta_{i+1}^{(-1)} \beta. \qquad \blacksquare$$

Формулу (18.1.27) для $\widetilde{Q}_0$:

$$\widetilde{Q}_0 = \beta Q_0^{(1)} \beta^{(1)-1}, \tag{18.1.32}$$

можно переписать в виде

$$\delta_0 \beta^{(1)} = (\widetilde{Q}_0 - Q_0)\beta^{(1)} = \beta Q_0^{(1)} - Q_0 \beta^{(1)} \quad (= \theta_0^{(1)}.) \tag{18.1.33}$$

С другой стороны, формула (18.1.31) прн $i = 0$ дает:

$$\delta_0 \beta^{(1)} = -\sum_{s>0} (-h)^s \theta_s^{(1-s)} \beta^{(2-s)} \ldots \beta^{(1)} =$$

$$= -\sum_{s>0} (-h)^s \big[\beta Q_s^{(1-s)} - Q_s^{(-s)} \beta^{(1-s)}\big] \beta^{(2-s)} \ldots \beta^{(1)} =$$

$$= -\beta \sum_{s>0} (-h)^s Q_s^{(1-s)} \beta^{(2-s)} \ldots \beta^{(1)} + \sum_{s>0} (-h)^s Q_s^{(-s)} \beta^{(1-s)} \ldots \beta^{(1)}. \tag{18.1.34}$$

Приравнивая выражения (18.1.33) и (18.1.34), находим

$$(\widehat{L}_\beta\Delta - \widehat{R}_{\beta^{(1)}})\Big(Q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s Q_s^{(-s)}\beta^{(1-s)}\dots\beta\Big) = 0. \tag{18.1.35}$$

Так как

$$\operatorname{Ker}(\widehat{L}_\beta\Delta - \widehat{R}_{\beta^{(1)}}) = \{\mathrm{const}\,\beta\}, \tag{18.1.36}$$

то получаем

$$\mathrm{const}\,\beta = Q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s Q_s^{(-s)}\beta^{(1-s)}\dots\beta, \tag{18.1.37}$$

и при помощи знакомых рассуждений заключаем, что “const”=1:

$$\beta = Q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s Q_s^{(-s)}\beta^{(1-s)}\dots\beta. \tag{18.1.38}$$

Упражнение 18.1.39. Покажите, что

$$\beta = (1 - hQ_1^{(-1)})Q_0 + O(h^2) \tag{18.1.40}$$

и, получите, что, в согласии с формулой (18.1.3),

$$\frac{\widetilde{Q}_i - Q_i}{h} = Q_0^{(i)}Q_{i+1} - Q_{i+1}^{(-1)}Q_0 + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.1.41}$$

Семейства дискретных по времени отображений, построенных в этом разделе, несомненно гамильтоновы, по отношению к первой гамильтоновой структуре иерархии МКП, выведенной в §12.2. Но как это доказать, неясно.

18.2 Преобразование Миуры из КП в МКП

Во время забастовки врачей 1975 года показатель смертности в Нью-Йорке снизился более чем на пятнадцать процентов.

В этом разделе мы дискретизируем по времени переходы МКП ↦ Pot–МКП и КП ↦ Pot–МКП.

В §9.5 мы видели, как расширить иерархию МКП

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}_{\geqslant 1}, \mathcal{L}], \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{18.2.1}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{N-j}Q_j, \tag{18.2.2}$$

до ее потенциальной формы

$$\partial_{\mathcal{P}}(V) = -\operatorname{Pot}(\operatorname{Res}(\mathcal{P}))V, \tag{18.2.3}$$

при помощи гомоморфизма Pot

$$\operatorname{Pot}(Q_0) = V^{(-N)}V^{-1}, \quad \operatorname{Pot}(Q_{i+1}) = Q_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.2.4}$$

Уравнение движения для V (18.2.3) является аналогом уравнения движения для Q_0 (9.5.6):

$$\partial_{\mathcal{P}}(Q_0) = Q_0 \operatorname{Res}(\mathcal{P}) - \operatorname{Res}(\zeta^{-N}\mathcal{P}\zeta^{N})Q_0. \tag{18.2.5}$$

В частности, для интересующего нас случая $N = 1$, первый поток МКП (18.1.3)

$$\partial_t(Q_j) = Q_0^{(j)}Q_{j+1} - Q_{j+1}^{(-1)}Q_0, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.2.6}$$

имеет оператор вида

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{1-j}Q_j. \tag{18.2.7}$$

Следовательно,

$$\operatorname{Pot}(Q_0) = V^{(-1)}/V, \tag{18.2.8}$$

$$\operatorname{Res}(\mathcal{P}) = Q_1, \tag{18.2.9}$$

что дает первый поток Pot-МКП

$$\partial_t(V) = -Q_1V, \tag{18.2.10a}$$

$$\partial_t(Q_j) = V^{(j-1)}V^{(j)-1}Q_{j+1} - Q_{j+1}^{(-1)}V^{(-1)}V^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{18.2.10b}$$

Зададимся целью найти временную дискретизацию этого потока. Для этого необходимо дискретизировать по времени переход от уравнения на $\dot{Q}_0$ (18.2.5) к уравнению на $\dot{V}$ (18.2.3). Согласно формуле (18.1.4),

$$\widetilde{Q}_0 = \frac{1}{\beta^{(-1)}}Q_0^{(-1)}\beta. \tag{18.2.11}$$

Опуская символ Pot из обозначений, подставим формулу (18.2.11) в соотношение (18.2.4):

$$\widetilde{V}^{(-1)}/\widetilde{V} = \frac{1}{\beta^{(-1)}}V^{(-2)}\frac{1}{V^{(-1)}}\beta,$$

что можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{V^{(-2)}}\beta^{(-1)}\widetilde{V}^{(-1)} = \frac{1}{V^{(-1)}}\beta\widetilde{V}. \tag{18.2.12}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{V^{(-1)}}\beta\widetilde{V} = \mathrm{const} \quad \Leftrightarrow \tag{18.2.13}$$

$$\widetilde{V} = \mathrm{const}\,\beta^{-1}V^{(-1)}. \tag{18.2.14}$$

Так как эта “const” не важна, положим ее равной 1:

$$\widetilde{V} = \beta^{-1}V^{(-1)}. \tag{18.2.15}$$

Это дает искомую дискретизацию времени для уравнения (18.2.10a).

Упражнение 18.2.16. Покажите, что

$$\beta = V^{(-1)}V^{-1}(1 - hQ_1) + O(h^2) \tag{18.2.17}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{V}-V}{-h} = -Q_1V + O(h), \tag{18.2.18a}$$

$$\frac{\widetilde{Q}_j - Q_j}{-h} = V^{(j-1)}V^{(j)-1}Q_{j+1} - Q_{j+1}^{(-1)}V^{(-1)}V^{-1} + O(h), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{18.2.18b}$$

в согласии с формулами (18.2.10).

Теперь мы готовы разобраться с преобразованием Миуры $\Phi : C_q \to C_{V,Q}$,

$$\Phi(L) = \Phi\Big(\zeta + \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}q_j\Big) = V^{-1}\mathcal{L}V = V^{-1}\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{1-j}Q_jV, \tag{18.2.19}$$

$$\Phi(q_i) = V^{(i)-1}Q_{i+1}V, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.2.20}$$

Чтобы показать, что это отображение совместно с временной эволюцией, нужно показать, что

$$\Phi(\widetilde{L}) = (\widetilde{V^{-1}\mathcal{L}V}) = \widetilde{V}^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{V}. \tag{18.2.21}$$

В силу формул (16.17, 21)

$$\widetilde{L} = [1+h(\zeta+\alpha)]^{-1}L[1+h(\zeta+\alpha)], \tag{18.2.22a}$$

$$\widetilde{\mathcal{L}} = (1+h\zeta\beta)^{-1}\mathcal{L}(1+h\zeta\beta). \tag{18.2.22b}$$

Обозначая временно

$$\alpha' = \Phi(\alpha), \tag{18.2.23}$$

и используя формулу (18.2.15) для $\widetilde{V}$, перепишем условие совместности (18.2.21) в виде

$$[1+h(\zeta+\alpha')|^{-1}V^{-1}\mathcal{L}V|1+h(\zeta+\alpha')| = V^{(-1)-1}\beta(1+h\zeta\beta)^{-1}\mathcal{L}(1+h\zeta\beta)\beta^{-1}V^{(-1)}. \tag{18.2.24}$$

Это эквивалентно

$$V[1+h(\zeta+\alpha')] = (1+h\zeta\beta)\beta^{-1}V^{(-1)}, \tag{18.2.25}$$

и эквивалентно

$$V(1+h\Phi(\alpha)) = \beta^{-1}V^{(-1)} \quad (=\widetilde{V}). \tag{18.2.26}$$

Итак, мы пришли к проверке тождества

$$\Phi\Big(\frac{1}{1+h\alpha}\Big) \overset{?}{=} \frac{1}{V^{(-1)}}\beta V, \tag{18.2.27}$$

при условии, что

$$\bar{\alpha} := (1+h\alpha)^{-1} \tag{18.2.28}$$

удовлетворяет уравнению (17.7.15):

$$\bar{\alpha} = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\bar{\alpha}\ldots\bar{\alpha}^{(s)}q_s, \tag{18.2.29}$$

и β удовлетворяет уравнению (18.1.23):

$$\beta = V^{(-1)}V^{-1} + \sum_{s>0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s-1)}Q_s. \tag{18.2.30}$$

Согласно формулам (18.2.20, 29),

$$a = \Phi(\bar{a}) \tag{18.2.31}$$

является решением уравнение

$$a = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1} a\dots a^{(s)} V^{(s)-1} Q_{s+1} V. \tag{18.2.32}$$

Чтобы проверить формулу (18.2.27), нужно показать, что

$$a = \frac{1}{V^{(-1)}}\beta V \tag{18.2.33}$$

удовлетворяет уравнению (18.2.32). Так как

$$a\dots a^{(s)} = \frac{1}{V^{(-1)}}\beta\dots\beta^{(s)} V^{(s)}, \tag{18.2.34}$$

то равенства (18.2.32) можно переписать в виде

$$\frac{1}{V^{(-1)}}\beta V \overset{?}{=} 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\frac{1}{V^{(-1)}}\beta\dots\beta^{(s)} Q_{s+1} V, \tag{18.2.35}$$

или, иначе,

$$\beta V \overset{?}{=} V^{(-1)} + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\dots\beta^{(s)} Q_{s+1} V, \tag{18.2.36}$$

что совпадает с формулой (18.2.30) умноженной справа на V.

Замечание 18.2.37. В §9.5 изоморфизм

$$V + \text{КП} \equiv \text{Pot-МКП} \tag{18.2.38}$$

рассматривался на уровне динамических систем, а в §12.3 мы доказали, что он является также гамильтоновым изоморфизмом. В §17.2 было доказано, что временная эволюция КП гамильтонова. Таким образом, чтобы доказать гамильтоновость эволюции МКП из §18.1, достаточно только учесть эффект от присоединения едиственного скалярного поля V, тем более, что формула (18.2.27), в виде

$$\beta = V^{(-1)}\frac{1}{1+h\alpha}V^{-1}, \tag{18.2.39}$$

показывает, что β является очень простой функцией от V. Но даже эта умеренная программа оказывается слишком громоздкой.

Рассмотрим эволюцию с обращенным временем. В этом случае,

$$\tilde{Q}_0 = \beta Q_0^{(1)}\frac{1}{\beta^{(1)}} \tag{18.2.40}$$

в силу формулы (18.1.27), так что

$$\tilde{V} = (\beta V)^{(1)}. \tag{18.2.41}$$

Совместность между преобразованием Миуры и временной эволюцией, формула (*18*.2.21), дает

$$[1+h(\zeta+\alpha')]V^{-1}\mathcal{L}V[1+h(\zeta+\alpha')]^{-1} = V^{((1)-1}\beta^{(1)-1}(1+h\zeta\beta)\mathcal{L}(1+h\zeta\beta)^{-1}\beta^{(1)}V^{(1)}, \tag{18.2.42}$$

что эквивалентно

$$[(1+h\alpha')+h\zeta]V^{-1} = V^{(1)-1}\beta^{(1)-1}(1+h\zeta\beta), \tag{18.2.43}$$

и это эквивалентно

$$\beta^{(1)}V^{(1)}[(1+h\alpha')+h\zeta] = (1+h\zeta\beta)V, \tag{18.2.44}$$

и, окончательно, получаем

$$\Phi\left(\frac{1}{1+h\alpha}\right) = \frac{1}{V}\beta^{(1)}V^{(1)}. \tag{18.2.45}$$

Согласно формуле (17.1.37), $\bar{\alpha} = (1+h\alpha)^{-1}$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{\alpha} = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}q_s^{(-s)}\bar{\alpha}^{(-s)}\ldots\bar{\alpha}. \tag{18.2.46}$$

Следовательно, по формуле (18.2.20),

$$a = \Phi(\bar{\alpha}) = \Phi((1+h\alpha)^{-1}) \tag{18.2.47}$$

служит решением уравнения

$$a = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}V^{-1}Q_{s+1}^{(-s)}V^{(-s)}a^{(-s)}\ldots a. \tag{18.2.48}$$

Следовательно, утверждение (18.2.45):

$$a = V^{-1}\beta^{(1)}V^{(1)}, \tag{18.2.49}$$

эквивалентно соотношению

$$V^{-1}\beta^{(1)}V^{(1)} \overset{?}{=} 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}V^{-1}Q_{s+1}^{(-s)}\beta^{(1-s)}\ldots\beta^{(1)}V^{(1)}. \tag{18.2.50}$$

Умножая это слева на V и деля справа на $V^{(1)}$, находим

$$\beta^{(1)} \overset{?}{=} V/V^{(1)} + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}Q_{s+1}^{(-s)}\beta^{(1-s)}\ldots\beta^{(1)}. \tag{18.2.51}$$

Применяя Δ^{-1}, получаем

$$\beta \overset{?}{=} V^{(-1)}V^{-1} + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}Q_{s+1}^{(-s-1}\beta^{(-s)}\ldots\beta, \tag{18.2.52}$$

а это в точности определяющее уравнение для β (18.1.36).

Упражнение 18.2.53. Покажите, что

$$\beta = (1 - hQ_1^{(-1)})V^{(-1)}V^{-1} + O(h^2) \tag{18.2.54}$$

и получите что

$$\frac{\widetilde{V} - V}{h} = -Q_1 V, \tag{18.2.55a}$$

$$\frac{\widetilde{Q}_j - Q_j}{h} = V^{(j-1)}V^{(j)-1}Q_{j+1} - Q_{j+1}^{(-1)}V^{(-1)}V^{-1} + O(h), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{18.2.55b}$$

в согласии с формулами (18.2.10).

18.3 Первая и вторая формы Гиббонса

В этом разделе мы дискретизируем по времени первые две формы Гиббонса иерархии МКП, построенные в §13.2.

Так как эти две формы связаны обратимым преобразованием (13.2.13), рассмотрим только вторую из них. Напомним, что она возникает при замене оператора Лакса для МКП

$$\mathcal{L} = \sum_{j \geqslant 0} \zeta^{1-j} Q_j \tag{18.3.1}$$

на оператор

$$\bar{\mathcal{L}} = \zeta Q_0 + Q_1 + \boldsymbol{a}^t \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{18.3.2}$$

посредством преобразования Гиббонса

$$Q_{j+2} = \boldsymbol{a}^{(j+1)t}\boldsymbol{b}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.3.3}$$

Уравнения движения для $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (13.2.14):

$$\partial_t(\boldsymbol{a}) = (\bar{\mathcal{L}}_{\geqslant 1})(\boldsymbol{a}) = (Q_0\boldsymbol{a})^{(1)}, \tag{18.3.4a}$$

$$\partial_t(\boldsymbol{b}) = -(\bar{\mathcal{L}}_{\geqslant 1})^\dagger(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-1)}Q_0, \tag{18.3.4b}$$

должны быть дискретизированы по времени так, чтобы оставаться совместными, при преобразовании Гиббонса (18.3.3), с формулами дискретно-временной эволюции (18.1.11, 23) первого потока для общего (неспецилизированного) случая МКП.

Утверждение 18.3.5. (i) Система (18.1.11, 23) эквивалентна системе (18.1.4, 11); (ii) последняя эквивалентна системе (18.1.4, $5j|_{j\geqslant n}$, $11j|_{j\leqslant n}$), $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. (i) Именно так было получено уравнение для β (18.1.23) в §18.1, не считая растяжении β;
(ii) Это очевидно из доказательства Утверждении 18.1.10. (Заметим, что уравнение (18.1.4) можно привести к виду $(18.1.5j)|_{j=-1}$, при $Q_{-1} = 0$). ▮

В качестве дискретно-временной версии уравнений (18.3.4) примем

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = (1 + h\zeta\beta)^{-1}(\boldsymbol{a}), \tag{18.3.6a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = (1 + h\zeta\beta)^\dagger(\boldsymbol{b}), \tag{18.3.6b}$$

и уравнения (18.1.4) & $(18.1.11)|_{j=0,1}$. Уравнения $(18.1.11)|_{j=0,1}$ дают временную эволюция для Q_0 и Q_1; уравнение (18.1.4) отвечает за β–уравнение (18.1.23):

$$\beta = Q_0 - h\beta Q_1 + h^2 \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s \beta \dots \beta^{(s+1)} \boldsymbol{a}^{(s+1)^t} \boldsymbol{b}. \tag{18.3.7}$$

Нам надо показать, что уравнении (18.1.5j) при $j > 1$ следуют из уравнений (18.3.6), и затем проверить, что уравнение (18.1.5j) для $j = 1$ следует из всех остальных. Для первой цели, перепишем уравнения (18.3.6) как

$$\boldsymbol{a} = \widetilde{\boldsymbol{a}} + h(\beta\widetilde{\boldsymbol{a}})^{(1)}, \tag{18.3.8a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + h\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta, \tag{18.3.8b}$$

и получим

$$\begin{gathered}\widetilde{Q}_j + h\beta^{(j)}\widetilde{Q}_{j+1} = \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j-1)t}\widetilde{\boldsymbol{b}} + h\beta^{(j)}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j)t}\widetilde{\boldsymbol{b}} = \\ = [\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j-1)} + h\beta^{(j)}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(j)}|^t\widetilde{\boldsymbol{b}} = [\widetilde{\boldsymbol{a}} + h(\beta\widetilde{\boldsymbol{a}})^{(1)}|^{(j-1)t}\widetilde{\boldsymbol{b}} \quad \overset{(18.3.8)}{=} \\ = \boldsymbol{a}^{(j-1)t}(\boldsymbol{b} + h\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta) = \boldsymbol{a}^{(j-1)t}\boldsymbol{b} + h[\boldsymbol{a}^{(j)t}\boldsymbol{b}]^{(-1)}\beta = Q_j + hQ_{j+1}^{(-1)}\beta.\end{gathered} \tag{18.3.9}$$

Это доказывает равенство (18.1.5j) *для всех* j, при которых применима формула (18.2.3) для представления Гиббонса.

Упражнение 18.3.10. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{a}}{-h} = (Q_0\boldsymbol{a})^{(1)} + O(h), \tag{18.3.11a}$$

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}}{-h} = -\boldsymbol{b}^{(-1)}Q_0 + O(h), \tag{18.3.11b}$$

в согласии с формулой (13.2.21c,d) (но в *других обозначениях*).

Лемма 18.3.12. Дискретно-временной аналог тождества (13.2.25) имеет вид

$$\widetilde{Q}_1 - Q_1 = \widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}. \tag{18.3.13}$$

Считая лемму доказанной, оставшуюся проверку равенства (18.1.5j) при $j = 1$ получаем из выкладки (18.3.9), так как формула (18.3.13) показывает, что Q_j ведет себя, как $\boldsymbol{a}^{(j-1)t}\boldsymbol{b}$ не только при $j > 1$, но и при $j = 1$.

Доказательство Леммы 18.3.12. Имеем:

$$\begin{gathered}\widetilde{Q}_1 - Q_1 = \delta_1 \quad \overset{(18.1.11)}{=} \frac{1}{\beta}\sum_{s>0}(-h)^s\beta\dots\beta^{(s-1)}\theta_{s+1} = \\ = -\frac{h}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\dots\beta^{(s)}\theta_{s+2} = \\ = -\frac{h}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\dots\beta^{(s)}[\beta^{(s+1)}\boldsymbol{a}^{(s+1)t}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta] = \\ = -\frac{h}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\dots\beta^{(s+1)}\boldsymbol{a}^{(s+1)t}\boldsymbol{b} + \frac{h}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta.\end{gathered} \tag{18.3.14}$$

С другой стороны,

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} \overset{(18.3.6a)}{=} (1+h\zeta\beta)^{-1}(\boldsymbol{a}) = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s(\zeta\beta)^s(\boldsymbol{a}) = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\frac{1}{\beta}\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)}, \tag{18.3.15}$$

откуда

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b} = \frac{1}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}[\boldsymbol{b}+h\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta] - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b} =$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b} + \tag{18.3.16a}$$

$$+\frac{h}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta, \tag{18.3.16b}$$

и эти два выражения соответствуют 1-му и 2-му слагаемым в выражении (18.3.13).

∎

Для эволюции с обратным временем, везде переставим местами переменные с тильдой и без тильды. Тогда уравнения движения (18.3.6) примут вид

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = (1+h\zeta\beta)(\boldsymbol{a}), \tag{18.3.17a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = [(1+h\zeta\beta)^\dagger]^{-1}(\boldsymbol{b}), \tag{18.3.17b}$$

β–уравнение (18.1.36) превратится в

$$\beta = Q_0 - hQ_1^{(-1)}\beta + h^2\sum_{s\geqslant 0}(-h)^2\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-s-2)}\beta^{(-s-1)}\ldots\beta, \tag{18.3.18}$$

а формулы (18.3.11) в

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{a}}{h} = (Q_0\boldsymbol{a})^{(1)} + O(h), \tag{18.3.19a}$$

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{b}}{h} = -\boldsymbol{b}^{(-1)}Q_0 + O(h), \tag{18.3.19b}$$

формула же (18.3.13) не изменится.

18.4 Третья форма Гиббонса и ассоциированное преобразование Миуры

В этом разделе мы дискретизируем по времени построенный в §13.3 первый поток третьей формы Гиббонса для иерархии МКП и показываем, что при преобразовании Миуры он совместен с потоком, построенным в §17.2.

Третья форма Гиббонса получается при специализации оператора Лакса для МКП

$$\mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0}\zeta^{1-j}Q_j \tag{18.4.1}$$

в виде оператора

$$\mathcal{L} = \zeta Q_0 + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{18.4.2}$$

(Мы избавляемся от черточек и других иероглифических изобретений, обозначая два различных объекта одной и той же буквой $\mathcal{L}$. "Я приношу извинения за все, что сказал, говорю, или скажу когда-нибудь в будущем." [Композитор Чарльз Станфорд, *Страницы из Ненаписанного Дневника (1914).*])

Дискретизация времени в соответствующих уравнениях движения $(18.1.3_{j=0})$, (18.3.4) состоит из уравнений (18.1.4), (18.3.8), и образа β–уравнения (18.1.23) под действием третьего представления Гиббонса

$$Q_j = \boldsymbol{a}^{(j-1)t}\boldsymbol{b}, \quad j \in \mathbb{N}: \tag{18.4.3}$$

$$\beta = Q_0 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}. \tag{18.4.4}$$

Чтобы увидеть, откуда это все берется, можно было бы обратиться к Утверждению 18.3.5(ii) при $j = 0$, но вместо этого давайте лучше выпишем логические связи между различными формулами из §18.1:

$$\text{(i) из любых двух соотношений } (18.1.4,\ 11_{j=0},\ 23) \text{ следует третье;} \tag{18.4.5}$$

$$\text{(ii) } (18.1.11) \quad \Leftrightarrow \quad (18.1.5,\ 11_{j=0}): \tag{18.4.6}$$

Следовательно,

$$(18.1.11, 23) \quad \Leftrightarrow \quad (18.1.11_{j=0}, 11|_{j>0}, 23) \quad \Leftrightarrow \quad (18.1.5, 11_{j=0}, 23) \quad \Leftrightarrow \tag{18.4.7}$$

$$\Leftrightarrow \quad (18.1.4, 5, 23). \tag{18.4.8}$$

Чтобы проверить совместность приведенного выше описания временной эволюции для третьей формы Гиббонса с временной эволюцией в полной МКП-картине, мы сошлемся на выкладку (18.3.9); тогда останется проверить, что уравнение $(18.1.5j)$ при $j = 0$ следует из всего остального.

Таким образом, надо проверить, что

$$\widetilde{Q}_0 + h\beta\widetilde{Q}_1 = Q_0 + hQ_1^{(-1)}\beta \tag{18.4.9}$$

где $Q_1 = \boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}$, то есть, проверить тождество

$$\widetilde{Q}_0 - Q_0 + h\beta\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}} = h\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta. \tag{18.4.10}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}_0 - Q_0 &\overset{(18.1.6)}{=} \frac{1}{\beta^{(-1)}}Q_0^{(-1)}\beta - Q_0 \overset{(18.4.4)}{=} \\
&= \frac{1}{\beta^{(-1)}}\Big(\beta^{(-1)} - \Delta^{-1}\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}\Big]\Big)\beta - \\
&\quad - \Big[\beta - \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}\Big] = \\
&= h\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta - \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+2}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b},
\end{aligned} \tag{18.4.11}$$

в то время, как

$$\begin{aligned}
h\beta\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}} &\overset{(18.3.16)}{=} h\sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta + \\
&\quad + h^2\sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s}\beta\dots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta.
\end{aligned} \tag{18.4.12}$$

Складывая выражения (18.4.11) и (18.4.12), получаем

$$\widetilde{Q}_0 - Q_0 + h\beta\widetilde{\boldsymbol{a}}^t\widetilde{\boldsymbol{b}} = h\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}^{(-1)}\beta,$$

а это есть требуемая формула (18.4.10).

Замечание 18.4.13. Проверка тождеств (18.3.13) и (18.4.9) раздражает. То, что эти тождества оказываются верны, вызывает ощущение, что этой проверки можно было бы избежать, будь мы чуточку умнее. Может быть, читатель таким и окажется; но я не могу придумать, как избежать этой трудности, и возможно причина этого заключается в *несовместимых способах* вывода временной эволюции в полной МКП-картине и картине Гиббонса. В первом случае мы должны пройти через предел $M \to \infty$ лаксовых аппроксимаций при конечном обрыве (18.1.7, 8), а во втором такие конечные аппроксимации не допускаются.

Взглянем теперь на преобразование Миуры Ψ (13.3.2) между формами Гиббонса иерархий КП и МКП:

$$\Psi(L) = \Psi(\zeta + \boldsymbol{p}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{q}) = V^{-1}(\zeta Q_0 + \boldsymbol{a}^t(1-\zeta^{-1})^{-1}\boldsymbol{b})V = V^{-1}\mathcal{L}V, \tag{18.4.14}$$

$$\Psi(\boldsymbol{p}) = V^{-1}\boldsymbol{a}, \quad \Psi(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}V. \tag{18.4.15}$$

В §18.2 мы видели, что это преобразование Миуры совместно с временной эволюцией, понимаемой как сопряжение, при условии, что выполняется уравнение (18.2.27)

$$\Phi\left(\frac{1}{1+h\alpha}\right) = \frac{1}{V^{(-1)}}\beta V, \tag{18.4.16}$$

и было доказано, что это тождество *выполняется* для общих (негиббонсовских) переменных Лакса. Так как, в форме Гиббонса, α и β специализируются соотношениями

$$Q_s = \boldsymbol{a}^{(s-1)t}\boldsymbol{b}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{18.4.17a}$$

$$q_s = \boldsymbol{p}^{(s)t}\boldsymbol{q}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.4.17b}$$

и эти специализации совместны при преобразованиях Миуры Ψ (18.4.15) и Φ (18.2.20):

$$\Phi(q_s) = V^{(s)-1}Q_{s+1}V, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.4.18}$$

то тождество (18.4.16) остается верным и в гиббонсовской картине. Следовательно, преобразование Миуры Ψ (18.4.15) совместно с временными эволюциями в форме Гиббонса для МКП, уравнениями (18.2.15), (18.3.6), (18.2.30):

$$\widetilde{V} = \beta^{-1}V^{(-1)}, \tag{18.4.19a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = (1+h\zeta\beta)^{-1}(\boldsymbol{a}), \tag{18.4.19b}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = (1+h\zeta\beta)^{\dagger}(\boldsymbol{b}), \tag{18.4.19c}$$

$$\beta = V^{(-1)}V^{-1} + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}, \tag{18.4.19d}$$

и, в КП-картине, с уравнениями (17.2.5), (17.1.21):

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = [1+h(\zeta+\alpha)]^{-1}(\boldsymbol{p}), \tag{18.4.20a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = [1+h(\zeta+\alpha)]^{\dagger}(\boldsymbol{q}), \tag{18.4.20b}$$

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\cdots\frac{1}{1+h\alpha^{(s)}}\boldsymbol{p}^{(s)t}\boldsymbol{q}. \tag{18.4.20c}$$

Аналогичные рассмотрения применимы к эволюции с обращенным временем. Это оставляется читателю в качестве упражнения.

18.5 Четвертая форма Гиббонса

В этом разделе мы дискретизируем по времени первый поток 4-й формы Гиббонса иерархии МКП из §13.4.

4-я форма Гиббонса получается при замене оператора Лакса для МКП

$$\mathcal{L} = \sum_{j\geqslant 0} \zeta^{1-j} Q_j \tag{18.5.1}$$

полностью билинейным оператором

$$\bar{\mathcal{L}} = \boldsymbol{a}^t \zeta (1-\zeta^{-1})^{-1} \boldsymbol{b} \tag{18.5.2}$$

с учетом преобразования Гиббонса

$$Q_j = \boldsymbol{a}^{(j-1)t}\boldsymbol{b}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.5.3}$$

Первый поток соответствующей иерархии (13.4.11)

$$\partial_t(\boldsymbol{a}) = \bar{\mathcal{L}}_{\geqslant 1}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}^t\zeta\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}^{(1)})\boldsymbol{a}^{(1)}, \tag{18.5.4a}$$

$$\partial_t(\boldsymbol{b}) = -(\bar{\mathcal{L}}_{\geqslant 1})^{\dagger}(\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{b}^{(-1)}(\boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}), \tag{18.5.4b}$$

имеет временную дискретизацию, заданную формулой (18.3.6), но теперь β определяется, как образ уравнения (18.1.23) при преобразовании Гиббонса (18.5.3):

$$\beta = \frac{1}{\beta^{(-1)}} \sum_{s\geqslant 0} (-h)^s \beta^{(-1)} \ldots \beta^{(s-1)} \boldsymbol{a}^{(s-1)t}\boldsymbol{b} = \tag{18.5.5a}$$

$$= \Delta^{-1}\Big[\frac{1}{\beta}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)}\Big]^t\boldsymbol{b}. \tag{18.5.5b}$$

Согласно рассуждениям, развитым в двух предыдущих разделах, нам необходимо проверить, что уравнение (18.1.4) $[=(18.1.5j)|_{j=-1}]$ превращается в тождество:

$$\beta\widetilde{Q}_0^{(1)} = Q_0\beta^{(1)} \tag{18.5.6}$$

при $Q_0 = \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}$, то есть, проверить тождество

$$\beta\widetilde{\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}}^{(1)} = \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}\beta^{(1)}. \tag{18.5.7}$$

Для левой части этого тождества получаем

$$\beta\widetilde{\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}}^{(1)} \overset{(18.3.15,\ 8b)}{=} \Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)}\Big]^t[\boldsymbol{b}^{(1)} + h\boldsymbol{b}\beta^{(1)}] \overset{(18.5.5b)}{=}$$

$$= \beta\beta^{(1)} - \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}\beta^{(1)} \overset{(18.5.5a)}{=}$$

$$= \Big[\frac{1}{\beta^{(-1)}}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta^{(-1)}\ldots\beta^{(s-1)}\boldsymbol{a}^{(s-1)t}\boldsymbol{b} -$$

$$- \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\ldots\beta^{(s)}\boldsymbol{a}^{(s)t}\boldsymbol{b}\Big]\beta^{(1)} = \boldsymbol{a}^{(-1)t}\boldsymbol{b}\beta^{(1)},$$

что совпадает с его правой частью.

Упражнение 18.5.8. Покажите, что

$$\beta = \mathbf{a}^{(-1)t}\mathbf{b} + O(h) \tag{18.5.9}$$

и получите что

$$\frac{\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}}{-h} = (\mathbf{a}^t\mathbf{b}^{(1)})\mathbf{a}^{(1)} + O(h), \tag{18.5.10a}$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}}{-h} = -\mathbf{b}^{(-1)}(\mathbf{a}^{(-1)t}\mathbf{b}) + O(h), \tag{18.5.10b}$$

в согласии с формулами (18.5.4).

В §13.4 мы видели, что скалярная версия $\mathbf{a} = a$, $\mathbf{b} = b$ системы с непрерывным временем (18.5.4) допускает связь

$$b = a^{-1}, \tag{18.5.11}$$

которая сводит ее к

$$\partial_t(a) = a. \tag{18.5.12}$$

Эту же связь можно применить и дискретно-временной версии. Это можно увидеть следующим образом. Во-первых, β–уравнение (18.5.5) можно переписать при помощи формулы (18.3.5), как

$$\beta a = \beta b^{-1} = \Delta^{-1}(1 + h\Delta\beta)^{-1}(a), \tag{18.5.13}$$

или

$$a = (1 + h\Delta\beta)\Delta(\beta a). \tag{18.5.14}$$

Во-вторых, пусть

$$\lambda = 2[(1+4h)^{1/2} + 1]^{-1} = 1 + O(h) \tag{18.5.15}$$

есть регулярный по h корень квадратного уравнения

$$\lambda(1 + \lambda h) = 1. \tag{18.5.16}$$

Тогда

$$\zeta\beta = \lambda a\zeta a^{-1}, \tag{18.5.17}$$

то есть

$$\beta = \lambda a^{(-1)}/a \quad (= \lambda Q_0 = Q_0 + O(h).) \tag{18.5.18}$$

Действительно, из этой формулы находим

$$(1 + h\Delta\beta)\Delta(\beta a) = (1 + h\lambda a\Delta a^{-1})(\lambda a) = \lambda a + h\lambda^2 a = \lambda(1 + h\lambda)a = a,$$

и β–уравнение (18.5.14) выполняется. Далее,

$$\tilde{a} = (1 + h\Delta\beta)^{-1}(a) \overset{(18.5.13)}{=} (\beta a)^{(-1)} = \lambda a. \tag{18.5.19}$$

Это можно воспринимать, как дискретизацию по времени дифференциального определения (18.5.12) экспоненты.

Остается проверить, что $\tilde{b}$–уравнение (18.3.8b):

$$\tilde{b} = b + hb^{(-1)}\beta \tag{18.5.20}$$

превращается в тождество при связи $b = a^{-1}$ (18.5.11). Другими словами, нужно проверить, что

$$\widetilde{a}^{-1} = a^{-1} + ha^{(-1)-1}\beta. \tag{18.5.21}$$

В силу формул (18.5.19, 18) это превращается в

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}a^{-1} = a^{-1} + h\lambda a^{-1} \quad &\Leftrightarrow \\ \lambda^{-1} = 1 + h\lambda, & \end{aligned} \tag{18.5.22}$$

и это есть уравнение (18.5.16).

Для обратного времени рассуждения аналогичны, и оставляются читателю, как упражнение.

18.6 Гидродинамическое представление и ассоциированное преобразование Миуры

Этот раздел является дискретно-временной версией §14.4 и §14.5: строится гидродинамическая форма общего дискретно-временного потока МКП из §18.1, и доказывается, что гидродинамическая версия преобразования Миуры МКП $\mapsto$ КП совместна с дискретно-временной эволюцией. Возникают также различные скалярные интегрируемые системы.

Первый поток иерархии МКП при $N = 1$, уравнение (14.4.1):

$$\partial_t(Q_j) = Q_0^{(j)}Q_{j+1} - Q_{j+1}^{(-1)}Q_0, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.6.1}$$

имеет, согласно Утверждению 14.4.2, следующую гидродниамическую форму:

$$\partial_t(U) = [(HU)^{(1)} - UH]U, \tag{18.6.2a}$$

$$\partial_t(H) = [HU - (UH)^{(-1)}]H, \tag{18.6.2b}$$

$$Q_i = U^{(i)-1}U^{(i)}\ldots UH, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.6.3}$$

В §18.1 мы дискретизировали по времени поток (18.6.1), получив уравнеиия (18.1.4, 5, 23):

$$\widetilde{Q}_0 = \frac{1}{\beta^{(-1)}}Q_0^{(-1)}\beta, \tag{18.6.4}$$

$$\widetilde{Q}_j + h\beta^{(j)}\widetilde{Q}_{j+1} = Q_j + hQ_{j+1}^{(-1)}\beta, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.6.5}$$

$$\beta = Q_0 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\ldots\beta^{(s)}Q_{s+1}. \tag{18.6.6}$$

Теперь, зададимся целью построить временную дискретиэацию гидродинамического потока (18.6.2), сохраняя совместность с дискретно-временной эволюцией (18.6.4–6) нри гидродинамической связи (18.6.3). Представляя носледнюю в виде

$$Q_{j+1} = U^{(j)}Q_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.6.7}$$

мы можем нреобразовать $\widetilde{Q}$–уравнения (18.6.4–6) в

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\beta^{(-1)}}H^{(-1)}\beta, \tag{18.6.8}$$

$$\widetilde{Q}_j + h\beta^{(j)}\widetilde{U}^{(j)}\widetilde{Q}_j = Q_j + hU^{(j-1)}Q_j^{(-1)}\beta, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.6.9}$$

$$\beta = \theta H, \tag{18.6.10a}$$

$$\theta = 1 + \sum_{s \geqslant 0} (-h)^{s+1} \beta \ldots \beta^{(s)} U^{(s)} \ldots U. \tag{18.6.10b}$$

Бесконечную систему (18.6.9) разберем при помощи индукции по j. При $j = 0$ получаем

$$(1 + h\beta\widetilde{U})\widetilde{H} = H + h(UH)^{(-1)}\beta. \tag{18.6.11}$$

Переход от j к $j+1$ определяется тождеством

$$\begin{gathered}(1 + h\beta\widetilde{U})^{(j+1)}\widetilde{U}^{(j)}[(1 + h\beta\widetilde{U})^{(j)}]^{-1}(Q_j + hU^{(j-1)}Q_j^{(-1)}\beta) \overset{?}{=} \\ \overset{?}{=} Q_{j+1} + hU^{(j)}Q_{j+1}^{(-1)}\beta = U^{(j)}(Q_j + hU^{(j-1)}Q_j^{(-1)}\beta),\end{gathered} \tag{18.6.12}$$

которое эквивалентно

$$(1 + h\beta\widetilde{U})^{(j+1)}\widetilde{U}^{(j)} \overset{?}{=} U^{(j)}(1 + h\beta\widetilde{U})^{(j)}, \tag{18.6.13}$$

что, в свою очередь, эквивалентно единственному независящему от j равенству

$$(1 + h\beta\widetilde{U})^{(1)}\widetilde{U} = U(1 + h\beta\widetilde{U}). \tag{18.6.14}$$

Итог таков: 1) β–уравнение (18.6.10) и 2) три уравнения (18.6.8, 11, 14) на две величины $\widetilde{H}$ и $\widetilde{U}$. Возникает переопределенность, но мы покажем, что она иллюзорна. План следующий: 1) проинтерпретируем (18.6.8) как уравнение на $\widetilde{H}$; 2) подставив его в (18.6.11), получим уравнение

$$1 + h\beta\widetilde{U} = [H + h(UH)^{(-1)}\beta]\frac{1}{\beta}\frac{1}{H^{(-1)}}\beta^{(-1)}, \tag{18.6.15}$$

которое проинтерпретируем, как уравнение на $\widetilde{U}$; 3) *выведем* формулу (18.6.14) из оставшихся формул (18.6.10, 8, 15).

Лемма 18.6.16. Выполняется уравнение

$$H + h(UH)^{(-1)}\beta = H\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta^{(-1)}}H^{(-1)}\beta. \tag{18.6.17}$$

Доказательство. Умножая слева на $\beta^{(-1)}\beta H^{-1}$, мы можем переписать равенство (18.6.17) как

$$\beta^{(-1)}\beta + h\beta^{(-1)}\beta H^{-1}(UH)^{(-1)}\beta = H^{(-1)}\beta. \tag{18.6.18}$$

Деля справа на β, получаем

$$\beta^{(-1)}[1 + h\beta H^{-1}(UH)^{(-1)}] = H^{(-1)}, \tag{18.6.19}$$

что эквивалентно

$$\beta[1 + h\beta^{(1)}H^{(1)-1}UH] = H. \tag{18.6.20}$$

С другой стороны, из формулы (18.6.10) находим

$$\begin{gathered}\theta = 1 + \sum_{s \geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta \ldots \beta^{(s)}U^{(s)} \ldots U = \\ = \frac{1}{\beta^{(-1)}}\Big[\sum_{s \geqslant 0}(-h)^{s}\beta^{(-1)} \ldots \beta^{(s-1)}U^{(s-1)} \ldots U^{(-1)}\Big]\frac{1}{U^{(-1)}} = \frac{1}{\beta^{(-1)}}\widehat{\theta}\frac{1}{U^{(-1)}},\end{gathered} \tag{18.6.21}$$

где
$$\widehat{\theta} = \Delta^{-1}\Bigl(\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}U^{(s)}\ldots U\Bigr) = \Delta^{-1}|(\theta-1)/(-h)]. \tag{18.6.22}$$

Таким образом,
$$\beta = \theta H = \frac{1}{\beta^{(-1)}}\widehat{\theta}\frac{1}{U^{(-1)}}H, \tag{18.6.23}$$

откуда
$$\widehat{\theta}^{-1}\beta^{(-1)}\beta = \frac{1}{U^{(-1)}}H, \tag{18.6.24}$$

так что
$$\frac{1}{H}U^{(-1)} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta^{(-1)}}\widehat{\theta}, \tag{18.6.25}$$

и следовательно
$$\frac{1}{H^{(1)}}U = \frac{1}{\beta^{(1)}}\frac{1}{\beta}\widehat{\theta}^{(1)} \overset{(18.6.22)}{=} \frac{1}{\beta^{(1)}}\frac{1}{\beta}\frac{\theta-1}{-h}, \tag{18.6.26}$$

так что, окончательно,
$$h\beta\beta^{(1)}\frac{1}{H^{(1)}}U = 1-\theta. \tag{18.6.27}$$

Подставляя это в подлежащее проверке тождество (18.6.20), получаем
$$\beta + (1-\theta)H = H,$$

что совпадает с (18.6.10a). ■

Подставляя только что доказанную формулу (18.6.17) в уравнение для $\widetilde{U}$ (18.6.15), находим:
$$1 + h\beta\widetilde{U} = H\frac{1}{\beta}, \tag{18.6.28}$$

откудв
$$\widetilde{U} = \beta^{-1}(H\beta^{-1}-1)h^{-1}. \tag{18.6.29}$$

Для проверки требуемого соотношения (18.6.14), подставим в него формулы (18.6.28, 29), что дает
$$H^{(1)}\frac{1}{\beta^{(1)}}\frac{1}{\beta}\Bigl(H\frac{1}{\beta}-1\Bigr)\frac{1}{h} = UH\frac{1}{\beta}. \tag{18.6.30}$$

Умножая это справа на $h\beta$, находим
$$H^{(1)}\frac{1}{\beta^{(1)}}\frac{1}{\beta}H - H^{(1)}\frac{1}{\beta^{(1)}} = hUH. \tag{18.6.31}$$

Умножая это справа на $\beta^{(1)}$, получаем
$$H^{(1)}\frac{1}{\beta^{(1)}}\frac{1}{\beta}H\beta^{(1)} = H^{(1)} + hUH\beta^{(1)}, \tag{18.6.32}$$

и это тождество верно, так как получается после прнменения Δ к равенству (18.6.17).

Упражнение 18.6.33. Покажите, что, в согласии с формулами (18.6.2),
$$\frac{\widetilde{U}-U}{-h} = [(HU)^{(1)} - UH]U + O(h), \tag{18.6.34a}$$
$$\frac{\widetilde{H}-H}{-h} = [HU - (UH)^{(-1)}]H + O(h). \tag{18.6.34b}$$

Упражнение 18.6.35. Покажите, что формулу (18.6.10b) можно преобразовать к виду

$$\theta = 1 - h\beta\theta^{(1)}U. \tag{18.6.36}$$

В §14.4 мы видели, что гидродинамическая система (18.6.2) допускает связь (14.4.43)

$$\{U = H^{(1)}\}, \tag{18.6.37}$$

сводящую ее к

$$\partial_t(H) = H[H^{(1)} - H^{(-1)}]H. \tag{18.6.38}$$

Проверим, что дискретная по времени версия системы (18.6.2), уравнения (18.6.8, 28, 10), также выдерживает связь $\{U = H^{(1)}\}$. Это означает, во-первых, что β, определенное уравнениями (18.6.10, 36), теперь определяется уравнениями

$$\beta = \theta H, \tag{18.6.39a}$$

$$\theta = 1 + \sum_{s\geqslant 0}(-h)^{s+1}\beta\ldots\beta^{(s)}H^{(s+1)}\ldots H^{(1)}, \tag{18.6.39b}$$

$$\theta = 1 - h\beta\theta^{(1)}H^{(1)}. \tag{18.6.39c}$$

Во-вторых, уравнения для $\widetilde{H}$ и $\widetilde{U}$ (18.6.8, 28) должны быть совместны со связью $\{U = H^{(1)}\}$. Это означает, что должно выполняться тождество

$$H\frac{1}{\beta} = 1 + h\beta\widetilde{U} \overset{?}{=} 1 + h\beta\widetilde{H}^{(1)} = 1 + h\beta\frac{1}{\beta}H\beta^{(1)} = 1 + hH\beta^{(1)}, \tag{18.6.40}$$

что эквивалентно

$$hH\beta^{(1)}\beta \overset{?}{=} H - \beta. \tag{18.6.41}$$

С другой стороны, разрешая соотношение (18.6.39c) относительно β, получаем

$$\theta = \beta H^{-1} = 1 - h\beta(\beta H^{-1})^{(1)}H^{(1)} = 1 - h\beta\beta^{(1)}, \tag{18.6.42}$$

что эквивалентно

$$h\beta\beta^{(1)}H = H - \beta. \tag{18.6.43}$$

Сравнивая это с требуемым тождеством (18.6.41) видим, что они эквивалентны, так как и то и другое можно переписать в виде

$$h\beta^{(1)} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{H}. \tag{18.6.44}$$

Упражнение 18.6.45. Покажите, что из формул (18.6.39) следует

$$\beta\beta^{(1)}H = H\beta^{(1)}\beta. \tag{18.6.46}$$

Упражнение 18.6.47. Покажите, что

$$\beta = [1 - hHH^{(1)}]H + O(h^2) \tag{18.6.48}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{H} - H}{-h} = H[H^{(1)} - H^{(-1)}]H + O(h), \tag{18.6.49}$$

в согласии с формулой (18.6.38).

Замечание 18.6.50. Из уравнений (18.6.39a,c) получаем

$$\beta = (1 - h\beta\beta^{(1)})H, \tag{18.6.51}$$

откуда

$$H = \frac{1}{1 - h\beta\beta^{(1)}}\beta. \tag{18.6.52}$$

Следовательно, уравнение временной эволюции для H (18.6.8) можно перевести в уравнение временной эволюции для β :

$$\frac{1}{1 - h\widetilde{\beta}\widetilde{\beta}^{(1)}}\widetilde{\beta} = \frac{1}{\beta^{(-1)}}\frac{1}{1 - h\beta^{(-1)}\beta}\beta^{(-1)}\beta = \tag{18.6.53}$$

$$= \frac{1}{1 - h\beta\beta^{(-1)}}\beta, \tag{18.6.54}$$

другая чисто скалярная интегрируемая система.

Обратимся к вопросу о преобразовании Миуры. В силу (14.5.2–4,6), сопряжение

$$\Phi(L) = V^{-1}\mathcal{L}V, \tag{18.6.55a}$$

$$\mathcal{L} = \zeta(1 - \zeta^{-1}U)H, \quad H = V^{(-1)}V^{-1}, \tag{18.6.55b}$$

$$L = \zeta + (1 - \zeta^{-1}u)^{-1}\bar{h}, \quad u = \bar{h}^{(1)}, \tag{18.6.55c}$$

$$\Phi(\bar{h}) = V^{-1}UV^{(-1)}, \tag{18.6.55d}$$

переводит решения потенциальной формы гидродинамической иерархии МКП в решения гидродинамической иерархии КП, ограниченной связью $\{u = \bar{h}^{(1)}\}$. Мы собираемся проверить что это заключение применимо и к соответствующим дискретно-временным потокам, построенным здесь и в §17.3. Во-первых, заменяем переменную H на V и эволюционное уравнение для H (18.6.8) на эволюционное уравнение для V (18.2.15):

$$\widetilde{V} = \beta^{-1}V^{(-1)}. \tag{18.6.56}$$

Далее, определим соотношение между α и β формулой (18.2.27):

$$\Phi\left(\frac{1}{1 + h\alpha}\right) = \frac{1}{V^{(-1)}}\beta V, \tag{18.6.57}$$

гарантирующей инвариантность преобразования Миуры (18.6.55a) по отношению к временной эволюции:

$$\widetilde{\Phi(\widetilde{L})} = \Phi(\widetilde{L}),$$

после чего следует проверить, что оба соотношения (17.3.56) будут выполнены:

$$\bar{h} = (1 + h\alpha^{(1)})\alpha, \tag{18.6.58a}$$

$$\widetilde{\bar{h}} = \alpha(1 + h\alpha^{(-1)}) \tag{18.6.58b}$$

(с этого момента Φ опущено в обозначениях). Итак:

1) Из формулы (18.6.10b) получаем

$$\theta = 1 - h\beta\theta^{(1)}U \overset{(16.6.10a)}{=} 1 - h\theta H\theta^{(1)}U \overset{(16.6.55b)}{=} \tag{18.6.59}$$

$$= 1 - h\theta V^{(-1)}V^{-1}\theta^{(1)}U \overset{(18.6.55d)}{=} \tag{18.6.60}$$

$$= 1 - h\theta V^{(-1)}V^{-1}\theta^{(1)}V\bar{h}V^{(-1)-1}. \tag{18.6.61}$$

Формулу (18.6.57) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{1+h\alpha}=\frac{1}{V^{(-1)}}\beta V \overset{(18.6.10a,\ 55b)}{=} \frac{1}{V^{(-1)}}\theta V^{(-1)} \overset{(18.6.61)}{=} \tag{18.6.62}$$

$$=\frac{1}{V^{(-1)}}\Big[1-h\theta V^{(-1)}\frac{1}{V}\theta^{(1)}V\bar{h}\frac{1}{V^{(-1)}}\Big]V^{(-1)}=1-h\Big(\frac{1}{V^{(-1)}}\Big)\theta V^{(-1)}\Big(\frac{1}{V}\Big)\theta^{(1)}V\bar{h}$$

$$\overset{(18.6.62)}{=} 1-h\frac{1}{1+h\alpha}\frac{1}{1+h\alpha^{(1)}}\bar{h}, \tag{18.6.63}$$

откуда

$$\bar{h}=\frac{1}{h}(1+h\alpha^{(1)})(1+h\alpha)\Big(1-\frac{1}{1+h\alpha}\Big)=(1+h\alpha^{(1)})\alpha,$$

что совпадает с (18.6.58a);
2) Из формулы (18.6.55d), следует

$$\tilde{\bar{h}}=\frac{1}{\widetilde{V}}\widetilde{U}\widetilde{V}^{(-1)} \overset{(18.6.56)}{=} \frac{1}{V^{(-1)}}\beta\widetilde{U}\frac{1}{\beta^{(-1)}}V^{(-2)}, \tag{18.6.64}$$

тогда как из формулы (18.6.28) имеем

$$\widetilde{U}=\frac{1}{h\beta}\Big(H\frac{1}{\beta}-1\Big) \overset{(18.6.10a)}{=} \frac{1}{h\beta}(\theta^{-1}-1) \overset{(18.6.62)}{=}$$

$$=\frac{1}{h\beta}\Big[V^{(-1)}(1+h\alpha)\frac{1}{V^{(-1)}}-1\Big]=\frac{1}{\beta}V^{(-1)}\alpha\frac{1}{V^{(-1)}}. \tag{18.6.65}$$

Подставляя это в формулу (18.6.64), находим

$$\tilde{\bar{h}}=\frac{1}{V^{(-1)}}\beta\frac{1}{\beta}V^{(-1)}\alpha\frac{1}{V^{(-1)}}\frac{1}{\beta^{(-1)}}V^{(-2)}=\alpha\Big[\frac{1}{V^{(-2)}}\beta^{(-1)}V^{(-1)}\Big]^{-1} \overset{(18.6.57)}{=}$$

$$=\alpha(1+h\alpha)^{(-1)},$$

что совпадает с (18.6.58b).

Замечание 18.6.66. Когда связь $\{U=H^{(1)}\}$ (18.6.37) наложена в *потенциальной* форме, можно вывести скалярное уравнение на V, а именно: согласно формуле (18.6.56),

$$\beta=V^{(-1)}/\widetilde{V},\quad \beta^{(1)}=V/\widetilde{V}^{(1)}. \tag{18.6.67}$$

Подставляя это в формулу (18.6.44), получаем

$$hV\frac{1}{\widetilde{V}^{(1)}}=\widetilde{V}\frac{1}{V^{(-1)}}-V\frac{1}{V^{(-1)}}, \tag{18.6.68}$$

или

$$\widetilde{V}=V\Big(1+h\frac{1}{\widetilde{V}^{(1)}}V^{(-1)}\Big). \tag{18.6.69}$$

Упражнение 18.6.70. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{V}-V}{h}=-V\frac{1}{V^{(1)}}V^{(-1)}+O(h), \tag{18.6.71}$$

в согласяи с формулу (14.5.17).

Далее, формула (18.6.55d) превращается в

$$\bar{h} = \frac{1}{V} V \frac{1}{V^{(1)}} V^{(-1)} = \frac{1}{V^{(1)}} V^{(-1)}. \tag{18.6.72}$$

В терминах α, формула (18.6.57) принимает вид

$$1 + h\alpha = \frac{1}{V}\frac{1}{\beta} V^{(-1)} \overset{(18.6.67)}{=} \frac{1}{V}\widetilde{V}. \tag{18.6.73}$$

Таким образом, отображение (18.6.73), в виде

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\widetilde{V} - V}{h}, \tag{18.6.74}$$

переводит решения скалярной интегрируемой системы (18.6.69) в решения скалярной интегрируемой системы (18.6.58):

$$(1 + h\widetilde{\alpha}^{(1)})\widetilde{\alpha} = \alpha(1 + h\alpha^{(-1)}). \tag{18.6.75}$$

Версии с обратным временем оставляются читателю.

18.7 Пространственно-временные дискретизации уравнения $H_t = HH_xH$ образуют семейство гамильтоновых отображений

В этом разделе мы доказываем, из различных конструкций предыдущего раздела, что дискретно-временная версия гидродинамического потока МКП со связью $U = H^{(1)}$ представляет собой семейство гамильтоновых автоморфизмов квадратичной гамильтоновой структуры (14.5.27).

Отображение шага по времени (18.6.8, 44):

$$\widetilde{H} = \frac{1}{\beta^{(-1)}} H^{(-1)}\beta, \tag{18.7.1}$$

$$h\beta^{(1)} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{H}, \tag{18.7.2}$$

имеет вид (18.6.49)

$$\frac{\widetilde{H} - H}{-h} = H[H^{(1)} - H^{(-1)}]H + O(h). \tag{18.7.3}$$

В пределе непрерывного времени $h \to 0$, это превращается в (14.5.27)

$$\partial_t(H) = \widehat{L}_H\widehat{R}_H(\Delta - \Delta^{-1})\widehat{L}_H\widehat{R}_H\left(\frac{\delta(\ldots)}{\delta H}\right), \tag{18.7.4}$$

$$(\ldots) = \ln H. \tag{18.7.5}$$

Мы собираемся показать, что отображение (18.7.1, 2) является гамильтоновым автоморфизмом гамильтоновой структуры

$$B = \widehat{L}_H\widehat{R}_H(\Delta - \Delta^{-1})\widehat{L}_H\widehat{R}_H. \tag{18.7.6}$$

Чтобы сократить довольно длинную выкладку, перейдем к переменной

$$v = H^{-1}. \tag{18.7.7}$$

Тогда, согласно формуле (14.5.25), матрица B (18.7.6) превращается в

$$B = \Delta - \Delta^{-1}, \tag{18.7.8}$$

а шаг по времени (18.7.1, 2) принимает вид

$$\widetilde{v} = \frac{1}{\beta} v^{(-1)} \beta^{(-1)}, \tag{18.7.9}$$

$$h\beta^{(1)} - \frac{1}{\beta} = -v. \tag{18.7.10}$$

Следует проверить тождество

$$J(\Delta - \Delta^{-1})J^{\dagger} = \Delta - \Delta^{-1}, \quad J = \frac{D\widetilde{v}}{Dv}. \tag{18.7.11}$$

Согласно формуле (18.7.9),

$$\frac{D\widetilde{v}}{Dv} = -\widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1} v^{(-1)} \beta^{(-1)}} \frac{D\beta}{Dv} + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{(-1)}} \Delta^{-1} + \widehat{L}_{\beta^{-1} v^{(-1)}} \Delta^{-1} \frac{D\beta}{Dv}. \tag{18.7.12}$$

Из формулы (18.7.10) имеем

$$h\Delta \frac{D\beta}{Dv} + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1}} \frac{D\beta}{Dv} = -1 \quad \Rightarrow \tag{18.7.13}$$

$$\frac{D\beta}{Dv} = -(h\Delta + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1}})^{-1}. \tag{18.7.14}$$

Подставляя это в формулу (18.7.12), получаем

$$J = \widehat{L}_{\beta^{-1}} \Big[\Delta^{-1} \widehat{R}_{\beta} + (\widehat{R}_{\beta^{-1} v^{(-1)} \beta^{(-1)}} - \Delta^{-1} \widehat{L}_{v})(h\Delta + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1}})^{-1} \Big]. \tag{18.7.15}$$

Дальнейшая стратегия такова: мы собираемся проделать ряд обратимых операций с парами (x_i, y_i) в подозреваемом тождестве

$$x_i(\Delta - \Delta^{-1})x_i^{\dagger} = y_i(\Delta - \Delta^{-1})y_i^{\dagger}, \tag{18.7.16}$$

причем

$$x_1 = J, \quad y_1 = 1. \tag{18.7.17}$$

Придя (в 4 хода) к очевидному равенству, мы остановимся.

1) $x_2 = \widehat{L}_{\beta} x_1$, $y_2 = \widehat{L}_{\beta} y_1$:

$$x_2 = [\Delta^{-1} + (\widehat{R}_{\beta^{-1} v^{(-1)} \beta^{(-1)}} - \Delta^{-1} \widehat{L}_{v})(h\Delta + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1}})^{-1} \widehat{R}_{\beta^{-1}}] \widehat{R}_{\beta}, \tag{18.7.18}$$

$$y_2 = \widehat{L}_{\beta}; \tag{18.7.19}$$

2) Имеем:

$$\begin{aligned}
(h\Delta + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1}})^{-1} \widehat{R}_{\beta^{-1}} &= [\widehat{R}_{\beta}(h\Delta + \widehat{L}_{\beta^{-1}} \widehat{R}_{\beta^{-1}})]^{-1} = \\
= (h\widehat{R}_{\beta}\Delta + \widehat{L}_{\beta^{-1}})^{-1} &= [(h\widehat{R}_{\beta}\Delta\widehat{L}_{\beta} + 1)\widehat{L}_{\beta^{-1}}]^{-1} = \widehat{L}_{\beta}(1 + h\widehat{R}_{\beta}\Delta\widehat{L}_{\beta})^{-1} = \\
&= \widehat{L}_{\beta} a^{-1},
\end{aligned} \tag{18.7.20}$$

где

$$a = 1 + h\widehat{R}_\beta \Delta \widehat{L}_\beta. \tag{18.7.21}$$

Следовательно, выражение x_2 (18.7.18) можно преобразовать к виду

$$x_2 = \big\{\Delta^{-1}(1 + h\widehat{R}_{\beta\Delta}\widehat{L}_\beta) + (\widehat{R}_{\beta^{-1}v^{(-1)}\beta^{(-1)}} - \Delta^{-1}\widehat{L}_v)\widehat{L}_\beta\big\}a^{-1}\widehat{R}_\beta. \tag{18.7.22}$$

При помощи формулы (18.7.10), в виде

$$\beta^{-1}v^{(-1)}\beta^{(-1)} = \frac{1}{\beta}\Big(\frac{1}{\beta^{(-1)}} - h\beta\Big)\beta^{(-1)} = \frac{1}{\beta} - h\beta^{(-1)}, \tag{18.7.23a}$$

$$v\beta = 1 - h^{(-1)}\beta, \tag{18.7.23b}$$

выражение в фигурных скобках из формулы (18.7.22) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} + h\widehat{R}_{\beta^{(-1)}}\widehat{L}_\beta + \widehat{R}_{\beta^{-1} - h\beta^{(-1)}}\widehat{L}_\beta - \Delta^{-1}\widehat{L}_{1 - h\beta^{(1)}\beta} = \\ = \widehat{R}_{\beta^{-1}}\widehat{L}_\beta + \Delta^{-1}\widehat{L}_{h\beta^{(1)}\beta} = \widehat{R}_{\beta^{-1}}\widehat{L}_\beta + h\widehat{L}_\beta\Delta^{-1}\widehat{L}_\beta = \\ = \widehat{L}_\beta\widehat{R}_{\beta^{-1}}(1 + h\widehat{R}_\beta\Delta^{-1}\widehat{L}_\beta) = \widehat{L}_\beta\widehat{R}_{\beta^{-1}}b,\end{aligned} \tag{18.7.24}$$

где

$$b = 1 + h\widehat{R}_\beta\Delta^{-1}\widehat{L}_\beta = a^\dagger. \tag{18.7.25}$$

Таким образом,

$$x_2 = \widehat{L}_\beta\widehat{R}_{\beta^{-1}}ba^{-1}\widehat{R}_\beta, \quad y_2 = \widehat{L}_\beta; \tag{18.7.26}$$

3) $x_3 = \widehat{L}_{\beta^{-1}}\widehat{R}_\beta x_2$, $y_3 = \widehat{L}_{\beta^{-1}}\widehat{R}_\beta y_2$:

$$x_3 = ba^{-1}\widehat{R}_\beta, \quad y_3 = \widehat{R}_\beta. \tag{18.7.27}$$

4) Имеем,

$$\begin{aligned}\widehat{R}_\beta(\Delta - \Delta^{-1})\widehat{R}_\beta^\dagger = \widehat{R}_\beta(\Delta - \Delta^{-1})\widehat{L}_\beta = \widehat{R}_\beta\Delta\widehat{L}_\beta - \widehat{R}_\beta\Delta^{-1}\widehat{L}_\beta = \\ = h^{-1}(a - b).\end{aligned} \tag{18.7.28}$$

Таким образом,

$$y_3(\Delta - \Delta^{-1})y_3^\dagger = h^{-1}(a - b). \tag{18.7.29}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}x_3(\Delta - \Delta^{-1})x_3^\dagger = ba^{-1}\widehat{R}_\beta(\Delta - \Delta^{-1})\widehat{L}_\beta b^{-1}a = ba^{-1}\frac{a - b}{h}b^{-1}a = \\ = \frac{a - b}{h},\end{aligned} \tag{18.7.30}$$

и это совпадает с формулой (18.7.29).

Мы все рождаемся безумными, а некоторые
такими и остаются.

Сэмюэл Беккетт

18.8 Иерархия МКП в G–координатах

В этом разделе мы дискретизируем по времени первый поток иерархии МКП в G–координатах.

Иерархия МКП в G–координатах из §12.6 имеет вид

$$\partial_t(\Lambda) = \mathcal{R}\Lambda - \Lambda\zeta^{-1}\mathcal{R}\zeta, \quad \mathcal{R} = (\mathcal{L}^n)_{>0}, \tag{18.8.1}$$

$$\mathcal{L} = \zeta\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = \sum_{j\geqslant 0} R_j\zeta^{-j} = \Big(\sum_{j\geqslant 0}\zeta^{-j}Q_j\Big)^{-1}. \tag{18.8.2}$$

Первый поток этой иерархии имеет вид (12.6.16):

$$\partial_t(R_i) = (R_0^{-1}R_{i+1})^{(1)} - R_{i+1}R_0^{(-i-1)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.8.3}$$

Попытаемся найти временную дискретизацию этого потока, разрешая уравнение (16.21)

$$(1 + h\zeta\gamma)\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(1 + h\zeta\gamma) \tag{18.8.4}$$

в Λ–переменных. Заметим, что в уравнении (18.8.4) вместо β появилась γ: заранее мы не знаем, что γ и β совпадают. Эта проблема разбирается в конце раздела.

Записав уравнение (18.8.4) более явно:

$$(1 + h\zeta\gamma)\zeta\widetilde{\Lambda}^{-1} = \zeta\Lambda^{-1}(1 + h\zeta\gamma), \tag{18.8.5a}$$

получаем

$$(1 + h\gamma\zeta)\widetilde{\Lambda}^{-1} = \Lambda^{-1}(1 + h\zeta\gamma), \tag{18.8.5b}$$

и следовательно

$$(1 + h\zeta\gamma)\widetilde{\Lambda} = \Lambda(1 + h\gamma\zeta). \tag{18.8.6}$$

По форме это *отличается* от всех уравнений, котрые нам до сих пор попадались. Расписывая уравнение (18.8.6), получаем:

$$\begin{aligned}(1 + h\zeta\gamma)\widetilde{\Lambda} &= (1 + h\zeta\gamma)\sum \widetilde{R}_i\zeta^{-1} = \sum \widetilde{R}_i\zeta^{-i} + h\sum(\gamma\widetilde{R}_i)^{(1)}\zeta^{1-i} = \\ &= \Lambda(1 + h\gamma\zeta) = \sum R_i\zeta^{-i}(1 + h\gamma\zeta) = \sum R_i\zeta^{-i} + h\sum R_i\gamma^{(-i)}\zeta^{1-i},\end{aligned}$$

что эквивалентно системе

$$(\gamma\widetilde{R}_0)^{(1)} = R_0\gamma, \tag{18.8.7}$$

$$\widetilde{R}_i + h(\gamma\widetilde{R}_{i+1})^{(1)} = R_i + hR_{i+1}\gamma^{(-i-1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.8.8i}$$

Мы пришли, что не удивительно, к недоопределенной системе: из уравнения (18.8.7) находим $\widetilde{R}_0$, и далее, если $\widetilde{R}_0, \ldots, \widetilde{R}_i$ уже найдены, то уравнение (18.8.8i) дает $\widetilde{R}_{i+1}$; то есть γ остается неопределенной. Это чисто бесконечномерное явление. Как и раньше, в §§17.1,17.4,18.1, мы можем разрешить эту проблему при помощи конечномерной регуляризации: временно добавим связь

$$\{R_j = 0, \quad \forall\, j > M\} \quad \text{для некоторого} \quad M \in \mathbb{N}, \tag{18.8.9}$$

и затем, если все срабатывает нормально, переходим к пределу $M \to \infty$. Заметим, что эта связь согласована с потоком (18.8.3), который мы пытаемся дискретизировать.

Перейдем к деталям. Доступные алфавиты слишком бедны; позаимствуем обозначения из §18.1 и положим

$$\delta_i = \widetilde{R}_i - R_i, \tag{18.8.10}$$

$$\theta_i = R_i\gamma^{(-i)} - (\gamma R_i)^{(1)}. \tag{18.8.11}$$

В этих обозначениях, уравнение (18.8.8*i*) превращается в

$$\delta_i = \widehat{R}_i - R_i = -h\Delta\gamma(\delta_{i+1} + R_{i+1}) + hR_{i+1}\gamma^{(-i-1)} = -h\Delta(\gamma\delta_{i+1}) + h\theta_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.8.12}$$

Утверждение 18.8.13. Система (18.8.12, 9) может быть разрешена в виде

$$\delta_i = h\sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta\gamma)^s(\theta_{i+1+s}), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.8.14}$$

Доказательство. При $i \geqslant M$, обе системы (18.8.12, 9) и (18.8.14, 9) дают правильный результат

$$\delta_i = 0, \quad i \geqslant M. \tag{18.8.15}$$

Далее, система (18.8.12) допускает рекуррентное определение δ_i в терминах $\{\delta_j | j > i\}$. Проверим, что система (18.8.14) удовлетворяет этой рекуррентной формуле. Имеем

$$\delta_i = h\theta_{i+1} + h\sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta\gamma)^{s+1}(\theta_{i+2+s}) = h\theta_{i+1} - h\Delta\gamma h\sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta\gamma)^s(\theta_{i+1+1+s}) =$$
$$= h\theta_{i+1} - h\Delta(\gamma\delta_{i+1}). \qquad \blacksquare$$

В частности,

$$\delta_0 = h\sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta\gamma)^s(\theta_{s+1}). \tag{18.8.16}$$

С другой стороны, из формулы (18.8.7) находим, что

$$\delta_0 = \widetilde{R}_0 - R_0 = \frac{1}{\gamma}(R_0\gamma)^{(-1)} - R_0 = \frac{1}{\gamma}[(R_0\gamma)^{(-1)} - \gamma R_0] = \frac{1}{\gamma}\Delta^{-1}(\theta_0). \tag{18.8.17}$$

Таким образом, имеем *два* уравнения для $\widetilde{R}_0$, и это восполняет пропущенное уравнение для γ. Приравнивая выражения (18.8.16) и (18.8.17) получаем

$$0 = \sum_{s\geqslant 0}(-h\Delta\gamma)^s(\theta_s). \tag{18.8.18}$$

Далее,

$$(-h\Delta\gamma)^s = \frac{1}{\gamma}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}\Delta^s. \tag{18.8.19}$$

Следовательно, уравнение (18.8.18) можно переписать в виде

$$0 = \sum_{s\geqslant 0}\frac{1}{\gamma}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}\Delta^s[R_s\gamma^{(-s)} - (\gamma R_s)^{(1)}] =$$
$$= \frac{1}{\gamma}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}R_s^{(s)}\gamma - \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma^{(1)}\ldots\gamma^{(s+1)}R_s^{(s+1)} =$$
$$= (\widehat{L}_{\gamma^{-1}}\widehat{R}_\gamma - \Delta)\Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}R_s^{(s)}\Big]. \tag{18.8.20}$$

Лемма 18.8.21.

$$\operatorname{Ker}(\widehat{L}_{\gamma^{-1}}\widehat{R}_{\gamma}-\Delta)=\{\mathrm{const}\}\quad \text{в}\quad C_{\gamma}[[h]]. \tag{18.8.22}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай C_γ. Пусть $X\in C_\gamma$ и $X\in\operatorname{Ker}(\widehat{L}_{\gamma^{-1}}\widehat{R}_{\gamma}-\Delta)$:

$$\frac{1}{\gamma}X\gamma=X^{(1)}. \tag{18.8.23}$$

Тогда

$$X=\gamma X^{(1)}\frac{1}{\gamma}=\gamma\gamma^{(1)}X^{(2)}\frac{1}{\gamma^{(1)}}\frac{1}{\gamma}=\cdots=\gamma\ldots\gamma^{(n)}X^{(n+1)}\frac{1}{\gamma^{(n)}}\ldots\frac{1}{\gamma}. \tag{18.8.24}$$

Следовательно, X не может содержать $\gamma^{(s)}$ при $s\geqslant 0$. Пусть s наименьшее возможное, такое, что X содержит $\gamma^{(s)}$. Если $s<0$, то правая часть равенство (18.8.24) не содержит $\gamma^{(s)}$. Следовательно, X не зависит от γ, и любой такой X удовлетворяет уравнению (18.8.23). ▮

В силу Леммы 18.8.21, уравнение (18.8.20) может быть решено в виде

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}R_s^{(s)}=\mathrm{const}, \tag{18.8.25}$$

где “const” может зависеть от h.

Упражнение 18.8.26. Покажите, что если эта постоянная равна нулю, то и $\gamma=0$, и никакой временной эволюции нет.

Растягивая при необходимости h и γ, мы можем превратить эту постоянную в 1, и прийти окончательно к уравнению

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}R_s^{(s)}=1. \tag{18.8.27}$$

Упражнение 18.8.28. Покажите, что

$$\gamma=\frac{1}{R_0}+O(h) \tag{18.8.29}$$

и получите согласованную с (18.8.3) формулу

$$\frac{\widetilde{R}_i-R_i}{-h}=\left(\frac{1}{R_0}R_{i+1}\right)^{(1)}-R_{i+1}\left(\frac{1}{R_0}\right)^{(i+1)}+O(h),\quad i\in\mathbb{Z}_+. \tag{18.8.30}$$

Остается вопрос об изоморфизме: отличается ли временная эволюция, построенная в этом разделе, от построенной в §18.1? Другими словами, верно ли, что $\beta=\gamma$?

Упражнение 18.8.31. (i) Покажите, что γ–уравнение (18.8.27) можно переписать в виде

$$\gamma^{-1}=\operatorname{Res}[(1+h\zeta\gamma)^{-1}\Lambda]=\operatorname{Res}[(1+h\zeta\gamma)^{-1}\mathcal{L}^{-1}\zeta]; \tag{18.8.32}$$

(ii) Покажите, что β–уравнение (18.1.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\beta=\operatorname{Res}[\zeta^{-1}(1+h\zeta\beta)^{-1}\mathcal{L}]&=\operatorname{Res}[\zeta^{-1}(1+h\zeta\beta)^{-1}\zeta\Lambda^{-1}]=\\&=\operatorname{Res}[(1+h\beta\zeta)^{-1}\Lambda^{-1}].\end{aligned} \tag{18.8.33}$$

Рабочая гипотеза 18.8.34. Решения уравнений (18.8.32) и (18.8.33) совпадают, то есть $\beta = \gamma$.

Заметим, что нет *логических* причин, почему бы эта гипотеза была верна, так как уравнения для β и γ были получены посредством *несовместимых* регуляризационных процедур. Тем не менее, имеется два *эмпирических* довода в пользу гипотезы. Во-первых, пусть $\Delta = 1$, так что мы имеем дело с некоммутативным формальным степенным рядом. Тогда уравнение (18.1.23) превращается в

$$\beta = \Lambda^{-1}(-h\beta), \tag{18.8.35}$$

где

$$\Lambda^{-1}(x) = \sum_{s\geqslant 0} x^s Q_s, \tag{18.8.36}$$

а уравнение (18.8.27) превращается в

$$\gamma\Lambda(-h\gamma) = 1. \tag{18.8.37}$$

Это *не* то же, что уравнение (18.8.35). Однако, в §17.4 было доказано, что $\beta = \gamma$ при $Q_0 = 1$. Во-вторых, вычислим β и γ по модулю $O(h^3)$. Из уравнения (18.8.27)

$$\gamma R_0 - h\gamma\gamma^{(1)} R_1^{(1)} + h^2\gamma\gamma^{(1)} + O(h^3) = 1 \quad \Rightarrow \tag{18.8.38}$$

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{1}{R_0}\Big\{1 + h\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)} + h^2\Big(-\frac{1}{R_0^{(1)}}\frac{1}{R_0^{(2)}}R_2^{(2)} +\\ + \frac{1}{R_0^{(1)}}\Big[R_1^{(1)}\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0^{(2)}}R_1^{(2)}\Big]\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)}\Big)\Big\}\frac{1}{R_0} +\\ + O(h^3),\end{aligned} \tag{18.8.39}$$

а из уравнения (18.1.23)

$$\beta = Q_0 - h\beta Q_1 + h^2\beta\beta^{(1)} Q_2 + O(h^3) \quad \Rightarrow \tag{18.8.40}$$

$$\beta = Q_0\{1 - hQ_1 + h^2[Q_1^2 + Q_0^{(1)}Q_2]\} + O(h^3). \tag{18.8.41}$$

Далее, из тождества (18.8.2)

$$\begin{aligned}1 = \Lambda^{-1}\Lambda = \Big(\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}Q_i\Big)\Big(\sum_{j\geqslant 0}R_j\zeta^{-j}\Big) =\\ = (Q_0 + \zeta^{-j}Q_1 + \zeta^{-2}Q_2 + \ldots)(R_0 + R_1\zeta^{-1} + R_2\zeta^{-2} + \ldots) =\\ = Q_0R_0 + [Q_0R_1 + (Q_1R_0^{(-1)}]\zeta^{-1} + [Q_0R_2 + (Q_1R_1)^{(-1)} + (Q_2R_0)^{(-2)}]\zeta^{-2} + \ldots,\end{aligned} \tag{18.8.42}$$

находим, что

$$Q_0 = \frac{1}{R_0}, \tag{18.8.43}$$

$$Q_1 = -\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)}\frac{1}{R_0}, \tag{18.8.44}$$

$$Q_2 = \frac{1}{R_0^{(2)}}\Big[R_1^{(2)}\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)} - R_2^{(2)}\Big]\frac{1}{R_0} \quad \Rightarrow \tag{18.8.45}$$

$$Q_1^2 + Q_0^{(1)}Q_2 = \Big\{\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)}\frac{1}{R_0}\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)} + \frac{1}{R_0^{(1)}}\frac{1}{R_0^{(2)}}\Big[R_1^{(2)}\frac{1}{R_0^{(1)}}R_1^{(1)} - R_2^{(2)}\Big]\Big\}\frac{1}{R_0}, \tag{18.8.46}$$

и видим, что ряды для γ (18.8.39) и β (18.8.41) действительно совпадают с точностью до $O(h^3)$. Докажем теперь гипотезу 18.8.34.

Теорема 18.8.47. Пусть

$$\Big(\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}Q_i\Big)\Big(\sum_{j\geqslant 0}R_j\zeta^{-i}\Big)=1. \tag{18.8.48}$$

Если β удовлетворяет уравнению (18.1.23):

$$\beta=Q_0+\sum_{s>0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s-1)}Q_s, \tag{18.8.49}$$

то β также удовлетворяет уравнению (18.8.27):

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta\ldots\beta^{(s)}R_s^{(s)}=1. \tag{18.8.50}$$

Доказательство. Соотношение (18.8.48) между Q_i и R_j можно переписать в виде

$$\sum_{i+j=k}(Q_iR_j)^{(j)}=\delta_k^0,\quad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{18.8.51k}$$

а определение β (18.8.49) можно преобразовать к виду

$$\beta^{(-1)}\beta=\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\beta^{(-1)}\ldots\beta^{(s-1)}Q_s. \tag{18.8.52}$$

Умножая уравнение (18.8.51k) слева на

$$(-h)^k\beta^{(-1)}\ldots\beta^{(k-1)} \tag{18.8.53}$$

и суммируя по $k\in\mathbb{Z}_+$, получаем:

$$\begin{gathered}\beta^{(-1)}=\sum_{k\geqslant 0}(-h)^k\beta^{(-1)}\ldots\beta^{(k-1)}\sum_{i+j=k}(Q_iR_j)^{(j)}=\\=\sum_{i,j\geqslant 0}(-h)^{i+j}\beta^{(-1)}\ldots\beta^{(i+j-1)}Q_i^{(j)}R_j^{(j)}=\\=\sum_{j\geqslant 0}(-h)^j\frac{1}{\beta^{(-2)}}\beta^{(-2)}\ldots\beta^{(j-2)}\Big\{\sum_{i\geqslant 0}(-h)^i\beta^{(j-1)}\ldots\beta^{(i+j-1)}Q_i^{(j)}\Big\}R_j^{(j)}.\end{gathered} \tag{18.8.54}$$

Выражение в фигурных скобках равно

$$\Delta^j\Big[\sum_{i\geqslant 0}(-h)^i\beta^{(-1)}\ldots\beta^{(i-1)}Q_i\Big]\overset{(18.8.52)}{=}\Delta^j(\beta^{(-1)}\beta)=\beta^{(j-1)}\beta^{(j)}. \tag{18.8.55}$$

Следовательно, уравнение (18.8.54) превращается в

$$\beta^{(-1)}=\sum_{j\geqslant 0}(-h)^j\frac{1}{\beta^{(-2)}}\beta^{(-2)}\ldots\beta^{(j-2)}\{\beta^{(j-1)}\beta^{(j)}\}R_j^{(j)}=\beta^{(-1)}\sum_{j\geqslant 0}(-h)^j\beta\ldots\beta^{(j)}R_j^{(j)}.$$

Деля слева на $\beta^{(-1)}$, получаем требуемую формулу (18.8.50). ▮

Вывод: две дискретно-временных эволюции оператора МКП $\mathcal{L}$, построенные в §18.1 и в §18.8 различными средствами, являются, тем не менее, идентичными.

Обратимся теперь к обратной временной эволюции. Переставляя тильды в системе (18.8.7, 8), находим:

$$\widetilde{R}_0\gamma = (\gamma R_0)^{(1)}, \tag{18.8.56}$$

$$\widetilde{R}_i + h\widetilde{R}_{i+1}\gamma^{(-i-1)} = R_i + h(\gamma R_{i+1})^{(1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.8.57}$$

Обозначая

$$\delta_i = \widetilde{R}_i - R_i, \tag{18.8.58a}$$

$$\theta_i = (\gamma R_i)^{(1)} - R_i\gamma^{(-i)}, \tag{18.8.58b}$$

мы можем переписать систему (18.8.57), как

$$\delta_i = -h\delta_{i+1}\gamma^{(-i-1)} + h\theta_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.8.59}$$

Упражнение 18.8.60. Покажите, что система (18.8.59), при стандартной конечномерной регуляризации, превращается в

$$\delta_i = h\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\theta_{i+1+s}\frac{1}{\gamma^{(-i-1-s)}}\gamma^{(-i-1-s)}\ldots\gamma^{(-i-1)}. \tag{18.8.61}$$

В частности,

$$\delta_0\gamma = h\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\theta_{s+1}\gamma^{(-s)}\ldots\gamma. \tag{18.8.62a}$$

С другой стороны, формула (18.8.56) дает

$$\delta_0\gamma = \theta_0. \tag{18.8.62b}$$

Следовательно,

$$0 = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\theta_s\frac{1}{\gamma^{(-s)}}\gamma^{(-s)}\ldots\gamma. \tag{18.8.63}$$

Подставляя сюда определение θ_s (18.8.58b), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma^{(1)}R_s^{(1)}\frac{1}{\gamma^{(-s)}}\gamma^{(-s)}\ldots\gamma - \sum_{s\geqslant 0}(-h)^sR_s\gamma^{(-s)}\ldots\gamma = \\ &= (\widehat{L}_{\gamma^{(1)}}\widehat{R}_{1/\gamma^{(1)}}\Delta - 1)\Big(\sum_{s\geqslant 0}(-h)^sR_s\gamma^{(-s)}\ldots\gamma\Big). \end{aligned} \tag{18.8.64}$$

Так как

$$\operatorname{Ker}(\widehat{L}_{\gamma^{(1)}}\widehat{R}_{1/\gamma^{(1)}}\Delta - 1) = \{\text{const}\} \quad \text{в} \quad C_\gamma[[h]], \tag{18.8.65}$$

то находим, делая, при необходимости, растяжение, что

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h)^sR_s\gamma^{(-s)}\ldots\gamma = 1. \tag{18.8.66}$$

Это следует сравнить с обратной временной эволюцией в координатах Q_i, для которой формула (18.1.36) дает

$$\beta = Q_0 + \sum_{s>0}(-h)^sQ_s^{(-s)}\beta^{(1-s)}\ldots\beta. \tag{18.8.67}$$

Теорема 18.8.68. Если

$$\Big(\sum_{j\geqslant 0} R_j\zeta^{-j}\Big)\Big(\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}Q_i\Big) = 1 \tag{18.8.69}$$

то решение β уравнения (18.8.67) удовлетворяет также уравнению (18.8.66).

Доказательство. Перепишем формулы (18.8.67, 69), соответственно, в виде

$$\beta\beta^{(1)} = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s Q_s^{(-s)}\beta^{(1-s)}\dots\beta^{(1)}, \tag{18.8.70}$$

$$\sum_{i+j=k} R_j Q_i^{(-i-j)} = \delta_k^0, \quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{18.8.71k}$$

Умножая равенство (18.8.71k) справа на

$$(-h)^k\beta^{(1-k)}\dots\beta^{(1)}$$

и суммируя по $k\in\mathbb{Z}_+$, получаем

$$\beta^{(1)} = \sum_{k\geqslant 0}(-h)^k\Big[\sum_{i_j=k} R_j Q_i^{(-i-j)}\Big]\beta^{(1-k)}\dots\beta^{(1)} =$$

$$= \sum_{j\geqslant 0}(-h)^j R_j\Big\{\sum_{i\geqslant 0}(-h)^i Q_i^{(-i-j)}\beta^{(1-i-j)}\dots\beta^{(1-j)}\Big\}\frac{1}{\beta^{(1-j)}}\beta^{(1-j)}\dots\beta^{(1)}. \tag{18.8.71}$$

Выражение в фигурных скобках равно

$$\Delta^{-j}\Big[\sum_{i\geqslant 0}(-h)^i Q_i^{(-i)}\beta^{(1-i)}\dots\beta^{(1)}\Big] \overset{(18.8.70)}{=} \Delta^{-j}(\beta\beta^{(1)}) = \beta^{(-j)}\beta^{(1-j)}. \tag{18.8.72}$$

Подставляя это в равенство (18.8.71), получаем

$$\beta^{(1)} = \sum_{j\geqslant 0}(-h)^j R_j\{\beta^{(-j)}\beta^{(1-j)}\}\frac{1}{\beta^{(1-j)}}\beta^{(1-j)}\dots\beta^{(1)} = \Big[\sum_{j\geqslant 0}(-h)^j R_j\beta^{(-j)}\dots\beta\Big]\beta^{(1)}.$$

Деля справа на $\beta^{(1)}$, получаем искомую формулу (18.8.66). ▮

Остается вопрос, являются ли два однопараметрических семейства автоморфизмов кольца $C_R[[h]]$, построенных в этом разделе, гамильтоновыми относительно 3-й гамильтоновой структуры иерархии МКП. Однако, на прямую проверку не стоит тратить силы. Обходное доказательство будет получено в следующем разделе, как побочный продукт дискретно-временной конструкции формы Гиббонса в G–координатах.

18.9 Форма Гиббонса в G–координатах и ее симплектические свойства

В этом разделе мы дискретизируем по времени форму Гиббонса для МКП в G–координатах, способом, совместным с дискретизацией по времени из предыдущего раздела. Получившийся дискретно-временной поток симплектичен, и отсюда следует, что полный не-Гиббонсовский дискретный-временной поток МКП гамильтонов относительно 3-й гамильтоновой структуры МКП.

Первый поток МКП в G–координатах (18.8.3):

$$\partial_t(R_i) = (R_0^{-1}R_{i+1})^{(1)} - R_{i+1}R_0^{(-i-1)-1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.9.1}$$

имеет следующую форму Гиббонса (13.6.21, 37):

$$\partial_t(\boldsymbol{A}) = \left(\frac{1}{1+\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}, \tag{18.9.2a}$$

$$\partial_t(\boldsymbol{B}) = -\left(\boldsymbol{B}\frac{1}{1+\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}}\right)^{(-1)}, \tag{18.9.2b}$$

$$\varphi(R_i) = \delta_i^0 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^{(-i)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{18.9.3}$$

В предыдущем разделе мы нашли дискретно-временную версию потока (18.9.1), уравнения (18.8.7, 8, 27):

$$(\gamma\widetilde{R}_0)^{(1)} = R_0\gamma, \tag{18.9.4}$$

$$\widetilde{R}_i + h(\gamma\widetilde{R}_{i+1})^{(1)} = R_i + hR_{i+1}\gamma^{(-i-1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{18.9.5}$$

$$\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}R_s^{(s)} = 1. \tag{18.9.6}$$

Зададимся целью найти дискретно-временную эволюцию переменных Гиббонса $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ связанную преобразованием Гиббонса φ (18.9.3) с дискретно-временной эволюцией (18.9.4–6) в пространстве переменных R_i.. Для решения этой задачи подставим формулу (18.9.3) для φ в уравнения (18.9.4–6). Опуская φ из обозначений, находим:
1) Согласно формуле (18.9.3),

$$R_s^{(s)} = \delta_s^0 + \boldsymbol{A}^{(s)t}\boldsymbol{B}. \tag{18.9.7}$$

Подставляя это в формулу (18.9.6), получаем

$$\gamma + \Big[\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}\boldsymbol{A}^{(s)}\Big]^t\boldsymbol{B} = 1. \tag{18.9.8}$$

Так как

$$(1+h\zeta\gamma)^{-1} = \sum_{s\geqslant 0}(-h\zeta\gamma)^s = \gamma^{-1}\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s\gamma\ldots\gamma^{(s)}\zeta^s, \tag{18.9.9}$$

то формулу (18.9.8) можно переписать в виде

$$\gamma\{1 + [(1+h\Delta\gamma)^{-1}(\boldsymbol{A})]^t\boldsymbol{B}\} = 1; \tag{18.9.10}$$

2) Подставляя формулу (18.9.3) в равенство (18.9.5), получаем:

$$\text{левая часть} = \delta_i^0 + \widetilde{\boldsymbol{A}}^t\widetilde{\boldsymbol{B}}^{(-i)} + h\gamma^{(1)}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{(1)t}\widetilde{\boldsymbol{B}}^{(-i)} = \delta_i^0 + [\widetilde{\boldsymbol{A}} + h(\gamma\widetilde{\boldsymbol{A}})^{(1)}]^t\widetilde{\boldsymbol{B}}^{(-i)}, \tag{18.9.11ℓ}$$

$$\text{правая часть} = \delta_i^0 + \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^{(-i)} + h\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^{(-i-1)}\gamma^{(-i-1)} = \delta_i^0 + \boldsymbol{A}^t[\boldsymbol{B} + h(\boldsymbol{B}\gamma)^{(-1)}]^{(-i)}. \tag{18.9.11r}$$

Следовательно, нам приходится постулировать уравнения

$$\widetilde{A} + h(\gamma\widetilde{A})^{(1)} = A, \tag{18.9.12a}$$

$$B + h(B\gamma)^{(-1)} = \widetilde{B}. \tag{18.9.12b}$$

Но чему равна величина γ? мы находим ее из формулы (18.9.10, 12a):

$$\gamma = (1 + \widetilde{A}^t B)^{-1}; \tag{18.9.13}$$

3) Остается проверить, что уравнение (18.9.4) выполниется:

$$\text{левая часть} = [\gamma(1 + \widetilde{A}^t \widetilde{B})]^{(1)} = \gamma^{(1)}\{1 + \widetilde{A}^t[B + hB^{(-1)}\gamma^{(-1)}]\}^{(1)} =$$

$$= 1 + \gamma^{(1)} h \widetilde{A}^{(1)t} B\gamma, \tag{18.9.14ℓ}$$

$$\text{правая часть} = (1 + A^t B)\gamma = \{1 + [\widetilde{A} + h\gamma^{(1)}\widetilde{B}^{(1)}]^t B\}\gamma = 1 + h\gamma^{(1)}\widetilde{A}^{(1)t} B\gamma, \tag{18.9.14r}$$

и это совпадает с выражением (18.9.14ℓ).

Вывод: система (18.9.12, 13) дает решение поставленной задачи.

Упражнение 18.9.15. Покажите, что

$$\gamma = (1 + A^t B)^{-1} + O(h) \tag{18.9.16}$$

и получите что

$$\frac{\widetilde{A} - A}{-h} = \left(\frac{1}{1 + A^t B} A\right)^{(1)} + O(h), \tag{18.9.17a}$$

$$\frac{\widetilde{B} - B}{-h} = -\left(B \frac{1}{1 + A^t B}\right)^{(-1)} + O(h), \tag{18.9.17b}$$

в согласии с формулами (18.9.2).

Рассмотрим теперь гамильтонов аспект проблема. Поток с непрерывным временем (18.9.2) гамильтонов, согласно формулам (13.6.22, 23):

$$\partial_t \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta 1 \\ -\Delta^{-1} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathcal{H}/\delta A \\ \delta\mathcal{H}/\delta B \end{pmatrix}, \tag{18.9.18}$$

$$\mathcal{H} = \ln(1 + A^t B). \tag{18.9.19}$$

Согласно Теореме 13.6.38, отображение φ гамильтоново между 3-й гамильтоновой структурой МКП $B^{\text{МКП}_3}$ (12.6.10) и почти-симплектической гамильтоновой структурой (18.9.18). Если мы сумеем доказать, что шаг по времени (18.9.12, 13) является гамильтоновым отображением в (A, B)–пространстве, то, точно как в случае КП из §17.1, отсюда будет следовать гамильтоновость шага по времени (18.9.4–6) в R_t–пространстве.

Чтобы показать, гамильтоновость отображения (18.9.12, 13), удобно работать в переменных

$$p = A^{(-1)}, \quad q = B \tag{18.9.20}$$

вместо $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$. Почему? Потому, что в переменных $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ почти-симплектическая матрица (18.9.18) превращается в чисто симплектическую

$$b = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{array} \\ \begin{array}{c} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{18.9.21}$$

и если повезет, мы можем, при помощи формализма производящих функций, в две строчки доказать предполагаемую гамильтоновость отображения (18.9.12, 13). Последнее в $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$-переменных имеет вид

$$\boldsymbol{p} = \widetilde{\boldsymbol{p}} + h\gamma\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}, \tag{18.9.22a}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} + h(\boldsymbol{q}\gamma)^{(-1)}, \tag{18.9.22b}$$

$$\gamma = (1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)t}\boldsymbol{q})^{-1}. \tag{18.9.23}$$

Рассмотрим производящую функцию

$$S = S(\widetilde{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{q}) = \widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q} + h\ln(1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)t}\boldsymbol{q}). \tag{18.9.24}$$

Тогда

$$\frac{\delta S}{\delta\widetilde{\boldsymbol{p}}} = \boldsymbol{q} + h\boldsymbol{q}^{(-1)}\frac{1}{1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}^t\boldsymbol{q}^{(-1)}}, \tag{18.9.25a}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\widetilde{\boldsymbol{q}}} = \widetilde{\boldsymbol{p}} + h\frac{1}{1 + \widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)t}\boldsymbol{q}}\widetilde{\boldsymbol{p}}^{(1)}. \tag{18.9.25b}$$

Таким образом, в терминах производящей функцией S, отображение шага по времени (18.9.22, 23) имеет вид

$$\boldsymbol{p} = \frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{q}}, \quad \widetilde{\boldsymbol{q}} = \frac{\delta S}{\delta\widetilde{\boldsymbol{p}}}. \tag{18.9.26}$$

Следовательно, это отображение симплектическое.

Обратная временная эволюция сводится к перестановке тильд в формулах (18.9.4, 5, 12, 13, 22–26).

Глава 19

Цепочка Тоды, релятивистская цепочка Тоды и родственные системы

> Энтузиазм к чему-либо, кроме абстракций, есть признак слабости и болезни.
>
> Бодлер

Эта Глава имеет дело с дискретизациями по времени специальных систем, оставшихся за рамками общих систем типа КП и МКП, обсуждавшихся в Главах 17, 18. Рассмотрены следующие системы: одевающие операторы, цепочка Тоды, релятивистская цепочка Тоды, система Вольтерра, обобщенные системы Вольтерра, щелевая иерархия КП, и некоммутативные динамики на $gl_2(R)$ и $sl_2(R)$.

19.1 Задача дискретного одевания

В этом разделе мы обсуждаем проблему: можно ли дискретизировать по времени движения в одевающих пространствах?

В двух предыдущих главах были найдены дискретизация по времени различных систем типа КП и МКП. В главе 9 было показано, что непрерывно-временные двойники этих систем, уравнения Лакса

$$\partial_t(L) = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^n, \tag{19.1.1}$$

$$\partial_t(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_{>0}, \mathcal{L}] = [\mathcal{L}, \mathcal{P}_{\leqslant 0}], \quad \mathcal{P} = \mathcal{L}^n, \tag{19.1.2}$$

следуют из уравнений движения в одевающих пространствах

$$\partial_t(K) = -P_- K, \quad L = K\zeta K^{-1}, \tag{19.1.3}$$

$$\partial_t(\mathcal{K}) = -\mathcal{P}_{\leqslant 0}\mathcal{K}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{K}\zeta\mathcal{K}^{-1}. \tag{19.1.4}$$

Возникает вопрос: можно ли дискретизировать время для уравнений движения в каждом из двух одевающих пространств так, чтобы при проекции из одевающего в лаксово пространство, в последнем получились нужные дискретизации? Если бы это было возможно, в лаксовой картине мы получили бы решения следующих уравнений:

$$\Big(1+h\sum_{i>0}\zeta^{-i}\alpha_i\Big)\widetilde{L}=L\Big(1+h\sum_{i>0}\zeta^{-i}\alpha_i\Big), \tag{19.1.5}$$

$$\Big(1+h\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}\beta_i\Big)\widetilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}\Big(1+h\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}\beta_i\Big). \tag{19.1.6}$$

Но, вообще говоря, это ужасающе громоздкие уравнения. Чтобы понять, почему, рассмотрим простейший безнадежный случай, когда число эволюционных параметров α_i (или β_i) больше одного. Скажем, для КП (19.1.5), это случай когда есть всего два α:

$$\begin{aligned}&[(1+h(\zeta^{-1}\alpha_1+\zeta^{-2}\alpha_2)](\zeta+\widetilde{q}_0+\zeta^{-1}\widetilde{q}_1+\zeta^{-2}\widetilde{q}_2)=\\&(\zeta+q_0+\zeta^{-1}q_1+\zeta^{-2}q_2)[1+h(\zeta^{-1}\alpha_1+\zeta^{-2}\alpha_2)].\end{aligned} \tag{19.1.7}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, перепишем это уравнение и виде системы

$$\widetilde{q}_0+h\alpha_1^{(-1)}=q_0+h\alpha_1, \tag{19.1.8a}$$

$$\widetilde{q}_1+h\alpha_1\widetilde{q}_0+h\alpha_2^{(-1)}=q_1+hq_0^{(1)}\alpha_1+h\alpha_2, \tag{19.1.8b}$$

$$\widetilde{q}_2+h\alpha_1^{(1)}\widetilde{q}_1+h\alpha_2\widetilde{q}_0=q_2+hq_1^{(1)}\alpha_1+hq_0^{(2)}\alpha_2, \tag{19.1.8c}$$

$$\alpha_1^{(2)}\widetilde{q}_2+\alpha_2^{(1)}\widetilde{q}_1=q_2^{(1)}\alpha_1+q_1^{(2)}\alpha_2, \tag{19.1.8d}$$

$$\alpha_2^{(2)}\widetilde{q}_2=q_2^{(2)}\alpha_2 \tag{19.1.8e}$$

содержащей 5 уравнений на 5 неизвестных $(\widetilde{q}_0,\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2,\alpha_1,\alpha_2)$. Исключая $\widetilde{q}_i$, мы приходим к совершенно непостижимой системе из двух уравнений на α_1 и α_2, причем она остается неприступной, даже если считать все переменные *коммутирующими*.

Нынешнее состояние дел следует сравнить с успешными временными дискретизациями, совершенными в главах 17 и 18. Там мы работали с уравнениями Лакса

$$\partial_t(L)=[P_+,L],\quad P_+=L_+=\zeta+q_0, \tag{19.1.9a}$$

$$\partial_t(\mathcal{L})=[\mathcal{P}_{>0},\mathcal{L}],\quad \mathcal{P}_{>0}=\mathcal{L}_{>0}=\zeta Q_0. \tag{19.1.9b}$$

В каждом из этих случаев нам приходилось иметь дело лишь с *одним* полем, определяющим эволюцию: q_0 в случае КП, и Q_0 для МКП. Наоборот, в этом разделе мы сталкиваемся с отрицательными (или неположительными) версиями операторов:

$$\partial_t(L)=[L,P_-],\quad P_-=L_-=\sum_{i>0}\zeta^{-i}q_i, \tag{19.1.10}$$

$$\partial_t(\mathcal{L})=|\mathcal{L},\mathcal{P}_{\leqslant 0}],\quad \mathcal{P}_{\leqslant 0}=\mathcal{L}_{\leqslant 0}=\sum_{i>0}\zeta^{1-i}Q_i. \tag{19.1.11}$$

Для каждого из этих уравнений, за немногими исключениями, перечисленными ниже, требуется задействовать *более одного* параметра в анзаце, необходимом для дискретизации по времени, и это представляет непреодолимое пока-что препятствие.

Упомянутые исключения возникают, когда дискретно-временная эволюция определяется *едиственным* параметром. Это следующие случаи:

1) Цепочка Тоды

$$(1+h\zeta^{-1}\alpha)(\zeta+\widetilde{q}_0+\zeta^{-1}\widetilde{q}_1)=(\zeta+q_0+\zeta^{-1}q_1)(1+h\zeta^{-1}\alpha); \tag{19.1.12}$$

2) Модифицированная цепочка Тоды из §9.9 и §17.7

$$[1+h\zeta^{-1}\varphi_i(\alpha)]\widetilde{F_i} = F_i[1+h\zeta^{-1}\varphi_{i+1}(\alpha)], \quad i\in\mathbb{Z}_2, \tag{19.1.13a}$$

$$F_1=\zeta+u, \quad F_2=1+\zeta^{-1}v, \quad \varphi_1(L)=F_1F_2, \quad \varphi_2(L)=F_2F_1, \quad L=\zeta+q_0+\zeta^{-1}q_1; \tag{19.1.13b}$$

3) Система Вольтерра

$$(1+h\zeta^{-2}\alpha)(\zeta+\zeta^{-1}\widetilde{u}) = (\zeta+\zeta^{-1}u)(1+h\zeta^{-2}\alpha), \tag{19.1.14}$$

которая служит дискретно-временной версией щелевой специализации

$$\partial_P(L)=[L,P_-], \quad P=L^{2n}, \quad L=\zeta+\zeta^{-1}u, \quad n=1, \tag{19.1.15a}$$

$$\partial_t(u)=u^{(1)}u-uu^{(-1)}. \tag{19.1.15b}$$

С этими тремя случаями, и родствеиными системами, мы будем иметь дело в последующих разделах. (При работе с такими системами мы будем говорить об "отрицательиой эволюции".) Заметим, что все эти системы КП типа. Иэ систем типа МКП, существует только одна:

$$(1+h\beta)(\zeta\widetilde{Q}_0+\widetilde{Q}_1) = (\zeta Q_0+Q_1)(1+h\beta), \tag{19.1.16}$$

дискретизирующая непрерывиую систему

$$\mathcal{L}_t=[\mathcal{L},\mathcal{L}_{\leqslant 0}], \quad \mathcal{L}=\zeta Q_0+Q_1, \tag{19.1.17a}$$

$$\partial_t(Q_0)=Q_0Q_1-Q_1^{(-1)}Q_0, \tag{19.1.17b}$$

$$\partial_t(Q_1)=0. \tag{19.1.17c}$$

Как и всякая другая конечио-оборванная система МКП-типа, система (19.1.17) вырождена. Эта вырожденность сохраняется в дискретпой версии (19.1.16), которую можпо преобразовать к виду

$$[1+h\beta^{(-1)}]\widetilde{Q}_0 = Q_0(1+h\beta), \tag{19.1.18a}$$

$$(1+h\beta)\widetilde{Q}_1 = Q_1(1+h\beta). \tag{19.1.18b}$$

Здесь только 2 уравнения на 3 неизвестиых, система недоопределена. Вэяв

$$\beta=\pm Q_1, \tag{19.1.19}$$

получаем

$$\widetilde{Q}_0 = Q_0 \pm h(Q_0Q_1-Q_1^{(-1)}Q_0), \tag{19.1.20}$$

$$\widetilde{Q}_1 = Q_1, \tag{19.1.21}$$

в согласни с формулой (19.1.17b,c). (Выбор (19.1.19) обосповывается в §19.11.)

Упражнение 19.1.22. Так как

$$-P_- = -P+P_+, \tag{19.1.23}$$

то можно переписать уравнение движения (19.1.3) в виде

$$\partial_t(K) = -PK+P_+K. \tag{19.1.24}$$

При $P = L = K\zeta K^{-1}$, это превращается в

$$\partial_t(K) = -K\zeta + (\zeta + q_0)K, \quad \zeta + q_0 = L_+. \tag{19.1.25}$$

(i) Покажите, что

$$K = 1 + \chi_1\zeta^{-1} + \ldots \quad \Rightarrow \tag{19.1.26}$$

$$q_0 = \chi_1 - \chi_1^{(1)}; \tag{19.1.27}$$

(ii) Допустим, мы строим временную дискретизацию уравнения движения (19.1.25) в виде

$$\widetilde{K} = -hK\zeta + [1 + h(\zeta + \alpha)]K. \tag{19.1.28}$$

Покажите, что

$$\alpha = \chi_1 - \chi_1^{(1)} \quad (= q_0); \tag{19.1.29}$$

(iii) Покажите, что временная эволюция (19.1.28) не может быть спроецирована в $L = K\zeta K^{-1}$-пространство.

Лучшая Неодетая Женщина Америки
Реклама Гипси Роз
Ли в фильме *Парижские улицы* (Всемирная
выставка 1939 г. в Нью-Йорке)

19.2 Отрицательная эволюция цепочки Тоды

В этом разделе строятся дискретизации по времени цепочки Тоды типа отрицательной эволюции, и показывается, что они изоморфны дискретизациям из §17.1, в согласии с непрерывно-временной картиной. Это подготавливает арену для дискретизации по времени релятивистской цепочки Тоды, обсуждаемую в следующем разделе.

Система (19.1.12) дискретной цепочки Тоды

$$(1 + h\zeta^{-1}\alpha)(\zeta + \widetilde{q}_0 + \zeta^{-1}\widetilde{q}_1) = (\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1)(1 + h\zeta^{-1}\alpha), \tag{19.2.1}$$

расписывается в виде

$$\zeta + \widetilde{q}_0 + \zeta^{-1}\widetilde{q}_1 + h\alpha^{(-1)} + h\zeta^{-1}\alpha\widetilde{q}_0 + h\zeta^{-2}\alpha^{(1)}\widetilde{q}_1 =$$
$$= \zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1 + h\alpha + h\zeta^{-1}q_0^{(1)}\alpha + h\zeta^{-2}q_1^{(1)}\alpha,$$

что эквивалентно системе

$$\widetilde{q}_0 + h\alpha^{(-1)} = q_0 + h\alpha, \tag{19.2.2a}$$

$$\widetilde{q}_1 + h\alpha\widetilde{q}_0 = q_1 + hq_0^{(1)}\alpha, \tag{19.2.2b}$$

$$\alpha^{(1)}\widetilde{q}_1 = q_1^{(1)}\alpha. \tag{19.2.2c}$$

Уравнения (a) и (c) этой системы дают временную эволюцию переменных q_0 и q_1 соответственно. Из оставшегося уравнения (b) следует определить α :

$$\frac{1}{\alpha^{(1)}}q_1^{(1)}\alpha + h\alpha[q_0 + h(\alpha - \alpha^{(-1)})] = q_1 + hq_0^{(1)}\alpha. \tag{19.2.3}$$

Деля справа на α, это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\alpha^{(1)}}q_1^{(1)} - q_1\frac{1}{\alpha} + h\alpha q_0\frac{1}{\alpha} - hq_0^{(1)} + h^2\alpha(\alpha-\alpha)^{(-1)})\frac{1}{\alpha} = 0. \tag{19.2.4}$$

Это равенство можно преобразовать к виду

$$(\widehat{L}_{1/\alpha^{(1)}}\Delta - \widehat{R}_{1/\alpha})(q_1 - h\alpha q_0 + h^2\alpha\alpha^{(-1)}) = 0. \tag{19.2.5}$$

Упражнение 19.2.6. Покажите, что

$$\operatorname{Ker}(\widehat{L}_{1/\alpha^{(1)}}\Delta - \widehat{R}_{1/\alpha}) = \{\mathrm{const}\,\alpha\} \quad \text{в} \quad C_\alpha[[h]]. \tag{19.2.7}$$

Замечание 19.2.8. В предыдущих двух главах мы уже проходили через подобные рутинные Упражнения, и всегда искали ядро соответствующего оператора в кольце $C_\alpha[[h]]$, а не в каком-либо более широком, скажем $C_q[[h]$. Почему? Вспомним, что проблема, которую мы пытаемся преодолеть, заключается в *нелокальности* определяющих уравнений для $\alpha = \sum_{k\geqslant 0}\alpha_k h^k$, и мы должны быть вполне довольны даже одним решением α, регулярным по h. В большинстве таких случаев, α_0 является одной из переменных. (В этом разделе, $\alpha_0 = q_1$.) Мы можем, следовательно, заменить α на эту переменную, назовем ее q_s, и заменить кольцо C_q на кольцо $C_{\alpha,\{q\}\setminus q_s}$. Так как все оставшиеся q_i не коммутируют с α, они будут бесполезным балластом, когда речь идет о вычислении $\operatorname{Ker}(\dots)$. В редких случаях, когда приведенное рассуждение не применимо, оправданием служит всегда окончательный результат. В последующих разделах мы увидим некоторые душераздирающие вариации на эту тему.

Так как

$$L_- = \zeta^{-1}q_1, \tag{19.2.9}$$

то мы выбираем $\mathrm{const} = 1$ в формуле (19.2.7), и затем находим из уравнении (19.2.5), что

$$\alpha = q_1 - h\alpha q_0 + h^2\alpha\alpha^{(-1)}. \tag{19.2.10}$$

Упражнение 19.2.11. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{q}_0 - q_0}{h} = (1-\Delta^{-1})(q_1) + O(h), \tag{19.2.12a}$$

$$\frac{\widetilde{q}_1 - q_1}{h} = q_0^{(1)}q_1 - q_1q_0 + O(h), \tag{19.2.12b}$$

в согласии с формулой (9.1.28)

Для обратной временной эволюции,

$$(1 + h\zeta^{-1}\alpha)(\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1) = (\zeta + \widetilde{q}_0 + \zeta^{-1}\widetilde{q}_1)(1 + h\zeta^{-1}\alpha), \tag{19.2.13}$$

мы переставляем тильды в системе (19.2.2):

$$q_0 + h\alpha^{(-1)} = \widetilde{q}_0 + h\alpha, \tag{19.2.14a}$$

$$q_1 + h\alpha q_0 = \widetilde{q}_1 + h\widetilde{q}_0^{(1)}\alpha, \tag{19.2.14b}$$

$$\alpha^{(1)}q_1 = \widetilde{q}_1^{(1)}\alpha. \tag{19.2.14c}$$

Тогда уравнение (b) дает

$$q_1 + h\alpha q_0 = \alpha q_1^{(-1)}\frac{1}{\alpha^{(-1)}} + h[q_0^{(1)} + h(\alpha - \alpha^{(1)})]\alpha. \tag{19.2.15}$$

Это можно переписать в виде

$$(\widehat{R}_\alpha - \widehat{L}_\alpha\Delta^{-1})\Big(q_1\frac{1}{\alpha} - hq_0^{(1)} + h^2\alpha^{(1)}\Big) = 0. \tag{19.2.16}$$

Так как

$$\mathrm{Ker}(\widehat{R}_\alpha - \widehat{L}_\alpha\Delta^{-1}) = \mathrm{const}, \tag{19.2.17}$$

то, выбирая $\mathrm{const} = 1$, получаем из уравнения (19.2.16), что

$$\alpha = q_1 - hq_0^{(1)}\alpha + h^2\alpha^{(1)}\alpha. \tag{19.2.18}$$

Всего, теперь мы имеем 4 временных дискретизации цепочки Тоды, или 2 пары разностных схем с взаимно обратным временем. Являются ли эти схемы хоть как-то связанными? Заранее, нет причин ожидать каких-либо связей в дискретно-временной картине, хотя система с непрерывным временем одна и та же. Тем не менее:

Теорема 19.2.19. Отрицательная эволюция с прямым временем цепочки Тоды $\{(19.2.2a, c)\ \&\ (19.2.10)\}$ изоморфна положительной эволюции с обратным временем.

Доказательство. Положительная эволюция с обратным временем задается формулами (16.23, 25) с переставленными тильдами, и формулой (17.1.36):

$$\widetilde{q}_0 = q_0^{(1)} + (1 - \Delta)(A), \tag{19.2.20a}$$

$$\widetilde{q}_1 = [1 + hA^{(1)}]q_1(1 + hA)^{-1}, \tag{19.2.20b}$$

$$A = q_0 - hq_1^{(-1)}[1 + hA^{(-1)}]^{-1}, \tag{19.2.21}$$

где вместо α стоит A, чтобы не смешивать ее с α, входящей в систему (19.2.2a,c), (19.2.10) для отрицательной эволюции с прямым временем.

Докажем сначала, что A (19.2.21) и α (19.2.10) связаны формулой

$$A = q_0 - h\alpha^{(-1)}. \tag{19.2.22}$$

Действительно, подставляя это соотношение в уравнение для A (19.2.21), применяя к результату Δ, и приводя к общему знаменателю, находим

$$-h\alpha|1 + hq_0 - h^2\alpha^{(-1)}| = -hq_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\alpha + h\alpha q_0 - h^2\alpha\alpha^{(-1)} - q_1 = 0,$$

а это есть уравнение для α (19.2.10).

Далее, подставляя формулу (19.2.22) в уравнение для $\widetilde{q}_0$ (19.2.20a), находим:

$$\widetilde{q}_0 = q_0^{(1)} + (1 - \Delta)(q_0 - h\alpha^{(-1)}) = q_0 + h(1 - \Delta^{-1})(\alpha),$$

а это есть уравнение (19.2.2a).

Наконец, надо показать, что $\widetilde{q}_1$–уравнения (19.2.20b) и (19.2.2c) идентичны:

$$[1+hA^{(1)}]q_1\frac{1}{1+hA} \overset{?}{=} \frac{1}{\alpha^{(1)}}q_1^{(1)}\alpha. \tag{19.2.23}$$

Приводя к общему знаменателю и используя A–формулу (19.2.22), приводим это к виду

$$\alpha^{(1)}[1+hq_0^{(1)}-h^2\alpha]q_1 \overset{?}{=} q_1^{(1)}\alpha[1+hq_0-h^2\alpha^{(-1)}]. \tag{19.2.24}$$

Это можно переписать в виде

$$\alpha^{(1)}(1-h^2\alpha)q_1+h(\alpha q_0)^{(1)}q_1 \overset{?}{=} q_1^{(1)}\alpha[1-h^2\alpha^{(-1)}]+hq_1^{(1)}\alpha q_0. \tag{19.2.25}$$

Из α–уравнения (19.2.10) находим

$$h(\alpha q_0)^{(1)} = q_1^{(1)}-\alpha^{(1)}+h^2\alpha^{(1)}\alpha, \quad h\alpha q_0 = q_1-\alpha+h^2\alpha\alpha^{(-1)}. \tag{19.2.26}$$

Подставляя это в равенство (19.2.25), получаем

$$\alpha^{(1)}(1-h^2\alpha)q_1+[q_1^{(1)}-\alpha^{(1)}+h^2\alpha^{(1)}\alpha]q_1 \overset{?}{=} q_1^{(1)}\alpha[1-h^2\alpha^{(-1)}]+q_1^{(1)}[q_1-\alpha+h^2\alpha\alpha^{(-1)}],$$

что верно. ▮

Обращая направление времени в Теореме 19.2.19, находим что вторая пара временных дискретизаций цепочки Тоды: отрицательная эволюция с обратным временем (19.2.14a,c), (19.2.18) и положительная эволюция с прямым временем (16.23, 25), (17.1.36), также изоморфны.

В следующем разделе мы имеем дело с релятивистской деформацией цепочки Тоды. Анзац для положительной эволюции там бесполезен, и только отрицательная оказывается плодотворной.

19.3 Релятивистская цепочка Тоды

В этом разделе строится самая богатая интегрируемая система: релятивистская, дискретная по времени и некоммутативная.

В квазирелятивистской иерархия КП (15.1.4):

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{P}_+ + \mathcal{S}(\mathcal{P}_-),\mathcal{L}] = [\mathcal{L},\mathcal{P}_- - \mathcal{S}(\mathcal{P}_-)], \tag{19.3.1}$$

$$\mathcal{L} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}L, \quad L = \zeta+\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i, \tag{19.3.2}$$

оператор $\mathcal{P}_+$, даже для $\mathcal{P}=\mathcal{L}^1$, имеет бесконечный порядок:

$$\mathcal{L}_+ = \Big[\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\zeta^k\Big(\zeta+\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i\Big)\Big]_+ = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}\Big[\zeta+\sum_{i\geqslant 0}\varepsilon^i q_i\Big]. \tag{19.3.3}$$

Даже в случае максимально оборванного L :

$$L = \zeta+q_0+\zeta^{-1}q_1, \tag{19.3.4}$$

в операторе $\mathcal{L}_+$ остается бесконечное число членов. Поэтому дискретизация по времени, основанная на $\mathcal{L}_+$, положительная эволюция, кажется неосуществимой. Наоборот, в случае отрицательной эволюции имеем

$$\mathcal{L}_- = \Big[\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\zeta^k\Big(\zeta+\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i\Big)\Big]_- = \zeta^{-1}q_1+(1+\varepsilon\zeta)\zeta^{-2}q_2+\ldots, \tag{19.3.5}$$

так что, в простейшей возможной ситуации релятивистской цепочки Тоды (19.3.4) имеем

$$\mathcal{L}_- = \zeta^{-1}q_1. \tag{19.3.6}$$

Уравнение движения (19.3.1) релятивистской цепочки Тоды

$$\partial_{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}, \zeta^{-1}q_1(1-\varepsilon\zeta)], \tag{19.3.7}$$

имеет как раз *один* параметр, и это обещает успех временной дискретизации для отрицательной эволюции, при условии, что мы правильно угадаем подходящий дискретно-временной анзац.

Руководствуясь формулой (19.3.7), мы выберем этот анзац в виде

$$[1+h\zeta^{-1}\alpha(1-\varepsilon\zeta)]\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}[1+h\zeta^{-1}\alpha(1-\varepsilon\zeta)], \tag{19.3.8}$$

где α подлежит определению. При $\varepsilon = 0$ мы возвращаемся к нерелитивистскому анзацу (19.2.1), и мы организуем наши вычислении как возмущении по ε вычислений, проведенных в предыдущем разделе. Умножая равенство (19.3.8) слева на $(1-\varepsilon\zeta)$, находим

$$[1+h(1-\varepsilon\zeta)\zeta^{-1}\alpha](\zeta+\widetilde{q}_0+\zeta^{-1}\widetilde{q}_1) = (\zeta+q_0+\zeta^{-1}q_1)[1+h\zeta^{-1}\alpha(1-\varepsilon\zeta)]. \tag{19.3.9}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем:

$$(1-h\varepsilon\alpha)\widetilde{q}_0+h\alpha^{(-1)} = q_0(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})+h\alpha, \tag{19.3.10a}$$

$$h\alpha\widetilde{q}_0+(1-h\varepsilon\alpha^{(1)})\widetilde{q}_1 = hq_0^{(1)}\alpha+q_1(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}), \tag{19.3.10b}$$

$$\alpha^{(1)}\widetilde{q}_1 = q_1^{(1)}\alpha, \tag{19.3.10c}$$

возмущение системы (19.2.2). Уравнения (a) и (c), в виде

$$\widetilde{q}_0 = (1-h\varepsilon\alpha)^{-1}[q_0(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})+h(\alpha-\alpha^{(-1)})], \tag{19.3.11a}$$

$$\widetilde{q}_1 = \frac{1}{\alpha^{(1)}}q_1^{(1)}\alpha, \tag{19.3.11b}$$

определяют шаг временной эволюция для q_0 и q_1, соответственно. Оставшееся уравнение (19.3.10b) превращается, после исключения $\widetilde{q}_0$ и $\widetilde{q}_1$, в искомое уравнение для α:

$$\frac{h\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}[q_0(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})+h(\alpha-\alpha^{(-1)})]+\frac{1-h\varepsilon\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)}}q_1^{(1)}\alpha = hq_0^{(1)}\alpha+q_1(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}), \tag{19.3.12}$$

являющееся деформацией уравнения (19.2.3). Деля справа на α, получаем

$$\Big(\frac{1-h\varepsilon\alpha}{\alpha}q_1\Big)^{(1)} - q_1(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})\frac{1}{\alpha} - hq_0^{(1)} + \frac{h\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}q_0(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})\frac{1}{\alpha}+$$

$$+\frac{h^2\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}(\alpha-\alpha^{(-1)})\frac{1}{\alpha} = 0. \tag{19.3.13}$$

Это можно преобразовать к виду, являющемуся возмущением формулы (19.2.5):

$$\mathcal{O}\Big[q_1 - \frac{h\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}q_0 + \frac{h^2\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\Big(\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\Big)^{(-1)}\Big] = 0, \tag{19.3.14}$$

где

$$\mathcal{O} = \Delta\widehat{L}_{(1-h\varepsilon\alpha)\alpha^{-1}} - \widehat{R}_{(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})\alpha^{-1}}. \tag{19.3.15}$$

Лемма 19.3.16.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\{\ \Delta\widehat{L}_{(1-h\varepsilon\alpha)\alpha^{-1}} - \widehat{R}_{(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})\alpha^{-1}}\} = \\ &= \Big\{\mathrm{const}\,\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\frac{1}{1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}}\Big\} \quad \text{в} \quad C_\alpha[[h,\varepsilon]]. \end{aligned} \tag{19.3.17}$$

Доказательство. $X \in \mathrm{Ker}(\mathcal{O})$ если и только если

$$\Big(\frac{1-h\varepsilon\alpha}{\alpha}X\Big)^{(1)} = X(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})\frac{1}{\alpha}. \tag{19.3.18}$$

Положим

$$X = \frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}Y\frac{1}{1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}}. \tag{19.3.19}$$

Тогда X–уравнение (19.3.18) превращается в

$$Y^{(1)} = \frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}Y\frac{1-h\varepsilon\alpha}{\alpha}, \tag{19.3.20}$$

следовательно $Y = \mathrm{const}$. ∎

Полагая $Y = 1$, находим

$$q_1 - \frac{h\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}q_0 + \frac{h^2\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\Big(\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\Big)^{(-1)} = \frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\frac{1}{1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}}. \tag{19.3.21}$$

Приведение к общему знаменателю приводит к возмущению формулы (19.2.10):

$$\alpha = (1-h\varepsilon\alpha)q_1(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}) - h\alpha q_0(1-h\varepsilon\alpha^{(-1)}) + h^2\alpha\alpha^{(-1)}. \tag{19.3.22}$$

Упражнение 19.3.23. Покажите, что

$$\alpha = q_1\{1 - h[q_0 + \varepsilon(q_1 + q_1^{(-1)})]\} + O(h^2) \tag{19.3.24}$$

и получите что

$$\frac{\widetilde{q}_0 - q_0}{h} = (1-\Delta^{-1})(q_1) + \varepsilon(q_1q_0 - q_0q_1^{(-1)}) + O(h), \tag{19.3.25a}$$

$$\frac{\widetilde{q}_1 - q_1}{h} = q_0^{(1)}q_1 - q_1q_0 + \varepsilon(\Delta - 1)(q_1q_1^{(-1)}) + O(h), \tag{19.3.25b}$$

в согласии с формулами (15.1.30).

Выясним, сохраняют ли построенные дискретизации по времени свойства своего непрерывного двойника, релятивистской цепочки Тоды.

Утверждение 19.3.26. Связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$ инвариантна относительно временной эволюции (19.3.10).

Доказательство. Если $q_0 = -\varepsilon^{-1}$, то имеем, по формуле (19.3.11a):

$$\widetilde{q}_0 = (1 - h\varepsilon\alpha)^{-1}[-\varepsilon^{-1}(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) + h\alpha - h\alpha^{(-1)}| = (1 - h\varepsilon\alpha)^{-1}(-\varepsilon^{-1} + h\alpha) =$$
$$= -\varepsilon^{-1}. \qquad \blacksquare \tag{19.3.27}$$

Упражнение 19.3.28. (i) Покажите, что при связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$, оставшнйся q_1–поток задается $\{$ уравнением (19.3.11b) н уравнением

$$q_1 = \Big(1 - \frac{h}{\varepsilon}\Big)\frac{\alpha}{1 - h\varepsilon\alpha}\frac{1}{1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}}\}, \tag{19.3.29}$$

и что этот ноток можно нереписать в терминах α, как

$$\frac{\widetilde{\alpha}}{1 - h\varepsilon\widetilde{\alpha}}\frac{1}{1 - h\varepsilon\widetilde{\alpha}^{(-1)}} = \frac{1}{1 - h\varepsilon\alpha^{(1)}}\frac{\alpha}{1 - h\varepsilon\alpha}; \tag{19.3.30}$$

(ii) Покажите, что

$$\frac{\widetilde{\alpha} - \alpha}{h} = \varepsilon(\Delta - 1)(\alpha\alpha^{(-1)}) + O(h), \tag{19.3.31}$$

в согласии с формулами (15.2.3), (19.3.29).

Утверждение 19.3.32. Связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$ инвариантна относительно временной эволюции (19.3.11, 22).

Доказательство. При этой связи уравнение на α (19.3.22) превращается в

$$\alpha = q_1(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) - h\varepsilon\alpha q_1(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) - h\alpha(-\varepsilon^{-1})(1 - h\varepsilon\alpha^{(1)}) -$$
$$-h\alpha(-\varepsilon q_1)(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) + h^2\alpha\alpha^{(-1)} = q_1(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) + h\alpha\varepsilon^{-1} \quad \Rightarrow$$
$$q_1 = \Big(1 - \frac{h}{\varepsilon}\Big)\alpha\frac{1}{1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}}. \tag{19.3.33}$$

Следовательио, но формуле (19.3.11b)

$$\widetilde{q}_1 = \frac{1}{\alpha^{(1)}}q_1^{(1)}\alpha = \Big(1 - \frac{h}{\varepsilon}\Big)\frac{\alpha}{1 - h\varepsilon\alpha}. \tag{19.3.34}$$

С другой стороны, по формуле (19.3.11a),

$$\widetilde{q}_0 = (1 - h\varepsilon\alpha)^{-1}[-\varepsilon^{-1}(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) - \varepsilon q_1(1 - h\varepsilon\alpha^{(-1)}) + h\alpha - h\alpha^{(-1)}]$$
$$\overset{(19.3.27)}{=} -\varepsilon^{-1} - \varepsilon(1 - h\varepsilon\alpha)^{-1}q_1(1 - h\varepsilon^{(-1)}) \overset{(19.3.33)}{=}$$
$$= -\varepsilon^{-1} - \varepsilon(1 - h\varepsilon\alpha)^{-1}\Big(1 - \frac{h}{\alpha}\Big)\alpha \overset{(19.3.34)}{=} -\varepsilon^{-1} - \varepsilon\widetilde{q}_1. \qquad \blacksquare$$

Упражнение 19.3.35. (i) Покажите, что при связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$, временную эволюцию для q_1 можно нереписать в терминах α, как

$$\widetilde{\alpha}\frac{1}{1 - h\varepsilon\widetilde{\alpha}^{(-1)}} = \frac{\alpha}{1 - h\varepsilon\alpha}; \tag{19.3.36}$$

(ii) Покажите, что

$$\frac{\widetilde{\alpha} - \alpha}{h} = \varepsilon\alpha(1 - \Delta^{-1})(\alpha) + O(h), \tag{19.3.37}$$

в согласии с формулами (15.2.13), (19.3.32).

Релятивистская цепочка Тоды с непрерывным временем имеет два дополнительных свойства:

1) Она является гамильтоновой системой, с гамильтоновой матрицей B^{RT} (15.3.21);
2) Она обладает интегралом $\bar{H}_0 = \ln(1+\varepsilon q_0)/\varepsilon$ (15.1.32).

Неясно, как доказать, что эти свойства сохраняются при дискретизации по времени (19.3.11, 22).

В картине с обратным временем, переставляем тильды в формуле (19.3.10) и находим:

$$\widetilde{q}_0 = [(1-h\varepsilon\alpha)q_0 + h(\alpha^{(-1)} - \alpha)](1-h\varepsilon\alpha^{(-1)})^{-1}, \tag{19.3.38a}$$

$$\widetilde{q}_1 = \alpha q_1^{(-1)}\frac{1}{\alpha^{(-1)}}, \tag{19.3.38b}$$

$$h\alpha q_0 + (1-h\varepsilon\alpha^{(1)})q_1 = h[(1-h\varepsilon\alpha^{(1)})q_0^{(1)} + h(\alpha - \alpha^{(1)})]\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha} + \alpha\Big(q_1\frac{1-h\varepsilon\alpha}{\alpha}\Big)^{(-1)}. \tag{19.3.39}$$

Умножая последнее уравнение слева на α^{-1}, получаем

$$\Big[\frac{1}{\alpha}(1-h\varepsilon\alpha^{(1)})q_1 - \Big(q_1\frac{1-h\varepsilon\alpha}{\alpha}\Big)^{(-1)}\Big] + h\Big\{-\frac{1}{\alpha}\Big[(1-h\varepsilon\alpha)q_0\Big]^{(1)}\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha} + q_0\Big\} + \\ + h^2\frac{1}{\alpha}(\alpha^{(1)} - \alpha)\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha} = 0. \tag{19.3.40}$$

Это можно преобразовать к виду

$$\mathcal{O}\Big[q_1 - hq_0^{(1)}\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha} + h^2\Big(\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\Big)^{(1)}\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\Big] = 0, \tag{19.3.41a}$$

где

$$\mathcal{O} = \widehat{L}_{\alpha^{-1}(1-h\varepsilon\alpha^{(1)})} - \Delta^{-1}\widehat{R}_{(1-h\varepsilon\alpha)\alpha^{-1}}. \tag{19.3.41b}$$

Упражнение 19.3.42. Покажите, что, в $C_\alpha|[h,\varepsilon]]$,

$$\mathrm{Ker}\{\widehat{L}_{\alpha^{-1}(1-h\varepsilon\alpha^{(1)})} - \Delta^{-1}\widehat{R}_{(1-h\varepsilon\alpha)\alpha^{-1}}\} = \{\mathrm{const}\,\frac{1}{1-h\varepsilon\alpha^{(1)}}\frac{\alpha}{1-h\varepsilon\alpha}\}. \tag{19.3.43}$$

Выбирая const $= 1$ и избавляясь от знаменателей, получаем

$$\alpha = (1-h\varepsilon\alpha^{(1)})q_1(1-h\varepsilon\alpha) - h(1-h\varepsilon\alpha^{(1)})q_0^{(1)}\alpha + h^2\alpha^{(1)}\alpha, \tag{19.3.44}$$

возмущение формулы (19.2.18).

Упражнение 19.3.45. Покажите, что поток с обратным временем (19.3.38, 44) допускает связи

$$\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\} \quad \text{и} \quad \{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}. \tag{19.3.46}$$

Вернейшим признаком того, что разумная жизнь существует где-то во Вселенной, является то, что она никогда не пыталась установить с нами контакт.

Кальвин и Хоббс

19.4 Теневая релятивистская цепочка Тоды

> Рай — это город площадью в 15000 квадратных миль, или 6000 миль по периметру. Одна сторона его на 245 миль длиннее, чем общая длина Великой Китайской Стены. Стены, окружающие Рай, в 396000 раз выше Великой Китайской Стены и в восемь раз толще. Рай имеет двенадцать ворот, по три с каждой стороны, и имеет место для 100.000.000.000 душ. Там нет трущоб. Весь город выстроен из алмазного материала, а улицы вымощены золотом. Все жители честны и там нет ни замков, ни судов, ни полицейских.
>
> Преподобный Джордж Эдвард Хауэс из Гаррисбурга, Пенсильвания

В этом разделе мы дискретизируем по времени таинственную тень релятивистской цепочки Тоды и, более общо, первый квазирелятивистский поток КП, — эти тени были построены в §15.3 как гамильтоновы потоки с неполиномиальными гамильтонианами $-\varepsilon^{-2}\ln(1+\varepsilon q_0)$.

Теневой квазирелятивистский поток (15.3.24):

$$\partial_t(q_i) = \frac{1}{1+\varepsilon q_0^{(i+1)}}q_{i+1} - \left(q_{i+1}\frac{1}{1+\varepsilon q_0}\right)^{(-1)} + \left(\frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}\right)^{(i)} q_i - q_i\frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{19.4.1}$$

имеет представление Лакса (15.3.26):

$$\partial_t(\mathcal{L}) = [\zeta + \frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}(1-\varepsilon\zeta), \mathcal{L}], \quad \mathcal{L} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}\Big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i\Big). \tag{19.4.2}$$

Руководствуясь этим представлением, постулируем следующий анзац для дискретизации по времени:

$$\{1 + h[\zeta + \alpha(1-\varepsilon\zeta)]\}\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\{1 + h[\zeta + \alpha(1-\varepsilon\zeta)]\}. \tag{19.4.3}$$

Умножая слева на $(1-\varepsilon\zeta)$, получаем

$$[1 + h\zeta + h(1-\varepsilon\zeta)\alpha]\widetilde{L} = L[1 + h\zeta + h\alpha(1-\varepsilon\zeta)]. \tag{19.4.4}$$

Обозначим временно

$$A = 1 + h\alpha, \quad b = 1 - \varepsilon\alpha, \quad c = \frac{b}{A} = \frac{1-\varepsilon\alpha}{1+h\alpha}. \tag{19.4.5}$$

Тогда уравнение временной эволюции (19.4.4) можно переписать в виде

$$(A + h\zeta b)\Big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}\widetilde{q}_i\Big) = \Big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i\Big)(A + hb\zeta). \tag{19.4.6}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим:

$$b\widetilde{q}_0 + \alpha^{(-1)} = \alpha + (q_0 b)^{(-1)}, \tag{19.4.7}$$

$$A^{(i)}\widetilde{q}_i + hb^{(i+1)}\widetilde{q}_{i+1} = q_i A + h(q_{i+1}b)^{(-1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.4.8}$$

Это, как обычно, недоопределенная система. Замечая, что непрерывный поток (19.4.1) сохраняет любой обрыв

$$\{0 = q_{M+1} = q_{M+2} = \dots\}, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \tag{19.4.9}$$

мы регуляризуем, прнвычным способом, систему (19.4.8) и получаем следующее предложение.

Утверждение 19.4.10. Система (19.4.8) преобразуется к внду

$$\widetilde{q}_i = \frac{1}{A^{(i)}} q_i A - \sum_{s>0} (-h)^s \frac{1}{A^{(i)}} c^{(i+1)} \dots c^{(i+s)} \Big[\frac{1}{c^{(i+s)}} (q_{i+s} b)^{(-1)} - q_{i+s} A \Big], \ i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.4.11}$$

Доказательство. При $i > M$, формулы (19.4.8) и (19.4.11) дают $\widetilde{q}_i = 0$. При $i = M$, обе формулы дают один и тот же результат $A^{(M)} \widetilde{q}_M = q_M A$. Следовательно, достаточно проверить, что $\widetilde{q}_i$, определеные формуламн (19.4.11), удовлетворяют соотиошениям (19.4.8). Из формулы (19.4.11) имеем:

$$A^{(i)} \widetilde{q}_i = q_i A - (-h)[(q_{i+1} b)^{(-1)} - c^{(i+1)} q_{i+1} A] - \tag{19.4.12a}$$

$$-(-h) \sum_{s>0} (-h)^s c^{(i+1)} \dots c^{(i+1+s)} \Big[\frac{1}{c^{(i+1+s)}} (q_{i+1+s} b)^{(-1)} - q_{i+1+s} A \Big]. \tag{19.4.12b}$$

Выражение (19.4.12b), согласно формуле (19.4.11), равняется

$$-hc^{(i+1)} [A^{(i+1)} \widetilde{q}_{i+1} - q_{i+1} A] = -hb^{(i+1)} \widetilde{q}_{i+1} + hc^{(i+1)} q_{i+1} A. \tag{19.4.13}$$

Следовательно,

$$A^{(i)} \widetilde{q}_i = q_i A + h (q_{i+1} b)^{(-1)} - hb^{(i+1)} \widetilde{q}_{i+1},$$

что совпадает с (19.4.8). ∎

Теперь перейдем к пределу $M \to \infty$. При $i = 0$ формулв (19.4.11) дает

$$b \widetilde{q}_0 = c q_0 A - \sum_{s>0} (-h)^s c \dots c^{(s-1)} [(q_s b)^{(-1)} - c^{(s)} q_s A]. \tag{19.4.14}$$

Сравнявая это c формулой (19.4.7):

$$b \widetilde{q}_0 = (q_0 b)^{(-1)} + \alpha - \alpha^{(-1)}, \tag{19.4.15}$$

получаем

$$\sum_{s \geqslant 0} (-h)^s c \dots c^{(s)} q_s A - \frac{1}{c^{(-1)}} \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s c^{(-1)} \dots c^{(s-1)} (q_s b)^{(-1)} = \alpha - \alpha^{(-1)}, \tag{19.4.16}$$

что перепнсывается в виде

$$\theta - \Big(\frac{1}{c} \theta c \Big)^{(-1)} = \alpha - \alpha^{(-1)}, \tag{19.4.17}$$

где

$$\theta = \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s c \dots c^{(s)} q_s A. \tag{19.4.18}$$

Единственное решение с правильной одиородиостью уравненяя (19.4.17), регулярное по ε и h, имеет вид

$$\alpha = \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s \frac{1 - \varepsilon\alpha}{1 + h\alpha} \dots \Big(\frac{1 - \varepsilon\alpha}{1 + h\alpha} \Big)^{(s)} q_s (1 + h\alpha) \quad (= \theta.) \tag{19.4.19}$$

Упражнение 19.4.20. При $\varepsilon = 0$, формула (17.1.21) имеет вид

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s \frac{1}{1 + h\alpha^{(1)}} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(s)}} q_s. \tag{19.4.21}$$

Согасуйте эту формулу со случаем $\varepsilon = 0$ в формуле (19.4.19).

Упражнение 19.4.22. Покажите, что

$$\alpha = \left(q_0 - \frac{h}{1 + \varepsilon q_0} \frac{1}{1 + \varepsilon q_0^{(1)}} q_1\right) \frac{1}{1 + \varepsilon q_0} + O(h^2) \tag{19.4.23}$$

и получите, что

$$\frac{\widetilde{q}_i - q_i}{-h} = \frac{1}{1 + \varepsilon q_0^{(i+1)}} q_{i+1} - \left(q_{i+1} \frac{1}{1 + \varepsilon q_0}\right)^{(-1)} + \\ + \left(\frac{q_0}{1 + \varepsilon q_0}\right)^{(i)} q_i - q_i \frac{q_0}{1 + \varepsilon q_0} + O(h), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{19.4.24}$$

в согласии с формулами (19.4.1).

Из формул (19.4.23) видим, что дискретно-временная теневая эволюция не донускает связн $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$, точпо так же, как и в случае ненрерывного времепи.

Упражнение 19.4.25. Рассмотрнм случай релятивиетской ценочки Тоды

$$\{0 = q_2 = q_3 = \ldots\}. \tag{19.4.26}$$

Покажите, что в этом случае дискретно-временная теневая эволюция выдерживает связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$, нрн которой превращается в

$$q_1 = -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon + h)} (1 + h\alpha^{(1)}) \frac{1}{1 - \varepsilon\alpha}, \tag{19.4.27a}$$

$$\widetilde{q}_1 = -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon + h)} \frac{1 + h\alpha}{1 - \varepsilon\alpha}, \tag{19.4.27b}$$

$$(1 + h\widetilde{\alpha}^{(1)}) \frac{1}{1 - \varepsilon\widetilde{\alpha}} = (1 + h\alpha) \frac{1}{1 - \varepsilon\alpha}. \tag{19.4.27c}$$

Как и в предыдущем разделе, иеясио, как доказать, что построенная дискретизация но времени теневого нотока сохраняет гамильтопову структуру $B^{\text{КП}\varepsilon}$ (15.3.12) и гамильтопнан $\bar{H}_0 = \ln(1 + \varepsilon q_0)/\varepsilon$. В картнпе с обратным временем, мы нереставляем тильды в уравнениях (19.4.7, 8), что приводит к

$$\widetilde{q}_0 b = (bq_0)^{(1)} + \alpha - \alpha^{(1)}, \tag{19.4.28}$$

$$\widetilde{q}_i A + h(\widetilde{q}_{i+1} b)^{(-1)} = A^{(i)} q_i + h b^{(i+1)} q_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.4.29}$$

Упражнение 19.4.30. (i) Покажите, что, носле регуляризации, уравнения (19.4.29) можно преобразовать к виду

$$\widetilde{q}_i b = A^{(i)} q_i c - \sum_{s>0} (-h)^s \left[b^{(i+1)} q_{i+s}^{(1-s)} \frac{1}{c^{(-s)}} - A^{(i)} q_{i+s}^{(-s)}\right] c^{(-s)} \ldots c, \quad i \in \mathbb{Z}_+; \tag{19.4.31}$$

(ii) Покажите, что уравнения $(19.4.31)|_{i=0}$ и (19.4.28) приводят к тождеству

$$\theta - \left(c\theta \frac{1}{c}\right)^{(1)} = \alpha - \alpha^{(1)}, \quad \theta = A \sum_{s \geqslant 0} (-h)^s q_s^{(-s)} c^{(-s)} \ldots c. \tag{19.4.32}$$

Таким образом, имеем возмущение формулы (17.1.37):

$$\alpha = (1+h\alpha)\sum_{s\geqslant 0}(-h)^s q_s^{(-s)}\left(\frac{1-\varepsilon\alpha}{1+h\alpha}\right)^{(-s)}\cdots\frac{1-\varepsilon\alpha}{1+h\alpha}. \tag{19.4.33}$$

Упражнение 19.4.34. Покажите, что в случае (19.4.26) релятивистской цепочки Тоды, теневая эволюция с обратным временем выдерживает связь $\{q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1\}$, при которой поток превращается в

$$q_1 = -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+h)}\frac{1+h\alpha}{1-\varepsilon\alpha}, \tag{19.4.35a}$$

$$\widetilde{q}_1 = -\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+h)}(1+h\alpha^{(1)})\frac{1}{1-\varepsilon\alpha}, \tag{19.4.35b}$$

$$(1+h\widetilde{\alpha})\frac{1}{1-\varepsilon\widetilde{\alpha}} = (1+h\alpha^{(1)})\frac{1}{1-\varepsilon\alpha}. \tag{19.4.35c}$$

19.5 Отрицательная эволюция модифицированной цепочки Тоды

В этом разделе строится отрицательная дискретизация по времени модифицированной цепочки Тоды, совместная с факторизацией цепочки Тоды в модифицированную цепочку Тоды. Как и в случае цепочки Тоды, отрицательная эволюция оказывается изоморфной положительной.

Расписывая определяющие уравнения (19.1.13):

$$(1+h\zeta^{-1}\alpha_1)(\zeta+\widetilde{u}) = (\zeta+u)(1+h\zeta^{-1}\alpha_2), \tag{19.5.1a}$$

$$(1+h\zeta^{-1}\alpha_2)(1+\zeta^{-1}\widetilde{v}) = (1+\zeta^{-1}v)(1+h\zeta^{-1}\alpha_1), \tag{19.5.1b}$$

получаем

$$\alpha_1\widetilde{u} = u^{(1)}\alpha_2, \tag{19.5.2a}$$

$$\widetilde{u} + h\alpha_1^{(-1)} = u + h\alpha_2, \tag{19.5.2b}$$

$$\alpha_2^{(1)}\widetilde{v} = v^{(1)}\alpha_1, \tag{19.5.3a}$$

$$\widetilde{v} + h\alpha_2 = v + h\alpha_1. \tag{19.5.3b}$$

Эти 4 уравнения на 4 неизвестных $(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \alpha_1, \alpha_2)$ разбиваются на пару уравнений для $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$, скажем (19.5.2b, 3b), и пару уравнений для α_1, α_2 :

$$\alpha_1(u + h\alpha_2 - h\alpha_1^{(-1)}) = u^{(1)}\alpha_2, \tag{19.5.4a}$$

$$\alpha_2^{(1)}(v + h\alpha_1 - h\alpha_2) = v^{(1)}\alpha_1. \tag{19.5.4b}$$

Система (19.5.4) любопытна. Обозначая

$$\alpha_i = \sum_{s\geqslant 0}\alpha_{is}h^s, \quad i = 1,2, \quad \alpha_{is} \in \mathbb{Q}\langle u^{(j)}, v^{(j)}\rangle, \tag{19.5.5}$$

находим, что

$$\alpha_{10}u = u^{(1)}\alpha_{20}, \tag{19.5.6a}$$

$$\alpha_{20}^{(1)}v = v^{(1)}\alpha_{10}. \tag{19.5.6b}$$

Эта система имеет решение

$$(\alpha_{10}; \alpha_{20}) = \mathrm{const}(u^{(1)}v; vu), \tag{19.5.7}$$

с произвольной постоянной, тогда как эта постоянная должна равняться 1, если α_1 и α_2 пришли из уравнений отрицательной эволюции цепочки Тоды при помощи формул (19.1.13b), (19.2.10):

$$\alpha_1 = \varphi_1(\alpha), \quad \alpha_2 = \varphi_2(\alpha) \tag{19.5.8}$$

$$\alpha = q_1 - h\alpha q_0 + h^2\alpha\alpha^{(-1)}. \tag{19.5.9}$$

Наша стратегия такова: мы собираемся показать, что

$$b = \varphi_1(\alpha), \quad g = \varphi_2(\alpha)$$

удовлетворяет системе (19.5.4). Согласно формуле (17.7.9),

$$\varphi_1\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u^{(1)}v \end{pmatrix}, \quad \varphi_2\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v^{(-1)} \\ vu \end{pmatrix}. \tag{19.5.10}$$

Следовательно, из α-формулы (19.5.9) вытекают следующие определяющие уравнения на $b = \varphi_1(\alpha)$ и $g = \varphi_2(\alpha)$:

$$b = u^{(1)}v - hb(u+v) + h^2bb^{(-1)}, \tag{19.5.11a}$$

$$g = vu - hg(u+v^{(-1)}) + h^2gg^{(-1)}. \tag{19.5.11b}$$

Лемма 19.5.12. Элементы b и g удовлетворяют соотношениям

$$b = (u^{(1)} - hb)(v - hg), \tag{19.5.13}$$

$$g = (v - hg)(u - hb^{(-1)}). \tag{19.5.14}$$

Считая лемму доказанной, мы можем быстро доказать, что b и g удовлетворяют системе (19.5.4) с $\alpha_1 = b$ и $\alpha_2 = g$. Во-первых, вычитая формулу (19.5.13) из формулы (19.5.11a), получаем

$$b(u - hb^{(-1)}) = (u^{(1)} - hb)g \quad \Rightarrow$$

$$b(u - hb^{(-1)} + hg) = u^{(1)}g,$$

что совпадает с (19.5.4a). Во-вторых, вычитая формулу (19.5.14) из (19.5.11b), получаем

$$g(v^{(-1)} - hg^{(-1)}) = (v - hg)b^{(-1)} \quad \Rightarrow$$

$$g(v^{(-1)} - hg^{(-1)} + hb^{(-1)}) = vb^{(-1)},$$

что эквивалентно формуле (19.5.4b).

Доказательство формулы (19.5.13). Примем эту формулу за *новое определение* g :

$$g = -h^{-1}\Big(-v + \frac{1}{u^{(1)} - hb} b\Big), \tag{19.5.15}$$

где b определяется формулой (19.5.11a), и проверим, что при таком определении:
1) g *регулярна* по h;
2) g удовлетворяет *другому определению*, а именно формуле (19.5.11b).

Итак, из формулы для b (19.5.11a) имеем

$$\begin{gathered} b = u^{(1)}v[1 - h(u+v)] + O(h^2) \quad \Rightarrow \\ u^{(1)} - hb = u^{(1)} - hu^{(1)}v + O(h^2) = u^{(1)}(1 - hv) + O(h^2) \quad \Rightarrow \\ v - hg = \frac{1}{u^{(1)} - hb} b = (1 + hv)\frac{1}{u^{(1)}} u^{(1)} v[1 - h(u+v)] + O(h)^2 = v(1 - hu) + O(h^2). \end{gathered}$$

Следовательно, g, определенное формулой (19.5.15) действительно регулярно по h. Для *проверки* формулы (19.5.11b), при g *определенном* по формуле (19.5.13), перепишем последнюю в виде

$$(u^{(1)} - hb)g = \frac{(u^{(1)} - hb)v - b}{h}, \tag{19.5.16}$$

а формулу (19.5.11b) перепишем в виде

$$g[1 + h(u + v^{(-1)}) - h^2 g^{(-1)}] \stackrel{?}{=} vu \tag{19.5.17a}$$

и затем умножим слева на $(u^{(1)} - hb)$:

$$\frac{(u^{(1)} - hb)v - b}{h}[1 + h(u + v^{(-1)}) - h^2 g^{(-1)}] \stackrel{?}{=} (u^{(1)} - hb)vu. \tag{19.5.17b}$$

Используя определение g (19.5.15) в виде

$$(v - hg)^{(-1)} = \frac{1}{u - hb^{(-1)}} b^{(-1)}, \tag{19.5.18}$$

формулу (19.5.17b) можно переписать, как

$$\begin{gathered} \frac{(u^{(1)} - hb)v - b}{h}\Big[1 + hu + \frac{h}{u - hb^{(-1)}} b^{(-1)}\Big] \stackrel{?}{=} (u^{(1)} - hb)vu \quad \Leftrightarrow \\ \frac{(u^{(1)} - hb)v - b}{h} hu + \frac{(u^{(1)} - hb)v - b}{h} \frac{1}{u - hb^{(-1)}} (u - hb^{(-1)} + hb^{(-1)}) \\ \stackrel{?}{=} (u^{(1)} - hb)vu \\ \Leftrightarrow \quad -hbu + [(u^{(1)} - hb)v - b] \frac{1}{u - hb^{(-1)}} u \stackrel{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \\ [(u^{(1)} - hb)v - b] \frac{1}{u - hb^{(-1)}} \stackrel{?}{=} hb \quad \Leftrightarrow \quad (u^{(1)} - hb)v - b \stackrel{?}{=} hb(u - hb^{(-1)}), \end{gathered}$$

что совпадает с определением b (19.5.11a). ∎

Доказательство формулы (19.5.14). Здесь роли b и g меняются: мы считаем g *заданным* формулой (19.5.11b), b *определеным* по формуле (19.5.14), в любой из эквивалентных форм

$$b^{(-1)} = -h^{-1}\Big(-u + \frac{1}{v-hg}g\Big), \tag{19.5.19a}$$

$$(v^{(1)} - hg^{(1)})b = \frac{[(v-hg)u-g]^{(1)}}{h}, \tag{19.5.19b}$$

$$u - hb^{(-1)} = \frac{1}{v-hg}g, \tag{19.5.19c}$$

и затем *проверяем*, что:

1) формула (19.5.19a) определяет b как *регулярный* по h элемент;
2) таким образом определеный b удовлетворяет формуле (19.5.11a).

Во-первых, из формулы для g (19.5.11b) следует

$$\begin{aligned} g &= vu[1 - h(u + v^{(-1)})] + O(h^2) \quad \Rightarrow \\ v - hg &= v(1 - hu) + O(h^2) \quad \Rightarrow \\ u - hb^{(-1)} &= \frac{1}{v-hg}g = (1 + hu)v^{-1}vu[1 - h(u + v^{(-1)})] + O(h^2) = \\ &= u(1 - hv^{(-1)}) + O(h^2), \end{aligned}$$

так что b регулярен по h. Далее, для проверки, что так определенный b удовлетворяет соотношению (19.5.11a), перепишем последнее в виде

$$b[1 + h(u+v) - h^2 b^{(-1)}] \overset{?}{=} u^{(1)}v$$

и умножим слева на $(v^{(1)} - hg^{(1)})$. Используя формулу (19.5.19b), получаем

$$\frac{[(v-hg)u-g]^{(1)}}{h}[1 + hv + h(u - hb^{(-1)})] \overset{?}{=} [(v-hg)u]^{(1)}v.$$

Согласно формуле (19.5.19c), это можно переписать как

$$\begin{aligned} \frac{[(v-hg)u-g]^{(1)}}{h}\Big[hv + 1 + \frac{h}{v-hg}g\Big] &\overset{?}{=} [(v-hg)u]^{(1)}v \quad \Leftrightarrow \\ [(v-hg)u-g]^{(1)}v + \frac{[(v-hg)u-g]^{(1)}}{h}\frac{1}{v-hg}(v - hg + hg) &\overset{?}{=} [(v-hg)u]^{(1)}v \quad \Leftrightarrow \\ -hg^{(1)}v + [(v-hg)u-g]^{(1)}\frac{1}{v-hg}v &\overset{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \\ [(v-hg)u-g]^{(1)} &\overset{?}{=} hg^{(1)}(v-hg) \quad \Leftrightarrow \\ (v-hg)u - g &\overset{?}{=} hg(v^{(-1)} - hg^{(-1)}), \end{aligned}$$

и это совпадает с формулой для g (19.5.11b). ∎

Упражнение 19.5.20. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{h} = vu - uv^{(-1)} + O(h), \tag{19.5.21a}$$

$$\frac{\widetilde{v} - v}{h} = u^{(1)}v - vu + O(h), \tag{19.5.21b}$$

в согласии с формулами (9.9.36).

Обратимся теперь к картине с обратным временем. Переставляя тильды в формулах (19.5.1–3), получаем

$$(1 + h\zeta^{-1}\alpha_1)(\zeta + u) = (\zeta + \widetilde{u})(1 + h\zeta^{-1}\alpha_2), \tag{19.5.22a}$$

$$(1 + h\zeta^{-1}\alpha_2)(1 + \zeta^{-1}v) = (1 + \zeta^{-1}\widetilde{v})(1 + h\zeta^{-1}\alpha_1), \tag{19.5.22b}$$

$$\alpha_1 u = \widetilde{u}^{(1)}\alpha_2, \tag{19.5.23a}$$

$$u + h\alpha_1^{(-1)} = \widetilde{u} + h\alpha_2, \tag{19.5.23b}$$

$$\alpha_2^{(1)} v = \widetilde{v}^{(1)}\alpha_1, \tag{19.5.24a}$$

$$u + h\alpha_2 = \widetilde{v} + h\alpha_1. \tag{19.5.24b}$$

На α_1 и α_2 получаются уравнения

$$\alpha_1 u = [u^{(1)} + h\alpha_1 - h\alpha_2^{(1)}]\alpha_2, \tag{19.5.25a}$$

$$\alpha_2^{(1)} v = [v^{(1)} + h\alpha_2^{(1)} - h\alpha_1^{(1)}]\alpha_1. \tag{19.5.25b}$$

С другой стороны, из уравнения для α (19.2.18):

$$\alpha = q_1 - hq_0^{(1)}\alpha + h^2\alpha^{(1)}\alpha, \tag{19.5.26}$$

вытекает, для $b = \varphi_1(\alpha)$, и $g = \varphi_2(\alpha)$:

$$b = u^{(1)}v - h(u + v)^{(1)}b + h^2 b^{(1)}b, \tag{19.5.27a}$$

$$g = vu - h(u^{(1)} + v)g + h^2 g^{(1)}g. \tag{19.5.27b}$$

Упражнение 19.5.28. (i) Покажите, что

$$g = (v - hb)(u - hg), \tag{19.5.29a}$$

$$b = (u - hg)^{(1)}(v - hb); \tag{19.5.29b}$$

(ii) Покажите, что $\alpha_1 = b$ и $\alpha_2 = g$ удовлетворяют формулам (19.5.25).

Согласно Теореме 19.2.19, в переменных цепочки Тоды прямая по времени отрицательная эволюция изоморфна обратной положительной.

Следствие 19.5.30. Аналогичное заключение применимо к модифицированной цепочке Тоды.

Доказательство. Прямая по времени отрицательная эволюция модифицированной цепочки Тоды задается формулами (19.5.2b, 3b):

$$\widetilde{u} = u + h\alpha_2 - h\alpha_1^{(-1)}, \tag{19.5.31a}$$

$$\widetilde{v} = v + h(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{19.5.31b}$$

$$\alpha_1 = \varphi_1(\alpha), \quad \alpha_2 = \varphi_2(\alpha), \quad \alpha = q_1 - h\alpha q_0 + h^2\alpha\alpha^{(-1)}. \tag{19.5.31c}$$

Обратная по времени положительная эволюция модифицированной цепочки Тоды задается формулами (17.7.72a, 73):

$$\widetilde{u} = u^{(1)} + A_1 - A_2^{(1)}, \tag{19.5.32a}$$

$$\widetilde{v} = v^{(1)} + (A_2 - A_1)^{(1)}, \tag{19.5.32b}$$

$$A_1 = \varphi_1(A), \quad A_2 = \varphi_2(A), \quad A = q_0 - h[q_1(1 + hA)^{-1}]^{(-1)}, \tag{19.5.32c}$$

Согласно формуле (19.2.22) имеем

$$A = q_0 - h\alpha^{(-1)}. \tag{19.5.33}$$

Применяя к этой формуле гомоморфизмы φ_1, φ_2 и используя соотношения (19.5.10), находим

$$A_1 = u + v - h\alpha_1^{(-1)}, \tag{19.5.34a}$$

$$A_2 = u + v^{(-1)} - h\alpha_2^{(-1)}. \tag{19.5.34b}$$

Следовательно,

$$A_1 - A_2^{(1)} = u - u^{(1)} + h\alpha_2 - h\alpha_1^{(-1)}, \tag{19.5.35a}$$

$$(A_2 - A_1)^{(1)} = v - v^{(1)} + h(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{19.5.35b}$$

Подставляя эти соотношения в формулы (19.5.32) для обратной положительной эволюции, получаем

$$\widetilde{u} = u^{(1)} + u - u^{(1)} + h\alpha_2 - h\alpha_1^{(-1)} = u + h\alpha_2 - h\alpha_1^{(-1)},$$
$$\widetilde{v} = v^{(1)} + v - v^{(1)} + h(\alpha_1 - \alpha_2) = v + h(\alpha_1 - \alpha_2),$$

что совпадает с формулами (19.5.31) для прямой отрицательной эволюции. ▮

Меняя направление времени в этом Следствии, находим, что вторая пара временных дискретизаций модифицированной цепочки Тоды — обратная отрицательная и прямая положительная эволюции — также изоморфны.

19.6 Отрицательная эволюция системы Вольтерра

В этом разделе мы дискретизируем по времени отрицательную эволюцию системы Вольтерра.

Система Вольтерра

$$\partial_t(u) = u^{(1)}u - uu^{(-1)} \tag{19.6.1}$$

является первым $n = 1$-потоком иерархии

$$L_t = [P_+, L] = [L, P_-], \quad P = L^{2n}, \quad L = \zeta + \zeta^{-1}u. \tag{19.6.2}$$

Таким образом, это есть случай минимального размера (=2) щели и максимального обрыва в общем щелевом операторе Лакса типа КП

$$L = \zeta\Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} \zeta^{-\Gamma_i} q_i\Big). \tag{19.6.3}$$

Мы уделим внимание этому устрашающему оператору Лакса позже, в §19.10. В этом разделе мы дискретизируем представление Лакса для отрицательной эволюции

$$L_t = [L, (L^2)_-| = [L, \zeta^{-2}u^{(1)}u] \tag{19.6.4}$$

уравнения Вольтерра (19.6.1).

Расписывая анзац (19.1.14)

$$(1+h\zeta^{-2}\alpha)\widetilde{L} = (1+h\zeta^{-2}\alpha)(\zeta+\zeta^{-1}\widetilde{u}) = (\zeta+\zeta^{-1}u)(1+h\zeta^{-2}\alpha) = L(1+h\zeta^{-2}\alpha), \quad (19.6.5)$$

получаем

$$\widetilde{u} + h\alpha^{(-1)} = u + h\alpha, \quad (19.6.6a)$$

$$\alpha^{(1)}\widetilde{u} = u^{(2)}\alpha. \quad (19.6.6b)$$

Исключая $\widetilde{u}$, получаем уравнение для α

$$\alpha^{(1)}(u + h\alpha - h\alpha^{(-1)}) = u^{(2)}\alpha. \quad (19.6.7)$$

Его можно переписать в виде

$$(\widehat{L}_{\alpha^{(1)}} - \widehat{R}_\alpha\Delta^2)(u - h\alpha^{(-1)}) = 0. \quad (19.6.8)$$

Следовательно, нам необходимо определить ядро оператора $\widehat{L}_{\alpha^{(1)}} - \widehat{R}_\alpha\Delta^2$. Прежде, чем продолжать дальше, читателю предлагается решить эту проблему.

… … … ? … … …

Это не просто и ответ не очевиден. Мы продолжим следующим образом. Расширим кольцо C_α элементом $\sqcap$ удовлетворяющим соотношению

$$\sqcap^{(2)} = \sqcap\frac{1}{\alpha} \quad (19.6.9)$$

и всем его следствиям. Положим

$$X = \frac{1}{\sqcap^{(1)}}\sqcap. \quad (19.6.10)$$

Тогда

$$X^{(2)}\alpha = \frac{1}{\sqcap^{(3)}}\sqcap^{(2)}\alpha \overset{(19.6.9)}{=} \left[\sqcap^{(1)}\frac{1}{\alpha^{(1)}}\right]^{-1}\sqcap = \alpha^{(1)}\frac{1}{\sqcap^{(1)}}\sqcap = \alpha^{(1)}X \quad \Rightarrow \quad (19.6.11)$$

$$X \in \operatorname{Ker}(\widehat{L}_{\alpha^{(1)}} - \widehat{R}_\alpha\Delta^2). \quad (19.6.12)$$

Следовательно, α–уравнение (19.6.8) имеет решение

$$u - h\alpha^{(-1)} = X. \quad (19.6.13)$$

Далее,

$$X^{(1)}X = \left(\frac{1}{\sqcap^{(1)}}\sqcap\right)^{(1)}\frac{1}{\sqcap^{(1)}}\sqcap = \frac{1}{\sqcap^{(2)}}\sqcap \overset{(19.6.9)}{=} \alpha \quad \Rightarrow \quad (19.6.14)$$

$$[u - h\alpha^{(-1)}]^{(1)}[u - h\alpha^{(-1)}] = \alpha, \quad (19.6.15)$$

я можно остановяться. Мы получили решением уравнения для α (19.6.7) с правильным разложением по h

$$\alpha = u^{(1)}u + O(h). \quad (19.6.16)$$

Пара формул для $\sqcap$ и X (19.6.9, 10) кажется взятой с потолка. Они могут быть “объяснены” следующим образом. Любой элемент $X \in \operatorname{Ker}(\widehat{L}_{\alpha^{(1)}} - \widehat{R}_\alpha\Delta^2)$ удовлетворяет уравнениям

$$\alpha^{(1)}X = X^{(2)}\alpha \quad \Leftrightarrow \quad (19.6.17)$$

$$X = \frac{1}{\alpha^{(1)}}X^{(2)}\alpha. \quad (19.6.18)$$

Итерируя последнее уравнение, получаем

$$X=\frac{1}{\alpha^{(1)}}\frac{1}{\alpha^{(3)}}X^{(4)}\alpha^{(2)}\alpha=\frac{1}{\alpha^{(1)}}\frac{1}{\alpha^{(3)}}\frac{1}{\alpha^{(5)}}X^{(6)}\alpha^{(4)}\alpha^{(2)}\alpha=\cdots=$$
$$=[(\alpha^{(2n)}\dots\alpha)^{(1)}]^{-1}X^{(2n+2)}[\alpha^{(2n)}\dots\alpha]=[\sqcap_n^{(1)}]^{-1}X^{(2n+2)}\sqcap_n, \tag{19.6.19}$$

где

$$\sqcap_n=\alpha^{2n}\dots\alpha. \tag{19.6.20}$$

Переходя к пределу $n\to\infty$, и полагая $X^{(\infty)}=1$, получаем

$$X=\frac{1}{\sqcap^{(1)}}\sqcap, \tag{19.6.21}$$

то есть, формулу (19.6.10). Конечно, $\sqcap$ является расходящимся бесконечным произведением

$$\sqcap=\dots\alpha^{(2)}\alpha, \tag{19.6.22}$$

не являющимся законным объектом. Однако, из определения (19.6.20) имеем

$$\sqcap_n^{(2)}=\sqcap_{n+1}\frac{1}{\alpha}, \tag{19.6.23}$$

то есть $\sqcap$ наследует свойство

$$\sqcap^{(2)}=\sqcap\frac{1}{\alpha}, \tag{19.6.24}$$

что совпадает с (19.6.9). Мы теперь можем забыть о сомнительном происхождении $\sqcap$, и трактовать его не как расходящееся произведение, а просто как самостоятельный объект, связанный с α по формуле (19.6.9). Такие объекты появляются всегда при работе с щелевыми операторами Лакса (19.6.3). Мы еще раз встретимся с ними в §§19.9,19.10.

Упражнение 19.6.25. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{u}-u}{h}=u^{(1)}u-uu^{(-1)}+O(h), \tag{19.6.26}$$

в согласии с формулой (19.6.1).

В картине с обратным временем, мы переставляем тильды в формулах (19.6.5, 6):

$$(1+h\zeta^{-2}\alpha)(\zeta+\zeta^{-1}u)=(\zeta+\zeta^{-1}\widetilde{u})(1+h\zeta^{-2}\alpha), \tag{19.6.27}$$
$$u+h\alpha^{(-1)}=\widetilde{u}+h\alpha, \tag{19.6.28a}$$
$$\alpha^{(1)}u=\widetilde{u}^{(2)}\alpha. \tag{19.6.28b}$$

Таким образом, для α имеем уравнение

$$\alpha^{(1)}u=[u^{(2)}+h\alpha^{(1)}-h\alpha^{(2)}]\alpha, \tag{19.6.29}$$

которое можно переписать в виде

$$(\widehat{L}_{\alpha^{(1)}}-\widehat{R}_\alpha\Delta^2)(u-h\alpha)=0. \tag{19.6.30}$$

Это по существу совпадает с прямым случаем (19.6.8). Действуя, как раньше, получаем

$$(u-h\alpha)^{(1)}(u-h\alpha)=\alpha. \tag{19.6.31}$$

19.7 Положительная эволюция системы Вольтерра

Для системы Вольтерра в этом разделе строятся дискретизации по времени в положительном эволюционном направлении и затем доказывается, что они изоморфны дискретизациям, построенным в предыдущем разделе, в отрицательном направлении.

Для дискретизации системы Вольтерра

$$\partial_t(u) = u^{(1)}u - uu^{(-1)} \tag{19.7.1}$$

в ее положительном представлении Лакса

$$\partial_t(L) = [(L^2)_+, L], \quad L = \zeta + \zeta^{-1}u, \quad (L^2)_+ = \zeta^2 + u + u^{(-1)}, \tag{19.7.2}$$

возьмем анзац

$$[1 + h(\zeta^2 + \alpha)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta^2 + \alpha)]. \tag{19.7.3}$$

Расписывая, получаем

$$\begin{aligned}&[1 + h(\zeta^2 + \alpha)](\zeta + \zeta^{-1}\widetilde{u}) = \zeta + \zeta^{-1}\widetilde{u} + h\zeta^3 + h\zeta\alpha^{(-1)} + h\zeta\widetilde{u} + h\zeta^{-1}\alpha^{(1)}\widetilde{u} = \\ &= (\zeta + \zeta^{-1}u)[1 + h(\zeta^2 + \alpha)] = \zeta + \zeta^{-1}u + h\zeta^3 + h\zeta\alpha + h\zeta u^{(-2)} + h\zeta^{-1}u\alpha,\end{aligned}$$

что дает систему

$$\alpha^{(-1)} + \widetilde{u} = \alpha + u^{(-2)}, \tag{19.7.4a}$$

$$(1 + h\alpha^{(1)})\widetilde{u} = u(1 + h\alpha). \tag{19.7.4b}$$

Исключая $\widetilde{u}$, находим уравнение на α

$$(1 + h\alpha^{(1)})(u^{(-2)} + \alpha - \alpha^{(-1)}) = u(1 + h\alpha), \tag{19.7.5}$$

которое можно переписать в виде

$$[\widehat{L}_{1+h\alpha^{(1)}}\Delta^{-2} - \widehat{R}_{1+h\alpha}]\Big(u - \frac{1 + h\alpha^{(1)}}{h}\Big) = 0. \tag{19.7.6}$$

Таким образом, необходимо определить

$$\operatorname{Ker}(\widehat{L}_{a^{(1)}}\Delta^{-2} - \widehat{R}_a), \quad a = 1 + h\alpha. \tag{19.7.7}$$

Действуя, как в предыдущем разделе, выберем элемент $Y \in \operatorname{Ker}(\widehat{L}_{a^{(1)}}\Delta^{-2} - \widehat{R}_a)$. Такой Y удовлетворяет уравнению

$$a^{(1)}Y^{(-2)} = Ya. \tag{19.7.8}$$

Его можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Y &= a^{(1)}Y^{(-2)}\frac{1}{a} = a^{(1)}a^{(-1)}Y^{(-4)}\frac{1}{\alpha^{(-2)}}\frac{1}{a} = \dots = \\ &= [aa^{(-2)}\dots a^{(-2n)}]^{(1)}Y^{(-2n-2)}[aa^{(-2)}\dots a^{(-2n)}]^{-1}.\end{aligned} \tag{19.7.9}$$

Это подсказывает рассмотреть расширение кольца C_a элементом $\sqcap$, таким что

$$\sqcap^{(-2)} = \frac{1}{a}\sqcap, \tag{19.7.10}$$

и ввести

$$X = \sqcap^{(1)}\frac{1}{\sqcap}. \tag{19.7.11}$$

Тогда

$$a^{(1)}X^{(-2)} = a^{(1)}\sqcap^{(-1)}\frac{1}{\sqcap^{(-2)}} \overset{(19.7.10)}{=} \sqcap^{(1)}\frac{1}{\sqcap}a = Xa, \tag{19.7.12}$$

откуда $X \in \mathrm{Ker}(\widehat{L}_{a^{(1)}}\Delta^{-2} - \widehat{R}_a)$. Следовательно, мы получаем решение α–уравнения (19.7.6) в виде

$$u - \frac{1+h\alpha^{(1)}}{h} = \mathrm{const}\,X. \tag{19.7.13}$$

Так как

$$X^{(1)}X = \Big(\sqcap^{(2)}\frac{1}{\sqcap^{(1)}}\Big)\Big(\sqcap^{(1)}\frac{1}{\sqcap}\Big) = \sqcap^{(2)}\frac{1}{\sqcap} = a^{(2)} = 1 + h\alpha^{(2)}, \tag{19.7.14}$$

то из формулы (19.7.13) получаем

$$\Big[u - \frac{1+h\alpha^{(1)}}{h}\Big]^{(1)}\Big(u - \frac{1+h\alpha^{(1)}}{h}\Big) = (\mathrm{const})^2(1+h\alpha^{(2)}). \tag{19.7.15}$$

Выбирая $\mathrm{const} = -h^{-1}$, находим

$$(1+h\alpha^{(2)} - hu^{(1)})(1+h\alpha^{(1)} - hu) = 1 + h\alpha^{(2)} \quad \Leftrightarrow \tag{19.7.16}$$

$$1 + h\alpha^{(2)} + h\alpha^{(1)} - hu^{(1)} - hu + h^2(\alpha^{(2)} - u^{(1)})(\alpha^{(1)} - u) = 1 + h\alpha^{(2)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{(1)} = u^{(1)} + u - h(\alpha^{(2)} - u^{(1)})(\alpha^{(1)} - u) \quad \Leftrightarrow \tag{19.7.17}$$

$$\alpha = u + u^{(-1)} - h(\alpha^{(1)} - u)(\alpha - u^{(-1)}). \tag{19.7.18}$$

Упражнение 19.7.19. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{-h} = u^{(1)}u - uu^{(-1)} + O(h), \tag{19.7.20}$$

в согласии с формулой (19.7.1).

В картине с обратным временем, переставляя тильды в уравнении (19.7.3, 4), находим

$$[1 + h(\zeta^2 + \alpha)]L = \widetilde{L}[1 + h(\zeta^2 + \alpha)], \tag{19.7.21}$$

$$\alpha^{(-1)} + u = \alpha + \widetilde{u}^{(-2)}, \tag{19.7.22a}$$

$$(1 + h\alpha^{(1)})u = \widetilde{u}(1 + h\alpha). \tag{19.7.22b}$$

Это приводит к уравнению на α

$$(1 + h\alpha^{(1)})u = (u^{(2)} + \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})(1 + h\alpha), \tag{19.7.23}$$

которое можно переписать в виде

$$[\widehat{L}_{1+h\alpha^{(1)}}\Delta^{-2} - \widehat{R}_{1+h\alpha}]\Big(-u^{(2)} + \frac{1+h\alpha^{(2)}}{h}\Big) = 0, \tag{19.7.24}$$

почти идентичному с уравнением (19.7.6). Следовательно, мы сразу можем выписать его решение

$$\left(-u^{(2)}+\frac{1+h\alpha^{(2)}}{h}\right)^{(1)}\left(-u^{(2)}+\frac{1+h\alpha^{(2)}}{h}\right)=\frac{1}{h^2}(1+h\alpha^{(2)}) \quad \Leftrightarrow \tag{19.7.25}$$

$$(1+h\alpha^{(1)}-hu^{(1)})(1+h\alpha-hu)=1+h\alpha \quad \Leftrightarrow \tag{19.7.26}$$

$$\alpha^{(1)}=u+u^{(1)}-h(\alpha^{(1)}-u^{(1)})(\alpha-u) \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha=u+u^{(-1)}-h(\alpha-u)(\alpha^{(-1)}-u^{(-1)}). \tag{19.7.27}$$

Согласно Теореме 19.2.19 и Следствию 19.5.30, для обоих случаев цепочки Тоды и модифицированной цепочки Тоды, прямая по времени отрицательная эволюция изоморфна обратной положительной. Аналогичное заключение применимо к случаю Вольтерра.

Утверждение 19.7.28. Для системы Вольтерра, обратная положительная эволюция (19.7.22a, 27):

$$\widetilde{u}=u^{(2)}+\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}, \tag{19.7.29}$$

$$\alpha=u+u^{(-1)}-h(\alpha-u)(\alpha-u)^{(-1)}, \tag{19.7.30}$$

изоморфна прямой отрицательной эволюции (19.6.6a, 15):

$$\widetilde{u}=u+hA-hA^{(-1)}, \tag{19.7.31}$$

$$A=(u^{(1)}-hA)(u-hA^{(-1)}). \tag{19.7.32}$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$\alpha=u+u^{(-1)}-hA^{(-2)}. \tag{19.7.33}$$

Считаем A заданным формулой (19.7.32), и *проверяем*, что элемент α *определенный* по формуле (19.7.33), удовлетворяет соотношению (19.7.30). Итак, из формулы (19.7.33) находим

$$\alpha-u-u^{(-1)}=-hA^{(-2)}, \tag{19.7.34a}$$

$$\alpha-u=u^{(-1)}-hA^{(-2)}, \quad (\alpha-u)^{(-1)}=u^{(-2)}-hA^{(-3)}. \tag{19.7.34b}$$

Подставляя эти соотношения в формулу (19.7.30), получаем

$$-hA^{(-2)} \overset{?}{=} -h(u^{(-1)}-hA^{(-2)})(u^{(-2)}-hA^{(-3)}), \tag{19.7.35}$$

что эквивалентно уравнению для A (19.7.32).

Далее, формула (19.7.29) превращается в

$$\widetilde{u}=u^{(2)}+\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}=u^{(2)}+u^{(1)}+u-hA^{(-1)}-(u^{(2)}+u^{(1)}-hA)=u-hA^{(-1)}+hA,$$

что совпадает с уравнением для $\widetilde{u}$ (19.7.31). ▮

Обращая направление времени в Утверждении 19.7.28, устанавливаем изоморфизм второй пары временных дискретизаций системы Вольтерра: обратной отрицательной и прямой положительной эволюций. К этому моменту мы уже трижды обнаружили такой положительно-отрицательный изоморфизм, что конечно, не может быть случайностью. Мы рассмотрим этот вопрос в §19.11.

19.8 Система Вольтерра с точки зрения цепочки Тоды

Система Вольтерра имеет многочисленные связи с цепочкой Тоды. В этом разделе исследуется одна из них и доказывается, что она совместна с построенными ранее дискретизациями по времени для обоих систем.

Представление Лакса системы Вольтерра

$$\partial_t(L) = [(L^2)_+, L], \quad L = \zeta + \zeta^{-1}u \tag{19.8.1}$$

показывает, что соответствующая иерархии

$$\partial_P(L) = [(L^{2n})_+, L], \quad L = \zeta + \zeta^{-1}u, \tag{19.8.2}$$

является подиерархией цепочки Тоды, выделенной условием

$$\{q_0 = 0\}: \tag{19.8.3}$$

$$\partial_P(\bar{L}) = [(\bar{L}^{2n})_+, \bar{L}], \quad \bar{L} = \zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1. \tag{19.8.4}$$

Упражнение 19.8.5. Проверьте, что иерархия (19.8.4) выдерживает связь (19.8.3).

Это обычный способ определения системы Вольтерра как инвариантного подмногообразия 2-го потока иерархии цепочка Тоды. (Для второго потока релятивистской цепочки Тоды подобной связи не было найдено.) Так как в этой Части С мы работаем только с *первыми* потоками, мы не будем развивать здесь эту связь. Вместо этого, рассмотрим другую.

Из уравнения (19.8.2) получаем

$$\partial_P(L^2) = [((L^2)^n)_+, L^2], \quad L^2 = \zeta^2 + (u + u^{(-1)}) + \zeta^{-2}u^{(1)}u. \tag{19.8.6}$$

Это показывает, что систем Вольтерра дает пару цепочек Тоды на удвоенной решетке $2\mathbb{Z}$:

$$\zeta^2 + (u + u^{(-1)}) + \zeta^{-2}u^{(1)}u = \zeta^2 + q_0 + \zeta^{-2}q_1, \tag{19.8.7a}$$

$$q_0 = u + u^{(-1)}, \quad q_1 = u^{(1)}u. \tag{19.8.7b}$$

(Опять, подобное свойство для релятивистской цепочки Тоды не было обнаружено.) При рассматриваемом в этой части подходе к дискретизации по времени, это соотношение между системой Вольтерра и цепочкой Тоды не портится:

$$\widetilde{L} = \mathcal{O}^{-1}L\mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{(L^2)} = \widetilde{L}^2 = \mathcal{O}^{-1}L^2\mathcal{O}. \tag{19.8.8}$$

Так как мы построили, независимо, временные дискретизации для обеих систем, то возникает естественный вопрос, совместны ли эти дискретизации со связью (19.8.7). Сейчас мы проверим, что это действительно так.

С учетом формулы (19.8.8), мы должны проверить, что различные определения параметра, участвующего в дискретно-временной эволюции, обычно обозначаемого через α, изоморфны.

Мы начнем со случая отрицательной эволюции, когда

$$\mathcal{O} = 1 + h\zeta^{-2}\alpha. \tag{19.8.9}$$

Для системы Вольтерра (19.6.5, 6) формула (19.6.15) дает уравнение на α

$$\alpha = [u^{(1)} - h\alpha][u - h\alpha^{(-1)}], \tag{19.8.10}$$

а для цепочки Тоды (19.2.1, 2) формула (19.2.10) дает α–уравнение

$$\alpha = q_1 - h\alpha q_0 + h^2\alpha\alpha^{(-2)}. \tag{19.8.11}$$

В переменных u (19.8.7b), это уравнение превращается в

$$\alpha = u^{(1)}u - h\alpha(u + u^{(-1)}) + h^2\alpha\alpha^{(-2)}. \tag{19.8.12}$$

Утверждение 19.8.13. Формулы (19.8.10) и (19.8.12) изоморфны.

Доказательство. Каждая формула определяет единственный элемент кольца $C_u[[h]]$. Достаточно, следовательно, проверить, что формула (19.8.12) *следует из* формулы (19.8.10).

Идея проверки такова: интерпретируем формулу (19.8.10), как определение действия Δ^{-1} на α :

$$\alpha^{(-1)} = \frac{1}{h}\Big[u - \frac{1}{u^{(1)} - h\alpha}\alpha\Big], \tag{19.8.14}$$

и аналогично, пусть формула (19.8.12) определяет действие Δ^{-2} на α :

$$\alpha^{(-2)} = \frac{1}{h^2\alpha}[\alpha - u^{(1)}u + h\alpha(u + u^{(-1)})|. \tag{19.8.15}$$

Следовательно, чтобы *получить* формулу (19.8.15) из формулы (19.8.14), нужно просто проитерировать последнюю:

$$\begin{aligned} \alpha^{(-2)} = \Delta^{-1}(\alpha^{(-1)}) = \Delta^{-1}\Big(\frac{1}{h}\Big[u - \frac{1}{u^{(1)} - h\alpha}\alpha\Big]\Big) = \\ = \frac{1}{h}\Big[u^{(-1)} - \frac{1}{u - h\alpha^{(-1)}}\alpha^{(-1)}\Big] \overset{(19.8.10,\ 14)}{=} \\ = \frac{1}{h}\Big\{u^{(-1)} - \frac{1}{\alpha}(u^{(1)} - h\alpha)\frac{1}{h}\Big[u - \frac{1}{u^{(1)} - h\alpha}\alpha\Big]\Big\} = \frac{1}{h^2\alpha}\{h\alpha u^{(-1)} - (u^{(1)} - h\alpha)u + \alpha\}, \end{aligned}$$

что совпадает с (19.8.15). ▮

Обратная отрицательная эволюция: для системы Вольтерра (19.6.27, 28) имеем α–уравнение (19.6.31)

$$\alpha = (u^{(1)} - h\alpha^{(1)})(u - h\alpha), \tag{19.8.16}$$

а цепочка Тоды (19.2.13, 14) имеет α–уравнение (19.2.18)

$$\alpha = q_1 - hq_0^{(2)}\alpha + h^2\alpha^{(2)}\alpha, \tag{19.8.17}$$

которое, с учетом формулы (19.8.7b) записывается в виде

$$\alpha = u^{(1)}u - h(u^{(2)} + u^{(1)})\alpha + h^2\alpha^{(2)}\alpha. \tag{19.8.18}$$

Упражнение 19.8.19. Покажите, что формулы (19.8.16) и (19.8.18) эквивалентны.

Далее, случай положительной эволюции. Система Вольтерра (19.7.3, 4) имеет α–уравнение (19.7.18):

$$\alpha = u + u^{(-1)} - h(\alpha^{(1)} - u)(\alpha - u^{(-1)}), \tag{19.8.20}$$

а цепочка Тоды (16.23–25) имеет α–уравнение (17.1.21):

$$\alpha = q_0 - \frac{h}{1 + h\alpha^{(2)}} q_1, \tag{19.8.21}$$

которое, с учетом формулы (19.8.7b), принимает вид

$$\alpha = u + u^{(-1)} - \frac{h}{1 + h\alpha^{(2)}} u^{(1)} u. \tag{19.8.22}$$

Упражнение 19.8.23. Покажите, что уравнения (19.8.20) и (19.8.22) изоморфны.

В картине с обратным временем, система Вольтерра (19.7.21, 22) имеет α–уравнение (19.7.27):

$$\alpha = u + u^{(-1)} - h(\alpha - u)(\alpha^{(-1)} - u^{(-1)}), \tag{19.8.24}$$

а цепочка Тоды (19.2.20) имеет α–уравнение (17.1.36):

$$\alpha = q_0 - q_1^{(-2)} \frac{h}{1 + h\alpha^{(-2)}}, \tag{19.8.25}$$

которое, с учетом формулы (19.8.7b), принимает вид

$$\alpha = u + u^{(-1)} - u^{(-1)} u^{(-2)} \frac{h}{1 + h\alpha^{(-2)}}. \tag{19.8.26}$$

Упражнение 19.8.27. Покажите, что уравнения (19.8.24) и (19.8.26) изоморфны.

19.9 Обобщенные системы Вольтерра

Представление Лакса системы Вольтерра основано на операторе Лакса $L = \zeta(1 + \zeta^{-2}u)$. В этом разделе строится дискретизация по времени семейства обобщенных систем Вольтерра, основанных на операторе Лакса $L = \zeta(1 + \zeta^{-\Gamma}u)$, при произвольных $\Gamma \in 1 + \mathbb{N}$.

В §9.8 мы обсуждали иерархию

$$\partial_P(L) = [P_+, L], \quad P = L^{\Gamma n}, \quad L = \zeta(1 + \zeta^{-\Gamma}u), \tag{19.9.1}$$

которая является обобщением случая $\Gamma = 2$, отвечающего за иерархию Вольтерра. Для общего Γ, первый поток иерархии (19.9.1) задается формулой (9.8.32):

$$\partial_t(u) = (u^{(1)} + \ldots u^{(\Gamma-1)})u - u(u^{(-1)} + \cdots + u^{(1-\Gamma)}). \tag{19.9.2}$$

Зададимся целью дискретизировать этот поток. Так как

$$(L^{\Gamma})_+ = [(\zeta + \zeta^{1-\Gamma}u)^{\Gamma}]_+ = \zeta^{\Gamma} + \bar{p}_0, \tag{19.9.3a}$$

$$\bar{p}_0 = \sum_{\alpha+\beta=\Gamma-1} \zeta^{\alpha}(\zeta^{1-\Gamma}u)\zeta^{\beta} = \sum_{\beta=0}^{\Gamma-1} \zeta^{-\beta}u\zeta^{\beta} = \sum_{\beta=0}^{\Gamma-1} u^{(-\beta)} = u + \cdots + u^{(1-\Gamma)}, \tag{19.9.3b}$$

то рассмотрим следующий анзац для дискретизации по времени:

$$[1 + h(\zeta^\Gamma + \alpha)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta^\Gamma + \alpha)]. \tag{19.9.4}$$

Разворачивая, находим

$$\begin{aligned}&[1 + h(\zeta^\Gamma + \alpha)]\zeta(1 + \zeta^{-\Gamma}\widetilde{u}) = \zeta\{1 + h\alpha^{(-1)} + \zeta^{-\Gamma}[1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}]\widetilde{u} + h\zeta^\Gamma + h\widetilde{u}\} = \\ &= \zeta(1 + \zeta^{-\Gamma}u)[(1 + h\alpha) + h\zeta^\Gamma] = \zeta\{1 + h\alpha + \zeta^{-\Gamma}u(1 + h\alpha) + h\zeta^\Gamma + hu^{(-\Gamma)}\},\end{aligned}$$

что эквивалентно системе

$$\alpha^{(-1)} + \widetilde{u} = \alpha + u^{(-\Gamma)}, \tag{19.9.5a}$$

$$[1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}]\widetilde{u} = u(1 + h\alpha). \tag{19.9.5b}$$

Исключая $\widetilde{u}$, получаем α–уравнение

$$[1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}](\alpha - \alpha^{(-1)} + u^{(-\Gamma)}) = u(1 + h\alpha). \tag{19.9.6}$$

Его можно преобразовать к виду

$$[\widehat{L}_{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}}\Delta^{-\Gamma} - \widehat{R}_{1+h\alpha}]\Big(u - \frac{1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}}{h}\Big) = 0. \tag{19.9.7}$$

Таким образом, следует проанализировать ядро оператора

$$\widehat{L}_{a^{(\Gamma-1)}}\Delta^\Gamma - \widehat{R}_a, \quad a = 1 + h\alpha. \tag{19.9.8}$$

Любой элемент Y в этом ядре удовлетворяет уравнению

$$a^{(\Gamma-1)}Y^{(-\Gamma)} = Ya, \tag{19.9.9}$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned}Y &= a^{(\Gamma-1)}Y^{(-\Gamma)}\frac{1}{a} = a^{(\Gamma-1)}a^{(-1)}Y^{(-2\Gamma)}\frac{1}{a^{(-\Gamma)}}\frac{1}{a} = \dots = \\ &= (\Delta^{\Gamma-1}[aa^{(-\Gamma)}\dots a^{(-n\Gamma)}|)Y^{(-n\Gamma-\Gamma)}|aa^{(-\Gamma)}\dots a^{(-n\Gamma)}]^{-1}.\end{aligned} \tag{19.9.10}$$

Это подсказывает введение нового объекта ⊓, удовлетворяющего соотношеняю

$$\sqcap^{(\Gamma)} = a^{(\Gamma)}\sqcap, \quad \sqcap^{(-\Gamma)} = \frac{1}{a}\sqcap. \tag{19.9.11}$$

Положим

$$X = \sqcap^{(\Gamma-1)}\frac{1}{\sqcap}, \tag{19.9.12}$$

тогда

$$a^{(\Gamma-1)}X^{(-\Gamma)} = a^{(\Gamma-1)}\sqcap^{(-1)}\frac{1}{\sqcap^{(-\Gamma)}} \overset{(19.9.11)}{=} \sqcap^{(\Gamma-1)}\frac{1}{\sqcap}a = Xa. \tag{19.9.13}$$

Итак, элемент X лежит в интересующем нас ядре. Такой X дает решение α-уравнения (19.9.7):

$$1 + h\alpha^{(\Gamma-1)} - hu = X. \tag{19.9.14}$$

Обозначая

$$Z = \frac{1}{a^{(\Gamma-1)}}X = \frac{1}{1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}}X, \tag{19.9.15}$$

перепишем уравнение (19.9.14) в виде

$$Z = 1 - \frac{h}{1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}}u. \tag{19.9.16}$$

Лемма 19.9.17. Для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$Z^{(1)} \dots Z^{(r)} = \Pi \frac{1}{\Pi^{(r)}}. \tag{19.9.18}$$

Доказательство. Из формул (19.9.15, 12) следует

$$Z^{(1)} = \frac{1}{a^{(\Gamma)}} X^{(1)} = \frac{1}{a^{(\Gamma)}} \Pi^{(\Gamma)} \frac{1}{\Pi^{(1)}} = \Pi \frac{1}{\Pi^{(1)}}, \tag{19.9.19}$$

и формула (19.9.18) доказана. ▮

При $r = \Gamma$, формула (19.9.18) дает

$$Z^{(1)} \dots Z^{(\Gamma)} = \Pi \frac{1}{\Pi^{(\Gamma)}} = \Pi \frac{1}{\Pi} \frac{1}{a^{(\Gamma)}} = \frac{1}{a^{(\Gamma)}} \quad \Rightarrow \tag{19.9.20}$$

$$1 = a^{(\Gamma)} Z^{(1)} \dots Z^{(\Gamma)}. \tag{19.9.21}$$

С учетом определения Z (19.9.16), последняя формула принимает вид

$$1 = [1 + h\alpha^{(\Gamma)}| \left[1 - \frac{h}{1 + h\alpha^{(\Gamma)}} u^{(1)}\right] \dots \left[1 - \frac{h}{1 + h\alpha^{(2\Gamma-1)}} u^{(\Gamma)}\right]. \tag{19.9.22}$$

Это и есть требуемое α–уравнение. Из него следует

$$\begin{gathered} 1 = 1 + h\alpha^{(\Gamma)} - hu^{(1)} - \dots - hu^{(\Gamma)} + O(h^2) \quad \Rightarrow \\ \alpha^{(\Gamma)} = u^{(1)} + \dots u^{(\Gamma)} + O(h) \quad \Rightarrow \\ \alpha = u + u^{(-1)} + \dots + u^{(1-\Gamma)} + O(h), \end{gathered} \tag{19.9.23}$$

в согласии с формулами (19.9.3).

При $\Gamma = 2$, уравнение (19.9.22) превращается в

$$1 = [1 + h\alpha^{(2)} - hu^{(1)}] \frac{1}{1 + h\alpha^{(3)}} [1 + h\alpha^{(3)} - hu^{(2)}] \quad \Leftrightarrow \tag{19.9.24}$$

$$1 + h\alpha^{(3)} = [1 + h\alpha^{(3)} - hu^{(2)}][1 + h\alpha^{(2)} - hu^{(1)}], \tag{19.9.25}$$

что эквивалентно α–уравнению (19.7.16).

Упражнение 19.9.26. Покажите, что

$$\frac{\widetilde{u} - u}{-h} = [u + u^{(1)} + \dots + u^{(\Gamma-1)}]u - u[u + u^{(-1)} + \dots + u^{(1-\Gamma)}] + O(h), \tag{19.9.27}$$

в согласии с формулой (19.9.2).

В картине с обратным временем, мы переставляем тильды в уравнениях (19.9.4, 5):

$$[1 + h(\zeta^{\Gamma} + \alpha)]L = \widetilde{L}[1 + h(\zeta^{\Gamma} + \alpha)], \tag{19.9.28}$$

$$\alpha^{(-1)} + u = \alpha + \widetilde{u}^{(-\Gamma)}, \tag{19.9.29a}$$

$$[1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}]u = \widetilde{u}(1 + h\alpha). \tag{19.9.29b}$$

Исключая $\widetilde{u}$, находим α–уравнение

$$[1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}]u = [u^{(\Gamma)} + \alpha^{(\Gamma-1)} - \alpha^{(\Gamma)}](1 + h\alpha) \tag{19.9.30}$$

и переписываем его в виде

$$[\widehat{L}_{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}} - \widehat{R}_{1+h\alpha}\Delta^{\Gamma}]\Big(u - \frac{1+h\alpha}{h}\Big) = 0. \tag{19.9.31}$$

Чтобы найти ядро оператора

$$\mathcal{O} = \widehat{L}_{a^{(\Gamma-1)}} - \widehat{R}_a\Delta^{\Gamma}, \quad a = 1 + h\alpha, \tag{19.9.32}$$

выберем элемент Y из этого ядра:

$$a^{(\Gamma-1)}Y = Y^{(\Gamma)}a. \tag{19.9.33}$$

Это переписывается в виде

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{a^{(\Gamma-1)}}Y^{(\Gamma)}a = \frac{1}{a^{(\Gamma-1)}}\frac{1}{a^{(2\Gamma-1)}}Y^{(2\Gamma)}a^{(\Gamma)}a = \quad \ldots \quad = \\ = \{[a^{(n\Gamma)}\ldots a]^{(\Gamma-1)}\}^{-1}Y^{(n\Gamma+\Gamma)}[a^{(n\Gamma)}\ldots a]. \end{aligned} \tag{19.9.34}$$

Вводя объект $\sqcap$, удовлетворяющий соотношению

$$\sqcap^{(\Gamma)} = \sqcap\frac{1}{a}, \tag{19.9.35}$$

и полагая

$$X = \frac{1}{\sqcap^{(\Gamma-1)}}\sqcap = \Big(\frac{1}{\sqcap^{(\Gamma)}}\Big)^{(-1)}\sqcap = a^{(-1)}\frac{1}{\sqcap^{(-1)}}\sqcap, \tag{19.9.36}$$

находим

$$X^{(\Gamma)}a = \Big[a^{(-1)}\frac{1}{\sqcap^{(-1)}}\sqcap\Big]^{(\Gamma)}a = a^{(\Gamma-1)}\frac{1}{\sqcap^{(\Gamma-1)}}\sqcap = a^{(\Gamma-1)}X. \tag{19.9.37}$$

Таким образом, $X \in \mathrm{Ker}(\mathcal{O})$, и мы нашли решение α–уравнения (19.9.31):

$$1 + h(\alpha - u) = X. \tag{19.9.38}$$

Вводя

$$Z = \frac{1}{a^{(-1)}}X = \frac{1}{\sqcap^{(-1)}}\sqcap = 1 + \frac{h}{1+h\alpha^{(-1)}}(\alpha - \alpha^{(-1)} - u), \tag{19.9.39}$$

видим, что

$$Z^{(1)}\ldots Z^{(r)} = \frac{1}{\sqcap}\sqcap^{(r)}, \quad r \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \tag{19.9.40}$$

$$Z^{(1)}\ldots Z^{(\Gamma)} = \frac{1}{\sqcap}\sqcap^{(\Gamma)} = a^{-1} \quad \Rightarrow \tag{19.9.41}$$

$$\begin{gathered} 1 = aZ^{(1)}\ldots Z^{(\Gamma)} = \\ = (1+h\alpha)\Big[1 + \frac{h}{1+h\alpha}(\alpha^{(1)} - \alpha - u^{(1)})\Big]\ldots\Big[1 + \frac{h}{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}}(\alpha^{(\Gamma)} - \alpha^{(\Gamma-1)} - u^{(\Gamma)})\Big]. \end{gathered} \tag{19.9.42}$$

Это и есть искомое α–уравнение. Из него вытекает:

$$1 = 1 + h\alpha + h\sum_{s=1}^{\Gamma}[\alpha - \alpha^{(-1)} - u]^{(s)} + O(h^2) = 1 + h\alpha^{(\Gamma)} - h\sum_{s=1}^{\Gamma}u^{(s)} + O(h^2), \tag{19.9.43}$$

откуда

$$\alpha = u + u^{(-1)} + \cdots + u^{(1-\Gamma)} + O(h), \tag{19.9.44}$$

в согласии с формулой (19.9.3b).

19.10 Щелевая иерархия КП

В этом разделе мы дискретизируем по времени первый поток общей щелевой иерархии КП. Обобщенные системы Вольтерра, рассмотренные в предыдущем разделе являются минимальными редукциими общей щелевой картниы для КП.

Общая щелевая иерархия КП

$$\partial_P(L) = [P_+, L], \quad P = L^{\Gamma n}, \quad L = \zeta\Big(1 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-\Gamma(i+1)} q_i\Big), \tag{19.10.1}$$

имеет первый поток

$$\partial_t(L) = [\zeta^\Gamma + \bar{p}_0, L], \tag{19.10.2a}$$

$$\bar{p}_0 = q_0 + q_0^{(-1)} + \dots + q_0^{(1-\Gamma)}, \tag{19.10.2b}$$

$$\partial_t(q_i) = (1 - \Delta^{-\Gamma})(q_{i+1}) + \bar{p}_0^{(\Gamma i+\Gamma-1)} q_i - q_i \bar{p}_0, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.10.2c}$$

При

$$0 = q_1 = q_2 = \dots, \tag{19.10.3}$$

системы (19.10.2b,c) сводятся к обобщенной системе Вольтерра (19.9.2) на $u = q_0$. Мы дискретизируем поток (19.10.2) при помощи анзаца, который при связи (19.10.3) сводится к анзацу (19.9.4) из предыдущего раздела:

$$[1 + h(\zeta^\Gamma + \alpha)]\widetilde{L} = L[1 + h(\zeta^\Gamma + \alpha)]. \tag{19.10.4}$$

В развернутом виде, это дает

$$[(1 + h\alpha^{(-1)}) + h\zeta^\Gamma]\Big(1 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-\Gamma(i+1)} \widetilde{q}_i\Big) = \Big(1 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-\Gamma(i+1)} q_i\Big)[(1 + h\alpha) + h\zeta^\Gamma], \tag{19.10.5}$$

$$\begin{aligned} 1 + h\alpha^{(-1)} + \sum \zeta^{-\Gamma(i+1)}(1 + h\alpha^{(\Gamma i+\Gamma-1)})\widetilde{q}_i + h\zeta^\Gamma + h\sum \zeta^{-\Gamma i}\widetilde{q}_i = \\ = 1 + h\alpha + \sum \zeta^{-\Gamma(i+1)} q_i(1 + h\alpha) + h\zeta^\Gamma + h\sum \zeta^{-\Gamma i} q_i^{(-\Gamma)}, \end{aligned} \tag{19.10.6}$$

$$\alpha^{(-1)} + \widetilde{q}_0 = \alpha + q_0^{(-\Gamma)}, \tag{19.10.7}$$

$$[1 + h\alpha^{(\Gamma i+\Gamma-1)}]\widetilde{q}_i + h\widetilde{q}_{i+1} = q_i(1 + h\alpha) + hq_{i+1}^{(-\Gamma)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.10.8}$$

Система (19.10.8), как положено, недоопределена. Мы регуляризуем ее как обычно.

Утверждение 19.10.9. Регулиризованную систему (19.10.8) можно преобразовать к виду

$$\widetilde{q}_i = q_{i|0}(1 + h\alpha) - \sum_{s>0}(-h)^s[q_{i+s|s-1}^{(-\Gamma)} - q_{i+s|s}(1 + h\alpha)], \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{19.10.10}$$

где

$$q_{i|0} = \frac{1}{1 + h\alpha^{(\Gamma i+\Gamma-1)}} q_i, \tag{19.10.11a}$$

$$q_{i|s+1} = \frac{1}{1 + h\alpha^{(\Gamma(i-s)-1)}} q_{i|s}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.10.11b}$$

Доказательство. Так как формулы (19.10.8) и (19.10.10) совпадают при $i \geqslant M$ (размер регуляризации), мы проверим, что $\widetilde{q}_i$, определенные формулами (19.10.10), удовлетворяют соотношению (19.10.8). Имеем,

$$\widetilde{q}_i = q_{i|0}(1+h\alpha) - (-h)[q^{(-\Gamma)}_{i+1|0} - q_{i+1|1}(1+h\alpha)] -$$
$$-(-h)\sum_{s>0}(-h)^s[q^{(-\Gamma)}_{i+s+1|s} - q_{i+s+1|s+1}(1+h\alpha)].$$

Следовательно, по формулам (19.10.10, 11),

$$[1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}]\widetilde{q}_i = q_i(1+h\alpha)+$$
$$+h[1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}]\Big[\frac{1}{1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}}q^{(-\Gamma)}_{i+1} - \frac{1}{1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}}q_{i+1|0}(1+h\alpha)\Big]+$$
$$+h|1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}]\sum_{s>0}(-h)^s\Big[\frac{1}{1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}}q^{(-\Gamma)}_{i+1+s|s-1} -$$
$$-\frac{1}{1+h\alpha^{(\Gamma_i+\Gamma-1)}}q_{i+1+s|s}(1+h\alpha)\Big] =$$
$$= q_i(1+h\alpha) + hq^{(-\Gamma)}_{i+1} - hq_{i+1|0}(1+h\alpha) + h[q_{i+1|0}(1+h\alpha) - \widetilde{q}_{i+1}] =$$
$$= q_i(1+h\alpha) + hq^{(-\Gamma)}_{i+1} - h\widetilde{q}_{i+1}.$$ ∎

Переходя к пределу $M \to \infty$ и полагая $i = 0$ в формуле (19.10.10), находим:

$$\widetilde{q}_0 = q_{0|0}(1+h\alpha) - \sum_{s>0}(-h)^s[q^{(-\Gamma)}_{s|s-1} - q_{s|s}(1+h\alpha)] =$$
$$= \frac{1}{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}}q_0(1+h\alpha) - \sum_{s>0}(-h)^s\Big[q^{(-\Gamma)}_{s|s-1)} - \frac{1}{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}}q_{s|s-1}(1+h\alpha)\Big]. \tag{19.10.12}$$

Умножая это слева на $(1 + h\alpha^{(\Gamma-1)})$ и сравнивая результат с формулой (19.10.7), получаем

$$0 = |1+h\alpha^{(\Gamma-1)}](\alpha - \alpha^{(-1)} + q^{(-\Gamma)}_0) - q_0(1+h\alpha)+$$
$$+\sum_{s>0}(-h)^s\big\{[1+h\alpha^{(\Gamma-1)}]q^{(-\Gamma)}_{s|s-1} - q_{s|s-1}(1+h\alpha)\big\}. \tag{19.10.13}$$

Это можно преобразовать к виду

$$[\widehat{L}_{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}}\Delta^{-\Gamma} - \widehat{R}_{1+h\alpha}]\Big(\theta - \frac{1+h\alpha^{(\Gamma-1)}}{h}\Big) = 0, \tag{19.10.14a}$$

$$\theta = q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s q_{s|s-1}. \tag{19.10.14b}$$

Это совпадает с уравнением (19.9.7), в котором u заменено на θ. Следовательно, искомый ответ можно списать с формулы (19.9.22):

$$1 = [1+h\alpha^{(\Gamma)}]\Big[1 - \frac{h}{1+h\alpha^{(\Gamma)}}\theta^{(1)}\Big]\dots\Big[1 - \frac{h}{1+h\alpha^{(2\Gamma-1)}}\theta^{(\Gamma)}\Big]. \tag{19.10.15}$$

Так как

$$\theta = q_0 + O(h), \tag{19.10.16}$$

то формула (19.9.23) дает

$$\alpha = q_0 + q_0^{(-1)} + \cdots + q_0^{(1-\Gamma)} + O(h), \tag{19.10.17}$$

в согласии с формулой (19.10.2b).

В картине с обратным временем, переставляя тильды в формулах (19.10.4, 7, 8), получаем

$$[1 + h(\zeta^{\Gamma} + \alpha)]L = \widetilde{L}[1 + h(\zeta^{\Gamma} + \alpha)], \tag{19.10.18}$$

$$\alpha^{(-1)} + q_0 = \alpha + \widetilde{q}_0^{(-\Gamma)}, \tag{19.10.19}$$

$$[1 + h\alpha^{(\Gamma i+\Gamma-1)}]q_i + hq_{i+1} = \widetilde{q}_i(1 + h\alpha) + h\widetilde{q}_{i+1}^{(-\Gamma)}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.10.20}$$

Упражнение 19.10.21. Покажите, что регуляризованную систему (19.10.20) можно преобразовать к виду

$$\widetilde{q}_i = a^{(\Gamma i+\Gamma-1)} q_i \frac{1}{a} - \sum_{s>0} (-h)^s \left[q_{i+s|s-1}^{(\Gamma-\Gamma s)} - a^{(\Gamma i+\Gamma-1)} q_{i+s|s}^{(-\Gamma s)}\right], \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{19.10.22a}$$

$$q_{i|0} = q_i \frac{1}{a}, \quad q_{i|s+1} = q_{i|s} \frac{1}{a^{(\Gamma s+\Gamma)}}, \quad s \in \mathbb{Z}_+; \quad a = 1 + h\alpha. \tag{19.10.22b}$$

Переходя к пределу $M \to \infty$, и полагая $i = 0$ в формулах (19.10.22), получаем

$$\widetilde{q}_0 = a^{(\Gamma-1)} q_0 \frac{1}{a} - \sum_{s>0} (-h)^s \left[q_{s|s-1}^{(\Gamma-\Gamma s)} - a^{(\Gamma-1)} q_{s|s-1}^{(-\Gamma s)} \frac{1}{a}\right]. \tag{19.10.23}$$

Умножая справа на a и сравнивая результат с формулой (19.10.19), переписанной как

$$\widetilde{q}_0 a = q_0^{(\Gamma)} a + [a^{(\Gamma-1)} - a^{(s)}]ah^{-1}, \tag{19.10.24}$$

получаем

$$0 = a^{(\Gamma-1)} \left[q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s q_{s|s-1}^{(-\Gamma s)}\right] - \left[q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s q_{s|s-1}^{(-\Gamma s)}\right]^{(\Gamma)} a + [a^{(\Gamma)} - a^{(\Gamma-1)}]ah^{-1}. \tag{19.10.25}$$

Это можно преобразовать к виду

$$[\widehat{L}_{a^{(\Gamma-1)}} - \widehat{R}_a \Delta^{\Gamma}]\left(\theta - \frac{a}{h}\right) = 0, \tag{19.10.26a}$$

$$\theta = q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s q_{s|s-1}^{(-\Gamma s)}, \quad a = 1 + h\alpha. \tag{19.10.26b}$$

Это совпадает с уравнением (19.9.31), в котором u заменено на

$$\theta = q_0 + O(h). \tag{19.10.27}$$

Искомое α–уравнение может быть, следовательно, списано с формул (19.9.42, 44):

$$1 = (1 + h\alpha)\left[1 + \frac{h}{1 + h\alpha}(\alpha^{(1)} - \alpha - \theta^{(1)})\right] \dots \left[1 + \frac{1}{1 + h\alpha^{(\Gamma-1)}}(\alpha^{(\Gamma)} - \alpha^{(\Gamma-1)} - \theta^{(\Gamma)})\right], \tag{19.10.28}$$

$$\alpha = q_0 + q_0^{(-1)} + \cdots + q_0^{(1-\Gamma)} + O(h). \tag{19.10.29}$$

19.11 Дискретизация времени, как факторизация

Сидя в тени скалы, я заметил тень кучера,
которая тенью щетки чистила тень кареты.

Шарль Перро (1628–1703)

В этом разделе устанавливается причина трижды отмечавшегося изоморфизма между отрицательным и положительным направлениями дискретизация по времени. В результате мы приходим к обобщенному факторизационному анзацу, применимому в гораздо более общей постановке, чем та, которая рассматривается в этой книге; для примера рассматриваются модели классической механики.

Пока что мы обнаружили опытным путем три примера — в Теореме 19.2.19 для цепочки Тоды, в Следствии 19.5.30 для модифицированной цепочки Тоды, и в Утверждении 19.7.28 для системы Вольтерра, – изоморфизм двух различных временных дискретизаций: {прямое время в ε–направлении} и {обратное время в $-\varepsilon$–направлении}, где $\varepsilon = \pm$. Стоит ли за этим какой-то общий принцип?

Прямую временную эволюцию в ε–направлении можно записать как

$$\mathcal{R}_\varepsilon \widetilde{L} = L\mathcal{R}_\varepsilon, \tag{19.11.1}$$

а обратную временную эволюцию в $-\varepsilon$–направлении как

$$\mathcal{R}_{-\varepsilon} L = \widetilde{L}\mathcal{R}_{-\varepsilon}, \tag{19.11.2}$$

где

$$\mathcal{R}_\pm = 1 + h\mathcal{O}_\pm. \tag{19.11.3}$$

Эти две эволюции изоморфны, когда совпадают два выражения для $\widetilde{L}$:

$$\widetilde{L} = \mathcal{R}_\varepsilon^{-1} L\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R}_{-\varepsilon} L\mathcal{R}_{-\varepsilon}^{-1}. \tag{19.11.4}$$

Это эквивалентно

$$L\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{R}_{-\varepsilon} = \mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{R}_{-\varepsilon} L. \tag{19.11.5}$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{R}_{-\varepsilon} \in \mathcal{Z}(L), \tag{19.11.6}$$

централизатору L. Когда $\mathcal{Z}(L)$ порожден L, и непрерывный поток, который мы дискретизируем имеет вид

$$\partial_t(L) = [(L^n)_+, L] = [L, (L^n)_-], \tag{19.11.7}$$

уравнение (19.11.6), из соображений размерности, имеет вид

$$(1 + h\mathcal{O}_\varepsilon)(1 + h\mathcal{O}_{-\varepsilon}) = 1 + hL^n. \tag{19.11.8}$$

Если мы интересуемся в первую очередь первым поток, как везде и этой Части, то в этой формуле $n = 1$:

$$(1 + h\mathcal{O}_\varepsilon)(1 + h\mathcal{O}_{-\varepsilon}) = 1 + hL. \tag{19.11.9}$$

Этот анзац является сжатой версией почти всего, что было сделано в Части C — и даже больше, как мы сейчас увидим. В зависимости от обстоятельств, ε–обозначения имеют разный смысл, как, например для случаев КП или МКП. Единственным требованием для любого случая является то, что множество $\mathcal{A}_\varepsilon = \{\mathcal{O}_\varepsilon\}$ является алгеброй, для каждого $\varepsilon = \pm$, а сумма $\mathcal{A}_\varepsilon \oplus \mathcal{A}_{-\varepsilon} = \{\text{все}\}$. Вдобавок, рассматривая сопряжение в любой из формул (19.11.6, 8, 9) (и делая, при необходимости, замену типа $\zeta \to \zeta^{-1}$), можно получить из ε–факторизации $-\varepsilon$–факторизацию; таким образом, иногда (но, вообще говори,не всегда) достаточно исследовать только один случай, скажем $\varepsilon = +$. Начнем с простого случая цепочки Тоды. Уравнение (19.11.19) принимает вид

$$[1 + h(\zeta + \alpha)](1 + h\zeta^{-1}\beta) = 1 + h(\zeta + q_0 + \zeta^{-1}q_1). \tag{19.11.10}$$

Это равенство эквивалентно системе

$$\alpha + h\beta = q_0, \tag{19.11.11a}$$

$$[1 + h\alpha^{(1)}]\beta = q_1. \tag{19.11.11b}$$

В общем случае, равенство (19.11.8) имеет вид

$$\mathcal{O}_+ + \mathcal{O}_- + h\mathcal{O}_+\mathcal{O}_- = L^n = (L^n)_+ + (L^n)_-, \tag{19.11.12}$$

что можно представить в виде системы

$$\mathcal{O}_+ + O(h) = (L^n)_+, \tag{19.11.13a}$$

$$\mathcal{O}_- + O(h) = (L^n)_-. \tag{19.11.13b}$$

Это показывает, что $\mathcal{O}_+$ и $\mathcal{O}_-$ существуют и регулярны по h. Возвращаясь к нашей системе (19.11.11), видим, что из нее извлекаются отдельные уравнения для α и β :

$$\alpha = q_0 - \frac{h}{1 + h\alpha^{(1)}}q_1, \tag{19.11.14}$$

$$\beta = q_1 - h(q_0 - h\beta)^{(1)}\beta. \tag{19.11.15}$$

Первое уравнение, (19.11.14), совпадает с формулой (17.1.28), описывающей прямую положительную эволюцию цепочки Тоды; второе уравнение, (19.11.15), совпадает с формулой (19.2.18), описывающей обратную отрицательную эволюцию цепочки Тоды.

Первая мораль: *гораздо легче* решить одну задачу факторизации и получить *два результата одновременно*, чем анализировать хотя бы одну задачу дискретизации по времени.

Упражнение 19.11.16. (i) Покажите, что из уравнения (19.11.18) следует

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon\widetilde{\mathcal{R}}_{-\varepsilon} = \mathcal{R}_{-\varepsilon}\mathcal{R}_\varepsilon; \tag{19.11.17}$$

(ii) Покажите, что в случае цепочки Тоды с $\varepsilon = +$, уравнение (19.11.17) дает:

$$\widetilde{\alpha} + h\widetilde{\beta} = \alpha + h\beta^{(-1)}, \tag{19.11.18a}$$

$$[1 + h\widetilde{\alpha}^{(1)}]\widetilde{\beta} = \beta(1 + h\alpha). \tag{19.11.18b}$$

В качестве следующего примера рассмотрим очень простую механическую модель: уравнения Лакса на $gl_2(R)$. Определим $\pm$-проекции по правилу:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_+ = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_- = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{19.11.19}$$

и рассмотрим уравнения движения

$$\dot{L} = [L_+, L], \quad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{19.11.20}$$

Покомпонентно, это дает систему

$$\dot{a} = bc, \quad \dot{b} = bd - ab, \quad \dot{c} = 0, \quad \dot{d} = -cb. \tag{19.11.21}$$

Если положить

$$c = 1, \tag{19.11.22}$$

то эта система превращается в

$$\dot{a} = b, \quad \dot{b} = bd - ab, \quad \dot{d} = -b. \tag{19.11.23}$$

Интегралы

$$H_1 = Tr(L) = a + d, \quad H_2 = \frac{1}{2}\, Tr(L^2) = \frac{a^2 + d^2}{2} + b, \tag{19.11.24}$$

обладают свойствами

$$\dot{H}_1 = 0, \tag{19.11.25a}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{2}([b, a] + [b, d]) = \frac{1}{2}[b, H_1] \approx 0. \tag{19.11.25b}$$

Взяв в качестве гамильтониана $H = H_2$, систему (19.11.23) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix}_t = B \begin{pmatrix} \delta H/\delta a \\ \delta H/\delta b \\ \delta H/\delta d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ d \end{pmatrix}, \tag{19.11.26}$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_a & \widehat{L}_b & 0 \\ -\widehat{R}_b & 0 & \widehat{L}_b \\ 0 & -\widehat{R}_b & \mathrm{ad}_d \end{pmatrix}. \tag{19.11.27}$$

Упражнение 19.11.28. (i) Проверьте, что матрица B (19.11.27) гамильтонова, показав, что соответствующая алгебра Ли равна

$$[\mathrm{Lie}(R) \oplus \mathrm{Lie}(R)] \underset{\rho}{\ltimes} R, \tag{19.11.29a}$$

где представление ρ задается формулой

$$\rho(X \oplus Y) = \widehat{L}_X - \widehat{R}_Y; \tag{19.11.29b}$$

(ii) Покажите, что гамильтониан $H_1 = a + d = Tr(L)$ принадлежит ядру гамильтоновой матрицы B (19.11.27);
(iii) Если

$$P = \begin{pmatrix} * & p \\ * & * \end{pmatrix}$$

то уравнение движения

$$\dot L = [P_+, L] \tag{19.11.29c}$$

имеет вид

$$\dot a = p, \quad \dot b = pd - ap, \quad \dot d = -p. \tag{19.11.29d}$$

Покажите, что при $P = L^3$ уравнения движения (19.11.29d) могут быть получены из гамильтониана

$$H_3 = \frac{1}{3}\,Tr(L^3)$$

и гамильтоновой матрицы B (19.11.27);

(i^4) В треугольном разложении

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - a^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19.11.30a}$$

положим

$$d_{22} = d - a^{-1}b, \quad \mathcal{D} = ad_{22} = ad - b. \tag{19.11.30b}$$

Покажите, что

$$\mathcal{D} \approx \frac{1}{2}\{[(Tr(L)|^2 - Tr(L^2)\} = \frac{1}{2}H_1^2 - H_2, \tag{19.11.30c}$$

$$\dot d_{22} = a^{-1}bd_{22}, \tag{19.11.30d}$$

$$\dot{\mathcal{D}} = 0. \tag{19.11.30e}$$

Если мы рассмотрим, в духе Главы 16, дискретизацию по времени с анзацем

$$\left[\mathbb{1} + h\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \widetilde{L} = L\left[\mathbb{1} + h\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right], \tag{19.11.31}$$

то найдем

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a} & \widetilde{b} \\ 1 & \widetilde{d} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} \alpha & \alpha\widetilde{d} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & a\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

так что

$$\widetilde{a} = a - h\alpha, \tag{19.11.32a}$$

$$\widetilde{b} = b + ha\alpha - h\alpha(d + h\alpha), \tag{19.11.32b}$$

$$\widetilde{d} = d + h\alpha. \tag{19.11.32c}$$

Так как α остается неопределенной, мы получили бесполезную систему. С другой стороны, факторизационный анзац (19.11.9), в виде (19.11.12) с $n = 1$, дает

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} \alpha & \alpha y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \tag{19.11.33}$$

откуда

$$x + h\alpha = a \tag{19.11.34a}$$

$$\alpha(1 + hy) = b, \tag{19.11.34b}$$

$$y = d, \tag{19.11.34c}$$

так что, окончательно,

$$\alpha = b\frac{1}{1+hd}, \tag{19.11.35}$$

$$x = a - \frac{h}{1+hd}b, \quad y = d. \tag{19.11.36}$$

Упражнение 19.11.37. Покажите, что из формул (19.11.32, 35, 36) следует, что

$$\frac{\widetilde{a} - a}{-h} = b + O(h), \tag{19.11.38a}$$

$$\frac{\widetilde{b} - b}{-h} = bd - ab + O(h), \tag{19.11.38b}$$

$$\frac{\widetilde{d} - d}{-h} = -b + O(h), \tag{19.11.38c}$$

$$\widetilde{H}_1 = H_1, \tag{19.11.38d}$$

$$\frac{\widetilde{H}_2 - H_2}{-h} = \frac{1}{2}[b, a + d] + O(h), \tag{19.11.38e}$$

$$\widetilde{d}_{22} = \frac{1}{a - h\alpha} a d_{22}, \quad \widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}, \tag{19.11.38f}$$

в согласии с формулами (19.11.23, 25, 30d, 30e).

Вторая мораль: решение задачи факторизации избавляет от недоопределенности в задаче дискретизации по времени.

Это подсказывает, что надо попытаться применить метод факторизации с целью избавиться от недоопределенности в отрицательной эволюции потока МКП с максимальным обрывом (19.1.16–18). Имеем:

$$(1 + h\beta)(1 + h\zeta\alpha) = 1 + h[\beta + \zeta(1 + h\beta^{(-1)})\alpha] = 1 + h(\zeta Q_0 + Q_1) \quad \Rightarrow$$

$$\beta = Q_1, \tag{19.11.39}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + hQ_1^{(-1)}} Q_0. \tag{19.11.40}$$

Формула (19.11.39) оправдывает выбор (19.1.19), казавшийся ранее произвольным; формула (19.11.40) эквивалентна формуле (18.1.35), в которой $0 = Q_2 = Q_3 = \ldots$.

Упражнение 19.11.41. Покажите, что отображение (19.11.32, 35) гамильтоново относительно гамильтоновой матрицы B (19.11.27).

Вместо $gl_2(R)$, можно с тем же успехом рассмотреть случай $gl_n(R)$. Мы не будем здесь этого делать, так как приведенный пример $gl_2(R)$ был, в основном, чисто иллюстративным, а не общетеоретическим. С другой стороны, имеет смысл взглянуть внимательнее на переход от gl_2 к sl_2; так как, по формуле (19.11.25a),

$$\dot{d} = -\dot{a},$$

то можно рассмотреть случай

$$d = -a. \tag{19.11.42}$$

При этом наша динамическая система (19.11.23) превращается в

$$\dot{a} = b, \quad \dot{b} = -ab - ba, \tag{19.11.43}$$

и формула (19.11.25b) дает

$$\dot{H}_2 = 0, \quad H_2 = a^2 + b = \frac{1}{2}\, Tr \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}^2 \right]. \tag{19.11.44}$$

Формулы (19.11.32, 35) принимают вид

$$\widetilde{a} = a - h\alpha, \tag{19.11.45a}$$

$$\widetilde{b} = b + h(a\alpha + \alpha a) - h^2\alpha^2, \tag{19.11.45b}$$

$$\alpha = b\frac{1}{1 - ha}. \tag{19.11.46}$$

Гамильтонов формализм, неожиданно, улетучивается в sl–картине. Это можно увидеть следующим образом. Для гамильтониана $H = H_2$ (19.11.44), систему (19.11.43) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2}B \begin{pmatrix} \delta H/\delta a \\ \delta H/\delta b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ 1/2 \end{pmatrix}, \tag{19.11.47}$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1\, \mathrm{ad}_a & \widehat{L}_b + \widehat{R}_b \\ -\widehat{L}_b - \widehat{R}_b & \lambda_2\, \mathrm{ad}_b \end{pmatrix}, \tag{19.11.48}$$

где λ_1 и λ_2 некоторый константы (коммутирующие со всем).

Упражнение 19.11.49. Покажите, что матрица B (19.11.48) не гамильтонова ни при каких λ_1 и λ_2.

Это *чисто некоммутативный эффект*: если все коммутирует, имеем

$$\frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \tag{19.11.50}$$

а *любая* кососимметрическая матрица размера 2 × 2 гамильтонова.

Упражнение 19.11.51. (i) Покажите, что в *коммутативном случае* отображение (19.11.45, 46) гамильтоново относительно гамильтоновой матрицы B (19.11.50);
(ii) Покажите, что в общем некоммутативном случае отображение (19.11.45, 46) не сохраняет матрицу B (19.11.48) ни при каких λ_1 и λ_2.
[Подсказка : Вычисляйте по модулю $O(a)$.]

Упражнение 19.11.52. Покажите, что

$$\widetilde{H}_2 = H_2. \tag{19.11.53}$$

Это наблюдение позволяет нам заменить непрерывную динамическую систему с двумя степенями свободы (19.11.43) на систему с одной степенью свободы

$$\dot{a} = H_2 - a^2, \tag{19.11.54}$$

и аналогично, заменить дискретно-временную систему с двумя степенями свободы (19.11.45) на систему с одной степенью свободы

$$\widetilde{a} = a - h(H_2 - a^2)\frac{1}{1-ha} = (a - hH_2)\frac{1}{1-ha}. \tag{19.11.55}$$

Единственной некоммутативной чертой этих систем является то, что коммутатор $[H_2, a]$, возможно, не равен нулю, что не очень существенно. Для простоты рассмотрим случай, когда все коммутирует. ОДУ первого порядка (19.11.54), в зависимости от знака (вещественной) постоянной H_2, имеет следующие решения:
0) $H_2 = 0$. Тогда

$$a(t) = \frac{1}{t+\mu}, \quad \mu = \mathrm{const}; \tag{19.11.56}$$

$-$) $H_2 = -\varepsilon^2 < 0$. Тогда

$$a(t) = \varepsilon \cot[\varepsilon(t+\mu)]; \tag{19.11.57$-$}$$

$+$) $H_2 = \varepsilon^2 > 0$. Тогда

$$a(t) = \varepsilon \coth[\varepsilon(t+\mu)]. \tag{19.11.57+}$$

При $\varepsilon \to 0$, тригонометрические решения (19.11.57±) вырождаются в рациональное (19.11.56).

Упражнение 19.11.58. (i) Покажите, что при $H_2 = 0$, формула (19.11.55) является *точной*, то есть уравнения

$$\dot{a} = -a^2 \tag{19.11.59a}$$

и

$$a(t-h) = \frac{a(t)}{1-ha(t)} \tag{19.11.59b}$$

имеют одни и те же решения;
(ii) Покажите, что для тригонометрических решений (19.11.57±) это заключение неверно;
(iii) Формулы

$$a(t-h) = \frac{a(t) \pm h\varepsilon^2}{1-ha(t)} \tag{19.11.60}$$

можно интерпретировать, как разностную версию $\varepsilon\cot[\varepsilon(t+\mu)]$ и $\varepsilon\coth[\varepsilon(t+\mu)]$, причем случай $\mu = 0$ отвечает условию

$$a(0) = \infty. \tag{19.11.61}$$

Покажите, что при выполнении этого условия $a(t)$ (19.11.60) является нечетной функцией на решетке:

$$a(-nh) = -a(nh), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{19.11.62}$$

Замечание 19.11.63. Упражнение 19.11.58(i) подсказывает, как определить широкий класс специальных функций, как коммутативных, так и некоммутативных, требуя, чтобы они удовлетворяли переопределенным системам уравнений, одновременно дифференциальным и разностным.

Схема факторизации, введенная в этом разделе, служит суперструктурой, существенно упрощающей задачу временной дискретизации. Пока что этот аппарат был использован на эвристическом уровне: мы не установили никаких общих результатов, утверждающих, что такая факторизация влечет дискретизацию по времени;

скелет пока не оброс мясом. В следующем разделе мы применим этот аппарат к задаче, которая была признана неразрешимой в §19.1: дискретизация времени в одевающих пространствах.

> Мадам, если это возможно, то это уже сделано;
> если невозможно, то будет сделано.
>
> Де Калонн, министр финансов Луи XVI, в беседе с Марией-Антуанеттой

19.12 Решение задачи дискретного одевания[1]

> Телеграмма из Варшавы:
> Польский парламент обсуждает указ, запрещающий декольте, платья без рукавов и обтягивающие фигуру. Принимают участие священнослужители всех конфессий. Один из пунктов указа запрещает владельцам ателье выставлять на витринах модные модели, считающиеся нескромными.

В этом разделе строится дискретизации по времени в одевающих пространствах, и при помощи метода факторизации определяется дискретизация по времени в отрицательном направлении, как для КП, так и для МКП.

Чтобы дискретизировать уравнение движения в одевающем пространстве КП,

$$\partial_t(K) = -P_-K, \quad L = K\zeta K^{-1}, \quad P = L^n, \tag{19.12.1}$$

при том, что уравнение движения в пространстве Лакса

$$\partial_t(L) = [L, P_-], \tag{19.12.2}$$

было дискретизировано анзацем

$$\mathcal{R}_-\widetilde{L} = L\mathcal{R}_-, \quad \mathcal{R}_- = 1 + h\mathcal{O}_-, \tag{19.12.3}$$

положим

$$\widetilde{K} = (\mathcal{R}_-)^{-1}K. \tag{19.12.4}$$

Так как

$$\mathcal{R}_- = 1 + h\mathcal{O}_- = 1 + hP_- + O(h^2), \tag{19.12.5}$$

то имеем

$$\widetilde{K} - K = (1 - hP_-)K - K + O(h^2) = h[-P_-K + O(h)], \tag{19.12.6}$$

в согласии с формулой (19.12.1). Кроме того,

$$\widetilde{L} = (\widetilde{K\zeta K^{-1}}) = \widetilde{K}\zeta\widetilde{K}^{-1} = (\mathcal{R}_-)^{-1}K\zeta K^{-1}\mathcal{R}_- = (\mathcal{R}_-)^{-1}L\mathcal{R}_-, \tag{19.12.7}$$

---

[1] В оригинале *'The problem of dressing discreetly resolved'* (прим. перев.)

в согласии с формулой (19.12.3). Обращение времени сводится к замене $\mathcal{R}_-$ на $(\mathcal{R}_-)^{-1}$:

$$\widetilde{K} = \mathcal{R}_- K \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_- L = \widetilde{L}\mathcal{R}_-. \tag{19.12.8}$$

Аналогичные формулы верны для случая МКП:

$$\widetilde{\mathcal{K}} = (\mathcal{R}_{\leqslant 0})^{-1}\mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathcal{L}} = (\mathcal{R}_{\leqslant 0})^{-1}\mathcal{L}\mathcal{R}_{\leqslant 0}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{K}\zeta\mathcal{K}^{-1}, \tag{19.12.9a}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{R}_{\leqslant 0}\mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{R}_{\leqslant 0}\mathcal{L}(\mathcal{R}_{\leqslant 0})^{-1}. \tag{19.12.9b}$$

В обоих случаях уравнения для дискретно-временной одевающей эволюции имеют смысл, поскольку формулы (19.2.4, 8, 9) дают

$$\widetilde{K} \in 1 + O(\zeta^{-1}), \quad \widetilde{\mathcal{K}} \in O(1). \tag{19.12.10}$$

Таким образом, задача дискретизации в одевающих пространствах сведена к задаче дискретизации в отрицательном направлении в лаксовых пространствах. Мы решим эту последнюю задачу, используя метод факторизации из предыдущего раздела. Напомним, что этот метод постулирует изоморфизм между отрицательной и положительная эволюциями с противоположным направлением времени. Это освобождает нас от анализа громоздких уравнений типа (19.12.3), так как мы знаем, что

$$\widetilde{L} = (\mathcal{R}_-)^{-1}L\mathcal{R}_- = \mathcal{R}_+ L(\mathcal{R}_+)^{-1} \tag{19.12.11}$$

когда

$$\mathcal{R}_-\mathcal{R}_+ = 1 + hL, \tag{19.12.12}$$

и эволюции в положительном направлении уже анализировались в главах 17, 18.

Мы проделаем 4 отдельных вычисления, с уравнениями

$$\begin{gathered}\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{R}_{-\varepsilon} = 1 + hL, \quad \varepsilon = \pm, \quad \mathcal{R}_+ = 1 + h(\zeta + \alpha),\\ \mathcal{R}_- = 1 + h\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i-1}\beta_{i+1}, \quad L = \zeta + \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}q_i,\end{gathered} \tag{19.12.13}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{R}_\varepsilon\mathcal{R}_{-\varepsilon} = 1 + h\mathcal{L}, \quad \varepsilon = \pm, \quad \mathcal{R}_+ = 1 + h\zeta\beta,\\ \mathcal{R}_- = 1 + h\sum_{i\geqslant 0}\zeta^{-i}\gamma_{i+1}, \quad \mathcal{L} = \sum_{i\geqslant 0}\zeta^{1-i}Q_i,\end{gathered} \tag{19.12.14}$$

для случаев КП и МКП соответственно.

+КП) Случай $\varepsilon = +$ уравнения (19.12.13):

$$\zeta + \alpha + \sum\zeta^{-i-1}\beta_{i+1} + h(\zeta + \alpha)\sum\zeta^{-i-1}\beta_{i+1} = \zeta + \sum\zeta^{-i}q_i,$$

что эквивалентно системе

$$\alpha + h\beta_1 = q_0, \tag{19.12.15}$$

$$[1 + h\alpha^{(i+1)}]\beta_{i+1} + h\beta_{i+2} = q_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.12.16}$$

Как было замечено в предыдущем разделе, уравнение факторизации

$$\mathcal{O}_\varepsilon + \mathcal{O}_{-\varepsilon} + h\mathcal{O}_\varepsilon\mathcal{O}_{-\varepsilon} = L = L_\varepsilon + L_{-\varepsilon} \tag{19.12.17}$$

имеет единственное регулярное по h решение

$$\mathcal{O}_\varepsilon = L_\varepsilon + O(h), \quad \mathcal{O}_{-\varepsilon} = L_{-\varepsilon} + O(h). \tag{19.12.18}$$

Этот тезис применим во всех 4 случаях и мы не будем его повторять; вместо этого, будем использовать его следующим типическим образом. $\mathcal{O}_+$–часть системы уравнений факторизации, в рассматриваемом случае уравнение (19.12.15), скалярно. Учтем его в самом конце, а пока рассмотрим элемент α как данный (или фиксированный), и решим систему для $\mathcal{O}_-$–части, просто выписывая и проверяя явную формулу для решения. В нашем случае $\mathcal{O}_-$–частью является система (19.12.16), и ее решение имеет вид

$$\beta_i = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \frac{1}{1+h\alpha^{(i)}} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(i+s)}} q_{i+s}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{19.12.19}$$

Проверим, что формула (19.12.19) решает систему (19.12.16) (и дает, тем самым, *общее* ее решение):

$$\beta_i = \frac{1}{1+h\alpha^{(i)}} q_i + (-h)\frac{1}{1+h\alpha^{(i)}} \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s \frac{1}{1+h\alpha^{(i+1)}} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(i+1+s)}} q_{i+1+s} =$$
$$= \frac{1}{1+h\alpha^{(i)}}(q_i - h\beta_{i+1}),$$

что и требовалось.

Происхождение формулы (19.12.19) таково: мы обрываем систему (19.12.16) связью

$$\{0 = q_{M+1} = q_{M+2} = \dots\}, \tag{19.12.20}$$

получаем

$$\beta_M = \frac{1}{1+h\alpha^{(M)}} q_M, \tag{19.12.21}$$

и затем двигаемся назад от $i = M$ до $i = 1$. При этом возникает формула (19.12.19). По построению, при обрыве (19.12.20) имеем

$$0 = \beta_{M+1} = \beta_{M+2} = \dots \tag{19.12.22}$$

Далее, подставляя β_i–формулу (19.12.19) при $i = 1$ в оставшееся $\mathcal{O}_+$–уравнение (19.12.15), находим

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0}(-h)^s \frac{1}{1+h\alpha^{(1)}} \cdots \frac{1}{1+h\alpha^{(s)}} q_s. \tag{19.12.23}$$

Это в точности α–уравнение (17.1.21), полученное в §17.1 после некоторых тяжелоатлетических упражнений.

–КП) Случай $\varepsilon = -$ уравнения (19.12.13):

$$\sum \zeta^{-i-1}\beta_{i+1} + \zeta + \alpha + h\sum \zeta^{-i-1}\beta_{i+1}(\zeta+\alpha) = \zeta + \sum \zeta^{-i} q_i,$$

что эквивалентно системе

$$\alpha + h\beta_1^{(-1)} = q_0, \tag{19.12.24}$$

$$\beta_{i+1}(1+h\alpha) + h\beta_{i+2}^{(-1)} = q_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.12.25}$$

Упражнение 19.12.26. Покажите, что система (19.12.25) имеет решение

$$\beta_i = \sum_{s\geqslant 0}(-h)^s q_{i+s}^{(-s)} \frac{1}{1+h\alpha^{(-s)}} \cdots \frac{1}{1+h\alpha}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{19.12.27}$$

Подставляя эту формулу при $i = 1$ в $\mathcal{O}_+$–уравнение (19.12.24), получаем

$$\alpha = q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s q_s^{(-s)} \frac{1}{1 + h\alpha^{(-s)}} \cdots \frac{1}{1 + h\alpha^{(-1)}}. \tag{19.12.28}$$

Это α–уравнение (17.1.36).

+МКП) Случай $\varepsilon = +$ уравнения (19.12.14):

$$\zeta^1\beta + \sum \zeta^{-i}\gamma_{i+1} + h\zeta^1\beta \sum \zeta^{-i}\gamma_{i+1} = \zeta^1 Q_0 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i} Q_{i+1}, \tag{19.12.29}$$

что эквивалентно системе

$$\beta(1 + h\gamma_1) = Q_0, \tag{19.12.30}$$

$$\gamma_{i+1} + h\beta^{(i+1)}\gamma_{i+2} = Q_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.12.31}$$

Упражнение 19.12.32. Покажите, что система (19.12.31) имеет решение

$$\gamma_i = Q_i + \sum_{s>0} (-h)^s \beta^{(i)} \dots \beta^{(i+s-1)} Q_{i+s}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{19.12.33}$$

Подставляя эту формулу при $i = 1$ в $\mathcal{O}_+$–уравнение (19.12.30), получаем

$$\beta = Q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s \beta \dots \beta^{(s-1)} Q_s. \tag{19.12.34}$$

Это β–уравнение (18.1.23).

−МКП) Случай $\varepsilon = -$ уравнения (19.12.14):

$$\sum \zeta^{-i}\gamma_{i+1} + \zeta^1\beta + h \sum \zeta^{-i}\gamma_{i+1}\zeta^1\beta = \zeta^1 Q_0 + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-i} Q_i, \tag{19.12.35}$$

что эквивалентно системе

$$[1 + h\gamma_1^{(-1)}|\beta = Q_0, \tag{19.12.36}$$

$$\gamma_{i+1} + h\gamma_{i+2}^{(-1)}\beta = Q_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{19.12.37}$$

Упражнение 19.12.38. Покажите, что система (19.12.37) имеет решение

$$\gamma_i = Q_i + \sum_{s>0} (-h)^s Q_{i+s}^{(-s)} \beta^{(1-s)} \dots \beta, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{19.12.39}$$

Подставляя эту формулу при $i = 1$ в $\mathcal{O}_+$–уравнение (19.12.36), получаем

$$\beta = Q_0 + \sum_{s>0} (-h)^s Q_s^{(-s)} \beta^{(1-s)} \dots \beta. \tag{19.12.40}$$

Это β–уравнение (18.1.36).

Кто знает? Чувство красоты может стать бесполезным для человечества, и Искусство будет лежать где-то посреди алгебры и музыки.

Флобер

Часть D

Приложения

> Я любил правосудие и ненавидел несправедливость, и потому умираю в изгнании.
>
> Папа Григорий VII (1085)

Приложение A1

Комплексификация гамильтоновых систем

> **Все наши желания, кроме тех, что может удовлетворить весьма умеренный доход, являются чисто мнимыми.**
>
> **Генри Ст. Джон Боллинброк, в письме Свифту (17 марта 1719)**

В этом приложении показано, что комплексификация гамильтоновой системы является бигамильтоновой.

Пусть дана гамильтонова система

$$\partial_t(\boldsymbol{q}) = B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right), \tag{A1.1}$$

допустим, мы желаем комплексифицировать ее. Это означает, что мы подставляем

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}, \quad i^2 = -1, \tag{A1.2}$$

в обе части равенства (A1.1) и приравниваем вещественную и мнимую части полученного уравнения. Система какого сорта при этом возникнет?

Чтобы подобрать ключ к проблеме, рассмотрим простую систему типа КдФ

$$\partial_t(q) = \partial(q^\Gamma + q^{(2)}), \quad \Gamma \in \mathbb{N}, \tag{A1.3}$$

$$q^\Gamma + q^{(2)} = \frac{\delta}{\delta q}(H), \quad H = \frac{1}{\Gamma+1}q^{\Gamma+1} - \frac{1}{2}q^{(1)2}. \tag{A1.4}$$

Положим

$$(u+iv)^\Gamma = \varphi_\Gamma + i\psi_\Gamma, \quad \Gamma \in \mathbb{Z}_+, \quad \varphi_\Gamma, \psi_\Gamma \in \mathbb{Z}\langle u, v\rangle. \tag{A1.5}$$

В этих обозначениях, подставляя

$$q = u + iv \tag{A1.6}$$

в уравнение (A1.3), находим

$$\partial_t\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \partial\begin{pmatrix} \varphi_\Gamma + u^{(2)} \\ \psi_\Gamma + v^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{A1.7}$$

С другой стороны, из формул (A1.4, 5) следует

$$H = \mathrm{Re}(H) + i\,\mathrm{Im}(H), \tag{A1.8}$$

$$\mathrm{Re}(H) = \frac{1}{\Gamma+1}\varphi_{\Gamma+1} - \frac{1}{2}(u^{(1)2} - v^{(1)2}), \tag{A1.9}$$

$$\mathrm{Im}(H) \approx \frac{1}{\Gamma+1}\psi_{\Gamma+1} - u^{(1)}v^{(1)}, \tag{A1.10}$$

$$\frac{\delta\varphi_\Gamma}{\delta u} = \Gamma\varphi_{\Gamma-1}, \quad \frac{\delta\varphi_\Gamma}{\delta v} = -\Gamma\psi_{\Gamma-1}, \tag{A1.11}$$

$$\frac{\delta\psi_\Gamma}{\delta u} = \Gamma\psi_{\Gamma-1}, \quad \frac{\delta\psi_\Gamma}{\delta v} = \Gamma\varphi_{\Gamma-1}, \tag{A1.12}$$

откуда

$$\delta(\mathrm{Re}(H)) = \begin{pmatrix} \varphi_\Gamma + u^{(2)} \\ -\psi_\Gamma - v^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{A1.13}$$

$$\delta(\mathrm{Im}(H)) = \begin{pmatrix} \psi_\Gamma + v^{(2)} \\ \varphi_\Gamma + u^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{A1.14}$$

Следовательно, комплексифицированные уравнения движения (A1.7) можно записать в *двух различных гамильтоновых формах*:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & -\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta/\delta u \\ \delta/\delta v \end{pmatrix} (\mathrm{Re}(H)) = \tag{A1.15a}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta/\delta u \\ \delta/\delta v \end{pmatrix} (\mathrm{Im}(H)). \tag{A1.15b}$$

Явление, замеченное на этом простом примере является общим: комплексификация гамильтоновой системы является бигамильтоновой. Чтобы увидеть, как это происходит, положим

$$B|_{q=u+iv} = B_1 + iB_2, \tag{A1.16a}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\Big|_{q=u+iv} = \boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2. \tag{A1.16b}$$

Тогда комплексификация уравнений движения (A1.1) выглядит так:

$$\begin{aligned} \partial_t(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) &= (B_1 + iB_2)(\boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2) = \\ &= [B_1(\boldsymbol{F}_1) - B_2(\boldsymbol{F}_2)] + i[B_1(\boldsymbol{F}_2) + B_2(\boldsymbol{F}_1)] \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & -B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \end{pmatrix}. \tag{A1.17}$$

Подставляя $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ в определяющее вариационное соотношение (10.1.60), в виде

$$d(H) \approx d\boldsymbol{q}^t \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \tag{A1.18}$$

получаем

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Re}(H)) + i d(\mathrm{Im}(H)) &\approx (d\boldsymbol{u} + i d\boldsymbol{v})^t(\boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2) = \\ &= (d\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{F}_1 - d\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{F}_2) + i(d\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{F}_2 + d\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{F}_1), \end{aligned} \tag{A1.19}$$

откуда

$$d(\mathrm{Re}(H)) \approx d\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{F}_1 - d\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{F}_2, \tag{A1.20a}$$

$$d(\mathrm{Im}(H)) \approx d\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{F}_2 + d\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{F}_1, \tag{A1.20b}$$

так что

$$\begin{pmatrix} \delta/\delta\boldsymbol{u} \\ \delta/\delta\boldsymbol{v} \end{pmatrix} (\mathrm{Re}(H)) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ -\boldsymbol{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \\ -\mathrm{Im} \end{pmatrix} \left(\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{q}}\right), \tag{A1.21a}$$

$$\begin{pmatrix} \delta/\delta\boldsymbol{u} \\ \delta/\delta\boldsymbol{v} \end{pmatrix} (\mathrm{Im}(H)) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_2 \\ \boldsymbol{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{pmatrix} \left(\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{q}}\right). \tag{A1.21b}$$

Подставляя эти формулы в комплексифицированные уравнения движения (A1.17), находим бигамильтоново представление

$$\partial_t \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & -B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta/\delta\boldsymbol{u} \\ \delta/\delta\boldsymbol{v} \end{pmatrix} (\mathrm{Re}(H)) = \tag{A1.22a}$$

$$= \begin{pmatrix} -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta/\delta\boldsymbol{u} \\ \delta/\delta\boldsymbol{v} \end{pmatrix} (\mathrm{Im}(H)). \tag{A1.22b}$$

Остается показать, что формулы (A1.22) описывают *гамильтонову* систему. Это можно сделать и прямолинейной выкладкой, но это будет не поучительно. Лучший способ, к тому же легко обобщаемый, состоит в переходе от $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ к координатам

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v} \tag{A1.23}$$

В этих координатах динамическая система

$$\partial_t(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{X}(\{\boldsymbol{q}\}) \tag{A1.24}$$

превращается, при комплексифицировании, в пару

$$\partial_t(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{X}(\{\boldsymbol{q}\}), \quad \partial_t(\bar{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{X}(\{\bar{\boldsymbol{q}}\}). \tag{A1.24$'$}$$

Гамильтонова система (A1.1) переходит в бигамильтонову

$$\partial_t \begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_q & 0 \\ 0 & \pm B_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta/\delta\boldsymbol{q} \\ \delta/\delta\boldsymbol{p} \end{pmatrix} (H_q \pm H_p), \tag{A1.25}$$

где

$$B_{(\dots)} = B|_{\boldsymbol{q}=(\dots)}, \quad H_{(\dots)} = H|_{\boldsymbol{q}=(\dots)}. \tag{A1.26}$$

Проверим, что бигамильтоновы формулы (A1.22) и (A1.25) эквивалентны. Из формул (A1.23) получаем

$$B_q = B_1 + iB_2, \quad B_p = B_1 - iB_2, \tag{A1.27}$$

$$H_q = \mathrm{Re}(H) + i\,\mathrm{Im}(H), \quad H_p = \mathrm{Re}(H) - i\,\mathrm{Im}(H), \tag{A1.28}$$

$$H_q + H_p = 2\,\mathrm{Re}(H), \quad H_q - H_p = 2i\,\mathrm{Im}(H), \tag{A1.29}$$

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p})/2, \quad \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})/2i, \tag{A1.30}$$

$$J = \frac{D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{D(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ i\mathbf{1} & -i\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad J^{\dagger} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -i\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{A1.31}$$

Следовательно,

$$J\begin{pmatrix} B_q & 0 \\ 0 & B_p \end{pmatrix} J^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & -B_1 \end{pmatrix}, \tag{A1.32a}$$

$$J\begin{pmatrix} B_q & 0 \\ 0 & -B_p \end{pmatrix} J^{\dagger} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}. \tag{A1.32b}$$

Формулы (A1.25, 29, 32) совпадают с (A1.22).

Упражнение A1.33. Обозначим через

$$B^1 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & -B_1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}, \tag{A1.34}$$

гамильтоновы матрицы комплексифицированной системы (A1.22).

(i) Покажите, что

$$B^1\delta(\mathrm{Im}(H)) = B^2\delta(-\mathrm{Re}(H)); \tag{A1.35}$$

(ii) Покажите, что формула (A1.35) задает правую часть комплексификации $q = u + iv$ для уравнения движения

$$\partial_t(q) = -iB\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right); \tag{A1.36}$$

(iii) Покажите, что

$$\{H, F\} \approx \{\mathrm{Re}(H), \mathrm{Re}(F)\}_1 + i\{\mathrm{Im}(H), \mathrm{Im}(F)\}_2, \quad \forall\, H, F, \tag{A1.37}$$

где $\{\ ,\ \}_j$ есть скобка Пуассона с матрицей B^j (A1.34), $j = 1, 2$;

(i^4) Покажите, что если F есть интеграл динамической системы, то $\mathrm{Re}(F)$ и $\mathrm{Im}(F)$ есть интегралы комплексифицированной системы.

Упражнение A1.38. Покажите, что комплексификация уравнение Лакса снова является уравнением Лакса.

В расширениях при помощи $\sqrt{-1}$ нет ничего сакраментального. Можно с тем же успехом рассмотреть расширения при помощи элемента θ, удовлетворяющему соотношению

$$\theta^n = \mathrm{const} \tag{A1.39}$$

или даже

$$\theta^n = p(\theta), \quad p(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i\theta^i. \tag{A1.40}$$

Что имеет значение, так это число различных корней полинома $\theta^n - p(\theta)$. Случай (A1.39), с $\mathrm{const} \neq 0$, является простейшим и наиболее непосредственным обощением, с n различными корнями θ, дающими n комплексно-сопряженных аналогов формул (A1.24–26). Получающееся расширение гамильтоновой системы имеет n гамильтоновых структур. Гамильтоновы отображения и т.п. демонстрируют естественное поведение при таких расширениях. На другом конце спектра лежат расширения типа

$$\theta^n = 0. \tag{A1.41}$$

Они связаны с асимптотическими разложениями, и мы разберемся с ними в следующем Приложении.

Приложение A2

Асимптотические разложения гамильтоновых систем

В этом приложении определяется влияние асимптотических разложений на гамильтоновы системы. Коротко говоря, бесконечное асимптотическое разложение гамильтоновой системы больше не гамильтоново, но каждый конечный отрезок такого разложения является гамильтоновой системой, причем гамильтоновы данные нетривиально зависят от длины отрезка.

A2.1 Мотивировка из примера: уравнение КдФ

> Если есть одна основная причина распространения массовой необразованности, так это то, что все выучились читать и писать.
>
> Питер де Фриэ

В этом разделе мы формулируем проблему, как асимптотические разложения взаимодействуют с гамильтоновым формализмом и, анализируя конкретный пример уравнения КдФ, угадываем решение этой проблемы. Эта догадка будет обоснована в §§A2.2, A2.3.

Допустим, у нас есть гамильтонова система

$$\partial_t(q) = B\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right), \tag{A2.1.1}$$

в которой гамильтонова структура B и гамильтониан H регулярно зависят от ("малого") формального параметра ε. Если заменить

$$q = \sum_{s=0}^{\infty} u_s \varepsilon^s \tag{A2.1.2}$$

в обеих частях уравнения (A2.1.1) и приравнять подобные степени ε, то получим

$$\partial_t(\mathbf{u}_i) = \sum_{k+\ell=i} B_{(k)}\left(\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)_{(\ell)}\right), \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{A2.1.3}$$

где

$$B^* = \sum_{k\geqslant 0} B_{(k)}\varepsilon^k, \tag{A2.1.4}$$

$$\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)^* = \sum_{\ell\geqslant 0}\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)_{(\ell)}\varepsilon^\ell, \tag{A2.1.5}$$

и * обозначает результат подстановки (A2.1.2):

$$(\ldots)^* = (\ldots)\Big|_{q\,=\,\sum u_s\varepsilon^s}\,. \tag{A2.1.6}$$

Возникает вопрос: что остается от гамильтоновости исходной гамильтоновой системы (A2.1.1) при асимптотическом разложении (A2.1.3)? Чтобы подобрать ключ к проблеме, рассмотрим простой пример: уравнение КдФ (ср. напр. [*AFo 1989, *AFo 1993, *Mar 1990]):

$$\partial_t(q) = \partial(3q^2 + q^{(2)}) = \partial\frac{\delta}{\delta q}\big(q^3 - \frac{1}{2}q^{(1)2}\big). \tag{A2.1.7}$$

Зависимости от ε здесь нет ни в гамильтоновой матрице

$$B = \partial, \tag{A2.1.8}$$

ни в гамильтониане

$$H = q^3 - \frac{1}{2}q^{(1)2}, \tag{A2.1.9}$$

что можно считать частным случаем регулярной зависимости от ε. Подставляя

$$q = \sum_{s\geqslant 0} u_s\varepsilon^s \tag{A2.1.10}$$

в уравнение КдФ (A2.1.7), получаем

$$\partial_t(u_i) = \partial\Big(3\sum_{s=0}^{i} u_s u_{i-s} + u_i^{(2)}\Big), \quad i\in\mathbb{Z}_+. \tag{A2.1.11}$$

С другой стороны,

$$H^* = \Big(\sum u_s\varepsilon^s\Big)^3 - \frac{1}{2}\Big(\sum u_s^{(1)}\varepsilon^s\Big)^2, \tag{A2.1.12}$$

так что

$$H_{(s)} = \sum_{i+j+k=s} u_i u_j u_k - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s} u_i^{(1)} u_{s-i}^{(1)}, \tag{A2.1.13}$$

откуда

$$\frac{\delta H_{(s)}}{\delta u_r} = \quad 3\sum_{j+k=s-r} u_j u_k + u_{s-r}^{(2)}, \quad s\geqslant r\geqslant 0, \tag{A2.1.14a}$$

$$\frac{\delta H_{(s)}}{\delta u_r} = 0, \quad 0\leqslant s< r. \tag{A2.1.14b}$$

Сравнивая формулы (A2.1.14) и (A2.1.11), видим, что последнюю можно переписать, как

$$\partial_t(u_i) = \partial\left(\frac{\delta H_{(i+r)}}{\delta u_r}\right), \quad r = r(i), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{A2.1.15}$$

Если бы асимптотическое разложение (A2.1.11) было гамильтоновым, у него был бы некоторый фиксированный гамильтониан, скажем $H_{(\dots)}$. Это явно невозможно, если позволить индексу i пробегать все множество $\mathbb{Z}_+$. Поэтому нам приходится отбросить бесконечный хвост из u_i и наложить условие

$$\varepsilon^{N+1} = 0, \quad \text{при некотором фиксированном} \quad N \in \mathbb{Z}_+. \tag{A2.1.16}$$

Асимптотическое разложение (A2.1.11) тогда превращается в

$$\partial_t(u_i) = \partial\Big(3\sum_{s=0}^{i} u_s u_{i-s} + u_i^{(2)}\Big), \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \tag{A2.1.17}$$

а формула (A2.1.15) при $r(i) = N - i$ дает гамильтоново представление для системы (A2.1.17):

$$\partial_t(u_i) = \partial\left(\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_{N-i}}\right), \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \tag{A2.1.18a}$$

$$H_{(N)} = \sum_{i+j+k=N} u_i u_j u_k - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} u_i^{(1)} u_{N-i}^{(1)}. \tag{A2.1.18b}$$

Подведем итог: стартуя со скалярной гамильтоновой матрицы $B = \partial$ (A2.1.8) в q–пространстве, мы приходим к гамильтоновой матрице

$$B^N = \begin{pmatrix} & & \partial \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \partial & & \end{pmatrix}. \tag{A2.1.19}$$

в $(u_0, \dots, u_N)$–пространстве. Что за алгоритм преобразует матрицу B в матрицу B^N? Чтобы разобраться в этом вопросе, рассмотрим бездисперсионную версию уравнения КдФ:

$$\partial_t(q) = \partial(3q^2) = (\partial + \lambda\,\mathrm{ad}_q)\frac{\delta}{\delta q}(q^3), \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{A2.1.20}$$

Имеем

$$(\partial + \lambda\,\mathrm{ad}_q)^* = (\partial + \lambda\,\mathrm{ad}_{u_0}) + \sum_{s=1}^{N} \lambda\,\mathrm{ad}_{u_s}\varepsilon^s, \tag{A2.1.21}$$

так что

$$B_{(0)} = \partial + \lambda\,\mathrm{ad}_{u_0}; \quad B_{(s)} = \lambda\,\mathrm{ad}_{u_s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant N. \tag{A2.1.22}$$

Лемма A2.1.23. Бездисперсионную версию системы (A2.1.17)

$$\partial_t(u_i) = \partial\Big(3\sum_{s=0}^{i} u_s u_{i-s}\Big), \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \tag{A2.1.24}$$

можно привести к виду

$$\partial_t(u_i) = \sum_{j=0}^{i} B_{(j)}\left(\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_{N-i+j}}\right), \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \tag{A2.1.25}$$

который является покомпонентной формой системы

$$\partial_t(\boldsymbol{u}) = B^N\left(\frac{\delta H_{(N)}}{\delta \boldsymbol{u}}\right), \tag{A2.1.26}$$

$$B^N = \begin{pmatrix} & & & B_{(0)} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & B_{(1)} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ B_{(0)} & B_{(1)} & \ldots & B_{(N)} \end{pmatrix}. \tag{A2.1.27}$$

Доказательство. Согласно формуле (A2.1.14),

$$\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_{N-r}} = 3\sum_{s=0}^{r} u_s u_{r-s}, \quad 0 \leqslant r \leqslant N. \tag{A2.1.28}$$

Следовательно,

$$B_{(0)}\left(\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_N}\right) = (\partial + \lambda\,\mathrm{ad}_{u_0})(3u_0^2) = \partial(3u_0^2),$$

и это то же, что случай $i = 0$ для бездисперсионной системы (A2.1.24). Это доказывает формулу (A2.1.25) при $i = 0$. При $i > 0$, правая часть формулы (A2.1.25) дает

$$B_{(0)}\left(\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_{N-i}}\right) + \sum_{j=1}^{i} B_{(j)}\left(\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_{N-i+j}}\right) \overset{(\text{A2.1.22, 28})}{=}$$

$$= (\partial + \lambda\,\mathrm{ad}_{u_0})\Big(3\sum_{s=0}^{i} u_s u_{i-s}\Big) + \sum_{j=1}^{i} \lambda\,\mathrm{ad}_{u_j}\Big(3\sum_{s=0}^{i-j} u_s u_{i-j-s}\Big) =$$

$$= \partial\Big(3\sum_{s=0}^{i} u_s u_{i-s}\Big) + \tag{A2.1.29a}$$

$$+3\lambda\sum_{j=0}^{i}\Big[u_j, \sum_{s=0}^{i-j} u_s u_{i-j-s}\Big]. \tag{A2.1.29b}$$

Выражение (A2.1.29a) совпадает с правой частью уравнения (A2.1.24). Выражение (A2.1.29b) равно нулю, так как

$$\sum_{j=0}^{i}\Big[u_j, \sum_{s=0}^{i-j} u_s u_{i-j-s}\Big] = \sum_{j+s+k=i} [u_j,\ u_s u_k] = \sum u_j u_s u_k - \sum u_s u_k u_j = 0. \qquad \blacksquare$$

Матрица B^N (A2.1.27) задает искомую гамильтонову структуру для конечного обрыва длины N в асимптотическом разложении системы (A2.1.1). Два следующих раздела посвящены проверке этого утверждения. Именно, в следующем разделе мы докажем, что формулы (A2.1.25) и (A2.1.3) эквивалентны: это сводится к тождеству

$$\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)_{(i-j)} = \frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_{N+j-i}}, \tag{A2.1.30}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\delta H_{(N)}}{\delta u_r} = \left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)_{(N-r)}. \tag{A2.1.31}$$

Гамильтоновость матрицы B^N (A2.1.27) будет доказана в §A2.3.

A2.2 Векторные поля, дифференциальные формы, вариационные производные

В этом разделе мы определяем, как процедура асимптотических разложений взаимодействует с основными объектами, перечисленными в заголовке раздела.

Пусть $C = C_q = R\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle$ будет основным дифференциально-разностным кольцом, в обозначениях Главы 10. В оставшейся части этого Приложения будем обозначать

$$\widetilde{(\cdot)} = (\cdot)[[\varepsilon]], \tag{A2.2.1}$$

чем бы ни было $(\cdot)$. *Асимптотическое разложение* есть гомоморфизм

$$\Phi : C_q \hookrightarrow \widetilde{C}_q \to \widetilde{C}_u, \tag{A2.2.2}$$

заданный формулой

$$\Phi(\boldsymbol{q}) = \sum_{s \geqslant 0} \boldsymbol{u}_s \varepsilon^s, \tag{A2.2.3a}$$

или, в компонентах,

$$\Phi(q_i) = \sum_{s \geqslant 0} u_{i|s} \varepsilon^s, \quad i \in \mathcal{I}. \tag{A2.2.3b}$$

Используя обозначение (A2.1.6), это можно переписать в виде

$$(q_i)_{(s)} = u_{i|s}, \quad \boldsymbol{q}_{(s)} = \boldsymbol{u}_s, \quad i \in \mathcal{I}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{A2.2.4}$$

Удобно думать о $\widetilde{C}_q$, как о

$$\widetilde{R}\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle = (\widetilde{C})_q. \tag{A2.2.5}$$

Это позволяет нам использовать вложение

$$D^{ev}(C) \hookrightarrow D^{ev}(\widetilde{C}) \overset{iso}{=} \widetilde{D^{ev}(C)}, \tag{A2.2.6}$$

и аналогично

$$\mathrm{Der}(C) \hookrightarrow \mathrm{Der}(\widetilde{C}) \overset{iso}{=} \widetilde{\mathrm{Der}(C)}. \tag{A2.2.7}$$

Мы применим также следующее обозначение:

$$\text{если} \quad C_q = C, \quad \text{то} \quad C_u = C_\infty. \tag{A2.2.8}$$

Определим теперь, как асимптотическое разложение влияет на различные алгебраические конструкции. Во-первых, векторные поля. Если $X \in D^{ev}(C) = D^{ev}(C_q)$, то мы свяжем с этим X векторное поле $X^A \in D^{ev}(C_u) = D^{ev}(C_\infty)$, определенное уравнением

$$\Phi X = X^A \Phi : \ C \to \widetilde{C}_\infty. \tag{A2.2.9}$$

Применяя это равенство к $\boldsymbol{q}$, находим

$$\Phi X(\boldsymbol{q}) = \Phi(\boldsymbol{X}) = \sum_{s \geqslant 0} \boldsymbol{X}_{(s)} \varepsilon^s = X^A \Phi(\boldsymbol{q}) = X^A \Big(\sum \boldsymbol{u}_s \varepsilon^s \Big), \tag{A2.2.10}$$

откуда

$$X^A(\boldsymbol{u}_s) = \boldsymbol{X}_{(s)}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \tag{A2.2.11a}$$

или

$$X^A(u_{i|s}) = (X_i)_{(s)}, \quad X_i = X(q_i), \quad i \in \mathcal{I}, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \tag{A2.2.11b}$$

Таким образом, эволюционное дифференцирование $X^A \in D^{ev}(C_u)$ корректно определено. Мы используем ту же букву Φ для отображения $D^{ev}(C) \to D^{ev}(C_\infty)$, $X \mapsto X^A$. Очевидно, оно инъективно.

Утверждение А2.2.12. Отображение асимптотического разложения (А2.2.9) $\Phi : D^{ev}(C) \to D^{ev}(C_\infty)$ является гомоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство. Следует проверить, что

$$[X, Y]^A = [X^A, Y^A], \quad \forall\, X, Y \in D^{ev}(C). \tag{A2.2.13}$$

Для этого мы используем следующий

Принцип А2.2.14. Два векторных поля $U, V \in D^{ev}(C_\infty)$ равны, если и только если

$$U\Phi(\boldsymbol{q}) = V\Phi(\boldsymbol{q}). \tag{A2.2.15}$$

Это так, поскольку равенство (А2.2.15) означает

$$\sum_s U(\boldsymbol{u}_s)\varepsilon^s = \sum_s V(\boldsymbol{u}_s)\varepsilon^s, \tag{A2.2.16a}$$

что верно, если и только если

$$U(\boldsymbol{u}_s) = V(\boldsymbol{u}_s), \quad \forall\, s \in \mathbb{Z}_+. \tag{A2.2.16b}$$

При помощи этого принципа, равенство (А2.2.13) легко доказывается:

$$\begin{gathered}[X, Y]^A\Phi \overset{(\mathrm{A2.2.9})}{=} \Phi[X, Y] = \Phi(XY - YX) = \\ = X^A\Phi Y - Y^A\Phi X = X^A Y^A \Phi - Y^A X^A \Phi = [X^A, Y^A]\Phi.\end{gathered}$$

▮

Далее, дифференциальные формы. Если $\omega \in \Omega^1(C)$,

$$\omega = \sum \psi_i^{g|\nu} dq_i^{(g|\nu)} \varphi_i^{g|\nu}, \quad \psi_i^{\cdots}, \varphi_i^{\cdots} \in C, \tag{A2.2.17}$$

то $\Phi(\omega) \in \widetilde{\Omega^1(C_\infty)}$ определяется по правилу

$$\Phi\Big(\sum \psi_i^{g|\nu} dq_i^{(g|\nu)} \varphi_i^{g|\nu}\Big) = \sum \Phi(\psi_i^{g|\nu}) d\Phi(q_i^{(g|\nu)}) \Phi(\varphi_i^{(g|\nu)}). \tag{A2.2.18}$$

Другими словами, Φ однозначно продолжается из отображения $\Phi : C \to \widetilde{C}_\infty$ до отображения $\Phi : \Omega^1(C) \to \Omega^1(\widetilde{C}_\infty)$, исходя из требования, что Φ коммутирует с дифференциалом d:

$$\Phi d_q = d_u \Phi : C \to \Omega^1(\widetilde{C}_\infty). \tag{A2.2.19}$$

Очевидно, отображение Φ коммутирует с отображением $\mathrm{Flip} : \Omega^1 \to \Omega^{1+}$ (10.1.30), и переводит тривиальные элементы C и $\Omega^1(C)$ в тривиальные элементы $\widetilde{C}_u$ и $\Omega^1(\widetilde{C}_u)$ соответственно. Следовательно, применяя отображение Φ к формуле (10.1.60):

$$d(H) \approx d\boldsymbol{q}^t \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}, \tag{A2.2.20}$$

находим, что

$$\Phi(d\boldsymbol{q}^t)\Phi\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right) = \Big(\sum_s \varepsilon^s d\boldsymbol{u}_s^t\Big)\sum_\ell \left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)_{(\ell)}\varepsilon^\ell = \sum \varepsilon^{s+\ell} d\boldsymbol{u}_s^t \left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)_{(\ell)} \approx$$

$$\approx \Phi d(H) = d\Phi(H) = d\Big(\sum_r H_{(r)}\varepsilon^r\Big) \approx \sum_{rs} d\boldsymbol{u}_s^t \frac{\delta H_{(r)}}{\delta \boldsymbol{u}_s}\varepsilon^r. \qquad \text{(A2.2.21)}$$

Следовательно,

$$\frac{\delta H_{(r)}}{\delta \boldsymbol{u}_s} = \left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right)_{(r-s)}. \qquad \text{(A2.2.22)}$$

Это и есть искомая формула (A2.1.31).

Можно показать, что процедура асимптотического разложения, рассмотренная в данном Приложении, является *естественной*. Так как здесь нам этот факт не будет нужен, его доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.

В следующем разделе нам понадобится формула

$$\frac{DH_{(r)}}{D\boldsymbol{u}_s} = \left(\frac{DH}{D\boldsymbol{q}}\right)_{(r-s)}. \qquad \text{(A2.2.23)}$$

Ее можно доказать следующим образом. По определению производной Фреше (10.2.5), имеем

$$\frac{DH}{D\boldsymbol{q}}(X) = X(H), \quad \forall\ X \in D^{ev}(C). \qquad \text{(A2.2.24)}$$

Применяя отображение Φ (A2.2.2) к обеим частям этого равенства и продолжая действие Φ на операторы покоэффициентно, получаем

$$\Phi\left(\frac{DH}{D\boldsymbol{q}}(X)\right) = \left[\Phi\left(\frac{DH}{D\boldsymbol{q}}\right)\right]\Phi(X) = \sum_\ell \left(\frac{DH}{D\boldsymbol{q}}\right)_{(\ell)}\varepsilon^\ell\Big(\sum_s X_{(s)}\varepsilon^s\Big) \overset{\text{(A2.2.11в)}}{=}$$

$$= \sum_{\ell s}\left(\frac{DH}{D\boldsymbol{q}}\right)_{(\ell)}\varepsilon^\ell(X^A(\boldsymbol{u}_s))\varepsilon^s = \qquad \text{(A2.2.25a)}$$

$$= \Phi X(H) \overset{\text{(A2.2.9)}}{=} X^A\Phi(H) = X^A\Big(\sum_r H_{(r)}\varepsilon^r\Big) =$$

$$= \sum_{rs}\frac{DH_{(r)}}{D\boldsymbol{u}_s}(X^A(\boldsymbol{u}_s))\varepsilon^r. \qquad \text{(A2.2.25b)}$$

Так как X произвольно, равенство (A2.2.25) дает искомую формулу (A2.2.23). (На самом деле, требуется выкладка еще в несколько строк, так как, хотя X произвольно, $\{X^A(\boldsymbol{u}_s)\}$ таковыми не являются. Читателю предлагается заполнить пробел в доказательстве. Может помочь очевидная формула

$$\frac{DH_{(r)}}{D\boldsymbol{u}_r} = \frac{DH}{D\boldsymbol{q}}\Big|_{\boldsymbol{q}\mapsto\boldsymbol{u}_0}\ .) \qquad \text{(A2.2.26)}$$

A2.3 Гамильтоновы структуры

В этом разделе доказывается, что матрица B^N (A2.1.27) гамильтонова, при условии гамильтоновости матрицы B.

Согласно основному результату гамильтонова формализма (Упражнение 11.1.24), кососимметрическая матрица B гамильтонова, если и только если

$$B\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}[\boldsymbol{Y}^t B(\boldsymbol{X})] = D_{\boldsymbol{q}}[B(\boldsymbol{Y})][B(\boldsymbol{X})] - D_{\boldsymbol{q}}[B(\boldsymbol{X})][B(\boldsymbol{Y})] \tag{A2.3.1}$$

для произвольных независящих от q векторов $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$. Следовательно, матрица B^N (A2.1.27):

$$B^N = \begin{pmatrix} & & & B_{(0)} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & B_{(1)} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ B_{(0)} & B_{(1)} & \ldots & B_{(N)} \end{pmatrix}, \tag{A2.3.2}$$

гамильтонова, если и только если

$$B^N \frac{\delta}{\delta \underline{\boldsymbol{u}}}|\underline{\boldsymbol{Y}}^t B^N(\underline{\boldsymbol{X}})| = D_{\underline{\boldsymbol{u}}}[B^N(\underline{\boldsymbol{Y}})|[B^N(\underline{\boldsymbol{X}})| - D_{\underline{\boldsymbol{u}}}|B^N(\underline{\boldsymbol{X}})|(B^N(\underline{\boldsymbol{Y}})|, \tag{A2.3.3}$$

для произвольных векторов $\underline{\boldsymbol{X}}, \underline{\boldsymbol{Y}}$, не зависящих от $\underline{\boldsymbol{u}}$. Согласно формуле (A2.3.2) имеем

$$B^N_{ij} = B_{(i+j-N)}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant N, \tag{A2.3.4}$$

где подразумевается, что

$$(\ldots)_{(i)} = 0, \quad \text{при} \quad i < 0. \tag{A2.3.5}$$

Элементы матрицы B^N (A2.3.2) сами матрицы; аналогично, элементы подчеркнутых векторов $\underline{\boldsymbol{u}}$, $\underline{\boldsymbol{X}}$, $\underline{\boldsymbol{Y}}$ в формуле (A2.3.3) сами являются векторами. Последующие вычисления можно существенно упростить, *обратив* нумерацию компонент в векторах $\underline{\boldsymbol{X}}$ и $\underline{\boldsymbol{Y}}$:

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_N \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_N \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_0 \end{pmatrix}. \tag{A2.3.6}$$

Тогда, по формуле (A2.3.4),

$$[B^N(\underline{\boldsymbol{Y}})]_s = \sum_i B^N_{si}(\boldsymbol{Y}_{N-i}) = \sum B_{(s+i-N)}(\boldsymbol{Y}_{N-i}) = \sum_{\ell+j=s} B_{(\ell)}(\boldsymbol{Y}_j). \tag{A2.3.7}$$

Следовательно, $\boldsymbol{u}_s$-компонента в правой части (A2.3.3) равна

$$\sum_{i,\nu,\mu+j=s} \frac{D|B_{(\mu)}(\boldsymbol{Y}_j)]}{D\boldsymbol{u}_{\nu+i}}[B_{(\nu)}(\boldsymbol{X}_i)] - \sum_{j,\nu,\mu+i=s} \frac{D[B_{(\mu)}(\boldsymbol{X}_j)]}{D\boldsymbol{u}_{\nu+j}}[B_{(\nu)}(\boldsymbol{Y}_j)]. \tag{A2.3.8}$$

С другой стороны,

$$\underline{\boldsymbol{Y}}^t B^N(\underline{\boldsymbol{X}}) = \sum_j \boldsymbol{Y}^t_j [B^N(\underline{\boldsymbol{X}})|_{N-j} = \sum_{ij} \boldsymbol{Y}^t_j B_{(N-j-i)}(\boldsymbol{X}_i), \tag{A2.3.9}$$

то есть, для $\boldsymbol{u}_s$-компоненты левой части формулы (A2.3.3) получаем

$$\sum_{rij} B_{(s+r-N)}\left\{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{u}_r}|\boldsymbol{Y}^t_j B_{(N-j-i)}(\boldsymbol{X}_i)]\right\}. \tag{A2.3.10}$$

Осталось проверить равенство $\{(A2.3.8) = (A2.3.10)\}$. В обозначениях

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{Y} \tag{A2.3.11}$$

оно эквивалентно равенству

$$\sum_r B_{(s+r-N)}\left\{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{u}_r}[\boldsymbol{Y}^t B_{(N-i-j)}(\boldsymbol{X})]\right\} =$$
$$= \sum_\nu \left(\frac{D|B_{(s-j)}(\boldsymbol{Y})|}{D\boldsymbol{u}_{\nu+i}}[B_{(\nu)}(\boldsymbol{X})] - \frac{D[B_{(s-i)}(\boldsymbol{X})|}{D\boldsymbol{u}_{\nu+j}}[B_{(\nu)}(\boldsymbol{Y})]\right). \tag{A2.3.12}$$

Пользуясь формулой (A2.2.23), правую часть последнего можно переписать, как

$$\left(\frac{D[B(\boldsymbol{Y})|}{D\boldsymbol{q}}\right)_{(s-j-i)}[B(\boldsymbol{X})|_{(\nu)} - \leftrightarrow \quad = \quad \left\{\frac{D[B(\boldsymbol{Y})]}{D\boldsymbol{q}}[B(\boldsymbol{X})] - \leftrightarrow\right\}_{(s-j-i)} \overset{(A2.3.1)}{=}$$
$$= \left\{B\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}[\boldsymbol{Y}^t B(\boldsymbol{X})]\right\}_{(s-j-i)} \overset{(A2.2.22)}{=} \sum_\mu B_{(\mu)}\left\{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{u}_r}[\boldsymbol{Y}^t B_{(s-j-i-\mu+r)}(\boldsymbol{X})]\right\},$$

что совпадает с его левой частью. Здесь запись “$-\leftrightarrow$” обозначает: “минус это же выражение с переставленными $\boldsymbol{X}$ и Y”.

Приложение А3

Вариационное исчисление над некоммутативными кольцами

> По природе вещей, красноречивый математик должен быть такой же редкостью, как говорящая рыба, и очевидно, что чем больше человек посвящает себя изучению ораторских приемов, тем реже его ум находится в состоянии, подходящем для математизирования. Математик всегда преследует цель привести все свои выражения к наиболее короткому виду, отбросить все избыточные слова и фразы, и сконцентрировать Максимум смысла в Минимуме речи.
>
> Сильвестр, "Речь в честь годовщины Университета Джона Хопкинса" (22 февраля 1877)

В этом приложении развивается алгебраическое вариационное исчисление над ассоциативными кольцами. Основной результат — в §А3.2 найдены образ и ядро вариационного оператора (Эйлера-Лагранжа) δ.

А3.1 Основные объекты

В этом разделе вводятся основные объекты вариационного исчисления: эволюционные дифференцирования, дифференциальные 1-формы, вариационные производные и свойства их преобразований, формула для первой вариации. Логика изложения, насколько возможно, параллельна чисто абелевому случаю из первой половины §2.1 в [Kup 1992].

Пусть $\bar{R}$ ассоциативное кольцо с единицей и алгебра над $\mathbb{Q}$ (или полем $\mathcal{F}$ характеристики нуль.) Обозначим $\mathrm{Der}(\bar{R})$ алгебру Ли дифференцирований $\bar{R}$ (над $\mathbb{Q}$ или $\mathcal{F}$). Выберем дифференцирование $Z \in \mathrm{Der}(\bar{R})$. Если $\widetilde{R}$ является $\bar{R}$–бимодулем, то аддитивное отображение $\widetilde{Z} : \widetilde{R} \to \widetilde{R}$ называется ***дифференцированием $\widetilde{R}$, накрывающим Z***, если

$$\widetilde{Z}(k_1\widetilde{k}k_2) = Z(k_1)\widetilde{k}k_2 + k_1\widetilde{Z}(\widetilde{k})k_2 + k_1\widetilde{k}Z(k_2), \quad \forall\, k_1, k_2 \in \bar{R}, \quad \widetilde{k} \in \widetilde{R}. \qquad \text{(A3.1.1)}$$

Упражнение А3.1.2. Покажите, что если $\widetilde{Z}_i$ накрывают Z_i, $i = 1, 2$, то $[\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2]$ накрывает $[Z_1, Z_2]$.

Аддитивное отображение $\rho : \bar{R} \to \widetilde{R}$ называется ***дифференцированием из $\bar{R}$ в $\widetilde{R}$***, если

$$\rho(k_1 k_2) = \rho(k_1) k_2 + k_1 \rho(k_2), \quad \forall\, k_1, k_2 \in \bar{R}. \tag{A3.1.3}$$

Множество всех таких ρ обозначается $\mathrm{Der}(\bar{R}, \widetilde{R})$.

Упражнение А3.1.4. Покажите, что если $\rho \in \mathrm{Der}(\bar{R}, \widetilde{R})$, то и

$$[Z, \rho] := \widetilde{Z}\rho - \rho Z \in \mathrm{Der}(\bar{R}, \widetilde{R}). \tag{A3.1.5}$$

Рассмотрим m взаимно коммутирующих дифференцирований $\partial_1, \dots, \partial_m : \bar{R} \to \bar{R}$ (над $\mathbb{Q}$ или $\mathcal{F}$, как угодно; для краткости, мы больше не будем делать эту незначительную оговорку.) Такое $\bar{R}$ называется ***дифференциальным кольцом***. Пусть $\mathcal{I}$ множество индексов. Пусть $C = C(q) = \bar{R}\langle q_\alpha^{(\sigma)} \rangle$, $\alpha \in \mathcal{I}$, $\sigma \in \mathbb{Z}_+^m$ — ассоциативное кольцо, свободно порожденное над $\bar{R}$ генераторами $q_\alpha^{(\sigma)}$. Мы можем превратить C в дифференциальное кольцо, продолжив дифференцирования ∂_i из $\bar{R}$ в C, для чего определим их действия на генераторы $q_\alpha^{(\sigma)}$ по правилу

$$\partial_i(q_\alpha^{(\sigma)}) = q_\alpha^{(\sigma + 1_i)}; \tag{A3.1.6}$$

здесь $1_i \in \mathbb{Z}_+^m$ обозначает мультииндекс $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ с 1 на i-й позиции.

Упражнение А3.1.7. Покажите, что дифференцирования ∂_i на C также коммутируют.

Введем мультииндексные обозначения: если $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, то

$$\partial^\sigma = \partial_1^{\sigma_1} \dots \partial_m^{\sigma_m}, \quad (-\partial)^\sigma = (-\partial_1)^{\sigma_1} \dots (-\partial_m)^{\sigma_m} = (-1)^\sigma \partial^\sigma, \tag{A3.1.8}$$

$$(-1)^\sigma = (-1)^{|\sigma|}, \quad |\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_m. \tag{A3.1.9}$$

Примем также, что

$$q_\alpha = q_\alpha^{(0)}. \tag{A3.1.10}$$

Упражнение А3.1.11. Покажите, что

$$q_\alpha^{(\sigma)} = \partial^\sigma(q_\alpha). \tag{A3.1.12}$$

Обозначим $\mathrm{Der}(C)$ алгебру Ли дифференцирований C над $\bar{R}$. Любой элемент $Z \in \mathrm{Der}(C)$ однозначно определен своими значениями на генераторах $q_\alpha^{(\sigma)}$ из C : если $Z(q_\alpha^{(\nu)}) = Z_\alpha^\nu$, то можно использовать наглядную запись

$$Z = \sum Z_\alpha^\nu \frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}, \tag{A3.1.13}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}$ есть дифференцирование C, действующее на генераторы C по правилу

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}} : q_\beta^{(\sigma)} \mapsto \delta_{\beta\nu}^{\alpha\sigma}. \tag{A3.1.14}$$

Замечание А3.1.15. В объекте $\mathrm{Der}(C)$ мы встречаем первое различие между абелевыми и неабелевыми понятиями: $\mathrm{Der}(C)$ больше не является левым C–модулем. Это означает, что, для данных $a \in C$ и $Z \in \mathrm{Der}(C)$, не существует элемента $(a * Z) \in \mathrm{Der}(C)$ такого, что

$$(a * Z)(b) = a(Z(b)), \quad \forall\, b \in C. \tag{A3.1.16}$$

(Это же наблюдение относится к $\mathrm{Der}(\bar{R})$.) Примеры таких различий будут накапливаться в дальнейшем.

Обозначим через $\widehat{L}_k$ и $\widehat{R}_k$ соответственно операторы левого и правого умножения на элемент $k \in \bar{R}$, в любом $\bar{R}$–бимодуле. Ассоциативное кольцо, порожденное этими операторами, обозначается $Op_0(\bar{R})$:

$$Op_0(\bar{R}) = \bigl\{\sum_s \widehat{L}_{k(s)}\widehat{R}_{\ell(s)} \mid \text{конечные суммы; } k(s), \ell(s) \in \bar{R}\bigr\}. \tag{A3.1.17}$$

Мы встречаем пример таких операторов нулевого порядка в стандартном объекте $\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}$, где $H \in C$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}(r) := \Bigl(r\frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}\Bigr)(H), \quad \forall\, r \in C; \tag{A3.1.18}$$

здесь $r\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}$ дифференцирование C (над $\bar{R}$), действующее по правилу:

$$\Bigl(r\frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}\Bigr)\bigl(q_\beta^{(\sigma)}\bigr) = r\delta_{\beta\nu}^{\alpha\sigma}. \tag{A3.1.19}$$

Таким образом, $\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}$ *не является больше элементом* C, будучи оператором.

Упражнение А3.1.20. (i) Покажите, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}(r) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\epsilon=0}\bigl(H|_{q_\alpha^{(\nu)} \mapsto q_\alpha^{(\nu)} + \varepsilon r}\bigr); \tag{A3.1.21}$$

(ii) Покажите, что

$$\frac{\partial(HF)}{\partial q_\alpha^{(\nu)}} = \widehat{R}_F\frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}} + \widehat{L}_H\frac{\partial F}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}, \quad \forall\, H, F \in C. \tag{A3.1.22}$$

Элемент $X \in \mathrm{Der}(C)$ называется *эволюционным дифференцированием*, или *эволюционным [векторным] полем*, если он коммутирует с $\partial_1, \ldots, \partial_m$:

$$\begin{aligned} X(q_\alpha^{(\sigma)}) &= X\partial^\sigma(q_\alpha) = \partial^\sigma X(q_\alpha) \quad \Rightarrow \\ X &= \sum \partial^\sigma(X_\alpha)\frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\sigma)}}, \quad X_\alpha = X(q_\alpha) =: (\mathbf{X})_\alpha. \end{aligned} \tag{A3.1.23}$$

Алгебра Ли эволюционных дифференцирований обозначается $D^{ev} = D^{ev}(C)$. Перейдем к *дифференциальным (1-) формам.* C–бимодуль 1-форм, $\Omega^1(C)$, определяется как

$$\Omega^1(C) = \bigl\{\sum \psi_{\alpha s}^\nu dq_\alpha^{(\nu)}\varphi_{\alpha s}^\nu \mid \text{конечные суммы; } \psi_{\alpha s}^\nu, \varphi_{\alpha s}^\nu \in C\bigr\}, \tag{A3.1.24}$$

с естественной структурой C–бимодуля

$$\widehat{L}_a\widehat{R}_b(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi) = a\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi b. \qquad \text{(A3.1.25)}$$

C–бимодуль *редуцированных форм*, $\Omega_0^1(C)$, определен как

$$\Omega_0^1(C) = \left\{\sum \psi_{\alpha s} dq_\alpha \varphi_{\alpha s} \mid \text{конечные суммы; } \psi_{\alpha s}, \varphi_{\alpha s} \in C\right\}. \qquad \text{(A3.1.26)}$$

Определим следующее естественное спаривание $\langle(\cdot),(\cdot\cdot)\rangle$ между $\Omega^1(C)$ и $\mathrm{Der}(C)$:

$$\left\langle \psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi,\ \sum Z_\beta^\sigma \frac{\partial}{\partial q_\beta^{(\sigma)}} \right\rangle = \psi Z_\alpha^\nu \varphi. \qquad \text{(A3.1.27)}$$

Используется также обозначение $\omega(Z)$ вместо $\langle\omega, Z\rangle$. Пусть $d : C \to \Omega^1(C)$ – естественное дифференцирование (над $\bar{R}$), переводящее $q_\alpha^{(\nu)}$ в $dq_\alpha^{(\nu)}$.

Упражнение А3.1.28. Покажите, что

$$Z(H) = \langle d(H), Z\rangle, \quad \forall\ H \in C,\ \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C). \qquad \text{(A3.1.29)}$$

Так как $\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}$ есть элемент $Op_0(C)$, то он действует не только на C, но и на любой C–бимодуль; в частности, на $\Omega^1(C)$.

Упражнение А3.1.30. Покажите, что

$$d(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}(dq_\alpha^{(\nu)}), \quad \forall\ H \in C. \qquad \text{(A3.1.31)}$$

Далее, продолжим действия ∂ и $\mathrm{Der}(C)$ из C в $\Omega^1(C)$, таким образом, что: 1) эти действия накрывают соответствующие действия на C; 2) коммутируют с d :

$$\partial_i(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi) = \partial_i(\psi)dq_\alpha^{(\nu)}\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu+1,)}\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu)}\partial_i(\varphi), \qquad \text{(A3.1.32)}$$

$$Z(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi) = Z(\psi)dq_\alpha^{(\nu)}\varphi + \psi d(Z_\alpha^\nu)\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu)}Z(\varphi), \quad \forall\ Z \in \mathrm{Der}(C). \qquad \text{(A3.1.33)}$$

Упражнение А3.1.34. Покажите, что действия $D^{ev}(C)$ и ∂_i на $\Omega^1(C)$ коммутируют.

Упражнение А3.1.35. Покажите, что

$$[Z(\omega)](Y) = Z(\omega(Y)) - \omega([Z,Y]), \quad \forall\ \omega \in \Omega^1(C), \quad \forall\ Y, Z \in \mathrm{Der}(C). \qquad \text{(A3.1.36)}$$

Превратим ассоциативное кольцо $Op_0(\bar{R})$ в дифференциальное по правилу

$$\partial_i(\widehat{L}_k\widehat{R}_\ell) = \widehat{L}_{\partial_i(k)}\widehat{R}_\ell + \widehat{L}_k\widehat{R}_{\partial_i(\ell)}, \quad k, \ell \in \bar{R}. \qquad \text{(A3.1.37)}$$

Очевидно, ∂_i является дифференцированием и

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \quad \text{на} \quad Op_0(\bar{R}). \qquad \text{(A3.1.38)}$$

Мы часто будем использовать обозначение $(\cdot)^{(\sigma)}$ вместо $\partial^\sigma(\cdot)$, где $(\cdot)$ обозначает произвольный элемент пространства, на котором определено действие ∂_i.

Упражнение A3.1.39. Покажите, что для любого $\mathcal{O} \in Op_0(\bar{R})$ и любого $\bar{R}$–бимодуля $\widetilde{R}$, на котором действуют ∂_i,

$$[\partial_i(\mathcal{O})](\widetilde{\kappa}) = \partial_i[\mathcal{O}(\widetilde{\kappa})] - \mathcal{O}(\partial_i(\widetilde{\kappa})), \quad \forall\, \widetilde{\kappa} \in \widetilde{R}. \tag{A3.1.40}$$

Введем обозначение

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \partial_i \tag{A3.1.41}$$

для подпространства “*тривиальных*” элементов (“*дивергенций*”). Запись $(\cdot) \sim (\cdot\cdot)$ означает, что $[(\cdot) - (\cdot\cdot)] \in \mathcal{T}$; при этом $(\cdot)$ и $(\cdot\cdot)$ называются *эквивалентными*.

Пусть $\widehat{\delta} : \Omega^1(C) \to \Omega^1_0(C)$ есть следующая *проекция*:

$$\widehat{\delta}(\psi dq_\alpha^{(\nu)} \varphi) = \widehat{\delta}[\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi (dq_\alpha^{(\nu)})] = [(-\partial)^\nu (\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi)](dq_\alpha). \tag{A3.1.42}$$

Упражнение A3.1.43. Покажите, что

$$\widehat{\delta}(\omega) \sim \omega, \quad \forall\, \omega \in \Omega^1(C).$$

Оператор Эйлера-Лагранжа $\delta : C \to \Omega^1_0(C)$ определен по правилу

$$\delta = \widehat{\delta} d : C \to \Omega^1_0(C). \tag{A3.1.44}$$

Так как любую форму $\omega \in \Omega^1(C)$ можно записать в виде

$$\omega = \sum \omega_\alpha^\nu (dq_\alpha^{(\nu)}), \quad \omega_\alpha^\nu \in Op_0(C), \tag{A3.1.45}$$

и аналогично

$$\forall\, \omega \in \Omega^1_0(C) \quad \Rightarrow \omega = \sum_\alpha \omega_\alpha (dq_\alpha), \quad \omega_\alpha \in Op_0(C), \tag{A3.1.46}$$

то для любого $H \in C$ имеем

$$\delta(H) = \sum_\alpha [\delta(H)]_\alpha (dq_\alpha) =: \sum_\alpha \frac{\delta H}{\delta q_\alpha} (dq_\alpha). \tag{A3.1.47}$$

Тем самым определены вариационые производные $\dfrac{\delta H}{\delta q_\alpha}$. В отличие от знакомой абелевой ситуации, $\dfrac{\delta H}{\delta q_\alpha}$ теперь является *оператором*. Выведем его явный вид. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta(H) = \widehat{\delta} d(H) &\overset{(A3.1.31)}{=} \widehat{\delta}\Big[\sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}} (dq_\alpha^{(\nu)})\Big] \overset{(A3.1.42)}{=} \\ &= \Big[\sum (-\partial)^\nu \Big(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha^{(\nu)}}\Big)\Big](dq_\alpha), \end{aligned} \tag{A3.1.48}$$

откуда

$$\frac{\delta H}{\delta q_\alpha} = \sum_\nu (-\partial)^\nu \Big(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}\Big). \tag{A3.1.49}$$

Это знакомая абелева форма, но содержание совершенно другое.

Утверждение A3.1.50. $\widehat{\delta}(\mathcal{T}) = \{0\}$.

Доказательство. Имеем

$$\widehat{\delta}[\partial_i(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi)] = \widehat{\delta}[\partial_i(\psi)dq_\alpha^{(\nu)}\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu+1_i)}\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu)}\partial_i(\varphi)] =$$
$$= [(-\partial)^\nu(\widehat{L}_{\partial_i(\psi)}\widehat{R}_\varphi + \widehat{L}_\psi\widehat{R}_{\partial_i(\psi)}) + (-\partial_i)(-\partial)^\nu(\widehat{L}_\psi\widehat{R}_\varphi)](dq_\alpha) = 0,$$

поскольку

$$(-\partial_i)(-\partial)^\nu(\widehat{L}_\psi\widehat{R}_\varphi) = -(-\partial)^\nu\partial_i(\widehat{L}_\psi\widehat{R}_\varphi) = -(-\partial)^\nu(\widehat{L}_{\partial_i(\psi)}\widehat{R}_\varphi + \widehat{L}_\psi\widehat{R}_{\partial_i(\psi)}).$$ ▮

Следствие А3.1.51.

$$H \sim 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta H}{\delta q_\alpha} = 0, \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{I}. \tag{A3.1.52}$$

Доказательство. Если $H = \partial_i(F)$ для некоторого $F \in C$, то

$$\delta(H) = \widehat{\delta}d(H) = \widehat{\delta}d\partial_i(F) = \widehat{\delta}\partial_i[d(F)] = 0$$

в силу Утверждения А3.1.50. Следовательно, вектор $\dfrac{\delta H}{\delta q}$ с компонентами

$$\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right)_\alpha = \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}. \tag{A3.1.53}$$

обращается в ноль. ▮

Упражнение А3.1.54. (Лемма Дюбуа-Реймона)
Если $\mathcal{O} \in \mathcal{O}p_0(C)$ таков, что $\mathcal{O}(C) \sim 0$, то $\mathcal{O} = 0$.
[Подсказка : Абелевы рассуждения работают.]

Лемма А3.1.55. Если $\omega \in \Omega_0^1(C)$ и $\langle\omega, \mathrm{Der}(C)\rangle \sim 0$, то $\omega = 0$.

Доказательство. Пусть $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha(dq_\alpha)$. Тогда

$$\left\langle \sum \omega_\alpha(dq_\alpha), C\frac{\partial}{\partial q_\beta}\right\rangle = \omega_\beta(C) \sim 0.$$

Следовательио, по Лемме Дюбуа-Реймона, $\omega_\beta = 0$. Таким образом, $\omega = 0$. ▮

Упражнение А3.1.56. Покажите, что

$$\{\omega \in \Omega_0^1(C) \quad \& \quad \langle\omega, D^{ev}(C)\rangle \sim 0\} \quad \Rightarrow \omega = 0. \tag{A3.1.57}$$

Следующая Теорема устанавлнвает связь между развитым выше подходом к вариационому нсчислению, основаным на дифференциальных формах, н физико-геометрическим (по духу) подходом, основанным на "вариациях", то есть, на действиях $D^{ev}(C)$ на $\Omega^1(C)$ и $\Omega_0^1(C)$.

Теорема А3.1.58. (a) Если $\omega \in \Omega_0^1(C)$ и $\omega \sim 0$, то $\omega = 0$;
(b) Если $\omega \in \Omega^1(C)$ и $\omega \sim 0$, то $\langle\omega, D^{ev}\rangle \sim 0$;
(c) Если $\omega \in \Omega^1$ и $\langle\omega, D^{ev}\rangle \sim 0$, то $\omega \sim 0$;
(d) Проекцяя $\widehat{\delta} : \Omega^1 \to \Omega_0^1$ однозначно определяется соотношением

$$\langle\widehat{\delta}(\omega), X\rangle \sim \langle\omega, X\rangle, \quad \forall\, X \in D^{ev};$$

(e) $\mathrm{Ker}\,\widehat{\delta} = \mathcal{T}$ в Ω^1.

Доказательство.

(b) $$\langle \partial_i(\omega), X\rangle = \langle \partial_i(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi), X\rangle =$$
$$= \Big\langle \partial_i(\psi)dq_\alpha^{(\nu)}\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu+1_i)}\varphi + \psi dq_\alpha^{(\nu)}\partial_i(\varphi),\ \sum \partial^\sigma(X_\beta)\frac{\partial}{\partial q_\beta^{(\sigma)}}\Big\rangle =$$
$$= \partial_i(\psi)\partial^\nu(X_\alpha)\varphi + \psi\partial^{\nu+1_i}(X_\alpha)\varphi + \psi\partial^\nu(X_\alpha)\partial_i(\varphi) =$$
$$= \partial_i[\psi\partial^\nu(X_\alpha)\varphi] = \partial_i(\langle\omega, X\rangle) \sim 0;$$

(a) Еслн $\omega \sim 0$, то $\langle\omega, D^{ev}\rangle \sim 0$ согласно (b). Следовательно, $\omega = 0$ в силу (А3.1.57);
(d) Единственность следует из (А3.1.57), существование нз (А3.1.43) и (b);
(e) Если $\omega \in \operatorname{Ker}\widehat{\delta}$, то есть $\widehat{\delta}(\omega) = 0$, то $\omega \sim \widehat{\delta}(\omega) = 0$, так что $\omega \sim 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\widehat{\delta} \subset \mathcal{T}$. Наоборот, если $\omega \in \mathcal{T}$, то есть $\omega \sim 0$, то $\widehat{\delta}(\omega) \sim \omega \sim 0$, откуда, в снлу (a), $\widehat{\delta}(\omega) = 0$. Таким образом, $\mathcal{T} \subset \operatorname{Ker}\widehat{\delta}$;
(c) Так как $\omega \sim \widehat{\delta}(\omega)$, то нмеем, учитывая (b): $0 \sim \langle\omega, D^{ev}\rangle \sim \langle\widehat{\delta}(\omega), D^{ev}\rangle$. Следовательно, $\widehat{\delta}(\omega) = 0$, согласно (А3.1.57). Таким образом, $\omega \sim \widehat{\delta}(\omega) = 0$. ■

Следствие А3.1.59. (Формула для первой вариации)
Для любых $H \in C$ и $X \in D^{ev}(C)$:

$$X(H) \sim \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}^t}(\boldsymbol{X}) := \sum_\alpha \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}(X_\alpha), \tag{А3.1.60}$$

и это соотношение *однозначно определяет* (операторно-значный) вектор $\dfrac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}$.

Доказательство. Единственность следует из (А3.1.57). Далее,

$$X(H) \overset{(\text{А3.1.29})}{=} \langle d(H), X\rangle \overset{\text{Т. А3.1.58(b)}}{\sim}$$
$$\sim \langle\widehat{\delta}d(H), X\rangle = \langle\delta(H), X\rangle = \Big\langle\sum_\alpha \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}(dq_\alpha), X\Big\rangle = \sum_\alpha \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}(X_\alpha). \quad ■$$

Пусть $\bar{R} \subset \bar{R}'$ — дифференциальное расширение. Это означает, что $\bar{R}$ является подкольцом $\bar{R}'$, имеются m коммутирующих дифференцирований $\partial'_1, \dots, \partial'_m$, действующих на $\bar{R}'$, и их действия удовлетворяют условию совместности $\partial_i|_{\bar{R}} = \partial'_i|_{\bar{R}}$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, мы можем опустить штрихи у ∂_i и использовать старые обозначения ∂_i. Каждое дифференциальное расшнрения $\bar{R} \subset \bar{R}'$ нндуцнрует соответствующее расшнрение $C \subset C' = \bar{R}'\langle q_\alpha^{(\nu)}\rangle$. Обозначим

$$D_-^{ev}(C') = \{X \in D^{ev}(C') \mid X_\alpha \in \bar{R}', \quad \forall\, \alpha \in \mathcal{I}\}. \tag{А3.1.61}$$

Следующая версия формулы для первой вариации понадобится нам в разделе §А3.2.

Лемма А3.1.62. Выберем $H \in C$. Тогда

$$X(H) \sim \frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}^t}(\boldsymbol{X}), \quad \forall\, X \in D_-^{ev}(C'), \quad \forall\, \bar{R}' \supset \bar{R}, \tag{А3.1.63}$$

и эта формула *однозначно определяет* вектор $\dfrac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}$.

Доказательство. Существование формулы (А3.1.63) было доказано и Следствии А3.1.59, а единственность будет доказана в следующем Утверждении.

Утверждение А3.1.64. В пространстве $\Omega^1_0(C)$ верна импликация

$$\langle \omega, D^{ev}_{-}(C') \rangle \sim 0, \quad \forall\, \bar{R}' \supset \bar{R} \quad \Rightarrow \quad \omega = 0. \tag{А3.1.65}$$

Доказательство. Пусть $\bar{R}' = \bar{R}\langle Q^{(\sigma)} \rangle$. Тогда, для любого $\alpha \in \mathcal{I}$, имеем

$$0 \sim \Big\langle \omega, \sum_{\sigma} Q^{(\sigma)} \frac{\partial}{\partial q^{(\sigma)}_{\alpha}} \Big\rangle = \omega_{\alpha}(Q),$$

так что, интерпретируя $C' = \bar{R}'\langle q^{(\nu)}_{\alpha} \rangle$ как $\bar{R}\langle q^{(\nu)}_{\alpha}, Q^{(\nu)} \rangle$, получаем $\dfrac{\delta}{\delta Q}[\omega_{\alpha}(Q)] = 0$, и следовательно

$$\omega_{\alpha}(X_{\alpha}) = \Big(\frac{\delta}{\delta Q}[\omega_{\alpha}(Q)]\Big)(X_{\alpha}) = 0, \quad \forall\, X_{\alpha} \in C. \qquad \blacksquare\ \blacksquare$$

Далее мы обсудим, как можно короче, понятия оператора и его сопряженного. Основная причина краткости в том, что эти понятия, в отличие от абелева случая, являются громоздкими и незавершенными, и мы постараемся обойтись минимальным количеством теории, необходимым, чтобы найти, и следующем разделе, Ker δ и Im δ.

Итак, сначала операторы. Те, что действуют из C в C, являются, по определению, конечными линейными комбинациями выражений вида

$$\widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^{\sigma} = \widehat{L}_a \widehat{R}_b \widehat{L}_{\partial^{\sigma}}, \quad a, b \in C, \tag{А3.1.66}$$

каждое из которых действует на C (или любом дифференциальном C–бимодуле) по правилу

$$(\widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^{\sigma})(r) = a r^{(\sigma)} b. \tag{А3.1.67}$$

Операторы, отображающие кольцо $Op_0(C)$ в себя, имеют тот же вид, с правилом действия

$$(\widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^{\sigma})(\widehat{L}_{\psi} \widehat{R}_{\varphi}) = \widehat{L}_a \widehat{R}_b (\widehat{L}_{\psi} \widehat{R}_{\varphi})^{(\sigma)}. \tag{А3.1.68}$$

Далее, эволюционные поля действуют на C, $Op_0(C)$, операторы, операторно-значные операторы и т.п. покомпонентно при помощи индуктивного правила

$$[X(Ob)](\cdot) = X(Ob(\cdot)) - Ob(X(\cdot)), \tag{А3.1.69}$$

где $X \in D^{ev}(C)$ дифференцирует объект Ob, и $(\cdot)$ обозначает немой элемент, на который этот объект действует.

Упражнение А3.1.70. Покажите, что

$$X(\widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^{\sigma}) = (\widehat{L}_{X(a)} \widehat{R}_b + \widehat{L}_a \widehat{R}_{X(b)}) \partial^{\sigma}. \tag{А3.1.71}$$

Для любого такого объекта Ob, производная Фреше

$$\frac{D(Ob)}{Dq} = \left(\frac{D(Ob)}{Dq_{\alpha}} \right)$$

определяется по правилу

$$\sum_{\alpha} \frac{D(Ob)}{Dq_\alpha}(X_\alpha) =: \frac{D(Ob)}{Dq}(X) = X(Ob), \quad \forall\, X \in D^{ev}(C). \tag{A3.1.72}$$

Наконец, сопряженные операторы. Удобнее всего считать, что они действуют *налево*. Нам понадобятся только следующие заготовки. Пусть дан оператор $A : C \to C$. Его *сопряженным по отношению к спариванию* $Op_0(C) \times C \to C$,

$$\mathcal{O} \times r \mapsto \mathcal{O}(r), \quad \mathcal{O} \in Op_0(C), \quad r \in C, \tag{A3.1.73}$$

является оператор

$$A^\dagger : Op_0(C) \to Op_0(C),$$

определенный соотношением

$$[A^\dagger(\mathcal{O})](r) \sim \mathcal{O}(A(r)), \quad \forall\, \mathcal{O} \in Op_0(C), \quad \forall\, r \in C. \tag{A3.1.74}$$

Из леммы Дюбуа-Реймона следует, что сопряженный оператор единствен. Его существование вытекает из следующего вычисления: если $\mathcal{O} = \widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi$ и $A = \widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^\sigma$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(A(r)) = \widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi(\widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^\sigma(r)) = \psi a r^{(\sigma)} b \varphi = \widehat{L}_{\psi a} \widehat{R}_{b\varphi} \partial^\sigma(r) \sim \\ \sim [(-\partial)^\sigma(\widehat{L}_{\psi a} \widehat{R}_{b\varphi})](r) = [\widehat{L}_\psi \widehat{R}_\varphi \widehat{L}_a \widehat{R}_b(-\overleftarrow{\partial})^\sigma](r), \end{aligned} \tag{A3.1.75}$$

где стрелка “←” над ∂ указывает, что ∂ действует *налево*. Таким образом,

$$(\widehat{L}_a \widehat{R}_b \partial^\sigma)^\dagger = \widehat{L}_a \widehat{R}_b(-\overleftarrow{\partial})^\sigma. \tag{A3.1.76}$$

До сих пор все операторы были скалярными. В матричном случае, те же самые определения требуют лишь тривиальной модификации, приводящей к знакомой формуле для матричных элементов сопряженного оператора:

$$(A^\dagger)_{\alpha\beta} = (A_{\beta\alpha})^\dagger. \tag{A3.1.77}$$

Теперь мы готовы вывести формулу преобразования для вариационных производных.

Пусть дано еще одно дифференциальное кольцо $C_1 = \bar{R}\langle u_\eta^{(\nu)}\rangle$. *(Дифференциальный) гомоморфизм* $\Phi : C \to C_1$ — это гомоморфизм над $\bar{R}$, коммутирующий с действием ∂_i. Таким образом,

$$\Phi(q_\alpha^{(r)}) = \Phi(\partial^\nu(q_\alpha)) = \partial^\nu \Phi(q_\alpha) = \partial^\nu(\Phi_\alpha),$$

так что Φ однозначно определен вектором

$$\Phi = (\Phi_\alpha), \quad \Phi_\alpha = \Phi(q_\alpha) \in C_1. \tag{A3.1.78}$$

Мы продолжим Φ до отображения $\Omega^1(C) \to \Omega^1(C_1)$ по правилу

$$\Phi(\psi dq_\alpha^{(\nu)} \varphi) = \Phi(\psi) d[\Phi(q_\alpha^{(\nu)})] \Phi(\varphi). \tag{A3.1.79}$$

Таким образом,

$$\Phi(dq_\alpha) = d(\Phi_\alpha) = \sum \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}(du_\eta^{(\nu)}) \sim \sum_\eta \frac{\delta \Phi_\alpha}{\delta u_\eta}(du_\eta) = \delta_1(\Phi_\alpha), \tag{A3.1.80}$$

где значок 1 различает операции в C_1 и C.

Упражнение А3.1.81. Покажите, что Φ коммутирует с d :

$$\Phi d_C = d_{C_1}\Phi : C \to \Omega^1(C_1). \tag{A3.1.82}$$

Лемма А3.1.83. $\widehat{\delta}_1 \Phi \widehat{\delta} = \widehat{\delta}_1 \Phi$.

Доказательство. Нам надо показать, что

$$\widehat{\delta}_1 \Phi(\widehat{\delta} - 1) = 0. \tag{A3.1.84}$$

Так как Φ коммутирует с действиями ∂_ι, то

$$\Phi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}_1. \tag{A3.1.85}$$

В силу (А3.1.43), $\operatorname{Im}(\widehat{\delta}-1) \subset \mathcal{T}$, отсюда $\operatorname{Im}\Phi(\widehat{\delta}-1) \subset \mathcal{T}_1$. Следовательно, $\widehat{\delta}_1\Phi(\widehat{\delta}-1) = 0$, что и требовалось доказать. ∎

Теорема А3.1.86. Для любого $H \in C$ выполнено равенство

$$\frac{\delta\Phi(H)}{\delta u_\eta} = \sum_\alpha \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\left(\frac{D\Phi_\alpha}{Du_\eta}\right)^\dagger, \tag{A3.1.87}$$

где: $\Phi\left(\dfrac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)$ определен при помощи естественного продолжения Φ на гомоморфизмы $Op_0(C) \to Op_0(C_1)$; $\left(\dfrac{D\Phi_\alpha}{Du_\eta}\right)^\dagger$ действует налево; и

$$\frac{D\Phi_\alpha}{Du_\eta} = \sum_\nu \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}\partial^\nu. \tag{A3.1.88}$$

Доказательство. Заметим, что формула (А3.1.88) вытекает из определения (А3.1.72): $\forall\ X \in D^{ev}(C_1)$ имеем

$$X(\Phi_\alpha) = \Big(\sum X_\eta^{(\sigma)}\frac{\partial}{\partial u_\eta^{(\sigma)}}\Big)(\Phi_\alpha) = \sum \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\sigma)}}(X_\eta^{(\sigma)}) = \sum_\eta\Big(\sum_\sigma \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\sigma)}}\partial^\sigma\Big)(X_\eta).$$

Далее,

$$\sum_\eta \frac{\delta\Phi(H)}{\delta u_\eta}(du_\eta) = \delta_1\Phi(H) = \widehat{\delta}_1 d\Phi(H) = \widehat{\delta}_1\Phi d(H) \overset{\text{Л. А3.1.83}}{=}$$

$$= \widehat{\delta}_1\Phi\widehat{\delta}d(H) = \widehat{\delta}_1\Phi\delta(H) = \widehat{\delta}_1\Phi\Big(\sum_\alpha \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}(dq_\alpha)\Big) = \widehat{\delta}_1\Big[\sum_\alpha \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)(d(\Phi_\alpha))\Big] =$$

$$= \widehat{\delta}_1\Big[\sum_\alpha \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\Big(\sum \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}(du_\eta^{(\nu)})\Big)\Big] = \sum_\eta\Big[\sum_{\alpha,\nu}(-\partial)^\nu\Big(\Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}\Big)\Big](du_\eta) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\delta\Phi(H)}{\delta u_\eta} = \sum_{\alpha,\nu}(-\partial)^\nu\Big[\Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}\Big] = \sum \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\Big(\sum_\nu \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}(-\overleftarrow{\partial})^\nu\Big) =$$

$$= \sum_\alpha \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\Big(\sum_\nu \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial u_\eta^{(\nu)}}\partial^\nu\Big)^\dagger = \sum_\alpha \Phi\left(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\right)\left(\frac{D\Phi_\alpha}{Du_\eta}\right)^\dagger. \qquad ∎ \tag{A3.1.89}$$

Упражнение А3.1.90. Пусть $m = 1$, $C = \bar{R}\langle q^{(n)}\rangle$. Покажите, что

$$\frac{\delta([q, q^{(n)}])}{\delta q} = [-1 + (-1)^n]\,\mathrm{ad}_{q^{(n)}}. \tag{A3.1.91}$$

A3.2 Образ и ядро вариационного оператора δ

В этом разделе мы вычисляем $\operatorname{Im}\delta$ и $\operatorname{Ker}\delta$, в указанном порядке. Это делается при помощи *вариационного комплекса.*

Пусть $\partial_{m+1} : \bar{R} \to 0$ еще одно дифференцирование, действующее тривиально на $\bar{R}$. Обозначим $\bar{C} = \bar{R}\langle q_\alpha^{(\bar{\nu})}\rangle$, $\alpha \in \mathcal{I}$, $\bar{\nu} \in \mathbb{Z}_+^{m+1}$. Будем писать $\bar{\nu} = (\nu|n)$, $\nu \in \mathbb{Z}_+^m$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тогда имеем $\bar{C} = \bar{R}\langle q_\alpha^{(\nu|n)}\rangle$; тем самы C отождествляется с подкольцом $\bar{R}\langle q_\alpha^{(\nu|0)}\rangle$ в $\bar{C}$. $\bar{C}$ является $\bar{C}$–бимодулем, и также C–бимодулем.

Обозначим через $\tau : \Omega^1(C) \to \bar{C}$ следующий гомоморфизм C–бимодулей:

$$\tau(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi) = \psi q_\alpha^{(\nu|1)}\varphi. \tag{A3.2.1}$$

Упражнение A3.2.2. Покажите, что τ коммутирует с действиями ∂_i.

Следовательно,

$$\tau(\mathcal{T}(\Omega^1(C))) \subset \mathcal{T}(\bar{C}). \tag{A3.2.3}$$

Лемма A3.2.4. Для любого $H \in C$,

$$\tau d(H) = \partial_{m+1}(H). \tag{A3.2.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \tau d(H) = \tau\Big(\sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}(dq_\alpha^{(\nu)})\Big) &\overset{(\mathrm{A3.2.1})}{=} \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}(q_\alpha^{(\nu|1)}) = \\ &= \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}(\partial_{m+1}(q_\alpha^{(\nu)})) = \partial_{m+1}(H). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Для различения операций в C и $\bar{C}$, будем ставить черту над δ : $\bar{\delta}$, всякий раз, когда мы находимся в $\bar{C}$.

Теорема A3.2.6. Последовательность

$$C \xrightarrow{\delta} \Omega_0^1(C) \xrightarrow{\bar{\delta}\tau} \Omega_0^1(\bar{C}) \tag{A3.2.7}$$

является комплексом, то есть

$$\bar{\delta}\tau\delta = 0. \tag{A3.2.8}$$

Доказательство. Для любого $H \in C$, $\delta(H) = \widehat{\delta} d(H) \overset{(\mathrm{A3.1.43})}{\sim} d(H)$. Следовательно, в силу (A3.2.3), $\tau\delta(H) \sim \tau d(H) \overset{(\mathrm{A3.2.5})}{=} \partial_{m+1}(H) \sim 0$. Таким образом, $\bar{\delta}\tau\delta(H) = 0$. $\blacksquare$

Замечание A3.2.9. В абелевом случае, равенство $\bar{\delta}\tau\delta = 0$, записанное в компонентах, приводит к самосопряженности производной Фреше:

$$D\Big(\frac{\delta H}{\delta q}\Big)^\dagger = D\Big(\frac{\delta H}{\delta q}\Big), \tag{A3.2.10}$$

или, в матричных элементах:

$$\Big[\sum_\nu \frac{\partial}{\partial q_\beta^{(\nu)}}\Big(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha}\Big)\partial^\nu\Big]^\dagger = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}\Big(\frac{\delta H}{\delta q_\beta}\Big)\partial^\nu. \tag{A3.2.11}$$

В неабелевом случае требуется некоторое усилие, чтобы придать смысл равенству (А3.2.11), содержащему *три-операторы*. Необходимо упорядочить эти операторы, например, как в равенстве

$$D(\widehat{L}_a\widehat{R}_b) = \widehat{R}_b^{[2]}\widehat{L}^{[2]}_{D(a)^{[1]}} + \widehat{L}_a^{[2]}\widehat{R}^{[2]}_{D(b)^{[1]}}, \tag{A3.2.12}$$

указав, кто действует первым, вторым, и т.д.. Мы уклонимся от этого пути и докажем, что последовательность (А3.2.7) *точна*, непосредственно.

Теорема А3.2.13. Последовательность (А3.2.7) точна, то есть, если $\omega \in \Omega_0^1(C)$ и $\bar{\delta}\tau(\omega) = 0$, то существует $H \in C$ такой, что $\delta(H) = \omega$.

Доказательство. Обозначим через $A_t : C \to C[t]$ (и также $\bar{C} \to \bar{C}[t]$) гомоморфизм над $\bar{R}$, действующий на генераторах C по правилу

$$A_t(q_\alpha^{(\nu)}) = tq_\alpha^{(\nu)}. \tag{A3.2.14}$$

Рассмотрим естественное продолжение гомоморфизм A_t из C на $Op_0(C)$:

$$A_t(\widehat{L}_a\widehat{R}_b) = \widehat{L}_{A_t(a)}\widehat{R}_{A_t(b)}. \tag{A3.2.15}$$

Далее, если $\omega = \sum_{\alpha\nu}\omega_\alpha^\nu(dq_\alpha^{(\nu)})$, с некоторыми $\omega_\alpha^\nu \in Op_0(C)$, то определим

$$A_t(\omega) = \sum_\alpha [A_t(\omega_\alpha^\nu)](dq_\alpha^{(\nu)}). \tag{A3.2.16}$$

Лемма А3.2.17. Если $\omega \in \Omega_0^1(C)$ и $\bar{\delta}\tau(\omega) = 0$, то также $\bar{\delta}\tau(A_t(\omega)) = 0$.

Доказательство. Это следует из тождества

$$\bar{\delta}\tau A_t = A_t\bar{\delta}\tau \quad \text{на} \quad \Omega^1(C). \tag{A3.2.18}$$

Действительно, так как $\bar{\delta}$ понижает q-степень на 1, то

$$\bar{\delta}A_t = tA_t\bar{\delta} \quad \text{на} \quad \bar{C}. \tag{A3.2.19}$$

Следовательно, для типического элемента $\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi \in \Omega^1(C)$, имеем

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\tau A_t(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi) &= \bar{\delta}\tau[A_t(\psi)dq_\alpha^{(\nu)}A_t(\varphi)] = \bar{\delta}[A_t(\psi)q_\alpha^{(\nu|1)}A_t(\varphi)] = \\ &= \bar{\delta}t^{-1}A_t(\psi q_\alpha^{(\nu|1)}\varphi) \overset{(A3.2.19)}{=} A_t\bar{\delta}(\psi q_\alpha^{(\nu|1)}\varphi) = A_t\bar{\delta}\tau(\psi dq_\alpha^{(\nu)}\varphi).\end{aligned}$$

∎

Далее, для данной $\omega = \sum\omega_\alpha(dq_\alpha) \in \Omega_0^1(C)$ из ядра $\bar{\delta}\tau$: $\bar{\delta}\tau(\omega) = 0$, определим

$$H = \sum_\alpha \int_0^1 dt\, A_t(\omega_\alpha)(q_\alpha). \tag{A3.2.20a}$$

Утверждается, что этот H нам и нужен:

$$\delta(H) = \omega. \tag{A3.2.20b}$$

Чтобы это доказать, сошлемся на Утверждение А3.1.64 и докажем вместо, что

$$X(H) \sim \langle\omega, X\rangle = \omega(X) = \sum\omega_\alpha(X_\alpha), \quad \forall\, X \in D_-^{ev}(C'). \tag{A3.2.21}$$

Обозначив временно
$$\bar{\omega} = A_t(\omega), \quad \bar{\omega}_\alpha = A_t(\omega_\alpha),$$
получаем:
$$X(H) = X\Big(\sum \int_0^1 dt\,\bar{\omega}_\alpha(q_\alpha)\Big) = \sum \int_0^1 dt\big[\bar{\omega}_\alpha(X_\alpha) + (X(\bar{\omega}_\alpha))(q_\alpha)\big]. \qquad \text{(A3.2.22)}$$

Лемма А3.2.23. Для любого $\omega \in \Omega_0^1(C) \cap \operatorname{Ker} \bar{\delta}\tau$,
$$X(\omega_\alpha) = \frac{\delta(\langle \omega, X\rangle)}{\delta q_\alpha}, \quad \forall\; X \in D_-^{ev}(C'). \qquad \text{(A3.2.24)}$$

Считая Лемму доказанной, имеем
$$\sum_\alpha [X(\bar{\omega}_\alpha)](q_\alpha) = \sum \frac{\delta[\bar{\omega}(X)]}{\delta q_\alpha}(q_\alpha) \sim X^{rad}[\bar{\omega}(X)], \qquad \text{(A3.2.25)}$$
где X^{rad} радиальное эволюционное поле:
$$\boldsymbol{X^{rad}} = \boldsymbol{q}: \quad X^{rad} = \sum q_\alpha^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(\nu)}}. \qquad \text{(A3.2.26)}$$
Далее, так как $X \in D_-^{ev}(C')$,
$$X^{rad}[\bar{\omega}(X)] = \sum_\alpha [X^{rad}(\bar{\omega}_\alpha)](X_\alpha). \qquad \text{(A3.2.27)}$$
Следовательно, (А3.2.25) превращается в
$$\sum_\alpha [X(\bar{\omega}_\alpha)](q_\alpha) \sim \sum [X^{rad}(\bar{\omega}_\alpha)](X_\alpha). \qquad \text{(A3.2.28)}$$
Подставляя это в (А3.2.22), получаем
$$X(H) \sim \sum [\int_0^1 dt(1 + X^{rad})A_t(\omega_\alpha)](X_\alpha). \qquad \text{(A3.2.29)}$$
Так как поле X^{rad} является операцией C-степени ноль, то
$$X^{rad}A_t = A_t X^{rad}. \qquad \text{(A3.2.30)}$$
Таким образом, (А3.2.29) принимает вид
$$X(H) \sim \sum \langle \int_0^1 dt\, A_t(1 + X^{rad})(\omega_\alpha),\ X_\alpha\rangle. \qquad \text{(A3.2.31)}$$

Лемма А3.2.32.
$$\int_0^1 dt\, A_t(1 + X^{rad}) = 1. \qquad \text{(A3.2.33)}$$

Доказательство. Достаточно доказать (А3.2.33) на C. Для любого монома $r = kq_{\alpha_1}^{(\nu_1)} \dots q_{\alpha_n}^{(\nu_n)}$ выполняется $(1 + X^{rad})(r) = (1 + n)r$; следовательно
$$A_t(1 + X^{rad})(r) = (1 + n)t^n r,$$
и интегрирование по t завершает доказательство. ▮

Подставляя (A3.2.33) в (A3.2.31) мы приходим к (A3.2.21), что завершает доказательство Теоремы A3.2.13. ▮

Доказательство Леммы А3.2.23. Распишем равенство $\bar{\delta}\tau(\omega) = 0$. Пусть

$$\omega = \sum \psi_{\alpha s} dq_\alpha \varphi_{\alpha s} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \bar{\delta}\tau(\omega) = \bar{\delta}\Big(\sum \psi_{\alpha s} q_\alpha^{(0|1)} \varphi_{\alpha s}\Big) = \sum \Big[\frac{\delta}{\delta q_\beta}(\psi_{\alpha s} q_\alpha^{(0|1)} \varphi_{\alpha s})\Big](dq_\beta) \quad \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\delta}{\delta q_\beta}\Big(\sum \psi_{\alpha s} q_\alpha^{(0|1)} \varphi_{\alpha s}\Big) = \sum_{(\nu|n)} (-\partial)^\nu (-\partial_{m+1})^n \frac{\partial}{\partial q_\beta^{(\nu|n)}}\Big(\sum \psi_{\alpha s} q_\alpha^{(0|1)} \varphi_{\alpha s}\Big) =$$

$$= \sum_\nu (-\partial)^\nu \frac{\partial}{\partial q_\beta^{(\nu)}}\Big(\sum \psi_{\alpha s} q_\alpha^{(0|1)} \varphi_{\alpha s}\Big) - \partial_{m+1} \frac{\partial}{\partial q_\beta^{(0|1)}}\Big(\sum \psi_{\alpha s} q_\alpha^{(0|1)} \varphi_{\alpha s}\Big) \quad \Rightarrow \quad \text{(A3.2.34)}$$

$$\sum_\nu (-\partial)^\nu \frac{\partial}{\partial q_\beta^{(\nu)}}(\langle \omega, q^{(0|1)} \rangle) = \sum_s \partial_{m+1}(\widehat{L}_{\psi_{\beta s}} \widehat{R}_{\psi_{\beta s}}) =$$

$$= \widehat{q^{(0|1)}}\Big(\sum_s \widehat{L}_{\psi_{\beta s}} \widehat{R}_{\varphi_{\beta s}}\Big) = \widehat{q^{(0|1)}}(\omega_\beta), \qquad \text{(A3.2.35)}$$

где $\widehat{q^{(0|1)}}$ обозначает дифференцирование ∂_{m+1} :

$$\widehat{q^{(0|1)}} = \sum q_\gamma^{(\sigma|1)} \frac{\partial}{\partial q_\gamma^{(\sigma)}} = \partial_{m+1}. \qquad \text{(A3.2.36)}$$

Так как $q_\alpha^{(0|1)}$ дифференциально независимы над кольцом $Op_0(C)[\partial^\sigma]$, то мы можем подставить в равенство (A3.2.35) произвольный $X \in D_-^{ev}(C')$ вместо $\widehat{q^{(0|1)}}$, что приводит к нужному равенству

$$\frac{\delta}{\delta q_\beta}(\langle \omega, X \rangle) = X(\omega_\beta). \qquad ▮$$

Замечание А3.2.37. Вместо равенства $\delta(H) = \omega$ (A3.2.20b), мы доказали эквивалентное соотношение $X(H) \sim \langle \omega, X \rangle$ для весьма специального класса X, именно $X \in D_-^{ev}(C')$. Конечно, это соотношение выполняется aposteriori для всех $X \in D^{ev}(C)$. Это приводит к соотношению

$$\sum [X(\omega_\alpha)](q_\alpha) \sim \sum_\alpha [X^{rad}(\omega_\alpha)](X_\alpha), \quad \forall\, \omega \in \operatorname{Ker} \bar{\delta}\tau \cap \Omega_0^1(C), \quad \forall\, X \in D^{ev}(C), \qquad \text{(A3.2.38)}$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{\delta(\sum_\alpha \omega_\alpha(q_\alpha))}{\delta q_\beta} = X^{rad}(\omega_\beta), \quad \forall\, \omega \in \operatorname{Ker} \widehat{\delta}\tau \cap \Omega_0^1(C). \qquad \text{(A3.2.39)}$$

Определим теперь $\operatorname{Ker} \delta$.

Упражнение А3.2.40. Покажите, что

$$X^{rad} = t(A_t)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} A_t. \qquad \text{(A3.2.41)}$$

Следствие A3.2.42.

$$\frac{\partial}{\partial t} A_t = t^{-1} A_t X^{rad}. \qquad \text{(A3.2.43)}$$

Теорема A3.2.44. $\operatorname{Ker} \delta = \mathcal{T} + \bar{R}$.

Доказательство. Для любого $f \in C$ имеем

$$f - f\big|_{q=0} = A_1(f) - A_0(f) = \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} A_t(f) \overset{\text{(A3.2.43)}}{=}$$

$$= \int_0^1 dt\, t^{-1} A_t X^{rad}(f) \sim \int_0^1 dt\, t^{-1} A_t \frac{\delta f}{\delta q}(X^{rad}). \qquad \text{(A3.2.45)}$$

Если теперь $f \in \operatorname{Ker} \delta$, то последний член в правой части (A3.2.45) равен нулю, и мы получаем

$$\frac{\delta f}{\delta q} = 0 \quad \Rightarrow \quad f \sim f|_{q=0} \in \bar{R}. \qquad \blacksquare$$

Замечание A3.2.46. Для простоты, в этом Приложении не рассматриваются дискретные степени свободы. Для них все в §§A3.1, 2 было бы точно таким же, кроме второстепенных различий в обозначениях. Например, формулу (A3.1.49) пришлось бы заменить на

$$\frac{\delta H}{\delta q_\alpha} = \sum_{\nu g} (-\partial)^\nu \widehat{g}^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha^{(g|\nu)}} \right), \qquad \text{(A3.2.47)}$$

и так далее.

Замечание A3.2.48. Внимательный читатель заметит, что вариационное исчисление, развитое в этом Приложении *отличается* от развитого в Частях A,B, где мы вычисляли по модулю

$$\{\sum \operatorname{Im}(\partial_s),\ \sum \operatorname{Im}(\widehat{g} - \widehat{e})\} \quad \textit{и коммутаторов.} \qquad \text{(A3.2.49)}$$

В этом Приложении мы *не пренебрегаем коммутаторами,* придерживаясь, таким образом, привычной абелевой философии. (Это различие становится сразу очевидным в случае квантовых и q-интегрируемых систем.)

Упражнение A3.2.50. Допустим, что имеются только дискретные степени свободы, параметризованные элементами g дискретной группы G.
(i) Покажите, что

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} \Big(\sum_{g \in G} \widehat{g}(H) \Big) = \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}, \quad \forall\, H \in C, \qquad \text{(A3.2.51a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(h)}} \Big(\sum_{g \in G} \widehat{g}(H) \Big) = \widehat{h} \Big(\frac{\delta H}{\delta q_\alpha} \Big), \quad \forall\, H \in C, \quad \forall\, h \in G; \qquad \text{(A3.2.51b)}$$

(ii) Аналогично, покажите, что в вариационном исчислении из Частей A,B,

$$\widehat{h}^{-1} \frac{\partial^+}{\partial q_\alpha^{(h)}} \Big(\sum_{g \in G} \widehat{g}(H) \Big) = \frac{\delta H}{\delta q_\alpha}, \quad \forall\, H \in C,\ \forall\, h \in G; \qquad \text{(A3.2.52)}$$

(iii) Допустим, имеется семейство $\{H(g) \in C \mid g \in G\}$ такое, что

$$V_\alpha := \widehat{h}^{-1} \frac{\partial}{\partial q_\alpha^{(h)}} \sum_{g \in G} H(g) \quad \text{не зависит от } h, \quad \forall\, h \in G, \tag{A3.2.53a}$$

$$\bar{\delta}\tau\Big(\sum_\alpha V_\alpha(dq_\alpha)\Big) = 0. \tag{A3.2.53b}$$

Можно ли найти $\mathcal{H} \in C$ такой, что сумма

$$\sum_{g \in G} (H(g) - \widehat{g}(\mathcal{H})) \quad \text{тривиальна?} \tag{A3.2.53c}$$

A3.3 Образ оператора $\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u$

> Теоретически, это невозможно, но на практике работает.
>
> Епископ Стабб об абстрактном мышлении

В §3.1 мы видели, что уравнения движения типа

$$\partial_t(v) = (\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v)(x), \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{A3.3.1}$$

допускают поднятия

$$\mathrm{Pot}_+(v) = -V^{(1)}V^{-1}, \quad \partial_t(V) = -\mathrm{Pot}_+(x)V, \tag{A3.3.2}$$

$$\mathrm{Pot}_-(v) = -V^{-1}V^{(1)}, \quad \partial_t(V) = -V\,\mathrm{Pot}_-(x), \tag{A3.3.3}$$

являющиеся гомоморфизмами соответствующих алгебр Ли эволюционных дифференцирований. В этом раздела мы исследуем модельную задачу описания образа оператора $\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_v$.

Итак, рассмотрим $C = \bar{R}\langle u^{(n)}\rangle$, $n \in \mathbb{Z}_+$, в случае $m = 1$. Алгебра Ли $\mathrm{Der}(C)$ действует на C, следовательно она действует дифференцированиями, в Ли-алгебраическом смысле, и на алгебре Ли $\mathrm{Lie}(C)$ с коммутатором

$$[a, b] = ab - ba, \quad a, b \in C. \tag{A3.3.4}$$

Следовательно, мы можем построить полупрямую сумму алгебр Ли $\mathrm{Der}(C) \ltimes \mathrm{Lie}(C)$, с коммутатором

$$[Z_1 + \mathrm{ad}_a, Z_2 + \mathrm{ad}_b] = [Z_1, Z_2] + \mathrm{ad}_{Z_1(b) - Z_2(a) + [a,b]}, \tag{A3.3.5}$$

для любых $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Der}(C)$; эта же формула применима, когда Z_1 и Z_2 являются дифференцированиями C не обязательно над $\bar{R}$. Например, может быть $Z_2 = \partial$. Определим централизатор $\mathcal{Z}(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)$ элемента $\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u$ в $\mathrm{Der}(C) \ltimes \mathrm{Lie}(C)$. Используя формулу (A3.3.5) при $Z_2 = \partial$ и $b = \varepsilon u$, находим что $Z_1 \in D^{ev}(C)$ и

$$\varepsilon Z_1(u) = a^{(1)} + \varepsilon[u, a]. \tag{A3.3.6}$$

Итак,

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u) = \Big\{X_a = \varepsilon\,\mathrm{ad}_a + \sum_{n \geqslant 0} (a^{(1)} + \varepsilon[u, a])^{(n)} \frac{\partial}{\partial u^{(n)}} \;\Big|\; a \in C\Big\}. \tag{A3.3.7}$$

До сих пор предполагалось $\varepsilon = \pm 1$. Однако, если считать ε формальным параметром деформации, мы видим из формулы (A3.3.7), что

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)]\big|_{\varepsilon=0} = \Big\{\sum a^{(n+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(n)}}\Big\} \;\neq\; \mathcal{Z}[(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)\big|_{\varepsilon=0}] = \\ = \mathcal{Z}(\partial) = \Big\{\sum a^{(n)}\frac{\partial}{\partial u^{(n)}}\Big\} = \\ = D^{ev}(C). \end{aligned} \tag{A3.3.8}$$

Таким образом, мы имеем дело с *сингулярным* (по ε) *возмущением* вариационного исчисления. Последнее можно представлять себе, как аппарат для построения резольвент дифференциальных операторов первого порядка, такой что когомологии либо равны нулю, либо находятся под жестким контролем. Применим вариационную процедуру к оператору $\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u$. Введем отношение эквивалентности $\approx$ на $C[\varepsilon]$ по правилу:

$$a \approx b \quad \text{если и только если} \quad (a - b) \in \mathrm{Im}(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u). \tag{A3.3.9}$$

Далее, определим действие ad_u на $Op_0(C)[\varepsilon]$:

$$\mathrm{ad}_u(\mathcal{O}) = (\widehat{L}_u - \widehat{R}_u)\mathcal{O}. \tag{A3.3.10}$$

Лемма A3.3.11.

$$\mathcal{O}(\partial(r)) \approx -[(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)(\mathcal{O})](r), \quad \forall\, \mathcal{O} \in Op_0(C)[\varepsilon], \quad \forall\, r \in C[\varepsilon]. \tag{A3.3.12}$$

Доказательство. Имеем, для $\mathcal{O} = \widehat{L}_a\widehat{R}_b$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\partial(r)) \approx \mathcal{O}(\partial(r)) - (\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)(\mathcal{O}(r)) = \\ = ar^{(1)}b - (ar^{(1)}b + a^{(1)}rb + arb^{(1)} + \varepsilon uarb - \varepsilon arbu) = \\ = -\mathcal{O}^{(1)}(r) - [\varepsilon\,\mathrm{ad}_u(\mathcal{O})|(r) = -[(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)(\mathcal{O})](r). \end{aligned}$$ ∎

Следствие A3.3.13.

$$\mathcal{O}(\partial^n(r)) \approx \{[-(\partial + \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)]^n(\mathcal{O})\}(r), \quad \forall\, \mathcal{O} \in Op_0(C)[\varepsilon], \quad \forall\, r \in C[\varepsilon]. \tag{A3.3.14}$$

Далее, для любого $H \in C$ (или $C[\varepsilon]$) и любого $X_a \in \mathcal{Z}$ (или $\mathcal{Z}[\varepsilon]$) имеем

$$\begin{aligned} X_a(H) = \varepsilon\,\mathrm{ad}_a(H) + \sum_{n \geqslant 0} \frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}[(a^{(1)} + \varepsilon[u, a])^{(n)}] \overset{(A3.3.14)}{\approx} \\ \approx -\varepsilon\,\mathrm{ad}_H(a) + \Big(\sum(-\partial - \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)^n\Big(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\Big)\Big)(a^{(1)} + \varepsilon[u, a|) \approx \\ \approx \Big\{-\varepsilon\,\mathrm{ad}_H + \sum(-\partial - \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)^{n+1}\Big(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\Big) + \Big[\varepsilon\sum(-\partial - \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)^n\Big(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\Big)\Big]\,\mathrm{ad}_u\Big\}(a). \end{aligned} \tag{A3.3.15}$$

Это выкладка определяет элемент $\dfrac{\widetilde{\delta} H}{\delta u} \in Op_0(C)[\varepsilon]$:

$$\frac{\widetilde{\delta} H}{\delta u} = -\varepsilon\,\mathrm{ad}_H + \sum(-\partial - \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)^{n+1}\Big(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\Big) + \varepsilon\Big[\sum(-\partial - \varepsilon\,\mathrm{ad}_u)^n\Big(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\Big)\Big]\,\mathrm{ad}_u, \tag{A3.3.16}$$

с определяющим соотношением

$$X_a(H) \approx \frac{\widetilde{\delta} H}{\delta u}(a), \quad \forall\, a \in C \quad (\text{или } C[\varepsilon]). \tag{A3.3.17}$$

Элемент $\dfrac{\widetilde{\delta} H}{\delta u}$, удовлетворяющий (A3.3.17), единствен, благодаря следующему аналогу леммы Дюбуа-Реймона:

Лемма A3.3.18. Если $\mathcal{O} \in Op_0(C)[\varepsilon]$ и

$$\mathcal{O}(a) \approx 0, \quad \forall\, a \in C, \tag{A3.3.19}$$

то $\mathcal{O} = 0$.

Доказательство. Допустим, $\mathcal{O} = \sum_{i \geqslant n} \mathcal{O}_i \varepsilon^i$, $\mathcal{O}_i \in Op_0(C)$ и покажем, что $\mathcal{O}_n = 0$. Это достигается подстановкой $\varepsilon = 0$ в равенство

$$\varepsilon^{-n}\Big(\sum \varepsilon^i \mathcal{O}_i(a)\Big) \approx 0, \quad \forall\, a \in C,$$

которое превращается в

$$\mathcal{O}_n(a) \sim 0, \quad \forall\, a \in C,$$

и теперь Лемма Дюбуа-Реймона A3.1.54 гарантирует, что $\mathcal{O}_n = 0$. $\blacksquare$

Далее, если $H \approx 0$, $H = (\partial + \varepsilon\, \mathrm{ad}_u)(F)$, то

$$X_a(H) = X_a(\partial + \varepsilon\, \mathrm{ad}_u)(F) = (\partial + \varepsilon\, \mathrm{ad}_u)(X_a(F)) \approx 0 \approx \frac{\widetilde{\delta} H}{\delta u}(a), \quad \forall\, a \in C,$$

так что $\dfrac{\widetilde{\delta} H}{\delta u} = 0$. Другими словами,

$$H \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\widetilde{\delta} H}{\delta u} = 0. \tag{A3.3.20}$$

Это можно переписать в виде

$$\widetilde{\mathcal{T}} \subset \operatorname{Ker} \widetilde{\delta}, \tag{A3.3.21}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \operatorname{Im}(\partial + \varepsilon\, \mathrm{ad}_u), \quad \widetilde{\delta} : C[\varepsilon] \hookrightarrow Op_0(C)[\varepsilon|, \quad \widetilde{\delta}(H) := \frac{\widetilde{\delta} H}{\delta u}. \tag{A3.3.22}$$

Упражнение A3.3.23. Покажите, что

$$\operatorname{Im}[(\partial + \varepsilon\, \mathrm{ad}_u)\big|_{\bar{R}}]+ = \operatorname{Im}(\partial\big|_{\bar{R}}) \ (= \mathcal{T} \cap \bar{R}), \tag{A3.3.24}$$

$$\operatorname{Ker}(\widetilde{\delta}\big|_{\bar{R}}) = \mathcal{Z}(\bar{R}). \tag{A3.3.25}$$

Эти формулы подсказывают, что при анализе факторпространства $\operatorname{Ker} \widetilde{\delta} / \widetilde{\mathcal{T}}$ следует сначала сконцентрироваться на случае $\bar{R} = \mathbb{Z}$.

Читателю предлагается определить $\operatorname{Ker} \widetilde{\delta} / \widetilde{\mathcal{T}}$.

Он, наверное, сказал себе: "надо остановиться, иначе я буду глупо выглядеть." Поэтому-то заповедей всего десять.

Миссис Патрик Кэмпбелл о Моисее

Приложение А4

Гамильтоновы соответствия

Последовательный переход от отображений многообразий $\varphi : M \to \mathcal{N}$ к графикам $\Gamma_\varphi \subset M \times \mathcal{N}$, затем к многозначным отображениям и соответствиям (как подмногообразиям в $M \times \mathcal{N}$), — как он вписывается в гамильтоновы рамки? Проще всего это сделать, переходя от геометрического к алгебраическому языку. Сначала мы рассмотрим конечномерный случай, в следующем разделе. Общий функциональный случай исследуется в §А4.2. Формализм, развитый в §А4.2, применяется затем к разнообразным примерам в разделах §§А4.3, А4.4.

А4.1 От геометрии к алгебре

> Традицию можно истолковать, как расширение права голоса. Следовать традиции, это означает отдать голос самому призрачному из всех классов, нашим предкам. Это демократия мертвых. Традиция отказывается подчиниться маленькой и высокомерной олигархии тех, кто просто оказался в числе ходящих вокруг.
>
> Честертон

В этом разделе мы сначала переформулируем условие того, что два тензорных поля, T на M и $\mathcal{T}$ на $\mathcal{N}$, совместны по отношению к гладкому отображению $\varphi : M \to N$. Основная идея состоит в замене такого отображения идеалом $\mathcal{E}$ функций на $M \times \mathcal{N}$, обращающихся в ноль на графике $\Gamma_\varphi \subset M \times \mathcal{N}$ отображения φ. Для случая тензоров T и $\mathcal{T}$ типа $(0,2)$, описывающего скобки Пуассона, мы устанавливаем чисто алгебраический критерий того, чтобы отображение φ было пуассоновым, в терминах кольца $C^\infty(M \times N)$.

В качестве предварительного варианта, пусть S является подмногообразием многообразия $\mathcal{M}$, и t — тензорное поле на $\mathcal{M}$. Мы хотим придать смысл и затем переформулировать алгебраически условие

$$t\big|_S = 0. \qquad \text{(A4.1.1)}$$

Обозначим $\mathcal{E} = \mathcal{E}(S)$ идеал функций на $\mathcal{M}$, обращающихся в ноль на S. Если t функция на $\mathcal{M}$, то есть тензор типа $(0,0)$, то условие $t|_S = 0$ переписывается как

$$t \in \mathcal{E} \qquad \text{(A4.1.2a)}$$

или как

$$[t] = 0, \tag{A4.1.2b}$$

где $[t]$ есть класс элементов $t \in C^\infty(\mathcal{M})$ в фактор-кольце $C^\infty(\mathcal{M})/\mathcal{E}$. Если t является 1-формой на $\mathcal{M}$, $t \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, то условие $t|_S = 0$ можно переписать в виде

$$t(X) \in \mathcal{E}, \quad \forall\, X \in \mathrm{Norm}(\mathcal{E}), \tag{A4.1.3a}$$

или как

$$[t(X)] = 0, \quad \forall\, X \in \mathrm{Norm}(\mathcal{E}), \tag{A4.1.3b}$$

где $X \in \mathrm{Norm}(\mathcal{E})$ обозначает векторное поле на $\mathcal{M}$, касательное к S; в алгебраических терминах это означает, что

$$X(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}, \tag{A4.1.4}$$

то есть, X принадлежит нормализатору $\mathcal{E}$. Если t равно тензорному произведению 1-форм на $\mathcal{M}$ (или сумме произведений), $t \in \Lambda^1(\mathcal{M})^{\otimes \ell}$, то условие $t|_S = 0$ значит, что

$$t(X_1, \dots, X_\ell) \in \mathcal{E}, \quad \forall\, X_1, \dots, X_\ell \in \mathrm{Norm}(\mathcal{E}), \tag{A4.1.5a}$$

это то же самое, что

$$[t(X_1, \dots, X_\ell)] = 0, \quad \forall\, X_1, \dots, X_\ell \in \mathrm{Norm}(\mathcal{E}). \tag{A4.1.5b}$$

Если t векторное поле на $\mathcal{M}$, $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, то объект $t|_S$ определен, только если t является касательным к S. Это условие касания к S может быть выражено в терминах $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, как

$$[t] = 0, \tag{A4.1.6}$$

где $[t]$ обозначает класс элемента $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ в фактор-пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{M})/\,\mathrm{Norm}(\mathcal{E})$. ($\mathrm{Norm}(\mathcal{E})$ не является идеалом алгебры Ли $\mathcal{D}(\mathcal{M})$, поэтому фактор-пространство $\mathcal{D}(\mathcal{M})/\,\mathrm{Norm}(\mathcal{E})$ не есть алгебра Ли.)

Если t тензорное произведение векторных полей на $\mathcal{M}$ (или сумма произведений), $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})^{\otimes L}$, то определим условие $t|_S = 0$ равенством

$$[t] = 0, \tag{A4.1.7}$$

где $[t]$ класс элемента t в фактор-пространстве $(\mathcal{D}(\mathcal{M})/\,\mathrm{Norm}(\mathcal{E}))^{\otimes L}$. Наконец, если t тензор типа (ℓ, L) на $\mathcal{M}$, определим условие $t|_S = 0$ уравнением

$$[t(X_1, \dots, X_\ell)] = 0, \quad \forall\, X_1, \dots, X_\ell \in \mathrm{Norm}(\mathcal{E}). \tag{A4.1.8}$$

Далее, пусть даны два многообразия M и $\mathcal{N}$, и два тензорных поля T и $\mathcal{T}$ типа (ℓ, L) определены на M и $\mathcal{N}$ соответственно. Пусть $\varphi : M \to \mathcal{N}$ (гладкое) отображение. Тензорные поля T и $\mathcal{T}$ совместны относительно этого отображения, если для каждой точки $m \in M$,

$$\varphi_*(T|_m(\xi_1, \dots, \xi_\ell)) = \mathcal{T}\big|_{\varphi(m)}(\varphi_*(\xi_1), \dots, \varphi_*(\xi_\ell)), \quad \forall\, \xi_1, \dots, \xi_\ell \in T_m(M). \tag{A4.1.9a}$$

Здесь мы представляем (ℓ, L)–тензоры, как операторы $\mathcal{D}^{\otimes \ell} \to \mathcal{D}^{\otimes L}$. При $\ell = 0$, условие (A4.1.9a) принимает вид без ξ :

$$\varphi_*(T|_m) = \mathcal{T}|_{\varphi(m)}, \quad \forall\, m \in M. \tag{A4.1.9b}$$

[При $L = 0$, уравнение $\varphi_*(\cdot) = (\cdot\cdot)$ следует понимать как $(\cdot) = \varphi^*(\cdot\cdot)$.]

Наша первая цель — переформулировать условие совместности (A4.1.9) в терминах графика Γ_φ, рассматриваемого, как подмногообразие многообразия $M \times \mathcal{N}$. Напомним, что

$$\Gamma_\varphi = \{(m, \varphi(m)) \mid m \in M\}. \tag{A4.1.10}$$

Рассмотрим, на произведении многообразий $M \times \mathcal{N}$, тензор типа (ℓ, L)

$$t = T - \mathcal{T}. \tag{A4.1.11}$$

Этот тензор корректно определен:

$$T_{(m,n)}(M \times \mathcal{N}) = T_m(M) \oplus T_n(\mathcal{N}), \tag{A4.1.12}$$

$$t(\xi_1 \oplus \eta_1, \dots, \xi_\ell \oplus \eta_\ell) = T(\xi_1, \dots, \xi_\ell) - \mathcal{T}(\eta_1, \dots, \eta_\ell), \quad \xi_i \in T_m(M), \quad \eta_i \in T_n(\mathcal{N}). \tag{A4.1.13}$$

Утверждение A4.1.14. Тензоры T и $\mathcal{T}$ являются φ-совместными, если и только если

$$(T - \mathcal{T})\big|_{\Gamma\varphi} = 0. \tag{A4.1.15}$$

Доказательство. Выберем локальные координаты (x^i) и (y^α) около $m \in M$ и $\varphi(m) \in \mathcal{N}$, соответственно. В индуцированных локальных координатах (x^i, y^α) на $M \times \mathcal{N}$, график Γ_φ задан уравнением

$$\{y^\alpha = \varphi^\alpha(x), \quad \alpha = 1, \dots, \dim(\mathcal{N})\}; \tag{A4.1.16}$$

идеал $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Gamma_\varphi)$ функций на $M \times \mathcal{N}$, равных нулю на Γ_φ, порожден элементами

$$\theta^\alpha := y^\alpha - \varphi^\alpha(x), \quad \alpha = 1, \dots, \dim(\mathcal{N}). \tag{A4.1.17}$$

Случай $(\ell, L) = (0, 0)$: если T и $\mathcal{T}$ функции, то

$$(T - \mathcal{T})\big|_{\Gamma_\varphi}(m, \varphi(m)) = T(m) - \mathcal{T}(\varphi(m)) = (T - \varphi^*(\mathcal{T}))(m). \tag{A4.1.18}$$

Итак,

$$\{(T - \mathcal{T})\big|_{\Gamma_\varphi} = 0\} \quad \Leftrightarrow \quad \{T = \varphi^*(\mathcal{T})\}; \tag{A4.1.19}$$

Лемма A4.1.20. Касательный вектор $(\xi \oplus \eta) \in T_{m,\varphi(m)}(M \times \mathcal{N})$ касается подмногообразия Γ_φ в точке $(m, \varphi(m))$, если и только если

$$\eta = \varphi_*(\xi). \tag{A4.1.21}$$

Доказательство. Пусть

$$\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \eta = \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \tag{A4.1.22}$$

Вектор $\xi \oplus \eta$ касается Γ_φ, если и только если

$$(\xi \oplus \eta)(y^\alpha - \varphi^\alpha(x)) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \dim(\mathcal{N}). \tag{A4.1.23}$$

Но

$$(\xi \oplus \eta)(y^\alpha - \varphi^\alpha(x)) = \eta^\alpha - \sum_i \xi^i \frac{\partial \varphi^\alpha(x)}{\partial x^i}\bigg|_{x = x(m)}. \tag{A4.1.24}$$

Это равно нулю, если и только если

$$\eta = \sum \eta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} = \sum_{\imath,\alpha} \xi^{\imath} \frac{\partial \varphi^{\alpha}(\boldsymbol{x})}{\partial x^{\imath}}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(m)} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}, \tag{A4.1.25}$$

и правая часть равна в точности $\varphi_*(\xi)$:

$$[\varphi_*(\xi)](y^{\alpha}) = \xi(\varphi^*(y^{\alpha})) = \xi(\varphi^{\alpha}(\boldsymbol{x})) = \sum \xi^{\imath} \frac{\partial \varphi^{\alpha}(\boldsymbol{x})}{\partial x^{\imath}}\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(m)}. \qquad \blacksquare \tag{A4.1.26}$$

Случай $(\ell, L) = (\ell, 0)$: пусть

$$T = \sum T_{(\imath)} dx^{(i)}, \quad \mathcal{T} = \sum \mathcal{T}_{(\alpha)} dy^{(\alpha)}, \tag{A4.1.27a}$$

где

$$dx^{(i)} = dx^{i(1)} \otimes \cdots \otimes dx^{i(\ell)}, \quad dy^{(\alpha)} = dy^{\alpha(1)} \otimes \cdots \otimes dy^{\alpha(\ell)}. \tag{A4.1.27b}$$

Тогда

$$(T - \mathcal{T})(\xi_1 \oplus \eta_1, \ldots, \xi_\ell \oplus \eta_\ell) = T(\xi_1, \ldots, \xi_\ell) - \mathcal{T}(\eta_1, \ldots, \eta_\ell). \tag{A4.1.28}$$

Это равно нулю на Γ_φ, если и только если, в силу Леммы A4.1.20, правая часть формулы (A4.1.28) равна нулю при $\eta_s = \varphi_*(\xi_s)$ для всех $s = 1, \ldots, \ell$:

$$T(\xi_1, \ldots, \xi_\ell) = \mathcal{T}(\varphi_*(\xi_1), \ldots, \varphi_*(\xi_\ell)). \tag{A4.1.29}$$

Но это локальная форма знакомого условия $T = \varphi^*(\mathcal{T})$;

Случай (ℓ, L) : пусть

$$T = \sum T^{(I)}_{(\imath)} \frac{\partial}{\partial x^{(I)}} \otimes dx^{(\imath)}, \quad \mathcal{T} = \sum \mathcal{T}^{(\mathcal{A})}_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial y^{(\mathcal{A})}} \otimes dy^{(\alpha)}, \tag{A4.1.30a}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x^{(I)}} = \frac{\partial}{\partial x^{I(1)}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{I(L)}}, \quad \frac{\partial}{\partial y^{(\mathcal{A})}} = \frac{\partial}{\partial y^{\mathcal{A}(1)}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\mathcal{A}(L)}}. \tag{A4.1.30b}$$

В силу формул (A4.1.5, 21), $(T - \mathcal{T})|_{\Gamma_\varphi} = 0$, если и только если для любых $\xi_1, \ldots, \xi_\ell \in T_m(M)$ верно равенство

$$\Big[\sum T^{(I)}_{(\imath)} \xi^{(\imath)} \frac{\partial}{\partial x^{(I)}} - \sum \mathcal{T}^{(\mathcal{A})}_{(\alpha)} (\varphi_*(\xi))^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial y^{(\mathcal{A})}}\Big] = 0. \tag{A4.1.31}$$

Далее,

$$[\xi \oplus \eta] = [0 \oplus (\eta - \varphi_*(\xi))] = \eta - \varphi_*(\xi). \tag{A4.1.32}$$

Следовательно, равенство (A4.1.31) можно переписать в виде

$$\sum T^{(I)}_{(\imath)} \xi^{(\imath)} \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^{(I)}}\right) = \sum \mathcal{T}^{(\mathcal{A})}_{(\alpha)} (\varphi_*(\xi))^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial y^{(\mathcal{A})}}. \tag{A4.1.33}$$

Но это в точности условие совместности на φ (A4.1.9a). $\blacksquare$

Замечание А4.1.34. Пусть $L = 0$, $\ell = 2$, то есть

$$T = \sum T_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad \mathcal{T} = \sum \mathcal{T}_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta. \tag{A4.1.35}$$

Если T и $\mathcal{T}$ кососимметричны, замкнуты и невырождены, Утверждение А4.1.14 сводится к хорошо известному критерию: отображение φ между двумя симплектическими многообразиями M и $\mathcal{N}$ симплектично, если и только если график Γ_φ является лагранжевым подмногообразием в $M \times \mathcal{N}$ по отношению к симплектической структуре $T - \mathcal{T}$. Если T и $\mathcal{T}$ симметричны, получаем критерий римановости отображения между двумя римановыми многообразиями. Если $L = 0$, $\ell = 1$, то мы можем аналогично работать с контактными отображениями, их симплектизациями, и т.п.. Эта же философия применима к голоморфным и т.п. отображениям. Мы не будем углубляться в это, так как сейчас нас интересует в основном пуассонов случай $L = 2$, $\ell = 0$.

Упражнение А4.1.36. Пусть $L = \ell$, $T = \mathcal{T} = \{$тождественное отображение $\mathcal{D}^{\otimes \ell} \to \mathcal{D}^{\otimes \ell}\}$. Покажите, что тензоры T и $\mathcal{T}$ φ-связаны, чем бы ни было φ.

С этого момента, пусть $L = 2$ и $\ell = 0$:

$$T = \sum T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \mathcal{T} = \sum \mathcal{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta}. \tag{A4.1.37}$$

Мы собираемся перевести Утверждение А4.1.14 на алгебраический язык. Это выливается в замены: 1) M и $\mathcal{N}$ на коммутативные кольца R_M и $R_\mathcal{N}$, соответственно; 2) $M \times N$ на $R_M \otimes R_\mathcal{N}$; 3) T и $\mathcal{T}$ на отображения

$$\{\ ,\ \}_i : R_i \otimes R_i \to R_i, \quad i = M \quad \text{или} \quad \mathcal{N}, \tag{A4.1.38}$$

где отображение $\{\ ,\ \}$ является ***дифференцированием*** относительно каждого аргумента. Эквивалентно, вместо скобки Пуассона $\{\ ,\ \}_i$ можно рассмотреть дифференцирования

$$\gamma_i : R_i \to \mathcal{D}(R_i), \quad \mathcal{D}(R_i) = \{\text{дифференцировании } R_i\}; \tag{A4.1.39}$$

4) $\varphi : M \to \mathcal{N}$ на гомоморфизм $\Phi : R_\mathcal{N} \to R_M$; 5) φ-условие совместности T и $\mathcal{T}$ на условие совместности скобок Пуассона:

$$\{\Phi(f), \Phi(g)\}_M = \Phi(\{f, g\}_\mathcal{N}, \quad \forall\, f, g \in R_\mathcal{N}. \tag{A4.1.40}$$

Это можно эквивалентно сформулировать, как

$$\gamma_M(\Phi(f)) \circ \Phi = \Phi \gamma_\mathcal{N}(f), \quad \forall\, f \in R_\mathcal{N}. \tag{A4.1.41}$$

Мы собираемся переформулировать условие совместности (А4.1.40) в терминах идеала $\mathcal{E} \subset R_M \otimes R_\mathcal{N}$. Этот идеал порожден элементами

$$\theta_f = 1 \otimes f - \Phi(f) \otimes 1, \quad f \in R_\mathcal{N}; \tag{A4.1.42}$$

это алгебраический аналог формулы (А4.1.17). Определим отображение $\gamma : R_M \otimes R_\mathcal{N} \to \mathcal{D}(R_M \otimes R_\mathcal{N})$ по правилу

$$\gamma(a \otimes b) = a \otimes \gamma_\mathcal{N}(b) - \gamma_M(a) \otimes b. \tag{A4.1.43}$$

Эта формула означает, что

$$(\gamma(a \otimes b))(a' \otimes b') = aa' \otimes \{b, b'\} - \{a, a'\} \otimes bb'. \tag{A4.1.44}$$

Таким образом, γ служит алгебраической версией $T - \mathcal{T}$.

Лемма А4.1.45. (i) Отображение γ является дифференцированием;
(ii) Если $\gamma_{\mathcal{M}}$ и $\gamma_{\mathcal{N}}$ кососимметричны, то и γ тоже.

Доказательство. (i) Имеем

$$\begin{aligned}\gamma((a\otimes b)(c\otimes d)) &= \gamma(ac\otimes bd) = ac\otimes\gamma_{\mathcal{N}}(bd)-\gamma_{\mathcal{M}}(ac)\otimes bd=\\ &= ac\otimes(b\gamma_{\mathcal{N}}(d)+d\gamma_{\mathcal{N}}(b))-(a\gamma_{\mathcal{M}}(c)+c\gamma_{\mathcal{M}}(a))\otimes bd,\end{aligned}\tag{A4.1.46}$$

и с другой стороны

$$\begin{gathered}(a\otimes b)\gamma(c\otimes d)+(c\otimes d)\gamma(a\otimes b)=\\ =(a\otimes b)(c\otimes\gamma_{\mathcal{N}}(d)-\gamma_{\mathcal{M}}(c)\otimes d)+(c\otimes d)(a\otimes\gamma_{\mathcal{N}}(b)-\gamma_{\mathcal{M}}(a)\otimes b)=\\ =ac\otimes b\gamma_{\mathcal{N}}(d)-a\gamma_{\mathcal{M}}(c)\otimes bd+ca\otimes d\gamma_{\mathcal{N}}(b)-c\gamma_{\mathcal{M}}(a)\otimes db,\end{gathered}$$

что совпадает с (А4.1.46);
(ii) Если $\gamma_{\mathcal{M}}$ и $\gamma_{\mathcal{N}}$ кососимметричны, то

$$\{a,a'\}=-\{a',a\},\quad \{b,b'\}=-\{b',b\},\quad a,a'\in R_{\mathcal{M}},\quad b,b'\in R_{\mathcal{N}}.$$

Следовательно, по формуле (А4.1.44),

$$\{a\otimes b,a'\otimes b'\}=aa'\otimes\{b,b'\}-\{a,a'\}\otimes bb'=-\{a'\otimes b',a\otimes b\}.$$ ▌

Утверждение А4.1.47. Скобки Пуассона в $R_{\mathcal{M}}$ и $R_{\mathcal{N}}$ Φ-совместны, если и только если идеал $\mathcal{E}$, порожденый элементами $\{\theta_f=1\otimes f-\Phi(f)\otimes 1,\ f\in\mathcal{R}_{\mathcal{N}}\}$, является *пуассоново-замкнутым*:

$$\{\mathcal{E},\mathcal{E}\}\subset\mathcal{E}.\tag{A4.1.48}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}\{\theta_f,\theta_g\}=\{1\otimes f-\Phi(f)\otimes 1,1\otimes g-\Phi(g)\otimes 1\}&\overset{(A4.1.44)}{=}\\ =(1\otimes\{f,\cdot\}+\{\Phi(f),\cdot\}\otimes 1)(1\otimes g-\Phi(g)\otimes 1)&=1\otimes\{f,g\}-\{\Phi(f),\Phi(g)\}\otimes 1=\\ &=1\otimes\{f,g\}-\Phi(\{f,g\})\otimes 1+ \qquad (A4.1.49a)\\ &+\bigl(\Phi(\{f,g\})-\{\Phi(f),\Phi(g)\}\bigr)\otimes 1. \qquad (A4.1.49b)\end{aligned}$$

Выражение (А4.1.49a) равно $\theta_{\{f,g\}}$ и, следовательно, принадлежит $\mathcal{E}$. Из выражения (А4.1.49b) видим, что $\{\theta_f,\theta_g\}$ принадлежит $\mathcal{E}$, если и только если выполнено равенство (А4.1.40). ▌

Формула (А4.1.48) и есть результат, который мы преследовали в этом разделе: в то время, как в геометрии мы переходим от графиков к произвольным подмногообразиям, на которых обращаются в ноль тензоры вида $T-\mathcal{T}$, в алгебре мы просто рассматриваем *пуассоновы идеалы*, — причем больше не важно, порождены ли эти идеалы элементами типа θ_f или нет. Функциональный случай почти столь же прост. Он будет разобран в следующем разделе. Для разгона, сделайте следующее упражнение.

Упражнение А4.1.50. Допустим, что кольца $R_{\mathcal{M}}$ и $R_{\mathcal{N}}$ *некоммутативны*.
(i) Можно ли по прежнему считать, что отображения $\varphi_i : R_i \to \mathrm{Der}(R_i)$, $i=\mathcal{M},\mathcal{N}$ являются дифференцированиями?
(ii) Остается ли обоснованной формула (А4.1.43)?

A4.2 Бесконечномерный случай

> Цзы Ван думал трижды, и затем действовал. Когда об этом узнал Конфуций, он сказал: 'Двух раз достаточно.'

В этом разделе мы переформулируем, в самой общей дифференциально-разностной постановке, условие гамильтоновости гомоморфизма. Эта переформулировка требует пуассоновой замкнутости соответствующего идеала. В качестве примера, рассматривается преобразование Бэклунда для уравнения КдФ.

Будем использовать обозначения из Главы 11. Пусть $C_q = R\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle$ и пусть матрица $B^q \in \mathrm{Mat}_{(\dots)}(Op_0(C_q)[\widehat{g}, \partial^\nu])$ определяет отображение

$$\gamma_q : C_q \to D^{ev}(C_q), \quad H \mapsto X_H, \tag{A4.2.1a}$$

$$\boldsymbol{X}_H = X_H(\boldsymbol{q}) = B^q\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{q}}\right). \tag{A4.2.1b}$$

Прежде, эта матрица и это отображение считались гамильтоновыми, но сейчас, пока мы не доберемся до уровня приложений к примерам, мы *не предполагаем*, что матрица B^q (и подобные ей матрицы, появляющиеся ниже) гамильтонова или даже кососимметрическая.

Аналогично, пусть $C_u = R\langle u_\eta^{(g|\nu)}\rangle$ — другое такое кольцо, со своей собственной матрицей B^u, определяющей отображение $\gamma_u : C_u \to D^{ev}(C_u)$. Отображения γ_q и γ_u определяют соответствующие "скобки Пуассона"

$$\{H, F\}_s = (\gamma_s(H))(F), \quad s = q, u, \quad H, F \in C_s. \tag{A4.2.2}$$

Совместность скобок Пуассона в C_q и C_u относительно заданного гомоморфизма $\Phi : C_q \to C_u$ означает

$$\Phi(\{H, F\}_q) = \{\Phi(H), \Phi(F)\}_u, \quad \forall\, H, F \in C_q. \tag{A4.2.3}$$

Как в Упражнении 11.2.8, это условие можно преобразовать к виду

$$\Phi(B^q) = D(\boldsymbol{\Phi}) B^u D(\boldsymbol{\Phi})^\dagger. \tag{A4.2.4}$$

Нашей целью будет переформулировать это условие совместности в терминах кольца $C_{q,u} = R\langle q_i^{(g|\nu)}, u_\eta^{(g|\nu)}\rangle$ и двустороннего идеала $\mathcal{E}$, порожденного элементами $e_i^{(g|\nu)}$,

$$e_i = q_i - \Phi_i, \quad \Phi_i = \Phi(q_i). \tag{A4.2.5}$$

Фактически, мы собираемся сделать эту переформулировку в виде (A4.1.48), уже установленном в конечномерном нефункциональном случае:

$$\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}. \tag{A4.2.6}$$

Скобку Пуассона в кольце $C_{q,u}$ определим по $(\mathcal{T} - \mathcal{T})$-правилу из предыдущего раздела:

$$X_{\mathcal{H}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^q & 0 \\ 0 & -B^u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{q} \\ \delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \quad \forall\, \mathcal{H} \in C_{q,u}. \tag{A4.2.7}$$

Утверждение А4.2.8. Условие пуассоновой замкнутости (А4.2.6) и Ф-условие совместности (А4.2.4) стабильно эквивалентны. (Напомним, что "стабильность" означает, что допускается рассматривать произвольные расширения $R' \supset R$.)

Доказательство. Мы собираемся преобразовать условие пуассоновой замкнутости (А4.2.6). Так как скобка Пуассона является дифференцированием относительно второго аргумента, то имеем:

$$\{E, ae_j^{(g|\nu)}b\} = \{E, a\}e_j^{(g|\nu)}b + ae_j^{(g|\nu)}\{E, b\} + a\{E, e_j\}^{(g|\nu)}b. \tag{A4.2.9}$$

Следовательно, условие $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$ эквивалентно условию

$$\{\mathcal{E}, e_j\} \subset \mathcal{E}, \quad \forall\, j. \tag{A4.2.10}$$

Далее, так как

$$ae_j^{(g|\nu)}b \approx e_j\widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu(ba), \tag{A4.2.11}$$

и, по формуле (А4.2.7),

$$\{\text{тривиальное}, \forall\} = 0,$$

то условие $\{\mathcal{E}, e_j\} \subset \mathcal{E}$ (А4.2.10) эквивалентно условию

$$\{e_ih, e_j\} \subset \mathcal{E}, \quad \forall\, i, j, \quad \forall\, h \in C_{q,u}. \tag{A4.2.12}$$

Далее, в силу формулы (А4.2.7),

$$\boldsymbol{X}_{e_ih} = \begin{pmatrix} B^q(\delta(e_ih)/\delta\boldsymbol{q}) \\ -B^u(\delta(e_ih)/\delta\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}, \tag{A4.2.13}$$

в то время, как по формуле (10.1.43)

$$\frac{\delta(\cdot)}{\delta(\cdot\cdot)} = \sum \widehat{g}^{-1}(-\partial)^\nu\left(\frac{\partial^+(\cdot)}{\partial(\cdot\cdot)^{(g|\nu)}}\right). \tag{A4.2.14}$$

Следовательно, когда мы вычисляем вариационные производные $\delta(e_ih)/\delta(\cdot\cdot)$ входящие в формулу (А4.2.13), то всякий раз, когда производная

$$\frac{\partial^+(e_ih)}{\partial(\cdot\cdot)}$$

распространяется на h, а не на e_i, остается непотревоженный элемент $e_i \in \mathcal{E}$, входящий в соответствующую компоненту $\boldsymbol{X}_{e_ih}$ и тем самым в $\{e_ih, \dots\}$. Мораль в том, что при работе с условием (А4.2.12) можно рассматривать h независящим от $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{u}$; эквивалентно, $h \in R'$ для произвольного расширения $R' \supset R$:

$$\{e_ih, e_j\} \subset \mathcal{E}, \quad \forall\, i, j, \quad \forall\, h \in R'. \tag{A4.2.15}$$

Окончательно, мы можем заменить это условие на

$$\Big\{\sum_i e_ih_i,\ e_j\Big\} \subset \mathcal{E}, \quad \forall\, j, \quad \forall\, h_i \in R'. \tag{A4.2.16}$$

Далее, по формуле (A4.2.5),

$$\frac{\delta(\sum e_i h_i)}{\delta \boldsymbol{q}} = \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}^t \boldsymbol{h} - \boldsymbol{\Phi}^t \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}, \tag{A4.2.17a}$$

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{u}}\Big(\sum e_i h_i\Big) = \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{u}}\Big(-\sum \Phi_i h_i\Big) \overset{(10.2.19),\ (10.1.40,\ 41,\ 37)}{=}$$

$$= -\sum_i \left(\frac{D\Phi_i}{D\boldsymbol{u}}\right)^\dagger (h_i). \tag{A4.2.17b}$$

Следовательно, в силу формулы (A4.2.13),

$$X_{\sum e_i h_i}(\boldsymbol{q}) = \text{Б}^q(\boldsymbol{h}), \quad X_{\sum e_i h_i}(\boldsymbol{u}) = \sum_i \text{Б}^u \left(\frac{D\Phi_i}{D\boldsymbol{u}}\right)^\dagger (h_i). \tag{A4.2.18}$$

Отсюда,

$$\Big\{\sum e_i h_i,\ e_j\Big\} = X_{\sum e_i h_i}(q_j - \Phi_j) = [B^q(\boldsymbol{h})]_j - \sum_i \frac{D\Phi_j}{D\boldsymbol{u}} B^u \left(\frac{D\Phi_i}{D\boldsymbol{u}}\right)^\dagger (h_i). \tag{A4.2.19}$$

Это должно принадлежать $\mathcal{E}$. Так как

$$[B^q(\boldsymbol{h})]_j = [\Phi(\text{Б}^q)(\boldsymbol{h})]_j \pmod{\mathcal{E}}, \tag{A4.2.20}$$

то формула (A4.2.19) превращает условие (A4.2.16) в равенство

$$\left\{\left[\Phi(B^q) - \frac{D\Phi}{D\boldsymbol{u}} B^u \left(\frac{D\Phi}{D\boldsymbol{u}}\right)^\dagger\right](\boldsymbol{h})\right\}_j = 0 \pmod{\mathcal{E}}. \tag{A4.2.21}$$

Так как в этой формуле не осталось зависимости от q, ее можно переписать в виде

$$\left[\Phi(B^q) - \frac{D\Phi}{D\boldsymbol{u}} B^u \left(\frac{D\Phi}{D\boldsymbol{u}}\right)^\dagger\right](\boldsymbol{h}) = 0. \tag{A4.2.22}$$

Так как $\boldsymbol{h}$ произволен, критерий Φ-совместности (A4.2.4) доказан. ▮

Упражнение A4.2.23. Покажите, что если вместо формулы (A4.2.7), отвечающей $(T - T)$–правилу, припять $(T + T)$–нравило

$$X_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{q}) = B^q(\delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{q}), \quad X_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{u}) = \text{Б}^u(\delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{u}), \tag{A4.2.24}$$

то условие пуассоновой замкнутости $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$ становится эквивилентиым свойству *антигамильтоновости* отображения Φ :

$$\Phi(\{H, F\}_q) = -\{\Phi(H), \Phi(F)\}_u, \quad \forall\, H, F \in C_q. \tag{A4.2.25}$$

Упражнение A4.2.26. Все переменные инже *коммутируют.*
(A) Пусть $C_u = C[u^{(n)}]$, $C_v = C[v^{(n)}]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\text{Б}^u = \partial$, $\text{Б}^v = \partial$, $\text{Б}^{u,v} = \left(\begin{smallmatrix} \partial & 0 \\ 0 & -\partial \end{smallmatrix}\right)$. Пусть $\mathcal{E}$ — идеал в $C_{u,v}$, порожденный элементом

$$u - v - f(u+v)(u^{(1)} + v^{(1)}), \quad \text{пекоторая} \quad f. \tag{A4.2.27}$$

(i) Покажите, что $\{\mathcal{E},\mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$, чем бы ни была $f = f(u+v)$ (можно взять f из какого-нибудь алгебраического расширения поля $C(u)$);
(ii) Покажите, что

$$\frac{u^2}{2} \sim \frac{v^2}{2} \pmod{\mathcal{E}}; \tag{A4.2.28}$$

(iii) Положим

$$H_u = u^3 - \frac{1}{2}u^{(1)2}, \quad H_v = v^2 - \frac{1}{2}v^{(1)2}. \tag{A4.2.29}$$

Покажите, что

$$H_u \sim H_v \pmod{\mathcal{E}}, \tag{A4.2.30}$$

если и только если

$$\frac{df}{d\eta} = f^3, \quad \eta = u + v; \tag{A4.2.31}$$

(B) Для тех же C_u, C_v и $\mathcal{E}$, пусть $B^u = \partial^3 + 2(\partial u + u\partial)$, $B^v = \partial^3 + 2(\partial v + v\partial)$, $B^{u,v} = \left(\begin{smallmatrix} B^u & 0 \\ 0 & -B^v \end{smallmatrix}\right)$.
(i^4) Покажите, что $\{\mathcal{E},\mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$, если и только если уравнение (A4.2.31) выполнено;
(C) Пусть $C_u = C[u_i^{(n)}]$, $C_v = C[v_i^{(n)}]$, $i = 1,\ldots,\ell$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $B^u = S\partial$, $B^v = S\partial$, $S \in \mathrm{Mat}_\ell(\mathbb{C})$, $S^t = S$. Зафиксируем ℓ функций $F_1,\ldots,F_\ell$:

$$F_i = F_i(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}), \tag{A4.2.32}$$

и рассмотрим идеал $\mathcal{E}$ в $C_{u,v}$ порожденный элементами

$$u_i - v_i - \partial(F_i), \quad i = 1,\ldots,\ell. \tag{A4.2.33}$$

(i^5) Покажите, что $\{\mathcal{E},\mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$, если и только если

$$(J^F S)^t = J^F S, \quad (J^F)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}, \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}; \tag{A4.2.34}$$

(i^6) Допустим, что матрица S обратима. Покажите, что если уравнение (A4.2.34) выполнено, то

$$\frac{\boldsymbol{u}^t S^{-1} \boldsymbol{u}}{2} \sim \frac{\boldsymbol{v}^t S^{-1} \boldsymbol{v}}{2} \pmod{\mathcal{E}}. \tag{A4.2.35}$$

Замечание A4.2.36. Если $\mathcal{E}$ пуассоново замкнутый идеал в C, то $X_H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$, $\forall\, H \in \mathcal{E}$. В геометрических терминах, векторное поле X_H касается “подмногообразии $\{\mathcal{E} = 0\}$.” На практике эта ситуации встречается в следующем обличье, иногда называемом преобразованием Вэклунда. Допустим, имеется кольцо C_q с гамильтоновой матрицей B^q. Рассмотрим еще одну копию этих объектов, назовем их C_u и B^u. Пусть $\mathcal{E}$ идеал в $C_{q,u}$, пуассоново замкнутый относительно гамильтоновой матрицы $B^{q,u} = \left(\begin{smallmatrix} B^q & 0 \\ 0 & -B^u \end{smallmatrix}\right)$. Пусть $H = H(q)$ элемент в C_q такой, что

$$\mathcal{H} = H(q) - H(u) \approx 0 \pmod{\mathcal{E}}. \tag{A4.2.37}$$

Тогда уравнении движенни

$$\partial_t(\boldsymbol{q}) = B^q\left(\frac{\delta H(q)}{\delta \boldsymbol{q}}\right), \quad \partial_t(\boldsymbol{u}) = B^u\left(\frac{\delta H(u)}{\delta \boldsymbol{u}}\right) \tag{A4.2.38}$$

сохраниют $\mathcal{E}$. Это так, потому что эти уравнения движения гамильтоновы в кольце $C_{q,u}$, с гамильтонианом $\mathcal{H}$ (A4.2.37); и так как

$$\mathcal{H} \in \mathcal{E} + \{\text{тривиальные в } C_{q,u}\},$$

то заключение $X_{\mathcal{H}}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ следует из условия $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$. Например, из предложений (i^4), (i), (ii) в Упражнении A4.2.26 следует, что формула (A4.2.27) определяет преобразование Бэклунда для уравнения КдФ

$$\partial_t(u) = [\partial^3 + 2(\partial u + u\partial)]\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \partial\frac{\delta}{\delta u}(u^3 - \frac{1}{2}u^{(1)2}) = 6uu^{(1)} + u^{(3)} \qquad (\text{A4.2.39})$$

при любой f, удовлетворяющей уравнению (A4.2.31). Дополнительный пример преобразования Бэклунда можно найти в конце §A4.4.

Из Утверждения A4.2.8, основного результата данного раздела, половину можно рассматривать, как абсолютный случай $\Psi = \mathrm{id}$ следующего относительного результата.

Утверждение A4.2.40. Допустим, вдобавок к кольцам C_q и C_u дано третье кольцо $C_v = R\langle v_{\dots}^{(g|\nu)}\rangle$ и соответствующая матрица B^v над ним. Пусть $\Psi : C_q \to C_v$ гомоморфизм. В кольце $C_{v,u}$ рассмотрим матрицу $B^{v,u} = \left(\begin{smallmatrix} B^v & 0 \\ 0 & -B^u \end{smallmatrix}\right)$ и двусторонний идеал $\mathcal{E}$, порожденый элементами

$$e_i = \Psi_i - \Phi_i, \quad \Psi_i = \Psi(q_i). \qquad (\text{A4.2.41})$$

Тогда условие пуассоновой замкнутости $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$ следует из свойства обоих гомоморфизмов Ψ и Φ, обеспечивающего совместность между матрицами $Б^q, Б^v$ и $Б^u$.

Доказательство. Как при доказательстве абсолютного Утверждения A4.2.8, находим, что

$$\left\{\sum_i e_i h_i,\ e_j\right\} = \sum_i \left[\frac{D\Psi_j}{Dv} Б^v \left(\frac{D\Psi_i}{Dv}\right)^\dagger - \frac{D\Phi_j}{Du} Б^u \left(\frac{D\Phi_i}{Du}\right)^\dagger\right](h_i). \qquad (\text{A4.2.42})$$

Так как оба отображения Ψ и Φ совместны, правая часть этой формулы равна

$$\{[\Psi(B^q) - \Phi(Б^q)](\boldsymbol{h})\}_j = \sum_i [(\Psi - \Phi)(B^q_{ji})](h_i) \subset \mathcal{E}. \qquad \blacksquare \qquad (\text{A4.2.43})$$

A4.3 Замкнутые 1-формы как лангранжевы подмногообразия, вариационная версия

Рассмотрим кокасательное расслоение $\pi : T^*M \to M$ многообразия M. Отождествляя 1-формы ω на M и их графики $\Gamma_\omega \subset T^*M$, можно охарактеризовать *замкнутые* формы как те, чьи графики являются лагранжевыми подмногообразиями относительно естественной симплектической структуры на T^*M. В этом разделе устанавливается, на пуассоновом (а не на симплектическом) языке, бесконечномерная версия этой хорошо известной характеризации.

Мы начнем с кольца $C_q = R\langle q_i^{(g|\nu)}\rangle$, продолжим его до кольца $C_{p,q} = R\langle q_i^{(g|\nu)}, p_i^{(g|\nu)}\rangle$, и зафиксируем каноническую гамильтонову матрицу $B^{p,q} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Выберем 1-форму $\omega \in \Omega_0^{1+}(C_q)$ (10.1.29b):

$$\omega = \sum_i dq_i F_i, \quad F_i \in C_q. \qquad (\text{A4.3.1})$$

С такой формой ассоциируется двусторонний идеал $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\omega$ в $C_{\mathbf{p},q}$, порожденный элементами

$$e_i = p_i - F_i, \quad i \in \mathcal{I}, \tag{A4.3.2}$$

компонентами формы $d\mathbf{q}^t\mathbf{p} - \omega$.

Утверждение А4.3.3. Идеал $\mathcal{E}_\omega$ пуассоново замкнут, если и только если форма ω точна, то есть существует $\mathcal{L} \in C_q$ такой, что

$$\omega = \delta(\mathcal{L}). \tag{A4.3.4}$$

Доказательство. Вычисляя как в предыдущем разделе, имеем

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{p}}\Big(\sum e_i h_i\Big) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{p}}(\mathbf{p}^t\mathbf{h} - F^t\mathbf{h}) = \mathbf{h}, \tag{A4.3.5a}$$

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{q}}\Big(\sum e_i h_i\Big) = -\sum_i \left(\frac{DF_i}{D\mathbf{q}}\right)^\dagger (h_i), \tag{A4.3.5b}$$

$$X_{\sum e_i h_i}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{h}\\ -\sum\left(\frac{DF_i}{D\mathbf{q}}\right)^\dagger(\mathbf{h}_i)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\sum\left(\frac{DF_i}{D\mathbf{q}}\right)^\dagger(\mathbf{h}_i)\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}, \tag{A4.3.6}$$

$$\Big\{\sum e_i h_i,\ e_j\Big\} = -\sum\left(\frac{DF_i}{Dq_j}\right)^\dagger(h_i) + \sum_i \frac{DF_j}{Dq_i}(h_i). \tag{A4.3.7}$$

Так как правая часть последнего выражения не зависит от p, условие $\{\sum e_i h_i, e_j\} \subset \mathcal{E}$ превращается в $\{\sum e_i h_i, e_j\} = 0$, и это происходит, если и только если

$$\sum_j\left[\left(\frac{DF_i}{Dq_j}\right)^\dagger - \frac{DF_j}{Dq_i}\right](h_i) = 0. \tag{A4.3.8}$$

Так как $\mathbf{h}$ произволен, последнее равенство эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{DF_i}{Dq_j}\right)^\dagger = \frac{DF_j}{Dq_i}, \quad \forall\, i, j, \tag{A4.3.9}$$

что служит компонентной формой равенства

$$\left(\frac{DF}{D\mathbf{q}}\right)^\dagger = \frac{DF}{D\mathbf{q}}. \tag{A4.3.10}$$

Согласно Теоремам 10.3.13, 24 это равенство необходимо и достаточно для того, чтобы форма $\omega = d\mathbf{q}^t F$ была точна. ∎

Недолговечные ошибки всегда самые лучшие.

Мольер

А4.4 Производящие функции симплектических отображений и их обобщения

> Лейбниц никогда не был женат; к пятидесяти годам он подумывал об этом; но особа, которой он сделал предложение, попросила время на размышления. Это дало время поразмыслить и Лейбницу; так он и не женился.
>
> Бернар Ле Бовье (1657–1757)

В этом разделе мы превращаем в банальность таинственный формализм нроизводящих функций в симплектической механике и теории поля.

В классической механике формулы с производящими фуикциямн возннкают в следующей конструкцнн. Рассмотрим снмплектическое отображеине $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \mapsto (\widetilde{\mathbf{p}},\widetilde{\mathbf{q}})$. Это означает, что

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = d\widetilde{\mathbf{p}} \wedge d\widetilde{\mathbf{q}}. \tag{A4.4.1}$$

Так как локально любая замкнутая 1-форма точна, то локально существует функции S такая, что

$$\mathbf{p} d\mathbf{q} - \widetilde{\mathbf{p}} d\widetilde{\mathbf{q}} = dS. \tag{A4.4.2}$$

Если S предполагается функцией от $\mathbf{q}$ и $\widetilde{\mathbf{q}}$, то формула (A4.4.2) эквивалентна паре формул

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \widetilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial S}{\partial \widetilde{\mathbf{q}}}. \tag{A4.4.3}$$

Все остальные версии этих формул нолучаются нри помощи комбинаций с каноническими автоморфизмами

$$(p_i, q_i) \mapsto (\varepsilon_i q_i, -\varepsilon_i p_i), \quad \varepsilon_i = \pm 1, \tag{A4.4.4}$$

для некоторых i. Например, переписывая соотношение (A4.4.2), как

$$-\mathbf{q} d\mathbf{p} + \widetilde{\mathbf{q}} d\widetilde{\mathbf{p}} = d(S - \mathbf{p}^t \mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{p}}^t \widetilde{\mathbf{q}}) \tag{A4.4.5}$$

и считая

$$S' = S - \mathbf{p}^t \mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{p}}^t \widetilde{\mathbf{q}} \tag{A4.4.6}$$

функцией от $\mathbf{p}$ и $\widetilde{\mathbf{p}}$, находим

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial S'}{\partial \mathbf{p}}, \quad \widetilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial S'}{\partial \widetilde{\mathbf{p}}}. \tag{A4.4.7}$$

Все это, конечно, было известно на заре цивилизации. Неивным в этой схеме является предположенне, что получающиеся формулы могут быть разрешены относительно $\widetilde{\mathbf{p}}$ и $\widetilde{\mathbf{q}}$. Так как это предположенне, вообще говоря, иеверно, то в лучшем случае мы имеем симплектическое соответствие, то есть, подмногообразие в пространстве $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \times (\widetilde{\mathbf{p}},\widetilde{\mathbf{q}})$, для которого соответствующий идеал пуассоново замкнут относительно гамильтоновой структуры

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \tag{A4.4.8}$$

на геометрическом языке, лагранжево подмногообразяе.

Мы обобщаем этот формализм в двух паравлениях. Во-первых, мы переходим от классической механики к теории поля, заменяя частные производные вариационными. Во-вторых, вместо канонической гамильтоновой матрицы $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ в $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$–пространстве мы рассмотрим более общую гамильтонову матрицу

$$b = \begin{array}{c|cc} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \\ \hline \boldsymbol{p} & 0 & \mathcal{O} \\ \boldsymbol{q} & -\mathcal{O}^\dagger & 0 \end{array}, \tag{A4.4.9}$$

где $\mathcal{O}$ — произвольный независящий от $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ оператор:

$$\mathcal{O} \in \mathrm{Mat}_{(.)}(Op_0(R)[\widehat{g}, \partial^\nu]). \tag{A4.4.10}$$

Утверждение А4.4.11. В кольце $C = C_{p,q,\widetilde{p},\widetilde{q}}$, рассмотрим гамильтонову матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O} \\ -\mathcal{O}^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{A4.4.12}$$

Возьмем произвольный элемент $S \in C_{q,\widetilde{q}}$, и рассмотрим двусторонний идеал $\mathcal{E} = \mathcal{E}_S$ в C, порожденный элементами

$$e_i = \left[\boldsymbol{p} - \mathcal{O}\left(\frac{\delta S}{\delta \boldsymbol{q}}\right)\right]_i, \quad \widetilde{e}_i = \left[\widetilde{\boldsymbol{p}} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta S}{\delta \widetilde{\boldsymbol{q}}}\right)\right]_i, \quad i = 1, \ldots \tag{A4.4.13}$$

Тогда $\mathcal{E}$ пуассоново замкнут: $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\} \subset \mathcal{E}$.

Доказательство. Вычисляя, как в §А4.2, возьмем

$$H = \sum e_i h_i = \boldsymbol{e}^t \boldsymbol{h}, \quad h_i \in R'. \tag{A4.4.14}$$

Используя обозначение S_q вместо $\delta S / \delta \boldsymbol{q}$, и т.п., находим:

$$H = p^t \boldsymbol{h} - \mathcal{O}(S_q)^t \boldsymbol{h} \approx \boldsymbol{p}^t h - S_q^t \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h}) \quad \Rightarrow \tag{A4.4.15}$$

$$H_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{h}, \quad H_q = -D_q(S_q)^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h}), \quad H_{\widetilde{p}} = 0, \quad H_{\widetilde{q}} = -D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h}) \quad \Rightarrow \tag{A4.4.16}$$

$$X_H(\boldsymbol{p}) = \mathcal{O}(H_q) = -\mathcal{O} D_q(S_q)^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O} D_q(S_q)^\dagger(\bar{h}), \tag{A4.4.17a}$$

$$\bar{h} := -\mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h}), \tag{A4.4.17b}$$

$$X_H(\boldsymbol{q}) = -\mathcal{O}^\dagger(H_{\boldsymbol{p}}) = -\mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h}) = \bar{h}, \tag{A4.4.17c}$$

$$X_H(\widetilde{\boldsymbol{p}}) = -\mathcal{O}(H_{\widetilde{q}}) = -\mathcal{O}(-D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\boldsymbol{h})) = -\mathcal{O} D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger(\bar{h}), \tag{A4.4.17d}$$

$$X_H(\widetilde{\boldsymbol{q}}) = \mathcal{O}^\dagger(H_{\widetilde{\boldsymbol{p}}}) = 0 \quad \Rightarrow \tag{A4.4.17e}$$

$$\begin{aligned} \{H, \boldsymbol{e}\} = X_H(\boldsymbol{e}) = X_H(\boldsymbol{p} - \mathcal{O}(S_q)) = \\ = \mathcal{O} D_q(S_q)^\dagger(\bar{h}) - \mathcal{O}[D_q(S_q)(X_H(\boldsymbol{q})) + D_{\widetilde{q}}(S_q)(X_H(\widetilde{\boldsymbol{q}}))] = \\ = \mathcal{O} D_q(S_q)^\dagger(\bar{h}) - \mathcal{O} D_q(S_q)(\bar{h}) = \mathcal{O}[D_q(S_q)^\dagger - D_q(S_q)](\bar{h}). \end{aligned} \tag{A4.4.18}$$

Согласно формуле (10.3.23), оператор $D_{(\cdot)}(\frac{\delta S}{\delta(\cdot)})$ самосопряжен:

$$\begin{pmatrix} D_q(S_q) & D_{\widetilde{q}}(S_q) \\ D_q(S_{\widetilde{q}}) & D_{\widetilde{q}}(S_{\widetilde{q}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_q(S_q)^\dagger & D_q(S_{\widetilde{q}})^\dagger \\ D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger & D_{\widetilde{q}}(S_{\widetilde{q}})^\dagger \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tag{A4.4.19}$$

$$D_q(S_q)^\dagger = D_q(S_q), \tag{A4.4.20}$$

$$D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger = D_q(S_{\widetilde{q}}), \tag{A4.4.21}$$

Согласно формуле (A4.4.20), выраженне (A4.4.18) равно нулю:

$$\left\{\sum e_i h_i,\ e_j\right\} = 0. \tag{A4.4.22}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\{H,\widetilde{e}\} &= X_H(\widetilde{e}) = X_H(\widetilde{p} + \mathcal{O}(S_{\widetilde{q}})) = \\ &= -\mathcal{O}D_{\widetilde{q}}(S_{\widetilde{q}})^\dagger(\bar{h}) + \mathcal{O}[D_q(S_{\widetilde{q}})(X_H(q)) + D_{\widetilde{q}}(S_{\widetilde{q}})(X_H(\widetilde{q}))] = \\ &= -\mathcal{O}D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger(\bar{h}) + \mathcal{O}D_{\widetilde{q}}(S_{\widetilde{q}})(\bar{h}) = -\mathcal{O}[D_{\widetilde{q}}(S_q)^\dagger - D_q(S_{\widetilde{q}})](\bar{h}),\end{aligned}$$

и это равно нулю по формуле (A4.4.21). Таким образом,

$$\left\{\sum e_i h_i,\ \widetilde{e}_j\right\} = 0. \tag{A4.4.23}$$

Перестановка неременных с тильдой и без в формулах (A4.4.13, 12, 9) сводится к замене $\mathcal{O}$ by $-\mathcal{O}$. Следовательно, уже доказанные формулы (A4.4.22, 23) дают свою версию с тильдой:

$$\left\{\sum \widetilde{e}_i h_i,\ e_j\right\} = \left\{\sum \widetilde{e}_i h_i,\ \widetilde{e}_j\right\} = 0. \qquad \blacksquare \tag{A4.4.24}$$

В качестве примера рассмотрим иерархию НУШ из §3.5:

$$\partial_{t_n}(p) = (L^n)_+(p), \tag{A4.4.25a}$$

$$\partial_{t_n}(q) = -[(L^n)_+]^\dagger(q), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A4.4.25b}$$

$$L = \xi + p^t\xi^{-1}q. \tag{A4.4.25c}$$

При $n = 2$, это есть система (3.5.9, 10):

$$\partial_t(p) = \quad p^{(2)} + 2(p^t q)p, \tag{A4.4.26a}$$

$$\partial_t(q) = -q^{(2)} - 2q(p^t q). \tag{A4.4.26b}$$

Вся иерархия НУШ гамильтонова, с канонической гамильтоповой матрицей: $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Далее, рассмотрим производящую фупкцию

$$S = \widetilde{p}^{(1)t}q - \frac{1}{2}(\widetilde{p}^t q)^2. \tag{A4.4.27}$$

Тогда формулы

$$p = \frac{\delta S}{\delta q} = \quad \widetilde{p}^{(1)t} - (\widetilde{p}^t q)\widetilde{p}, \tag{A4.4.28a}$$

$$\widetilde{q} = \frac{\delta S}{\delta \widetilde{p}} = -\,q^{(1)} - q(\widetilde{p}^t q), \tag{A4.4.28b}$$

дают симплектическое соответствие в пространстве $(p, q, \widetilde{p}, \widetilde{q})$. Две копии оператора Лакса L для НУШ (A4.4.25c), при обозначении

$$a = \widetilde{p}, \quad b = q, \tag{A4.4.29}$$

прнннмают вид

$$L_1 = \xi + [a^{(1)} - (a^t b)a]^t\xi^{-1}b, \tag{A4.4.30a}$$

$$L_2 = \xi - a^t\xi^{-1}[b^{(1)} + b(a^t b)]. \tag{A4.4.30b}$$

Упражнение А4.4.31. Покажите, что для $n = 1, 2$

$$\mathrm{Res}(L_1^n) \approx \mathrm{Res}(L_2^n). \tag{A4.4.32}$$

Гипотеза А4.4.33. Формула (А4.4.32) верна для всех $n \in \mathbb{N}$.

В силу Замечания А4.2.36, из Упражнения А4.4.31 следует, что формулы (А4.4.28) определяют преобразование Бэклуида системы НУШ (А4.4.26). Если гипотеза А4.4.33 верна, это заключение применимо ко всей иерархии НУШ (А4.4.25).

Сомнения проникают повсюду, но есть одно исключение: не бывает *скептической* музыки.

Сиоран

Приложение A5

Ковариантные аспекты гамильтонова формализма

Гамильтонов формализм не является ковариантной теорией: он требует явного отделения временной переменной от всех остальных пространственно-временных переменных. В этом приложении исследуются различные проблемы, возникающие при попытках расширить данную гамильтонову систему в ковариантную форму.

A5.1 GL_{m+1}–теория и GL_2–пример: уравнение КдФ

В этом разделе мы обсуждаем препятствия на пути превращения гамильтонова формализма из нековариантной в ковариантную теорию. В качестве примера, мы исследуем КдФ и сходные гамильтоновы системы.

Система дифференциальных уравнений в частных производных с $m+1$ независимой переменной $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_{m+1})$,

$$f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}, \dots) = 0, \tag{A5.1.1}$$

иногда, очень редко, может быть разрешена относительно $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$, $\boldsymbol{y} = (t, \boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}, \dots). \tag{A5.1.2}$$

Если $\boldsymbol{F}$ независит от t, получаем эволюционную систему

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}, \dots). \tag{A5.1.3}$$

Это последняя система допускает чисто алгебраическую трактовку; в частности, такая система может быть предметом гамильтонова формализма. Последний определенно не является ковариантной теорией: он приложим лишь к эволюционным уравнениям вида (A5.1.3). Возникает естественный вопрос, является ли свойство системы быть гамильтоновой свойством объекта, описываемого этой системой дифференциальных уравнений, или же только свойством весьма частной формы, которую эта система принимает в специально выбранных координатах. Последний случай был бы нефизичным и неприемлемым. Первый случай был бы физичным и эстетически удовлетворительным. Теории, которая давала бы ответ на этот вопрос, не существует. Как мы сейчас увидим, вопрос технически сложен.

Упрощенная версия этого вопроса ограничивает допустимые замены независимых переменных *линейными:*

$$\boldsymbol{y}_{new} = M\boldsymbol{y}_{old}, \quad M \in GL_{m+1}(\mathbb{R}). \tag{A5.1.4}$$

Эта упрощенная проблема тоже трудна и является нерешенной. На то есть множество причин. Одна из них лежит в неконтролируемом поведении вариационных производных $\delta H/\delta\boldsymbol{u}$ под действием GL_{m+1} (A5.1.4), примененным к гамильтоновой системе

$$\boldsymbol{u}_t = B\left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{u}}\right). \tag{A5.1.5}$$

Другая связана с числом производных по x, входящих в правую часть гамильтоновой системы (A5.1.5): после GL_{m+1}–действия, в эти x-производные замешиваются производные по времени, различных порядков; получающаяся система больше не является первого порядка по t, и чтобы восстановить ее эволюционный характер, приходится вводить *новые* зависимые переменные. Лишь для систем 1-го порядка типа

$$\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_x), \tag{A5.1.6}$$

увеличение исходной системы при GL_{m+1}–действии излишне.

Чтобы увидеть, что происходит, ограничимся, с этого момента, простейшим случаем GL_2, вместо GL_{m+1}. Разберем пример уравнения КдФ

$$\partial_\tau(u) = \partial_\eta(3u^2 + u_{\eta\eta}) = \partial_\eta\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right), \quad H = u^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2. \tag{A5.1.7}$$

Выберем произвольную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2, \tag{A5.1.8}$$

порождающую замену частных производных

$$\begin{aligned} \partial_\tau &= a\partial_t + b\partial_x, \\ \partial_\eta &= c\partial_t + d\partial_x. \end{aligned} \tag{A5.1.9}$$

Если $c = 0$, то любая гамильтонова системы (A5.1.5) при такой замене превращается в

$$a\boldsymbol{u}_t + b\boldsymbol{u}_x = B^d\left(\frac{\delta H^d}{\delta \boldsymbol{u}}\right), \tag{A5.1.10}$$

где значок 'd' обозначает растяжение η в d раз. Если $P = P(B)$ — гамильтониан импульса для гамильтоновой матрицы B :

$$B\left(\frac{\delta P}{\delta \boldsymbol{u}}\right) = \partial_\eta(\boldsymbol{u}), \tag{A5.1.11}$$

то

$$B^d\left(\frac{\delta P^d}{\delta \boldsymbol{u}}\right) = d\partial_x(\boldsymbol{u}), \tag{A5.1.12}$$

так что формулу (A5.1.10) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{u}_t = a^{-1}B^d\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{u}}(H^d - bd^{-1}P^d). \tag{A5.1.13}$$

Таким образом, случай $c = 0$ тривиален. Будем далее считать, что

$$c \neq 0. \tag{A5.1.14}$$

Обозначим

$$\dot{(\cdot)} = \partial_t(\cdot), \quad (\cdot)' = \partial_x(\cdot). \tag{A5.1.15}$$

Уравнение КдФ (A5.1.7) при GL_2–действии (A5.1.9) превращается в

$$a\dot u + bu' = 3u(c\dot u + du') + 3(c\dot u + du')u + (c^3\ddot u + 3c^2d\ddot u' + 3cd^2\dot u'' + d^3u'''). \tag{A5.1.16}$$

Вводя новые переменные

$$\dot u = \bar u_1, \quad \dot{\bar u}_1 = \bar u_2(= \ddot u), \tag{A5.1.17}$$

мы можем привести уравнение (A5.1.16) в систему 1-го порядка по времени, состоящую из уравнений (A5.1.17) и

$$\begin{aligned}\dot{\bar u}_2 = c^{-3}[a\bar u_1 + bu' - 3u(c\bar u_1 + du') - 3(c\bar u_1 + du')u-\\ -3c^2d\bar u_2' - 3cd^2\bar u_1'' - d^3u'''].\end{aligned} \tag{A5.1.18}$$

Эта система немного громоздка. Вводя переменные

$$u_1 = \bar u_1 + c^{-1}du', \quad u_2 = \bar u_2 + 2c^{-1}d\bar u_1' + (c^{-1}d)^2u'', \tag{A5.1.19}$$

так что

$$\bar u_1 = u_1 - c^{-1}du', \quad \bar u_2 = u_2 - 2c^{-1}du_1' + (c^{-1}d)^2u'', \tag{A5.1.20}$$

мы можем переписать систему (A5.1.17, 18) в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} u_1 - c^{-1}du' \\ u_2 - c^{-1}du_1' \\ -(c^{-4}\Delta u + c^{-1}du_2)' + c^{-3}au_1 - 3c^{-2}(uu_1 + u_1u) \end{pmatrix}, \tag{A5.1.21a}$$

$$\Delta = ad - bc. \tag{A5.1.21b}$$

Упражнение A5.1.22. Проверьте эти формулы.

Система (A5.1.21) оказывается гамильтоновой.

Утверждение A5.1.23. В кольце $C = C_{u,u_1,u_2}$ рассмотрим гамильтониан

$$\begin{aligned}H = \frac{1}{2}u_1^2 - c^{-1}du'u_1 + \Big(\frac{bc}{\Delta}u - \frac{3cd}{\Delta}u^2 - \frac{c^3d}{2\Delta}u_2\Big)u_2-\\ -\frac{c^{-2}ab}{2\Delta}u^2 + \frac{c^{-2}}{\Delta}(ad + 2bc)u^3 - \frac{9c^{-1}d}{2\Delta}u^4,\end{aligned} \tag{A5.1.24}$$

и матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -J^\dagger \\ 0 & J & \gamma\partial \end{pmatrix}, \quad J = \frac{Dh}{Du}, \quad h \in C_u, \quad \gamma = \mathrm{const}. \tag{A5.1.25}$$

Тогда:

(i) Матрица B гамильтонова;

(ii) При

$$\gamma = c^{-4}\Delta, \quad h = c^{-3}au - 3c^{-2}u^2, \tag{A5.1.26}$$

матрица B и гамильтониан H (A5.1.24) порождают уравнения движения (A5.1.21).

Доказательство. (i) Обратимая замена переменных

$$\widetilde{u} = u, \quad \widetilde{u}_1 = u_1, \quad \widetilde{u}_2 = u_2 - h(u), \tag{A5.1.27}$$

приводит матрицу B (A5.1.25) к виду с постоянными коэффициентами

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\partial \end{pmatrix}; \tag{A5.1.28}$$

(ii) вектор из варяационных производных гамильтониана H (A5.1.24) равен:

$$\begin{aligned} \delta H/\delta u = c^{-1}du_1' + bcu_2/\Delta - 3cd(uu_2 + u_2u)/\Delta - c^{-2}abu/\Delta+ \\ +3c^{-2}(ad + 2bc)u^2/\Delta - 18c^{-1}du^3/\Delta, \end{aligned} \tag{A5.1.29a}$$

$$\delta H/\delta u_1 = u_1 - c^{-1}du', \tag{A5.1.29b}$$

$$\delta H/\delta u_2 = (bcu - 3cdu^2 - c^3du_2)/\Delta. \tag{A5.1.29c}$$

Для h вида (A5.1.26), элемент $\frac{Dh}{Du}$ в матрице B (A5.1.25) равен

$$c^{-3}a - 3c^{-2}(\widehat{L}_u + \widehat{R}_u). \tag{A5.1.30}$$

Применяя эту матрицу B к вектору $\delta H/\delta(\dots)$, воспроизводим уравнения движения (A5.1.21). ▌

Таким образом, GL_2–орбита уравнения КдФ состоит из гамильтоновых систем. Не похоже, чтобы уравнение КдФ было как-то выделенео среди гамильтоновых систем вида

$$u_\tau = \partial_\eta\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right). \tag{A5.1.31}$$

Но доказательство отсутствует.

Замечание A5.1.32. Допустим, $\mathcal{H}$ является интегралом эволюционной системы

$$\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_\eta, \dots): \tag{A5.1.33}$$

$$\mathcal{H}_\tau + (\mathrm{Flux})_\eta \in \mathrm{Com}, \tag{A5.1.34}$$

где Com обозначает подпространство коммутаторов в C_u. Применяя формулы GL_2–действия (A5.1.8) к эволюционной системе (A5.1.33) и к закону сохранения (A5.1.34), получаем

$$(a\mathcal{H} + c\,\mathrm{Flux})_t + (b\mathcal{H} + d\,\mathrm{Flux})_x \in \mathrm{Com}. \tag{A5.1.35}$$

Таким образом, интеграл, распространенный на GL_2–орбиту, имеет вид

$$a\mathcal{H} + c\,\mathrm{Flux}. \tag{A5.1.36}$$

Эта формула указывает на другую причину затруднений при попытке построить ковариантный гамильтонов формализм: для этого приходится учитывать токи, которые не нужны в традиционном гамильтоновом формализме.

Однако, картину не так уж мрачна. Если работать с группой Ли, в данном случае GL_{m+1}, трудно, то может быть, нам больше повезет с соответствующей алгеброй Ли. Подробности в следующем разделе.

Упражнение А5.1.37. Покажите, что GL_2-КдФ система (А5.1.21) по прежнему имеет бесконечное число интегралов.

Упражнение А5.1.38. Вместо уравнения КдФ (А5.1.7) рассмотрите более общую систему

$$u_\tau = \partial_\eta(f + u_{\eta\eta}) = \frac{Df}{Du}(u\eta) + u_{\eta\eta\eta} = \partial_\eta \frac{\delta}{\delta u}(F - \frac{1}{2}(u_\eta)^2), \tag{A5.1.39a}$$

$$f = \frac{dF}{du}, \quad F \in \mathbb{C}(u). \tag{A5.1.39b}$$

Покажите, что формулы (А5.1.21, 24, 26) претерпевают следующие изменения:

$$\dot{u}_2 = -(c^{-4}\Delta u + c^{-1}du_2)' + c^{-3}au_1 - c^{-2}\frac{DF}{Du}(u_1), \tag{A5.1.40}$$

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2}u_1^2 - c^{-1}du'u_1 + (bcu - c^3du_2/2 - cdf)u_2/\Delta - \\ & -c^{-2}abu^2/2\Delta + c^{-2}(adF + bc\Phi)/\Delta - c^{-1}f^2/2\Delta, \end{aligned} \tag{A5.1.41a}$$

$$\frac{d\Phi}{du} = u\frac{df}{du}, \tag{A5.1.41b}$$

$$h = c^{-3}au - c^{-2}f. \tag{A5.1.41c}$$

Упражнение А5.1.42. Решения типа бегущей волны для эволюционного уравнения и его GL–версии, — есть ли между ними какая-то связь?

Определение А5.1.43. В случае m независимых переменных, гамильтониан $H \in C_q$ называется s-м импульсом гамильтоновой матрицы B, и обозначается $H \in P^s(B)$, если

$$B\left(\frac{\delta H}{\delta q}\right) = \partial_s(q). \tag{A5.1.44}$$

Упражнение А5.1.45. Пусть $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ каноническая гамильтонова матрица. Покажите, что

$$\partial_s(p)^t q \in P^s(B). \tag{A5.1.46}$$

А5.2 Инфинитезимальные геометрические возмущения

В этом разделе мы исследуем влияние инфинитезимальных gl_{m+1}–действий на гамильтоновы системы. 1-мерные примеры включают уравнения КдФ и МКдФ, и баротропную и адиабатическую версии динамики жидкости.

Для максимальной прозрачности, в этом разделе всему дозволено ***коммутировать***.

Почти любая матрица $M \in GL_{m+1}$ обладает треугольным разложением

$$M = \mathcal{LDU}, \tag{A5.2.1}$$

где матрица $\mathcal{D}$ диагональна и матрица $\mathcal{L}$ ($\mathcal{U}$) нижне-(верхне-)треугольная с единичной диагональю. При действии на вектор из частных производных $\nabla_y = (\partial_t, \nabla_x)$, диагональная матрица $\mathcal{D}$ действует как растяжение, а верхне-треугольная матрица

$\mathcal{U}$ перемешивает x между собой, не затрагивая t. Эти невинные действия легко уживаются с любой изощренной манипуляцией, какая только может встретиться. Что касается нижне-треугольной матрицы $\mathcal{L}$, имеем

$$\mathcal{L} = EN, \tag{A5.2.2a}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \alpha & \ddots & \\ & L & 1 \end{pmatrix}, \tag{A5.2.2b}$$

α есть вектор-столбец размерности m, $L \in \mathrm{Mat}_m$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \alpha & \ddots & \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & L & 1 \end{pmatrix} \tag{A5.2.2c}$$

Матрица N действует подобно $\mathcal{U}$. Матрица E действует как

$$\partial_t \mapsto \partial_t; \quad \partial_{x_i} \mapsto \partial_{x_i} + \alpha_i \partial_t, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{A5.2.3}$$

Именно эта матрица в конечном счете ответственна за все ковариантные гамильтоновы трудности, обсуждавшиеся в предыдущем разделе.

Упражнение А5.2.4. Покажите, что ни одно из представлений

$$M = \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{U} \quad \text{или} \quad M = \mathcal{U}\mathcal{D}\mathcal{L} \tag{A5.2.5}$$

не покрывает перестановку $(t, x) \mapsto (x, t)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Упражнение А5.2.6. Пусть $m = 1$, $a = a(u) \in \mathbb{C}(u)$, $H = H(u) \in \mathbb{C}(u)$.
(i) Покажите, что действие (А5.2.3)

$$\partial_t \mapsto \partial_t, \quad \partial_x \mapsto \partial_x + \alpha \partial_t, \tag{A5.2.7}$$

переводит гамильтонову систему

$$u_t = (a\partial + \partial a)\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right) = (a\partial + \partial a)(H_u) \tag{A5.2.8}$$

в уравнение

$$u_t = [1 - \alpha(2aH_{uu} + a_u H)]^{-1}(a\partial + \partial a)(H_u); \tag{A5.2.9}$$

(ii) Покажите, что это уравнение опять является гамильтоновой системой:

$$u_t = \mathcal{B}\left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}\right), \tag{A5.2.10a}$$

$$\mathcal{B} = [1 - \alpha(2aH_{uu} + a_u H_u)]^{-1}(a\partial + \partial a)[1 - \alpha(2aH_{uu} + a_u H_u)]^{-1}, \tag{A5.2.10b}$$

$$\mathcal{H} = H - \alpha a (H_u)^2; \tag{A5.2.10c}$$

(iii) Пусть функция $H_0 = H_0(u)$ такова, что

$$dH_0/du = a^{-1/2}. \tag{A5.2.11}$$

Покажите, что $H_0 \in \operatorname{Ker}(a\partial + \partial a)$, то есть

$$(a\partial + \partial a)\left(\frac{\delta H_0}{\delta u}\right) = 0. \tag{A5.2.12}$$

[Подсказка : $a\partial + \partial a = 2\sqrt{a}\partial\sqrt{a}$];

(i^4) Покажите, что из уравнения (A5.2.8) следует

$$H_{0,t} = 2\partial(\sqrt{a}H_u); \tag{A5.2.13}$$

(i^5) Получите отсюда, что

$$\mathcal{H}_0 = H_0 - 2\alpha\sqrt{a}H_u \tag{A5.2.14}$$

является сохраняющейся плотностью для уравнения (A5.2.9);

(i^6) Покажите, что $\mathcal{H}_0 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ задается формулой (A5.2.10b);

(i^7) Покажите, что

$$\mathcal{H}_1 = \mathrm{const}(\mathcal{H}_0)^2, \quad \mathrm{const} = 1/4, \tag{A5.2.15}$$

является моментом гамильтонова оператора $\mathcal{B}$ (A5.2.10b):

$$\mathcal{B}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_1}{\delta u}\right) = u_x \ ; \tag{A5.2.16}$$

(i^8) При $\alpha = 0$, формула (A5.2.15) дает момент $H_1 = (H_0)^2/4$ гамильтонова оператора $B = (a\partial + \partial a)$. Покажите, что

$$H_{1,t} = \partial(H_0\sqrt{a}H_u - H); \tag{A5.2.17}$$

(i^9) Получите отсюда, что

$$\bar{\mathcal{H}}_1 = H_1 - \alpha(H_0\sqrt{a}H_u - H) \tag{A5.2.18}$$

есть сохраняющаяся плотность для возмущенного уравнения (A5.2.9); покажите, что

$$\mathcal{H}_1 \neq \bar{\mathcal{H}}_1 \quad \text{при} \quad \alpha \neq 0. \tag{A5.2.19}$$

Ясно, что чем больше x-дифференцирований в гамильтониане H, тем трудиее получить явные формулы типа (A5.2.10). В виде общей проблемы, это, вероятно, безнадежно. Временный выход заключается в том, чтобы рассмотреть матрицы M *очень близкие* к единичной:

$$M = 1 + \varepsilon\bar{M}, \quad \bar{M} \in gl_{m+1}, \quad \varepsilon^2 = 0. \tag{A5.2.20}$$

В терминах ключевой матрицы E (A5.2.2c), соответствующее преобразование (A5.2.3) имеет вид

$$\partial_t \mapsto \partial_t; \quad \partial_{x_i} \mapsto \partial_{x_i} + \varepsilon\alpha_i\partial_t, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \varepsilon^2 = 0, \tag{A5.2.21}$$

так что

$$\partial^\sigma \mapsto \partial^\sigma + \varepsilon\sum_i \alpha_i\sigma_i\partial^{\sigma-1_i}\partial_t, \quad \partial^\sigma = \partial_{x_1}^{\sigma_1}\ldots\partial_{x_m}^{\sigma_m}. \tag{A5.2.22}$$

Упражнение А5.2.23. Пусть $m = 1$. Покажите, что под действием (А5.2.21), уравнение

$$u_t = F(u, \dots, u^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{А5.2.24}$$

превращается в

$$u_t = \Big(1 + \alpha\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \frac{\partial F}{\partial u^{(i+1)}} \partial^i\Big)(F). \tag{А5.2.25}$$

Формула (А5.2.25) *квадратична* но F. Легко видеть, что это заключение применимо в общем случае, для векторных систем нодвернутых gl_{m+1}-действию. В оставшейся части раздела мы рассмотрим различные примеры, оформленные в виде упражнений, все для случая gl_2. Так как в этом случае имеется только один x, мы можем положить $\alpha = 1$ в формуле (А5.2.21) и рассматривать действие

$$\partial_t \mapsto \partial_t, \quad \partial_x \mapsto \partial_x + \varepsilon\partial_t, \quad \varepsilon^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x^n \mapsto \partial_x^n + \varepsilon n \partial_x^{n-1}\partial_t. \tag{А5.2.26}$$

Упражнение А5.2.27. Пусть $f = dF/du \in \mathbb{C}(u)$. Рассмотрим уравнение тина КдФ

$$u_t = \partial(f - u_{xx}) = \partial\left(\frac{\delta H}{\delta u}\right), \quad H = F + \frac{1}{2}u_x^2. \tag{А5.2.28}$$

(i) Покажите, что действие (А5.2.26) превращает это уравнение в

$$u_t = [1 + \varepsilon(f_u - 3\partial^2)]\partial(f - u_{xx}); \tag{А5.2.29}$$

(ii) Покажите, что из уравнения (А5.2.28) следует

$$H_t = \partial\Big\{\frac{1}{2}f^2 + u_x\partial(f) - u_{xx}f + \frac{1}{2}u_{xx}^2 - u_x u_{xxx}\Big\}; \tag{А5.2.30}$$

(iii) Получите отсюда, что

$$\mathcal{H}_3 = F + \frac{1}{2}u_x^2 - \varepsilon\Big(\frac{1}{2}f^2 - u_{xx}f + \frac{1}{2}u_{xxx}^2\Big) \tag{А5.2.31}$$

служит сохраняющейся плотностью уравнения (А5.2.29);
(i^4) Покажите, что гамильтониан $\mathcal{H}_3$ (А5.2.31) и оиератор

$$B^I = \partial + \varepsilon(f_u\partial + \partial f_u - 4\partial^3) \tag{А5.2.32}$$

воснроизводят возмущениое уравнение (А5.2.29);
(i^5) Покажите, что онератор B^I (А5.2.32) гамильтонов над кольцом $C_u[\partial][\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, $C_u = C[u, u^{(1)}, \dots]$;
(i^6) Рассмотрим еще одну копию того же уравнения (А5.2.28), с v вместо u :

$$v_t = \partial(2v^3 - v_{xx}), \tag{А5.2.33}$$

mKdV уравнения. Преобразование Миуры

$$u = v^2 + v_x, \tag{А5.2.34}$$

под действием (А5.2.25) превращается в

$$u = v^2 + v_x + \varepsilon(6v^2v_x - v_{xxx}). \tag{А5.2.35}$$

Покажите, что это отображение переводит гамильтонов оператор

$$B^I = \partial + \varepsilon(6v^2\partial + 6\partial v^2 - 4\partial^3) \tag{A5.2.36}$$

в гамильтонов оператор

$$B^{II} = 2u\partial + 2\partial u - \partial^3 + \varepsilon\{6\partial^3 - 20(u\partial^3 + \partial^3 u) + 12(u'' + 2u^2)\partial + 12\partial(u'' + 2u^2)\}; \tag{A5.2.37}$$

(i^7) Покажите, что уравнение (A5.2.28) имеет закон сохранения

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t = (\Phi - uu'' + \frac{1}{2}u'^2)_x, \quad \Phi_u = uf_u; \tag{A5.2.38}$$

(i^8) Получите отсюда, что возмущенное уравнение (A5.2.29) имеет сохраняющуюся плотность

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}u^2 - \varepsilon\bigl(\Phi + \frac{3}{2}u'^2\bigr); \tag{A5.2.39}$$

(i^9) Проверьте, что в случае

$$f = 3u^2, \quad \Phi = 2u^3, \tag{A5.2.40}$$

гамильтониан $\mathcal{H}_2$ (A5.2.39) и гамильтонов оператор B^{II} (A5.2.37) воспроизводят возмущенное уравнение КдФ (A5.2.29);

(i^{10}) Пусть $H_0 = u \in \operatorname{Ker}(\partial)$;

$$\partial\left(\frac{\delta H_0}{\delta u}\right) = 0. \tag{A5.2.41}$$

Из уравнения (A5.2.28) получите, что

$$\mathcal{H}_0 = u - \varepsilon(f - u'') \sim u - \varepsilon f \tag{A5.2.42}$$

служит сохраняющейся плотностью для возмущенного уравнения (A5.2.29);

(i^{11}) Проверьте, что $\mathcal{H}_0 \in \operatorname{Ker}(B^I)$, где B^I задается формулой (A5.2.32);

(i^{12}) Проверьте, что

$$\mathcal{H}_1 = \frac{u^2}{2} - \varepsilon(uf - 2uu'') = \frac{1}{2}[u - \varepsilon(f - 2u'')]^2 \tag{A5.2.43}$$

является моментом гамильтонова оператора B^I (A5.2.32);

(i^{13}) Проверьте, что

$$u(1 - 4\varepsilon u) \tag{A5.2.44}$$

является моментом гамильтонова оператора B^{II} (A5.2.37)

Упражнение A5.2.45. Рассмотрим 1-мерную баротропную динамику жидкости

$$M_t = (M^2/\rho + P)_x, \quad \rho_t = M_x, \tag{A5.2.46}$$

где давление $P = P(\rho)$ — заданная функция плотности ρ :

$$P = \rho E_\rho - E, \quad P_\rho = \rho E_{\rho\rho}, \tag{A5.2.47}$$

$E = E(\rho)$ есть плотность внутренней энергии, и M плотность импульса жидкости. (Знак времени неправилен). Система (A5.2.46) гамильтонова: ее можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} M \\ \rho \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} M\partial + \partial M & \rho\partial \\ \partial\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta M \\ \delta M/\delta\rho \end{pmatrix}, \tag{A5.2.48}$$

$$H = M^2/2\rho + E. \tag{A5.2.49}$$

(i) Покажите, что действие (А5.2.26) превращает систему (А5.2.46) в деформированную систему

$$M_t = (M^2/\rho + P)' + \varepsilon[2M\rho^{-1}(M^2/\rho + P)' + (P_\rho - M^2/\rho^2)M'], \tag{A5.2.50a}$$

$$\rho_t = M' + \varepsilon(M^2/\rho + P)'; \tag{A5.2.50b}$$

(ii) Покажите, что система (А5.2.46) имеет закон сохранения

$$H_t = (M^3/2\rho^2 + ME_\rho)_x; \tag{A5.2.51}$$

(iii) Получите отсюда, что возмущенная система (А5.2.50) имеет сохраняющуюся плотность

$$\mathcal{H} = M^2/2\rho + E - \varepsilon(M^3/2\rho^2 + ME_\rho); \tag{A5.2.52}$$

(i^4) Покажите, что в переменных $u = M/\rho$ (скорость жидкости) и ρ матрица

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} E_{\rho\rho}\partial + \partial E_{\rho\rho} & u\partial + \partial u \\ u\partial + \partial u & \rho\partial + \partial\rho \end{pmatrix} \tag{A5.2.53}$$

и гамильтониан $\mathcal{H}$ (А5.2.52) порождают возмущенную систему (А5.2.50), теперь записанную в виде

$$u_t = (1 + \varepsilon u)\Big(\frac{u^2}{2} + E_\rho\Big)' + \varepsilon E_{\rho\rho}(\rho u)', \tag{A5.2.54a}$$

$$\rho_t = [\rho_u + \varepsilon(\rho u^2 + P)]'; \tag{A5.2.54b}$$

(i^5) Покажите, что матрица $\mathcal{B}$ (А5.2.53) гамильтонова;
(i^6) Покажите, что если ε *конечен*, то матрица $\mathcal{B}$ (А5.2.53) гамильтонова если и только если

$$\rho E_{\rho\rho\rho} = E_{\rho\rho}; \tag{A5.2.55}$$

(i^7) Покажите, что оба

$$\mathcal{H}_0 = \rho(1 - \varepsilon u) \quad \text{и} \quad \bar{\mathcal{H}}_0 = u - \varepsilon\Big(\frac{u^2}{2} + E_\rho\Big) \tag{A5.2.56}$$

принадлежат ядру гамильтоновой матрицы $\mathcal{B}$ (А5.2.53);
(^{8}) Положим

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0\bar{\mathcal{H}}_0 = \rho u - \varepsilon\Big(\frac{3}{2}\rho u^2 + \rho E_\rho\Big). \tag{A5.2.57}$$

Покажите, что $\mathcal{H}_1$ служит моментом гамильтоновой матрицы $\mathcal{B}$ (А5.2.53). (Ср. с формулой (А5.2.15).)

Упражнение А5.2.58. Рассмотрим 1-мерную адиабатическую динамику жидкости:

$$M_t = (M^2/\rho + P)_x, \quad \rho_t = M_x, \quad \eta_t = \rho^{-1}M\eta_x, \tag{A5.2.59}$$

она отличается от баротропной системы (А5.2.46) в двух отношениях: во-первых, имеется новая переменная η, удельная энтропия, и во-вторых, внутренняя энергия E является заданной функцией от ρ и η : $E = E(\rho, \eta)$. Адиабатическая динамика жидкости является гамильтоновой системой: ее можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} M \\ \rho \\ \eta \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} M\partial + \partial M & \rho\partial & -\eta_x \\ \partial\rho & 0 & 0 \\ \eta_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta M \\ \delta H/\delta\rho \\ \delta H/\delta\rho \end{pmatrix}, \tag{A5.2.60}$$

$$H = M^2/2\rho + E. \tag{A5.2.61}$$

В перемеиных $u = M/\rho$, ρ, η, гамильтонова форма (A5.2.60, 61) иринимает вид

$$\begin{pmatrix} u \\ \rho \\ \eta \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \partial & -\rho^{-1}\eta_x \\ \partial & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\eta_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H/\delta u \\ \delta H/\delta \rho \\ \delta H/\delta \eta \end{pmatrix}, \tag{A5.2.62}$$

$$H = \rho u^2/2 + E. \tag{A5.2.63}$$

Адиабатические уравнения движения в переменных (u, ρ, η),

$$u_t = uu_x + \rho^{-1}P_x, \quad \rho_t = (u\rho)_x, \quad \eta_t = u\eta_x, \tag{A5.2.64}$$

носле инфинитезимального действия (A5.2.26), переходят в

$$\dot{u} = (1+\varepsilon u)(uu' + \rho^{-1}P') + \varepsilon\rho^{-1}[P_\rho(u\rho)' + P_\eta u\eta'], \tag{A5.2.65a}$$

$$\dot{\rho} = [u\rho + \varepsilon(\rho u^2 + P)]', \tag{A5.2.65b}$$

$$\dot{\eta} = u\eta'(1+\varepsilon u). \tag{A5.2.65c}$$

(i) Покажите, что из адиабатических уравнений движения (A5.2.64) следует

$$H_t = (\rho u^3/2 + u\rho E_\rho)_x; \tag{A5.2.66}$$

(iii) Получите, что возмущенная система (A5.2.65) имеет сохраняющуюся плотность

$$\mathcal{H} = \rho u^2/2 + E - \varepsilon u(\rho u^2/2 + \rho E_\rho) = H - \varepsilon\rho u H_\rho\ ; \tag{A5.2.67}$$

(iii) Рассмотрим матрицу

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \varepsilon(E_{\rho\rho}\partial + \partial E_{\rho\rho}) & \varepsilon(u\partial + \partial u) + \partial & -\rho^{-1}\eta_x(1+2\varepsilon u) \\ \varepsilon(u\partial + \partial u) + \partial & \varepsilon(\rho\partial + \partial\rho) & -\varepsilon\eta_x \\ \rho^{-1}\eta_x(1+2\varepsilon u) & \varepsilon\eta_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{A5.2.68}$$

Покажите, что эта матряца $\mathcal{B}$ и гамильтониан $\mathcal{H}$ (A5.2.67) воспроизводят возмущенные уравнении движенни (A5.2.65);
(i^4) Покажите, что гамильтонианы

$$\mathcal{H}_0 = \rho(1-\varepsilon u), \quad \widetilde{\mathcal{H}}_0 = \rho\eta(1-\varepsilon u), \tag{A5.2.69}$$

принадлежат ядру гамильтоновой матрнцы $\mathcal{B}$ (A5.2.68);
(^{6}) Положим

$$\mathcal{H}_1 = \rho u - \varepsilon\rho\left(\frac{3}{2}u^2 + E_\rho\right). \tag{A5.2.70}$$

Покажите, что $\mathcal{H}_1 \in P(\mathcal{B})$. (Ср. с формулой (A5.2.57).)

Приложение А6

Некоммутативные солитоны

В коммутативной теории, многосолитонные решения можно иногда эффективно получить в виде бесконечных рядов. Ниже мы исследуем такую конструкцию с рядами для некоммутативного уравнения КдФ и обнаруживаем, на этом языке, точное место, где возникает препятствие для введения τ-функционального представления.

Вывод представления при помощи рядов, которое мы собираемся развить, следует коммутативной версии Вадати и Савады [WSa 1980a].

Мы начнем с уравнения КдФ

$$u_t = (3u^2 + u_{xx})_x, \tag{A6.1}$$

и рассмотрим его потенциальную версию в виде

$$w_t = 6\varepsilon w_x^2 + w_{xxx}, \tag{A6.2}$$

$$u = 2\varepsilon w_x. \tag{A6.3}$$

Здесь введен формальный параметр ε, коммутирующий с чем угодно. Это сделано для того, чтобы можно было искать решения в виде ряда

$$w = \sum_{i\geqslant 0} w_i \varepsilon^i. \tag{A6.4}$$

Подставляя это представление в w-уравнение (A6.2), получаем систему

$$(\partial_x^3 - \partial_t)(w_0) = 0, \tag{A6.5a}$$

$$(\partial_x^3 - \partial_t)(w_{s+1}) = -6 \sum_{p+q=s} w_p' w_q', \quad s \in \mathbb{N}. \tag{A6.5b}$$

Мы начнем с линейного уравнения на w_0 (A6.5a). Рассмотрим величины

$$\varphi_\ell = A_\ell \exp[k(\ell)x + 4k(\ell)^3 t], \quad \ell = 1, \ldots, N, \tag{A6.6}$$

где A_ℓ есть *некоммутативные* постоянные, а $k(1), \ldots, k(n)$ — *коммутативные*, вещественные или комплексные, удовлетворяющие условию

$$k(i) + k(j) \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{A6.7}$$

(В частности, ни одна из $k(i)$ не равна нулю.) Положим

$$\Phi_\ell = (\varphi_\ell)^2 = (A_\ell)^2 \exp[2k(\ell)x + 8k(\ell)^3 t]. \tag{A6.8}$$

Из определения следует:

$$\partial_t(\Phi_\ell) = 8k(\ell)^3\Phi_\ell, \tag{A6.9a}$$

$$\partial_x(\Phi_\ell) = 2k(\ell)\Phi_\ell \quad \Rightarrow \tag{A6.9b}$$

$$\partial_t\Big(\prod_{\ell\in S}\Phi_\ell\Big) = 8\Big(\sum_{\ell\in S}k(\ell)^3\Big)\Big(\prod_{\ell\in S}\Phi_\ell\Big), \tag{A6.10a}$$

$$\partial_x\Big(\prod_{\ell\in S}\Phi_\ell\Big) = 2\Big(\sum_{\ell\in S}k(\ell)\Big)\Big(\prod_{\ell\in S}\Phi_\ell\Big). \tag{A6.10b}$$

В частности,

$$(\partial_x^3 - \partial_t)(\Phi_\ell) = 0. \tag{A6.11}$$

Поэтому, если положить

$$w_0 = \sum_{\ell=1}^{N}\Phi_\ell \tag{A6.12}$$

для некоторого фиксированного $N \in \mathbb{N}$, то уравнение для w_0 (A6.5a) будет выполнено.

Далее, положим

$$w_1 = -\sum_{\ell m}\frac{1}{k(\ell)+k(m)}\Phi_\ell\Phi_m. \tag{A6.13}$$

По формулам (A6.10),

$$\begin{aligned}(\partial_x^3 - \partial_t)(w_1) &= -\sum_{\ell m}\frac{1}{k(\ell)+k(m)}8[(k(\ell)+k(m))^3 - k(\ell)^3 - k(m)^3]\Phi_\ell\Phi_m = \\ &= -24\sum_{\ell m}k(\ell)k(m)\Phi_\ell\Phi_m = -6\sum_\ell\partial_x(\Phi_\ell)\sum_m\partial_x(\Phi_m) = -6(w_0')^2.\end{aligned} \tag{A6.14}$$

Таким образом, уравнение для w_1 (A6.5b)$|_{s=0}$ также удовлетворено.

Чтобы записать общую формулу для w_n, введем следующие обозначения: если

$$\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n), \quad 1 \leqslant \ell_1, \dots, \ell_n \leqslant N \tag{A6.15}$$

есть мультииндекс, положим

$$\Phi_{\boldsymbol{\ell}} = \Phi_{\ell_1}\dots\Phi_{\ell_n}, \tag{A6.16}$$

$$|\boldsymbol{\ell}| = n, \tag{A6.17}$$

$$\sigma(\boldsymbol{\ell}) = \frac{1}{k(\ell_1)+k(\ell_2)}\cdots\frac{1}{k(\ell_{n-1})+k(\ell_n)}, \quad |\boldsymbol{\ell}| > 1, \tag{A6.18a}$$

$$\sigma(\boldsymbol{\ell}) = 1, \quad |\boldsymbol{\ell}| = 1, \tag{A6.18b}$$

$$f_i(\boldsymbol{\ell}) = \sum_{j=1}^{|\boldsymbol{\ell}|}k(\ell_j)^i, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{A6.19}$$

Теперь положим

$$w_i = (-1)^i\sum_{|\boldsymbol{\ell}|=i+1}\sigma(\boldsymbol{\ell})\Phi_{\boldsymbol{\ell}}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{A6.20}$$

Утверждение A6.21. Формулы (A6.20) решают w-систему (A6.5).

Доказательство. Формула (A6.5a) уже проверена. Проверяем (A6.5b):

$$(\partial_x^3 - \partial_t)(w_{s+1}) = (\partial_x^3 - \partial_t)(-1)^{s+1}\Big(\sum_{|\boldsymbol{\ell}|=s+2} \sigma(\boldsymbol{\ell})\Phi_{\boldsymbol{\ell}}\Big) \overset{(A6.10)}{=}$$

$$= (-1)^{s+1}\sum 8[f_1(\boldsymbol{\ell})^3 - f_3(\boldsymbol{\ell})]\sigma(\boldsymbol{\ell})\Phi_{\boldsymbol{\ell}}. \qquad (A6.22)$$

Упражнение A6.23. Покажите, что

$$(z_1 + \cdots + z_{n+1})^3 - z_1^3 - \cdots - z_{n+1}^3 = 3\sum_{j=1}^{n}(z_1 + \cdots + z_j)(z_j + z_{j+1})(z_{j+1} + \cdots + z_{n+1}). \qquad (A6.24)$$

Из формулы (A6.24) следует, что

$$[f_1(\boldsymbol{\ell})^3 - f_3(\boldsymbol{\ell})]\sigma(\boldsymbol{\ell}) = 3\sum_{\boldsymbol{\ell}_- + \boldsymbol{\ell}_+ = \boldsymbol{\ell}} f_1(\boldsymbol{\ell}_-)f_1(\boldsymbol{\ell}_+)\sigma(\boldsymbol{\ell}_-)\sigma(\boldsymbol{\ell}_+), \qquad (A6.25)$$

где $\boldsymbol{\ell}_- = (\ell_1, \dots, \ell_j)$, $\boldsymbol{\ell}_+ = (\ell_{j+1}, \dots, \ell_{|\boldsymbol{\ell}|})$, $1 \leqslant j \leqslant |\boldsymbol{\ell}|$. Подставляя формулу (A6.25) в выражение (A6.22), получаем:

$$24(-1)^{s+1}\sum_{|\boldsymbol{\ell}|=s+2} f_1(\boldsymbol{\ell}_-)f_1(\boldsymbol{\ell}_+)\sigma(\boldsymbol{\ell}_-)\sigma(\boldsymbol{\ell}_+)\Phi_{\boldsymbol{\ell}_-}\Phi_{\boldsymbol{\ell}_+} =$$

$$= -6\sum_{p+q=s}\Big[\sum_{|\boldsymbol{\ell}_-|=p+1}(-1)^p\partial_x(\sigma(\boldsymbol{\ell}_-)\Phi_{\boldsymbol{\ell}_-})\Big]\Big[\sum_{|\boldsymbol{\ell}_+|=q+1}(-1)^q\partial_x(\sigma(\boldsymbol{\ell}_+)\Phi_{\boldsymbol{\ell}_+})\Big] =$$

$$= -6\sum_{p+q=s} w_p' w_q', \qquad (A6.26)$$

а это совпадает с правой частью уравнения (A6.5b). ∎

Формулы (A6.20) могут быть приведены к более компактному виду. Введем две матрицы, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \sigma(\alpha, \beta)\varphi_\alpha\varphi_\beta = \frac{1}{k(\alpha) + k(\beta)}\varphi_\alpha\varphi_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N, \qquad (A6.27)$$

$$\mathcal{D} = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_N). \qquad (A6.28)$$

Допустим временно, что все некоммутативные константы A_ℓ из формулы (A6.6) обратимы, так что матрица $\mathcal{D}^{-1}$ существует.

Лемма A6.29. Формулы (A6.20) можно записать в виде

$$w_i = (-1)^i\, Tr(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_x\mathcal{M}^i\mathcal{D}), \quad i \in \mathbb{Z}_+. \qquad (A6.30)$$

Доказательство. Так как

$$\partial_x(\varphi_\alpha\varphi_\beta) = [k(\alpha) + k(\beta)]\varphi_\alpha\varphi_\beta, \qquad (A6.31)$$

то мы находим, что

$$(\mathcal{M}_x)_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha\varphi_\beta. \qquad (A6.32)$$

Следовательно, при $i = 0$, формула (A6.30) дает

$$(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_x\mathcal{D})_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^2, \tag{A6.33}$$

так что

$$w_0 = Tr(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_x\mathcal{D}) = Tr(\mathcal{M}_x). \tag{A6.34}$$

При $i > 0$ имеем

$$(\mathcal{M}_x\mathcal{M}^i)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma(1)\dots\gamma(i)} \varphi_\alpha\varphi_{\gamma(1)}\sigma(\gamma(1),\gamma(2))\varphi_{\gamma(1)}\varphi_{\gamma(2)}\dots\sigma(\gamma(i),\beta)\varphi_{\gamma(i)}\varphi_\beta \quad \Rightarrow$$

$$(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_x\mathcal{M}^i\mathcal{D})_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \varphi_{\gamma(1)}^2\cdots\varphi_{\gamma(i)}^2\varphi_\beta^2\sigma(\gamma,\beta), \tag{A6.35}$$

и взяв след этого тождества, приходим обратно к определению (A6.20). ▮

В силу формул (A6.4,A6.30) имеем

$$w = \sum_i w_i\varepsilon^i = \sum Tr[\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_x(-\varepsilon\mathcal{M})^i\mathcal{D}] = Tr[\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}_x(1+\varepsilon\mathcal{M})^{-1}\mathcal{D}]. \tag{A6.36}$$

Только если все коммутирует, возможно дальнейшее упрощение этой формулы:

$$w = \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\ Tr[\log(1+\varepsilon\mathcal{M})] \quad \Rightarrow \tag{A6.37}$$

$$u = 2\varepsilon w_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}2\ Tr[\log(1+\varepsilon\mathcal{M})]. \tag{A6.38}$$

В общем некоммутативном случае упрощение формулы (A6.36) невозможно; только лишь для 1-солитонного решения при $N = 1$ имеем

$$u = 4k\frac{\partial}{\partial x}\frac{\varepsilon\Phi}{2k-\varepsilon\Phi} = -8k^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\varepsilon\Phi - 2k}, \tag{A6.39a}$$

где

$$\Phi = A^2\exp(2kx + 8k^3t). \tag{A6.39b}$$

Приложение А7

Некоммутативное уравнение КП

> Мой отец говаривал, что нет ничего такого, о чем люди не могли бы сообщить друг другу на обороте почтовой карточки.
>
> Оберон Во

Традиционное (коммутативное) уравнение КП возникает, как условие совместности двух первых нетривиальных потоков иерархии КП. Ниже мы проделываем аналогичную операцию совместности для некоммутативной иерархии КП.

Стартуя с оператора Лакса для КП

$$L = \xi + \sum_{i \geqslant 0} A_i \xi^{-i-1}, \tag{A7.1}$$

обозначим $t_2 = y$, $t_3 = t$, и рассмотрим соответствующие потоки:

$$\partial_y(L) = [(L^2)_+/2, L], \tag{A7.2}$$

$$\partial_t(L) = [(L^3)_+/3, L], \tag{A7.3}$$

Так как

$$(L^2)_+/2 = \xi^2/2 + A_0, \tag{A7.4}$$

$$(L^3)_+/3 = \xi^3/3 + A_0\xi + A_1 + A_0^{(1)}, \tag{A7.5}$$

то находим:

$$\begin{aligned}
\partial_y(L) &= \partial_y(A_0)\xi^{-1} + \partial_y(A_1)\xi^{-2} + \dots = \\
&= [\xi^2/2 + A_0,\ \xi + A_0\xi^{-1} + A_1\xi^{-2} + A_2\xi^{-3} + \dots]_- = \\
&= \{A_0^{(2)}/2 + A_1^{(1)}\}\xi^{-1} + \{A_1^{(2)}/2 + A_2^{(1)} + A_0A_0^{(1)} + [A_0, A_1]\}\xi^{-2} + \dots \quad \Rightarrow
\end{aligned} \tag{A7.6}$$

$$\partial_y(A_0) = A_0^{(2)}/2 + A_1^{(1)}, \tag{A7.7}$$

$$\partial_y(A_1) = A_1^{(2)}/2 + A_2^{(1)} + A_0A_0^{(1)} + [A_0, A_1], \tag{A7.8}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t(L) &= \partial_t(A_0)\xi^{-1} + \dots = \\
&= [\xi^3/3 + A_0\xi + A_1 + A_0^{(1)}, \xi + A_0\xi^{-1} + A_1\xi^{-2} + A_2\xi^{-3} + \dots]_- = \\
&= \{A_0^{(3)}/3 + A_1^{(2)} + A_2^{(1)} + (A_0^2)^{(1)}\}\xi^{-1} + \dots \quad \Rightarrow
\end{aligned} \tag{A7.9}$$

$$\partial_t(A_0) = A_0^{(3)}/3 + A_1^{(2)} + A_2^{(1)} + (A_0^2)^{(1)}. \tag{A7.10}$$

Из трех уравнений (A7.7, 8, 10) мы хотим исключить A_1 и A_2; оставшийся объект будет искомым уравнением КП. Из уравнения (A7.7) находим

$$A_1 = -A_0^{(1)}/2 + \partial^{-1}\partial_y(A_0). \tag{A7.11}$$

Из уравнения (A7.8) получаем

$$A_1^{(2)} + A_2^{(1)} = \partial_y(A_1) + A_1^{(2)}/2 - [A_0, A_1] - A_0A_0^{(1)}. \tag{A7.12}$$

Подставляя формулы (A7.11, 12) в уравнение (A7.10), получаем

$$\begin{gathered}\partial_t(A_0) = A_0^{(3)}/3 + \{-\partial\partial_y(A_0)/2 + \partial^{-1}\partial_y^2(A_0)\} + \{-A_0^{(3)}/2 + \partial\partial_y(A_0)\}/2- \\ -[A_0, -A_0^{(1)}/2 + \partial^{-1}\partial_y(A_0)] - A_0A_0^{(1)} + (A_0^2)^{(1)} \quad \Rightarrow \\ \partial_t(A_0) = A_0^{(3)}/12 + (A_0^2/2)^{(1)} + (\partial_y - \mathrm{ad}_{A_0})[\partial^{-1}\partial_y(A_0)|. \qquad \text{(A7.13)}\end{gathered}$$

Это и есть некоммутативное уравнение КП. Оно нелокально в терминах A_0, но локально в терминах $w = \partial^{-1}(A_0)$. Аналогичные вычисления дают уравнения МКП и Pot-МКП, и соответствующее преобразование Миуры. Это оставляется читателю в качестве упражнения.

В древние времена люди учились с целью собственного совершенствования. В наши дни люди учатся ради похвалы.

Конфуций (ок. 553–479 до н.э.)

Приложение А8

Список скалярных уравнений

В этом приложении собрана вместе большая часть скалярных уравнений из всей книги.

* * *

Мы начнем с уравнений в непрерывном пространстве из Части А.

- Иерархия Бюргерса (2.5.12) коммутирующих потоков

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n(\mathrm{ad}_u + \partial)(\widehat{R}_u - \partial)^n(1), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A8.1}$$

линеаризуется преобразованием Φ (2.5.17)

$$\Phi(u) = -U^{(1)}U^{-1} \tag{A8.2}$$

приводящим к иерархии (2.5.18)

$$\partial_{t_n}(U) = \mathrm{const}_n(-1)^{n+1}U^{(n)}. \tag{A8.3}$$

Альтернативно, ("зеркальная симметрия"), вместо первых двух формул можно взять (2.5.28, 29):

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n(\partial - \mathrm{ad}_u)(\widehat{L}_u - \partial)^n(1), \tag{A8.4}$$

$$\overline{\Phi}(u) = -U^{-1}U^{(1)}. \tag{A8.5}$$

В бездисперсионном пределе уравнения (А8.1, 4) переходят в (2.5.31, 34):

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n\, n u_x u^{n-1}, \tag{A8.6}$$

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n\, n u^{n-1} u_x. \tag{A8.7}$$

Формулы (2.5.36) дают еще одну версию последних уравнений:

$$\partial_{t_n}(u) = \mathrm{const}_n\, \partial(u^{n+1}). \tag{A8.8}$$

- Иерархия КдФ (2.6.2, 3):

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = \mathrm{const}_{2n+1}\, \partial(p_{-1}(2n+1)), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{A8.9a}$$

$$(\xi + h\xi^{-1})^n = \sum_k \xi^k p_k(n), \quad \xi = d/dx. \tag{A8.9b}$$

При $n = 1$ получаем (3.9.51)

$$\partial_{t_3}(h) = (3h^2 + h_{xx})_x. \tag{A8.10}$$

В квазиклассическом пределе иерархия (А8.9) переходит в (3.9.195):

$$\partial_{t_{2n+1}}(h) = \mathrm{const}_n\, \partial(h^{n+1}). \tag{A8.11}$$

- Уравнение МКдФ имеет вид (3.9.52)

$$\partial_{t_3}(v) = -3(v_x v^2 + v^2 v_x) + v_{xxx}, \tag{A8.12}$$

а другая версия этого уравнения имеет вид (3.9.91)

$$\partial_{t_3}(w) = -6ww_xw + 3[w, w_{xx}] + w_{xxx}. \tag{A8.13}$$

Потенциирование (3.9.95)

$$\mathrm{Pot}(w) = -W_x W^{-1} \tag{A8.14}$$

переводит (А8.13) в уравнение (3.9.106)

$$\partial_{t_3}(W) = -3W_x W^{-1} W_{xx} + W_{xxx}, \tag{A8.15}$$

связанное с уравнением КдФ (А8.10) преобразованием (3.9.97):

$$\overline{\Phi}_2(h) = -W^{-1} W_{xx}. \tag{A8.16}$$

Уравнение МКдФ (А8.12) имеет следующие потенциальные формы (3.9.111–117):

$$\partial_{t_3}(U) = -3U_{xx} U^{-1} U_x + U_{xxx}, \tag{A8.17}$$

$$\mathrm{Pot}_+(v) = U_x U^{-1}, \tag{A8.18}$$

$$\partial_{t_3}(V) = -3V_x V^{-1} V_{xx} + V_{xxx}, \tag{A8.19}$$

$$\mathrm{Pot}_-(v) = -V^{-1} V_x. \tag{A8.20}$$

Квазиклассический предел иерархии МКдФ, у которой (А8.12) является первым нетривиальным представителем, имеет вид (3.9.196)

$$\partial_{t_{2n+1}}(v) = \mathrm{const}_n \sum_{k=0}^{n} v^{2k} v_x v^{2(n-k)}. \tag{A8.21}$$

* * *

Остальные уравнения в этом Приложении живут в дискретных пространствах.

- Для каждого $r \in \mathbb{N}$, первый поток (9.8.32) бесконечной иерархии

$$\partial_t(q) = [q + \cdots + q^{(r)}]q - q[q + \cdots + q^{(-r)}], \quad t = t_1, \tag{A8.22}$$

допускает предел Богоявленского (9.8.35)

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = \Big[\int_x^{x+c} q(\theta,t)d\theta\Big] q(x,t) - q(x,t)\Big[\int_{x-c}^{x} q(\theta,t)d\theta\Big]. \tag{A8.23}$$

При $r = 1$, поток (A8.22) и остальные члены иерархии имеют альтернативные представления (14.3.25) и (14.6.34):

$$\partial_t(q) = \operatorname{Res}(\zeta[(L^n)_+, L]\zeta^{-1}), \quad L = (1 - \zeta^{-1}q)^{-1}\zeta, \tag{A8.24a}$$

$$\partial_t(q) = \operatorname{Res}((L^n)_+ q - q\zeta^{-N-1}(L^n)_+\zeta^{N+1}), \quad L = \zeta^N(1 + q\zeta^{-1})^{-1}, \quad N = 1. \tag{A8.24b}$$

- Иерархия (14.4.45) имеет вид

$$\partial_t(H) = \operatorname{Res}(\zeta^{-1}[(\mathcal{L}^n)_{>0}, \mathcal{L}]), \quad \mathcal{L} = \zeta(1 - H\zeta^{-1})^{-1}H. \tag{A8.25a}$$

Ее квазиклассический предел (14.8.19) имеет вид

$$\partial_t(H) = \mathrm{const}_n\, H\partial_x(H^n)H. \tag{A8.25b}$$

- Из формул (14.5.14–18) следует

$$\partial_t(H) = H[H^{(1)} - H^{(-1)}]H, \tag{A8.26}$$

$$\partial_t(V) = -VV^{(1)-1}V^{(-1)}, \tag{A8.27a}$$

$$\partial_t(u) = u^{(1)}u - uu^{(-1)}, \tag{A8.27b}$$

$$u = V^{(2)-1}V. \tag{A8.27c}$$

Если поток (A8.26) переписать в виде (14.5.20):

$$\partial_t(H^{-1}) = (\Delta^{-1} - \Delta)(H), \tag{A8.28a}$$

то следующий поток (14.5.23) имеет вид

$$\partial_t(H^{-1}) = (\Delta^{-1} - \Delta)(H[H^{(1)} + H^{(-1)}]H). \tag{A8.28b}$$

- Иерархия (14.8.5):

$$\partial_t(u) = (u^{(n)} - u)u^{(n-1)} \dots u, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A8.29a}$$

Ее бездисперсионный предел (14.8.6):

$$\partial_t(u) = nu_x u^{n-1}. \tag{A8.29b}$$

- Иерархия (14.8.10, 11):

$$\partial_t(u) = (\Delta^2 - \Delta)[\operatorname{Res}(L^n\zeta)], \quad L = (1 - \zeta^{-1}u)^{-1}\zeta, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A8.30a}$$

имеет квазиклассический предел (14.8.12, 14)

$$\partial_t(u) = \mathrm{const}_n\, \partial(u^{n+1}). \tag{A8.30b}$$

- Из релятивистской цепочки Тоды воиякает уравнение (15.2.13)

$$\partial_t(q) = \varepsilon q(1 - \Delta^{-1})(q), \tag{A8.31}$$

а из теневой релятивистской цепочки Тоды — уравнение (15.3.30)

$$\partial_t(q) = \varepsilon^{-3}(q_1^{(1)-1}q_1 - 1). \tag{A8.32}$$

- Из связи (15.6.42) для деформированной иерархии МКП (15.6.3) возникает поток (15.6.69)

$$\partial_t(Q) = \varepsilon(1-\Delta^{-1})(QQ^{(1)}). \tag{A8.33}$$

* * *

В оставшейся части этого Приложения дискретно также и время. Напомним, что $\widetilde{f}$ обозначает $f(t+\Delta t)$, а f обозначает $f(t)$.

- Дискретизация (A8.27b), уравнение (17.3.57) (или (17.6.41), или (18.6.75)):

$$(1+h\widetilde{\alpha}^{(1)})\widetilde{\alpha} = \alpha(1+h\alpha^{(-1)}). \tag{A8.34}$$

- Дискретизация экспоненциальной функции $\partial_t(a) = a$ (18.5.19, 16):

$$\widetilde{a} = \lambda a, \quad \lambda(1+\lambda h) = 1. \tag{A8.35}$$

- Дискретизация (A8.26), уравнения (18.6.53, 54):

$$(1-h\widetilde{\beta}\widetilde{\beta}^{(1)})^{-1}\widetilde{\beta} = (1-h\beta\beta^{(-1)})^{-1}\beta. \tag{A8.36}$$

- Уравнение (18.6.69)

$$\widetilde{V} = V(1+h\widetilde{V}^{(1)-1}V^{(-1)}) \tag{A8.37a}$$

дискретизирует уравнение

$$\partial_t(V) = VV^{(1)-1}V^{(-1)}. \tag{A8.37b}$$

- Дискретная версия (A8.26) для $v = H^{-1}$, уравнение (18.7.9, 10):

$$\widetilde{v} = \beta^{-1}v^{(-1)}\beta^{(-1)}, \quad v = \beta^{-1} - h\beta^{(1)}. \tag{A8.38}$$

- Дискретная версия (A8.33), уравнение (19.3.30):

$$\widetilde{\alpha}(1-h\varepsilon\widetilde{\alpha}))^{-1}(1-h\varepsilon\widetilde{\alpha}^{(-1)})^{-1} = (1-h\varepsilon\alpha^{(1)})^{-1}(1-h\varepsilon\alpha)^{-1}\alpha. \tag{A8.39}$$

- Дискретная версия (A8.31), уравнение (19.3.36):

$$\widetilde{\alpha}(1-h\varepsilon\widetilde{\alpha}^{(-1)})^{-1} = \alpha(1-h\varepsilon\alpha)^{-1}. \tag{A8.40}$$

- Уравнение (19.4.27c)

$$(1+h\widetilde{\alpha}^{(1)})(1-\varepsilon\widetilde{\alpha})^{-1} = (1+h\alpha)(1-\varepsilon\alpha)^{-1} \tag{A8.41a}$$

дискретизирует уравнение

$$\partial_t(\alpha) = (\alpha-\varepsilon^{-1})(\alpha^{(1)}-\alpha). \tag{A8.41b}$$

- Формула (19.11.59b)

$$\widetilde{a} - a = -h\widetilde{a}a \tag{A8.42}$$

дает *точную* дискретизацию по времени своего аналога с непрерывным временем $\partial_t(a) = -a^2$ (19.11.59a).

Еще несколько скалярных систем с дискретным временем, содержащие промежуточные переменные, может быть найдено в Части С.

Приложение А9

Открытые проблемы и гипотезы

> Когда мы ответим на все вопросы, придется звонить гробовщику.
>
> Элберт Хаббард

Открытые задачи и Гипотезы, разбросанные по всей книге, собраны в этом приложении.

- Официально неизвестно, можно ли считать гамильтоновыми следующие уравнения движения в различных одевающих пространствах: (1.5.7), (2.7.9), (9.2.2), (9.4.2), (19.12.4 ,9). (Причина исчезновения гамильтоновости в том, что в *одевающих пространствах* не существуют нетривиальные интегралы одевающих движений: при поднятии в одевающее пространство все интегралы из пространства Лакса становится тривиальными

$$\mathrm{Res}(K\xi^{n}K^{-1}) \approx \mathrm{Res}(K^{-1}K\xi^{n}) = \mathrm{Res}(\xi^{n}) = 0, \qquad (\text{A9.0})$$

и можно показать, что новых не возникает.)

- Гипотеза 3.5.28. Если

$$\boldsymbol{X}_n^t\xi^{-1}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}^t\xi^{-1}\boldsymbol{Y}_n = 0, \quad \xi = d/dx, \qquad (\text{A9.1a})$$

для некоторых $X_{nr}, Y_{nr} \in R_{pq}$, то

$$\boldsymbol{X}_n = A^1\boldsymbol{p} + A^2\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{Y}_n = A^3\boldsymbol{p} - A^1\boldsymbol{q} \qquad (\text{A9.1b})$$

где A^1, A^2, A^3 постоянные матрицы, причем A^2 и A^3 кососимметричны.

- Замечание 14.1.29. В $2+1$–мерном случае (когда зависимость от y не игнорируется) неизвестны ни некоммутативные аналоги динамической системы (14.1.5) и отображения моментов (14.1.7), ни их дисперсионные аналоги для *коммутативной* иерархии КП. Это одна из величайших тайн во всей теории интегрируемых систем.
- Гипотеза 14.8.15. Иерархии (14.8.10)

$$\partial_t(\boldsymbol{u}) = (\Delta^2 - \Delta)[\mathrm{Res}(L^n\xi)], \quad L = (1 - \xi^{-1}\boldsymbol{u})\xi, \quad \in \mathbb{N}, \qquad (\text{A9.2a})$$

и (9.8.11–13)

$$\partial_t(q) = (1 - \Delta^{-N})(\bar{p}_{-1}(n)), \quad (\xi^{N} + \xi^{-r}q)^{(N+r)n} = \sum_s \xi^{(N+r)s}\bar{p}_s(n), \qquad (\text{A9.2b})$$

изоморфны для всех n.

- Гипотеза 15.2.9. Оставшиеся уравнения движения для $q_1, \ldots$, получающиеся при наложении связи $q_0 = -\varepsilon^{-1}$ на квазирелятивистскую иерархию КП (15.1.4) *регулярны* по ε.

- Замечание 15.2.10. Каковы *причины* лежащие в основе существования связи $\{q_0 = -\varepsilon^{-1}\}$? Очень похоже, что существует по крайней мере еще одна подобная связь.

- Из Упражнения 15.2.11(ii). Что служит аналогом связи (15.2.12)

$$q_0 = -\varepsilon^{-1} - \varepsilon q_1, \tag{A9.3}$$

если вместо релятивистской цепочки Тоды рассмотреть *всю* релятивистскую иерархию КП (15.1.4)?

- В чем смысл теневой релятивистской системы Тоды (15.3.23) и теневого релятивистского потока КП (15.3.24)

$$\partial_t(q_0) = \frac{1}{1+\varepsilon q_0^{(1)}} q_1 - q_1^{(-1)} \frac{1}{1+\varepsilon q_0^{(-1)}} = (1-\Delta^{-1})(q_1) + O(\varepsilon), \tag{A9.4}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(q_i) = \frac{1}{(1+\varepsilon q_0)^{(i+1)}} q_{i+1} - \left(q_{i+1}\frac{1}{1+\varepsilon q_0}\right)^{(-1)} + \left(\frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}\right)^{(i)} q_i - q_i \frac{q_0}{1+\varepsilon q_0} = \\ = (1-\Delta^{-1})(q_{i+1}) + q_0^{(i)} q_i - q_i q_0 + O(\varepsilon), \quad i \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned} \tag{A9.5}$$

- Какова природа представления Лакса (15.3.26) для потока (A9.5),

$$\begin{gathered}\partial_t(\mathcal{L}) = [Sh, \mathcal{L}], \quad \mathcal{L} = (1-\varepsilon\zeta)^{-1}\Big(\zeta + \sum_{i\geqslant 0} \zeta^{-1} q_i\Big), \\ Sh = \frac{1}{1+\varepsilon q_0}(\zeta + q_0) = \zeta + \frac{q_0}{1+\varepsilon q_0}(1-\varepsilon\zeta).\end{gathered} \tag{A9.6}$$

- Что служит аналогом связи (A9.3), допускаемой теневой релятивистской цепочкой Тоды (A9.4) (см. (15.3.30)), для теневого потока КП (A9.5)?

- Для большей части дискретно-временных эволюций из Части C, гамильтоновость не установлена; неизвестны также дополнительные (например, вторые) гамильтоновы структуры, которые снова появляются, когда все переменные коммутируют.

- Систему Вольтерра можно интерпретировать и как пару цепочек Тоды, и как инвариантную подрешетку 2-го Тодовского потока. (См. §19.8.) Для релятивистской цепочки Тоды или ее теневой версии такого неизвестно. Аналогичная загадка касается, вообще, всей квазирелятивистской иерархии КП.

- Пусть $\bar{\delta}$ есть аннулятор $\operatorname{Im}(\partial + \varepsilon \operatorname{ad}_u)$ из §A3.3:

$$\frac{\bar{\delta} H}{\delta u} = \varepsilon \operatorname{ad}_H + \sum (-\partial - \varepsilon \operatorname{ad}_u)^{n+1} \left(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\right) + \varepsilon \Big[\sum (-\partial - \varepsilon \operatorname{ad}_u)^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial u^{(n)}}\right)\Big] \operatorname{ad}_u, \tag{A9.7}$$

Найти $\operatorname{Im} \bar{\delta}$.

- Гипотеза A4.4.33. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\operatorname{Res}(L_1)^n \approx \operatorname{Res}(L_2^n), \tag{A9.8a}$$

$$L_1 = \xi + [\boldsymbol{a}^{(1)} - (\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}]^t \xi^{-1} \boldsymbol{b}, \quad L_2 = \xi - \boldsymbol{a}^t \xi^{-1} [\boldsymbol{b}^{(1)} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b}))]. \tag{A9.8b}$$

Приложение *A10

Некоммутативные версии уравнений $u_t = u^n u_x$

В коммутативном царстве, любая интегрируемая иерархия в непрерывном пространстве-времени обладает квазиклассическим пределом, также интегрируемым, общего квазилинейного вида

$$u_{i,t} = \sum_{\sigma k} c^k_{i\sigma} u^\sigma u_{k,x}, \quad u^\sigma = \prod_i u_i^{\sigma(i)}. \tag{A10.1}$$

В частности, если иерархия *скалярна*, ее квазиклассический предел имеет максимально простой вид:

$$U_n : \quad u_t = u^n u_x, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{A10.2}$$

Спрашивается, какие бывают некоммутативные версии этой иерархии?

Для начала давайте соберем экспериментальные данные из основной части книги. Так как это уже делалось в Приложении A8, мы можем просто списать нужные уравнения оттуда. С незначительными изменениями в обозначениях, имеем: формула (A8.6),

$$X^r_n : \quad u_t = u^n u_x; \tag{A10.3}$$

формула (A8.7),

$$X^\ell_n : \quad u_t = u_x u^n; \tag{A10.4}$$

формула (A8.8),

$$Y_n : \quad u_t = \partial(u^n); \tag{A10.5}$$

формула (A8.21),

$$V_n : \quad v_t = \sum_{k=0}^{n} v^{2k} v_x v^{2(n-k)}; \tag{A10.6}$$

формула (A8.25b),

$$\overline{Y}_n : \quad H_t = H\partial(H^n)H. \tag{A10.7}$$

---

*Добавлено при переводе

По построению, индекс n, нумерующий потоки в пяти выписанных иерархиях является неотрицательным либо положительным целым. Может ли n принимать какие-то другие значения? В коммутативном царстве, все потоки

$$U_\alpha: \quad u_t = u^\alpha u_x \tag{A10.8}$$

коммутируют друг с другом при *всех* значениях α: последние можно рассматривать, как вещественные или комплексные числа, формальные параметры, или элементы коммутативной $\mathbb{Q}$-алгебры. Очевидно, такая общность недостижима в некоммутативном царстве, которое накладывает свое правило квантования: все степени должны быть *целыми*, поскольку никакое разумное правило дифференцирования не может быть определено для объектов вида u^α с нецелыми α. Имея это в виду, естественно считать, что индекс n в пяти иерархиях (A10.3–7) пробегает все множество $\mathbb{Z}$. Оставляя иерархию V_n (A10.6) на потом, имеем следующее предложение.

Утверждение A10.9. Каждая из четырех иерархий (A10.3, 4, 5, 7) коммутативна при n, пробегающем $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть Z — дифференцирование над R кольца $R_1 = R\langle u\rangle$. Расширим это кольцо, добавляя u^{-1} : $R_2 = R\langle u, u^{-1}\rangle$. Тогда, используя индукцию по n, получаем:

$$Z(u^{n+1}) = \sum_{k+p=n} u^k Z(u) u^p, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{A10.10}$$

$$Z(u^{-n-1}) = -\sum_{k+p=n} u^{-k-1} Z(u) u^{-p-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{A10.11}$$

В частности,

$$\partial(u^{n+1}) = \sum_{k+p=u} u^k \partial(u) u^p, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{A10.12}$$

$$\partial(u^{-n-1}) = -\sum_{k+p=n} u^{-k-1} \partial(u) u^{-p-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{A10.13}$$

Далее, замена $u \mapsto u^{-1}$ оставляет иерархии X^r_n и X^ℓ_n инвариантными, а Y_n переходит в $-\overline{Y}_n$. Иерархия X^r_n является зеркальным образом иерархии X^ℓ_n. Таким образом, достаточно рассмотреть только потоки X^ℓ_n и Y_n. Имеем, для случая Y_n :

$$[Y_n, Y_m](u) = Y_n[\partial(u^m)] - Y_m[\partial(u^n)] = \partial[Y_n(u^m) - Y_m(u^n)], \tag{A10.14}$$

и непосредственно проверяется, что

$$Y_n(u^m) = Y_m(u^n), \quad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{A10.15}$$

при отдельном рассмотрении трех случаев:

$$n > 0, \quad m > 0; \tag{A10.16a}$$

$$n < 0, \quad m < 0; \tag{A10.16b}$$

$$n > 0, \quad m < 0. \tag{A10.16c}$$

В случае X^ℓ_n получаем:

$$\begin{aligned}
[X^\ell_n, X^\ell_m](u) &= X^\ell_n(u_x u^m) - X^\ell_m(u_x u^n) = \\
&= \partial(u_x u^n) u^m + u_x X^\ell_n(u^m) - \partial(u_x u^m) u^n - u_x X^\ell_m(u^n) = \\
&= u_x\{[\partial(u^n) u^m + X^\ell_n(u^m)] - [\partial(u^m) u^n + X^\ell_m(u^n)]\},
\end{aligned} \tag{A10.17}$$

и проверка трех случаев (A10.16) показывает, что

$$\partial(u^n)u^m + X^\ell_n(u^m) = \partial(u^m)u^n + X^\ell_m(u^n). \qquad \blacksquare \qquad \text{(A10.18)}$$

Перейдем теперь к оставшейся иерархии V_n (A10.6). В том виде, как она написана, она определена лишь при $n \in \mathbb{Z}_+$. Чтобы расширить ее на все $n \in \mathbb{Z}$, заметим сначала, что, в некотором смысле,

$$V_n = \sqrt{Y_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad \text{(A10.19)}$$

Это означает, что

$$v_t = V_n \quad \Rightarrow \quad u_t = Y_{n+1} \quad \text{при} \quad u = v^2. \qquad \text{(A10.20)}$$

Действительно,

$$u_t = vv_t + v_tv = \qquad \text{(A10.21)}$$

$$= \sum_{k+p=n} v^{2k}(vv_x + v_xv)v^{2p} = \sum_{k+p=n} u^k u_x u^p = \partial(u^{n+1}). \qquad \text{(A10.22)}$$

Определим теперь

$$V_{-1}: \quad v_t = 0, \qquad \text{(A10.23a)}$$

$$V_{-n-2}: \quad v_t = -\sum_{k+p=r} v^{-2(k+1)}v_xv^{-2(p+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad \text{(A10.23b)}$$

Тогда, из формулы (A10.23b) находим:

$$u_t = -\sum_{k+p=n} v^{-2(k+1)}(vv_x + v_xv)v^{-2(p+1)} = -\sum_{k+p=n} u^{-k-1}\partial(u)u^{-p-1} = \partial(u^{-n-1}), \qquad \text{(A10.24)}$$

так что

$$V_n = \sqrt{Y_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(A10.25)}$$

Полагая

$$w = v^{-1} \qquad \text{(A10.26)}$$

мы можем преобразовать иерархию V_n (A10.6, 23) в соответствующую иерархию $\bar{V}_n$:

$$\bar{V}_n: \quad w_t = \sum_{k+p=n} w^{-2k}w_xw^{-2p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \text{(A10.27a)}$$

$$\bar{V}_{-1}: \quad w_t = 0, \qquad \text{(A10.27b)}$$

$$\bar{V}_{-n-2}: \quad w_t = -w^2\Big(\sum_{k+p=n} w^{2k}w_xw^{2p}\Big)w^2, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad \text{(A10.27c)}$$

Остается удостовериться, что иерархия V_n коммутативна.

Лемма A10.28. Рассмотрим эволюционное дифференцирование Z кольца $C_v\langle v^{-1}\rangle$, $C_v = R\langle v, v^{(1)}, \dots\rangle$. Если $Z(v^L) = 0$ при некотором целом $L \neq 0$, то $Z = 0$.

Доказательство. Заменяя, при необходимости, v на v^{-1}, мы можем считать L положительным целым. Рассмотрим разложение $Z(v)$ в виде

$$Z(v) = \sum_{i \geqslant 0} v^{r-i} \bar{Z}_i, \quad \text{для некоторого} \quad r \in \mathbb{Z}, \tag{A10.29}$$

где, в любом $\bar{Z}_i$, каждый моном начинается слева с $v^{(>0)}$. Тогда

$$0 = Z(vL) = v^{L-1} v^r \bar{Z}_0 + \sum_{i>0} v^{L-1+r-i} \widetilde{Z}_i \tag{A10.30}$$

с некоторыми укороченными $\widetilde{Z}_i$ аналогичного вида. Таким образом, $\bar{Z}_0 = 0 \Rightarrow Z(v) = 0$. ▮

Следствие A10.31. Пусть X_1 и X_2 — два коммутирующих эволюционных дифференцирования $C_u\langle u^{-1}\rangle$. Рассмотрим степенной гомоморфизм $\Phi : C_u\langle u^{-1}\rangle \to C_v\langle v^{-1}\rangle$,

$$\Phi(u) = v^L, \quad L \in \pm\mathbb{N}. \tag{A10.32}$$

Если Y_1 и Y_2 — эволюционные дифференцирования $C_v\langle v^{-1}\rangle$, удовлетворяющие соотношениям

$$Y_i\Phi = \Phi X_i, \quad i = 1, 2, \tag{A10.33}$$

то Y_1 и Y_2 также коммутируют.

Доказательство. Применим Лемму A10.28 к $Z = [Y_1, Y_2]$. ▮

Итак, каждая из иерархий V_n и $\bar{V}_n$ коммутативна.

Иерархия V_n может восприниматься, как *квадратный корень* из иерархии Y_n. Так как в *квадратных* корнях нет ничего сакраментального, то зададимся вопросом, можно ли извлекать из Y_n-иерархии корни более высокой степени (желательно, цивилизованным образом).

Для любого фиксированного положительного целого L, определим n-й поток иерархии $V_{L|n}$:

$$V_{L|n}: \quad v_t = \sum_{k+p=n} v^{kL} v_x v^{pL}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{A10.34a}$$

$$V_{L|-1}: \quad v_t = 0, \tag{A10.34b}$$

$$V_{L|-n-2}: \quad v_t = -\sum_{k+p=n} v^{-L(k+1)} v_x v^{-L(p+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{A10.34c}$$

Тогда

$$V_{L|n} = \sqrt[L]{Y_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{A10.35}$$

Действительно, это очевидно при $L = 1$; и также при $L > 1$, $n = -1$. При $n \in \mathbb{Z}_+$, из формулы (A10.34a) следует:

$$\begin{aligned} u_t = (v^L)_t &= \sum_{i+j=L-1} v^i v_t v^j = \sum_{k+p=n} v^{kL} \Big(\sum_{i+j=L-1} v^i v_x v^j \Big) v^{pL} = \\ &= \sum_{k+p=n} u^k u_x u^p = \partial(u^{n+1}). \end{aligned} \tag{A10.36}$$

Аналогично, формула (A10.34c) дает:

$$u_t = (v^L)_t = \sum_{i+j=L-1} v^i v_t v^j = -\sum_{k+p=n} v^{-L(k+1)}\Big(\sum_{i+j=L-1} v^i v_x v^j\Big) v^{-L(p+1)} =$$

$$= -\sum_{k+p=n} u^{-k-1} u_x u^{-p-1} = \partial(u^{-n-1}). \qquad \text{(A10.37)}$$

Итак, формула (A10.35) доказана; при этом Следствие A10.31 гарантирует, что иерархия $V_{L|n}$ коммутативна, для любого $L \in \mathbb{N}$. Наша старая иерархия V_n (A10.6) есть просто $V_{2|n}$. Полагая $w = v^{-1}$, мы можем превратить иерархию $V_{L|n}$ в иерархию

$$\bar{V}_{L|n}: \quad w_t = \sum_{k+p=n} w^{-Lk} w_x w^{-Lp}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \qquad \text{(A10.38a)}$$

$$\bar{V}_{L|-1}: \quad w_t = 0, \qquad \text{(A10.38b)}$$

$$\bar{V}_{L|-n-2}: \quad w_t = -\sum_{k+p=n} w^{L(k+1)} w_x w^{L(p+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad \text{(A10.38c)}$$

Опреации извлечения корня может быть применена также к иерархиям X_n^r (A10.3) и X_n^ℓ (A10.4):

Утверждение A10.39. Положим, при $L \in \mathbb{N}$,

$$X_{L|n}^r: \quad v_t = v^{Ln} v_x, \quad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{(A10.40)}$$

$$X_{L|n}^\ell: \quad v_t = v_x v^{Ln}, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad \text{(A10.41)}$$

Тогда

$$X_{L|n}^r = \sqrt[L]{X_n^r}, \qquad \text{(A10.42)}$$

$$X_{L|n}^\ell = \sqrt[L]{X_n^\ell}. \qquad \text{(A10.43)}$$

Доказательство. Если $v_t = v^{Ln} v_x$, то

$$u_t = (v^L)_t = \sum_{i+j=L-1} v^i v_t v^j = v^{Ln} \sum_{i+j=L-1} v^i v_x v^j = u^n u_x,$$

и (A10.42) доказано. Формула (A10.43) является зеркальным образом (A10.42). ▮

Объединенное множество построенных иерархий замкнуто относительно операций извлечения корня, инверсии $u \mapsto u^{-1}$ и зеркальной симметрии. Существуют ли другие иерархии, которые в коммутативном пределе превращаются в $\{u_t = u^n u_x,\ n \in \mathbb{Z}\}$? Это кажется неправдоподобным. Следующий, легко проверяемый результат содержится в [Kup 1995b]: если постоянные c_i и d_j таковы, что потоки

$$u_t = c_1 u u_x + c_2 u_x u, \quad u_t = d_1 u^2 u_x + d_2 u u_x u + d_3 u_x u^2 \qquad \text{(A10.44)}$$

коммутируют, то

$$c_1 c_2 (c_1 - c_2) = 0. \qquad \text{(A10.45)}$$

Приложение *A11

Некоммутативные свободные частицы имеют больше констант движения, чем степеней свободы

Свобода не дается даром

Девиз, 18 в.

В (коммутативной) классической механике движение по инерции для системы с N степенями свободы описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i}. \tag{A11.1}$$

Соответствующие уравнения движения

$$\dot{x}_i = p_i/m_i, \quad \dot{p}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{A11.2}$$

распадаются на N невзаимодействующих пар, каждая из которых имеет одну и ту же каноническую форму

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = 0, \tag{A11.3}$$

после подходящих растяжений, делающих массы m_i единичными. Уравнения (A11.3) описывают простейшую мыслимую механическую систему: свободное движение с одной степенью свободы. Они отвечают гамильтониану

$$H = p^2/2. \tag{A11.4}$$

Следовательно, функциональное пространство констант движения системы (A11.3) имеет ровно *один* генератор, p ($= \sqrt{2H}$):

$$C_{comm} = \mathcal{F}((p)). \tag{A11.5}$$

Это — классическая (коммутативная) точка зрения. Как мы видели неоднократно, некоторые коммутативные конструкции выдерживают некоммутативное обобщение, а другие — нет. Только в *одном* случае — именно, в формулах типа Концевича из §6.5 и §12.5, — мы столкнулись с чисто некоммутативными эффектами. Жизнь по инерции дает еще один такой пример.

---

* Добавлено при переводе

Допустим, что наша свободная частица, движущаяся в одномерии, согласно уравнениям движения (A11.3) *некоммутативна*. Это значит, что p и x теперь не коммутируют. Рассмотрим гамильтониан

$$F = 2x^2 - pxp^{-1}x - xp^{-1}xp. \tag{A11.6}$$

Ясно, что F *не* тривиален:

$$F \not\approx 0,$$

так как

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta x} &= 4x - p^{-1}xp - pxp^{-1} - p^{-1}xp - pxp^{-1} = \\ &= 2(2x - p^{-1}xp - pxp^{-1}) \neq 0.\end{aligned}$$

С другой стороны, так как

$$(xp^{-1}x)^{\cdot} \ = 2x, \tag{A11.7}$$

то мы имеем:

$$\dot{F} = 2(xp + px) - p(2x) - (2x)p = 0. \tag{A11.8}$$

Таким образом, F является настоящей новой *постоянной движения*. Свободная частица не так свободна, как кажется.

Заметим, что если

$$\mathcal{M} = px - xp \tag{A11.9}$$

и H — *любой* гамильтониан механического типа,

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x), \tag{A11.10}$$

то

$$\dot{\mathcal{M}} = 0, \tag{A11.11}$$

хотя, очевидно,

$$\mathcal{M} = [p, x] \approx 0. \tag{A11.12}$$

Когда Александр обозрел свои обширные владения,
он зарыдал, ибо больше было нечего завоевывать.

Замечания и комментарии

In gratiam eorum, qui Latinam
linguam non callent.

(Поздравительные замечания, приводимые ниже, продаются по себестоимости.)

Предисловие: Результаты этой книги были подытожены в докладе автора в Лос-Аламосе, 1994 [Kup 1995b]. Гельфанд и Смирнов рассмотрели ноль-мерный $\mathbb{Z}_2$–градуированный случай в [GSm 1994].

Различные некоммутативные интегрируемые системы спорадически появлялись в печати. Например, уравнение КдФ на матрицу $u(x,t)$ было выведено Вадати и Камидзо в [WKa 1974]. Другие ссылки появятся ниже.

Результаты Концевича появились в его статье о некоммутативной симплектической механике [Kon 1993].

Глава 1: алгебраическая схема интегрируемости и одевания, которой следует эта и другие главы, была отшлифована Вильсоном [Wil 1979], следуя ранним работам Гельфанда, Дикого и Манина. Современное изложение этих и смежных вопросов можно найти в монографии Дикого [Dic 1991].

Глава 2 моделируется на коммутативном изложении из [Kup 1985b].

Глава 3: §§3.1–3.4 следуют коммутативному изложению из [Kup 1985b, Kup 1995a]. "Формы Гиббонса" из §§3.5, 3.6 и многих других мест книги извлечены из работы Гиббонса [Gib 1981].

Главы 4, 5 моделируются на коммутативном изложении из [Kup 1992], где можно найти дальнейшие ссылки.

Глава 6: §6.2 представляет собой некоммутативную версию [Kup 1995b]. §6.4: на представлениях Клебша, объекте Ли-алгебраической природы, держатся многие конструкции механики идеальной жидкости и физики плазмы; в книге [Kup 1992] эти представления разработаны достаточно детально; для конечномерных алгебр Ли существуют также *квантовые* представления Клебша, их можно найти в выпусках "Journal of Nonlinear Mathematical Physics", самого этического научного журнала из существующих.

Глава 7: §7.1: квазирелятивистские уравнения Лакса были определены в [GKu 1990]. §7.2: гамильтоновы операции в этом параграфе моделируются по [Kup 1993].

Глава 8: источником служат работы Чередника, Вердье, Вильсона и Флашки; изложение следует пути, описанному в [Kup 1985a].

Глава 14: источником служат работы Хейлес [Hay 1992].

Часть B: решеточные уравнения Лакса были введены в [Kup 1982] и развиты в [Kup 1985a], конечно все в коммутативном случае. Нарита в [Nar 1982] показал, что уравнения (9.8.32), именуемые им “обобщенные уравнения Вольтерра”, имеют 1- и 2-солитонные решения. Эти обобщенные системы Вольтерра подробно анализировались в [Kup 1985a], как часть общей теории. Богоявленский изучал обобщенные уравнения Вольтерра в [Bog 1991]; этим объясняется название “цепочки Богоявленского” иногда применяемое к этому уравнению, см. напр. [Sur 1996b].

Глава 15: релятивистская цепочка Тоды открыта Руйсенаарсом и Шнейдером [RSc 1986, Rui 1987, Rui 1990a, Rui 1990b], впоследствии изучалась Альбером [Alb 1989], Бруски, Калоджеро и Рагниско [BCa 1987, BRa 1988a, BRa 1988b, BRa 1989a, BRa 1989b], и многими другими.

Общий квазирелятивистский анзац (15.1.3, 4) был определен в [GKu 1990] (в коммутативном случае.)

Часть C: дискретизация по времени, как сопряжение для решеточных уравнений Лакса, подход, принятый в Части C, был предложен Гиббонсом и Купершмидтом [GKu 1992]. Другие подходы можно найти в работах Таха и Абловица [TAb 1984], Веселова [Ves 1988, Ves 1991a, Ves 1991b], Мозера и Веселова [MVe 1991], Суриса [Sur 1990, Sur 1991], Дейфта, Ли и Томей [DLT 1992], и других. Случай КП из главы 17 моделируется на коммутативном изложении из [GKu 1992]. Система Вольтерра в §19.6–19.8 излагается аналогично коммутативному случаю из [Kup 1996]. Многие системы в Части C, и многие вне ее, были, в коммутативном случае, проработаны Сурисом, существенно продвинувшем предмет; см. [Sur 1996a, Sur 1996b, Sur 1997a, Sur 1997b], многие его препринты в электронном архиве solv-int, и статьи в *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*. В частности, основной результат этой части, дискретизация по времени как факторизация, полученный эмпирически в §19.11, используется Сурисом как часть устоявшейся коммутативной теории, основанной на теоретико-групповых рассмотрениях.

Приложение A2: *конечные* асимптотические разложения являются, по существу, обобщением линеаризации; последняя есть разложение вида

$$q = u_0 + \varepsilon u_1, \quad \varepsilon^2 = 0,$$

и теория таких разложений была развита в [Kup 1992].

Приложение A3: первоначальной мотивировкой этой книги было развить платформу, с которой можно атаковать квантово-математические головоломки, такие, как квантовые интегрируемые системы и квантовые группы. В Квантовом царстве коммутаторы нельзя игнорировать, в отличие от некоммутативного подхода, применяемого в остальной части этой книги.

Приложение A5 следует коммутативному изложению в [Kup 1991]. Динамические системы жидкости из §A5.2 широко изучались в [Kup 1992] (и многих других местах.)

Приложение A6: другой полезной ссылкой на решение в виде рядов является статья Розалеса [Ros 1978]. Решения различных некоммутативных уравнений можно найти в статьях Этингофа, Гельфанда и Ретаха [EGR 1997a, EGR 1997b], [GRe 1992].

Приложение A7: некоммутативное уравнение КП (A7.13) появилось в статье Дорфман и Фокаса [DFo 1992, уравнение (44)], где было выведено с другой точки зрения.

Литература

> Мы никогда не раскрываем свои источники.
>
> Торквемада, в ответ на вопрос, этично ли следователям Инквизиции хранить в секрете личности обвинителей.

Звездочкой отмечена литература, добавленная автором для русского издания.

[*A-S 1982] Ablowitz M.J., Fokas A.S., Satsuma J., Segur H., *On the periodic intermediate long wave equation,* J. Phys. A 15 (1982) 781–786.

[*ALa 1975] Ablowitz M.J., Ladik J.F., *Nonlinear differential-difference equations,* J. Math. Phys. 16 (1975) 598–603.

[*ALa 1976] Ablowitz M.J., Ladik J.F., *Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis,* J. Math. Phys. 17 (1976) 1011–1018.

[*ASa 1978] Ablowitz M.J., Satsuma J., *Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations,* J. Math. Phys. 19 (1978) 2180–2186.

[Adl 1995] Adler S.L., *Quaternionic quantum mechanics and quantum fields,* Oxford UP (New York, 1995).

[AMi 1995] Adler S.L., Millard A.C., *Generalized quantum dyanmics as pre-quantum mechanics,* Nucl. Phys. B 473 (1996) 199–244.

[AWu 1994] Adler S.L., Wu Y.-S., *Algebraic and geometric aspects of generalized quantum dynamics,* Phys. Rev. D 49 (1994) 6705–6708.

[*AdV 1991] Адлер В.Э., *Ли-алгебраический подход к нелокальным симметриям интегрируемых систем,* Теор. и мат. физ. 89 (1991) 323–336; 1239–1248 (English).

[*AdV 1994] Adler V.E., *Nonlinear superposition formula for Jordan NLS equations,* Phys. Lett A 190 (1994) 53–58.

[*AdV 1995] Adler V.E., *Integrable deformations of a polygon,* Phys. D 87 (1995) 52–57.

[*AdV 2000a] Адлер В.Э., *О дискретизациях уравнения Ландау-Лифшица,* Теор. и мат. физ. 124 (2000) 48–61; 897–908 (English).

[*AdV 2000b] Adler V.E., *On the structure of the Bäcklund transformations for the relativistic lattices,* J. of Nonl. Math. Phys. 7 (2000) 34–56.

[*AdV 2000c] Адлер В.Э., *Преобразования Лежандра на треугольной решетке,* Функц. анализ 34:1 (2000) 1–11; 1–9 (English).

[*A-H 1997] Adler V., Gürel B., Gürses M., Habibullin I., *Boundary conditions for integrable equations,* J. Phys. A 30 (1997) 3505–3513.

[*AHa 1995] Adler V.E., Habibullin I.T., *Integrable boundary conditions for the Toda lattice,* J. Phys. A 28 (1995) 6717–6729.

[*AHa 1997] Адлер В.Э., Хабибуллин И.Т., *Граничные условия для интегрируемых цепочек,* Функц. анализ 31:2 (1997) 1–14; 75–85 (English).

[*AHS 1997] Адлер В.Э., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б., *Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси,* Теор. и мат. физ. 110 (1997) 98–113; 78–90 (English).

[*ASh 1997a] Адлер В.Э., Шабат А.Б., *Об одном классе цепочек Тоды,* Теор. и мат. физ. 111 (1997) 323–334; 647–657 (English).

[*ASh 1997b] Адлер В.Э., Шабат А.Б., *Обобщенные преобразования Лежандра,* Теор. и мат. физ. 112 (1997) 179–194; 935–946 (English).

[*ASh 1998] Адлер В.Э., Шабат А.Б., *Первые интегралы обобщенных цепочек Тоды,* Теор. и мат. физ. 115 (1998) 349–357; 639–646 (English).

[*ASY 2000] Адлер В.Э., Шабат А.Б., Ямилов Р.И., *Симметрийный подход к проблеме интегрируемости,* Теор. и мат. физ. 125 (2000) 355–424; 1603–1661 (English).

[*ASt 1999] Адлер В.Э., Старцев С.Я., *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля,* Теор. и мат. физ. . 121 (1999) 271–284; 1484–1495 (English).

[*ASY 1999] Adler V.E., Svinolnpov S.I., Yamilov R.I., *Multi-component Volterra and Toda type equations,* Phys. Lett A 254 (1999) 24–36.

[*AYa 1994] Adler V., Yamilov R. I., *Explicit auto-transformations of integrable chains,* J. Phys. A 27 (1994) 477–492.

[Alb 1989] Alber S.J., *On finite-zone solutions of relativistic Toda lattice,* Lett. Math. Phys. 17 (1989) 149–155.

[*AFo 1989] Antonowicz M., Fordy A.P., *Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems,* Comm. Math. Phys. 124 (1989) 465–486.

[*AFo 1993] Antonowicz M., Fordy A.P., *Multi-component Schwarzian KdV hierarchies,* Rep. Math. Phys., 32 (1993) 223–233.

[*AFo 1987a] Athorne C., Fordy A.P., *Generalized KdV and MKdV equations associated with symmetric spaces,* J. Phys. A 20 (1987) 1377–1386.

[*AFo 1987b] Athorne C., Fordy A.P., *Integrable equations in (2+1) dimensions associated with symmetric and homogeneous spaces,* J. Math. Phys. 28:9 (1987) 2018–2024.

[*BSo 1998] Balandin S. P., Sokolov V.V., *On the Painlevé test for non-Abelian equations,* Phys. Lett A 246 (1998) 267–272.

[Bat 1915] Bateman H., *Some recent researchers on the motion of fluids,* Monthly Weather Review 43 (April 1915) 163–170.

[*BSW 2001] Beukers F., Sanders J. A., Wang J.P., *On integrability of systems of evolution equations,* J. Differential Equations 172 (2001) 396–408.

[*Bob 1999] Bobenko A. I., *Discrete integrable systems and geometry,* in: XIIth Int. Congress of Mathematical Physics (ICMP '97) (Brisbane) 219–226, Internat. Press (Cambridge, MA, 1999).

[*B-P 1993] Bobenko A., Bordemann M., Gunn C., Pinkall U., *On two integrable cellular automata,* Comm. Math. Phys. 158 (1993) 127–134.

[*BLS 1998] Bobenko A. I., Lorbeer B., Suris Yu. B., *Integrable discrctizations of the Euler top,* J. Math. Phys. 39 (1998) 6668–6683.

[*BPi 1999] Bobenko A., Pinkall U., *Discretization of surfaccs and integrable systcms,* in: Discrete Integrable Geometry and Physics (Vienna, 1996) 3–58, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 16, Oxford UP (New York, 1999).

[*BSu 1999a] Bobenko A.I., Suris Yu.B., *Discrete Lagrangian reduction, discrete Euler-Poincaré equations, and semidirect products,* Lett. Math. Phys. 49 (1999) 79–93.

[*BSu 1999b] Bobenko A.I., Suris Yu.B., *Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top,* Comm. Math. Phys. 204 (1999) 147–188.

[*BSu 2000] Bobenko A.I., Suris Yu.B., *A discrete time Lagrange top and discrete elastic curves,* in: L.D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics, 39–62, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 201, Amer. Math. Soc. (Providence, RI, 2000).

[*BHS 2002] Bobenko A.I., Hoffmann T., Suris Yu.B., *Hexagonal circle patterns and integrable systems: patterns with the multi-ratio property and Lax equations on the regular triangular lattice,* Int. Math. Res. Not. 3 (2002) 111–164.

[Bog 1991] Богоявленский О.И., *Алгебраические конструкции интегрируемых динамических систем – расширений системы Вольтерра,* Успехи Мат. Наук 46:3 (1991) 3–48; 1–64 (English).

[*BCV 1996] Bonora L., Constantinidis C.P., Vinteler E., *Toda lattice realization of integrable hierarchies,* Lett. Math. Phys. 38 (1996) 349–363; hep-th/9511172.

[Bou 1986] Boulez P., *Orientations,* Harvard UP (Boston, 1986).

[Bro 1975] Broer L.J.F., *Approximate equations for long water waves,* Appl. Sci. Res. 31 (1975) 377–395.

[BCa 1987] Bruschi M., Calogero F., *The Lax representation for an integrable class of relativistic dynamical systems,* Comm. Math. Phys. 109 (1987) 481–492.

[*BLR 1980] Bruschi M., Levi D., Ragnisco O., *Toda lattice and generalised Wronskian technique,* J. Phys. A 13 (1980) 2531–2533.

[BRa 1988a] Bruschi M., Ragnisco O., *On new solvable many-body dynamical systems with velocity-dependent forces,* Inv. Prob. 4 (1988) L15–L20.

[BRa 1988b] Bruschi M., Ragnicso O., *Recursion operator and Bäcklund transformation for the Ruijsenaars-Toda lattices,* Phys. Lett. A 129 (1988) 21–25.

[BRa 1989a] Bruschi M., Ragnisco O., *Lax representation and complete integrability for the periodic relativistic Toda Lattice,* Pbys. Lett. A 134 (1989) 365–370.

[BRa 1989b] Bruschi M., Ragnisco O., *The periodic relativistic Toda lattice: direct and inverse problems,* Inv. Prob. 5 (1989) 389–405.

[*B-T 1991] Bruschi M., Ragnisco O., Santini P.M., Tu G.Z., *Integrable symplectic maps,* Phys. D 49 (1991) 273–294.

[*BSa 1994] Bruschi M., Santini P.M., *Cellular automata in 1+1, 2+1 and 3+1 dimensions, constants of motion and coherent structures,* Phys. D 70 (1994) 185–209.

[*BSR 1992] Bruschi M., Santini P.M., Ragnisco O., *Integrable cellular automata,* Phys. Lett A 169 (1992) 151–160.

[Bur 1984] Bury S., *An introduction to rings,* Stemmer House Publishers (Owings Mills, 1984).

[*CLL 1979] Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S., *Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method,* Physica Scripta 20 (1979) 490–492.

[*CYa 1995] Cherdantsev I.Yu., Yamilov R.I., *Master symmetries for differential-difference equations of the Volterra type,* Phys. D 87 (1995) 140–144.

[*CYa 1996] Cherdantsev I.Yu., Yamilov R.I., *Local master symmetries of differential-difference equations,* in: Symmetries and Integrability of Difference Equations (Estrel, PQ, 1994) 51–61, CRM Proc. Lecture Notes 9, Amer. Math. Soc. (Providence, RI, 1996).

[Che 1978] Чередник И.В., *Дифференциальные уравнения для функций Бейкера-Ахиезера алгебраических кривых,* Функц. анализ 12:3 (1978) 45–54; 195–203 (English).

[*CCh 1977] Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V., *Pole expansions of nonlinear partial differential equations,* Nuovo Cimento B (11) 40 (1977) 339–353.

[*CMa 2001] Clarkson P.A., Mansfield E.L., *Open problems in symmetry analysis,* in: The Geometrical Study of Differential Equations (Washington, DC, 2000) 195–205, Contemp. Math. 285, Amer. Math. Soc. (Providence, RI, 2001).

[Dar 1993] Darling D., *Equations of Eternity,* Hyperion (New York, 1993).

[*DSe 2000] Deconinck B., Segur H., *Pole dynamics for elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation,* Math. Phys. Anal. Geom. 3 (2000) 49–74.

[DLT 1992] Deift P., Li L.-Chi., Tomei C., *Loop groups, discrete versions of some classical integrable systems, and rank 2 extensions,* Men. Amer. Math. Soc. 479 (1992).

[Dic 1991] Dickey L.A., *Soliton equations and Hamiltonian systems,* World Scientific (Singapore, 1991).

[*Dic 1994] Dickey L.A., *Field-theoretical (multi-time) Lagrange-Hamilton formalism and integrable equations*, in: Lectures on Integrable Systems (Sophia-Antipolis, 1991) 103–161, World Sci. Publishing (River Edge, NJ, 1994).

[*Dic 1995a] Dickey L.A., *On the constrained KP hierarchy,* Lett. Math. Phys. 34 (1995) 379–384.

[*Dic 1995b] Dickey L.A., *On the constrained KP hierarchy.* II, Lett. Math. Phys. 35 (1995) 229–236.

[*Dic 1995c] Dickey L.A., *On additional symmetries of the KP hierarchy and Sato's Bäcklund transformation,* Comm. Math. Phys. 167 (1995) 227–233.

[*Dic 1999] Dickey L.A., *Modified KP and discrete KP,* Lett. Math. Phys. 48 (1999) 277–289.

[DFo 1992] Dorfman I.Y., Fokas A.S., *Hamiltonian theory over noncommutative rings and integrability in multidimensions,* J. Math. Phys. 33 (1992) 2504–2514.

[*DSa 1999a] Doliwa A., Santini P.M., *Geometry of discrete curves and lattices and integrable difference equations*, in: Discrete Integrable Geometry and Physics (Vienna, 1996) 139–154, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 16, Oxford UP (New York, 1999).

[*DSa 1999b] Doliwa A., Santini P.M., *Planarity and integrability,* in: Symmetry and Perturbation Theory (Rome, 1998) 167–177, World Sci. Publishing (River Edge, NJ, 1999).

[*DSo 1985] Дринфельд В.Г., Соколов В.В., *Уравнения, связанные с уравнением Кортевега-де Фриза,* Доклады АН СССР 284:1 (1985) 29–33; Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 361–365 (English).

[EGR 1997a] Etingof P., Gel'fand I., Retakh V., *Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations,* Math. Res. Lett. 4 (1977) 413–425.

[EGR 1997b] Etingof P., Gel'fand I., Retakh V., *Nonabelian integrable system, quasideterminants, and Marehenko lemma,* q-alg/9707017.

[Fla 1983] Flaschka H., *Construction of conservation laws for Lax equations: comments on a paper by G. Wilson,* Quart. J. Math, Oxford (2) 34 (1983) 61–65.

[FGe 1996] Fokas A.S., Gel'fand I.M., ed-s, *Algebraic aspects of integrable systems: in memory of Irene Dorfman,* Birkhauser (Boston, 1996).

[*FPS 1989] Fokas A.S., Papadopoulou E.P., Saridakis, Y.G., *Particles in soliton cellular automata,* Complex Systems 3 (1989) 615–633.

[*FPS 1990a] Fokas A.S., Papadopoulou E.P., Saridakis, Y.G., *Coherent structures in cellular automata,* Phys. Lett A 147 (1990) 369–379.

[*FPS 1990b] Fokas A.S., Papadopoulou E.P., Saridakis, Y.G., *Soliton cellular automata,* Phys. D 41 (1990) 297–321.

[*F-A 1989] Fokas A.S., Papadopoulou E.P., Saridakis, Y.G., Ahlowitz M.J., *Interaction of simple particles in soliton cellular automata,* Stud. Appl. Math. 81 (1989) 153–180.

[*For 1984] Fordy A.P., *Derivative nonlinear Schrödinger equations and Hermitian symmetric spaces,* J. Phys. A 17 (1984) 1235–1245.

[*FKu 1983] Fordy A.P., Kulish P.P., *Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras,* Comm. Math. Phys. 89:3 (1983) 427–443.

[*FSV 1995] Fordy A.P., Shabat A.B., Veselov A.P., *Factorization and Poisson correspondences,* Теор. и мат. физ. 105 (1995) 225–245; 1369–1386 (English).

[*FRa 1999] Francoise J.P., Ragnisco O., *An iterative process on quartics and integrable symplectic maps,* in: Symmetries and Integrability of Difference Equations (Canterbury, 1996) 56–63, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 255, Cambridge UP (Cambridge, 1999).

[*Fuk 2001] Fukuda K., *Box-ball systems and Robinson-Schensted-Knuth correspondence,* math.CO/0105226.

[GRe 1992] Гельфанд И.М., Ретах В.С., *Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов, I.,* Функц. анализ 26:4 (1992) 1–20; 231–246 (English).

[GSm 1994] Gel'fand I M., Smirnov M.M., *The algebra of Chern-Simons classes and the Poisson bracket on it,* hep-th/9404103.

[Gib 1981] Gibbons J., *Related integrable hierarchies I. Two nonlinear Schrödinger equations,* Dublin Inst. Advanced Study Preprint DIAS-STP-81-06.

[GKu 1990] Gibbons J., Kupershmidt B.A., *Relativistic analogs of basic integrable systems,* in [Kup 1990] 207–231.

[GKu 1992] Gibbons J., Kupershmidt B.A., *Time discretization of lattice integrable systems,* Phys. Lett. 165A (1992) 105–110.

[*Gil 1999] Gilson C.R., *Soliton cellular automata,* in: Symmetries and Integrability of Difference Equations (Canterbury, 1996) 313–324, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 255, Cambridge UP (Cambridge, 1999).

[*GSo 2000] Голубчик И.З., Соколов В.В., *Многокомпонентное обобщение иерархии уравнения Ландау-Лифшица,* Теор. и мат. физ. 124 (2000) 62–71; 909–917 (English).

[*G-T 1997] Grammaticos B., Ohta Y., Ramani A., Takahashi D., Tamizhmani K.M., *Cellular automata and ultra-discrete Painlevé equations,* Phys. Lett A 226 (1997) 53–58; solv-int/9603003.

[*GRa 1999] Grammaticos B., Ramani A., *Painleve equations and cellular automata,* in: Symmetries and Integrability of Difference Equations (Canterbury, 1996) 325–333, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 255, Cambridge UP (Cambridge, 1999).

[*GSt 1999] Grant J.D.E., Strachan I.A.B., *Hypercomplex integrable systems,* Nonlinearity 12 (1999) 1247–1261.

[*GHa 1997] Gürel B., Habibullin I., *Boundary conditions for two-dimensional integrable chains,* Phys. Lett A 233 (1997) 68–72.

[*GGH 1995] Gürel B., Gürses M., Habibullin I., *Boundary value problems for integrable equations compatible with the symmetry algebra,* J. Math. Phys. 36 (1995) 6809–6821.

[*Hab 1991] Хабибуллин И.Т., *Преобразование Бэклунда и интегрируемые начально-краевые задачи,* Мат. Заметки 49 (1991) 130–137; 418–423 (English).

[*Hab 1993a] Habibullin I.T., *Symmetries of boundary problems,* Phys. Lett A 178 (1993) 369–375.

[*Hab 1995b] Хабибуллип И.Т., *Граничные условия для нелинейных уравнений, совместные с интегрируемостью,* Теор. и мат. физ. 96 (1993) 109–122; 845–853 (English).

[*Hab 1995] Habibullin I.T., *Boundary conditions for integrable chains,* Phys. Lett A 207 (1995) 263–268.

[*Hab 1996] Habibullin I.T., *Symmetry approach in boundary value problems,* in: Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics, Vol. 2 (Kiev, 1995); J. of Nonl. Math. Phys. 3 (1996) 147–151.

[*Hab 1999] Хабибуллин И.Т., *Уравнение КдФ на полуоси с нулевым граничным условием,* Теор. и мат. физ. 119 (1999) 397–404; 712–718 (English).

[*HSY 1996] Habibullin I.T., Sokolov V.V., Yamilov R.I., *Multi-component integrable systems and nonassociative structures,* in Nonlinear Physics: Theory and Experiment (Lecce, 1995) 139–168, World Sci. Publishing (River Edge, NJ, 1996).

[*HVi 2000] Habibullin I.T., Vil'danov A.N., *Integrable boundary conditions for nonlinear lattices,* in: SIDE III – Symmetries and Integrability of Difference Equations (Sabaudia, 1998) 173–180, CRM Proc. Lecture Notes 25, Amer. Math. Soc. (Providence, RI, 2000).

[Hay 1992] Hayles N.K., *Gender encoding in fluid mechanics: masculine channels and feminine flows,* Differences: A journal of Feminist Cultural Studies 4:2 (1992) 16–44.

[*H-Y 2000] Hatayama G., Kuniba A., Okado M., Takagi T., Yamada Y., *Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases,* math.QA/0007175.

[*HKT 2001] Hatayama G., Kuniba A., Takagi T., *Simple algorithm for factorized dynamics of g_n-automaton,* nlin.CG/0103022.

[*HOS 1988] Hirota R., Ohta Y., Satsuma J., *Wronskian structures of solutions for soliton equations,* in: Recent Developments in Soliton Theory, Progr. Theoret. Phys. Suppl. 94 (1988) 59–72.

[*HSa 1976] Hirota R., Satsuma J., *A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice,* Progr. Theoret. Phys. Suppl. 59 (1976) 64–100.

[*HTs 1995] Hirota R., Tsujimoto S., *Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations,* J. Phys. Soc. Japan 64 (1995) 3125–3127.

[*HCl 1995] Hu X.B., Clarkson P.A., *Rational solutions of a differential-difference KdV equation, the Toda equation and the discrete KdV equation,* J. Phys. A 28 (1995) 5009–5016.

[Kau 1975] Kaup D.J., *A higher-order water-wave equation and the method for solving it,* Progr. Theor. Phys. 54 (1975) 396–408.

[*KNe 1978] Kaup D.J., Newell A.C., *An exact solution for a Derivative Nonlinear Schrödinger equation,* J. Math. Phys. 19 (1978) 798–801.

[*KKh 1990] Khalilov F.A., Khruslov E.Ya., *Matrix generalization of the modified Korteweg-de Vries equation,* Inverse problems 6:2 (1990) 193–204.

[*KAS 1982] Kodama Y., Ablowitz M.J., Satsuma J., *Direct and inverse scattering problems of the Nonlinear Intermediate Long Wave equation,* J. Math. Phys. 23 (1982) 564–576.

[*KSA 1981] Kodama Y., Satsuma J., Ablowitz M.J., *Nonlinear Intermediate Long-Wave equation: analysis and method of solution,* Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 687–690.

[*KOe 1993] Konopelchenko B., Oevel W., *An r-matrix approach to nonstandard classes of integrable equations,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 29 (1993) 581–666.

[Kon 1993] Kontsevich M., *Formal (non)-commutative symplectic geometry,* in L. Corwin et al. ed-s, "The Gel'fand Mathematical Seminars 1990–92", Birkhauser (Boston, 1993) 173–187.

[*KRa 1994] Kundu A., Ragnisco O., *A simple lattice version of the Nonlinear Schrödinger equation and its deformation with an exact quantum solution,* J. Phys. A 27 (1994) 6335–6347.

[Kup 1971] Kuper C.G., Peres A. (ed-s), *Relativity and gravitation,* Gordon and Breach Science Publ. (New York, 1971).

[Kup 1982] Kupershmidt B.A., *On algebraic models of dynamical systems,* Lett. Math. Phys. 6 (1982) 85–89.

[Kup 1985a] Kupershmidt B.A., *Discrete Lax equations and differential-difference calculus,* Asterisque (Paris, 1985).

[Kup 1985b] Kupershmidt B.A., *Mathematics of dispersive water waves,* Comm. Math. Phys. 99 (1985) 51–73.

[Kup 1987] Kupershmidt B.A., *An algebraic model of graded calculus of variations,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 101 (1987) 151–166.

[Kup 1990] Kupershmidt B.A., ed., *Integrable and superintegrable systems,* World Scientific (Singapore, 1990).

[Kup 1991] Kupershmidt B.A., *GL_2–orbit of the Korteweg-de Vries equation,* Phys. Lett A 156 (1991) 53–60.

[Kup 1992] Kupershmidt B.A., *The variational principles of dynamics,* World Scientific (Singapore, 1992).

[Kup 1993] Kupershmidt B.A., *Quasirelativistic analogs of Lax equations,* in A.S. Fokas et al. ed-s, *Nonlinear Processes in Physics,* Springer-Verlag (Berlin etc., 1993).

[Kup 1995a] Kupershmidt B.A., *Canonical property of the Miura map between the MKP and KP hierarchics, continuous and discretc,* Comm. Math. Phys. 167 (1995) 351–371.

[Kup 1995b] Kupershmidt B.A., *Noncommutative integrable systems,* in V.G. Makhankov et al. ed-s, Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, NEEDS 94, World Scientific (Singapore, 1995) 94–101.

[Kup 1996] Kupershmidt B.A., *Infinitely-precise space-time discretization of the equation* $u_t + uu_x = 0$, in [FGe 1996] 205–216.

[*Kup 1998] Kupershmidt B.A., *Quantum differential forms,* J. of Nonl. Math. Phys. 5 (1998) 245–288.

[*Kup 2001] Kupershmidt B.A., *Dark equations,* J. of Nonl. Math. Phys. 8 (2001) 363–445.

[Lac 1989] Lakhterman D.R., *The ethics of geometry,* Routledge (New York, 1989).

[*LRB 1983] Levi D., Ragnisco O., Bruschi M., *Continuous and discrete matrix Burgers hierarchies,* Nuovo Cimento B (11) 74 (1983) 33–51.

[*LYa 1997] Levi D., Yamilov R., *Conditions for the existence of higher symmetries of evolutionary equations on the lattice,* J. Math. Phys. 38 (1997) 6648–6674.

[*LYa 2000] Levi D., Yamilov R., *Non-point integrable symmetries for equations on the lattice,* J. Phys. A 33 (2000) 4809–4823.

[*LYa 2001a] Levi D., Yamilov R., *Conditions for the existence of higher symmetries and nonlinear evolutionary equations on the lattice,* in: Algebraic Methods in Physics (Montreal, QC, 1997) 135–148, CRM Ser. Math. Phys., Springer (New York, 2001).

[*LYa 2001b] Levi D., Yamilov R., *On the integrability of a new discrete Nonlinear Schrödinger equation,* J. Phys. A 34 (2001) L553–L562.

[*LSY 1993] Leznov A.N., Shabat A.B., Yamilov R.I., *Canonical transformations generated by shifts in nonlinear lattices,* Phys. Lett A 174 (1993) 397–402.

[*Liu 1992] Liu Q.P., *A new integrable hierarchy of lattice equations,* J. Phys. A 25 (1992) 3603–3608.

[*Liu 1995] Liu Q.P., *On the cotangent space analog of the Korteweg-de Vries equation,* Comm. Theoret. Phys. 24 (1995) 117–120.

[*Liu 1998] Liu Q.P., *The constrained MKP hierarchy and the generalized Kupershmidt-Wilson theorem,* Lett. Math. Phys. 43 (1998) 65–72.

[*Liu 2001] Liu Q.P., *Miura map between lattice Kadomtsev-Petviashvili and its modification is canonical,* J. Math. Phys. 42 (2001) 2105–2112.

[*MNi 1989] Maillet J.-M., Nijhoff F., *Integrability for multidimensional lattice models,* Phys. Lett. B 224 (1989) 389–396.

[Man 1978] Мапип Ю.И., *Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений,* Итоги иауки и техннкн, сер. Совр. пробл. мат. 11 (1978) 5–152; J. Sov. Math. 11 (1979) 1–122 (English).

[*MSh 1999] Марнхип В.Г., Шабат А.Б., *Интегрируемые решетки,* Теор. и мат. физ. 118 (1999) 217–228; 173–182 (English).

[Mar 1989] Marsden J., *So much to tell you,* Little, Brown & Company (New York, 1989).

[Mar 1995] Marsden J., *Keeping the conversation going,* First Things (Aug/Sep 1995) 47–51.

[*Mar 1990] Marshall I., *Comm. Math. Phys. 133 (1990) 509*

[*M-T 1997] Matsukidaira J., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T., Torii M., *Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution,* Phys. Lett A 225 (1997) 287–295.

[*MSS 1990] Matsukidaira J., Satsuma J., Strampp W., *Conserved quantities and symmetries of KP hierarchy,* J. Math. Phys. 31 (1990) 1426–1434.

[MMc 1981] Maxfield M.W., McCarty N.J., *The best time to die,* SIAM Review 23 (1981) 385–389.

[*MRT 1994] Merola I., Ragnisco O., Tu G.Z., *A novel hierarchy of integrable lattices,* Inverse Problems 10 (1994) 1315–1334.

[Mes 1963] Messiah A., *Quantum mechanics,* John Wiley & Sons (New York, 1963).

[*MSh 1986] Mikhailov A.V., Shabat A.B., *Integrable deformations of the Heisenberg model,* Phys. Lett A 116 (1986) 191–194.

[*MSS 1991] Mikhalov A.V., Shabat A.B., Sokolov V.V., *The symmetry approach to classification of integrable equations,* in: What is Integrability?, 115–184, Spriuger Ser. Nonlinear Dynam., Springer (Berlin, 1991).

[*MSo 2000] Mikhailov A.V., Sokolov V.V., *Integrable ODEs on associative algebras,* Comm. Math. Phys. 211 (2000) 231–251.

[MVe 1991] Moser J., Veselov A.P., *Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials,* Comm. Math. Phys. 139 (1991) 217–243.

[*MNa 2000] Mukaihira A., Nakamura Y., *Integrable discretization of the modified KdV equation and applications,* Inverse Problems 16 (2000) 413–424.

[*MSo 1998] Мукминов Ф.Х., Соколов В.В., *Интегрируемые эволюционные уравнения со связями,* Мат. Сб. 133 (175) (1987) 392–414; Math. USSR-Sb. 61 (1988) 389–410 (English).

[*MRa 1990] Murometz Y., Razhoynick S., *Integrability in models of two-dimensional turbulence,* in: Integrable and Superintegrable Systems, 34–45, World Sci. Publishiug (Teaneck, NJ, 1990).

[*NSa 1995a] Nagai A., Satsuma J., *The Lotka-Volterra equations and the QR algorithm,* J. Phys. Soc. Japan 64 (1995) 3669–3674.

[*NSa 1995b] Nagai A., Satsuma J., *Discrete soliton equations and convergence acceleration algorithms,* Phys. Lett A 209 (1995) 305–312.

[*NTS 1998] Nagai A., Tokihiro T., Satsuma J., *The Toda molecule equation and the epsilon-algorithm,* Math. Comp. 67 (1998) 1565–1575.

[*NTS 2001] Nagai A., Tokihiro T., Satsuma J., *Conserved quantities of box and ball system,* Glasg. Math. J. 43A (2001) 91–97.

[Nar 1982] Narita K., *Soliton solution to extended Volterra equation,* J. Phys. Soc. Jap. 51 (1982) 1682–1685.

[*N-Y 2000] Narita Y., Saito S., Saitoh N., Yoshida K., *On the behaviour of solutions to discrete time Lotka-Volterra equation,* nlin.SI/0005059.

[Nas 1989] Nash P., *Super structures,* Garrett Ed Corp. 1989.

[*Nij 1985] Nijhoff F.W., *Theory of integrable three-dimensional nonlinear lattice equations,* Lett. Math. Phys. 9 (1985) 235–241.

[*Nij 2001] Nijhoff F.W., *Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system,* nlin.SI/0110027.

[*NPa 1989] Nijhoff F.W., Papageorgiou V., *Lattice equations associated with the Landau-Lifschitz equations,* Phys. Lett A 141 (1989) 269–274.

[*NRK 1996] Nijhoff F.W., Ragnisco O., Kuznetsov V.B., *Integrable time-discretisation of the Ruijsenaars-Schneider model,* Comm. Math. Phys. 176 (1996) 681–700.

[Niv 1990] Niven Larry, *Convergent series, in* N-Space, Tor (New York, 1990)

[*NST 2001] Nohe A., Satsuma J., Tokihiro T., *From cellular automaton to difference equation: a general transformation method which preserves time evolution patterns,* J. Phys. A 34 (2001) L371–L379.

[*Oev 1997] Oevel W., *Poisson brackets for integrable lattice systems,* in: Algebraic Aspects of Integrable Systems, 261–283, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 26, Birkhuser Boston (Boston, MA, 1997).

[*O-I 1993] Ohta Y., Hirota R., Tsujimoto S., Imai T., *Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy,* J. Phys. Soc. Japan 62 (1993) 1872–1886.

[*O-S 1993] Ohta Y., Kajiwara K., Matsukidaira J., Satsuma J., *Casorati determinant solution for the relativistic Toda lattice equation,* J. Math. Phys. 34 (1993) 5190–5204.

[*Olv 1977] Olver P.J., *Evolution equations possessing infinitely many symmetries,* J. Math. Phys. 18 (1977) 1212–1215.

[*OSo 1998a] Olver P.J., Sokolov V.V., *Integrable evolution equations on associative algebras,* Comm. Math. Phys. 193 (1998) 245–268.

[*OSo 1998b] Olver P.J., Sokolov V.V., *Non-abelian integrable systems of the Derivative Nonlinear Schrödinger type,* Inverse Problems 14:6 (1998) L5–L8.

[*OWa 2000] Olver P.J., Wang J.P., *Classification of integrable one-component systems on associative algebras,* Proc. London Math. Soc. (3) 81 (2000) 566–586.

[*PNi 1996] Papageorgiou V.G., Nijhoff F.W., *On some integrable discrete-time systems associated with the Bogoyavlensky lattices,* Phys. A 228 (1996) 172–188.

[*PAS 1988] Papatheodorou T.S., Ablowitz M.J., Saridakis Y.G., *A rule for fast computation and analysis of soliton automata,* Stud. Appl. Math. 79 (1988) 173–184.

[*PFo 1989] Papatheodorou T.S., Fokas A.S., *Evolution theory, periodic particles, and solitons in cellular automata,* Stud. Appl. Math. 80 (1989) 165–182.

[*PST 1986] Park J.K., Steiglitz K., Thurston W.P., *Soliton-like behavior in automata,* Phys. D 19 (1986) 423–432.

[Phi 1989] Phillips T., *Super charge,* Ballantine, 1989.

[Pit 1932] Pitkin W., *A short introduction to the history of human stupidity,* Simon and Schuster (New York, 1932).

[*Rag 1992] Ragnisco O., *A discrete Neumann system,* Phys. Lett A 167 (1992) 165–171.

[*Rag 1995] Ragnisco O., *Dynamical r-matrices for integrable maps,* Phys. Lett A 198 (1995) 295–305.

[*RBr 1996] Ragnisco O., Bruschi M., _Peakons, r-matrix and Toda lattice,_ Phys. A 228 (1996) 150–159.

[*RCW 1995] Ragnisco O., Cao C.W., Wu Y.T., _On the relation of the stationary Toda equation and the symplectic maps,_ J. Phys. A 28 (1995) 573–588.

[*RRa 1994] Ragnisco O., Rauch-Wojciechowski S., _Integrable mechanical systems related to the Harry-Dym hierarchy,_ J. Math. Phys. 35 (1994) 834–847.

[*RSa 1988] Ragnisco O., Santini P.M., _Recursion operator and bi-Hamiltonian structure for integrable multidimensional lattices,_ J. Math. Phys. 29 (1988) 1599–1603.

[*RSu 1997a] Ragnisco O., Suris Yu.B., _On the r-matrix structure of the Neumann system and its discretizations,_ in: Algebraic Aspects of Integrable Systems, 285–300, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 26, Birkhauser Boston (Boston, MA, 1997).

[*RSu 1997h] Ragnisco O., Suris Yu.B., _Integrable discretizations of the spin Ruijsenaars-Schneider models,_ J. Math. Phys. 38 (1997) 4680–4691.

[*RGS 1992] Ramani, A., Grammaticos, B., Satsuma J., _Integrability of multi-dimensional discrete systems,_ Phys. Lett A 169 (1992) 323–328.

[*Raz 1986] Razboinik S.I., _Vector extensions of modified Water Wave equations,_ Phys. Lett A 119 (1986) 283–286.

[RSh 1993] Retakh V.S., Shander V.N., _The Schwartz derivative for noncommutative differential algebras,_ Adv. Sov. Math. 17 (1993) 139–154.

[Ros 1978] Rosales R., _Exact solutions of some nonlinear evolution equations,_ Stud. Appl. Math 59 (1978) 117–151.

[Rud 1991] Rudin W., _ICM 90,_ Math. Intell. 13 N2 (1991) 6–7.

[Rui 1987] Ruijsenaars S.N.M., _Complete integrability of Relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities,_ Comm. Math. Phys. 110 (1987) 191–213.

[Rui 1990a] Ruijsenaars S.N.M., _Relativistic Toda systems,_ Comm. Math. Phys. 133 (1990) 217–247.

[Rui 1990b] Ruijsenaars S.N.M., _Finite-dimensional soliton systems,_ in [Kup 1990] 165–206.

[RSc 1986] Ruijsenaars S.N.M., Schneider H., _A new class of integrable systems and its relation to solitons,_ Ann. Phys. (NY) 170 (1986) 370–405.

[*Sai 1997] Saito S., _The correspondence between discrete surface and difference geometry of the KP-hierarchy,_ solv-int/9704007.

[*S-Y 2001a] Saito S., Saitoh N., Yamamoto J., Yoshida K., _Hamiltonian flows associated with discrete maps,_ nlin.SI/0108018.

[*S-Y 2001b] Saito S., Saitoh N., Yamamoto J., Yoshida K., _A characterization of discrete time soliton equations;_ nlin.SI/0108019.

[*SWa 2000] Sanders J.A., Wang J.P., _On recursion operators,_ Phys. D 149 (2001) 1–10.

[*San 1993] Santini P.M., _Integrable cellular automata and integrable algebraic and functional equations,_ in: Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations (Exeter, 1992) 229–240, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 413, Kluwer Acad. Publ. (Dordrecht, 1993).

[*Sat 1975] Satsuma J., *Higher conservation laws for the Nonlinear Schrödinger equation through Bäcklund transformation,* Progr. Theoret. Phys. 53 (1975) 585–586.

[*STA 1984] Satsuma J., Taha T.R., Ablowitz M.J., *On a Bäcklund transformation and scattering problem for the modified Intermediate Long Wave equation,* J. Math. Phys. 25 (1984) 900–904.

[*Sch 1904] Schur I., *Über vertauschbare lineare Differentialusdrücke,* Berliner Math. Ges. Sitzber. 3 (Archiv der Math. beilage (3) 8) (1904) 2–8.

[*Sha 1995] Shabat A.B., *Higher symmetries of two-dimensional lattices,* Phys. Lett A 200 (1995) 121–133.

[*Sha 1999] Shabat, A., *Dressing chains and lattices,* in: Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years After NEEDS '79 (Gallipoli, 1999) 331–342, World Sci. Publishing (River Edge, NJ, 2000).

[*SYa 1988] Shabat A.B., Yamilov R.I., *Lattice representations of integrable systems,* Phys. Lett A 130 (1988) 271–275.

[*SYa 1990] Шабат А.Б., Ямилов Р.И., *Симметрии нелинейных цепочек,* Алгебра и анализ 2 (1990) 183–208; Leningrad Math. J. 2 (1991) 377–400 (English).

[*SYa 1997] Shabat A.B., Yamilov R.I., *To a transformation theory of two-dimensional integrable systems,* Phys. Lett A 227 (1997) 15–23.

[*Ski 1987a] Sklyanin E.K., *Boundary conditions for integrable systems,* in: VIIIth International Congress on Mathematical Physics (Marseille, 1986) 402–408, World Sci. Publishing (Singapore, 1987).

[*Ski 1987b] Склянин Е.К., *Граничные условия для интегрируемых уравнений,* Функц. анализ 21:2 (1987) 86–87; 21 (1987) 164–166 (English).

[*Skl 1988] Sklyanin E.K., *Boundary conditions for integrable quantum systems,* J. Phys. A 21 (1988) 2375–2389.

[Sko 1993] Skolnikoff E.B., *The elusive transformation,* Princeton UP (Princeton 1993).

[*Sok 1987] Соколов В.В., *О структуре алгебры симметрий однополевого эволюционного уравнения,* Доклады АН СССР 294 (1987) 1065–1069; Soviet Math. Dokl. 35 (1987) 635–638 (English).

[*Sok 1988a] Соколов В.В., *Симметрии эволюционных уравнений,* Успехи мат. наук 43:5 (1988) 133–163; Russian Math. Surveys 43:5 (1988) 165–204 (English).

[*Sok 1988b] Соколов В.В., *Псевдосимметрии и дифференциальные подстановки,* Функц. анализ 22:2 (1988) 47–56; 121–129 (English).

[*SSv 1995] Sokolov V.V., Svinolupov S.I., *Deformations of nonassociative algebras and integrable differential equations,* in: Geometric and Algebraic Structures in Differential Equations, Acta Appl. Math. 41 (1995) 323–339.

[*SWo 2001] Sokolov V.V., Wolf T., *Classification of integrable polynomial vector evolution equations,* J. Phys. A 34 (2001) 11139–11148.

[Sto 1992] Stove D., *The sex-mad prime numbers,* The American Scholar (Winter 1992) 67–78.

[*Str 2000] Strachan I.A.B., *Jordan manifolds and dispersionless KdV equations,* J. of Nonl. Math. Phys. 7 (2000) 495–510.

[*Str 2001] Strachan I.A.B., *Deformations of dispersionless KdV hierarchies,* Lett. Math. Phys. 58 (2001) 129–140.

[Str 1991] Stratton R.L., *The dynamics of flight,* Mockingbird Square (Wilmington, 1991).

[Sur 1990] Suris Y.B., *Discrete-time generalized Toda lattices: complete integrability and relations with relativistic Toda lattices,* Phys. Lett. A 145 (1990) 113–119.

[Sur 1991] Сурис Ю.Б., *Обобщенные цепочки Тоды с дискретным временем,* Алгебра и анализ 2 (1990) 339–352; Leningrad Math. J. 2 (1991) 141–157 (English).

[*Sur 1991a] Suris Yu.B., *Algebraic structure of discrete-time and relativistic Toda lattices,* Phys. Lett A 156 (1991) 467–474.

[*Sur 1993a] Suris Yu.B., *On the bi-Hamiltonian structure of Toda and relativistic Toda lattices,* Phys. Lett A 180 (1993) 419–429.

[*Sur 1993b] Suris Yu.B., *On the algebraic structure of the Bruschi-Ragnisco lattice,* Phys. Lett A 179 (1993) 403–406.

[*Sur 1994a] Suris Yu.B., *A discrete-time Garnier system,* Phys. Lett A 189 (1994) 281–289.

[*Sur 1994b] Suris Yu.B., *On the r-matrix interpretation of Bogoyavlensky lattices,* Phys. Lett A 188 (1994) 256–262.

[*Sur 1994c] Suris Yu.B., *A family of integrable symplectic standard-like maps related to symmetric spaces,* Phys. Lett A 192 (1994) 9–16.

[*Sur 1995] Suris Yu.B., *Bi-Hamiltonian structure of the qd algorithm and new discretizations of the Toda lattice,* Phys. Lett A 206 (1995) 153–161.

[Sur 1996a] Suris Y.B., *A discrete-time relativistic Toda lattice,* J. Phys. A 29 (1996) 451–465.

[Sur 1996b] Suris Y.B., *Integrable discretizations of the Bogoyavlensky lattices,* J. Math. Phys. 37 (1996) 3982–3996.

[Sur 1997a] Suris Y.B., *A note on an integrable discretization of the nonlinear Schrödinger equations,* Inv. Prob. 13 (1997) 1121–1136.

[Sur 1997b] Suris Y.B., *Integrable discretization for the lattice systems: local equations of motion and their Hamiltonian properties,* solv-int/9709005.

[*Sur 1997c] Suris Yu.B., *On some integrable systems related to the Toda lattice,* J. Phys. A 30 (1997) 2235–2249.

[*Sur 1997d] Suris Yu.B., *New integrable systems related to the relativistic Toda lattice,* J. Phys. A *30* (1997) 1745–1761.

[*Sur 1997e] Suris Yu.B., *On an integrable discretization of the modified Korteweg-de Vries equation,* Phys. Lett A 234 (1997) 91–102.

[*Sur 1997f] Suris Yu.B., *Nonlocal quadratic Poisson algebras, monodromy map, and Bogoyavlensky lattices,* J. Math. Phys. 38 (1997) 4179–4201.

[*Sur 1997g] Suris Yu.B., *Why is the Ruijsenaars-Schneider hierarchy governed by the same R-operator as the Calogero-Moser one?,* Phys. Lett A 225 (1997) 253–262.

[*Sur 1999a] Suris Yu.B., *Integrable discretizations for lattice system: local equations of motion and their Hamiltonian properties,* Rev. Math. Phys. 11 (1999) 727–822.

[*Sur 1999b] Suris Yu.B., *r-Matrix hierarchies, integrable lattice systems, and their integrable discretizations,* in: Symmetries and Integrability of Difference Eqnations (Canterbury, 1996) 79–94, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 255, Cambridge UP (Cambridge, 1999).

[*Sur 1999c] Suris Yu.B., *r-matrices for relativistic deformations of integrable systems,* J. of Nonl. Math. Phys. 6 (1999) 411–447.

[*Sur 1999d] Suris Yu.B., *Miura transformations for Toda-type integrable systems, with applications to the problem of integrable discretizations,* solv-int/9902003.

[*Sur 1999e] Suris Yu.B., *r-matrices and integrable discretizations,* in: Discrete Integrable Geometry and Physics, (Vienna, 1996) 157–207, Oxford Lecture Ser. Math. Appl. 16, Oxford UP (New York, 1999).

[*Sur 2000] Suris Yu.B., *The motion of a rigid body in a quadratic potential: an integrable discretization,* Internat. Math. Res. Notices (2000) 643–663.

[*Sur 2001a] Suris Yu.B., *Integrability of Adler's discretization of the Neumann system,* Phys. Lett A 279 (2001) 327–332.

[*Sur 2001b] Suris Yu.B., *Integrable discretizations of some cases of the rigid body dynamics,* J. of Nonl. Math. Phys. 8 (2001) 534–560.

[*SRa 1999] Suris Yu.B., Ragnisco O., *What is the relativistic Volterra lattice?*, Comm. Math. Phys. 200 (1999) 445–485.

[*Svi 1985] Свиволупов С.И., *Аналоги уравнения Бюргерса произвольного порядка,* Теор. и мат. физ. 65 (1985) 303–307; 1177–1180 (English).

[*Svi 1989] Svinolupov S.I., *On the analogues of the Burgers equation,* Phys. Lett A 135:1 (1989) 32–36.

[*Svi 1991] Свиволупов С.И., *Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега-де Фриза,* Теор. и мат. физ. 87:3 (1991) 391–403; 611–620 (English).

[*Svi 1992] Svinolupov S.I., *Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs,* Comm. Math. Phys. 143 (1992) 559–575.

[*Svi 1993] Свинолунов С.И., *Йордановы алгебры и интегрируемые системы,* Функц. анализ 27:4 (1993) 40–53; 257–265 (English).

[*SSo 1982| Свинолунов С.И., Соколов В.В., *Эволюционные уравнения с нетривиальными законами сохранения,* Функц. анализ 16:4 (1982) 86–87; 317–319 (English).

[*SSo 1990] Свинолунов С.И., Сохолов В.В., *Слабые нелокальности в эволюционных уравнениях,* Мат. Заметки 48:6 (1990) 91–97; 1234–1239 (English).

[*SSo 1993] Свинолунов С.И., Соколов В.В., *Обобщение теоремы Ли и йордановы волчки,* Мат. Заметки 53:2 (1993) 122–125; 201–203 (English).

[*SSo 1994] Свинолунов С.И., Соколов В.В., *Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений,* Теор. и мат. физ. 100 (1994) 214–218; 959–962 (English).

[*SSo 1997] Свиволупов С.И., Соколои В.В., *Деформации йордановых тройных систем и интегрируемые уравнения,* Теор. и мат. физ. 108 (1996) 388–392; 1160–1163 (English).

[*SYa 1991] Svinolupov S.I., Yamilov R.I., *The multi-field Schrödinger lattices,* Phys. Lett. A 160 (1991) 548–552.

[*SYa 1994] Свинолупов С.И., Ямилов Р.И., *Явные преобразования Бэклунда для многополевых уравнений Шредингера. Йордановы обобщения цепочки Тоды,* Теор. и мат. физ. 98 (1994) 207–219; 139–146 (English).

[Swa 1985] Swaszek P. (ed.), *Quantization,* VNR (New York, 1985).

[TAb 1984] Taha T.R., Ablowitz M.J., *Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations*, J. Comp. Phys. 55 (1984) 192–202; 203–230; 231–253.

[*Tak 1992] Takahashi D., *On a fully discrete soliton system*, in: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, (Baia Verde, 1991) 245–249, World Sci. Publishing (River Edge, NJ, 1992).

[*TMa 1995] Takahashi D., Matsukidaira J., *On discrete soliton equations related to cellular automata*, Phys. Lett A 209 (1995) 184–188.

[*TMa 1997] Takahashi D., Matsukidaira J., *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A 30 (1997) L733–L739.

[*TSa 1990] Takahashi D., Satsuma J., *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan 59 (1990) 3514–3519.

[Tau 1962] Taussky O., *Ideal matrices*. I, Archiv der Math. 13 (1962) 275–282.

[*TNS 1999] Tokihiro T., Nagai A., Satsuma J., *Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization*, Inverse Problems 15 (1999) 1639–1662.

[*T-S 1996] Tokihiro T., Takahashi D., Matsukidaira J., Satsuma J., *From soliton equations to integrable automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 3247–3250.

[*TTS 1996] Torii M., Takahashi D., Satsuma J., *Combinatorial representation of invariants of a soliton cellular automaton*, Phys. D 92 (1996) 209–220.

[*Tsi 1998] Tsiganov A.V., *Dynamical boundary conditions for integrable lattices*, J. Phys. A 31 (1998) 8049–8061.

[*Tsi 2001a] Tsiganov A.V., *The Maupertuis principle and canonical transformations of the extended phase space*, J. of Nonl. Math. Phys. 8 (2001) 157–182.

[*Tsi 2001b] Tsiganov A.V., *Change of the time for the Toda lattice*, in: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (Kolimbary, 1999) J. of Nonl. Math. Phys. 8 (2001) suppl., 278–282.

[*THi 1998] Tsujimoto S., Hirota R., *Ultradiscrete KdV equation*, J. Phys. Soc. Japan 67 (1998) 1809–1810.

[Ver 1979] Verdier J.-L., *Equations differentielles algebriques*, Sem. Bourbaki 1977-78, Expose 512. Springer Lect. Notes Math. 710 (1979) 101–122.

[Ves 1988] Веселов А.П., *Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы*, Функц. анализ 22:2 (1988) 1–13; 83–93 (English).

[Ves 1991a] Веселов А.П., *Интегрируемые лагранжевы соответствия и факторизация матричных многочленов*, Функц. анализ 25:2 (1991) 38–49; 112–122 (English).

[Ves 1991b] Веселов А.П., *Интегрируемые отображения*, Успехи Мат. Наук 46:5 (1991) 3–45; Russ. Math. Surv. 1–51 (English).

[WKa 1974] Wadati M., Kamijo T., *On the extension of Inverse Scattering Method*, Progr. Theor. Phys. 52 (1974) 397–414.

[WSa 1980a] Wadati M., Sawada K., *New representations of the soliton solution for the Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Japan 48 (1980) 312–318.

[Wsa 1980b] Wadati M., Sawada K., *Application of the trace method to the modified Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Jap. 48 (1980) 319–325.

[*WTC 1983] Weiss J., Tabor M., Carnevale G., *The Painlevé property for partial differential equations,* J. Math. Phys. 24 (1983) 522–526.

[Wil 1979] Wilson G., *Commuting flows and conservation laws for Lax equations,* Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 86 (1979) 131–143.

[*Wil 1980] Wilson G., *Hamiltonian and algebro-geometric integrals of stationary equations of KdV type,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87 (1980) 295–305.

[Wil 1981] Wilson G., *On two constructions of conservation laws for Lax equations,* Quart. J. Math. Oxford (2) 32 (1981) 491–512.

[*Wil 1988] Wilson G., *On the quasi-Hamiltonian formalism of the KdV equation,* Phys. Lett A 132 (1988) 445–450.

[*Wil 1991] Wilson G., *On antipleetie pairs in the Hamiltonian formalism of evolution equations,* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 42 (1991) 227–256.

[*Yam 2002] Yamamoto J.-i., *Möbius symmetry of discrete time soliton equations,* nlin.SI/0203050.

[*Yam 1990] Ямилов Р.И., *Обратимые замены переменных порожденные преобразованиями Бэклунда,* Теор. и мат. физ. 85 (1990) 368–375; 1269–1275 (English).

[*Yam 1993] Yamilov R.I., *On the construction of Miura type transformations by others of this kind,* Phys. Lett A 173 (1993) 53–57.

[*Yam 1994] Yamilov R.I., *Construction scheme for discrete Miura transformations,* J. Phys. A 27 (1994) 6839–6851.

[*YTo 2001] Yura F., Tokihiro T., *On a periodic soliton cellular automaton,* nlin.SI/0112041.

[*Xio 1996] Xiong C.S., *The generalized KP hierarchy,* Lett. Math. Phys. 36 (1996) 223–229; hep-th/9211098.

[*Z-F 1991] Zhang H., Tu G.Z., Oevel W., Fuchssteiner B., *Symmetries, conserved quantities, and hierarchies for some lattice systems with soliton structure,* J. Math. Phys. 32 (1991) 1908–1918.

Предметный указатель/Обозначения

> Блажен Иов, которому не надо было писать аннотации к своим стенаниям!
>
> Сиоран

(Ссылки даются на части, главы, разделы, формулы)

R'	расширенне R 4; 5; 10; 11
$\bar{R}$	ассоциативное кольцо A3
$\bar{R}'$	расширенне $\bar{R}$ A3
$R_{(\cdot)}$	базнсные переменные МКП 12.2; 13.2
$\widehat{R}_{(\cdot)}$	оператор правого умножении на $(\cdot)$ A–D
Res	вычет 1.1; 4.5; 9.1; 10.4
$r_{(\cdot)}$	базнсные переменные КП 12.1
S	отображение релятивистского символа 7.1; 15.1,15.6
S	производящая функция 17.2; 18.9; A4.4
T	тензорное поле A4.1
u	переменная 2.4
u	переменная гидродинамнческой формы 14
V	потенциальная переменная 3.9; 9.5
v	переменная гидродинамнческой формы 14
W	одевающая переменная 2.7; 3.2; 9.4
W	потенциальная нeременная 3.9
$w_{(\cdot)}$	переменные МКП 2.2,2.3
$\boldsymbol{X}$	зволюционное векторное поле A–D
$\boldsymbol{X}_{(\cdot)}$	гамильтоиово векторное поле с гамильтонианом $(\cdot)$ 5; 11
$\boldsymbol{Y}$	зволюционное векторное поле 5; 11

α	КП параметр сопряжения C
β	МКП параметр сопряжения C
Γ	размер щелн 19.6,9,10
Γ	группа градуировки 3.5
Γ	параметр A1
γ	параметр сонряженни МКП C
γ	размер щели B; C
γ	диффереицирование A4.1
Δ	автоморфнзм/сдвиг B; C
δ	оператор Эйлера-Лагранжа 4; 10; A3
$\widehat{\delta}$	проекция 4; 10; A3
∂	дифференцирование 1.1; 9.1; 10
$\partial_{(\cdot)}$	зволюционное дифференцирование порожденное $(\cdot)$ A–C
∂_s	одно из m коммутирующих днфференцирований 4; 10; A3
$\frac{\partial^+(\cdot)}{\partial(\cdot\cdot)}$	специальная нроизводная 4; 10
ε	парамегр релятивистской деформации 7.1; 15
ε	парамегр деформации A2; A5.2
ζ	формальный автоморфнзм B; C
Λ	$L^{-1}\zeta$ 6.6; 12.6; 14.6, 14.7; 17.4
$\bar{\Lambda}$	$\mathcal{L}^{-1}\zeta$ 6.6; 12.6; 14.6, 14.7; 17.4
ν	мультииидекс 4; 10; A3
$\bar{\nu}$	мультииидекс 4; 10; A3
ξ	формальное дифференцирование A
τ	одевающая переменная 9.4
τ	специальный гомоморфизм 4; 10
τ	переменная (13.1.29)
Φ	гомоморфизм A–D
φ_i	отображение факторизацин 9.9

S.D.G.

Борис А. Купершмидт

КП ИЛИ мКП: НЕКОММУТАТИВНАЯ МАТЕМАТИКА ЛАГРАНЖЕВЫХ, ГАМИЛЬТОНОВЫХ И ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор З. Ю. Соболева

Подписано в печать 14.06.02. Формат $70 \times 100\frac{1}{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 50,7. Уч. изд. л. 50,13.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная №1.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru