

УДК 519.2
К47
ББК 22.171



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 01-05-78005*

Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика (Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения). — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 528 с. — ISBN 5-9221-0186-2.

На основе функционального подхода излагается теория стохастических уравнений (обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, краевые задачи и интегральные уравнения). Развитый подход позволяет получить точное решение стохастических задач для ряда моделей флуктуирующих параметров (телеграфный, обобщенный телеграфный процессы, марковские процессы с конечным числом состояний, гауссовский марковский процесс и функции от этих процессов). Рассматриваются также и асимптотические методы анализа стохастических динамических систем, такие, как приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля), диффузионное приближение и описание на основе этих методов когерентных явлений в стохастических динамических системах (кластеризации частиц и пассивной примеси в случайном поле скоростей, динамической локализации плоских волн в слоистых случайных средах, образование каустической структуры волнового поля в многомерных случайных средах).

Книга предназначена для научных работников, специализирующихся в области гидродинамики, акустики, радиофизики, теоретической и математической физики, прикладной математике, имеющих дело со стохастическими динамическими системами, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

Монография подготовлена при поддержке РФФИ (проекты 99-05-64350, 00-15-98608, 01-05-64042).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	11
 I. Динамическое описание стохастических систем	
Глава 1. Примеры динамических систем, формулировка задач и особенности поведения в отдельных реализациях их решений .	18
1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)	18
1.1.1. Частица в поле случайных скоростей (18). 1.1.2. Частица в поле случайных скоростей (18). 1.1.3. Частица в поле случайных внешних сил (24). 1.1.4. Системы с сингулярным поведением (25). 1.1.5. Осциллятор с переменной случайной частотой (стохастический параметрический резонанс) (26).	
1.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (краевые задачи)	26
1.2.1. Плоские волны в слоистых средах (падение волны на слой среды) (26). 1.2.2. Плоские волны в слоистых средах (источник внутри слоя среды) (33). 1.2.3. Плоские волны в слоистых средах (двухслойная модель среды) (35).	
1.3. Уравнения в частных производных первого порядка	36
1.3.1. Линейные уравнения с производными первого порядка (пассивная примесь в случайном поле скоростей) (36). 1.3.2. Квазилинейные уравнения (40). 1.3.3. Краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (42). 1.3.4. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка (43).	
1.4. Уравнения в частных производных старшего порядка	44
1.4.1. Уравнение Гельмгольца (краевая задача) и параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах) (44). 1.4.2. Уравнение Навье–Стокса (случайные силы в гидродинамической теории турбулентности) (50). 1.4.3. Уравнения геофизической гидродинамики (52).	
1.5. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнения и начальных условий	53
1.5.1. Принцип динамической причинности (53). 1.5.2. Зависимость решения задачи от начального условия (54).	

Глава 2. Индикаторная функция и уравнение Лиувилля	56
2.6. Обыкновенные дифференциальные уравнения	56
2.7. Уравнения в частных производных первого порядка	57
2.7.1. Случай линейного уравнения (57). 2.7.2. Случай квазилинейного уравнения (60). 2.7.3. Общий случай нелинейного уравнения (61).	
2.8. Уравнения в частных производных высшего порядка	62
2.8.1. Параболическое уравнение квазиоптики (62). 2.8.2. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности (63).	

II. Стохастические уравнения

Глава 3. Случайные величины, процессы и поля	66
3.1. Случайные величины и их характеристики	66
3.2. Случайные процессы, поля и их характеристики	71
3.2.1. Общие замечания (71). 3.2.2. Статистическая топография случайных процессов и полей (74). 3.2.3. Гауссов случайный процесс (77). 3.2.4. Разрывные случайные процессы (78).	
3.3. Марковские процессы	86
3.3.1. Общие свойства (86). 3.3.2. Характеристический функционал марковского процесса (94).	
3.4. Расщепление корреляций	97
3.4.1. Общие соотношения (97). 3.4.2. Гауссов процесс (100). 3.4.3. Пуассоновский процесс (102). 3.4.4. Телеграфный случайный процесс (103). 3.4.5. Обобщенный телеграфный процесс (107). 3.4.6. Марковские процессы общего типа (108).	
3.5. Дельта-коррелированные случайные процессы	112
3.5.1. Асимптотический смысл дельта-коррелированных процессов и полей (115).	

Глава 4. Общие подходы к стохастическим динамическим системам	121
4.6. Обыкновенные дифференциальные уравнения	121
4.7. Уравнения в частных производных	125
4.7.1. Перенос пассивной примеси в случайном поле скоростей (126). 4.7.2. Уравнение квазиоптики (127). 4.7.3. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности (129).	
4.8. Стохастические интегральные уравнения (методы квантовой теории поля в динамике стохастических систем)	130
4.8.1. Линейные интегральные уравнения (131). 4.8.2. Нелинейные интегральные уравнения (138).	
4.9. Динамические системы, допускающие полный статистический анализ	144

4.9.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (144).	
4.9.2. Примеры уравнений в частных производных (148).	
4.10. Дельта-коррелированные процессы и поля	150
4.10.1. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение (152).	
4.10.2. Линейное операторное уравнение (155).	
4.10.3. Уравнения в частных производных (163).	
Глава 5. Стохастические уравнения с марковскими флуктуациями параметров	175
5.11. Телеграфный случайный процесс	177
5.11.1. Система линейных операторных уравнений (178).	
5.11.2. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение (182).	
5.11.3. Частица в одномерном потенциальном поле (184).	
5.11.4. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка (185).	
5.11.5. Статистическая интерпретация телеграфного уравнения (186).	
5.12. Обобщенный телеграфный случайный процесс	187
5.12.1. Стохастическое линейное уравнение (188).	
5.12.2. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение (192).	
5.12.3. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка (193).	
5.13. Гауссовы марковские процессы.	195
5.13.1. Стохастическое линейное уравнение (196).	
5.13.2. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка (196).	
5.13.3. Квадрат гауссового марковского процесса (199).	
5.14. Марковские процессы с конечным числом состояний	200
5.14.1. Процесс с двумя состояниями (201).	
5.15. Стохастические причинные интегральные уравнения	202
5.15.1. Телеграфный случайный процесс (204).	
5.15.2. Обобщенный телеграфный случайный процесс (205).	
5.15.3. Гауссов марковский процесс (207).	

III. Асимптотические и приближенные методы анализа стохастических систем

Глава 6. Приближение дельта-коррелированного во времени гауссового случайного поля (обыкновенные дифференциальные уравнения)	213
6.1. Уравнение Фоккера–Планка	213
6.2. Плотность вероятностей перехода	216
6.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка	218
6.3.1. Уравнение Ланжевена (219).	
6.4. О методах решения и анализа уравнения Фоккера–Планка . .	222

6.4.1. Система линейных уравнений (222). 6.4.2. Интегральные преобразования (232). 6.4.3. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка (234). 6.4.4. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (статистическое описание явления переброса) (239). 6.4.5. Асимптотические и приближенные методы решения уравнения Фоккера–Планка (246).

Глава 7. Приближение дельта-коррелированного во времени гауссового случайного поля (интегральные причинные уравнения)	253
7.5. Причинное во времени интегральное уравнение	254
7.6. Статистическое усреднение	254
Глава 8. Диффузионное приближение	259

IV. Когерентные явления в стохастических динамических системах

Глава 9. Кластеризация и диффузия частиц и пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках	267
9.1. Общие замечания	267
9.2. Статистический анализ	274
9.2.1. Лагранжево описание (диффузия частиц) (275). 9.2.2. Эйлерово описание (282).	
9.3. Учет дополнительных факторов	289
9.3.1. Плоско-параллельный средний поток (289). 9.3.2. Учет молекулярной диффузии (290). 9.3.3. Учет конечности временного радиуса корреляции (294).	
Глава 10. Локализация плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах	309
10.4. Статистическое описание волнового поля на границах слоя среды	313
10.4.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны (313). 10.4.2. Источник внутри среды (323). 10.4.3. Статистическая локализация (324). 10.4.4. Диффузионное приближение (325).	
10.5. Статистическое описание волнового поля внутри случайно-неоднородной среды (статистическая теория переноса излучения)	331
10.5.1. Нормальное падение волны на слой случайно-неоднородной среды (331). 10.5.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды (345). 10.5.3. Численное моделирование (353).	
10.6. Многомерные волновые задачи в слоистых случайных средах	360

10.6.1. Нестационарные задачи (360).	10.6.2. Точечный источник в слоистой случайной среде (367).	
10.7. Двухслойная модель среды		373
10.7.1. Постановка краевых задач (373).	10.7.2. Статистический анализ (377).	
Глава 11. Распространение волн в случайно-неоднородных средах		383
11.8. Метод стохастического уравнения		383
11.8.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия (383).	11.8.2. Приближение дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды (386).	
11.8.3. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды и диффузионное приближение для волнового поля (397).	11.8.4. Амплитудно-фазовые флуктуаций волнового поля (метод плавных возмущений) (405).	
11.9. Геометрическая оптика в случайно-неоднородной среде		411
11.9.1. Диффузия лучей в случайно-неоднородной среде (лагранжево описание) (411).	11.9.2. Возникновение каустик в случайно-неоднородной среде (415).	
11.9.3. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (эйлерово описание) (421).		
11.10. Континуальная запись решения задачи		427
11.10.1. Статистическое описание волнового поля (431).	11.10.2. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны (434).	
11.10.3. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде (444).		
Глава 12. Некоторые вопросы статистической гидродинамики .		452
12.11. О квазиупругих свойствах однородной изотропной и стационарной несжимаемой турбулентной среды		453
12.12. Излучение звука вихревыми движениями		457
12.12.1. Излучение звука вихревыми нитями (458).	12.12.2. Излучение звука вихревыми кольцами (461).	
V. Приложения		
Приложение А. Вариационные (функциональные) производные		467
Приложение Б. Фундаментальные решения волновых задач в свободном пространстве и в слоистых средах		472
Б.1. Случай свободного пространства		472
Б.2. Случай слоистой среды		475

Приложение В. Метод погружения в краевых волновых задачах	479
В.3. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	480
В.4. Стационарные краевые волновые задачи	483
В.4.1. Одномерные стационарные краевые волновые задачи (483).	
В.4.2. Стационарная многомерная краевая задача (498).	
В.5. Одномерная нестационарная краевая волновая задача	506
В.5.1. Случай нестационарной среды (506). В.5.2. Стационарная среда (511).	
Список литературы	514

Соне Клячкиной посвящается

... Хотел бы вас предостеречь я в отношении сей науки — то вовсе не простая штука себя с разгона не вовлечь в пустые преобразования: не разобравшись в основаниях, тут даже индексы не просто различать... А в общем, символ — вот что важно! Владея символами, можете отважно пускаться в изысканья в мире формул новых.
Мефистофель (об алгебре)

Курт Лассвиги, «Прост!»¹

Предисловие

Статистические задачи занимают значительное место в различных областях физики. Если даже не говорить о задачах, традиционно относящихся к статистической физике, то имеется множество вопросов, в которых мы сталкиваемся с необходимостью учета флуктуационных эффектов. Хотя причины, вызывающие флуктуации, совершенно различны в различных задачах (это могут быть тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т. д.), методы их теоретического рассмотрения часто очень схожи. При этом в ряде случаев статистическую природу самих флуктуаций можно считать известной (либо из физических соображений, либо из модельной постановки задачи), а сами физические процессы можно описывать дифференциальными, интегро-дифференциальными или интегральными уравнениями.

В настоящее время мощным аппаратом, позволяющим решать сложные статистические задачи, является *теория марковских случайных процессов и процессов диффузионного типа*, возникшая на основе *теории броуновского движения*. Чисто математическим аспектам этой теории и ее конкретным приложениям посвящена огромная научная и учебная литература (см., например, [81]), и в данной книге подобные вопросы обсуждаться не будут.

Мы будем рассматривать статистическую теорию динамических и волновых систем с флуктуирующими параметрами, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, интегро-дифференциальными и интегральными уравнениями. Основная задача заключается в получении замкнутых уравнений для статистических характеристик таких систем и исследовании их решений с максимально возможной полнотой.

Отметим, что волновые задачи зачастую являются краевыми задачами. В этих случаях, используя метод погружения, можно переформулировать их в задачи с начальными условиями, что существенно упрощает анализ статистических проблем [41].

Наиболее подробно рассматриваются примеры динамических систем, в которых флуктуирующие параметры являются гауссовыми случайными процессами (полями), хотя в книге и излагается общая теория, справедливая для произвольной природы флуктуирующих параметров.

¹) Русский перевод в книге: *Лицман В.* Веселое и занимательное о числах и фигурах. — М.: Физматгиз, 1963. С. 64.

Цель настоящей книги — показать, как различные физические задачи, описываемые стохастическими уравнениями, могут быть решены на основе общего подхода. При этом выясняются интересные аналогии между весьма различными физическими задачами.

Примеры конкретных физических систем, рассмотренные ниже, в основном заимствованы из статистической гидродинамики, статистической радиофизики и акустики, что связано с научными интересами автора. Однако аналогичные задачи и методы их решения возникают и в физике плазмы, физике твердого тела, магнитной гидродинамике и т. д.

В стохастических задачах с флуктуирующими параметрами переменными являются функции. Поэтому естественно для их анализа использовать функциональные методы. Мы будем использовать *функциональный метод*, впервые предложенный в работе Е. А. Новикова [70] для гауссовых флуктуаций параметров в теории турбулентности и развитый в монографиях автора [38, 40, 41, 155] для общего случая динамических систем и произвольной природы флуктуирующих параметров.

Однако лишь для небольшого числа конкретных динамических систем удастся получить конечные результаты в общем виде. Более продуктивным оказывается использование асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамических задач по малому параметру. Последний по существу является отношением времени корреляции случайного воздействия ко времени наблюдения или другим характерным временным масштабам задачи (в ряде случаев это будут не временные, а пространственные масштабы), по своей сути являющегося обобщением теории броуновского движения. Это так называемое *приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля)*. В теории броуновского движения этому приближению соответствует пренебрежение временем между случайными соударениями по сравнению со всеми другими временными масштабами.

Применительно к задачам о динамических системах, движение которых подчиняется обыкновенным дифференциальным стохастическим уравнениям с гауссовыми флуктуациями параметров, используемый метод приводит к марковскому характеру решения задачи, а соответствующее уравнение для плотности вероятностей перехода имеет вид *уравнения Фоккера–Планка*. В книге подробно анализируются методы анализа этого уравнения и краевых условий для него, его решения с помощью интегральных преобразований и его условия применимости. В более сложных задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, этот метод приводит к обобщенному уравнению типа Фоккера–Планка в вариационных производных для характеристического функционала решения задачи. Для динамических систем с негауссовыми флуктуациями параметров предлагаемый метод также приводит к марковскому характеру решения. Плотность вероятностей решения соответствующих динамических стохастических уравнений удовлетворяет при этом замкнутому операторному уравнению. Так, для случая систем с флуктуациями параметров, имеющими пуассоновский характер, получают интегро-дифференциальные уравнения типа *уравнения Колмогорова–Феллера*.

В физических работах, в которых используются уравнения Фоккера–Планка и подобные ему, они обычно выписываются на основе интуитивных соображений, а динамические уравнения привлекаются лишь для подсчета входящих в них коэффициентов. Такой подход, вообще говоря, непоследователен. Действительно, статистическая задача полностью определена динамическими уравнениями и предположениями о статистике случайных воздействий. При этом, например, уравнение Фоккера–Планка должно являться логическим следствием динамических уравнений и тех или иных предположений о характере случайных воздействий. Ясно, что далеко не во всех случаях решение задачи будет сводиться к уравнению Фоккера–Планка. Функциональный подход позволяет получить как уравнение Фоккера–Планка, исходя непосредственно из динамического уравнения задачи, так и условия его применимости.

Развитый функциональный подход позволяет также для определенного класса случайных процессов (марковские процессы телеграфного типа, гауссов марковский процесс и т. п.) получать замкнутые уравнения для плотности вероятностей решения задач и с учетом конечности времени корреляции случайных воздействий.

Для гауссовых флуктуаций параметров можно построить и более физичное приближение, чем приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля), так называемое *диффузионное приближение*, учитывающее конечность временного радиуса корреляции. В этом приближении решение задачи является марковским, а условие его применимости имеет прозрачный физический смысл — малость статистических эффектов на масштабах порядка временного радиуса корреляции флуктуирующих параметров. Все эти вопросы подробно обсуждаются в данной книге как с общих позиций, так и на примерах конкретных физических проблем.

В последнее время внимание как теоретиков, так и экспериментаторов привлекает вопрос о связи динамики усредненных статистических характеристик решения задачи с поведением решения в отдельных реализациях. Это особенно актуально для геофизических проблем, связанных с атмосферой и океаном, где, вообще говоря, отсутствует соответствующий ансамбль усреднения и экспериментаторы, как правило, имеют дело с отдельными реализациями.

Решение динамических задач для этих конкретных реализаций параметров среды практически безнадежно из-за чрезвычайной математической сложности задач. В то же время исследователей интересуют основные особенности протекающих явлений, без отвращения на частности. Поэтому очень привлекательной оказалась идея использовать хорошо развитый математический аппарат случайных процессов и полей, т. е. вместо отдельных реализаций исследуемых процессов рассматривать статистические средние по всему ансамблю возможных реализаций. В настоящее время, например, практически все задачи физики атмосферы и океана в той или иной степени основываются на статистическом анализе.

Введение случайности в параметрах среды порождает стохастичность в самих физических полях. Индивидуальные реализации, например, скалярных двумерных полей $\rho(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{R} = (x, y)$, напоминают сложный горный ландшафт со случайно распределенными пиками, провалами, хребтами

и перевалами. Обычно используемые методы статистического усреднения (т.е. вычисления средних типа среднего значения — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rangle$, пространственно-временной корреляционной функции — $\langle \rho(\mathbf{R}, t) \rho(\mathbf{R}', t') \rangle$ и т.п., где через $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю реализаций случайных параметров) сглаживают качественные особенности отдельных реализаций, и, зачастую, полученные статистические характеристики не только не имеют ничего общего с поведением отдельных реализаций, но даже, на первый взгляд, им противоречат. Так, например, статистическое усреднение по всем реализациям делает поле средней концентрации пассивной примеси в случайном поле скоростей все более гладким, в то время как каждая его отдельная реализация, за счет перемешивания областей с существенно разной концентрацией, стремится стать все более изрезанной в пространстве.

Таким образом, статистические средние указанного типа обычно характеризуют «глобальные» пространственно-временные масштабы области, где осуществляются стохастические процессы, и ничего не говорят о деталях развития процессов внутри ее. А такие детали для данного примера существенно зависят от характера поля скоростей — является оно дивергентным или бездивергентным. Так, в первом случае, с вероятностью, равной единице, в отдельных реализациях образуются *кластеры* — компактные области повышенной концентрации примеси, окруженные обширными областями плотности низкой концентрации. Однако при этом все статистические моменты расстояния между частицами экспоненциально растут во времени, т.е. имеет место статистическое разбегание частиц в среднем.

Аналогично этому имеет место экспоненциальное разбегание и лучей в среднем при распространении волн в случайных средах, и в тоже время с вероятностью единица происходит образование *каустики* на конечных расстояниях. Другим примером, иллюстрирующим вышесказанное, является *динамическая локализация* плоских волн в слоистых случайно-неоднородных средах, заключающаяся в том, что реализации интенсивности волнового поля экспоненциально убывают вглубь среды с вероятностью, равной единице, при падении волны на полупространство такой среды и в тоже время все ее статистические моменты экспоненциально растут с расстоянием от границы среды.

Такие физические процессы и явления, происходящие с вероятностью единица, будем называть *когерентными* процессами и явлениями (см., например, [47]). Подобную «статистическую когерентность» можно рассматривать как некую организацию сложной динамической системы и выделение ее *статистически устойчивых характеристик* аналогично понятию *когерентности* как *самоорганизации* многокомпонентных систем, возникающих из хаотических взаимодействий их элементов (см., например, [201]). Получить же ответ на вопрос о том, происходит ли явление с вероятностью единица, вообще говоря, достаточно сложно. Однако для ряда задач в рамках простейших моделей флуктуирующих параметров это удастся сделать аналитическим анализом. В других случаях убедиться в этом можно с помощью численного моделирования или из анализа экспериментальных данных.

Полная статистика (например, полная совокупность всех n -точечных пространственно-временных моментных функций), безусловно, содержит всю информацию о динамической системе. Однако на практике удастся исследовать лишь некоторые простейшие статистические характеристики, связанные, главным образом, с одновременными и одноточечными распределениями вероятностей. Поэтому возникает вопрос — как, зная такого рода статистические характеристики и особенности системы, получить основные количественные и качественные особенности поведения отдельных ее реализаций?

Ответ на этот вопрос дают *методы статистической топографии*. На важность использования таких методов было обращено внимание еще в книге [31], где этот термин, по-видимому, и был впервые введен. Методы статистической топографии позволяют переосмыслить «философию» статистического анализа динамических стохастических систем, что может быть полезно и для экспериментаторов, планирующих статистическую обработку экспериментального материала. Все эти вопросы подробно обсуждаются в книге.

Несколько слов о структуре книги. Книга состоит из пяти частей.

Первую часть книги можно рассматривать как вводную. В ней рассмотрено несколько примеров типичных физических задач и обсуждаются особенности их решений в присутствии случайных возмущений параметров, определяющих их динамику. Более подробная постановка этих задач и их статистический анализ приведены в других частях книги.

Вторая часть книги посвящена общей теории статистического анализа динамических систем с флуктуирующими параметрами, описываемых как дифференциальными, так и интегральными уравнениями. Эта общая теория иллюстрируется конкретными примерами динамических систем.

Третья часть книги посвящена асимптотическим методам статистического анализа динамических систем, таким, как приближение дельта-коррелированного случайного процесса (поля) и диффузионное приближение.

Четвертая часть книги посвящена анализу конкретных физических проблем, связанных с когерентными явлениями (кластеризация и диффузия частиц и пассивной примеси в случайном поле скоростей, динамическая локализация при распространении плоских волн в слоистых случайных средах и образование каустической структуры волнового поля при распространении волн в случайных многомерных средах). Эти проблемы описываются как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных, и каждая из них распадается на большое множество отдельных задач, представляющих самостоятельный физический интерес.

Для того чтобы не загромождать книгу математическими деталями в пятой части приведены три приложения, содержащие подробный вывод некоторых математических формул, используемых в книге. Здесь:

- дается определение и некоторые правила вычислений с вариационными производными;

- обсуждаются свойства факторизации волнового поля в однородном пространстве и слоистых средах, позволяющие существенно упростить анализ статистических задач;

— обсуждается вывод уравнений метода погружения, позволяющего переформулировать краевые волновые задачи в задачи с начальными условиями по вспомогательным переменным.

Необходимо отметить, что количество работ, как чисто математических, так и физических, посвященных излагаемому материалу, исчисляется тысячами. Поэтому дать полную библиографию рассматриваемых вопросов физически невозможно. Ввиду этого я ограничиваюсь ссылками лишь на те работы, результаты которых непосредственно используются или обсуждаются в данной книге, а также на изданные за последнее время обзорные работы и книги, где содержится дополнительная библиография.

Часть I
ДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава 1

ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ И ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ В ОТДЕЛЬНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ ИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим несколько примеров динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного типа, и обсудим особенности поведения их решения в присутствии случайных возмущений параметров системы. Здесь мы ограничимся простейшими постановками задач. Более полные постановки задач будут даны далее в соответствующих разделах книги, посвященных их статистическому анализу.

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи с начальными условиями)

1.1.1. Частица в поле случайных скоростей. Частица в поле случайных скоростей в простейшем случае описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая. В общем случае поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как бездивергентную (соленоидальную, для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и дивергентную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие.

1.1.2. Частица в поле случайных скоростей. Остановимся на стохастических особенностях решения задачи (1.1) для системы частиц в отсутствии среднего потока ($\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$). С формальной точки зрения, исходя из уравнения (1.1), каждая частица движется независим образом. Однако если случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет конечный пространственный радиус корреляции l_{cor} , то частицы, расстояние между которыми меньше l_{cor} , находятся в общей зоне влияния случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и могут появиться новые коллективные особенности в динамике такой системы частиц. Для стационарного поля скоростей, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$, уравнение (1.1) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (1.2)$$

Отсюда ясно, что стационарные точки $\tilde{\mathbf{r}}$, в которых $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{r}}) = 0$, остаются неподвижными точками. При этом, в зависимости от того, являются они устойчивыми или неустойчивыми, они будут притягивать или отталкивать частицы, находящиеся в их окрестности. В силу случайности функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ положение точек $\tilde{\mathbf{r}}$ также случайно.

Аналогичная ситуация должна иметь место и в общем случае пространственно-временного случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Если какие-то точки $\tilde{\mathbf{r}}$ в течение достаточно большого времени остаются устойчивыми, то в отдельных реализациях случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в их окрестностях должны образовываться кластерные области частиц (т.е. компактные области повышенной концентрации частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах). Если же смена устойчивости этих точек на неустойчивость происходит достаточно быстро и частицы не успевают значительно перестроиться, то кластерных областей образовываться не будет.

Численное моделирование (см. работы [58, 208, 226]) показывает, что динамика системы частиц существенно различается в зависимости от того, является ли случайное поле скоростей бездивергентным или дивергентным. Так, на рис. 1, а для конкретной реализации бездивергентного стационарного во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ схематически изображена эволюция системы частиц (двумерный случай), равномерно расположенных в круге, в безразмерном времени, связанном со статистическими параметрами поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и частицы относительно равномерно заполняют область, ограниченную деформированным контуром. Возникает лишь сильная изрезанность фрактального характера этого контура. Для случая же дивергентного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ частицы, равномерно расположенные в квадрате в начальный момент времени, в процессе временной эволюции образуют кластерные области. Результаты численного моделирования для этого случая приведены на рис. 1, б. Подчеркнем, что образование кластеров — чисто кинематический эффект. Очевидно, что при усреднении по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, очевидно, такая особенность динамики частиц исчезает.

Увидеть, как происходит кластеризация частиц можно на простейшем примере [49], в котором случайное поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет структуру

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{v}(t)$ — случайный векторный процесс, а детерминированная функция

$$f(\mathbf{r}) = \sin 2(\mathbf{kr}) \quad (1.4)$$

является функцией одной переменной. Отметим, что такой вид функции $f(\mathbf{r})$ соответствует первому члену ряда разложения функции $f(\mathbf{r})$ по гармоническим составляющим. Такой ряд обычно используется при численном моделировании задачи [58, 226].

В этом случае уравнение (1.1) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)\sin 2(\mathbf{kr}), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0.$$

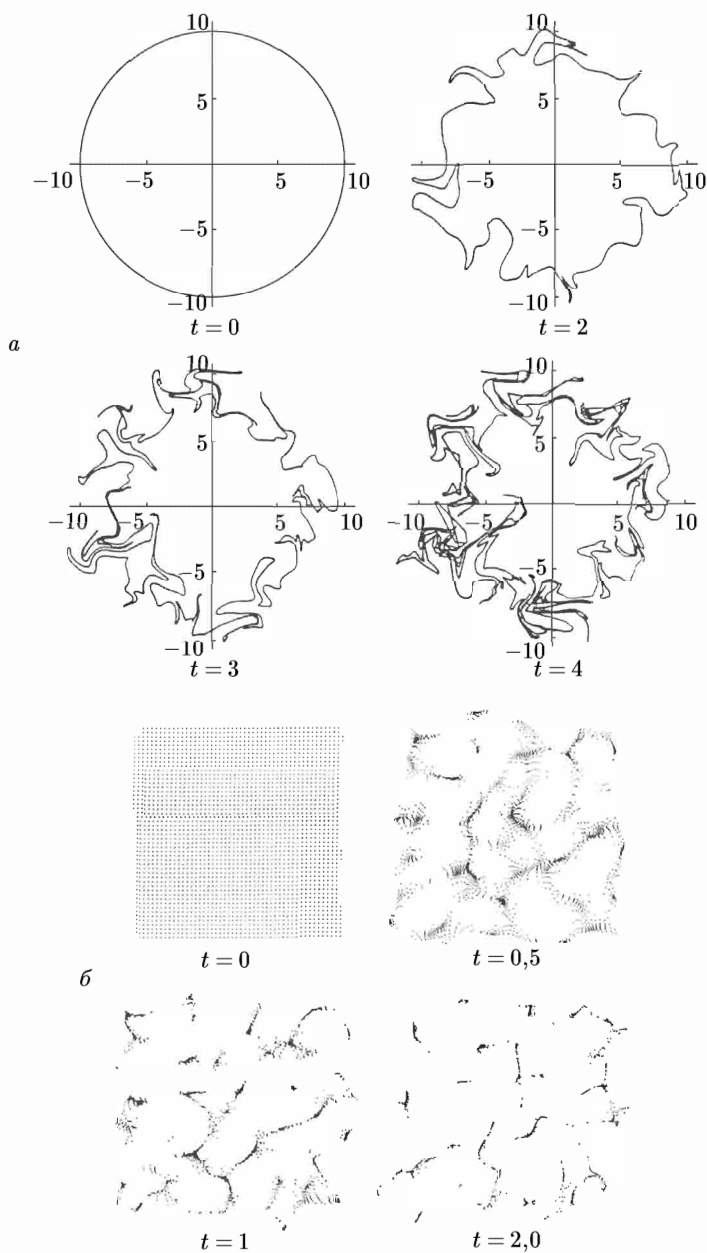


Рис. 1.1. Результаты численного моделирования диффузии системы частиц, описываемых уравнениями (1.2) в соленоидальном (*a*) и дивергентном (*б*) случайных полях скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Для такой модели движение частицы по направлениям вектора $\mathbf{k}$ и перпендикулярном ему расщепляется, и если выбрать ось x в направлении вектора $\mathbf{k}$, то уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= v_x(t) \sin(2kx), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{v}_R(t) \sin(2kx), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Решение первого уравнения (1.5) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{k} \arctan \left[e^{T(t)} \tan(kx_0) \right], \tag{1.6}$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau). \tag{1.7}$$

Учитывая равенство, вытекающее из (1.6),

$$\sin(2kx) = \sin(2kx_0) \frac{1}{e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0)},$$

последнее уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t | \mathbf{r}_0) = \sin(2kx_0) \frac{\mathbf{v}_R(t)}{e^{-T(t)} \cos^2(kx_0) + e^{T(t)} \sin^2(kx_0)}.$$

И, следовательно,

$$\mathbf{R}(t | \mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0) \int_0^t d\tau \frac{\mathbf{v}_R(\tau)}{e^{-T(\tau)} \cos^2(kx_0) + e^{T(\tau)} \sin^2(kx_0)}. \tag{1.8}$$

Таким образом, если начальное положение частицы x_0 такое, что

$$kx_0 = n\pi/2, \tag{1.9}$$

где $n = 0, \pm 1, \dots$, то частица будет неподвижной и $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{r}_0$.

Равенства (1.9) определяют в общем случае плоскости или в одномерном случае — точки. Они соответствуют нулям поля скоростей. Устойчивость этих точек, однако, зависит от знака функции $\mathbf{v}(t)$, который изменяется в процессе эволюции. В результате можно ожидать, что частицы будут сгущаться в окрестностях этих точек, если $v_x(t) \neq 0$, что и должно соответствовать кластеризации частиц. Для бездивергентного поля скорости, когда $v_x(t) = 0$, и, следовательно, $T(t) \equiv 0$,

$$x(t | x_0) \equiv x_0, \quad \mathbf{R}(t | \mathbf{r}_0) = \mathbf{R}_0 + \sin(2kx_0) \int_0^t d\tau \mathbf{v}_R(\tau),$$

т. е. никакой кластеризации не наблюдается.

На рис. 1.2, *а* представлен кусок реализации случайного процесса $T(t)$, полученный путем численного интегрирования равенства (1.7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$, используемый для

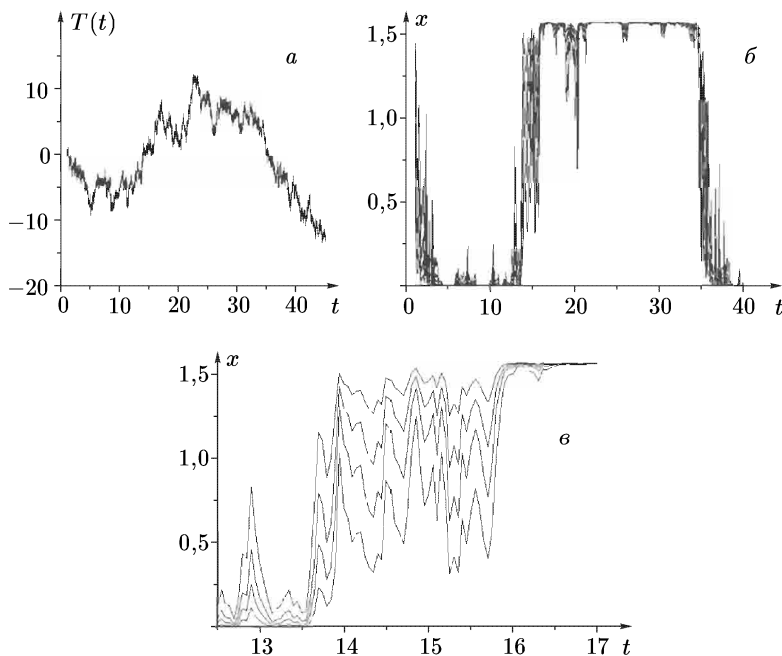


Рис. 1.2. Кусок реализации случайного процесса $T(t)$ (*а*), полученный путем численного интегрирования равенства (1.7) для одной реализации случайного процесса $v_x(t)$ и используемый для расчета временной эволюции x координат четырех частиц (*б*, *в*)

численного моделирования временной эволюции координат четырех частиц $x(t)$ ($x \in (0, \pi/2)$) с начальными координатами $x_0(i) = \frac{\pi i}{2 \cdot 5}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (рис. 1.2, *б*). Из рис. 1.2, *б* видно, что частицы в безразмерный момент времени $t \approx 4$ (см. [49]) образуют кластер в окрестности точки $x = 0$. Далее в момент времени $t \approx 16$ первоначальный кластер исчезает и образуется новый кластер в окрестности точки $x = \pi/2$. В момент времени $t \approx 40$ снова образуется кластер в окрестности точки $x = 0$ и т.д. При этом частицы в кластерах помнят свою предысторию и расходятся на значительные расстояния в переходных временных областях (рис. 1.2, *в*).

Таким образом видим, что в рассматриваемом примере кластер, как цельное образование, не переходит из одной области пространства в другую, а разрушается с последующим образованием нового. При этом время существования кластеров значительно больше, чем переходное время. По-видимому, это свойство конкретной рассматриваемой модели поля скоростей, и возникает оно из-за стационарности точек (1.9).

Что касается диффузии частиц по оси y , то в этом направлении образования кластеров не наблюдается.

Отметим, что впервые, по-видимому, такого рода кластеризация для системы частиц была обнаружена в работах [194–197], где в рамках простейших уравнений динамики атмосферы проводилось численное моделирование так называемого Еоле эксперимента. В рамках этого глобального эксперимента в 1970–1971 годах было запущено в Аргентине 500 баллонов постоянной плотности, которые распространялись по всему южному полушарию на высоте примерно в 12 км. На рис. 1.3 представлено распределение баллонов по южному полушарию на 105 сутки после начала численного моделирования этого процесса [196], из которого ясно видно, что баллоны концентрируются в группы, что и соответствует кластеризации. Результаты статистической обработки расположения баллонов можно найти, например, в работах [67, 124].

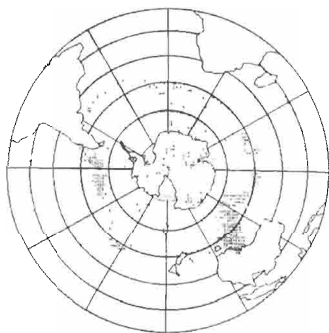


Рис. 1.3. Распределение баллонов в атмосфере через 105 суток после начала численного эксперимента

Остановимся теперь на другом стохастическом аспекте, связанном с динамическими уравнениями типа (1.1), а именно на *явлении переброса*, обусловленном случайными флуктуациями.

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(1 - x^2) + f(t), \quad x(0) = x_0; \quad \lambda > 0, \quad (1.10)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени. При отсутствии случайности ($f(t) \equiv 0$) решение уравнения (1.10) имеет два устойчивых стационарных состояния $x = \pm 1$ и одно неустойчивое состояние $x = 0$. В зависимости от начального условия решение уравнения (1.10) придет в одно из устойчивых состояний. Однако в присутствии малых случайных возмущений $f(t)$ динамическая система (1.10) сперва придет в окрестность одного из устойчивых состояний, а затем, по прошествии некоторого времени, будет переброшена в окрестность другого устойчивого состояния. Очевидно, что подобная ситуация может осуществляться и в более сложных случаях.

Рассмотрим в качестве примера простейшую систему гидродинамического типа, описываемую стохастической системой уравнений (см., например, [29])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_0(t) &= v_2^2(t) - v_1^2(t) - v_0(t) + R + f_0(t), \\ \frac{d}{dt}v_1(t) &= v_0(t)v_1(t) - v_1(t) + f_1(t), \\ \frac{d}{dt}v_2(t) &= -v_0(t)v_2(t) - v_2(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Эта система описывает движение триплета (гироскопа) с линейным изотропным трением, возбуждаемого силой, действующей на неустойчивую моду, имеющей как регулярную составляющую R , так и случайную $\mathbf{f}(t)$. Такая ситуация имеет место, например, при движении жидкости в эллипсоидальной полости.

В отсутствие случайных составляющих ($\mathbf{f}(t) = 0$) динамическая система (1.11) имеет стационарные решения, зависящие от параметра R — аналога числа Рейнольдса. При этом критическим значением является $R_{\text{cr}} = 1$.

При $R < 1$ имеется устойчивое стационарное решение

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_0 = R.$$

При $R > 1$ это решение становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям параметров и устанавливается новый стационарный режим

$$v_0 = 1, \quad v_2 = 0, \quad v_1 = \pm\sqrt{R-1}.$$

При этом имеется элемент случайности, так как величина v_1 может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от амплитуды малых возмущений.

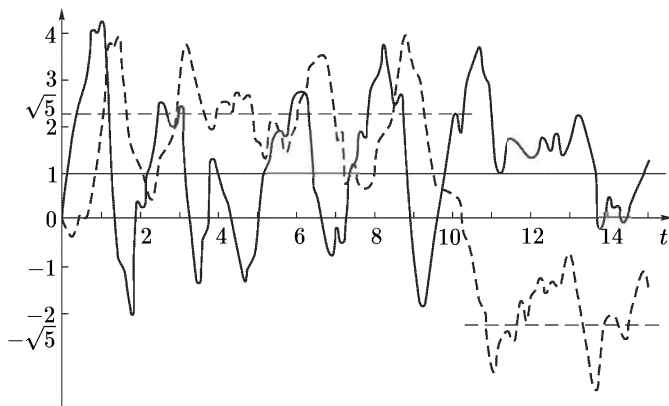


Рис. 1.4. Численное моделирование системы уравнений (1.11) для $R = 6$ и $\sigma^2 = 0,1$, иллюстрирующее явление переброса (сплошной линией изображена компонента $v_0(t)$, штриховой — $v_1(t)$)

При наличии случайных воздействий при $R > 1$ динамическая система (1.11) сперва придет в окрестность одного из устойчивых состояний, а затем, по прошествии некоторого времени, будет переброшена в окрестность другого устойчивого состояния. На рис. 1.4 приведены результаты численного моделирования этого явления для $R = 6$ и одной реализации случайного воздействия $\mathbf{f}(t)$, компоненты которого моделировались в виде гауссового случайного процесса.

1.1.3. Частица в поле случайных внешних сил. Система уравнений типа (1.1) также описывает динамику частицы в поле случайных внешних

сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. В простейшем случае динамика частицы при наличии линейного трения описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В детерминированном потенциальном поле динамика частицы при наличии линейного трения и случайных сил описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) - \frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

которая является простейшим частным случаем *гамильтоновых систем*. В статистических задачах уравнения типа (1.12), (1.13) широко используются для описания *броуновского движения* частиц.

1.1.4. Системы с сингулярным поведением. Рассмотрим простейший пример стохастической системы, возникающей в статистической теории волн и имеющей сингулярное поведение во времени:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \lambda > 0, \quad (1.14)$$

где $f(t)$ — случайная функция времени.

В отсутствие случайностей ($f(t) = 0$) решение уравнения (1.7) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\lambda(t - t_0)}, \quad t_0 = -\frac{1}{\lambda x_0}.$$

Если $x_0 > 0$, то $t_0 < 0$ и решение задачи $x(t)$ монотонно стремится к нулю с ростом времени. Если же $x_0 < 0$, то решение $x(t)$ обращается в $\{-\infty\}$ в течение конечного времени $t_0 = -1/\lambda x_0$, т.е. становится *сингулярным* и имеет *взрывной характер*. В этом случае влияние случайной силы $f(t)$ на динамику системы не существенно. Оно становится важным только в случае положительного значения x_0 . В этом случае решение задачи, слегка флуктуируя, уменьшается с ростом времени, оставаясь положительным. При достижении достаточно малого значения $x(t)$ оно будет «переброшено» под действием силы $f(t)$ в область отрицательных значений x и по прошествии некоторого конечного времени обратится в $\{-\infty\}$.

Таким образом, в стохастическом случае для любых значений величины x_0 решение задачи (1.14) имеет взрывной характер и обращается в $\{-\infty\}$

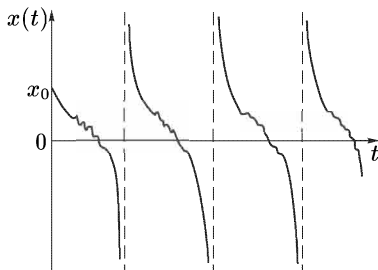


Рис. 1.5. Типичная реализация решения уравнения (1.14)

в течение конечного времени t_0 . Примерная реализация поведения решения задачи (1.14) $x(t)$ во времени для $t > t_0$ имеет как бы *квази-периодическую* структуру и схематически изображена на рис. 1.5.

1.1.5. Осциллятор с переменной случайной частотой (стохастический параметрический резонанс). Рассмотренные выше стохастические примеры соответствовали аддитивному включению случайных воздействий на динамику систем. Простейший нетривиальный пример мультипликативного воздействия (параметрического) можно проиллюстрировать на примере *стохастического параметрического резонанса*, описываемого уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) &= 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \frac{d}{dt}x(0) = v_0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $z(t)$ — случайная функция времени. Это уравнение возникает практически во всех областях физики. С физической точки зрения очевидно, что динамическая система (1.15) подвержена параметрическому возбуждению, так как случайный процесс $z(t)$ содержит гармонические компоненты всех частот, включая значения $2\omega_0/n$ ($n = 1, 2, \dots$), которые в точности соответствуют параметрическому резонансу в системе с периодической функцией $z(t)$ (например, *уравнение Матъе*).

1.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения (краевые задачи)

В предыдущем разделе мы рассмотрели несколько примеров динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Рассмотрим теперь простейшую линейную краевую задачу, а именно стационарную одномерную волновую задачу.

1.2.1. Плоские волны в слоистых средах (падение волны на слой среды). Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$. Плоская волна с единичной амплитудой $u_0(x) = e^{-ik(x-L)}$ падает на него из области $x > L$ (рис. 1.6, а). Волновое поле в слое неоднородной среды описывается *уравнением Гельмгольца*

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + k^2(x)u(x) = 0, \quad (1.16)$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)],$$

а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды. Вне слоя считаем, что $k(x) = k$, т. е. $\varepsilon(x) = 0$; внутри же слоя предполагаем, что $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(x)$ — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть $\gamma \ll 1$ описывает поглощение волны в среде.

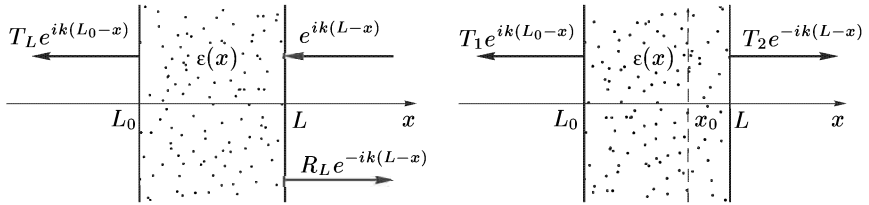


Рис. 1.6. Падение плоской волны на слой среды (а) и источник внутри среды (б)

В области $x > L$ волновое поле имеет структуру

$$u(x) = e^{-ik(x-L)} + R_L e^{ik(x-L)},$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения. В области $x < L_0$ волновое поле имеет структуру

$$u(x) = T_L e^{ik(L_0-x)},$$

где T_L — комплексный коэффициент прохождения. Краевыми условиями для уравнения (1.16) являются условия непрерывности функции и ее производной на границах слоя, которые можно записать в виде

$$u(L) + \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.17)$$

Таким образом, волновое поле в слое неоднородной среды описывается краевой задачей (1.16), (1.17). Само же динамическое уравнение (1.16) по внешнему виду совпадает с уравнением (1.15). Отметим, что в этом случае функция $\epsilon(x)$ разрывна на границах слоя и мы будем называть краевую задачу (1.16), (1.17) краевой задачей с несогласованными границами. Для таких задач рассеяние волны происходит не только на неоднородностях среды, но и на скачках функции $\epsilon(x)$ на границах слоя.

Если параметры среды $\epsilon_1(x)$ заданы статистически, то решение стохастической задачи (1.16), (1.17) состоит в нахождении статистических характеристик величин

$$R_L = u(L) - 1, \quad T_L = u(L_0),$$

связанных со значением поля на границах слоя, и интенсивности волнового поля,

$$I(x) = |u(x)|^2,$$

внутри неоднородной среды, что составляет предмет изучения *статистической теории переноса излучения*.

Отметим, что из уравнения (1.16) при $x < L$ следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx} S(x),$$

где плотность потока энергии $S(x)$ определяется равенством

$$S(x) = \frac{i}{2k} \left[u(x) \frac{d}{dx} u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) \right].$$

При этом, в силу краевых условий $S(L) = 1 - |R_L|^2$, $S(L_0) = |T_L|^2$.

Если затухание волны в среде отсутствует ($\gamma = 0$), то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1. \quad (1.18)$$

Остановимся на некоторых особенностях решения стохастической краевой задачи (1.16), (1.17). При отсутствии неоднородностей среды ($\varepsilon_1(x) = 0$) и для достаточно малого затухания γ интенсивность волнового поля слабо, экспоненциальным образом, затухает в глубь среды по закону

$$I(x) = |u(x)|^2 = e^{-k\gamma(L-x)}. \quad (1.19)$$

На рис. 1.7 приведены две реализации интенсивности волнового поля

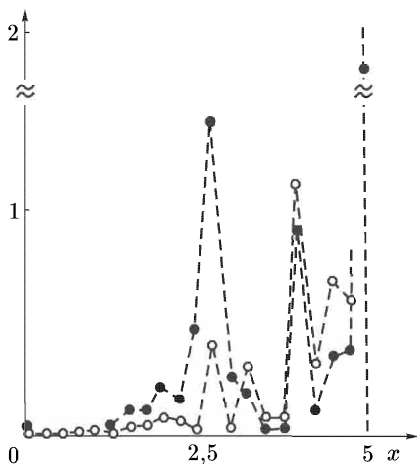


Рис. 1.7. Численное моделирование динамической локализации для двух реализаций неоднородностей среды

в достаточно толстом слое среды, соответствующие двум реализациям неоднородностей среды [92], полученные численным моделированием. Не останавливаясь на детальном описании параметров задачи, отметим только, что на этом рисунке явно просматривается тенденция резкого экспоненциального спада (с большими выбросами как в сторону увеличения величины интенсивности, так и к значениям, близким к нулю), обусловленная многократным переотражением волны в хаотически неоднородной среде (*динамическая локализация*). При этом параметр $\gamma \ll 1$ и, следовательно, влияние малого поглощения на динамическую локализацию не существенно.

Хорошо известно, что уравнение второго порядка (1.16) можно расщепить на два уравнения первого порядка, вводя новую функцию

$$\psi(x) = \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \ln u(x),$$

замкнутое уравнение для которой вытекает из уравнения (1.16):

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = ik [\psi^2(x) - 1 - \varepsilon(x)], \quad \psi(L_0) = 1. \quad (1.20)$$

Из краевого условия на границе ($x = L$), следует, что

$$u(L) = \frac{2}{1 + \psi(L)}$$

и, следовательно, коэффициент отражения определяется по решению уравнения (1.20) на основе равенства

$$R_L = \frac{1 - \psi(L)}{1 + \psi(L)}.$$

Введя новую функцию

$$R(x) = \frac{1 - \psi(x)}{1 + \psi(x)}, \quad \psi(x) = \frac{1 - R(x)}{1 + R(x)},$$

уравнение (1.20) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{d}{dx} R(x) = 2ikR(x) + \frac{i}{2k} \varepsilon(x) (1 + R(x))^2, \quad R(L_0) = 0, \quad (1.21)$$

решение которого при $x = L$ определяет коэффициент отражения, т. е.

$$R_L = R(L).$$

Волновое поле $u(x)$ внутри среды выражается при этом через функцию $R(x)$ с помощью равенства

$$u(x) = [1 + R(L)] \exp \left[ik \int_x^L d\xi \frac{1 - R(\xi)}{1 + R(\xi)} \right]. \quad (1.22)$$

Таким образом, традиционная схема решения задачи приведена на рис. 1.8, а. Сперва решается уравнение (1.21), а затем волновое поле восстанавливается с помощью формулы (1.22). Этот метод хорошо известен и называется *методом прогонки*. Однако он не пригоден для анализа статистических задач.

Волновое поле внутри среды может быть представлено также в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

$$\frac{d}{dx} u(x) = -ik[u_1(x) - u_2(x)],$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — комплексные *встречные волны*. Они связаны с волновым полем с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), & u_1(L) &= 1, \\ u_2(x) &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), & u_2(L_0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

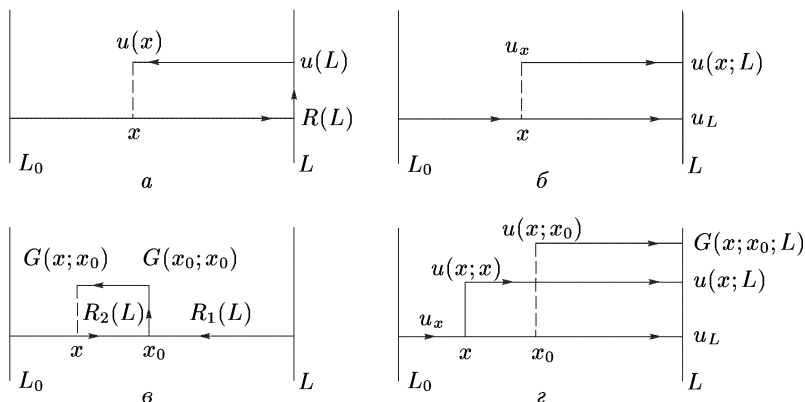


Рис. 1.8. Схема решения краевой задачи (1.16), (1.17) методом прогонки (а) и методом погружения (б); краевой задачи (1.32) методом прогонки (в) и методом погружения (г)

и, следовательно, краевую задачу (1.9), (1.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + ik \right) u_1(x) &= -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_1(L) = 1, \\ \left(\frac{d}{dx} - ik \right) u_2(x) &= -\frac{ik}{2} \varepsilon(x) [u_1(x) + u_2(x)], \quad u_2(L_0) = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Отметим, что в этом случае функция $R(x)$, введенная выше, связана с функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$ с помощью равенства

$$R(x) = \frac{u_2(x)}{u_1(x)}.$$

Краевую задачу (1.16), (1.17) с помощью *метода погружения* можно переформулировать в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру L — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая решение краевой задачи как функцию параметра [41, 155, 160]. Так коэффициент отражения R_L удовлетворяет при этом уравнению Рикати:

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (1.25)$$

совпадающему, естественно, с уравнением (1.24), а волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik u(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) u(x; L), \quad (1.26)$$

$$u(x; x) = 1 + R_x,$$

которое можно получить, например, дифференцируя выражение (1.22) по параметру L . Схема решения задачи в этом случае приведена на рис. 1.8, б.

Сравнивая эту схему со схемой решения задачи на основе метода прогонки (рис. 1.8, а), видим, что направление решения задачи меняется, и именно это обстоятельство и позволит далее построить статистическое описание решения стохастической задачи.

Из уравнения (1.25) вытекает уравнение для квадрата модуля коэффициента отражения $W_L = |R_L|^2$:

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) (1 - W_L), \quad W_{L_0} = 0. \quad (1.27)$$

Отметим, что если граница слоя L_0 является полностью отражающей границей, то начальным условием для уравнения (1.27) будет условие $W_{L_0} = 1$. В этом случае при отсутствии затухания (т. е. при $\gamma = 0$) падающая на слой волна полностью отражается этим слоем, т. е. $W_L = 1$, и, следовательно, коэффициент отражения имеет структуру $R_L = e^{i\varphi_L}$. Для фазы коэффициента отражения в этом случае из (1.25) вытекает динамическое уравнение

$$\frac{d}{dL} \varphi_L = 2k + k\varepsilon_1(L) (1 + \cos \varphi_L), \quad (1.28)$$

определяющее изменение фазы на всей оси значений $(-\infty, +\infty)$. В уравнение же для волнового поля (1.26) входят только тригонометрические функции от фазы коэффициента отражения. Поэтому желательно перейти к ее области значений $(-\pi, \pi)$. Это можно сделать, вводя новую функцию [62, 142, 160]

$$z_L = \tan(\varphi_L/2),$$

для которой получаем динамическое уравнение типа (1.14):

$$\frac{d}{dL} z_L = k (1 + z_L^2) + k\varepsilon_1(L),$$

имеющее сингулярный характер решения.

В общем случае произвольной границы L_0 для полупространства случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) при отсутствии затухания формально также имеется «стационарное», не зависящее от L , решение $W_L = 1$, соответствующее полному отражению падающей волны. Это решение действительно осуществляется в статистической задаче с вероятностью, равной единице [41, 155, 160].

Разделение на «встречные волны» (1.23) носит, конечно, условный характер и является математическим приемом, позволяющим расщепить уравнение второго порядка (1.16) на два уравнения первого порядка с простейшими краевыми условиями.

Если, в отличие от рассмотренной задачи, функция $k(x)$ непрерывна на границе $x = L$, т. е. волновое число в свободном полупространстве $x > L$ равно $k(L)$, то краевыми условиями для задачи (1.16), вместо условий (1.17), будут условия

$$u(L) + \frac{i}{k(L)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 2, \quad u(L_0) - \frac{i}{k(L_0)} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.29)$$

Краевую задачу (1.16), (1.29) будем называть задачей с *согласованной границей*. Для нее более удобно представить волновое поле в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

$$\frac{du(x)}{dx} = -ik(x)[u_1(x) - u_2(x)],$$

где теперь комплексные *встречные волны* — $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — связаны с волновым полем с помощью соотношений

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_1(L) = 1,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx} \right] u(x), \quad u_2(L_0) = 0,$$

и удовлетворяют краевой задаче

$$\left(\frac{d}{dx} + ik(x) \right) u_1(x) = -\frac{k'(x)}{k(x)} [u_1(x) - u_2(x)], \quad u_1(L) = 1,$$

$$\left(\frac{d}{dx} - ik(x) \right) u_2(x) = \frac{k'(x)}{k(x)} [u_1(x) - u_2(x)], \quad u_2(L_0) = 0,$$

где $k'(x) = \frac{dk(x)}{dx}$. Теперь функция $R(x) = u_2(x)/u_1(x)$ описывается уравнением Рикати:

$$\frac{d}{dx} R(x) = 2ikR(x) + \frac{k'(x)}{2k} [1 - R^2(x)], \quad R(L_0) = 0, \quad (1.30)$$

и коэффициент отражения определяется через решение уравнения (1.30) с помощью равенства

$$R_L = R(L).$$

Если функция $\varepsilon(x)$ достаточно мала, то уравнение (1.30) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2ikR(x) + \frac{1}{4}\varepsilon'(x)(1 - R^2(x)),$$

содержащего в отличие от уравнения (1.24) производную функции $\varepsilon(x)$.

Отметим, что для краевой задачи с согласованной границей (1.16), (1.29) уравнения метода погружения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_L &= 2ikR_L + \frac{1}{4}\varepsilon'(L)(1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial L} u(x, L) &= 2iku(x, L) + \frac{1}{4}\varepsilon'(L)(1 - R_L)u(x, L), \\ u(x, x) &= 1 + R_x. \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.2.2. Плоские волны в слоистых средах (источник внутри слоя среды). Аналогичным образом поле точечного источника, расположенного в слое случайно неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x; x_0) &= 2ik\delta(x - x_0), \\ G(L; x_0) + \frac{i}{k} \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=L} &= 0, \\ G(L_0; x_0) - \frac{i}{k} \frac{dG(x; x_0)}{dx} \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Вне слоя среды решение в этом случае имеет вид уходящих волн (рис. 1.6, б):

$$G(x; x_0) = T_1 e^{ik(x-L)} \quad (x \geq L), \quad G(x; x_0) = T_2 e^{-ik(x-L_0)} \quad (x \leq L_0).$$

Отметим, что положение источника на границе слоя $x_0 = L$ соответствует краевой задаче (1.16), (1.17) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x; L) = u(x; L).$$

Решение краевой задачи (1.32) имеет структуру

$$G(x; x_0) = G(x_0; x_0) \begin{cases} \exp \left[ik \int_x^{x_0} \psi_1(\xi) d\xi \right], & x_0 \geq x; \\ \exp \left[ik \int_{x_0}^x \psi_2(\xi) d\xi \right], & x_0 \leq x, \end{cases} \quad (1.33)$$

где поле в точке расположения источника, в силу условия скачка производной, определяется формулой

$$G(x_0; x_0) = \frac{2}{\psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)},$$

а функции $\psi_i(x)$ описываются уравнениями Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_1 &= ik [\psi_1^2 - 1 - \varepsilon(x)], \quad \psi_1(L_0) = 1, \\ \frac{d}{dx} \psi_2 &= -ik [\psi_2^2 - 1 - \varepsilon(x)], \quad \psi_2(L) = 1. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Схема решения задачи методом прогонки приведена на рис. 1.8, в. Сперва решаются два уравнения (1.34), а затем волновое поле восстанавливается с помощью формулы (1.33).

Вместо функций $\psi_i(x)$ введем новые функции $R_i(x)$ с помощью равенств

$$\psi_i(x) = \frac{1 - R_i(x)}{1 + R_i(x)}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда волновое поле в области $x < x_0$ может быть записано в виде

$$G(x; x_0) = \frac{[1 + R_1(x_0)][1 + R_2(x_0)]}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (1.35)$$

где функция $R_1(x)$ по переменной x описывается уравнением Риккати (1.21).

При $x_0 = L$ выражение (1.35) переходит в

$$G(x; L) = u(x; L) = [1 + R_1(L)] \exp \left[ik \int_x^L d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (1.36)$$

и, следовательно, величина $R_1(L) = R_L$ — коэффициент отражения плоской волны, падающей на слой среды из области $x > L$. Аналогичным образом величина $R_2(x_0)$ — коэффициент отражения волны падающей на слой среды (x_0, L) из однородного полупространства $x < x_0$ (т. е. при $\varepsilon = 0$).

Используя равенство (1.36), формулу (1.35) можно переписать в виде

$$G(x; x_0) = \frac{1 + R_2(x_0)}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} u(x; x_0), \quad x \leq x_0,$$

где $u(x; x_0)$ — волновое поле в слое неоднородной среды (L_0, x_0) при падении на нее волны из свободного полупространства $x > x_0$.

Следовательно, поле точечного источника в области $x < x_0$ пропорционально волновому полю плоской волны, падающей на слой среды (L_0, x_0) из однородного полупространства $x > x_0$. Влияние части слоя (x_0, L) описывается только величиной $R_2(x_0)$.

Отметим, что при рассмотрении зависимости волнового поля от параметра L , (т. е. $G(x; x_0) \equiv G(x; x_0; L)$) метод погружения приведет к системе уравнений с начальными условиями

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) = i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u(x_0; L) u(x; L),$$

$$G(x; x_0; L)_{L=\max(x, x_0)} = \begin{cases} u(x; x_0), & x \geq x_0; \\ u(x_0; x), & x \leq x_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik \{1 + \varepsilon(L) u(L; L)\} u(x; L), \quad u(x; L)|_{L=x} = u(x; x),$$

$$\frac{d}{dL} u(L; L) = 2ik [u(L; L) - 1] + i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u^2(L; L), \quad u(L_0; L_0) = 1. \quad (1.37)$$

При этом два последних уравнения описывают волновое поле в задаче о падении волны на слой среды. Схема решения задачи в этом случае приведена на рис. 1.8, 2.

1.2.3. Плоские волны в слоистых средах (двухслойная модель среды). Часто исследователи сталкиваются с многомерной ситуацией, когда одни типы волн могут порождать другие благодаря зависимости параметров задачи от пространственных координат. В ряде случаев возможно параметризовать такую задачу, разбивая среду на слои в каком-то направлении, характеризуемые дискретным набором некоторых параметров, в то время как другие параметры в этих слоях меняются непрерывным образом. В качестве примера можно привести описание крупномасштабных и низкочастотных движений в атмосфере и океане Земли (например, волн Россби). Эти движения можно описывать в рамках квазигеострофической модели, в которой атмосфера и океан рассматриваются как тонкие многослойные пленки, характеризующиеся по вертикали толщиной слоев и значениями плотности в них [71]. В то же время другие параметры внутри слоев меняются непрерывным образом. И возможным источником локализации волн Россби, например, являются пространственные изменения неоднородностей топографии дна в горизонтальной плоскости. Простейшая однослойная модель, эквивалентная одномерному уравнению Гельмгольца, описывает баротропные движения среды, а двухслойная модель (рис. 1.9) учитывает уже бароклинные эффекты [22, 45, 164].

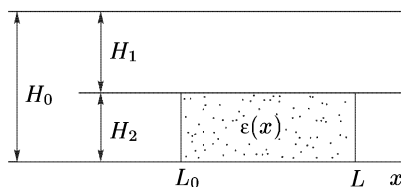


Рис. 1.9. Двухслойная модель среды

Простейшая модель распространения взаимодействующих волн в двухслойной среде описывается системой уравнений [21]

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1 + k^2 \psi_1 - \alpha_1 F (\psi_1 - \psi_2) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2 + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2 + \alpha_2 F (\psi_1 - \psi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где параметры $\alpha_1 = 1/H_1$, $\alpha_2 = 1/H_2$ (H_1 , H_2 — толщины верхнего и нижнего слоев), F характеризует взаимодействие волн, а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды в нижнем слое. Краевыми условиями для системы уравнений (1.38) являются условия излучения на бесконечности.

Отметим, что параметр F , характеризующий параметризацию среды по вертикали, в системе уравнений (1.38) проявляется как горизонтальный масштаб, ответственный за генерацию дополнительной волны. Характер взаимодействия волн (и, в частности, зависимости параметров α_i от толщины слоев) в системе (1.38) соответствует задачам геофизической гидродинамики. Для задач другого типа эти соотношения могут измениться,

что не существенно. Принципиально важно лишь то, что взаимодействие между волнами линейно.

Переход к однослойной модели осуществляется при $F = 0$, $\psi_1 = 0$, и соответствующее волновое уравнение принимает вид уравнения Гельмгольца (1.16). Переход к однослойной задаче можно также осуществить и предельным переходом $H_1 \rightarrow 0$; при этом $\psi_1 = \psi_2$. Следует, однако, иметь в виду, что предельные переходы $L_0 \rightarrow -\infty$ (переход к полупространству) и $H_i \rightarrow 0$ в статистической задаче не перестановочны. В этом случае толщины слоев H_i должны быть конечными, хоть и сколь угодно малыми.

1.3. Уравнения в частных производных первого порядка

Обратимся теперь к примерам динамических систем (динамических полей), описываемых уравнениями в частных производных.

1.3.1. Линейные уравнения с производными первого порядка (пассивная примесь в случайном поле скоростей). Простейшими задачами, описываемыми линейными уравнениями в частных производных первого порядка, являются уравнения непрерывности для плотности консервативной примеси и перенос неконсервативной пассивной примеси случайным полем скоростей: $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (1.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}). \quad (1.40)$$

Линейные уравнения в частных производных первого порядка (1.39), (1.40) могут быть решены методом характеристик. Вводя *характеристические кривые* (частицы)

$$d\mathbf{r}(t)/dt = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (1.41)$$

эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= - \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \\ \frac{d}{dt} q(t) &= 0, \quad q(0) = q_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Такая формулировка задачи соответствует *лагранжеву описанию*, в то время как исходные динамические уравнения (1.39), (1.40) соответствуют *эйлерову описанию*.

Характеристический векторный параметр $\mathbf{r}_0$ введен в систему уравнений (1.41), (1.42). Уравнение (1.41) совпадает при этом с уравнением (1.1), описывающим динамику частицы в поле случайных скоростей. Решение системы уравнений (1.41), (1.42) зависит от начального значения $\mathbf{r}_0$, т. е.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t | \mathbf{r}_0), \quad (1.43)$$

что будем отмечать вертикальной чертой.

Первое из равенств (1.43) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для характеристического параметра $\mathbf{r}_0$, решение которого $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)$ существует, так как *расходимость* $j(t | \mathbf{r}_0) = \det \|\partial r_i(t | \mathbf{r}_0) / \partial r_{0k}\|$ отлична от нуля. Следовательно, решение исходного уравнения (1.39) можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t | \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).$$

Для расходимости $j(t | \mathbf{r}_0)$ из (1.41) следует уравнение

$$\frac{d}{dt} j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t | \mathbf{r}_0), \quad j(0) = 1, \quad (1.44)$$

сопоставляя которое с уравнением (1.42), видим, что

$$\rho(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t | \mathbf{r}_0)} \quad (1.45)$$

и, следовательно, поле плотности можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.46)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Дельта функция, в правой части этого равенства является *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы (см. следующую главу), и, следовательно, после усреднения его по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, получаем хорошо известную связь средней плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей $P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \langle \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle$ лагранжевой частицы (см., например, [68])

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0). \quad (1.47)$$

Для бездивергентного поля скоростей ($\text{div } \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) расходимость частицы, также как и ее плотность, сохраняется, т. е.

$$j(t | \mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0), \quad q(t | \mathbf{r}_0) = q_0(\mathbf{r}_0).$$

Остановимся теперь на стохастических особенностях решения задачи (1.39). Удобно анализировать динамику случайных полей в *топографических* понятиях. Так, для бездивергентного поля скоростей эволюция во времени контура постоянных значений концентрации $\rho = \text{const}$ совпадает с динамикой частиц в этом поле скоростей и совпадает, следовательно, с динамикой, приведенной на рис. 1.1, а. В этом случае площадь, ограниченная контуром, сохраняется и, как видно из рисунка, возникает сильная изрезанность картины, т. е. происходит как обострение градиентов, так и возникновение динамики контура на все меньших и меньших масштабах. В другом предельном случае (дивергентного поля скоростей) площадь, ограниченная контуром, стремится к нулю и поле плотности сжимается, образуя кластеры. Примеры численного моделирования для этого случая приведены в работах [58, 226]. При усреднении по ансамблю реализаций эти

особенности динамики исчезают. Проследить образование кластеров в эйлеровом описании можно на примере случайного поля скоростей вида (1.3), (1.4). В этом случае поле плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ описывается выражением [49]

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0) \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}, \quad (1.48)$$

где функция $T(t)$ описывается формулой (1.7).

Для бездивергентного поля скорости, когда $v_x(t) = 0$, $T(t) \equiv 0$,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \left(\mathbf{r} - \sin(2kx) \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau) \right).$$

В частном случае, когда начальное распределение плотности не зависит от $\mathbf{r}$, т. е. $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$, равенство (1.48) упрощается и принимает вид

$$\rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0 = \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}. \quad (1.49)$$

На рис. 1.10, *a-g* представлена пространственно-временная эволюция эйлерова поля плотности $1 + \rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0$, рассчитанная по формуле (1.49) в безразмерных пространственно-временных переменных (единица добавлена, чтобы не иметь проблем с близкими к нулю значениями плотности в логарифмическом масштабе). Из этих рисунков наглядно видно последовательное перетекание поля плотности к узким окрестностям точек $x \approx 0$ и $x \approx \pi/2$, т. е. образование кластеров. Так, на рис. 1.10, *a, b* изображена временная последовательность ($t = 1 \div 10$) образования кластера в окрестности точки $x \approx 0$. На рис. 1.10, *в, г* изображена временная последовательность ($t = 16 \div 25$) перетекания поля плотности из окрестности точки $x \approx 0$ в окрестность точки $x \approx \pi/2$, т. е. ликвидация кластера в окрестности $x \approx 0$ и рождение нового кластера в окрестности $x \approx \pi/2$. Далее этот процесс повторяется во времени. «Время жизни» таких кластеров, как видно из рисунков, для рассматриваемой модели имеет порядок «времени их формирования».

Итак, мы рассмотрели простейшую модель для диффузии примеси (частиц и эйлерова поля плотности) в случайном поле скоростей, в которой наглядно виден процесс образования кластерной структуры. Особенностью рассмотренной модели является фиксированный характер точек, где образуются кластеры. Это конечно, уменьшает ценность рассмотренной модели.

Однако эта модель позволяет понять основное отличие диффузии в дивергентных и бездивергентных полях скоростей. В бездивергентных (несжимаемых) полях скорости частицы (и, следовательно, поле плотности) не успевают притягиваться к устойчивым центрам притяжения за время их существования и частицы слегка флуктуируют относительно своего первоначального местонахождения. В дивергентном же (сжимаемом) поле скоростей за то же время существования устойчивых центров притяжения частицы успевают притянуться к ним, так как этот процесс притяжения убыстряется экспоненциальным образом, что наглядно проявляется в формуле (1.49).

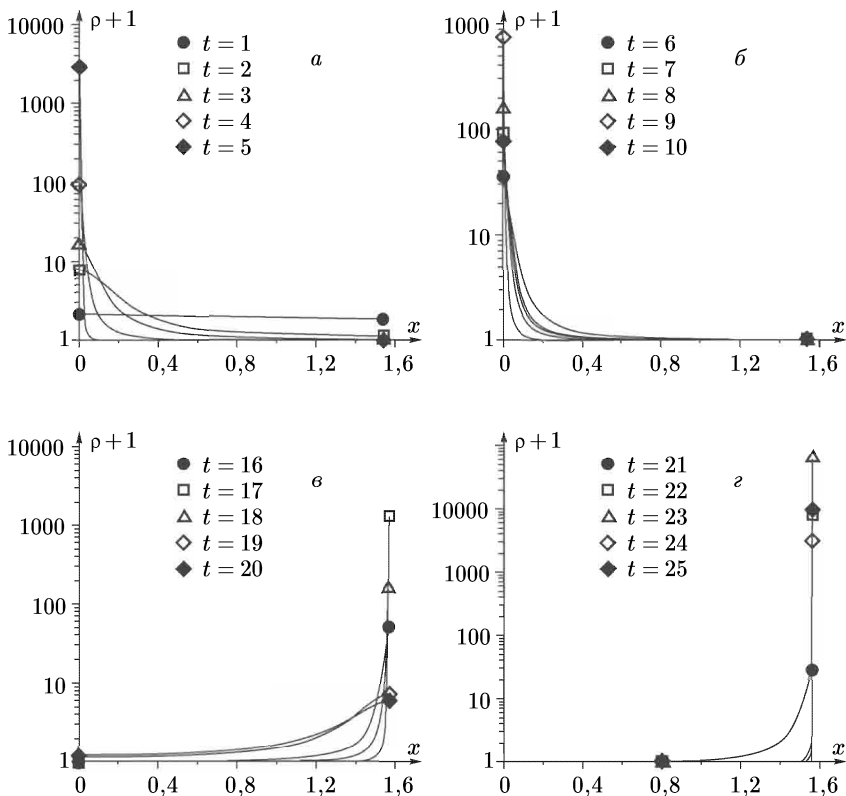


Рис. 1.10. Пространственно-временная эволюция эйлерового поля плотности, описываемая формулой (1.49)

Из описанной картины ясно, что динамическое уравнение (1.39) в качестве модельного уравнения, описывающего физическую реальность, может использоваться только на ограниченном интервале времени. Для более полного анализа необходимо включить в рассмотрение поле градиента концентрации примеси $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$, которое описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) p_i(\mathbf{r}, t) = -p_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}}, \quad (1.50)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}).$$

Кроме того, следует учесть также эффект молекулярной диффузии (с коэффициентом молекулярной диффузии μ), сглаживающий упомянутое обострение градиентов, который описывается линейным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (1.51)$$

1.3.2. Квазилинейные уравнения. Рассмотрим теперь простейшее квазилинейное уравнение для скалярной величины $q(\mathbf{r}, t)$, которое запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = Q(t, q), \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1.52)$$

где, для простоты изложения, считаем функции $\mathbf{U}(t, q)$ и $Q(t, q)$ явно не зависящими от пространственной переменной $\mathbf{r}$.

Дополним уравнение (1.52) уравнением для поля градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$, вытекающим из (1.52), и уравнением непрерывности для сохраняющейся величины $I(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(t, q) I(\mathbf{r}, t) \} &= 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Из (1.53) следует, что

$$\int d\mathbf{r} I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} I_0(\mathbf{r}). \quad (1.54)$$

С помощью характеристических кривых, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения (1.52) и (1.53) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{U}(t, q), \quad \frac{d}{dt} q(t) = Q(t, q), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad q(0) = q_0(\mathbf{r}_0), \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) &= - \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(t) + \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{p}(0) = \frac{\partial q_0(\mathbf{r}_0)}{\partial \mathbf{r}_0}, \\ \frac{d}{dt} I(t) &= - \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(t) \}}{\partial q} I(t), \quad I(0) = I_0(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Таким образом, в лагранжевом описании мы имеем в качестве исходной задачи систему уравнений (1.55). При этом первые два уравнения, определяющие характеристические кривые, являются замкнутой системой уравнений.

Выражая теперь характеристический параметр $\mathbf{r}_0$ через t и $\mathbf{r}$, т. е. в виде $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})$, можно в эйлеровом описании записать решение уравнений (1.52) и (1.53) в виде

$$q(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 q(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.56)$$

$$I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 I(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}). \quad (1.57)$$

Особенностью перехода от лагранжевого описания (1.55) к эйлеровому (1.57) является то обстоятельство, что теперь возникают, как правило, неоднозначности, что приводит к разрывности решения (1.57). Это

связано с тем, что теперь расходимость, определитель Якобиевой матрицы $j(t | \mathbf{r}_0) = \det \left\| \frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t | \mathbf{r}_0) \right\|$, может обращаться в нуль в некоторые моменты времени.

Величины $I(t | \mathbf{r}_0)$ и $j(t | \mathbf{r}_0)$ не являются независимыми. В самом деле, интегрируя $I(\mathbf{r}, t)$ в (1.57) по $\mathbf{r}$ и учитывая равенство (1.54), видим, что имеется интеграл эволюции

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{I_0(\mathbf{r}_0)}{I(t | \mathbf{r}_0)}, \quad (1.58)$$

откуда следует, что обращение в нуль расходимости $j(t | \mathbf{r}_0)$ сопровождается обращением консервативной величины $I(t | \mathbf{r}_0)$ в бесконечность.

Все эти результаты, очевидно, легко обобщаются на случай, когда функции $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t, q)$ и $Q(\mathbf{r}, t, q)$ в (1.52) явно зависят от пространственной переменной $\mathbf{r}$, а также когда само уравнение (1.52) является векторным уравнением.

Пример. В качестве простейшего примера рассмотрим одномерное уравнение Римана, описывающее свободное распространение *римановской нелинейной волны*:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = 0, \quad q(x, 0) = q_0(x), \quad (1.59)$$

соответствующее случаю $G(t, q) = 0$, $U(t, q) = q(x, t)$ в уравнении (1.52).

Решая уравнение (1.59) методом характеристик, получаем, что

$$q(t | x_0) = q_0(x_0), \quad x(t | x_0) = x_0 + tq_0(x_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (1.59) имеет вид трансцендентного равенства

$$q(x, t) = q_0(x - q(x, t)).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = \frac{q'_0(x_0)}{1 + tq'_0(x_0)},$$

где

$$x_0 = x - tq(x, t) \quad \text{и} \quad q'_0(x_0) = \frac{d}{dx_0} q_0(x_0).$$

Если $q'_0(x_0) < 0$, то за конечное время t_0 производная $\frac{\partial}{\partial x} q(x, t)$ обращается в бесконечность и решение уравнения (1.59) становится разрывным. До времени t_0 решение единственно и его можно записать в виде квадратуры. С этой целью вычислим вариационную производную

$$\frac{\delta q(x, t)}{\delta q_0(x_0)} = \frac{1}{1 + tq'_0(x_0)} \delta(x - tq(x, t) - x_0).$$

Аргумент дельта-функции обращается в нуль при $x = F(x_0, t) = x_0 + tq_0(x_0)$, так как $q(x, t) = q_0(x_0)$, $x - tq_0(x_0) = x_0$, и, следовательно,

$$\frac{\delta q(x, t)}{\delta q_0(x_0)} = \delta(x - F(x_0, t)) = \delta(x - x_0 - tq_0(x_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0)+iktq_0(x_0)}.$$

Это равенство можно рассматривать как функциональное уравнение по переменной $q_0(x_0)$. Тогда интегрируя его в функциональном пространстве с начальным условием

$$q(x, t)|_{q_0(x_0)=0} = 0,$$

получаем квадратуру

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ik(x-x_0)} \left[e^{iktq_0(x_0)} - 1 \right]$$

для решения уравнения Римана (1.59).

Упомянутую выше неоднозначность можно исключить, рассматривая уравнение Бюргерса с молекулярной вязкостью:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + q(x, t) \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t), \quad q(x, 0) = q_0(x),$$

при предельном переходе $\mu \rightarrow 0$, решение которого также можно записать в виде квадратуры (см., например, [24]). ♦

1.3.3. Краевые задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Отметим, что краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода погружения (см. приложение В) также приводятся к квазилинейным уравнениям. Так, например, для векторной нелинейной краевой задачи

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}(t)),$$

определенной на отрезке $t \in [0, T]$, с краевыми условиями

$$G\mathbf{x}(0) + H\mathbf{x}(T) = \mathbf{v},$$

где G и H — постоянные матрицы. Рассмотрим решение задачи как функцию параметров $(T, \mathbf{v})$, т. е. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})$. Тогда функция $\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v})$, как функция параметров T и $\mathbf{v}$, описывается квазилинейным векторным уравнением [41, 134] с начальным условием при $T \rightarrow 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + [H\mathbf{U}(T, \mathbf{R}(t, \mathbf{v}))] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mathbf{R}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{U}(T, \mathbf{R}(t, \mathbf{v})),$$

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v})|_{T=0} = (G + H)^{-1} \mathbf{v},$$

а сама функция $\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = -H_{kl} U_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})|_{T=t} = \mathbf{R}(t, \mathbf{v}).$$

1.3.4. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка. Рассмотрим теперь общий случай нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка, которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (1.60)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$.

Это уравнение можно записать в рамках лагранжевого описания в виде системы характеристических уравнений (см., например, [79]):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad \mathbf{r}(0 | \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0;$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t | \mathbf{r}_0) = - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} \right) H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}(0 | \mathbf{r}_0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0); \quad (1.61)$$

$$\frac{d}{dt} q(t | \mathbf{r}_0) = \left(\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - 1 \right) H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}), \quad q(0 | \mathbf{r}_0) = q_0(\mathbf{r}_0).$$

Дополним теперь уравнение (1.60) уравнением для консервативной величины $I(\mathbf{r}, t)$, описываемой уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t) \right\} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (1.62)$$

Из (1.62) следует, что

$$\int d\mathbf{r} I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} I_0(\mathbf{r}). \quad (1.63)$$

Тогда соответствующая величина в лагранжевом описании удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} I(t | \mathbf{r}_0) = - \frac{\partial^2 H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t), \quad I(0 | \mathbf{r}_0) = I_0(\mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (1.62) имеет вид

$$I(\mathbf{r}, t) = I(t | \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})) = \int d\mathbf{r}_0 I(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (1.64)$$

где $j(t | \mathbf{r}_0) = \det \|\partial r_i(t | \mathbf{r}_0) / \partial r_{0j}\|$ — расходямость (определитель Якоби-ево́й матрицы).

Величины $I(t | \mathbf{r}_0)$ и $j(t | \mathbf{r}_0)$ связаны между собой. Действительно, подставляя выражение для $I(\mathbf{r}, t)$ (1.64) в (1.63), видим, что имеется интеграл

эволюции

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{I_0(\mathbf{r}_0)}{I(t | \mathbf{r}_0)}$$

и выражение (1.64) принимает вид

$$I(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 I_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}).$$

Пример. Если, например, функция

$$H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}, t),$$

то уравнения (1.60) соответствуют *уравнениям Гамильтона*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{p}(t), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d}{dt} q(t) = -U(\mathbf{r}, t),$$

в то время как само уравнение (1.59) переходит в *уравнение Гамильтона–Якоби*

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}, t) + \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}),$$

а функция $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$ описывается квазилинейным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \nabla q_0(\mathbf{r}). \quad \blacklozenge$$

1.4. Уравнения в частных производных старшего порядка

1.4.1. Уравнение Гельмгольца (краевая задача) и параболическое уравнение квазиоптики (волны в случайно-неоднородных средах). Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и в точке с координатами $(x_0, \mathbf{R}_0)$, где через $\mathbf{R}$ обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси x , находится точечный источник. Тогда волновое поле внутри слоя $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$ описывается уравнением для функции Грина:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = \delta(x - x_0) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (1.65)$$

где k — волновое число, $\Delta_{\mathbf{R}} = \partial^2 / \partial \mathbf{R}^2$, а $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — отклонение показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от единицы. Пусть вне слоя $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Тогда вне слоя волновое поле описывается уравнением Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = 0$$

и на границах слоя должны выполняться условия непрерывности функций G и $\partial G / \partial x$. Кроме того, для уравнения (1.65) также должны выполняться условия излучения при $x \rightarrow \pm \infty$.

Волновое поле вне слоя среды можно, очевидно, представить в виде

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = \begin{cases} \int d\mathbf{q} T_1(\mathbf{q}) \exp \left[-i\sqrt{k^2 - q^2}(x - L_0) + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right], & x \leq L_0, \\ \int d\mathbf{q} T_2(\mathbf{q}) \exp \left[i\sqrt{k^2 - q^2}(x - L) + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right], & x \geq L. \end{cases}$$

Следовательно, краевое условие для уравнения (1.65) на границе $x = L_0$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (1.66)$$

Аналогично получаем краевое условие на границе $x = L$ в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} = 0. \quad (1.67)$$

Оператор $\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$, фигурирующий в (1.66), (1.67), для безграничного по $\mathbf{R}$ пространства определяется преобразованием Фурье. Его же можно рассматривать как линейный интегральный оператор, ядро которого определяется функцией Грина для свободного пространства (см. приложение Б).

Таким образом, поле точечного источника в неоднородной среде описывается краевой задачей (1.65), (1.66), (1.67). Эта краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = g(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) + \int_{L_0}^L dx' \int d\mathbf{R}' g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \varepsilon(x', \mathbf{R}') G(x', \mathbf{R}'; x_0, \mathbf{R}_0), \quad (1.68)$$

где $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве. В трехмерном случае

$$g(x, \mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr}, \quad r = \sqrt{x^2 + \mathbf{R}^2},$$

и описывается интегральным представлением:

$$g(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} g(\mathbf{q}) \exp \left\{ i\sqrt{k^2 - q^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right\}, \quad g(\mathbf{q}) = \frac{1}{8i\pi^2 \sqrt{k^2 - q^2}}. \quad (1.69)$$

Действие оператора $\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$ на произвольную функцию $F(\mathbf{R})$ можно в данном случае представить в виде интегрального оператора (см. приложение Б):

$$\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} F(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') F(\mathbf{R}'), \quad (1.70)$$

ядро которого определяется равенством

$$K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}) g(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (1.71)$$

Соответствующее ядро обратного оператора определяется равенством

$$L(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = (k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})^{-1/2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2ig(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (1.72)$$

Если точечный источник находится на границе слоя $x_0 = L$, то волновое поле внутри слоя при $L_0 < x < L$ описывается уравнением

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = 0 \quad (1.73)$$

с краевыми условиями, вытекающими из (1.66), (1.67):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} &= -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Краевой задаче (1.73), (1.74) эквивалентно интегральное уравнение

$$\begin{aligned} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= g(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) + \\ &+ \int_{L_0}^L dx' \int d\mathbf{R}' g(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \varepsilon(x', \mathbf{R}') G(x', \mathbf{R}'; L, \mathbf{R}_0), \end{aligned} \quad (1.75)$$

соответствующее точке $x_0 = L$ в уравнении (1.68).

Если из области $x > L$ на слой среды падает волна $u_0(x, \mathbf{R})$ (в отрицательном направлении оси x), то волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ внутри слоя удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} U(x, \mathbf{R}) = 0 \quad (1.76)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L} &= -2i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} u_0(L, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Поле $U(x, \mathbf{R})$, аналогично одномерной задаче, можно представить в виде

$$U(x, \mathbf{R}) = u_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R}), \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, \mathbf{R}) = -ik\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \{u_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\},$$

где вместо одной функции $U(x, \mathbf{R})$ мы ввели в рассмотрение две: $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$, описывающие волны, распространяющиеся соответственно в отрицательном и положительном направлениях оси x и связанные с полем

$U(x, \mathbf{R})$ равенствами, вытекающими из (1.78):

$$\begin{aligned} u_1(x, \mathbf{R}) &= \frac{i}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}), \\ u_2(x, \mathbf{R}) &= -\frac{i}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.79)$$

Дифференцируя (1.79) по x и используя уравнение (1.76), получаем систему уравнений для функций $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ с краевыми условиями, вытекающими из (1.77), вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) u_1(x, \mathbf{R}) &= -\frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) u_2(x, \mathbf{R}) &= \frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \}, \\ u_1(L, \mathbf{R}) &= u_0(L, \mathbf{R}), \quad u_2(L_0, \mathbf{R}) = 0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Функция $u_2(x, \mathbf{R})$ описывает волну, распространяющуюся в направлении, обратном направлению падающей волны, т. е. *обратно рассеянное поле*.

Если пренебречь эффектами, связанными с рассеянием назад, т. е. положить $u_2(x, \mathbf{R}) = 0$, то получаем *обобщенное параболическое уравнение* [65]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) &= -\frac{ik^2}{2\sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \}, \\ U(L, \mathbf{R}) &= u_0(L, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (1.81)$$

допускающее рассеяние на произвольные углы (не превышающие, однако, $\pi/2$). Для рассеяния на малые углы ($\Delta_{\mathbf{R}} \ll k^2$), представляя поле $U(x, \mathbf{R})$ в виде

$$U(x, \mathbf{R}) = e^{-ik(x-L)} u(x, \mathbf{R})$$

и рассматривая падение волны из полупространства $x < 0$ на неоднородную среду (т. е. меняя $L - x$ на x), из (1.81) получаем *параболическое уравнение квазиоптики*, справедливое для описания распространения волн в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями при рассеянии волн на малые углы:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (1.82)$$

которое нашло успешное применение во многих задачах распространения волн в атмосфере Земли и океане.

Отметим, что вопросом вывода и обоснования как самого параболического, так и обобщенных параболических уравнений посвящено много работ. Вывод этого уравнения, основанный на методе погружения, см. в приложении В.

Если ввести амплитуду и фазу волнового поля в уравнении (1.82) по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R})e^{iS(x, \mathbf{R})},$$

то уравнение для интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R}) = u(x, \mathbf{R})u^*(x, \mathbf{R})$ можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \{ \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \} = 0, \quad I(0, \mathbf{R}) = I_0(\mathbf{R}). \quad (1.83)$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного падающего волнового пучка сохраняется мощность волны в плоскости $x = \text{const}$:

$$E_0 = \int d\mathbf{R} I(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} I_0(\mathbf{R}).$$

Уравнение (1.83) по форме совпадает с уравнением (1.39) и, следовательно, его можно трактовать как уравнение переноса консервативной примеси в потенциальном поле скоростей. Однако только в *приближении геометрической оптики*, когда фаза волны, ее поперечный градиент $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})$, а также матрица ее вторых производных, характеризующая *кривизну фазового фронта* $S(x, \mathbf{R}) = \text{const}$, $u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R})$, описываются замкнутыми уравнениями [40, 155]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \mathbf{p}^2(x, \mathbf{R}) &= \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \right) u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{ik}(x, \mathbf{R}) u_{kj}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

эту примесь можно считать пассивной. В общем же случае, при учете дифракционных эффектов, она является активной.

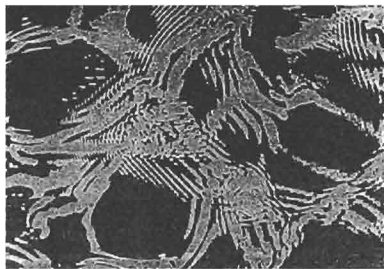


Рис. 1.11. Поперечное сечение лазерного пучка в турбулентной среде

Реализации поля интенсивности, согласно выводам предыдущего раздела, должны иметь кластерный характер, который проявляется в виде *каустических* структур. Так, на обороте обложки — форзаце — книги [75] приведена фотография поперечного сечения лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере. Фрагмент этой фотографии воспроизведен на рис. 1.11 (см. также [25, 126, 127], где приведены результаты как лабораторных исследований, так и численного моделирования).

На рисунке видно возникновение каустической структуры волнового поля.

На рис. 1.12 приведена фотография бассейна также с четко выраженной каустической структурой волнового поля на его дне. Подобные структуры возникают при преломлении и отражении света взволнованной водной поверхностью, что соответствует рассеянию на так называемом *фазовом экране*.



Рис. 1.12. Каустики в бассейне

Остановимся теперь подробнее на приближение геометрической оптики (1.84) для параболического уравнения (1.82). В этом приближении уравнение для фазы волны является уравнением Гамильтона-Якоби, а уравнение для поперечного градиента фазы волны (1.84) является замкнутым *квазилинейным* уравнением в частных производных первого порядка и, следовательно, его можно решать методом характеристик (см., например, [79]). Уравнения для характеристических кривых (*лучей*) имеют вид

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad (1.85)$$

а интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль характеристик будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} I(x) &= -I(x) u_{ii}(x), \\ \frac{d}{dx} u_{ij}(x) + u_{ik}(x) u_{kj}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Уравнения (1.85) совпадают по внешнему виду с уравнениями для частицы в поле случайных внешних сил в отсутствии трения (1.12) и соответствуют Гамильтоновой системе уравнений.

Уравнения (1.85), (1.86) существенно упрощаются в двумерном случае ($R = y$) и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y(x) &= p(x), \quad \frac{d}{dx}p(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon(x, y), \\ \frac{d}{dx}I(x) &= -I(x)u(x), \quad \frac{d}{dx}u(x) + u^2(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Уравнение (1.87) для величины $u(x)$ подобно уравнению (1.14), решение которого имеет сингулярный характер. Оно отличается только более сложной структурой случайного члена. Однако очевидно, что и в этом случае решение стохастической задачи (1.87) имеет взрывной характер, т. е. на конечном расстоянии функция $u(x)$ обратится в минус бесконечность, а интенсивность — в бесконечность. Это соответствует *случайной фокусировке* волнового поля в случайно-неоднородной среде, т. е. возникновению каустик, и соответствует возникновению неоднозначностей (и разрывов) в квазилинейном уравнении (1.84) для поперечного градиента фазы волнового поля.

1.4.2. Уравнение Навье–Стокса (случайные силы в гидродинамической теории турбулентности). Рассмотрим теперь модель турбулентного движения, при котором жидкость находится в поле внешних сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Такая модель, конечно, является фиктивной, так как подобные силы не имеют реальных аналогов. Однако если считать, что силы $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ обеспечивают заметный средний приток энергии лишь к крупномасштабным компонентам скорости, то вследствие представлений теории локально-изотропной турбулентности можно ожидать, что фиктивный характер поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ не скажется на статистических свойствах мелкомасштабных компонент турбулентности [68]. Поэтому мелкомасштабные свойства турбулентности могут быть правильно описаны на основе такой модели.

Движение несжимаемой жидкости под действием внешних сил описывается *уравнением Навье–Стокса*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} p(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.88)$$

здесь ρ_0 — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, а поле давления $p(\mathbf{x}, t)$ выражается через поле скоростей в тот же момент времени с помощью соотношения

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \int d\mathbf{r}' \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial^2 (u_i(\mathbf{r}', t) u_j(\mathbf{r}', t))}{\partial r'_i \partial r'_j}, \quad (1.89)$$

где $\Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — интегральный оператор, обратный оператору Лапласа (по повторяющимся индексам производится суммирование).

Фурье-образ поля скорости по пространственным координатам в трехмерном случае ($\widehat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) = \widehat{u}_i(-\mathbf{k}, t)$)

$$\widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} u_i(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

в присутствии поля внешних сил после исключения давления с помощью формулы (1.89) удовлетворяет нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \widehat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \widehat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) - \nu k^2 \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \widehat{f}_i(\mathbf{k}, t), \quad (1.90)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}),$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

а $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил:

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Спецификой трехмерных гидродинамических движений является существование закона сохранения энергии при отсутствии внешних сил и эффектов, связанных с вязкостью.

Для описания стационарной во времени турбулентности удобно рассматривать пространственно-временные фурье-гармоники поля скорости:

$$\widehat{u}_i(\mathbf{K}) = \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)},$$

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \widehat{u}_i(\mathbf{K}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)},$$

где через $\mathbf{K}$ обозначен четырехмерный волновой вектор с координатами $\{\mathbf{k}, \omega\}$ и поле $\widehat{u}_i^*(\mathbf{K}) = \widehat{u}_i(-\mathbf{K})$ в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{r}, t)$. Уравнение для компоненты $\widehat{u}_i(\mathbf{K})$ в этом случае получаем из уравнения (1.90) после выполнения преобразования Фурье по времени:

$$(i\omega + \nu k^2) \widehat{u}_i(\mathbf{K}) + \frac{i}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \widehat{u}_\alpha(\mathbf{K}_1) \widehat{u}_\beta(\mathbf{K}) = \widehat{f}_i(\mathbf{K}), \quad (1.91)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega),$$

а $\hat{f}_i(\mathbf{K})$ — пространственно-временные фурье-гармоники внешних сил. Уравнение (1.91) теперь чисто интегральное нелинейное уравнение.

1.4.3. Уравнения геофизической гидродинамики. Рассмотрим теперь описание гидродинамических потоков на вращающейся Земле в так называемом *квазигеострофическом приближении* [71]. В простейшем случае однослойной модели несжимаемый поток жидкости в двумерной плоскости $\mathbf{R} = (x, y)$ описывается *функцией тока*, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi(\mathbf{R}, t) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{R}, t) = J \{ \Delta \psi(\mathbf{R}, t) + h(\mathbf{R}); \psi(\mathbf{R}, t) \}, \quad (1.92)$$

$$\psi(\mathbf{R}, 0) = \psi_0(\mathbf{R}),$$

где параметр β_0 — производная по широте от локального параметра Кориолиса f_0 , $J\{\psi, \varphi\}$ — Якобиан двух функций, $\psi(\mathbf{R}, t)$ и $\varphi(\mathbf{R}, t)$,

$$J\{\psi(\mathbf{R}, t); \varphi(\mathbf{R}, t)\} = \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \frac{\partial \varphi(\mathbf{R}, t)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial y},$$

а через функцию $h(\mathbf{R}) = f_0 \tilde{h}(\mathbf{R}) / H_0$ обозначено отклонение топографии дна $\tilde{h}(\mathbf{R})$ относительно ее средней толщины H_0 . Поле скоростей определяется через функцию тока с помощью равенства

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \left(-\frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial y}, \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \right).$$

Отметим, что в пренебрежении эффектами вращения Земли и топографии подстилающей поверхности уравнение (1.92) переходит в обычное уравнение двумерной гидродинамики (см., например, [61]).

Уравнение (1.92) описывает *баротропное* движение жидкости. В более общем случае для исследования *бароклинных* движений используется двухслойная модель гидродинамических потоков, описываемая системой уравнений [71]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Delta \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2)] + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 = J \{ \Delta \psi_1 - \alpha_1 F(\psi_1 - \psi_2); \psi_1 \},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Delta \psi_2 - \alpha_2 F(\psi_2 - \psi_1)] + \beta_0 \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 = J \{ \Delta \psi_2 - \alpha_2 F(\psi_2 - \psi_1) + f_0 \alpha_2 h; \psi_2 \}, \quad (1.93)$$

где введены дополнительные параметры $F = f_0^2 \rho / g(\Delta \rho)$, $\Delta \rho / \rho = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_0 > 0$, и $\alpha_1 = 1 / H_1$, $\alpha_2 = 1 / H_2$ — обратные толщины слоев.

Частными случаями уравнений (1.92), (1.93) будут уравнения, получаемые путем пренебрежения эффектом вращения Земли (двумерная гидродинамика) с учетом, однако, топографии дна, и линеаризированные квази-геострофические уравнения типа (1.38), описывающие влияние топографии на распространение волн Россби.

1.5. Зависимость решения задачи от коэффициентов уравнения и начальных условий

Выше мы рассмотрели ряд примеров динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. Для многих приложений, связанных с изучением статистических характеристик их решений, требуется знание зависимости решений этих задач от коэффициентов уравнения (вообще говоря, функциональной) и начальных условий. Эти зависимости обладают некоторыми общими свойствами, из которых два особенно важны для статистического описания. Проиллюстрируем их на примере простейшей задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). Эта задача соответствует динамике частиц в поле случайных скоростей и ее можно переписать в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \mathbf{U}(\mathbf{r}(\tau), \tau). \quad (1.94)$$

Решение уравнения (1.94) функционально зависит от векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}', \tau)$ и начальных условий $\mathbf{r}_0, t_0$.

1.5.1. Принцип динамической причинности. Проварьируем уравнение (1.94) по полю $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Считая, что начальное условие $\mathbf{r}_0$ не зависит от поля $\mathbf{U}$, получаем линейное уравнение для вариационной производной:

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (1.95)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — дельта функция Дирака, а $\theta(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Из уравнения (1.95) следует, что

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = 0, \text{ если } t' > t \text{ или } t' < t_0, \quad (1.96)$$

т. е. решение $\mathbf{r}(t)$ динамической задачи (1.94), как функционал поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$, зависит только от значений $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ при $t_0 < t' < t$. Следовательно, функция $\mathbf{r}(t)$ не меняется, если поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t')$ изменяется вне интервала (t_0, t') , т. е. для $t' < t_0$ или $t' > t$. Условие (1.96) будем называть *условием динамической причинности*.

Принимая во внимание это условие, уравнение (1.95) можно переписать в виде

$$\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')) \theta(t' - t_0) \theta(t - t') + \int_{t'}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(\tau)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')}, \quad (1.97)$$

и, следовательно, переходя к пределу $t \rightarrow t' + 0$, получаем равенство

$$\left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'+0} = \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')). \quad (1.98)$$

Интегральное уравнение (1.97) для вариационной производной, очевидно, эквивалентно линейному дифференциальному уравнению с начальным условием

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right) &= \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(t), t)}{\partial r_k} \left(\frac{\delta r_k(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right), \\ \left. \frac{\delta r_i(t)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t=t'} &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')). \end{aligned} \quad (1.99)$$

Условие динамической причинности является общим свойством задач, описываемых дифференциальными уравнениями с начальными условиями. Краевые же задачи этим свойством не обладают. Так, для задачи (1.16), (1.17), описывающей распространение плоской волны в слое неоднородной среды, волновое поле в точке $x = u(x)$, также как и коэффициенты отражения и прохождения, зависят функционально от значения функции $\varepsilon(x)$ во всем слое среды (L_0, L) . Переформулировка же этой задачи с помощью метода погружения в задачу с начальными условиями по вспомогательному параметру L позволяет использовать свойство причинности для уравнений метода погружения.

1.5.2. Зависимость решения задачи от начального условия. Обозначим теперь зависимость решения уравнения (1.94) $\mathbf{r}(t)$ от параметров $\mathbf{r}_0, t_0$ вертикальной чертой:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t \mid \mathbf{r}_0, t_0), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0 \mid \mathbf{r}_0, t_0).$$

Продифференцируем уравнение (1.94) по параметрам r_{0k} и t_0 . В результате для Якобиевой матрицы $\frac{\partial}{\partial r_{0k}} r_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$ и величины $\frac{\partial}{\partial t_0} r_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$ получаем линейные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}} &= \delta_{ik} + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau \mid \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0k}}, \\ \frac{\partial r_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0} &= -U_i(\mathbf{r}_0(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(\tau \mid \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t_0}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Умножая теперь первое из этих уравнений на $U_k(\mathbf{r}_0(t), t)$, суммируя по индексу k и складывая его со вторым уравнением, получаем для векторной функции

$$F_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$$

линейное однородное уравнение

$$F_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial U_i(\mathbf{r}(\tau), \tau)}{\partial r_k} F_k(\tau | \mathbf{r}_0, t_0),$$

решение которого, очевидно, $F_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0$. Таким образом, получаем равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) r_i(t | \mathbf{r}_0, t_0) = 0, \quad (1.101)$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение в частных производных по переменным $\mathbf{r}_0, t_0$ с начальным условием при $t_0 = t$

$$\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0. \quad (1.102)$$

Теперь переменная t входит в задачу (1.101), (1.102) как параметр.

Уравнение (1.101) решается в направлении времени, обратном по отношению к задаче (1.1), и может быть названо *обратным уравнением*.

Уравнение (1.101) с начальным условием (1.102), очевидно, также обладает свойством динамической причинности по параметру t_0 , т. е.

$$\frac{\delta \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{y}, t')} = 0, \quad \text{если } t' > t \text{ или } t' < t_0,$$

и при этом, как следует из уравнения (1.101), имеет место равенство

$$\left. \frac{\delta \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\delta U_j(\mathbf{r}, t')} \right|_{t'=t_0+0} = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial r_{0j}}. \quad (1.103)$$

Глава 2

ИНДИКАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ И УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Современный аппарат теории случайных процессов позволяет построить замкнутое описание динамических систем, если эти системы удовлетворяют условию динамической причинности и описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или интегральными уравнениями определенного типа (см. гл. 4). Переход от описания исходной, вообще говоря нелинейной, системы к эквивалентному описанию с помощью линейных уравнений в частных производных можно осуществить с использованием индикаторных функций. Однако размерность пространства переменных при этом увеличивается. Рассмотрим такой переход на примере динамических систем, описанных в предыдущей главе.

2.6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть стохастическая задача описывается системой уравнений (1.1)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0. \quad (2.1)$$

Введем скалярную функцию

$$\Phi(t; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}), \quad (2.2)$$

сосредоточенную на сечении случайного процесса $\mathbf{r}(t)$ заданной плоскостью $\mathbf{r}(t) = \text{const}$ и обычно называемую *индикаторной функцией*.

Дифференцируя (2.2) по времени t , с помощью уравнения (2.1) получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t).$$

Используя далее «выкалывающее» свойство дельта-функции,

$$\delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \mathbf{U}(\mathbf{r}, t),$$

получаем линейное уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = 0, \quad \Phi(t_0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}), \quad (2.3)$$

которое эквивалентно исходной системе и называется *уравнением Лиувилля*.

Переход от системы (2.1) к уравнению Лиувилля (2.3) сопровождается расширением фазового пространства $(t, \mathbf{r})$, которое, однако, имеет конечную размерность. Отметим, что уравнение (2.3) по своей форме совпадает

с уравнением переноса примеси полем скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ (1.39) и отличается от него только начальным условием.

Решение уравнения (2.1) и, следовательно, функция (2.2) зависят от начальных условий t_0 , $\mathbf{r}_0$. Так, функция $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0, t_0)$, как функция переменных $\mathbf{r}_0, t_0$, описывается линейным уравнением в частных производных первого порядка (1.101). Для таких уравнений также можно перейти к уравнению для индикаторной функции (см. следующий раздел) $\Phi(t; \mathbf{r} | t_0, \mathbf{r}_0)$, которое в данном случае также имеет вид линейного уравнения по переменным $\mathbf{r}_0, t_0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{U}(\mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \right) \Phi(t; \mathbf{r} | t_0, \mathbf{r}_0) = 0, \quad \Phi(t; \mathbf{r} | t, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) может быть названо *обратным уравнением Лиувилля*.

2.7. Уравнения в частных производных первого порядка

Если же мы имеем исходную задачу, описываемую дифференциальными уравнениями в частных производных, то также всегда можно перейти к эквивалентному описанию с помощью линейного уравнения в вариационных производных в бесконечномерном пространстве (*уравнение Хопфа*) [146]–[148] (см. также [40, 155, 68]). Для конкретного типа задач такой переход может быть упрощен. Так, если исходная динамическая система описывается уравнением в частных производных первого порядка (*линейным*, типа уравнения (1.39), *квазилинейным*, типа уравнения (1.52) или, в общем случае, *нелинейным* уравнением (1.60)), то фазовое пространство для соответствующей индикаторной функции имеет конечную размерность [40, 155]. Это связано с эквивалентностью уравнений в частных производных первого порядка и характеристических обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

2.7.1. Случай линейного уравнения. Рассмотрим подробнее задачу о переносе примеси случайным полем скоростей, описываемым уравнением (1.39), которое запишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}). \quad (2.5)$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию, аналогичную (2.2):

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(t, \mathbf{r}) - \rho), \quad (2.6)$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ в трехмерном случае или на контуре — в двумерном случае. Уравнение для нее легко получить как непосредственно из уравнения (2.5), так и исходя из уравнения Лиувилля в лагранжевом описании. В самом деле, дифференцируя (2.6) по времени и используя динамическое уравнение (2.5) и «выкалывающее» свойство дельта-функции, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho), \quad (2.7)$$

которое, однако, незамкнуто из-за наличия в правой части величины $\partial \rho(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$, которая не выражается в явной форме через $\rho(\mathbf{r}, t)$.

С другой стороны, дифференцируя функцию (2.6) по $\mathbf{r}$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho). \quad (2.8)$$

Исключая теперь последний член в равенстве (2.7) с помощью (2.8), получаем замкнутое уравнение Лиувилля в эйлеровом описании:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho)], \quad (2.9)$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho).$$

Более полное описание можно получить, рассматривая расширенную индикаторную функцию для поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ и его пространственного градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$:

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}). \quad (2.10)$$

Дифференцируя (2.10) по времени, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = - \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial p_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}). \quad (2.11)$$

Используя теперь динамические уравнения (2.5) для плотности и уравнение (1.50) для его пространственного градиента, можно переписать (2.11) в виде уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = & \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial p_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} p_i + p_k \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

которое не замкнуто из-за наличия в правой части члена $\partial p_i(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$.

Дифференцируя теперь функцию (2.10) по $\mathbf{r}$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = - \left[\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial p_i(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p_i} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}). \quad (2.13)$$

Умножая теперь (2.13) на $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и складывая с (2.12), приходим для расширенной индикаторной функции к замкнутому уравнению Лиувилля

вида

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \\ & = \left[\frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial p_i} p_k + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p_i} \rho \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \\ & \Phi(0, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь вывод уравнения (2.9) исходя из лагранжевого описания динамической системы. В лагранжевом представлении полное описание поведения пассивной примеси дается на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (1.41), (1.42) и (1.44). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля в соответствующем фазовом пространстве для функции

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t | \mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j(t | \mathbf{r}_0) - j), \quad (2.15)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат $\mathbf{r}_0$. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0), \\ & \Phi_{\text{Lag}}(0; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Приняв во внимание равенство

$$\delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) = \frac{1}{\|\partial \mathbf{r}_\alpha / \partial \mathbf{r}_{0\beta}\|} \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})) = \frac{1}{j(t | \mathbf{r}_0)} \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})),$$

выражение (2.15) можно переписать в виде

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{j} \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r})) \delta(j(t | \mathbf{r}_0) - j) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

где $\Phi(t, \mathbf{r}; \rho)$ — индикаторная функция (2.6). Следовательно,

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty dj j \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0). \quad (2.17)$$

Дмножая уравнение (2.16) на j и интегрируя его по j и $\mathbf{r}_0$, получаем соответствующее уравнение Лиувилля в эйлеровом представлении (2.9).

Для бездивергентного поля скоростей уравнения (2.5), (2.9) и (2.16) совпадают. Принципиальные отличия возникают только при наличии потенциальной составляющей у поля скорости.

Отметим, что одновременные и одноточечные плотности вероятностей для решения динамических задач совпадают с усредненными по ансамблю реализаций значениями соответствующих индикаторных функций:

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \langle \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \rangle,$$

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}; \rho) \rangle, \quad P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) \rangle.$$

Этим, естественно, и объясняется их особое значение в статистической динамике систем. Наряду с этим, индикаторные функции дают богатую количественную и качественную информацию о геометрической структуре случайных полей, которую можно получить на основе их статистической топографии (см. следующую главу).

2.7.2. Случай квазилинейного уравнения. Рассмотрим теперь простейшее квазилинейное уравнение для скалярной величины $q(\mathbf{r}, t)$ (1.52):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) q(\mathbf{r}, t) = Q(t, q), \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

Если теперь попытаться, по аналогии с линейной задачей, получить замкнутое уравнение для индикаторной функции $\Phi(t, \mathbf{r}; q) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q)$, то этого сделать не удастся. Теперь необходимо дополнить уравнение (2.18) уравнением (1.53) для поля градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla q(\mathbf{r}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \{ \mathbf{U}(t, q) \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \}}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t), \quad (2.19)$$

и рассматривать расширенную индикаторную функцию

$$\Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}). \quad (2.20)$$

Дифференцируя (2.20) по времени, с помощью уравнений (2.18) и (2.19) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [\mathbf{p} \mathbf{U}(t, q) - Q(t, q)] + \frac{\partial}{\partial p_k} \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial p_k} \left[p_k \left(\mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \right) \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (2.21)$$

которое, однако, не замкнуто из-за наличия в правой части члена $\partial p_k(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$.

Продифференцируем теперь функцию (2.20) по $\mathbf{r}$, в результате получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = - \left[\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p_k} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}). \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial q} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p})$$

и, следовательно, уравнение (2.21) можно записать в виде замкнутого уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(t, q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = \frac{\partial}{\partial q} \{[\mathbf{p}\mathbf{U}(t, q) - Q(t, q)] \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p})\} + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\{ \mathbf{p} \left(\frac{\partial \mathbf{p}\mathbf{U}(t, q)}{\partial q} - \frac{\partial Q(t, q)}{\partial q} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) \right\},$$

которое и является искомым уравнением Лиувилля для квазилинейного уравнения (2.18) в расширенном пространстве $\{q, \mathbf{p}\}$ с начальным условием

$$\Phi(0, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}) = \delta(q_0(\mathbf{r}) - q) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}). \quad (2.23)$$

Отметим, что возможно подключить к уравнениям (2.18), (2.19) и уравнение неразрывности для сохраняющейся величины $I(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \{ \mathbf{U}(t, q) I(\mathbf{r}, t) \} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (2.24)$$

При этом для индикаторной функции

$$\Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}, I) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \delta(I(\mathbf{r}, t) - I) \quad (2.25)$$

также получается замкнутое уравнение в пространстве $\{q, \mathbf{p}, I\}$. Это связано с тем обстоятельством, что величина, обратная к $I(\mathbf{r}, t)$, в лагранжевом описании соответствует расходимости.

2.7.3. Общий случай нелинейного уравнения. Рассмотрим теперь общий случай нелинейного скалярного уравнения в частных производных первого порядка (1.60):

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\mathbf{r}, t) + H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p}) = 0, \quad q(\mathbf{r}, 0) = q_0(\mathbf{r}), \quad (2.26)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \partial q(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$. Для получения замкнутого уравнения Лиувилля теперь необходимо дополнить уравнение (2.26) уравнениями для векторной величины $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ и матрицы вторых производных $U_{ik}(\mathbf{r}, t) = \partial^2 q(\mathbf{r}, t) / \partial r_i \partial r_k$.

Введем теперь расширенную индикаторную функцию

$$\Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}, U, I) = \delta(q(\mathbf{r}, t) - q) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \delta(U(\mathbf{r}, t) - U) \delta(I(\mathbf{r}, t) - I), \quad (2.27)$$

где для общности картины мы включили также новую консервативную переменную $I(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющую уравнению неразрывности (1.62):

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, t) \right\} = 0, \quad I(\mathbf{r}, 0) = I_0(\mathbf{r}). \quad (2.28)$$

Уравнения (2.26), (2.28) описывают, например, распространение волн в неоднородных средах в геометрикооптическом приближении параболического уравнения квазиоптики. Дифференцируя функцию (2.27) по времени и используя динамические уравнения для функций $q(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$

и $I(\mathbf{r}, t)$, мы, вообще говоря, приходим к незамкнутому уравнению, содержащему производные функции $q(\mathbf{r}, t)$ третьего порядка по пространственной переменной $\mathbf{r}$. Однако комбинация

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H(\mathbf{r}, t, q, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; q, \mathbf{p}, U, I)$$

уже не содержит третьих производных, в результате чего мы и приходим к замкнутому уравнению Лиувилля в пространстве $\{q, \mathbf{r}, U, I\}$ [40, 155].

2.8. Уравнения в частных производных высшего порядка

Если исходная динамическая система содержит производные порядка выше первого (например, оператор Лапласа), то уже невозможно получить замкнутое уравнение для соответствующей индикаторной функции. В этом случае можно получить только замкнутое уравнение в вариационных производных (*уравнение Хопфа*) для функционала, среднее значение по ансамблю реализации которого определяет характеристический функционал решения соответствующего стохастического динамического уравнения. Рассмотрим такой переход на примерах уравнений в частных производных, рассмотренных в гл. 1.

2.8.1. Параболическое уравнение квазиоптики. В качестве первого примера рассмотрим распространение волн в случайно-неоднородной среде в рамках линейного параболического уравнения (1.82):

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (2.29)$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u(x, \mathbf{R}') v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}') v^*(\mathbf{R}')] \right\}, \quad (2.30)$$

где волновое поле $u(x, \mathbf{R})$ — решение уравнения (2.29), а $u^*(x, \mathbf{R})$ — комплексно сопряженная функция. Дифференцируя (2.30) по x и используя динамическое уравнение (2.29) и комплексно сопряженное к нему, получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \\ = - \frac{1}{2k} \int d\mathbf{R} [v(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\mathbf{R}} u^*(x, \mathbf{R})] \Phi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] - \\ - \frac{k}{2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) [v(\mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}) - v^*(\mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R})] \Phi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')], \end{aligned}$$

которое можно записать в виде уравнения в вариационных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] &= \frac{ik}{2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] + \\ &+ \frac{i}{2k} \int d\mathbf{R} \left[v(\mathbf{R}) \Delta_{\frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})}} - v^*(\mathbf{R}) \Delta_{\frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})}} \right] \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')], \end{aligned} \quad (2.31)$$

с эрмитовым оператором

$$\widehat{M}(\mathbf{R}) = v(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R})} - v^*(\mathbf{R}) \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R})}.$$

Это уравнение эквивалентно исходному уравнению (2.29). Следствием уравнения (2.31) является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x-0, \mathbf{R})} \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \frac{ik}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}) \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')]. \quad (2.32)$$

2.8.2. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности. Рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение (1.90) для фурье-гармоник $\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ решения уравнения Навье–Стокса (1.88):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \widehat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \widehat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) - \nu k^2 \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \\ = \widehat{f}_i(\mathbf{k}, t), \end{aligned}$$

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}), \quad (2.33)$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2},$$

где $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил.
Введем функционал

$$\varphi[t; \mathbf{z}] = \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \mathbf{z}(\mathbf{k}') \right\}. \quad (2.34)$$

Дифференцируя функционал (1.90) по времени t и используя динамическое уравнение (2.8.2), получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}] &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \widehat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \widehat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) \varphi[t; \mathbf{z}] - \\ &- i \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \widehat{u}_i(\mathbf{k}, t) - \widehat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}], \end{aligned}$$

которое можно записать в виде линейного уравнения Хопфа в функциональном пространстве с вариационными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}] = & -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \varphi[t; \mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} - \\ & - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} - i \widehat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

При этом следствием уравнения (2.35) является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t-0)} \varphi[t; \mathbf{z}] = i \mathbf{z}(\mathbf{k}) \varphi[t; \mathbf{z}]. \quad (2.36)$$

Аналогичным образом для пространственно-временной гармоник поля скоростей $\widehat{u}_i(\mathbf{K})$, где через $\mathbf{K}$ обозначен четырехмерный волновой вектор с координатами $\{\mathbf{k}, \omega\}$ ($\widehat{u}_i^*(\mathbf{K}) = \widehat{u}_i(-\mathbf{K})$, в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{r}, t)$), мы имеем интегральное нелинейное уравнение (1.91):

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu k^2) \widehat{u}_i(\mathbf{K}) + \frac{i}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \widehat{u}_\alpha(\mathbf{K}_1) \widehat{u}_\beta(\mathbf{K}) = \widehat{f}_i(\mathbf{K}), \\ \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi} \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $\widehat{f}_i(\mathbf{K})$ — пространственно-временные фурье-гармоники внешних сил. В этом случае для функционала

$$\varphi[\mathbf{z}] = \varphi[\mathbf{z}(\mathbf{K}')] = \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{K}' \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \mathbf{z}(\mathbf{K}') \right\} \quad (2.38)$$

мы приходим к линейному уравнению с вариационными производными вида

$$\begin{aligned} (i\omega + \nu k^2) \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_i(\mathbf{K})} = \\ = -\frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)} + i \widehat{f}_i(\mathbf{K}) \varphi[\mathbf{z}]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Часть II
СТОХАСТИЧЕСКИЕ
УРАВНЕНИЯ

Глава 3

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПРОЦЕССЫ И ПОЛЯ

Прежде чем перейти к статистическому описанию рассмотренных задач, обсудим основные понятия теории случайных величин, процессов и полей.

В данной главе приведены основные свойства случайных величин, процессов и полей, которые используются при анализе динамических систем с флуктуирующими параметрами, мало освещенные или совсем не освещенные в учебной литературе. Мы будем следовать монографиям [38, 40, 155], где также даны основные библиографические ссылки.

3.1. Случайные величины и их характеристики

Вероятность нахождения случайной величины ξ в интервале $-\infty < \xi < z$ описывается монотонной функцией

$$F(z) = P(-\infty < \xi < z) = \langle \Theta(z - \xi) \rangle_{\xi}, \quad F(\infty) = 1, \quad (3.1)$$

где

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0, \\ 0, & \text{если } z \leq 0, \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда, а через $\langle \dots \rangle_{\xi}$ обозначена операция усреднения по ансамблю реализаций случайной величины ξ . Эта функция называется *функцией распределения вероятностей* или *интегральной функцией распределения*. Определение (3.1) отражает практический метод нахождения вероятности как предела отношения

$$P(-\infty < \xi < z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N},$$

где n — целое число выпадания события $\xi < z$ в N независимых испытаниях. Следовательно, вероятность случайной величины ξ находиться в интервале $z < \xi < z + dz$, где dz — бесконечно малая величина, можно записать в виде

$$P(z < \xi < z + dz) = p(z)dz.$$

Функция $p(z)$ называется *плотностью вероятностей* и описывается формулой

$$p(z) = \frac{d}{dz} P(-\infty < \xi < z) = \langle \delta(z - \xi) \rangle_{\xi}, \quad (3.2)$$

где $\delta(z)$ — дельта функция Дирака. Через плотность вероятностей $p(z)$ интегральная функция распределения вероятностей описывается формулой

$$F(z) = P(-\infty < \xi < z) = \int_{-\infty}^z d\xi p(\xi), \quad (3.3)$$

и, следовательно,

$$p(z) > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) = 1.$$

Умножая теперь равенство (3.2) на произвольную функцию $f(z)$ и интегрируя по всем значениям z , получаем выражение для среднего значения произвольной функции от случайной величины ξ в виде равенства

$$\langle f(\xi) \rangle_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) f(z). \quad (3.4)$$

Важной величиной, полностью описывающей все статистические характеристики случайной величины ξ , является ее *характеристическая функция*, определяемая равенством

$$\Phi(v) = \langle e^{iv\xi} \rangle_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ivz} p(z).$$

Зная характеристическую функцию, можно получить как плотность вероятностей (преобразование Фурье)

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi(v) e^{-ivx},$$

так и моменты

$$M_n = \langle \xi^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) z^n = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Phi(v) \Big|_{v=0},$$

кумулянты (или семиинварианты)

$$K_n = \left(\frac{d}{idv} \right)^n \Theta(v) \Big|_{v=0},$$

где $\Theta(v) = \ln \Phi(v)$, и другие статистические характеристики. Через моменты и кумулянты случайной величины ξ функции $\Theta(v)$ и $\Phi(v)$ выражаются с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_n v^n, \quad \Theta(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_n v^n. \quad (3.5)$$

Для многомерных случайных величин $\xi = \{z_1, \dots, z_n\}$ полное статистическое описание содержится в характеристической функции

$$\Phi(\mathbf{v}) = \langle e^{i\mathbf{v}\xi} \rangle_{\xi}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}. \quad (3.6)$$

Соответствующая совместная плотность вероятностей для величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ является преобразованием Фурье от $\Phi(\mathbf{v})$, т. е.

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\mathbf{v} \Phi(\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (3.7)$$

Подставляя функцию $\Phi(\mathbf{v})$ из (3.6) в (3.7) и выполняя интегрирование по $\mathbf{v}$, получаем очевидное равенство:

$$P(\mathbf{x}) = \langle \delta(\xi - \mathbf{x}) \rangle_{\xi} = \langle \delta(\xi_1 - x_1) \dots \delta(\xi_n - x_n) \rangle, \quad (3.8)$$

которое можно принять за определение плотности вероятностей случайной векторной величины ξ .

Моменты и кумулянты случайной величины ξ при этом определяются равенствами

$$M_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^{i_1} \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Phi(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0}, \quad K_{i_1, \dots, i_n} = \frac{\partial^n}{i^{i_1} \partial v_{i_1} \dots \partial v_{i_n}} \Theta(\mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0},$$

где $\Theta(\mathbf{v}) = \ln \Phi(\mathbf{v})$, а сами функции $\Theta(\mathbf{v})$ и $\Phi(\mathbf{v})$ выражаются через $M_{i_1, \dots, i_n}$ и $K_{i_1, \dots, i_n}$ с помощью рядов Тейлора:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} M_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{i_1, \dots, i_n} v_{i_1} \dots v_{i_n}. \quad (3.9)$$

Отметим, что если случайная величина ξ может принимать лишь дискретные значения ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) с вероятностями p_i , то в этом случае аналогом формулы (3.8) является формула

$$p_k = \langle \delta_{z, \xi_k} \rangle,$$

где $\delta_{i,k} = 1$, если $i = k$, и 0 в противном случае (символ Кронекера).

Рассмотрим теперь статистическое среднее $\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi}$, где $f(z)$ — произвольная детерминированная функция, такая, что написанная средняя величина существует. Для ее вычисления воспользуемся приемом, который далее будет широко использоваться. Вместо $f(\xi)$ введем функцию $f(\xi + \eta)$, где η — произвольная детерминированная величина. Разложим $f(\xi + \eta)$ в ряд Тейлора по ξ , т. е. представим ее в виде

$$f(\xi + \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta) \xi^n = e^{\xi \frac{d}{d\eta}} f(\eta),$$

где введен оператор сдвига по η . Далее можно написать равенство

$$\langle \xi f(\xi + \eta) \rangle_{\xi} = \left\langle \xi e^{\xi \frac{d}{d\eta}} \right\rangle_{\xi} f(\eta) = \Omega \left(\frac{d}{i d\eta} \right) \langle f(\xi + \eta) \rangle_{\xi}, \quad (3.10)$$

где функция

$$\Omega(v) = \frac{\langle \xi e^{i\xi v} \rangle_{\xi}}{\langle e^{i\xi v} \rangle_{\xi}} = \frac{d}{idv} \ln \Phi(v) = \frac{d}{idv} \Theta(v),$$

а $\Phi(v)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Используя теперь для функции $\Theta(v)$ разложение в ряд Тейлора (3.5), для функции $\Omega(v)$ получаем разложение в виде ряда:

$$\Omega(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1} v^n. \quad (3.11)$$

Учитывая, что переменная η в правой части (3.10) входит только в комбинации $\xi + \eta$, можно дифференцирование по η заменить на дифференцирование по ξ (при этом оператор $\Omega(d/id\xi)$ следует занести под знак усреднения) и положить $\eta = 0$. В результате получаем равенство

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \left\langle \Omega \left(\frac{d}{id\xi} \right) f(\xi) \right\rangle_{\xi},$$

которое, используя разложение (3.11) для $\Omega(v)$, можно переписать в виде ряда по кумулянтам K_n :

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\langle \frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} \right\rangle_{\xi}. \quad (3.12)$$

Отметим, что если в формуле (3.12) положить $f(\xi) = \xi^{n-1}$, то мы получим рекуррентную связь между моментами и кумулянтами случайной величины ξ в виде

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} K_k M_{n-k} \quad (M_0 = 1, \quad n = 1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

Аналогичным образом для статистического среднего $\langle g(\xi) f(\xi) \rangle_{\xi}$ можно получить операторную запись в виде

$$\begin{aligned} & \langle g(\xi + \eta_1) f(\xi + \eta_2) \rangle_{\xi} = \\ & = \exp \left\{ \Theta \left(\frac{d}{id\eta_1} + \frac{d}{id\eta_2} \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta_1} \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta_2} \right) \right\} \langle g(\xi + \eta_1) \rangle_{\xi} \langle f(\xi + \eta_2) \rangle_{\xi}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и, в частности, для функции $g(z) = e^{\omega z}$, где величина ω может быть и комплексной, получаем выражение

$$\langle e^{\omega \xi} f(\xi + \eta) \rangle_{\xi} = \exp \left\{ \Theta \left(\frac{1}{i} \left(\omega + \frac{d}{d\eta} \right) \right) - \Theta \left(\frac{d}{id\eta} \right) \right\} \langle f(\xi + \eta) \rangle_{\xi}. \quad (3.15)$$

В качестве примеров использования полученных выше формул, рассмотрим случайные величины ξ двух типов.

1. Величина ξ — гауссова случайная величина с плотностью вероятностей

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp \left\{ -\frac{v^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \Theta(v) = -\frac{v^2 \sigma^2}{2}$$

и, следовательно,

$$M_1 = K_1 = \langle \xi \rangle = 0, \quad M_2 = K_2 = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle, \quad K_{n>2} = 0.$$

Рекуррентное равенство (3.13) в этом случае принимает вид

$$M_n = (n-1)\sigma^2 M_{n-2}, \quad n = 2, \dots, \quad (3.16)$$

откуда следует, что

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (2n-1)!! \sigma^{2n}.$$

Для средних значений (3.12) и (3.15) в этом случае получаем выражения

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_\xi = \sigma^2 \left\langle \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\rangle_\xi, \quad \langle e^{\omega \xi} f(\xi) \rangle_\xi = \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\} \langle f(\xi + \omega \sigma^2) \rangle_\xi. \quad (3.17)$$

Из формул (3.17) также вытекают формулы, полезные для практических применений:

$$\langle e^{\omega \xi} \rangle_\xi = \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\}, \quad \langle \xi e^{\omega \xi} \rangle_\xi = \omega \sigma^2 \exp \left\{ \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} \right\}$$

и т. д.

Если же величина является случайным гауссовым вектором с компонентами ξ_i ($\langle \xi_i \rangle_\xi = 0$, $i = 1, \dots, n$), то характеристическая функция описывается равенством

$$\Phi(\mathbf{v}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} B_{ij} v_i v_j \right\}, \quad \Theta(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2} B_{ij} v_i v_j,$$

где матрица $B_{ij} = \langle \xi_i \xi_j \rangle$ и по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В этом случае вместо (3.17) легко получить равенство

$$\langle \xi f(\xi) \rangle_\xi = B \left\langle \frac{df(\xi)}{d\xi} \right\rangle_\xi. \quad (3.18)$$

2. Величина $\xi \equiv n$ — целочисленная случайная величина, распределенная по закону Пуассона:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}},$$

где $\bar{n}$ — среднее значение величины n . Для нее имеем

$$\Phi(v) = \exp \{ \bar{n} (e^{iv} - 1) \}, \quad \Theta(v) = \bar{n} (e^{iv} - 1).$$

Для такой случайной величины рекуррентное равенство (3.13) и равенство (3.12) принимают вид

$$M_l = \bar{n} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(l-1)!}{k!(l-1-k)!} M_k \equiv \bar{n} \langle (n+1)^{l-1} \rangle, \quad \langle n f(n) \rangle = \bar{n} \langle f(n+1) \rangle. \quad (3.19)$$

3.2. Случайные процессы, поля и их характеристики

3.2.1. Общие замечания. Если мы имеем случайную функцию $z(t)$ (случайный процесс), то все ее статистические характеристики в фиксированный момент времени t описываются, очевидно, одновременной плотностью вероятностей

$$P(t; z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle, \quad (3.20)$$

параметрически зависящей от времени, с помощью равенства

$$\langle f(z(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) P(t; z).$$

Интегральная функция распределения для этого процесса, определяющая вероятность того, что в момент времени t процесс $z(t) < Z$, вычисляется по формуле

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(t; z),$$

и, следовательно,

$$F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle, \quad F(t, \infty) = 1, \quad (3.21)$$

где $\theta(z)$ — функция Хевисайда, равная нулю при $z < 0$ и единице при $z > 0$.

Отметим, что сингулярная дельта-функция Дирака, стоящая под знаком усреднения в (3.20),

$$\varphi(t; z) = \delta(z(t) - z),$$

называется *индикаторной функцией*.

Аналогичным образом определяется двухвременная плотность вероятностей

$$P(t_1, t_2; z_1, z_2) = \langle \varphi(t_1, t_2; z_1, z_2) \rangle$$

и, вообще, n -точечная плотность вероятностей

$$P(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) = \langle \varphi(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) \rangle,$$

где n -точечная индикаторная функция

$$\varphi(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n) = \delta(z(t_1) - z_1) \dots \delta(z(t_n) - z_n).$$

Процесс $z(t)$ называется *стационарным*, если все его статистические характеристики инвариантны относительно сдвига во времени на произвольную величину τ , т. е.

$$P(t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau; z_1, \dots, z_n) = P(t_1, \dots, t_n; z_1, \dots, z_n).$$

В частности, одновременная плотность вероятностей вообще не зависит от времени, а корреляционная функция зависит от разности времен:

$$B_z(t_1, t_2) = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle = B_z(t_1 - t_2).$$

Отметим, что для стационарного процесса фурье-образ корреляционной функции называется *временной спектральной функцией* (или просто *временным спектром*):

$$\Phi_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt B_z(t) e^{i\omega t}.$$

Аналогичным образом определяются как одноточечная плотность вероятностей для случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$P(t, \mathbf{x}; f) = \langle \varphi(t, \mathbf{x}; f) \rangle, \quad (3.22)$$

так и многоточечная плотность вероятностей

$$P(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n) = \langle \varphi(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n) \rangle, \quad (3.23)$$

где индикаторные функции

$$\varphi(t, \mathbf{x}; f) = \delta(f(\mathbf{x}, t) - f),$$

$$\varphi(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n) = \delta(f(\mathbf{x}_1, t_1) - f_1) \dots \delta(f(\mathbf{x}_n, t_n) - f_n). \quad (3.24)$$

Здесь для определенности через $\mathbf{x}$ и t обозначены пространственные и временная координаты, хотя в физических задачах роль временной координаты в ряде случаев может играть и одна выделенная пространственная координата.

Случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ называется пространственно однородным, если все его статистические характеристики инвариантны относительно сдвига в пространстве на произвольный вектор $\mathbf{a}$, т. е.

$$P(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x}_n + \mathbf{a}; f_1, \dots, f_n) = P(t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; f_1, \dots, f_n).$$

В этом случае одноточечная плотность вероятностей $P(t, \mathbf{x}; f) = P(t; f)$ не зависит от $\mathbf{x}$, а пространственная корреляционная функция

$$B_f(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle f(\mathbf{x}_1, t_1) f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = B_f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2; t_1, t_2).$$

Если, к тому же, случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ инвариантно и относительно поворота всех векторов $\mathbf{x}_i$ на произвольный угол, т. е. относительно поворота системы координат, то случайное поле $f(\mathbf{x}, t)$ называется однородным

и изотропным случайным полем. В этом случае корреляционная функция

$$B_f(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \langle f(\mathbf{x}_1, t_1) f(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = B_f(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|; t_1, t_2).$$

Соответствующее преобразование Фурье от корреляционной функции по пространственной переменной определяет пространственную спектральную функцию

$$\Phi_f(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{x} B_f(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

а преобразование Фурье от корреляционной функции стационарного во времени и однородного в пространстве случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$ определяет пространственно-временную спектральную функцию поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi_f(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_f(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} + \omega t)}.$$

Для изотропного случайного поля $f(\mathbf{x}, t)$ пространственная спектральная функция также изотропна в $\mathbf{k}$ -пространстве, т. е.

$$\Phi_f(\mathbf{k}, \omega) = \Phi_f(k, \omega).$$

Для полного статистического описания случайной функции $z(t)$ достаточно знать ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau v(\tau) z(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где функция $v(t)$ — произвольная (достаточно «хорошая») функция. Зная функционал $\Phi[v(\tau)]$ можно найти такие характеристики случайной функции $z(t)$, как ее среднее значение $\langle z(t) \rangle$, корреляционную функцию $\langle z(t_1) z(t_2) \rangle$, n -точечную моментную функцию $\langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle$ и т. д.

В самом деле, раскладывая характеристический функционал $\Phi[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора, получаем для него выражение через моментные функции процесса $z(t)$:

$$\Phi[v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] \Big|_{v=0}.$$

Таким образом, моментные функции случайного процесса $z(t)$ определяются через вариационные производные характеристического функционала. Вариационные производные и правила работы с ними определены в приложении А.

Представим теперь $\Phi[v(\tau)]$ в виде $\Phi[v(\tau)] = \exp\{\Theta[v(\tau)]\}$. Функционал $\Theta[v(\tau)]$ также можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n),$$

где функция

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Theta[v(\tau)] \Big|_{v=0}$$

называется *кумулянтной функцией* n -го порядка случайного процесса $z(t)$.

Аналогичным образом определяется и характеристический функционал случайного скалярного поля $f(\mathbf{x}, t)$:

$$\Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} dt v(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \},$$

а также моментные и кумулянтные функции n -го порядка:

$$M_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Phi[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0},$$

$$K_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \delta v(\mathbf{x}_n, t_n)} \Theta[v(\mathbf{x}', \tau)] \Big|_{v=0}.$$

Если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — векторное случайное поле, то следует считать $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ векторной функцией.

Как отмечалось выше, полное описание случайных процессов и полей содержится в их характеристических функционалах. Однако даже знание одноточечных плотностей вероятностей случайных процессов и полей дает определенную информацию об эволюции случайных процессов во всем интервале времен и структуре случайных полей в пространстве. Эту информацию можно получить на основе идей статистической топографии случайных процессов и полей.

3.2.2. Статистическая топография случайных процессов и полей.

Термин «статистическая топография» был, по-видимому, впервые введен в книге [31], хотя основные идеи восходят к существенно более ранним работам (см., например, книги [93, 116] и обзорную работу [150], где можно найти подробную библиографию вопроса).

Случайные процессы. Прежде всего, следуя работам [43, 51], обсудим понятие типичной реализации случайного процесса $z(t)$, которое характеризует основные особенности поведения отдельной реализации процесса в целом на всем интервале времен.

Типичная реализация случайного процесса. Назовем типичной реализацией случайного процесса $z(t)$ детерминированную кривую $z^*(t)$,

которая является *медианой интегральной функции распределения* (3.21) и определяется как решение алгебраического уравнения

$$F(t, z^*(t)) = 1/2. \quad (3.25)$$

Основанием для этого является свойство медианы, заключающееся в том, что для любого интервала времени (t_1, t_2) случайный процесс $z(t)$ как-бы «обвивает» кривую $z^*(t)$ таким образом, что среднее время, в течение которого выполняется неравенство $z(t) > z^*(t)$, совпадает со средним временем в течение которого выполняется обратное неравенство $z(t) < z^*(t)$ (рис. 2.1), т.е.

$$\langle T_{z(t) > z^*(t)} \rangle = \langle T_{z(t) < z^*(t)} \rangle = (t_2 - t_1)/2. \quad (3.26)$$

В самом деле, интегрируя равенство (3.25) по времени в интервале (t_1, t_2) , получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \frac{1}{2}(t_2 - t_1). \quad (3.27)$$

С другой стороны, в силу определения интегральной функции распределения (3.21), интеграл в левой части (3.27) равен

$$\int_{t_1}^{t_2} dt F(t, z^*(t)) = \langle T(t_1, t_2) \rangle, \quad (3.28)$$

где $T(t_1, t_2) = \sum_1^N \Delta t_k$ — общее время из интервала (t_1, t_2) , в течение которого реализация процесса $z(t)$ лежит выше кривой $z^*(t)$. Сопоставляя (3.27) с (3.28), и получаем равенство (3.26).

Кривая $z^*(t)$ может, естественно, существенно отличаться от любой конкретной реализации процесса $z(t)$ и не описывает величину возможных выбросов. Таким образом, кривая типичной реализации $z^*(t)$ случайного процесса $z(t)$, полученная с помощью одновременной плотности вероятностей, определена, тем не менее, на всем интервале времени $t \in (0, \infty)$. Для конкретных типов случайных процессов можно получить дополнительную информацию, характеризующую уже выбросы относительно этой кривой.

Статистика числа точек пересечения процесса с прямой. Одноточечная плотность вероятностей (3.20) для случайного процесса $z(t)$ является результатом усреднения сингулярной индикаторной функции по

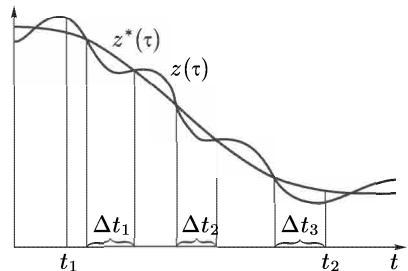


Рис. 2.1. К определению типичной реализации случайного процесса

ансамблю реализаций случайного процесса $z(t)$. Эта функция сосредоточена на точках пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$, определяемых как корни алгебраического уравнения

$$z(t_n) = z \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

и, следовательно, ее можно переписать в виде

$$\varphi(t; z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|p(t_k)|} \delta(t - t_k),$$

где $p(t) = \frac{d}{dt} z(t)$.

Число таких точек само является случайной величиной, которая, очевидно, описывается формулой

$$n(t, z) = \int_{-\infty}^t d\tau |p(\tau)| \varphi(\tau; z). \quad (3.29)$$

Следовательно, среднее значение числа точек пересечения процесса $z(t)$ прямой $z = \text{const}$ описывается корреляцией временной производной процесса $z(t)$ с ее индикаторной функцией или совместной одновременной плотностью вероятностей процесса $z(t)$ и ее временной производной $\frac{d}{dt} z(t)$.

Аналогичным образом легко определить и некоторые элементы статистики, связанной с точками максимума (минимума) и т. п. случайного процесса $z(t)$.

Случайные поля. В статистической топографии случайных полей основным объектом изучения, как и в обычной топографии горных массивов, является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством $f(\mathbf{r}, t) = f = \text{const}$.

Для анализа системы контуров (для простоты в данном разделе будем говорить о двумерном случае ($\mathbf{r} = \mathbf{R}$)), удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (3.24), сосредоточенную на них. Через функцию (3.24) выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где $f(\mathbf{R}, t) > f$ [52]:

$$S(t; f) = \int d\mathbf{R} \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \int_f^\infty df' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f'),$$

и общая «масса» поля, заключенная в этих областях:

$$M(t; f) = \int d\mathbf{R} f(\mathbf{R}, t) \theta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \int_f^\infty df' f' \int d\mathbf{R} \varphi(t, \mathbf{R}; f').$$

Как указывалось выше, среднее значение индикаторной функции (3.24) по ансамблю реализаций определяет одновременную во времени и одноточечную в пространстве плотность вероятностей

$$P(t, \mathbf{R}; f) = \langle \varphi(t, \mathbf{R}; f) \rangle = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \rangle,$$

и, следовательно, средние по ансамблю реализаций значения всех выражений непосредственно определяются этой плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $f(\mathbf{R}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) = \nabla f(\mathbf{R}, t)$. Так, например, величина

$$l(t; f) = \int d\mathbf{R} |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) = \oint dl \quad (3.30)$$

описывает общую длину контуров [183]–[187] и является обобщением формулы (3.29) на случайные поля.

Подынтегральное выражение в (3.30) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\varphi(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p}) = \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}), \quad (3.31)$$

и среднее значение формулы (3.30) связано с совместной одновременной плотностью вероятностей полей $f(\mathbf{R}, t)$ и его градиента $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$, определяемой путем усреднения индикаторной функции (3.31) по ансамблю реализаций, т. е. функцией

$$P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p}) = \langle \delta(f(\mathbf{R}, t) - f) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

Включение в рассмотрение пространственных производных второго порядка позволяет оценить общее число контуров $f(\mathbf{R}, t) = f = \text{const}$ с помощью приближенной (с точностью до незамкнутых линий) формулы [217]:

$$N(t; f) = N_{\text{in}}(t; f) - N_{\text{out}}(t; f) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{R} \kappa(t, \mathbf{R}; f) |\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)| \delta(f(\mathbf{R}, t) - f),$$

где $N_{\text{in}}(t; f)$, $N_{\text{out}}(t; f)$ — числа контуров, для которых вектор $\mathbf{p}$ направлен по внутренней и внешней нормали соответственно, а $\kappa(t, \mathbf{R}; f)$ — кривизна линии уровня.

Отметим, что для пространственно однородного поля $f(\mathbf{R}, t)$, когда соответствующие одноточечные плотности вероятностей $P(t, \mathbf{R}; f)$ и $P(t, \mathbf{R}; f, \mathbf{p})$ не зависят от $\mathbf{R}$, статистические средние всех выражений (без интегрирования по $\mathbf{R}$) будут описывать соответствующие удельные (приходящиеся на единицу площади) значения этих величин, если они, конечно, существуют.

Рассмотрим теперь несколько примеров случайных процессов.

3.2.3. Гауссов случайный процесс. Прежде всего обсудим случай непрерывного процесса — гауссового случайного процесса $z(t)$ со средним значением, равным нулю ($\langle z(t) \rangle = 0$), и корреляционной функцией

$B(t_1, t_2) = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle$. Его характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[v(\tau)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\}.$$

Для этого процесса единственной отличной от нуля кумулянтной функцией является его корреляционная функция $K_2(t_1, t_2) = B(t_1, t_2)$ и, следовательно,

$$\Theta[v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2). \quad (3.32)$$

Рассмотрим n -ю вариационную производную от $\Phi[v(\tau)]$. Для нее получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{\delta^n}{\delta v(t_1) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] &= \frac{\delta^{n-1}}{\delta v(t_2) \dots \delta v(t_n)} \frac{\delta \Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)} \Phi[v(\tau)] = \\ &= \frac{\delta^2 \Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1) \delta v(t_2)} \frac{\delta^{n-2}}{\delta v(t_3) \dots \delta v(t_n)} \Phi[v(\tau)] + \frac{\delta^{n-2}}{\delta v(t_3) \dots \delta v(t_n)} \frac{\delta \Theta[v(\tau)]}{\delta v(t_1)} \frac{\delta \Phi[v(\tau)]}{\delta v(t_2)}. \end{aligned}$$

Полагая теперь $v = 0$, получаем для моментных функций гауссового процесса $z(t)$ рекуррентное равенство

$$M_n(t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=2}^n B(t_1, t_k) M_{n-2}(t_2, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Отсюда следует, что для гауссового процесса со средним значением, равным нулю, все моментные функции нечетного порядка равны нулю, а моментные функции четного порядка определяются суммой, в которой процессы $z(t_i) z(t_k)$ усредняются парно всевозможными способами.

Если функция $v(\tau)$ в формуле (3.32) отлична от нуля только в интервале $0 < \tau < t$, то характеристический функционал

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left(i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right) \right\rangle = \exp \left\{ -\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right\} \quad (3.33)$$

зависит также и от времени t , и в этом случае функционал $\Phi[t; v(\tau)]$, как функция параметра t , удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -v(t) \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau) \Phi[t; v(\tau)], \quad \Phi[0; v(\tau)] = 1. \quad (3.34)$$

3.2.4. Разрывные случайные процессы. Перейдем теперь к примерам разрывных процессов. Разрывные процессы — это такие случайные функции, у которых изменение поведения во времени происходит в дискретные

моменты времени $t_1, t_2, \dots$, заданные статистическим образом. Прежде всего для описания разрывных процессов требуется знание статистики этих моментов времени или знание статистики числа $n(0, t)$ попадания точек t_i на интервал времени $(0, t)$. При этом имеет место равенство

$$n(0, t) = n(0, t') + n(t', t), \quad 0 \leq t' \leq t.$$

Сама величина $n(0, t)$ является случайным процессом, возможная реализация которого изображена на рис. 2.2.

Совокупность точек разрыва $t_1, t_2, \dots$ процесса $z(t)$ называется *поток точек*. Ниже мы будем рассматривать пуассоновский стационарный поток точек, у которого вероятность выпадения n точек на интервале (t_1, t_2) определяется формулой Пуассона

$$P_{n(t_1, t_2)=n} = \frac{[\overline{n(t_1, t_2)}]^n}{n!} e^{-\overline{n(t_1, t_2)}} \quad (3.35)$$

со средним значением числа точек на (t_1, t_2)

$$\overline{n(t_1, t_2)} = \nu |t_1 - t_2|,$$

где ν — среднее число точек, приходящихся на единицу времени. При этом число точек, выпадающих на неперекрывающихся интервалах, статистически независимо, а моменты времени выпадения точек на интервале (t_1, t_2) при условии, что их выпало n штук, также статистически независимы и равномерно распределены на интервале (t_1, t_2) . Длина интервала между соседними скачками имеет экспоненциальное распределение.

Пуассоновский поток точек — марковский процесс (см. следующий раздел).

Отметим, что величина (3.35)

$$P(t; n) = \langle \delta(n(0, t) - n) \rangle$$

— плотность вероятностей выпадения n точек на интервале времени $(0, t)$, как функция параметра t , удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\frac{d}{dt} P(t; n) = -\nu [P(t; n-1) - P(t; n)], \quad P(0; n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.36)$$

$$\frac{d}{dt} P(t; 0) = -\nu P(t; 0), \quad P(0; 0) = 1.$$

Уравнение (3.36) является частным случаем уравнений типа Колмогорова–Феллера (см. следующий раздел).

Рассмотрим теперь случайные процессы, точки разрыва которых являются пуассоновскими потоками точек. В физических модельных задачах в настоящее время в основном используются процессы трех типов: пуассоновский процесс, телеграфный процесс и обобщенный телеграфный процесс. Этим процессам мы и уделим основное внимание.

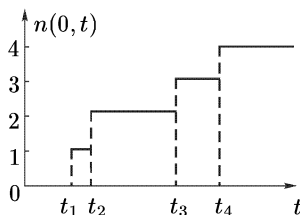


Рис. 2.2. Одна из возможных реализаций процесса $n(0, t)$

Пуассоновский (импульсный) случайный процесс. Пуассоновским (импульсным) случайным процессом $z(t)$ называется процесс, описываемый формулой

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i g(t - t_i), \quad (3.37)$$

где случайные величины ξ_i статистически независимы с плотностью вероятностей $p(\xi)$, а случайные точки t_k равномерно распределены на интервале $(0, T)$, так что их число n распределено по закону Пуассона с параметром $\bar{n} = \nu T$. Функция $g(t)$, описывающая форму импульса, — детерминированная функция ($g(t) = 0$ при $t < 0$).

Для пуассоновского случайного процесса $z(t)$ характеристический функционал имеет вид

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ \nu \int_0^t dt' \left[W \left(\int_{t'}^t d\tau v(\tau) g(t - \tau') \right) - 1 \right] \right\},$$

где

$$W(v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{i\xi v}$$

— характеристическая функция случайной величины ξ . Следовательно, функционал

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \left\{ \exp \left[i\xi \int_{t'}^t d\tau v(\tau) g(t - \tau') \right] - 1 \right\} \quad (3.38)$$

и кумулянтные функции имеют вид

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \int_0^{\min\{t_1, \dots, t_n\}} dt' g(t - t') \dots g(t_n - t').$$

Рассмотрим два важных для приложений случая пуассоновского процесса.

1. Пусть $g(t) = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ т. е. $z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \theta(t - t_i)$. В этом случае

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \langle \xi^n \rangle \min\{t_1, \dots, t_n\}.$$

Если при этом $\xi = 1$, то процесс $z(t) \equiv n(0, t)$ и для него

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = \nu \min\{t_1, \dots, t_n\},$$

$$\Theta[t; v(\tau)] = \nu \int_0^t dt' \left\{ \exp \left[i \int_{t'}^t d\tau v(\tau) \right] - 1 \right\}. \quad (3.39)$$

2. Пусть теперь $g(t) = \delta(t)$. В этом случае процесс

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \delta(t - t_i)$$

называется обычно *процессом дробового шума*. Этот процесс является частным случаем *дельта-коррелированных процессов* (см. раздел 3.5). Для такого процесса

$$\Theta[t; v(\tau)] = v \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \left\{ e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\} \quad (3.40)$$

и кумулянтные функции имеют вид

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = v \langle \xi^n \rangle \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Телеграфный случайный процесс. Рассмотрим теперь статистические характеристики телеграфного случайного процесса, определяемого формулой (рис. 2.3)

$$\begin{aligned} z(t) &= a(-1)^{n(0,t)} \\ (z(0) &= a, \quad z^2(t) \equiv a^2), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $n(t_1, t_2)$ — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале (t_1, t_2) .

Рассмотрим два случая.

1. Будем считать вначале, что a — детерминированная величина.

Для первых двух моментных функций процесса $z(t)$ имеем выражения

$$\begin{aligned} \langle z(t) \rangle &= a \sum_{n(0,t)=0}^{\infty} (-1)^{n(0,t)} P_{n(0,t)} = a e^{-2\overline{n(0,t)}} = a e^{-2vt}, \\ \langle z(t_1) z(t_2) \rangle &= a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)} \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t_2,t_1)} \rangle = \\ &= a^2 e^{-2\overline{n(t_2,t_1)}} = a^2 e^{-2v(t_1-t_2)} \quad (t_1 \geq t_2) \end{aligned}$$

и рекуррентное соотношение для моментных функций более высокого порядка при $(t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n)$:

$$\begin{aligned} M_n(t_1, \dots, t_n) &= \langle z(t_1) \dots z(t_n) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(0,t_1)+n(0,t_2)+n(0,t_3)+\dots+n(0,t_n)} \rangle = \\ &= a^2 \langle (-1)^{n(t_2,t_1)} \rangle \langle (-1)^{n(0,t_3)+\dots+n(0,t_n)} \rangle = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle M_{n-2}(t_3, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (3.42)$$

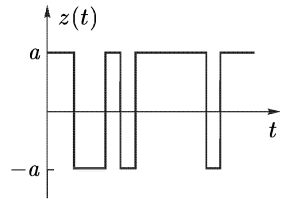


Рис. 2.3. Одна из возможных реализаций телеграфного случайного процесса

Рекуррентное равенство (3.42) очень похоже на соотношение (3.16) для гауссового процесса с экспоненциальной корреляционной функцией. Отличие состоит в том, что правая часть (3.42) соответствует только одному из слагаемых в (3.16), отвечающему определенному упорядочиванию во времени.

Рассмотрим теперь характеристический функционал для этого процесса:

$$\Phi_a[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где индексом a отмечен тот факт, что a — детерминированная величина. Используя разложение характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора и рекуррентное равенство (3.42), получаем разложение

$$\begin{aligned} \Phi_a[t; v(\tau)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t \dots \int_0^t dt_1 \dots dt_n M_n(t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n) = \\ &= 1 + ia \int_0^t dt_1 e^{-2v t_1} v(t_1) - a^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2v(t_1 - t_2)} v(t_1) v(t_2) \times \\ &\quad \times \sum_{n=2}^{\infty} i^n \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n M_n(t_3, \dots, t_n) v(t_3) \dots v(t_n). \quad (3.43) \end{aligned}$$

Сумма, стоящая в правой части (3.43), выражается через сам характеристический функционал, в результате чего получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Phi_a[t; v(\tau)] &= 1 + ia \int_0^t dt_1 e^{-2v t_1} v(t_1) - \\ &\quad - a^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-2v(t_1 - t_2)} v(t_1) v(t_2) \Phi_a[t_2; v(\tau)]. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Дифференцируя (3.44) по t , получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi_a[t; v(\tau)] = ia e^{-2v t} v(t) - a^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2v(t - t_1)} v(t_1) \Phi_a[t_1; v(\tau)]. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.45) в общем случае решить не удастся, и оно эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \left[2v + \frac{d \ln v(t)}{dt} \right] \frac{d}{dt} + a^2 v(t) \right\} \Phi_a[t; v(\tau)] = 0,$$

$$\Phi_a[0; v(\tau)] = 1, \quad \left. \frac{d}{dt} \Phi_a[t; v(\tau)] \right|_{t=0} = iav(0).$$

2. Пусть теперь величина a будет случайной величиной с плотностью вероятностей $p(a)$. Для получения характеристического функционала процесса $z(t)$ в этом случае требуется усреднить уравнение (3.45) по случайной величине a . Это в общем случае также не удастся осуществить. И только для случайной величины a с плотностью вероятностей

$$p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)],$$

для которой $\langle a \rangle = 0$, $a^2 = a_0^2$ (собственно, именно этот случай и называется обычно телеграфным процессом), можно усреднить уравнение (3.45). В результате получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -a_0^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-2v(t-t_1)} v(t_1) \Phi[t_1; v(\tau)], \quad (3.46)$$

или уравнение второго порядка

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \left[2v + \frac{d \ln v(t)}{dt} \right] \frac{d}{dt} + a_0^2 v(t) \right\} \Phi[t; v(\tau)] = 0, \quad (3.47)$$

$$\Phi[0; v(\tau)] = 1, \quad \left. \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] \right|_{t=0} = 0.$$

Отметим, что в частном случае $v(t) \equiv v$ уравнение (3.47) решается и его решение имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi[t; v] &= \left\langle \exp \left\{ i v \int_0^t d\tau z(\tau) \right\} \right\rangle = \\ &= e^{-vt} \left\{ \cosh \sqrt{v^2 - a_0^2 v^2} t + \frac{v}{\sqrt{v^2 - a_0^2 v^2}} \sinh \sqrt{v^2 - a_0^2 v^2} t \right\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Таким образом, это выражение является одноточечной характеристической функцией случайного процесса $\xi(t) = \int_0^t d\tau z(\tau)$.

Остановимся теперь на одной важной предельной теореме, связанной с телеграфными случайными процессами.

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi_N(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t),$$

где все $z_k(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы со средним значением, равным нулю, и корреляционной функцией, равной

$$\langle z(t) z(t+\tau) \rangle = \frac{\sigma^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}.$$

В этом случае характеристический функционал процесса $z_k(t)$ описывается уравнением (3.46)

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -\frac{\sigma^2}{N} v(t) \int_0^t dt_1 e^{-\alpha(t-t_1)} v(t_1) \Phi[t_1; v(\tau)],$$

откуда следует, что $\Phi[t; v(\tau)] \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$.

Для характеристического функционала случайного процесса $\xi_N(t)$ име-
ем выражение

$$\Phi_N[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \xi_N(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = \{ \Phi[t; v(\tau)] \}^N,$$

и, следовательно, он описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi_N[t; v(\tau)] = -\sigma^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-\alpha(t-t_1)} v(t_1) \frac{\Phi[t_1; v(\tau)]}{\Phi[t; v(\tau)]}.$$

Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \ln \Phi_\infty[t; v(\tau)] = -\sigma^2 v(t) \int_0^t dt_1 e^{-\alpha(t-t_1)} v(t_1),$$

которое означает, что процесс $\xi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N(t)$ — гауссов случайный процесс с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

т. е. гауссовый марковский процесс (см. следующий раздел). Таким образом, процесс $\xi_N(t)$ для конечного числа N является аппроксимирующим процессом с конечным числом состояний для гауссового марковского процесса. Такая аппроксимация может быть полезной для изучения не только самого гауссового процесса, но и различных функций от него. Так, например, для процесса

$$z(t) = x^2(t) - \langle x^2(t) \rangle,$$

где $x(t)$ — гауссов марковский процесс с экспоненциальной корреляционной функцией, аппроксимация конечным отрезком ряда принимает вид

$$z_N(t) = \sum_{i \neq j=1}^N z_i(t) z_j(t), \quad z(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} z_N(t).$$

С такой формой записи гораздо удобнее работать при анализе стохастических уравнений, чем непосредственно с самими процессами $x(t)$ и $z(t)$.

Обобщенный телеграфный процесс. Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой

$$z(t) = a_{n(0,t)}. \quad (3.49)$$

Здесь $n(0, t)$ — случайная последовательность целых чисел, описанная выше, а величины a_k считаются статистически независимыми с распределением вероятностей $p(a)$. На рис. 2.4 представлена одна из возможных реализаций этого процесса. Для процесса $z(t)$ имеем

$$\langle z(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle a_k \delta_{k,n(0,t)} \rangle = \langle a \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle z(t_1) z(t_2) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \langle a_k a_l \rangle \langle \delta_{k,n(0,t_1)} \delta_{l,n(0,t_2)} \rangle = \\ &= \langle a^2 \rangle \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,n(0,t_1)} \rangle \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta_{k,n(0,t_2)} \rangle \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle \right\} = \\ &= \langle a^2 \rangle e^{-\nu(t_1-t_2)} + \langle a^2 \rangle (1 - e^{-\nu(t_1-t_2)}) \quad (t_1 \geq t_2), \end{aligned}$$

и т. д. При этом вероятность отсутствия скачков на интервале (t_2, t_1) равна

$$P_{n(t_2,t_1)=0} = \langle \delta_{0,n(t_2,t_1)} \rangle = e^{-\nu|t_1-t_2|}.$$

Для такого процесса не удастся получить соотношение, аналогичное формуле (3.43), и при выводе уравнения для характеристического функционала существенно, что этот процесс — марковский (см. следующий раздел). Это уравнение имеет вид интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi[t, v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ ia \int_0^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle e^{-\nu t} + \\ &+ \nu \int_0^t dt_1 e^{-\nu(t-t_1)} \left\langle \exp \left\{ ia \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle \Phi[t_1, v(\tau)]. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (3.50) соответствует отсутствию скачков на интервале $(0, t)$, а второе — количеству скачков на $(0, t)$ от одного до бесконечности. Здесь момент времени t_1 является моментом появления последнего скачка.

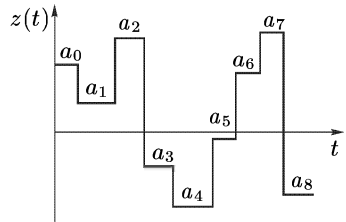


Рис. 2.4. Одна из возможных реализаций обобщенного телеграфного случайного процесса

Отметим, что при

$$p(a) = \frac{1}{2}[\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$$

уравнение (3.50) совпадает с уравнением, соответствующим телеграфному процессу, с заменой v на $v/2$. Это естественно, так как для этого процесса, в отличие от телеграфного, в момент времени наступления скачка величина $z(t)$ с вероятностью $1/2$ может изменить знак, что приводит к удвоению среднего времени между скачками.

Выше мы отмечали, что пуассоновский поток точек и процессы, построенные на таких точках, — марковские процессы. Остановимся теперь на этом важном классе случайных процессов более подробно.

3.3. Марковские процессы

3.3.1. Общие свойства. В предыдущем разделе мы рассмотрели характеристический функционал процесса $z(t)$, который описывает все его статистические характеристики. Если теперь в нем положить

$$v(t) = \sum_{k=1}^n v_k \delta(t - t_k),$$

то характеристический функционал переходит в совместную характеристическую функцию случайных величин $z_k = z(t_k)$:

$$\Phi_n(v_1, \dots, v_n) = \left\langle \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n v_k z(t_k) \right\} \right\rangle,$$

преобразование Фурье которой определяет совместную плотность вероятностей для значений процесса $z(t)$ в дискретные моменты времени:

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = \langle \delta(z(t_1) - z_1) \dots \delta(z(t_n) - z_n) \rangle. \quad (3.51)$$

Пусть выбранные моменты времени упорядочены следующим образом:

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n.$$

Тогда, по определению условной вероятности,

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = p_n(z_1, t_1 | z_2, t_2; \dots; z_n, t_n) P_{n-1}(z_2, t_2; \dots; z_n, t_n), \quad (3.52)$$

где p_n — условная плотность вероятностей для значения процесса $z(t)$ в момент времени t_1 при условии, что в моменты времени t_k ($k = 2, \dots, n$) функция $z(t)$ принимала значения, равные $z(t_k) = z_k$. Если процесс $z(t)$ таков, что для всех $t_1 > t_2$ условная плотность вероятностей однозначно определяется значением z_2 , принятым в момент времени t_2 , и совсем не зависит от предшествующей истории, т. е.

$$p_n(z_1, t_1 | z_2, t_2; \dots; z_n, t_n) = p(z_1, t_1 | z_2, t_2), \quad (3.53)$$

то этот процесс называется марковским процессом или процессом без последствий. Функция

$$p(z, t | z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) | z(t_0) = z_0 \rangle \quad (t > t_0) \quad (3.54)$$

при этом называется *плотностью вероятностей перехода*. Полагая в (3.54) $t = t_0$, получаем равенство

$$p(z, t_0 | z_0, t_0) = \delta(z - z_0).$$

Подставим выражение (3.52) в формулу (3.51). Получается рекуррентное равенство для n -точечной по времени плотности вероятностей процесса $z(t)$. Итерируя это равенство, находим связь P_n с одноточечным распределением вероятностей ($t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$):

$$P_n(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = p(z_1, t_1 | z_2, t_2) \dots p(z_{n-1}, t_{n-1} | z_n, t_n) P(t_n, z_n). \quad (3.55)$$

Таким образом, все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются всего двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t | z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P(t, z)$. При этом величина $p(z, t | z_0, t_0)$, как функция своих аргументов, удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению, называемому *уравнением Смогуховского* (или *уравнением Колмогорова–Чепмена*). Для его вывода заметим, что если процесс $z(t)$ принимает в фиксированные моменты времени $t_0 < t_1 < t$ значения $z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1, z(t) = z$, то имеет место условие согласованности

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz_1 P_3(z, t; z_1, t_1; z_0, t_0) = P_2(z, t; z_0, t_0). \quad (3.56)$$

Подставляя теперь в (3.56) выражения для P_3 и P_2 из (3.55), получаем искомое уравнение

$$p(z, t; z_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 p(z, t | z_1, t_1) p(z_1, t_1; z_0, t_0). \quad (3.57)$$

Если проинтегрировать уравнение (3.57) по z_0 , то получается линейное интегральное уравнение для одноточечной плотности вероятностей $P(t, z)$:

$$P(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 p(z, t | z_1, t_1) P(t_1, z_1). \quad (3.58)$$

Интегральные уравнения (3.57) и (3.58) позволяют получать дифференциальные или интегро-дифференциальные уравнения для простейших марковских процессов. Приведем классификацию простейших марковских процессов с непрерывным временем:

- 1) дискретные процессы,
- 2) непрерывные процессы,

3) дискретно-непрерывные процессы, у которых в некоторые моменты времени имеются скачки, а в промежутке между скачками процесс ведет себя как непрерывный случайный процесс.

Дискретный марковский процесс. Рассмотрим дискретный марковский процесс $z(t)$, который может принимать только дискретные значения $z_1, \dots, z_n$, причем переход с одного значения на другое происходит в случайные моменты времени. Введем плотность вероятностей перехода:

$$p_{ij}(t, t_0) = \langle \delta(z(t) - z_i) | z(t_0) = z_j \rangle, \quad \sum_i p_{ij}(t, t_0) = 1 \quad (t_0 < t), \quad (3.59)$$

которая есть условная вероятность принятия процессом $z(t)$ значения z_i в момент времени t , если в момент времени t_0 он имел значение z_j . При этом очевидно, что

$$p_{ij}(t_0, t_0) = 1. \quad (3.60)$$

При малых временных интервалах $\Delta t \rightarrow 0$

$$p_{ij}(t + \Delta t, t) = \delta_{ij} + a_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad (3.61)$$

где $a_{ij}(t)\Delta t$ — вероятность перехода из состояния z_j в момент времени t в состояние z_i за время Δt . При этом

$$a_{ij}(t) > 0 \quad (i \neq j), \quad a_{jj}(t) = - \sum_{i(i \neq j)} a_{ij}(t), \quad (3.62)$$

так как должно сохраняться условие нормировки (3.59).

Исходя из уравнения Смолуховского (3.57) легко показать, используя (3.61), что вероятность $p_{ij}(t, t_0)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t, t_0) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) p_{kj}(t, t_0) \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (3.63)$$

Учитывая, что одноточечная вероятность

$$P_i(t) = \sum_j p_{ij}(t, t_0) p_j^0, \quad (3.64)$$

где p_j^0 — начальные вероятности состояний ($p_j^0 = P_j(t_0)$), для нее получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt} P_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) P_k(t), \quad P_i(t_0) = p_i^0. \quad (3.65)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим три примера.

1. Пусть случайный процесс $z(t) = n(0, t)$ — число скачков на интервале $(0, t)$, которые происходят в случайные моменты времени. Возможная реализация этого процесса была приведена на рис. 2.2. Процесс $z(t)$ может принимать лишь целочисленные значения $0, 1, 2, \dots$, и при этом очевидно,

что

$$p_{ij}(t, t_0) = 0 \quad \text{при} \quad i < j, \quad t \geq t_0.$$

Предполагая далее, что вероятность одного изменения состояния в интервале времени $(t, t + \Delta t)$ равна $\nu \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность отсутствия скачков равна $1 - \nu \Delta t + o(\Delta t)$, и пренебрегая возможностью двух и более скачков на этом интервале (эти предположения и определяют пуассоновский поток точек — моментов времени возникновения скачков) можно записать систему уравнений (3.65) для данного процесса, которая принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_0(t) &= -\nu P_0(t), \quad P_0(0) = 1, \\ \frac{d}{dt} P_i(t) &= -\nu [P_i(t) - P_{i-1}(t)], \quad P_{i \neq 0}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

и совпадает с системой уравнений (3.36). При этом индекс i соответствует значению $n(0, t) = n$.

2. В качестве второго примера рассмотрим простейший марковский процесс с конечным числом состояний — телеграфный случайный процесс, принимающий значения $z(t) = \pm a$. Этот процесс рассматривался с других позиций в предыдущем разделе. Пусть вероятности перехода за малое время Δt ($a \rightarrow -a$) и ($-a \rightarrow a$) равны $\nu \Delta t + o(\Delta t)$, вероятности сохранить свои состояния за время Δt соответственно равны $1 - \nu \Delta t + o(\Delta t)$, а вероятности начальных состояний равны p_a^0 и

$$p_{-a}^0 = 1 - p_a^0.$$

В этом случае вероятности перехода удовлетворяют системе уравнений (3.63) с параметрами

$$a_{11} = a_{22} = -\nu, \quad a_{12} = a_{21} = \nu,$$

решение которой имеет вид ($\tau = t - t_0$)

$$p_{11}(\tau) = p_{22}(\tau) = \frac{1}{2} [1 + e^{-2\nu\tau}], \quad p_{12}(\tau) = p_{21}(\tau) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\nu\tau}]. \quad (3.67)$$

Аналогичным образом получаем и выражения для одноточечных вероятностей

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2} + \left[p_a^0 - \frac{1}{2} \right] e^{-2\nu\tau}, \quad P_2(\tau) = \frac{1}{2} - \left[p_a^0 - \frac{1}{2} \right] e^{-2\nu\tau}. \quad (3.68)$$

Если в начальный момент времени процесс $z(t)$ имеет фиксированное значение $z(t_0) = a$, то $p_a^0 = 1$ и (3.68) принимает вид

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2} [1 + e^{-2\nu\tau}], \quad P_2(\tau) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\nu\tau}]. \quad (3.69)$$

Эти распределения вероятностей выходят на стационарный режим при $t \rightarrow \infty$, $P_{1,2}(\infty) = 1/2$. Если же в начальный момент времени $p_a^0 = p_{-a}^0 = 1/2$, то процесс $z(t)$ остается стационарным и в другие моменты времени.

Отметим, что для телеграфного процесса формулы (3.67) можно объединить в одну формулу, а именно:

$$p(z, t | z_0, t_0) = \delta(z - z_0)P_1(\tau) + \delta(z + z_0)P_2(\tau), \quad (3.70)$$

где $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ описываются формулами (3.69), а $\tau = t - t_0$. Дифференцируя (3.70) по времени, получаем уравнение для плотности вероятностей перехода $p(z, t | z_0, t_0)$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = -v \{p(z, t | z_0, t_0) - p(-z, t | z_0, t_0)\} \quad (3.71)$$

с начальным условием

$$p(z, t_0 | z_0, t_0) = \delta(z - z_0).$$

Таким образом, плотность вероятностей перехода телеграфного процесса $p(z, t | z_0, t_0)$ удовлетворяет линейному операторному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = \hat{L}(z)p(z, t | z_0, t_0), \quad (3.72)$$

где оператор $\hat{L}(z)$ определяется равенством

$$\hat{L}(z)f(z) = -v\{f(z) - f(-z)\}. \quad (3.73)$$

Отметим, что это общее свойство всех марковских процессов. Однако записать уравнение для плотности вероятностей перехода в такой компактной форме, как (3.72), не всегда удается. Так, в общем случае произвольного марковского процесса с конечным числом состояний роль оператора $\hat{L}(z)$ играет матрица $\|a_{ij}\|$ в (3.63) и сама функция $p(z, t | z_0, t_0)$ является матрицей-функцией. В этом случае для любой реализации процесса $z(t)$ выполняется тождество

$$[z(t) - z_1][z(t) - z_2] \dots [z(t) - z_n] = 0. \quad (3.74)$$

Раскрывая скобки в (3.74), видим, что имеется алгебраическая связь между различными степенями процесса $z(t)$:

$$z^n(t) = (z_1 + \dots + z_n)z^{n-1}(t) + \dots + (-1)^{n+1}z_1 z_2 \dots z_n. \quad (3.75)$$

Для телеграфного случайного процесса, т. е. процесса с двумя возможными состояниями $z(t) = \pm a$, тождество (3.75) сильно упрощается

$$z^2(t) = a^2,$$

что оказывается очень полезным для анализа стохастических уравнений с флуктуациями параметров в виде телеграфного процесса.

3. В качестве примера скачкообразного процесса рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс. Этот процесс определяется формулой

(3.49), и плотность вероятностей перехода для него:

$$p(z, t | z_0, t_0) = \langle \delta(z(t) - z) | z(t_0) = z_0 \rangle = \\ = \delta(z - z_0) P_{n(0,t)=0} + \langle \delta(z - a) \rangle_a \{ P_{n(0,t)=1} + P_{n(0,t)=2} + \dots \}. \quad (3.76)$$

Учитывая теперь условие нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n(0,t)=n} = 1,$$

получаем окончательное выражение

$$p(z, t | z_0, t_0) = \delta(z - z_0) P_0(t, t_0) + p_a(z) \{ 1 - P_0(t, t_0) \}, \quad (3.77)$$

где $P_0(t, t_0) = e^{-\nu(t-t_0)}$ — вероятность отсутствия скачков на интервале времени (t_0, t) , а $p_a(z)$ — вероятность принять случайной величине a значение z .

Одноточечное распределение вероятностей процесса $z(t)$ является, очевидно, стационарным распределением:

$$P(t, z) = p_a(z). \quad (3.78)$$

Величина (3.77), как функция переменной t , очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = -\nu \{ p(z, t | z_0, t_0) - p_a(z) \}, \quad (3.79)$$

которое можно записать в операторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = \hat{L}(z) p(z, t | z_0, t_0), \quad (3.80)$$

где оператор $\hat{L}(z)$ является в данном случае интегральным оператором:

$$\hat{L}(z) f(z) = -\nu \left\{ f(z) - p_a(z) \int_{-\infty}^{\infty} dz' f(z') \right\}. \quad (3.81)$$

Непрерывные марковские процессы. Рассмотрим теперь непрерывные марковские процессы. В этом случае следствием уравнения Смолуховского (3.57) является операторное уравнение для плотности вероятностей перехода $p(z, t | z_0, t_0)$ вида

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} [B_n(z, t) p(z, t | z_0, t_0)], \quad (3.82)$$

где функции $B_n(z, t)$ определяются с помощью равенств

$$\begin{aligned} B_n(z, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle \{z(t + \Delta t) - z(t)\}^n | z(t) \rangle = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} dz \{z(t + \Delta t) - z(t)\}^n p(z, t + \Delta t | z, t). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Следствием уравнения (3.82) является аналогичное уравнение для однофакторной плотности вероятностей $P(t, z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} [B_n(z, t) P(t, z)].$$

Важным частным случаем непрерывных процессов является случай, когда все коэффициенты уравнения (3.82), начиная с третьего, равны нулю. Марковские процессы, обладающие этим свойством, называются *диффузионными процессами*. Для таких процессов уравнение (3.82) упрощается и принимает вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial z} [B_1(z, t) p(z, t | z_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [B_2(z, t) p(z, t | z_0, t_0)], \quad (3.84)$$

которое называется *уравнением Фоккера–Планка*. Функции $B_1(z, t)$ и $B_2(z, t)$ называются *коэффициентами сноса и диффузии*.

В частном случае постоянства коэффициента $B_2(z, t)$ и при $B_1(z, t) = -B_1 z$ процесс $z(t)$ является гауссовым марковским процессом с экспоненциальной корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t + \tau) \rangle = \sigma^2(t) e^{-B_1 |\tau|}.$$

В этом случае вместо (3.84) имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = \hat{L}(z) p(z, t | z_0, t_0),$$

где оператор

$$\hat{L}(z) = B_1 \frac{\partial}{\partial z} z + \frac{1}{2} B_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.85)$$

Отметим, что можно доказать и обратное утверждение, а именно: гауссов процесс с экспоненциальной корреляционной функцией является марковским процессом.

Дискретно-непрерывные марковские процессы. Рассмотрим теперь одномерный дискретно-непрерывный марковский процесс. Здесь может быть два случая — чисто разрывного (скачкообразного) процесса и процесса, имеющего, помимо скачкообразного, также непрерывное изменение. В случае скачкообразных процессов случайный процесс $z(t)$ характеризуется двумя функциями $q(z, t)$ и $u(z, z', t)$, такими, что за малый промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ процесс с вероятностью $1 - q(z, t) \Delta t$ сохранит свое

прежнее значение и с вероятностью $u(z, z', t)\Delta t\Delta z'$ перейдет из z в z'' , где $z' < z'' < z' + \Delta z'$. При этом, конечно, имеет место условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' u(z, z', t) = q(z, t). \quad (3.86)$$

Для такого процесса следствием уравнения Смолуховского (3.57) является интегро-дифференциальное уравнение, называемое *уравнением Колмогорова–Феллера*:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = -q(z, t)p(z, t | z_0, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} dz' u(z, z', t)p(z', t | z_0, t_0). \quad (3.87)$$

Аналогичный вид имеет и уравнение для одноточечной плотности вероятностей.

Если же, помимо скачкообразного процесса, имеется еще непрерывное изменение, то к правой части (3.87) добавляется правая часть (3.84). Отметим, что рассмотренный выше случайный процесс $z(t) = n(0, t)$ — число скачков на интервале времени $(0, t)$ — является частным случаем скачкообразного процесса, и, соответственно, дифференциально-разностные уравнения (3.66) являются частными случаями интегро-дифференциального уравнения (3.87).

Очевидно, что уравнение (3.80) для обобщенного телеграфного процесса является частным случаем уравнения Колмогорова–Феллера (3.87) с параметрами $q(z, t) = v$ и $u(z, z', t) = vp_a(z)$.

Выше мы рассмотрели одномерные случайные процессы, однако очевидно, что все остается без изменения и в случае многомерных процессов, т. е. если $\mathbf{z}(t)$ является случайной векторной функцией. В частности, плотность вероятностей перехода

$$p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}) | \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \rangle$$

будет удовлетворять линейному операторному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, t_0) = \hat{L}(\mathbf{z})p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, t_0). \quad (3.88)$$

Отметим также, что плотность вероятностей перехода $p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, t_0)$, как функция своих аргументов, удовлетворяет не только уравнению (3.88) (которое называется *прямым уравнением*), но и уравнению по переменной t_0 (которое называется *обратным уравнением*):

$$\frac{\partial}{\partial t_0} p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, t_0) = \hat{L}^+(\mathbf{z}_0)p(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}_0, t_0), \quad (3.89)$$

где $\hat{L}^+(\mathbf{z}_0)$ — оператор, сопряженный оператору $\hat{L}(\mathbf{z})$. Уравнение (3.89) удобно для анализа задач, связанных с исследованием зависимостей от начальных пространственно-временных точек.

Выше мы говорили о том, что все статистические характеристики марковского процесса $z(t)$ описываются только двумя функциями — плотностью вероятностей перехода $p(z, t \mid z_0, t_0)$ и одноточечной плотностью вероятностей $P(t, z)$. Однако для статистического анализа стохастических уравнений требуется все-таки знание характеристического функционала случайного процесса $z(t)$.

3.3.2. Характеристический функционал марковского процесса.

В общем случае марковского процесс $z(t)$ не удается получить замкнутое уравнение для его характеристического функционала $\Phi[t; v(\tau)] = \langle \phi[t; v(\tau)] \rangle$, где

$$\phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\}.$$

Можно лишь получить замкнутое уравнение для функционала

$$\Psi[z, t; v(\tau)] = \langle \delta(z(t) - z) \phi[t; v(\tau)] \rangle, \quad (3.90)$$

описывающего статистические корреляции процесса $z(t)$ с его предисто-рией. Характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ связан с функционалом $\Psi[z, t; v(\tau)]$ формулой

$$\Phi[t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz \Psi[z, t; v(\tau)]. \quad (3.91)$$

Чтобы вывести уравнение для $\Psi[z, t; v(\tau)]$, заметим, что имеет место равенство

$$\phi[t; v(\tau)] = 1 + i \int_0^t dt_1 z(t_1) v(t_1) \phi[t_1; v(\tau)]. \quad (3.92)$$

Подставляя (3.92) в (3.90), получаем выражение

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(t, z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \langle \delta(z(t) - z) z(t_1) \phi[t_1; v(\tau)] \rangle, \quad (3.93)$$

где $P(t, z) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$ — одновременная плотность вероятностей случайной величины $z(t)$.

Перепишем (3.93) в виде

$$\begin{aligned} \Psi[t, z; v(\tau)] = & P(t, z) + \\ & + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \langle \delta(z(t) - z) \delta(z(t_1) - z_1) \phi[t_1; v(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.94)$$

В уравнении (3.94) можно выполнить усреднение, учитывая марковость процесса $z(t)$, и мы получаем замкнутое интегральное уравнение

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(t, z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t | z_1, t_1) \Psi[t_1, z_1; v(\tau)], \quad (3.95)$$

где $p(z, t; z_0, t_0)$ — плотность вероятностей перехода.

Отметим, что интегральное уравнение, аналогичное уравнению (3.95), можно получить и для функционала

$$\Psi[t', t, z; v(\tau)] = \langle \delta(z(t') - z) \varphi[t; v(\tau)] \rangle \quad (t' \geq t). \quad (3.96)$$

Оно имеет вид

$$\Psi[t', t, z; v(\tau)] = P(t', z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t' | z_1, t_1) \Psi[t_1, z_1; v(\tau)]. \quad (3.97)$$

Интегрируя (3.95) по z , получаем дополнительную связь характеристического функционала $\Phi[t; v(\tau)]$ с функционалом $\Psi[z, t; v(\tau)]$, которую можно записать в виде

$$\frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 \Psi[t, z_1; v(\tau)] = \Psi[t; v(\tau)]. \quad (3.98)$$

Умножая (3.95) на z и интегрируя по z , получаем связь функционала $\Psi[t; v(\tau)]$ с функционалом $\Psi[t, z; v(\tau)]$:

$$\Psi[t; v(\tau)] = \langle z(t) \rangle + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \langle z(t) | z_1, t_1 \rangle \Psi[t_1, z_1; v(\tau)]. \quad (3.99)$$

В общем случае уравнение (3.95) представляет собой сложное интегральное уравнение, конкретный вид которого определяется функциями $P(t, z)$ и $p(z, t; z_0, t_0)$, т.е. характеристиками марковского процесса. Его можно записать также в виде интегро-дифференциального уравнения, если предварительно продифференцировать по t и использовать (3.72):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi[t, z; v(\tau)] &= izv(t) \Psi[t, z; v(\tau)] + \widehat{L}(z) \Psi[t, z; v(\tau)], \\ \Psi[0, z; v(\tau)] &= P(0, z). \end{aligned} \quad (3.100)$$

В этом случае и функционал $\Psi[t', t, z; v(\tau)]$ (3.96) удовлетворяет уравнению по t' с начальным условием при $t' = t$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} \Psi[t', t, z; v(\tau)] &= \widehat{L}(z) \Psi[t', t, z; v(\tau)] \quad (t' > t), \\ \Psi[t, t, z; v(\tau)] &= \Psi[t, z; v(\tau)]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Таким образом, уравнение (3.100) вместе с равенствами (3.98) и (3.99) и является исходным уравнением для определения характеристического функционала марковского процесса. Проиллюстрируем это на конкретных примерах процессов, рассмотренных выше.

Для телеграфного процесса из (3.70) следует, что

$$\langle z(t) | z_1, t_1 \rangle = z_1 e^{-2v(t-t_1)}, \quad \langle z(t) \rangle = 0,$$

и мы получаем уравнение (3.18).

Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс. Для этого процесса уравнение (3.100) для функционала $\Psi[t, z; v(\tau)]$, в силу (3.81), принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi[t, z; v(\tau)] &= \{i z v(t) - v\} \Psi[t, z; v(\tau)] + v p_a(z) \Phi[t; v(\tau)], \\ \Psi[0, z; v(\tau)] &= p_a(z). \end{aligned} \quad (3.102)$$

При выводе (3.102) использовалось равенство (3.91). Решая уравнение (3.102) относительно функционала $\Psi[t, z; v(\tau)]$, получаем связь его с характеристическим функционалом

$$\begin{aligned} \Psi[t, z; v(\tau)] &= p_a(z) \exp \left\{ -vt + i z \int_0^t d\tau v(\tau) \right\} + \\ &+ v p_a(z) \int_0^t dt_1 \Phi[t_1; v(\tau)] \exp \left\{ -v(t-t_1) + i z \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Интегрируя (3.103) по z , получаем замкнутое интегральное уравнение для характеристического функционала $\Phi[t, v(\tau)]$:

$$\begin{aligned} \Phi[t, v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i a \int_0^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a e^{-vt} + \\ &+ v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \left\langle \exp \left\{ i a \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a \Phi[t_1, v(\tau)], \end{aligned} \quad (3.104)$$

совпадающее с уравнением (3.50).

Умножая (3.103) на произвольную функцию $F(z)$ и интегрируя по z , получаем равенство

$$\begin{aligned} \left\langle F(z(t)) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle &= \left\langle F(a) \exp \left\{ i a \int_0^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a e^{-vt} + \\ &+ v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \left\langle F(a) \exp \left\{ i a \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a \Phi[t_1, v(\tau)]. \end{aligned} \quad (3.105)$$

В частности, при $F(z) = z$ из (3.105) следует интегро-дифференциальное уравнение для характеристического функционала $\Phi[t, v(\tau)]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{iv(t)dt} \Phi[t, v(\tau)] = & \left\langle a \exp \left\{ ia \int_0^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a e^{-vt} + \\ & + v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \left\langle a \exp \left\{ ia \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a \Phi[t_1, v(\tau)], \quad (3.106) \end{aligned}$$

эквивалентное интегральному уравнению (3.104).

Для обобщенного телеграфного процесса также легко найти связь функционала $\Psi[t', t, z; v(\tau)]$ с функционалом $\Psi[t, z; v(\tau)]$, которая имеет вид ($t' \geq t$)

$$\Psi[t', t, z; v(\tau)] = \Psi[t, z; v(\tau)] e^{-v(t'-t)} + p_a(z) \Phi[t; v(\tau)] [1 - e^{-v(t'-t)}]. \quad (3.107)$$

3.4. Расщепление корреляций

3.4.1. Общие соотношения. Ограничимся для простоты одномерными случайными процессами (обобщения на многомерные случаи не вызывают затруднений). Нам необходимо уметь вычислять корреляцию $\langle F[z(\tau)] R[z(\tau)] \rangle$, где $F[z(\tau)]$ — функционал, явно зависящий от процесса $z(t)$, а $R[z(\tau)]$ — функционал, который может зависеть от процесса $z(t)$ как явным, так и неявным образом.

Для вычисления этого среднего значения рассмотрим вспомогательные функционалы $F[z(\tau) + \eta_1(\tau)]$ и $R[z(\tau) + \eta_2(\tau)]$, где $\eta_i(t)$ — произвольные детерминированные функции, и вычислим корреляцию

$$\langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle.$$

Интересующую нас корреляцию получим, положив в окончательном результате $\eta_i(\tau) = 0$.

Введенные вспомогательные функционалы можно разложить в функциональные ряды Тейлора по $z(\tau)$ и представить их в виде

$$F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] = e^{-\int_0^\infty d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)}} F[\eta_1(\tau)],$$

$$R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] = e^{-\int_0^\infty d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)}} R[\eta_2(\tau)],$$

вводя оператор функционального сдвига. Тогда для корреляции получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle \exp \left\{ \Theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)} + \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)} \right) \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)} \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)} \right] \right\} \right\rangle \times \\ \times \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle. \quad (3.108) \end{aligned}$$

Эта формула позволяет представить среднее значение произведения функционалов через произведение средних значений самих функционалов. И основная сложность задачи в такой форме записи заключена в вычислении действия конкретного оператора

$$\left\langle \exp \left\{ \Theta \left[\frac{1}{i} \left(\frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)} + \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)} \right) \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_1(\tau)} \right] - \Theta \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_2(\tau)} \right] \right\} \right\rangle$$

на произведение усредненных функционалов.

В статистических задачах в ряде случаев интенсивность флуктуаций параметров можно считать малой. В таких случаях функционал $F[z(\tau)]$ можно разложить в ряд Тейлора по $z(\tau)$ и ограничиться линейным членом. Для линейного функционала $F[z(\tau)] \equiv z(t')$ получаем выражение для корреляции:

$$\langle z(t') R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Omega \left[t'; \frac{\delta}{i \delta \eta(\tau)} \right] \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle,$$

где функционал

$$\Omega[t'; v(\tau)] = \frac{\left\langle z(t') \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle} = \frac{\delta}{i \delta v(t')} \Theta[v(\tau)].$$

Полагая теперь $\eta(\tau) = 0$, получаем выражение

$$\langle z(t') R[z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t'; \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] R[z(\tau)] \right\rangle. \quad (3.109)$$

Если воспользоваться разложением функционала $\Theta[v(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора (3.31), то функционал

$$\Omega[t'; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n)$$

и, следовательно, выражение (3.109) принимает вид

$$\langle z(t') R[z(\tau)] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) \left\langle \frac{\delta^n R[z(\tau)]}{\delta z(t_1) \dots \delta z(t_n)} \right\rangle. \quad (3.110)$$

Отметим, что если функционал $R[z(\tau)]$ имеет степенной вид

$$R[z(\tau)] = z(t_1) \dots z(t_n),$$

то формула (3.110) описывает рекуррентную связь между n -точечным моментом процесса $z(t)$ и его кумулянтами.

В случае, когда $z(t) = z$ — случайная величина, оператор $\int dt \delta / \delta z(t)$ переходит в обычную производную d/dz и, следовательно, формула (3.110) переходит в формулу (3.12). Таким образом, формула (3.110) представляет собой обобщение формулы (3.12) на случайные процессы.

В физических задачах, удовлетворяющих условию динамической причинности по времени t , статистические характеристики решения в момент времени t определяются статистическими характеристиками случайного процесса $z(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t$, которые полностью описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ \Theta[t; v(\tau)] \right\} = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае полученные формулы остаются в силе для вычисления статистических средних $\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle$ при $t' < t$, $\tau \leq t$, т. е. имеет место равенство

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t', t; \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \quad (3.111)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i \delta v(t')} \Theta[t; v(\tau)] = \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_n K_{n+1}(t', t_1, \dots, t_n) v(t_1) \dots v(t_n). \end{aligned} \quad (3.112)$$

В случае, когда $t' = t - 0$, формула в (3.111) по-прежнему имеет место, т. е.

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle \Omega \left[t, t; \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (3.113)$$

Однако разложение (3.112) не всегда дает правильный предельный переход при $t' \rightarrow t - 0$ (т. е. операции предельного перехода и разложения в функциональный ряд Тейлора могут быть и не перестановочны). В этом случае

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{1}{\Phi[t; v(\tau)]} \frac{d}{idv(t)} \Phi[t; v(\tau)] = \frac{d}{idv(t)} \Theta[t; v(\tau)] \quad (3.114)$$

и статистические средние в (3.111) и (3.113) могут быть разрывны при $t' = t - 0$.

Рассмотрим несколько примеров случайных процессов.

3.4.2. Гауссов процесс. Для гауссового случайного процесса $z(t)$ все формулы, полученные выше, существенно упрощаются. В этом случае логарифм характеристического функционала $\Phi[v(\tau)]$ имеет вид (среднее значение процесса $z(t)$ считаем равным нулю) (3.32) и, следовательно, формула (3.108) запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \\ = \exp \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \frac{\delta^2}{\delta\eta_1(\tau_1) \delta\eta_2(\tau_2)} \right) \times \\ \times \langle F[z(\tau) + \eta_1(\tau)] \rangle \langle R[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.115)$$

В формуле (3.115) можно выполнить операцию вариационного дифференцирования по $\eta_1(\tau)$ (что сводится к функциональному сдвигу) и положить $\eta_1(\tau) = 0$. В результате получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau)] R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle F \left[z(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(\tau, \tau_1) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau_1)} \right] \right\rangle \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Пусть, например, $F[z(\tau)] = z(t)$. Тогда формула (3.116) принимает вид

$$\langle z(t) R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \frac{\delta}{\delta\eta(\tau_1)} \langle R[z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle. \quad (3.117)$$

Заменяя теперь дифференцирование по $\eta(\tau)$ на дифференцирование по $z(\tau)$ и полагая $\eta(\tau) = 0$, получаем равенство

$$\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(t, \tau_1) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R[z(\tau)] \right\rangle, \quad (3.118)$$

которое в физической литературе принято называть *формулой Фурутицу–Новикова* по имени авторов, впервые ее получивших ([70, 131]). Отметим, что эта формула является результатом интегрирования по частям в соответствующем функциональном пространстве ([123]).

Легко написать и многомерное обобщение формулы (3.118), которое можно записать в виде

$$\langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) R[\mathbf{z}] \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle z_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}) z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{z}]}{\delta z_{j_1, \dots, j_n}(\mathbf{r}')} \right\rangle, \quad (3.119)$$

где через $\mathbf{r}$ обозначены все непрерывные аргументы случайного поля векторного поля $\mathbf{z}(\mathbf{r})$, а через $i_1, \dots, i_n$ — индексные аргументы. По повторяющимся индексным аргументам в правой части (3.119) предполагается суммирование.

Если в формуле (3.116) положить $F[z(\tau)] = \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\}$, то при $\eta(\tau) = 0$ получаем равенство

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau z(\tau) v(\tau) \right) R[z(\tau)] \right\rangle = \\ = \Phi[v(\tau)] \left\langle R \left[z(\tau) + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 B(\tau, \tau_1) v(\tau_1) \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.120)$$

т.е. в правой части (3.120) под знаком усреднения к случайному процессу $z(\tau)$ добавляется детерминированная мнимая составляющая. Формулы (3.118) и (3.120) представляют обобщение формул (3.18) на случайные гауссовы процессы.

Если случайный процесс $z(\tau)$ определен только на отрезке времени $[0, t]$, то функционал $\Theta[t, v(\tau)]$ будет определяться выражением

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2), \quad (3.121)$$

а функционалы $\Omega[t', t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ будут линейными функционалами:

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i \delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t', \tau) v(\tau), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{i v(t) dt} \Theta[t, v(\tau)] = i \int_0^t d\tau B(t, \tau) v(\tau), \end{aligned} \quad (3.122)$$

и, следовательно, формулы (3.111), (3.113) будут иметь вид

$$\langle z(t') R[t, z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau B(t', \tau) \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau)} \right\rangle \quad (t' \leq t), \quad (3.123)$$

совпадающий с равенством (3.118) при выполнении условия

$$\frac{\delta R[t; z(\tau)]}{\delta z(\tau)} = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0, \quad \tau > t. \quad (3.124)$$

Отметим, что в этом случае формула (3.120) принимает вид

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left(i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right) R[t; z(\tau)] \right\rangle = \\ = \Phi[t; v(\tau)] \left\langle R \left[t; z(\tau) + i \int_0^t d\tau_1 B(\tau, \tau_1) v(\tau_1) \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.125)$$

где $\Phi[t; v(\tau)]$ — характеристический функционал гауссового случайного процесса $z(t)$.

Отметим также, что для гауссового марковского процесса может быть получена простая формула, описывающая корреляцию функционалов

$$\langle F[t_1; z(\tau_1)] R[t_2; z(\tau_2)] \rangle,$$

где $\tau_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau_2$ (см. следующий раздел).

3.4.3. Пуассоновский процесс. Пуассоновский процесс определен выражением (3.37), и логарифм его характеристического функционала описывается формулой (3.38). Формулы (3.112), (3.114) для функционалов $\Omega[t'; t; v(\tau)]$, $\Omega[t, t; v(\tau)]$ теперь принимают вид

$$\begin{aligned} \Omega[t', t; v(\tau)] &= \frac{\delta}{i \delta v(t')} \Theta[t, v(\tau)] = -i \int_0^{t'} d\tau g(t' - \tau) \dot{W} \left(\int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right), \\ \Omega[t, t; v(\tau)] &= \frac{d}{i v(t) dt} \Theta[t, v(\tau)] = -i \int_0^t d\tau g(t - \tau) \dot{W} \left(\int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right), \end{aligned} \quad (3.126)$$

где $\dot{W}(v) = \frac{dW(v)}{dv} = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) e^{i\xi v}$.

Равенства (3.126) можно, сменив порядок интегрирования, переписать следующим образом:

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \int_0^{t'} d\tau g(t' - \tau) \exp \left\{ i \xi \int_{\tau}^t d\tau_1 v(\tau_1) g(\tau_1 - \tau) \right\} \quad (t' \leq t), \quad (3.127)$$

и для корреляции пуассоновского случайного процесса $z(t)$ с функциями от него получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle z(t')R[t; z(\tau)] \rangle = \\ = v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \int_0^{t'} d\tau' g(t' - \tau') \langle R[t; z(\tau) + \xi g(\tau - \tau')] \rangle \quad (t' \leq t). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Частным случаем пуассоновского процесса, как говорилось ранее, является случайный процесс $n(0, t)$, описывающий число скачков на интервале времени $(0, t)$. Для этого процесса $p(\xi) = \delta(\xi - 1)$ и $g(t) = \theta(t)$, и, следовательно, формула (3.128) принимает особенно простой вид

$$\langle n(0, t)R[t; n(0, \tau)] \rangle = v \int_0^{t'} d\tau \langle R[t; n(0, \tau) + \theta(t' - \tau)] \rangle \quad (t' \leq t). \quad (3.129)$$

Равенство (3.129) является обобщением на пуассоновские процессы формулы (3.23) для пуассоновских случайных величин.

3.4.4. Телеграфный случайный процесс. Обратимся теперь к случаю телеграфного процесса, определяемого формулой (3.41)

$$z(t) = a(-1)^{n(0, t)}, \quad (3.130)$$

где a — детерминированная величина. Для этого процесса моментные функции n -го порядка удовлетворяют рекуррентному равенству (3.42), откуда немедленно следует выражение

$$\langle z(t_1) z(t_2) R[z(\tau)] \rangle = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau)] \rangle, \quad (3.131)$$

справедливое для произвольного функционала $R[z(\tau)]$ при условии $\tau \leq t_2 \leq t_1$ [109]. Для доказательства (3.131) следует разложить функционал $R[z(\tau)]$ в ряд Тейлора по $z(\tau)$ и использовать формулы (3.42).

Пусть теперь величина a случайна с плотностью распределения вероятностей

$$p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]. \quad (3.132)$$

В этом случае $M_{2k+1} = 0$ и, кроме равенства (3.131), имеет место также равенство [109]

$$\begin{aligned} \langle F[z(\tau_1)] z(t_1) z(t_2) R[z(\tau_2)] \rangle = \\ = \langle F[z(\tau_1)] \rangle \langle z(t_1) z(t_2) \rangle \langle R[z(\tau_2)] \rangle + \langle F[z(\tau_1)] z(t_1) \rangle \langle z(t_2) R[z(\tau_2)] \rangle, \end{aligned} \quad (3.133)$$

справедливое для любых $\tau_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \tau_2$ и произвольных функционалов $F[z(\tau_1)]$ и $R[z(\tau_2)]$. В самом деле, разложение функционала $R[z(\tau_2)]$ в ряд

Тейлора по $z(\tau)$ можно записать в виде суммы

$$R[z(\tau_2)] = \sum_{2k} + \sum_{2k+1},$$

где первая сумма содержит четное число сомножителей $z(\tau)$, а вторая — нечетное. Учитывая, далее, формулу (3.42) и равенства

$$\langle R[z(\tau_2)] \rangle = \left\langle \sum_{2k} \right\rangle, \quad \langle z(t_2) R[z(\tau_2)] \rangle = \left\langle z(t_2) \sum_{2k} \right\rangle,$$

получаем формулу (3.133).

Формулу (3.133) можно переписать в другом виде. Обозначим функционал $F[z(\tau_1)]z(t_1)$ через $F[t_1; z(\tau_1)]$, где $\tau_1 \leq t_1$, а функционал $z(t_2)R[z(\tau_2)]$ — через $R[t_2; z(\tau_2)]$, где $t_1 \leq t_2 \leq \tau_2$. Тогда формула (3.133) запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle F[t_1; z(\tau_1)] R[t_2; z(\tau_2)] \rangle &= \langle F[t_1; z(\tau_1)] \rangle \langle R[t_2; z(\tau_2)] \rangle + \\ &+ \frac{1}{a_0^2} e^{-2v(t_2-t_1)} \langle z(t_1) F[t_1; z(\tau_1)] \rangle \langle z(t_2) R[t_2; z(\tau_2)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Так как функционалы $F[z(\tau_1)]$ и $R[z(\tau_2)]$ в (3.133) произвольны, то и функционалы $F[t_1; z(\tau_1)]$ и $R[t_2; z(\tau_2)]$ в (3.134) также произвольны.

Формулы (3.131) и (3.133) содержат билинейную комбинацию процесса $z(t)$, что не всегда удобно для практических применений.

Для вычисления же корреляции $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$, где $\tau \leq t$, как указывалось выше, надо знать характеристический функционал процесса $z(t)$, который в данном случае неизвестен. Мы имеем только уравнения (3.45) и (3.46), которые описывают связь между функционалом

$$\Psi[t; v(\tau)] = \frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle$$

и самим характеристическим функционалом $\Phi[t; v(\tau)]$ в виде

$$\begin{aligned} \left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle &= \\ &= ae^{-2vt} + ia^2 \int_0^t dt_1 e^{-2v(t-t_1)} v(t_1) \left\langle \exp \left\{ i \int_0^{t_1} d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Этой связи достаточно для расщепления корреляции $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$, т. е. представления ее непосредственно через среднее значение $\langle R[t; z(\tau)] \rangle$.

В самом деле, для любого функционала $R[t; z(\tau)]$, где $\tau \leq t$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle z(t) R[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle &= \left\langle z(t) \exp \left\{ \int_0^t d\tau z(\tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right\} \right\rangle R[t; \eta(\tau)] = \\ &= a R[t; \eta(\tau)] e^{-2vt} + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2v(t-t_1)} \frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} \langle R[t; z(\tau) \theta(t_1 - \tau) + \eta(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Здесь $\eta(t)$ — произвольная детерминированная функция. Переходя к пределу $\eta \rightarrow 0$, получаем окончательный результат:

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = a R[t; 0] e^{-2vt} + a^2 \int_0^t dt_1 e^{-2v(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle, \quad (3.136)$$

где функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; z(\tau) \theta(t_1 - \tau + 0)]. \quad (3.137)$$

Если случайная величина a имеет распределение вероятностей с плотностью (3.132), то дополнительное усреднение (3.136) по a приводит к равенству

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-2v(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] \right\rangle. \quad (3.138)$$

Формула (3.138) по внешнему виду очень напоминает равенство для расщепления корреляции гауссового процесса $z(t)$, имеющего экспоненциальную корреляционную функцию (т.е. гауссового марковского процесса), с функционалом от него $R[t; z(\tau)]$. Отличие состоит в том, что в правой части (3.138) стоит не сам функционал $R[t; z(\tau)]$, а функционал, «обрезанный» по процессу $z(\tau)$.

Отметим, что корреляцию $\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle$, где $t' \geq t$, $\tau < t$ можно записать в виде

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \frac{1}{a_0^2} \langle z(t') z(t) z(\tau) R[t; z(\tau)] \rangle$$

и, следовательно, согласно формуле (3.131), имеет место равенство

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = e^{-2v(t'-t)} \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle \quad (t' \geq t). \quad (3.139)$$

Аналогичным образом получаем также выражения

$$\langle z(t') R[t_0, t; z(\tau)] \rangle = e^{-2v(t_0-t')} \langle z(t_0) R[t_0, t; z(\tau)] \rangle \quad (t' \geq t), \quad (3.140)$$

где $t' \leq t_0 \leq \tau \leq t$, а

$$\begin{aligned} \langle z(t_0) R[t_0, t; z(\tau)] \rangle = \\ = a_0^2 \int_{t_0}^t dt_1 e^{-2v(t_1-t_0)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} R[t_0, t; z(\tau)\theta(\tau-t_1+0)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Можно также показать [40, 155], что и в общем случае $\langle z(\xi) R[t_0, t; z(\tau)] \rangle$, где $t_0 \leq \xi \leq t$, $t_0 \leq \tau \leq t$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle z(\xi) R[t_0, t; z(\tau)] \rangle = \\ = a_0^2 \int_{t_0}^{\xi} dt_1 e^{-2v(\xi-t_1)} \left\langle \frac{\delta R[t_0, t; z_1(\tau)\theta(\tau-\xi) + z_2(\tau)\theta(t_1-\tau+0)]}{\delta z_2(t_1)} \right\rangle + \\ + a_0^2 \int_{\xi}^t dt_1 e^{-2v(t_1-\xi)} \left\langle \frac{\delta R[t_0, t; z_1(\tau)\theta(\xi-\tau) + z_2(\tau)\theta(\tau-t_1+0)]}{\delta z_2(t_1)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.142)$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с одинаковой корреляционной функцией вида

$$\langle z(t) z(t') \rangle = a_0^2 e^{-2v|t-t'|}.$$

Пределы интегрирования t_0 , t в (3.142) могут принимать любые значения от $-\infty$ до ∞ . При $\xi = t$ или $\xi = t_0$ формула (3.142) переходит соответственно в формулы (3.138), (3.141).

Если в формуле (3.142) положить $v(\tau) = v$ и

$$R[t_0, t; z(\tau)] = \exp \left\{ i v \int_{t_0}^t d\tau z(\tau) \right\},$$

то, с учетом равенства (3.48), получим выражение

$$\begin{aligned} \left\langle z(\xi) \exp \left\{ i v \int_{t_0}^t d\tau z(\tau) \right\} \right\rangle = \\ = \frac{i v a_0^2}{\lambda} e^{-v(t-t_0)} \left\{ \sinh \lambda(t-t_0) + \frac{2v}{\lambda} \sinh \lambda(t-\xi) \sinh \lambda(\xi-t_0) \right\}, \end{aligned} \quad (3.143)$$

где $\lambda = \sqrt{v^2 - a_0^2 v^2}$.

Продифференцируем теперь формулу (3.136) по времени t . Учитывая, что при этом не надо дифференцировать по верхнему пределу интеграла

в правой части (3.136), получаем выражение [83, 211]

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle z(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (3.144)$$

которое называется *формулой дифференцирования*.

Следует обратить внимание на одно существенное обстоятельство. В формуле дифференцирования (3.144) функционал $R[t; z(\tau)]$ является произвольным функционалом и, в частности, может быть равен просто процессу $z(t-0)$. Вообще говоря, реализация случайного телеграфного процесса является обобщенной функцией. Производная по времени от этого процесса также является обобщенной функцией (последовательностью дельта-функций) и при этом, вообще говоря,

$$z(t) \frac{d}{dt} z(t) \neq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} z^2(t) \equiv 0.$$

Эти обобщенные функции, как и любые обобщенные функции, определяют только функционалами, построенными на них. Такими функционалами в интересующем нас случае являются усредненные величины, обозначенные (...), и формула дифференцирования, приведенная выше, описывает дифференциальную связь между различными функционалами, связанными со случайным процессом $z(t)$ и его односторонними производными при $t \rightarrow t-0$ dz/dt , d^2z/dt^2 и т. д. Так, например, из формулы (3.144) вытекают равенства

$$\left\langle z(t) \frac{d}{d\tau} z(\tau) \right\rangle \Big|_{\tau=t-0} = 2\nu \langle z^2 \rangle, \quad \left\langle z(t) \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau) \right\rangle \Big|_{\tau=t-0} = 4\nu^2 \langle z^2 \rangle$$

и т. д., которые, разумеется, можно получить и непосредственно, дифференцируя, например, корреляционную функцию $\langle z(t) z(t') \rangle$ по t' ($t' < t$) при $t' \rightarrow t-0$.

Выше был рассмотрен случай корреляции случайного процесса $z(t)$ с функционалом от него. Если же мы имеем произвольную функцию от телеграфного процесса $F(z(t))$, то, очевидно, выполняется равенство

$$F(z(t)) = \frac{F(a) + F(-a)}{2} + \frac{F(a) - F(-a)}{2a} z(t), \quad (3.145)$$

и все, что справедливо для телеграфного процесса $z(t)$, будет справедливо, с небольшими изменениями, и для процесса $F(z(t))$.

3.4.5. Обобщенный телеграфный процесс. Рассмотрим теперь обобщенный телеграфный процесс, описываемый формулой (3.49). Для этого процесса связь функционала

$$\Psi[t; v(\tau)] = \frac{1}{iv(t)} \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = \left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle$$

с характеристическим функционалом процесса $z(t)$, $\Phi[t; v(\tau)]$, описывается формулой (3.106)

$$\begin{aligned} \left\langle z(t) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle &= \left\langle a \exp \left\{ i a \int_0^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a e^{-vt} + \\ &+ v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \left\langle a \exp \left\{ i a \int_{t_1}^t d\tau v(\tau) \right\} \right\rangle_a \Phi[t_1, v(\tau)], \end{aligned}$$

которая, как и в случае телеграфного процесса, позволяет выразить корреляцию $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$, где $R[t; z(\tau)]$ — произвольный функционал, через среднее значение самого функционала. В самом деле, действуя так же, как и в случае телеграфного процесса, получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle z(t) R[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle &= \Psi \left[t; \frac{\delta}{i \delta \eta(\tau)} \right] R[t; \eta(\tau)] = \langle \tilde{a} R[t; \eta(\tau) + \tilde{a}] \rangle_{\tilde{a}} e^{-vt} + \\ &+ v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \langle \tilde{a} R[t; \eta(\tau) + \tilde{a} \theta(\tau - t_1) + z(\tau) \theta(t_1 - \tau)] \rangle_{\tilde{a}, z}, \quad (3.146) \end{aligned}$$

где $\eta(\tau)$ — произвольная функция, а случайная величина $\tilde{a}$ имеет плотность вероятностей $p(\tilde{a})$ и статистически независима от процесса $z(t)$. Полагая теперь $\eta(\tau) = 0$, получаем окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle &= \langle \tilde{a} R[t; \tilde{a}] \rangle_{\tilde{a}} e^{-vt} + \\ &+ v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \langle \tilde{a} R[t; \tilde{a} \theta(\tau - t_1) + z(\tau) \theta(t_1 - \tau)] \rangle_{\tilde{a}, z}. \quad (3.147) \end{aligned}$$

Отметим также, что в случае обобщенного телеграфного процесса для корреляции $\langle F(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle$, где $F(z)$ — произвольная функция, в силу равенства (3.105), имеет место формула, аналогичная (3.147):

$$\begin{aligned} \langle F(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle &= \langle F(\tilde{a}) R[t; \tilde{a}] \rangle_{\tilde{a}} e^{-vt} + \\ &+ v \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \langle F(\tilde{a}) R[t; \tilde{a} \theta(\tau - t_1) + z(\tau) \theta(t_1 - \tau)] \rangle_{\tilde{a}, z}. \quad (3.148) \end{aligned}$$

3.4.6. Марковские процессы общего типа. Процессы телеграфного типа, рассмотренные выше, являются простейшими марковскими процессами. Рассмотрим теперь те следствия, которые можно получить для корреляции функционалов из одного лишь условия марковости процесса $z(t)$.

Для марковского процесса $z(t)$ общего вида не существует замкнутого уравнения для характеристического функционала. Имеется только интегральное уравнение (3.95) для функционала

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = \left\langle \delta(z(t) - z) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle,$$

описывающего статистическую связь процесса $z(t)$ в момент времени t с его предысторией:

$$\Psi[t, z; v(\tau)] = P(t, z) + i \int_0^t dt_1 v(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 z_1 p(z, t | z_1, t_1) \Psi[t_1, z_1; v(\tau)], \quad (3.149)$$

где $P(t, z)$ — одновременная плотность вероятностей, а $p(z, t | z_0, t_0)$ — плотность вероятностей перехода для процесса $z(t)$. В этом случае, действуя методом, подробно описанным выше, можно получить интегральное равенство с вариационными производными для корреляции

$$\langle \delta(z(t) - z) R[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle \quad (\tau \leq t)$$

вида

$$\langle \delta(z(t) - z) R[t; z(\tau) + \eta(\tau)] \rangle = \Psi \left[t, z; \frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)} \right] R[t; \eta(\tau)], \quad (3.150)$$

где $\eta(t)$ — произвольная функция.

Для марковских процессов $z(t)$ функции $P(t, z)$ и $p(z, t | z_0, t_0)$ удовлетворяют линейным операторным уравнениям (3.72)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, z) = \hat{L}(z) P(t, z), \quad \frac{\partial}{\partial t} p(z, t | z_0, t_0) = \hat{L}(z) p(z, t | z_0, t_0), \quad (3.151)$$

где $\hat{L}(z)$ — интегро-дифференциальный оператор по переменной z .

Продифференцируем равенство (3.150) по времени t . При этом учтем, что, в силу определения функционала $R[t; z(\tau)]$, вариационная производная

$$\frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} R[t; \eta(\tau)] \sim \theta(t - t_1)$$

и не надо дифференцировать интеграл (3.149) по верхнему пределу (который можно положить равным ∞). Кроме того, операция дифференцирования перестановочна с операцией вариационного дифференцирования (см. приложение А — формула (А.12)), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} R[t; \eta(\tau)] = \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \frac{\partial}{\partial t} R[t; \eta(\tau)].$$

В результате, с учетом уравнений (3.151), приходим к формуле дифференцирования рассматриваемой корреляции по времени (функцию $\eta(t)$ можно

положить равной нулю) [39, 40, 155]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta(z(t) - z) R[t; z(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle \delta(z(t) - z) \frac{\partial}{\partial t} R[t; z(\tau)] \right\rangle + \widehat{L}(z) \langle \delta(z(t) - z) R[t; z(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Умножим теперь равенство (3.152) на $f(z)$, где $f(z)$ — произвольная функция, и проинтегрируем по z . В результате получаем формулу дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle f(z(t)) \frac{\partial}{\partial t} R[t; z(\tau)] \right\rangle + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \widehat{L}(z) \langle \delta(z(t) - z) R[t; z(\tau)] \rangle, \end{aligned} \quad (3.153)$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle f(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle - \left\langle f(z(t)) \frac{\partial}{\partial t} R[t; z(\tau)] \right\rangle = \\ = \left\langle R[t; z(\tau)] \left[\widehat{L}^+(z) f(z) \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.154)$$

где введен оператор $\widehat{L}^+(z)$, сопряженный оператору $\widehat{L}(z)$.

Таким образом, формулы (3.152)–(3.154) определяют правила дифференцирования по времени корреляций функций от марковского процесса $z(t)$ с функционалами от него.

Отметим, что для всех марковских процессов, рассмотренных выше, для корреляции $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$ при нулевых средних значениях $z(t)$ правая часть (3.154) выражается через эту же корреляцию. Этот факт говорит скорее всего о том, что особой пользы от их практического применения ожидать не приходится. Однако в случаях телеграфного и обобщенного телеграфного процессов формула (3.154) полезна для анализа стохастических линейных уравнений. Так, для телеграфного процесса $z(t)$ правая часть (3.154) для корреляции $\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle$ имеет вид

$$-2\nu \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (3.155)$$

Для обобщенного же телеграфного процесса $z(t)$ правая часть (3.154) при условии $\langle f(a) \rangle = 0$ такова:

$$-\nu \langle f(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (3.156)$$

В частном случае $f(z) = z$ из (3.156) получаем

$$-\nu \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (3.157)$$

Остановимся теперь на некоторых обобщениях формул, полученных выше. Прежде всего отметим, что если мы имеем векторный марковский процесс $\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_N(t)\}$, описываемый оператором $\hat{L}(\mathbf{z})$, то функционал

$$\Psi[t, \mathbf{z}; \mathbf{v}(\tau)] = \left\langle \delta(\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}) \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau) \mathbf{v}(\tau) \right\} \right\rangle,$$

где $\mathbf{v}(t) = \{v_1(t), \dots, v_N(t)\}$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi[t, \mathbf{z}; \mathbf{v}(\tau)] = \left\{ \hat{L}(\mathbf{z}) + i \mathbf{z} \mathbf{v} \right\} \Psi[t, \mathbf{z}; \mathbf{v}(\tau)] \quad (3.158)$$

с начальным условием

$$\Psi[0, \mathbf{z}; \mathbf{v}(\tau)] = P_0(\mathbf{z}). \quad (3.159)$$

Теперь для корреляции $\langle F(\mathbf{z}(t)) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle$ не представляет труда выписать формулу дифференцирования по времени, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle F(\mathbf{z}(t)) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle &= \\ &= \left\langle F(\mathbf{z}(t)) \frac{\partial}{\partial t} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle + \left\langle R[t; \mathbf{z}(\tau)] \left[\hat{L}^+(\mathbf{z}) F(\mathbf{z}) \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.160)$$

где $\hat{L}^+(\mathbf{z})$ — сопряженный к $\hat{L}(\mathbf{z})$ оператор.

В важном частном случае, когда все компоненты вектора $\mathbf{z}(t)$ являются статистически независимыми марковскими процессами, описываемыми одним и тем же оператором $\hat{L}(\mathbf{z})$, формула (3.160) существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle F(\mathbf{z}(t)) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle &= \\ &= \left\langle F(\mathbf{z}(t)) \frac{\partial}{\partial t} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle + \sum_{k=1}^N \left\langle R[t; \mathbf{z}(\tau)] \left[\hat{L}^+(z_k) F(\mathbf{z}) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Так, например, для всех рассмотренных выше марковских процессов с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t + \tau) \rangle = \langle z^2 \rangle e^{-\alpha|\tau|} \quad (3.162)$$

имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k \right) \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle = \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial}{\partial t} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle. \quad (3.163)$$

Формула (3.163) определяет правило вынесения операции дифференцирования по времени из под знака среднего, и, в частности,

$$\left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} R[t; \mathbf{z}(t)] \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha k \right)^n \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; \mathbf{z}(t)] \rangle, \quad (3.164)$$

где $k = 1, \dots, N$.

3.5. Дельта-коррелированные случайные процессы

Особое место в физических задачах занимает случай, когда случайный процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный процесс. Важность этого случая обусловлена прежде всего тем, что во многих физических задачах такая аппроксимация флуктуаций параметров имеет ясную физическую природу и при этом для плотности вероятностей решений соответствующих динамических систем может быть получено замкнутое уравнение.

Для гауссового дельта-коррелированного во времени процесса корреляционная функция имеет вид

$$B(t_1, t_2) = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle = B(t_1) \delta(t_1 - t_2) \quad (\langle z(t) \rangle = 0).$$

В этом случае функционалы $\Theta[t; v(\tau)]$, $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ (3.121), (3.122), введенные ранее, равны

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) v^2(\tau),$$

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = i B(t') v(t'), \quad \Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{i}{2} B(t) v(t),$$

а формулы (3.123) существенно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \langle z(t') R[t; v(\tau)] \rangle &= B(t') \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')} R[t; v(\tau)] \right\rangle \quad (0 < t' < t), \\ \langle z(t) R[t; v(\tau)] \rangle &= \frac{1}{2} B(t) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; v(\tau)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Выражения (3.165) описывают скачок статистических средних при $t' = t$ для рассматриваемого гауссового дельта-коррелированного процесса. Существование этого скачка обусловлено сугубо дельта-коррелированностью процесса, если процесс не дельта-коррелирован, то никакого скачка нет (см. формулу (3.123)).

Дельта-коррелированный пуассоновский случайный процесс соответствует предельному переходу

$$g(t) \rightarrow \delta(t).$$

В этом случае логарифм характеристического функционала имеет простой вид (см. (3.40)) и, следовательно, формулы (3.127) для функционалов $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ принимают вид

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) e^{i\xi v(t')} \quad (t' < t),$$

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \frac{v}{iv(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \left[e^{i\xi v(t)} - 1 \right] = v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta e^{i\eta v(t)},$$

и для корреляции пуассоновского случайного процесса $z(t)$ с функционалами от него получаем выражения

$$\begin{aligned} \langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle &= v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \xi p(\xi) \langle R[t; z(\tau) + \xi \delta(\tau - t')] \rangle \quad (t' \leq t), \\ \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle &= v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \int_0^{\xi} d\eta \langle R[t; z(\tau) + \eta \delta(t - \tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Эти выражения также описывают скачок статистических средних при $t' = t$. Этот скачок, так же, как и для гауссового процесса, обусловлен дельта-коррелированностью пуассоновского процесса.

В общем случае дельта-коррелированного процесса $z(t)$ разложение логарифма характеристического функционала в функциональный ряд Тейлора имеет вид

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \quad (3.167)$$

а все кумулянтные функции при этом определяются выражениями

$$K_n(t_1, \dots, t_n) = K_n(t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Характерной чертой этих процессов, как видно из (3.167), является справедливость равенства

$$\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \dot{\Theta}[t; v(t)] \quad \left(\dot{\Theta}[t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta[t; v(\tau)] \right), \quad (3.168)$$

играющего принципиальную роль. Оно показывает, что величина $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-коррелированного процесса является не функционалом,

а просто функцией времени t . В этом случае функционалы $\Omega[t', t; v(\tau)]$ и $\Omega[t, t; v(\tau)]$ равны

$$\Omega[t', t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') v^n(t') \quad (t' < t),$$

$$\Omega[t, t; v(\tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) v^n(t),$$

а формулы для расщепления корреляций принимают вид

$$\begin{aligned} \langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} K_{n+1}(t') \left\langle \frac{\delta^n R[t; z(\tau)]}{\delta z^n(t')} \right\rangle \quad (t' < t), \\ \langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+1)!} K_{n+1}(t) \left\langle \frac{\delta^n R[t; z(\tau)]}{\delta z^n(t)} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Эти формулы описывают скачок при $t' = t$ статистических средних в общем случае дельта-коррелированных процессов.

Отметим, что при $t' > t$ для дельта-коррелированных процессов имеет место очевидное равенство

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \langle z(t') \rangle \langle R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (3.170)$$

Остановимся теперь на понятии дельта-коррелированных во времени случайных полей.

Пусть имеется векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}$ — пространственные координаты, а t — временная координата. В этом случае разложение логарифма характеристического функционала в ряд Тейлора определяют кумулянтные функции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (см. раздел 3.2). В частном случае, когда

$$\begin{aligned} K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots, \mathbf{x}_n, t_n) &= \\ &= K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n), \end{aligned} \quad (3.171)$$

будем называть поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ дельта-коррелированным случайным полем по времени t . Тогда функционал $\Theta[t; \Psi(\mathbf{x}', \tau)]$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta[t; \Psi(\mathbf{x}', \tau)] &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau \int \dots \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n K_n^{i_1, \dots, i_m}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \tau) \psi_{i_1}(\mathbf{x}_1, \tau) \dots \psi_{i_m}(\mathbf{x}_n, \tau), \end{aligned} \quad (3.172)$$

важной особенностью структуры которого является равенство, аналогичное (3.168):

$$\dot{\Theta}[t; \psi(\mathbf{x}', \tau)] = \dot{\Theta}[t; \psi(\mathbf{x}', t)]. \quad (3.173)$$

3.5.1. Асимптотический смысл дельта-коррелированных процессов и полей. Дельта-коррелированных процессов и полей в природе не бывает. Все реальные процессы и поля имеют конечный временной радиус корреляции, а дельта-коррелированные процессы и поля — результат асимптотического разложения, связанного с их временными радиусами корреляции.

Поясним переход к дельта-коррелированному процессу на примере гауссового стационарного процесса с радиусом корреляции τ_0 . Логарифм характеристического функционала при этом описывается выражением

$$\Theta[t; v(\tau)] = - \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 B\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_0}\right) v(\tau_2). \quad (3.174)$$

Положим $\tau_1 - \tau_2 = \xi\tau_0$, тогда выражение (3.174) примет вид

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^t d\tau_1 v(\tau_1) \int_0^{\tau_1/\tau_0} d\xi B(\xi) v(\tau_1 - \xi\tau_0).$$

Пусть теперь $\tau_0 \rightarrow 0$. В этом случае главный член асимптотического разложения по τ_0 будет определяться формулой

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\tau_0 \int_0^\infty d\xi B(\xi) \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1),$$

которую можно записать в виде

$$\Theta[t; v(\tau)] = -B^{\text{ef}} \int_0^t d\tau_1 v^2(\tau_1), \quad (3.175)$$

где

$$B^{\text{ef}} = \int_0^\infty d\tau B\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\tau B\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right). \quad (3.176)$$

Конечно, асимптотическое разложение (3.175) справедливо не для любых функций $v(t)$, а только для таких, которые мало меняются на временах порядка τ_0 . Так, если $v(t) = v\delta(t - t_0)$, то асимптотическое разложение (3.175) не справедливо, и в этом случае формула (3.174) заменяется выражением

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} B(0) v^2 \quad (t > t_0),$$

соответствующим характеристической функции процесса $z(t)$ для фиксированного момента времени $t = t_0$.

Рассмотрим теперь корреляцию $\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle$, которая в данном случае, согласно формуле Фурутцу–Новикова (3.123), описывается соотношением

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \int_0^t dt_1 B\left(\frac{t-t_1}{\tau_0}\right) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} R[t; z(\tau)] \right\rangle.$$

Выполняя замену переменных $t - t_1 \rightarrow \xi\tau_0$, получаем выражение

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = \tau_0 \int_0^{t/\tau_0} d\xi B(\xi) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t - \xi\tau_0)} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (3.177)$$

которое при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходит в равенство, соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу

$$\langle z(t)R[t; z(\tau)] \rangle = B^{\text{ef}} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; z(\tau)] \right\rangle,$$

если, конечно, вариационная производная в равенстве (3.177) мало меняется на временах порядка τ_0 .

Таким образом, аппроксимация процесса $z(t)$ дельта-коррелированным процессом обусловлена малостью изменения функционалов от этого процесса на временах порядка его временного радиуса корреляции.

Рассмотрим теперь процессы телеграфного типа. Для телеграфного процесса характеристический функционал описывается уравнением (3.46). Время корреляции для этого процесса $\tau_0 = 1/2\nu$, и при $\nu \rightarrow \infty$ ($\tau_0 \rightarrow 0$) это уравнение для достаточно гладких функций $v(t)$ переходит в уравнение

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -\frac{a_0^2}{2\nu} v^2(t) \Phi[t; v(\tau)], \quad (3.178)$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу. Если при этом считать еще, что $a_0^2 \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2\nu} = \sigma_0^2,$$

то уравнение (3.178) не будет содержать параметра ν . Конечно, это не означает, что при $\nu \rightarrow \infty$ телеграфный процесс перестает быть телеграфным. Так, при $\nu \rightarrow \infty$ одноточечное распределение вероятностей $z(t)$ будет по-прежнему соответствовать телеграфному процессу, т. е. процессу с двумя возможными состояниями. Что касается корреляционной функции и моментных функций более высокого порядка, то они при $\nu \rightarrow \infty$ обладают

всеми свойствами дельта функций, так как

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left\{ 2ve^{-2v|\tau|} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \neq 0, \\ \infty & \text{при } \tau = 0. \end{cases}$$

Такие функции следует считать обобщенными функциями, и их дельтаобразный характер будет проявляться в связанных с ними интегралах (см., например, [16]). При этом уравнение (3.178) показывает, что предельный переход при $v \rightarrow \infty$ для таких величин эквивалентен замене процесса $z(t)$ на гауссов дельта-коррелированный процесс. Эта ситуация совершенно аналогична аппроксимации гауссового случайного процесса с конечным радиусом корреляции τ_0 дельта-коррелированным процессом при $\tau_0 \rightarrow 0$.

Аналогичным образом получаем, что и обобщенный телеграфный процесс, характеристический функционал которого описывается интегро-дифференциальным уравнением (3.106), при $v \rightarrow \infty$ для достаточно гладких функций $v(t)$ определяется уравнением (считаем для простоты, что $\langle a \rangle = 0$)

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = -\frac{\langle a^2 \rangle}{v} v^2(t) \Phi[t; v(\tau)],$$

также соответствующим гауссовому дельта-коррелированному процессу.

В качестве более сложного примера рассмотрим характеристический функционал квадрата гауссового стационарного процесса, т.е. процесса $z(t) = \xi^2(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов процесс с параметрами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = B(t_1 - t_2).$$

Вычислим его характеристический функционал:

$$\Phi[t; v(\tau)] = \langle \phi[t; \xi(\tau)] \rangle, \quad \phi[t; \xi(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau) \xi^2(\tau) \right\}. \quad (3.179)$$

Характеристический функционал процесса $z(t)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] = i v(t) \langle \xi^2(t) \phi[t; \xi(\tau)] \rangle. \quad (3.180)$$

Рассмотрим величину $\Psi(t_1, t) = \langle \xi(t_1) \xi(t) \phi[t; \xi(\tau)] \rangle$. Согласно формуле Фурутцу–Новикова (3.118),

$$\Psi(t_1, t) = \int_0^t dt' B(t_1 - t') \left\langle \frac{\delta}{\delta \xi(t')} \xi(t) \phi[t; \xi(\tau)] \right\rangle. \quad (3.181)$$

Вычисляя теперь вариационную производную в правой части (3.181) (используя при этом явное выражение для функционала $\phi[t; \xi(\tau)]$), получаем

интегральное уравнение для функции $\Psi(t_1, t)$:

$$\Psi(t_1, t) = B(t_1 - t)\Phi[t; v(\tau)] + 2i \int_0^t d\tau B(t_1 - \tau)v(\tau)\Psi(\tau, t). \quad (3.182)$$

Функцию $\Psi(t_1, t)$ можно представить в виде

$$\Psi(t_1, t) = S(t_1, t)\Phi[t; v(\tau)], \quad (3.183)$$

где функция $S(t_1, t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$S(t_1, t) = B(t_1 - t) + 2i \int_0^t d\tau B(t_1 - \tau)v(\tau)S(\tau, t). \quad (3.184)$$

Следовательно, характеристический функционал $\Phi[t; v(\tau)]$ имеет структуру

$$\Phi[t; v(\tau)] = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau v(\tau)S(\tau, \tau) \right\}. \quad (3.185)$$

Таким образом, разложение величины $S(t, t)$ в функциональный ряд Тейлора по $v(\tau)$ определяет кумулянты процесса $z(t) = \xi^2(t)$. А так как уравнение (3.184) — линейное интегральное уравнение, то его решение можно представить в виде итерационного ряда:

$$S(t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(t, t), \quad (3.186)$$

$$S^{(n)}(t, t) =$$

$$= (2i)^n \int_0^t \dots \int_0^t d\tau_1 \dots d\tau_n v(\tau_1) \dots v(\tau_n) B(t - \tau_1) B(\tau_1 - \tau_2) \dots B(\tau_n - t).$$

Если функция $v(t)$ медленно меняется за время корреляции τ_0 процесса $\xi(t)$ (т. е. мы не рассматриваем одновременные характеристические функции процесса $z(t) = \xi^2(t)$), то можно перейти к пределу $\tau_0 \rightarrow 0$. В результате получаем выражения

$$S^{(0)}(t, t) = B(0),$$

$$S^{(n)}(t, t) = (2i)^n v^n(t) \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_n B(\tau_1) B(\tau_1 - \tau_2) \dots B(\tau_n), \quad (3.187)$$

и, следовательно, процесс $z(t) = \xi^2(t)$ можно считать в этом пределе дельта-коррелированным по t случайным процессом. Разложение величины $S(t, t)$ в ряд (3.186) в этом случае идет по параметру $\beta = \tau_0 B(0)v(t)$. Если $\beta \ll 1$,

то можно ограничиться первым членом ряда (3.187), что соответствует обычной теории возмущений. Если же $\beta \sim 1$, то необходимо учитывать весь ряд для функции $S(t, t)$.

Случай гауссового марковского процесса $\xi(t)$ с корреляционной функцией $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, где $\alpha = 1/\tau_0$, допускает более полный анализ. В этом случае интегральное уравнение (3.184) при $t_1 < t$ запишется в виде

$$S(t_1, t) = \sigma^2 e^{-\alpha(t-t_1)} + 2i\sigma^2 \int_0^t d\tau e^{-\alpha|t_1-\tau|} v(\tau) S(\tau, t). \quad (3.188)$$

Решение этого уравнения, как функция параметра t , описывается в виде задачи с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S(t_1, t) &= \{-\alpha + 2iv(t)S(t, t)\} S(t_1, t), \quad S(t_1, t)|_{t=t_1} = S(t_1, t_1), \\ \frac{d}{dt} S(t, t) &- 2\alpha [S(t, t) - \sigma^2] + 2iv(t)S^2(t, t), \quad S(t, t)|_{t=0} = \sigma^2, \end{aligned} \quad (3.189)$$

что соответствует методу погружения по параметру t (см. приложение В). Асимптотическое решение последнего уравнения при $\alpha \rightarrow \infty$ ($\tau_0 \rightarrow 0$) имеет вид

$$S(t, t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4i\sigma^2\tau_0 v(t)}}{2i\tau_0 v(t)}, \quad S^{(n)}(t, t) = [2i\tau_0 v(t)]^n \sigma^{2(n+1)} \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!},$$

совпадающий с решением уравнения (3.189) при условии постоянства функции $v(t)$. Следовательно, в этом асимптотическом случае логарифм характеристического функционала

$$\Theta[t; v(\tau)] = \frac{1}{2\tau_0} \int_0^t d\tau \left(1 - \sqrt{1 - 4i\sigma^2\tau_0 v(\tau)} \right),$$

и кумулянты процесса $z(t) = \xi^2(t)$ имеют вид

$$K_1 = \sigma^2, \quad K_n(t_1, \dots, t_n) = (2\tau_0)^{n-1} \sigma^{2n} (2n-3)!! \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n),$$

что соответствует (3.187), и при этом

$$I_n = \int_0^\infty d\tau_1 \dots \int_0^\infty d\tau_n \exp\{-\tau_1 - |\tau_1 - \tau_2| - \dots - |\tau_{n-1} - \tau_n| - \tau_n\} = \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}.$$

Примером процесса, который не является дельта-коррелированным, может служить, например, процесс $z(t) = z\xi(t)$, где $\xi(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0\delta(t - t')$, а величина z случайна с плотностью вероятностей $p(z)$. В этом случае

характеристический функционал определяется равенством

$$\begin{aligned}\Phi[t; v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i z \int_0^t d\tau v(\tau) \xi(\tau) \right\} \right\rangle_{z, \xi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz p(z) \exp \left\{ -z^2 \sigma^2 \tau_0 \int_0^t d\tau v^2(\tau) \right\} \quad (3.190)\end{aligned}$$

и процесс $z(t)$ не является дельта-коррелированным, так как для него не выполняется равенство (3.168), несмотря на то что второй кумулянт его имеет вид

$$K_2(t_1, t_2) = \langle z(t_1) z(t_2) \rangle = 2 \langle z^2 \rangle \sigma^2 \tau_0 \delta(t_1 - t_2). \quad (3.191)$$

Это связано с тем, что процесс $z(t)$ является произведением двух процессов: процесса z с бесконечным радиусом корреляции и процесса $\xi(t)$ с нулевым радиусом корреляции.

Перейдем теперь к непосредственному статистическому анализу стохастических динамических систем.

Глава 4

ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К СТОХАСТИЧЕСКИМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

В этой главе мы рассмотрим основные методы нахождения статистических характеристик решений стохастических уравнений.

Рассмотрим линейное (дифференциальное, интегро-дифференциальное или интегральное) стохастическое уравнение. В общем случае, усреднение его по ансамблю реализаций флуктуирующих параметров не дает замкнутого уравнения для соответствующего среднего значения. Замкнутое уравнение можно получить с помощью перехода к дополнительному расширенному пространству, которое в большинстве случаев является бесконечномерным. Таким образом можно перейти к линейному уравнению для средней величины, содержащему вариационные производные.

Рассмотрим конкретные типы динамических систем.

4.6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть динамика векторной функции $\mathbf{x}(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (4.1)$$

Здесь через функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ обозначена детерминированная функция, а через $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайная функция.

Решение уравнения (4.1) является функционалом от $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$, т. е.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, \tau)} F(\mathbf{x}(t)) = \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, \tau)} F(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial F(\mathbf{x}(t))}{\partial x_i} \frac{\delta x_i(t)}{\delta f_j(\mathbf{y}, \tau)},$$

справедливое для произвольной функции $F(\mathbf{x})$. Кроме того,

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}).$$

Соответствующее уравнение Лиувилля для индикаторной функции $\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$, вытекающее из уравнения (4.1), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)] \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (4.2)$$

откуда следует равенство

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad (4.3)$$

с помощью которого можно переписать уравнение (4.2) в более сложном, на первый взгляд, виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)} \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (4.4)$$

Рассмотрим теперь одновременную плотность вероятностей для решения $\mathbf{x}(t)$ уравнения (4.1):

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle.$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (4.1), соответствующее конкретной реализации случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, а через скобки $\langle \dots \rangle$ обозначено усреднение по ансамблю всех реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Усредним уравнение (4.4) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. В результате получаем выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)} \langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (4.5)$$

Величина $\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ в правой части (4.5) описывает корреляцию между случайным полем $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ и функцией $\varphi(\mathbf{x}, t)$, являющуюся функционалом случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$, и описывающуюся уравнениями (4.2) или (4.4).

Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$ при $\tau \in (t_0, t)$ полностью описываются его характеристическим функционалом

$$\Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] \}.$$

Для расщепления корреляции $\langle \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle$ воспользуемся функциональной методикой. Вводя оператор функционального сдвига по полю $\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)$, функционал $\varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$ можно переписать в операторном виде:

$$\varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) + \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = \exp \left(\int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right) \varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Следовательно, член в правой части (4.5) можно переписать в виде

$$\int d\mathbf{y} \frac{\delta}{\delta v_j(\mathbf{y}, t)} \frac{\left\langle f_j(\mathbf{y}, t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}' \mathbf{f}(\mathbf{y}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}', \tau)} \right\} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}' \mathbf{f}(\mathbf{y}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{v}(\mathbf{y}', \tau)} \right\} \right\rangle} P(\mathbf{x}, t) =$$

$$= \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right] P(\mathbf{x}, t),$$

где введен функционал

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Следовательно, уравнение (4.5) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)} \right] P(\mathbf{x}, t). \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) является замкнутым уравнением с вариационными производными в функциональном пространстве всех возможных функций $\{\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)\}$. Для фиксированной же функции $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ мы приходим уже к незамкнутому уравнению [39, 40, 155]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)} \right] \varphi[t, \mathbf{x}; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle, \quad (4.7)$$

$$P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Уравнение (4.7) является точным следствием исходного динамического уравнения (4.1). Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ входят в него только через функционал $\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)]$, разложение которого в функциональный степенной ряд Фурье по $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$ определяется всеми пространственно-временными кумулянтными функциями случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Отметим, что и для более общего уравнения типа интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = v_i(\mathbf{x}, t) + \int d\mathbf{y} D_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) f_j(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

для которого вариационная производная

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{y}, t-0)} x_i(t) = D_{ij}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}, t),$$

уравнение для одноточечной плотности вероятностей $P(\mathbf{x}, t)$ также имеет вид уравнения (4.7).

Как говорилось ранее, в общем случае уравнение (4.7) не замкнуто относительно функции $P(\mathbf{x}, t)$, так как величина

$$\dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

стоящая под знаком усреднения, определяется зависимостью поведения решения $\mathbf{x}(t)$ от случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)$ для всех моментов времени $t_0 < \tau < t$. Существует, однако, ряд случаев, когда вариационная производная в (4.7) выражается через обычные дифференциальные операторы. В этих случаях уравнения типа (4.7) будут уже замкнутыми уравнениями для соответствующих плотностей вероятностей. Такого рода примеры будут приведены несколько позднее.

Отметим, что уравнение (4.2) является прямым уравнением Лиувилля, описывающим эволюцию индикаторной функции

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x} | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0)$$

во времени t . В связи с этим уравнение (4.7) может быть названо *прямым уравнением* для плотности вероятностей.

В гл. 2 книги было получено обратное уравнение Лиувилля (2.4) для индикаторной функции, которое описывает эволюцию динамической системы (4.1) в зависимости от начальных условий $t_0, \mathbf{x}_0$ и в нашем случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad (4.8)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Усредняя теперь уравнение (4.8) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0)$ и действуя аналогично выводу уравнения (4.7), получаем уравнение для плотности вероятностей $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \rangle$ вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t | \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)] = \frac{d}{dt_0} \ln \Phi[t, t_0; \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau)].$$

Уравнение (4.9) описывает эволюцию плотности вероятностей по начальным параметрам $\{\mathbf{x}_0, t_0\}$ и поэтому может быть названо *обратным уравнением*.

Прямое и обратное уравнения эквивалентны. Первое более удобно для изучения эволюции во времени статистических характеристик решения уравнения (4.1). Второе же более удобно для изучения статистических

характеристик, связанных с пребыванием случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ в какой-либо области пространства, таких, например, как время пребывания в этой области и время достижения ее границ. Действительно, вероятность пребывания случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ в области пространства V описывается интегралом

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_V d\mathbf{x} P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

который, согласно уравнению (4.9), будет описываться уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) G(t | \mathbf{x}_0, t_0) = \dot{\Theta}_{t_0} \left[t, t_0; \frac{\delta}{i\delta\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \int_V d\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}(t | \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}),$$

$$G(t | \mathbf{x}_0, t_0) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x}_0 \in V) \\ 0 & (\mathbf{x}_0 \notin V) \end{cases}. \quad (4.10)$$

Необходимо дополнить его краевыми условиями, которые определяются из характера конкретной задачи, области V и ее границ.

Аналогичным образом можно получить уравнение типа (4.7) и для m -временной плотности вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) \rangle, \quad (4.11)$$

относящейся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, где индикаторная функция определяется равенством

$$\varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m).$$

Дифференцируя (4.11) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (4.1), можно получить уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_m} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t_m) \right) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \left\langle \dot{\Theta}_{t_m} \left[t_m, t_0; \frac{\delta}{i\delta\mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)} \right] \varphi_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) \right\rangle. \quad (4.12)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (4.12) можно найти из формулы (4.11). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (4.11), получаем равенство

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}),$$

которое и определяет начальное условие для уравнения (4.12).

4.7. Уравнения в частных производных

Выше мы рассмотрели статистическое описание динамических систем на основе уравнения Лиувилля (4.2), соответствующего обыкновенному дифференциальному уравнению (4.1). Из метода вывода уравнений (4.6), (4.7), (4.12) и т. п. совершенно ясно, что этот метод применим и к другим

динамическим системам, описываемым линейными уравнениями как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах, т. е. уравнениями в частных производных как первого, так и более высоких порядков. В качестве конкретных примеров таких уравнений рассмотрим перенос пассивной примеси в случайном поле скоростей (уравнения (1.39), (2.5), (2.9)), параболическое уравнение (уравнение квазиоптики (1.82), описывающее распространение волн в случайно-неоднородных средах), и интегро-дифференциальное уравнение (1.81), описывающее эволюцию гидродинамической турбулентности.

4.7.1. Перенос пассивной примеси в случайном поле скоростей.

В качестве первого примера рассмотрим уравнение (2.9)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) \quad (4.13)$$

для индикаторной функции

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho).$$

Считаем, что $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая.

Следствием уравнения (4.13) является равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta U_j(\mathbf{r}', t-0)} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) &= \frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t-0)} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\delta}{\delta u_{0j}(\mathbf{r}', t-0)} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \\ &= \left\{ -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_j} \frac{\partial}{\partial \rho} \right\} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Статистические характеристики случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ полностью описываются его характеристическим функционалом

$$\Phi[t; \Psi(\mathbf{r}', \tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\mathbf{r}' \mathbf{u}(\mathbf{r}', \tau) \Psi(\mathbf{r}', \tau) \right\} \right\rangle = \exp \{ \Theta[t; \Psi(\mathbf{r}', \tau)] \}.$$

Усредним теперь уравнение (4.14) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Тогда, действуя аналогично выводу уравнения (4.7), для одно-точечной плотности вероятностей

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) \rangle = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle,$$

с учетом равенства (4.14), получаем выражение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t, \mathbf{r}; \rho) &= \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t, \mathbf{r}; \rho) + \\ &+ \left\langle \int d\mathbf{r} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t-0)} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.15)$$

последний член которого можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \int d\mathbf{r} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t-0)} \Phi[t, \mathbf{r}; \rho; \mathbf{u} + \mathbf{u}_0] \right\rangle = \\
 & = \left\langle \int d\mathbf{r} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t-0)} \exp \left\{ \int_0^t d\tau \int d\mathbf{r}' \mathbf{u}(\mathbf{r}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}', \tau)} \right\} \right\rangle \Phi[t, \mathbf{r}; \rho; \mathbf{u}_0] = \\
 & = \left\langle \frac{d}{dt} \exp \left\{ \int_0^t d\tau \int d\mathbf{r}' \mathbf{u}(\mathbf{r}', \tau) \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}', \tau)} \right\} \right\rangle \Phi[t, \mathbf{r}; \rho; \mathbf{u}_0] = \\
 & = \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}', \tau)} \right] \langle \Phi[t, \mathbf{r}; \rho; \mathbf{u} + \mathbf{u}_0] \rangle = \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}', \tau)} \right] P(t, \mathbf{r}; \rho),
 \end{aligned}$$

где

$$\dot{\Theta}_t [t; \psi(\mathbf{r}', \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\mathbf{r}' \mathbf{u}(\mathbf{r}', \tau) \psi(\mathbf{r}', \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Таким образом, выражение (4.15) можно записать в виде функционального линейного уравнения с вариационными производными в функциональном пространстве функций $\{\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)\}$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} P(t, \mathbf{r}; \rho) = \\
 & = \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t, \mathbf{r}; \rho) + \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{u}_0(\mathbf{r}', \tau)} \right] P(t, \mathbf{r}; \rho). \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Если же мы имеем фиксированный средний поток $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ (например, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = 0$), то уравнение (4.16) принимает вид незамкнутого равенства:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} P(t, \mathbf{r}; \rho) = \\
 & = \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho P(t, \mathbf{r}; \rho) + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}', \tau)} \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) \right\rangle. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

4.7.2. Уравнение квазиоптики. В качестве второго примера рассмотрим распространение волн в случайно-неоднородной среде в рамках линейного параболического уравнения (1.82)

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (4.18)$$

В этом случае функционал (2.30)

$$\begin{aligned}\varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] &= \varphi[x; v, v^*] = \\ &= \exp \left\{ i \int d\mathbf{R}' [u(x, \mathbf{R}') v(\mathbf{R}') + u^*(x, \mathbf{R}') v^*(\mathbf{R}')] \right\}\end{aligned}$$

описывается уравнением в вариационных производных (уравнение Хопфа) (2.31):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \varphi[x; v, v^*] &= i \frac{k}{2} \int d\mathbf{R}' \varepsilon(x, \mathbf{R}') \widehat{M}(\mathbf{R}') \varphi[x; v, v^*] + \\ &+ \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \varphi[x; v, v^*], \quad (4.19)\end{aligned}$$

с эрмитовым оператором

$$\widehat{M}(\mathbf{R}') = v(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')},$$

эквивалентным исходному уравнению (4.18). Следствием уравнения (4.19) является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} \varphi[x; v, v^*] = i \frac{k}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}') \varphi[x; v, v^*]. \quad (4.20)$$

Усредняя теперь уравнение (4.19) по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и действуя аналогично выводу уравнений (4.7), (4.17), получаем для характеристического функционала решения задачи (4.18)

$$\Phi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] = \Phi[x; v, v^*] = \langle \varphi[x; v(\mathbf{R}'), v^*(\mathbf{R}')] \rangle$$

уравнение в вариационных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] &= \left\langle \dot{\Theta}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \varepsilon(\xi, \mathbf{R}')} \right] \varphi[x; v, v^*] \right\rangle + \\ &+ \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \quad (4.21)\end{aligned}$$

где

$$\dot{\Theta}_x [x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

4.7.3. Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности. Для описания стационарной во времени и однородной в пространстве трехмерной гидродинамической турбулентности для пространственной фурье-компоненты поля скорости ($\hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) = \hat{u}_i(-\mathbf{k}, t)$)

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{r} u_i(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

в гл. 1 было получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1.81)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) - \\ - \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{f}_i(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}),$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

$a \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — пространственная фурье-гармоника внешних сил.

Спецификой трехмерных гидродинамических движений является существование закона сохранения энергии при отсутствии внешних сил и эффектов, связанных с молекулярной вязкостью.

Далее, для функционала

$$\varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \varphi[t; \mathbf{z}] = \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \mathbf{z}(\mathbf{k}') \right\}$$

в гл. 2 книги было получено линейное уравнение Хопфа в функциональном пространстве с вариационными производными (2.35):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi[t; \mathbf{z}] = - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} - i \hat{f}_i(\mathbf{k}, t) \right\} \varphi[t; \mathbf{z}] - \\ - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \varphi[t; \mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

При этом следствием уравнения (4.23) является равенство

$$\frac{\delta}{\delta \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t-0)} \varphi[t; \mathbf{z}] = i \mathbf{z}(\mathbf{k}) \varphi[t; \mathbf{z}]. \quad (4.24)$$

Усредним уравнение (4.23) по ансамблю реализаций случайных сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$. Тогда для характеристического функционала поля скорости

$$\Phi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \Phi[t; \mathbf{z}] = \langle \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] \rangle,$$

действуя аналогично выводу уравнения (4.7), получим незамкнутое уравнение с вариационными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = & \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\boldsymbol{\kappa}, \tau)} \right] \Phi[t; \mathbf{z}] \right\rangle - \\ & - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i, \alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} + v k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}], \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\dot{\Theta}_t[t; \Psi(\boldsymbol{\kappa}, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\kappa} \mathbf{f}(\boldsymbol{\kappa}, \tau) \Psi(\boldsymbol{\kappa}, \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$. Уравнение для характеристического функционала $\Phi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')]]$ описывает все одновременные статистические характеристики поля скорости.

4.8. Стохастические интегральные уравнения (методы квантовой теории поля в динамике стохастических систем)

Для задач, рассмотренных в предыдущих разделах, удается получить замкнутое (или незамкнутое) статистическое описание в функциональном пространстве благодаря тому факту, что эти задачи соответствуют системе дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Для них выполняется условие причинности, сформулированное ранее в третьем разделе, которое заключается в том, что решение задачи в момент времени t определяется только флуктуациями параметров системы в предшествующие моменты времени и не зависит от последующих.

Условие причинности, однако, может выполняться и для задач, описываемых интегральными уравнениями, которые, вообще говоря, не всегда сводятся к системе дифференциальных уравнений.

Однако прежде чем рассматривать такой класс стохастических задач, остановимся на общих методах статистического описания динамических систем, заимствованных из квантовой теории поля. Суть их заключается в построении ряда теории возмущений для статистических характеристик интересующей нас величины и в исследовании его методами, развитыми в квантовой теории поля. При этом каждый член ряда удобно представлять графически (в виде так называемых *диаграмм Фейнмана*), так что каждому элементу графика соответствует определенная функция или оператор. Мы не будем рассматривать диаграммную технику как таковую (подробное ее описание для статистических задач см., например, в монографиях [68, 77]), а получим основные результаты непосредственно, используя функциональные методы, описанные выше [40, 155].

4.8.1. Линейные интегральные уравнения. Исходным стохастическим уравнением является линейное интегральное (или интегро-дифференциальное) уравнение для функции Грина:

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2) S(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'), \quad (4.26)$$

где через $\mathbf{r}$ обозначены все аргументы функций S и f , включая и индексные, по которым интегрирование заменяется суммированием. Функция $f(\mathbf{r})$ предполагается случайной, а функция $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является функцией Грина задачи в отсутствие флуктуаций параметров, т. е. при $f(\mathbf{r}) = 0$. Величина $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ для ряда задач может быть и оператором, и форма записи уравнения (4.26) подразумевает, что оператор действует на все, что стоит справа от него. Так, например, переход от нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнению типа (4.26) осуществляется с помощью эквивалентного линейного стохастического уравнения в частных производных (уравнения Лиувилля), характеристиками которого является решение соответствующей системы. В этом случае функция S будет функцией Грина для стохастического уравнения Лиувилля, а величина Λ связана с дифференциальным оператором. Для задач, описываемых линейной системой уравнений, величина $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ оказывается функцией.

Для простоты будем далее считать $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ функцией, а не оператором. Операторный характер $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ несущественно усложняет дальнейшее рассмотрение. В самом деле, в случае, когда величина $\Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ является оператором, можно ввести дельта-функции по переменным, на которые действует этот оператор, с соответствующим интегрированием и перейти к рассматриваемому случаю.

Уравнение (4.26) можно записать в символическом виде

$$S = S_0 + S_0 \Lambda f S, \quad (4.27)$$

где подразумевается интегрирование по всем аргументам функции $\Lambda(\{\mathbf{r}_i\})$.

Уравнение (4.27) можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения функцию $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. В результате получаем решение в виде ряда, который также запишем в символическом виде

$$S = \{1 + S_0 \Lambda f + S_0 \Lambda f S_0 \Lambda f + \dots\} S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (S_0 \Lambda f)^n S_0. \quad (4.28)$$

Такой же итерационный ряд возникает и для решения интегрального уравнения

$$S = S_0 + S \Lambda f S_0,$$

и, следовательно, уравнение (4.27) эквивалентно уравнению

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2) S_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'). \quad (4.29)$$

Решение уравнений (4.27) и (4.29) является функционалом поля $f(\mathbf{r})$, т. е.

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})].$$

Легко видеть, что уравнения (4.27) и (4.29) эквивалентны функциональному уравнению с вариационной производной в функциональном пространстве $\{f(\tilde{\mathbf{r}})\}$:

$$\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_0)} S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})] = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 S[\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; f(\tilde{\mathbf{r}})] \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) S[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})], \quad (4.30)$$

с начальным условием

$$S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})]_{f=0} = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

В самом деле, проварируем уравнение для $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (4.27) по функции $f(\mathbf{r}_0)$. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\delta}{\delta f} S = S_0 \Lambda \delta S + S_0 \Lambda f \frac{\delta}{\delta f} S,$$

где через δ обозначена дельта-функция по соответствующим аргументам. Решение последнего уравнения можно записать в виде итерационного ряда

$$\frac{\delta}{\delta f} S = \{1 + S_0 \Lambda f + (S_0 \Lambda f)^2 + \dots\} S_0 \Lambda \delta S,$$

или, с учетом итерационного ряда для S (4.28), мы и получаем формулу (4.30).

Усредним теперь полученный итерационный ряд (4.28) по ансамблю реализаций поля $f(\mathbf{r})$, находим итерационный ряд для функции $\langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$, в который будут входить все моментные функции поля $f(\mathbf{r})$. Далее можно, перегруппировав члены этого ряда, выразить правую часть разложения через саму функцию $\langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$. При этом возникают новые неизвестные функции, определяемые соответствующими итерационными рядами, которые, по аналогии с квантовой теорией поля, называются *массовой* и *вершинной функциями*.

Рассмотрим вместо уравнения (4.26) вспомогательное уравнение

$$S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f + \eta] = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) [f(\mathbf{r}_2) + \eta(\mathbf{r}_2)] S[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; f + \eta], \quad (4.31)$$

где $\eta(\mathbf{r})$ — произвольная детерминированная функция. Интересующую нас функцию $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ найдем, положив в (4.31) $\eta(\mathbf{r}) = 0$, т. е.

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r})] = S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})]_{\eta=0}.$$

Усредним уравнение (4.31). Расщепляя корреляцию $\langle f S \rangle$ по формуле (3.112) гл. 3, получаем уравнение

$$G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta] = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \eta(\mathbf{r}_2) G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta] + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \left\langle \Omega_{\mathbf{r}_2} \left[\frac{\delta}{i\delta f(\mathbf{r})} \right] S[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; f + \eta] \right\rangle. \quad (4.32)$$

Здесь функционал

$$\Omega_{\mathbf{r}}[v(\mathbf{r})] = \frac{\delta}{i\delta v(\mathbf{r})} \Theta[v(\mathbf{r})],$$

а функционал

$$\Theta[v(\mathbf{r})] = \ln \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right\} \right\rangle$$

— логарифм характеристического функционала случайного поля $f(\mathbf{r})$. Через функционал $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]$ обозначена величина

$$G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})] = \langle S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})] \rangle.$$

Учитывая, далее, что функционал $S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})]$ является функционалом от аргумента $f(\mathbf{r}) + \eta(\mathbf{r})$, можно заменить операцию вариационного дифференцирования по $f(\mathbf{r})$ на дифференцирование по $\eta(\mathbf{r})$ и переписать уравнение (4.32) в виде замкнутого уравнения в вариационных производных, аналогичного *уравнению Швингера* в квантовой теории поля:

$$\begin{aligned} G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta] &= S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \eta(\mathbf{r}_2) G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta] + \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \Omega_{\mathbf{r}_2} \left[\frac{\delta}{i\delta \eta(\mathbf{r})} \right] G[\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'; \eta]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Уравнение (4.33) для функционала $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]$ можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения функцию $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Полагая в полученном разложении $\eta(\mathbf{r}) = 0$, получаем итерационный ряд для функции $\langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle$.

Для упрощения дальнейшего изложения запишем уравнение (4.33) в символическом виде (имея в виду, что не составляет труда на каждом этапе восстановить полную запись соответствующих выражений):

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \left(\eta + \Omega \left[\frac{\delta}{i\delta \eta} \right] \right) G. \quad (4.34)$$

Введем теперь обратный к G функционал G^{-1} , такой, что

$$G^{-1}G = 1, \quad GG^{-1} = 1. \quad (4.35)$$

Здесь под единицей понимается соответствующая дельта-функция. Введем в рассмотрение также функционал

$$\Gamma = -\frac{\delta G^{-1}}{\delta \eta}, \quad (4.36)$$

который назовем *вершинным функционалом*.

Варьируя (4.36) по полю η , получаем равенство

$$\frac{\delta G}{\delta \eta} = G\Gamma G, \quad (4.37)$$

подстановка которого в (4.34) приводит к уравнению

$$G = S_0 + S_0 \Lambda \eta G + S_0 Q G. \quad (4.38)$$

Величину

$$Q = \Lambda \left(\Omega \left[\frac{\delta}{i \delta \eta} \right] G \right) G^{-1} \quad (4.39)$$

назовем *массовым функционалом*.

Умножая теперь (4.38) справа на G^{-1} и слева на S_0^{-1} (и интегрируя по соответствующим аргументам), получаем уравнение для функционала G^{-1} :

$$S_0^{-1} - G^{-1} = \Lambda \eta + Q. \quad (4.40)$$

Варьируя (4.40) по полю η , получаем уравнение для функционала Γ :

$$\Gamma = \Lambda + \frac{\delta}{\delta \eta} Q. \quad (4.41)$$

Система функциональных уравнений (4.38), (4.41) замкнута относительно функционалов G и Γ . Их решения, однако, связаны соотношением (4.37). Уравнение (4.41) для Γ можно решать итерациями, выбрав в качестве нулевого приближения величину Λ . Если выразить при этом вариационные производные G по η с помощью формулы (4.37), то мы придем к интегральным уравнениям для Γ и G с бесконечным числом членов, каждый из которых не содержит других функционалов, кроме G и Γ . Полагая теперь $\eta(\mathbf{r}) = 0$, можно получить замкнутую систему интегральных уравнений. В частности, уравнение (4.38) выглядит следующим образом:

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q \langle S \rangle, \quad \langle S \rangle = S_0 + \langle S \rangle Q S_0, \quad (4.42)$$

и называется *уравнением Дайсона*.

Остановимся теперь более подробно на случае, когда поле $f(\mathbf{r})$ является гауссовым случайным полем с корреляционной функцией $B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle f(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}') \rangle$. Тогда

$$\Omega_{\mathbf{r}}[v(\mathbf{r})] = i \int d\mathbf{r}' B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}')$$

и для массового функционала получаем выражение

$$Q = \Lambda B G \Gamma, \quad (4.43)$$

а уравнения (4.38), (4.41) принимают вид

$$\begin{aligned} G &= S_0 + S_0 \Lambda \eta G + S_0 \Lambda B G \Gamma G, \\ \Gamma &= \Lambda + \Lambda B G \Gamma G \Gamma + \Lambda B G \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Полагая теперь $\eta = 0$, получаем замкнутую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &= S_0 + S_0 Q \langle S \rangle \quad (\text{уравнение Дайсона}), \\ Q &= \Lambda B \langle S \rangle \tilde{\Gamma},\end{aligned}\tag{4.45}$$

$$\tilde{\Gamma} = \Lambda + \Lambda B \langle S \rangle \tilde{\Gamma} \langle S \rangle \tilde{\Gamma} + \dots \quad (\tilde{\Gamma} = \Gamma|_{\eta=0}).$$

Система уравнений (4.45) очень сложна и мало изучена. Простейший путь ее упрощения заключается в обрывании бесконечного ряда в уравнении для $\tilde{\Gamma}$. Если это сделать на самом первом шаге, то придем к замкнутому нелинейному уравнению (*приближение Крейчнана*):

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q_{\text{Кр}} \langle S \rangle, \quad Q_{\text{Кр}} = \Lambda B \langle S \rangle \Lambda.\tag{4.46}$$

Если теперь в выражении для массовой функции $Q_{\text{Кр}}$ заменить $\langle S \rangle$ на S_0 , то получим линейное уравнение (*приближение Бурре*)

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 \Lambda B S_0 \Lambda \langle S \rangle.\tag{4.47}$$

Функционал Γ и, следовательно, функция $\tilde{\Gamma}$ тесно связаны с величиной $\langle SS \rangle$. В самом деле, в силу формулы (4.30), выражение (4.37) при $\eta = 0$ можно переписать в виде

$$\langle S \Lambda S \rangle = \langle S \rangle \tilde{\Gamma} \langle S \rangle.\tag{4.48}$$

Таким образом, различные приближения для функции $\tilde{\Gamma}$ эквивалентны определенным гипотезам расщепления корреляции $\langle SS \rangle$. Так, приближение Крейчнана (4.46) соответствует равенству

$$\langle S \Lambda S \rangle = \langle S \rangle \Lambda \langle S \rangle,$$

а приближение Бурре (4.47) эквивалентно требованию

$$\langle S \Lambda S \rangle = S_0 \Lambda \langle S \rangle.$$

В общем же случае, расщепляя корреляцию $\langle S \Lambda S \rangle$ с помощью формулы (3.116) гл. 3, получаем операторное выражение

$$\langle S \Lambda S \rangle = G \left[i B \frac{\delta}{\delta \eta} \right] \Lambda G[\eta]|_{\eta=0},$$

эквивалентное, по своей сути, введению вершинной функции.

Отметим теперь, что в случае гауссового поля $f(\mathbf{r})$ знание функционала $G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \eta(\mathbf{r})]$ эквивалентно знанию функционала

$$\Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; v(\mathbf{r})] = \left\langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp \left(i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right) \right\rangle,$$

описывающего все статистические корреляции $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ с полем $f(\mathbf{r})$. В самом деле, согласно формуле (3.120) гл. 3, можно записать функционал $\Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; v(\mathbf{r})]$ в виде

$$\Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; v(\mathbf{r})] = \left\langle \exp \left(i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right) \right\rangle \left\langle S \left[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\mathbf{r}) + i \int d\mathbf{r}_1 B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \right] \right\rangle,$$

откуда получаем равенство

$$\Phi[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; v(\mathbf{r})] = \left\langle \exp \left(i \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \right) \right\rangle G[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i \int d\mathbf{r}_1 B(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)].$$

Остановимся теперь для полноты картины на так называемом методе перенормировки. Дело в том, что даже при известной массовой функции уравнение Дайсона (4.45) представляет собой сложное интегральное уравнение, решить которое в аналитическом виде удастся далеко не всегда. В то же время, уравнение Дайсона с упрощенной массовой функцией может быть в ряде случаев легко решено. Метод перенормировки заключается в том, что записывают уравнение Дайсона в виде интегрального уравнения, в которое вместо функции $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ входит решение упрощенной задачи.

Обозначим решение уравнения Дайсона (4.45) с упрощенной массовой функцией $\tilde{Q}$ через $\tilde{S}$. Тогда функция $\tilde{S}$ будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{S} = S_0 + S_0 \tilde{Q} \tilde{S}. \quad (4.49)$$

В силу того, что уравнение (4.49) является линейным по $\tilde{S}$, его, очевидно, можно переписать также в виде

$$\tilde{S} = S_0 + \tilde{S} \tilde{Q} S_0 = (1 + \tilde{S} \tilde{Q}) S_0, \quad (4.50)$$

где через 1 обозначен единичный оператор.

Для исключения функции $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ из уравнения Дайсона (4.45) подействуем на него оператором $(1 + \tilde{S} \tilde{Q})$. Тогда, с учетом равенства (4.50), получаем уравнение

$$\langle S \rangle = \tilde{S} + \tilde{S} \{Q - \tilde{Q}\} \langle S \rangle. \quad (4.51)$$

Уравнение (4.51) можно теперь решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения функцию $\tilde{S}$.

При $\tilde{Q} = 0$ функция $\tilde{S} = S_0$, и мы возвращаемся к уравнению Дайсона (4.45). Приведенный выше вывод уравнения (4.51) справедлив, очевидно, не только для гауссового поля $f(\mathbf{r})$, но и для поля $f(\mathbf{r})$ любой другой природы, так как уравнение Дайсона имеет один и тот же вид для любого поля $f(\mathbf{r})$.

Остановимся теперь на уравнении Дайсона общего вида (4.38). Заметим, что функционал $\Omega[v]$ может быть представлен с помощью ряда Тейлора по v :

$$\Omega[v] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} v^n,$$

где K_n — кумулянтные функции случайного поля $f(\mathbf{r})$. Следовательно, массовый функционал (4.39) можно записать в виде

$$Q = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K_{n+1} \left\{ \frac{\delta^n}{\delta \eta^n} G \right\} G^{-1},$$

где вариационные производные по η от функционала G вычисляются по формуле (4.37). Структура уравнения Дайсона в этом случае очень сложна.

Обычные пути упрощения этого уравнения совершенно аналогичны случаю гауссовых флуктуаций параметров.

Если считать, что $\Gamma = \Lambda$, то выражение (4.37) принимает вид

$$\frac{\delta G}{\delta \eta} = G \Lambda G$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta^n G}{\delta \eta^n} = n! (G \Lambda)^n G = \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda} (G \lambda \Lambda)^n G.$$

При этом мы приходим к обобщенному уравнению Крейчнана

$$\langle S \rangle = S_0 + S_0 Q_{\text{Kr}} \langle S \rangle,$$

$$Q_{\text{Kr}} = \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1} \{ \langle S \rangle \Lambda \}^n = \Lambda \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda} \Omega[\langle S \rangle \lambda \Lambda]. \quad (4.52)$$

Если же в (4.52) заменить $\langle S \rangle$ в Q_{Kr} на S_0 , то получаем обобщенное уравнение Бурре

$$Q_{\text{B}} = \Lambda \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda} \Omega[S_0 \lambda \Lambda],$$

которое совпадает с так называемым *однотрупповым приближением уравнения Дайсона*.

Выше мы рассмотрели вывод уравнения для средней функции Грина (уравнение Дайсона). Аналогичным образом можно получить и уравнение для корреляционной функции

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) = \langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') S^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \rangle.$$

Для этого умножим уравнение (4.26) на $S^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1)$ и усредним по ансамблю реализаций случайного поля $f(\mathbf{r})$. В результате получаем уравнение

$$\Gamma = S_0 \langle S^* \rangle + S_0 \Lambda \langle f S S^* \rangle. \quad (4.53)$$

Учитывая теперь уравнение Дайсона (4.42)

$$\langle S \rangle = 1 + \langle S \rangle Q S_0,$$

подействуем на (4.53) оператором $\{1 + \langle S \rangle Q\}$. В результате получаем уравнение

$$\Gamma = \langle S \rangle \langle S^* \rangle + \langle S \rangle \{ \Lambda \langle f S S^* \rangle - Q \Gamma \}. \quad (4.54)$$

Уравнение (4.54) можно переписать в виде уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) &= \langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle \langle S^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \rangle + \\ &+ \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}'_3 \langle S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \rangle \langle S^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2) \rangle K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3) \Gamma(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3; \mathbf{r}'_3, \mathbf{r}'_1), \end{aligned} \quad (4.55)$$

которое называется *уравнением Бете–Солпитера*. Функция $K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3)$ называется *ядром оператора интенсивности*.

Простейшее приближение для этого уравнения, так называемое *лестничное приближение*, соответствует функции $K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3)$ вида

$$K(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3) = \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \delta(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_3) B_f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2), \quad (4.56)$$

где $B_f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) = \langle f(\mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}'_2) \rangle$ — корреляционная функция поля $f(\mathbf{r})$.

4.8.2. Нелинейные интегральные уравнения. Рассмотрим теперь обобщение линейного интегрального уравнения (4.26) на случай уравнения с квадратичной нелинейностью. Возможны два случая. В первом, простейшем случае решение выражается через квадратуру от решения линейного уравнения по вспомогательному параметру, а второй, более сложный случай описывает пространственно-временную структуру гидродинамической турбулентности и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1.91).

Простейшее нелинейное интегральное уравнение. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2) S(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'). \quad (4.57)$$

Наряду с ним выпишем еще раз уравнение (4.26), решение которого будем обозначать индексом Λ :

$$S_\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \int d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2) S_\Lambda(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'). \quad (4.58)$$

Как упоминалось выше, решение уравнения (4.58) можно представить в виде итерационного ряда:

$$S_\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (S_0 \Lambda f)^n S_0.$$

Решение интегрального уравнения (4.57) имеет, очевидно, такую же итерационную структуру,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (S_0 \Lambda f)^n S_0, \quad (4.59)$$

с числовым параметром A_n . Значение этого параметра легко найти, рассматривая квадратное уравнение

$$y = 1 + \lambda y^2,$$

решение которого

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n.$$

Следовательно,

$$A_n = 2^n \frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(n+2)} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

где бэта-функция $B(\gamma, \delta)$ имеет интегральное представление

$$B(\gamma, \delta) = \int_0^1 dp p^{\gamma-1} (1-p)^{\delta-1},$$

и, следовательно,

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (4p)^n \sqrt{\frac{1-p}{p}} dp.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.59), получаем

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dp \sqrt{\frac{1-p}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} (S_0 \cdot 4p \Lambda f)^n S_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dp \sqrt{\frac{1-p}{p}} S_{4p\Lambda}. \quad (4.60)$$

Таким образом, решение нелинейного уравнения (4.57) выражается через решение линейного уравнения (4.58) с помощью квадратуры по вспомогательному параметру [69].

Пространственно-временное описание гидродинамической турбулентности. Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение (1.91) для пространственно-временной гармоник турбулентного поля скоростей:

$$(i\omega + \mathbf{v}\mathbf{k}^2) \hat{u}_i(\mathbf{K}) + \frac{i}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{K}_1) \hat{u}_\beta(\mathbf{K}_2) = \hat{f}_i(\mathbf{K}), \quad (4.61)$$

где

$$\Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \{k_\alpha \Delta_{i\beta}(\mathbf{k}) + k_\beta \Delta_{i\alpha}(\mathbf{k})\} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{K}) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega),$$

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \quad (i, \alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Здесь через $\mathbf{K}$ обозначен четырехмерный волновой вектор с координатами $\{\mathbf{k}, \omega\}$, $\hat{f}_i(\mathbf{K})$ — пространственно-временные фурье-гармоники внешних сил и поле $\hat{u}_i^*(\mathbf{K}) = \hat{u}_i(-\mathbf{K})$ в силу вещественности поля $u_i(\mathbf{x}, t)$.

Уравнению (4.61) эквивалентно линейное уравнение Хопфа с вариационными производными

$$(i\omega + \mathbf{v}\mathbf{k}^2) \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{K})} \varphi[\mathbf{z}] = i \hat{f}_i(\mathbf{K}) \varphi[\mathbf{z}] -$$

$$- \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta^2 \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)} \quad (4.62)$$

для функционала

$$\varphi[\mathbf{z}] = \exp \left\{ i \int d^4 \mathbf{K}' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{K}') \mathbf{z}(\mathbf{K}') \right\}. \quad (4.63)$$

Усредним теперь уравнение (4.62) по ансамблю реализаций поля внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{K})$. Тогда для характеристического функционала

$$\Phi[\mathbf{z}] = \langle \varphi[\mathbf{z}] \rangle$$

получаем уравнение

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{K})} \Phi[\mathbf{z}] = i \left\langle \hat{f}_i(\mathbf{K}) \varphi[\mathbf{z}] \right\rangle - \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)}. \quad (4.64)$$

Будем теперь считать, что случайное поле внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{K})$ является гауссовым, однородным в пространстве и стационарным во времени полем, различные статистические характеристики которого определяются пространственно-временной спектральной функцией

$$\left\langle \hat{f}_i(\mathbf{K}_1) \hat{f}_j(\mathbf{K}_2) \right\rangle = \frac{1}{2} \delta^4(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) F_{ij}(\mathbf{K}_1),$$

причем, в силу соленоидальности поля $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{K})$,

$$F_{ij}(\mathbf{K}) = \Delta_{ij}(\mathbf{k}) F(\mathbf{K}),$$

где $F(\mathbf{K})$ — пространственно-временной спектр внешних сил.

Используя формулу Фурутцу–Новикова для расщепления корреляции в правой части уравнения (4.64), уравнение (4.64) можно переписать в виде

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{K})} \Phi[\mathbf{z}] = -\frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{K}) \int d^4 \mathbf{K}_1 z_\alpha(\mathbf{K}_1) G_{\alpha j}[\mathbf{K}_1, -\mathbf{K}; \mathbf{z}] - \frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)}, \quad (4.65)$$

где введен новый функционал

$$G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = \left\langle \frac{\delta u_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} \varphi[\mathbf{z}] \right\rangle.$$

Уравнение для величины $\delta u_i(\mathbf{K}) / \delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')$ можно получить, варьируя уравнение (4.61):

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} + i \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{K}_1) \frac{\delta \hat{u}_\beta(\mathbf{K}_2)}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} = \delta_{ij} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}'), \quad (4.66)$$

и, следовательно, для функционала $G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ справедливо уравнение

$$(i\omega + \nu \mathbf{k}^2) G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = \delta_{ij} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \Phi[\mathbf{z}] - \\ - \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \frac{\delta}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} G_{\beta j}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]. \quad (4.67)$$

Система функциональных уравнений (4.65), (4.67) для $\Phi[\mathbf{z}]$ и $G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ замкнута и полностью определяет статистическое описание поля скорости [37] (см. также [38, 68, 155]).

Для средней скорости притока энергии к гармоникам поля скорости за счет работы внешних сил легко получить выражение

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{K}) \hat{f}_j(\mathbf{K}') \rangle = \frac{1}{2} F_{jl}(\mathbf{K}') \left\langle \frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_l(-\mathbf{K}')} \right\rangle = \frac{1}{2} F_{j\alpha}(\mathbf{K}') G_{i\alpha}[\mathbf{K}, -\mathbf{K}'; 0], \quad (4.68)$$

которое определяет физический смысл $G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ как функционала, описывающего корреляции поля скорости со скоростью притока энергии (мощностью сил). Величина $\delta \hat{u}_i(\mathbf{K}) / \delta \hat{f}_l(\mathbf{K}')$ может быть названа при этом «функцией Грина» для уравнения (4.61). Это связано с тем обстоятельством, что если добавить в правую часть (4.61) некую детерминированную силу $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{K})$, то решение получившегося уравнения будет функционалом от величины $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{K}) + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{K})$, т. е.

$$\hat{u}_i(\mathbf{K}) = \hat{u}_i[\mathbf{K}; \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{K}') + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{K}')]. \quad (4.69)$$

Разложим решение (4.69) в функциональный ряд по $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{K})$:

$$\hat{u}_i(\mathbf{K}) = \hat{u}_i[\mathbf{K}; \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{K}')] + \int d^4 \mathbf{K}' \frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{K})}{\delta \eta_j(\mathbf{K}')} \Big|_{\eta=0} \eta_j(\mathbf{K}') + \dots = \\ = \hat{u}_i(\mathbf{K}) + \int d^4 \mathbf{K}' \frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} \eta_j(\mathbf{K}') + \dots \quad (4.70)$$

Первый член разложения представляет собой просто решение задачи (4.61). Второй член описывает отклик динамической системы на бесконечно малую детерминированную силу $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{K})$, и выражение является при этом аналогом обычной функции Грина для линейных систем. Усредняя выражение (4.70) по ансамблю реализаций случайных сил, получаем, с учетом равенства $\langle \hat{u}_i(\mathbf{K}) \rangle = 0$, выражение для среднего отклика системы:

$$\langle \hat{u}_i(\mathbf{K}) \rangle = \int d^4 \mathbf{K}' \left\langle \frac{\delta \hat{u}_i(\mathbf{K})}{\delta \hat{f}_j(\mathbf{K}')} \right\rangle \eta_j(\mathbf{K}') + \dots$$

Вернемся к системе уравнений (4.65), (4.67). Представим теперь функционалы $\Phi[\mathbf{z}]$ и $G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ в виде

$$\Phi[\mathbf{z}] = e^{\varphi[\mathbf{z}]}, \quad G_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] e^{\varphi[\mathbf{z}]},$$

Тогда уравнения для функционалов $\varphi[\mathbf{z}]$ и $S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{K})} \varphi[\mathbf{z}] = & -\frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}' \int d^4 \mathbf{K}_1 S_{i\gamma}^0(\mathbf{K}, \mathbf{K}') F_{\gamma j}(\mathbf{K}') z_\alpha(\mathbf{K}_1) G_{\alpha j}[\mathbf{K}_1, -\mathbf{K}; \mathbf{z}] - \\ & -\frac{1}{2} \int d^4 \mathbf{K}' \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 S_{i\gamma}^0(\mathbf{K}, \mathbf{K}') \Lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta^2 \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\beta(\mathbf{K}_2)} + \frac{\delta^2 \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\beta(\mathbf{K}_2)} \right\}, \quad (4.71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = & S_{ij}^0(\mathbf{K}, \mathbf{K}') - \\ & - \int d^4 \mathbf{K}'' \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 S_{i\gamma}^0(\mathbf{K}, \mathbf{K}'') \Lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}'') \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} G_{\beta j}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] + \frac{\delta}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} G_{\beta j}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] \right\}, \quad (4.72) \end{aligned}$$

где

$$S_{ij}^0(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = (i\omega + \mathbf{v}\mathbf{k}^2)^{-1} \delta_{ij} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}').$$

Последнее уравнение при этом является аналогом *уравнения Швингера* в квантовой теории поля.

Отметим, что разложение по $\mathbf{z}(\mathbf{K})$ в функциональные ряды Тейлора функционалов $\varphi[\mathbf{z}]$ и $S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$ определяют соответственно кумулянты поля скорости и корреляции аналога функции Грина $G_{ij}(\mathbf{K}, \mathbf{K}') = \delta u_i(\mathbf{K}) / \delta f_j(\mathbf{K}')$ с полем скорости.

Если в системе функциональных уравнений (4.71), (4.72) нас интересует только поведение корреляционной функции скорости, тогда эта система будет содержать излишнюю информацию, которую можно отфильтровать путем построения для спектральной функции скорости специфического ряда теории возмущений. Для этого случая, как и для линейного, введем величину $S_{ij}^{-1}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}]$, согласно формуле

$$\int d^4 \mathbf{K}' S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] S_{j\delta}^{-1}[\mathbf{K}', \mathbf{K}''; \mathbf{z}] = \delta_{i\delta} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}''). \quad (4.73)$$

Легко видеть, что будет иметь место и соотношение

$$\int d^4 \mathbf{K}' S_{ij}^{-1}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] S_{j\delta}[\mathbf{K}', \mathbf{K}''; \mathbf{z}] = \delta_{i\delta} \delta^4(\mathbf{K} - \mathbf{K}''). \quad (4.74)$$

Введем также трехиндексный функционал, аналогичный *вершинной части массового оператора* в квантовой теории поля:

$$\Gamma_\gamma^{\delta}[\mathbf{P}, \mathbf{K}', \mathbf{K}''; \mathbf{z}] = \frac{\delta}{\delta z_\gamma(\mathbf{P})} S_{j\delta}^{-1}[\mathbf{K}', \mathbf{K}''; \mathbf{z}]. \quad (4.75)$$

Варьируя (4.73) по $z_\gamma(\mathbf{P})$, можно выразить $\delta S/\delta z$ через S и Γ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z_\gamma(\mathbf{P})} S_{i\mu}[\mathbf{K}, \mathbf{Q}; \mathbf{z}] = \\ = - \int d^4 \mathbf{K}' \int d^4 \mathbf{K}'' S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] \Gamma_\gamma^{\delta j}[\mathbf{P}, \mathbf{K}', \mathbf{K}''; \mathbf{z}] S_{\delta\mu}[\mathbf{K}'', \mathbf{Q}; \mathbf{z}]. \quad (4.76) \end{aligned}$$

При помощи (4.76) уравнение (4.72) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S_{ij}[\mathbf{K}, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] = S_{ij}^0(\mathbf{K}, \mathbf{K}') - \\ - \int d^4 \mathbf{P} \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 S_{i\gamma}^0(\mathbf{K}, \mathbf{P}) \Lambda_\gamma^{\alpha\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{P}) \left\{ \frac{\delta\varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1)} G_{\beta j}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] - \right. \\ \left. - \int d^4 \mathbf{K}' \int d^4 \mathbf{K}'' S_{\beta\sigma}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] \Gamma_\alpha^{\sigma\nu}[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}', \mathbf{K}''; \mathbf{z}] S_{\nu j}[\mathbf{K}'', \mathbf{K}'; \mathbf{z}] \right\}. \quad (4.77) \end{aligned}$$

Полагая в (4.77) $\mathbf{z} = 0$, получаем связывающие величины $S|_{\mathbf{z}=0}$ и $\Gamma|_{\mathbf{z}=0}$ уравнение, аналогичное уравнению Дайсона в квантовой теории поля ($\delta\varphi/\delta\mathbf{z} = 0$ при $\mathbf{z} = 0$).

Умножая уравнение (4.77) справа на S^{-1} , а слева на S_0^{-1} , интегрируя по соответствующим аргументам и варьируя по $\mathbf{z}$, получаем следующее функциональное уравнение для Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma^{\mu\rho}[\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1; \mathbf{z}] = \int d^4 \mathbf{K}_1 \Lambda_\mu^{\alpha,\rho}(\mathbf{K}_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \frac{\delta^2 \varphi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{K}_1) \delta z_\gamma(\mathbf{P}_3)} - \\ - \int d^4 \mathbf{K}_1 \int d^4 \mathbf{K}_2 \int d^4 \mathbf{K}' \Lambda_\mu^{\alpha,\beta}(\mathbf{K}_1, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \times \\ \times \frac{\delta}{\delta z_\gamma(\mathbf{P}_3)} \{ S_{\beta\sigma}[\mathbf{K}_2, \mathbf{K}'; \mathbf{z}] \Gamma_\alpha^{\sigma\rho}[\mathbf{K}, \mathbf{K}', \mathbf{P}_2; \mathbf{z}] \}. \quad (4.78) \end{aligned}$$

Система уравнений (4.71), (4.77), (4.78) замкнута; ее решения, однако, связаны соотношением (4.76).

Если теперь строить теорию возмущений, выбрав в качестве нулевого приближения свободные члены уравнений (4.71) и (4.78), а возникающие при этом вариации S по $\mathbf{z}$ выражать при помощи соотношения (4.76), то для величин пространственно-временного спектра скорости и функции $\Gamma|_{\mathbf{z}=0}$ получаются бесконечные ряды, каждый член которых содержит эти же функции. Эти ряды представляют собой интегральные уравнения с бесконечным числом членов и вместе с уравнением (4.72) при $\mathbf{z} = 0$ образуют замкнутую систему уравнений для величин $\delta^2\varphi/\delta\mathbf{z}\delta\mathbf{z}$, $S|_{\mathbf{z}=0}$ и $\Gamma|_{\mathbf{z}=0}$. Однако в силу громоздкости выкладок и сложности нелинейных функциональных уравнений (4.71), (4.77), (4.78), выписать даже несколько членов указанных рядов затруднительно. Анализ возможных упрощений возникающей системы уравнений содержится в работе [37] (см. также [38, 68, 155]).

4.9. Динамические системы, допускающие полный статистический анализ

Рассмотрим теперь несколько примеров динамических систем, допускающих достаточно полный статистический анализ для произвольных случайных параметров.

4.9.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пример мультипликативного воздействия. В качестве первого примера рассмотрим векторное стохастическое уравнение с начальным условием

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = z(t)g(t)\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.79)$$

где $g(t)$ и $F_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, N$, — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайный процесс, статистические характеристики которого описываются характеристическим функционалом

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle = e^{\Theta[t; v(\tau)]}.$$

Уравнения (4.79) обладают особенностью, позволяющей решить задачу о нахождении статистических характеристик их решений в общем случае произвольной статистики процесса $z(t)$. Дело в том, что если ввести новое «случайное» время

$$T = \int_0^t d\tau z(\tau)g(\tau),$$

то уравнения (4.79) примут форму «детерминированных» уравнений

$$\frac{d}{dT}\mathbf{x}(T) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

и, следовательно, решение уравнения (4.79) имеет структуру

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(T) = \mathbf{x} \left(\int_0^t d\tau z(\tau)g(\tau) \right). \quad (4.80)$$

Варьируя (4.80) по $z(\tau)$ и используя (4.79), получаем равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)}\mathbf{x}(t) = g(\tau)\frac{d}{dT}\mathbf{x}(T) = g(\tau)\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)). \quad (4.81)$$

Таким образом, вариационные производные решения $\mathbf{x}(t)$ выражаются через само же решение в тот же момент времени. Это позволяет сразу написать замкнутые уравнения для статистических характеристик задачи (4.79).

Получим уравнение для одноточечной плотности вероятностей $P(\mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i\delta z(\tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \right\rangle. \quad (4.82)$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta z(\tau)$ на индикаторную функцию $\phi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$. Используя формулу (4.81), получаем выражение

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -g(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, t) \}.$$

Следовательно, уравнение (4.82) можно переписать в виде замкнутого операторного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t; ig(\tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (4.83)$$

конкретный вид которого определяется характером процесса $z(t)$.

Для двухвременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \rangle$$

аналогичным образом получаем уравнение (при $t > t_1$)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \dot{\Theta}_t \left[t; ig(\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \theta(t_1 - \tau) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) \right\} \right] P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \quad (4.84)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) P(\mathbf{x}_1, t_1),$$

где функция $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ удовлетворяет уравнению (4.83).

Из уравнения (4.84) видно, что многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации через плотность вероятностей перехода (см. раздел 3.3) и, следовательно, процесс $\mathbf{x}(t)$ не является марковским. Конкретный вид уравнений (4.83) и (4.84) определяется выбором статистики процесса $z(t)$.

Так, если процесс $z(t)$ гауссов с характеристиками

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad B(t, t') = \langle z(t) z(t') \rangle,$$

то функционал

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 B(t_1, t_2) v(t_1) v(t_2)$$

и уравнение (4.83) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = g(t) \int_0^t d\tau B(t, \tau) g(\tau) \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t), \quad (4.85)$$

и его можно рассматривать как *обобщенное уравнение Фоккера–Планка*.

К задачам типа (4.79) приводит класс задач, описываемых системой уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = z(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.86)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — однородные полиномы степени k . Вводя новые функции

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) e^{-\lambda t},$$

мы приходим к задаче (4.79) с функцией $g(t) = e^{-\lambda(k-1)t}$. В важном частном случае $k = 2$ и для функций $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, таких, что $\mathbf{x}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, система уравнений (4.79) описывает системы гидродинамического типа с линейным трением (см., например, [17, 29]). При этом взаимодействие между компонентами носит случайный характер.

Для систем гидродинамического типа при $\lambda = 0$ и для любой реализации процесса $z(t)$ имеет место закон сохранения энергии. В этом случае имеется стационарное распределение вероятностей $P(\mathbf{x})$ при $t \rightarrow \infty$, которое является равномерным распределением на сфере $x_i^2 = E_0$, если нет дополнительных интегралов движения. При наличии дополнительных интегралов движения (как это имеет место, например, при конечномерной аппроксимации двумерного движения жидкости) стационарное распределение вероятностей будет сосредоточено на области фазового пространства, допускаемого интегралами движения.

Отметим, что в частном случае одномерного линейного уравнения типа (4.86) для гауссового процесса $z(t)$, определяющего *логарифмически нормальный случайный процесс* простейшего вида,

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) + z(t) x(t), \quad x(0) = 1,$$

вместо (4.85) получаем обобщенное уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} x \right) P(x, t) = \int_0^t d\tau B(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} x P(x, t), \quad (4.87)$$

$$P(x, 0) = \delta(x - 1).$$

Пример аддитивного воздействия. Рассмотрим теперь класс линейных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.88)$$

где $A(t)$ — детерминированная матрица, а $\mathbf{f}(t)$ — случайная вектор-функция с заданным характеристическим функционалом $\Phi[t; \mathbf{v}(\tau)]$.

Для плотности вероятностей решения уравнения (4.88) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t)) + \left\langle \dot{\Theta} \left[t; \frac{\delta}{i\delta\mathbf{f}(\tau)} \right] \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \right\rangle. \quad (4.89)$$

В рассматриваемой задаче вариационная производная $\delta \mathbf{x}(t)/\delta \mathbf{f}(\tau)$ удовлетворяет также линейному уравнению ($\tau < t$) с начальным условием:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\tau)} x_i(t) = A_{ik}(t) \frac{\delta}{\delta \mathbf{f}(\tau)} x_k(t), \quad \left. \frac{\delta}{\delta \mathbf{f}_l(\tau)} x_i(t) \right|_{t=\tau} = \delta_{il}. \quad (4.90)$$

Уравнение (4.90) уже не содержит случайностей и определяет функцию Грина $G_{il}(t, \tau)$ для однородной системы (4.88), т. е.

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}_l(\tau)} x_i(t) = G_{il}(t, \tau).$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{f}_l(\tau)} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} G_{kl}(t, \tau) \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

и уравнение (4.89) превращается в замкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t)) + \dot{\Theta}_t \left[t; i G_{kl}(t, \tau) \frac{\partial}{\partial x_k} \right] P(\mathbf{x}, t). \quad (4.91)$$

Из уравнения (4.91) следует, что уравнение для любого момента величины $\mathbf{x}(t)$ будет замкнутым линейным уравнением, содержащим только конечное число кумулянтных функций, порядок которых не превосходит порядка рассматриваемого момента.

Аналогичным образом для двухвременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \rangle$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = & -\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1)) + \\ & + \dot{\Theta}_t \left[t; i \{ G_{kl}(t, \tau) + G_{kl}(t_1, \tau) \} \frac{\partial}{\partial x_l} \right] P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) \quad (t > t_1) \end{aligned} \quad (4.92)$$

с начальным условием

$$P(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) P(\mathbf{x}_1, t_1),$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — одноточечная плотность вероятностей, описываемая уравнением (4.91). Из уравнения (4.92) следует, что процесс $\mathbf{x}(t)$ не является марковским. Конкретная форма уравнений (4.91) и (4.92) определяется структурой функционала $\Phi[t; v(\tau)]$, т. е. случайным характером функции $\mathbf{f}(t)$.

Так, для гауссового векторного процесса $\mathbf{f}(t)$ с параметрами

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(t, t') = \langle f_i(t) f_j(t') \rangle$$

уравнение (4.91) принимает вид обобщенного уравнения Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ik}(t) x_k P(\mathbf{x}, t)) + \\ + \int_0^t d\tau B_{jl}(t, \tau) G_{kj}(t, \tau) G_{ml}(t, \tau) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} P(\mathbf{x}, t). \quad (4.93)$$

Выше мы рассмотрели несколько типов стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих замкнутое статистическое описание в общем виде. Ясно, что аналогичные ситуации могут существовать и в динамических системах, описываемых уравнениями в частных производных.

4.9.2. Примеры уравнений в частных производных. Прежде всего отметим, что уравнение в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z(t) g(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.79) и, следовательно, также допускает полное статистическое описание для произвольного случайного процесса $z(t)$.

Рассмотрим теперь класс нелинейных уравнений в частных производных, не содержащих явной зависимости от пространственной переменной $\mathbf{x}$, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, \mathbf{x}) + \mathbf{z}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} q(t, \mathbf{x}) = F \left(t, q, \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} q, \dots \right),$$

где $\mathbf{z}(t)$ — векторный случайный процесс, а F — детерминированная функция. Решение этого уравнения можно представить в виде

$$q(t, \mathbf{x}) = Q \left(t, \mathbf{x} - \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau) \right),$$

где функция $Q(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет детерминированному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \mathbf{x}) = F \left(t, Q, \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} Q, \dots \right).$$

Для таких задач различные статистические характеристики решения определяются непосредственно путем усреднения соответствующих выражений, построенных по решению последнего уравнения. При этом, например, функция $\langle q(t, \mathbf{x}) \rangle$ будет удовлетворять замкнутому уравнению, содержащему производные по $\mathbf{x}$ всех порядков.

Уравнение Бюргерса со случайным сносом. Рассмотрим, в качестве примера, одномерное уравнение Бюргерса со случайным сносом:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(t, x) + (q + z(t)) \frac{\partial}{\partial x} q(t, x) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(t, x). \quad (4.94)$$

Для вариационной производной $q(t, x)$ по $z(\tau)$ в этом случае имеем

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} q(t, x) = \frac{\delta}{\delta z(\tau)} Q\left(t, x - \int_0^t d\tau z(\tau)\right) = -\theta(t - \tau) \frac{\partial}{\partial x} q(t, x). \quad (4.95)$$

Пусть теперь, например, случайный процесс $z(t)$ — гауссов стационарный во времени процесс с корреляционной функцией $B(t - t') = \langle z(t) z(t') \rangle$. Усредним уравнение (4.94) по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle q(t, x) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \langle q^2(t, x) \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle z(t) q(t, x) \rangle = v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle q(t, x) \rangle. \quad (4.96)$$

Для расщепления корреляций в левой части этого уравнения воспользуемся формулами (см. раздел 3.4)

$$\langle z(t) q(t, x) \rangle = \int_0^t d\tau B(t - \tau) \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau)} q(t, x) \right\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle q[z(\tau) + \eta_1(\tau)] q[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle = \\ = \exp\left(\int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 B(\tau_1 - \tau_2) \frac{\delta^2}{\delta \eta_1(\tau_1) \delta \eta_2(\tau_2)}\right) \langle q[z(\tau) + \eta_1(\tau)] q[z(\tau) + \eta_2(\tau)] \rangle, \end{aligned}$$

которые, в силу (4.95), можно записать в виде

$$\langle z(t) q(t, x) \rangle = - \int_0^t d\tau B(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \langle q(t, x) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle q^2(t, x) \rangle = \exp\left(2 \int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2}\right) \langle q(t, x + \eta_1) \rangle \langle q(t, x + \eta_2) \rangle|_{\eta=0} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[\int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \right]^n \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \langle q(t, x) \rangle \right]^2. \end{aligned}$$

В результате уравнение (4.96) принимает форму замкнутого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle q(t, x) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[\int_0^t d\tau (t - \tau) B(\tau) \right]^n \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \langle q(t, x) \rangle \right]^2 = \\ = \left(v + \int_0^t d\tau B(\tau) \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle q(t, x) \rangle, \quad (4.97) \end{aligned}$$

содержащего, однако, в отличие от (4.94), производные всех порядков по пространственной переменной x [40, 155].

К сожалению, число уравнений, допускающих достаточно полный анализ, ограничено. В общем случае, для анализа динамических систем приходится прибегать к различным асимптотическим и приближенным методам. В физических исследованиях часто используются и дают хорошие результаты методы, основанные на аппроксимации реальных случайных процессов и полей дельта-коррелированными во времени процессами и полями.

4.10. Дельта-коррелированные процессы и поля

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, выполняется равенство (см. предыдущую главу)

$$\dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] \equiv \dot{\Theta}_t[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)]$$

и ситуация существенно упрощается. В этом случае дельта-коррелированность поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ означает, что

$$\begin{aligned} \Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] &= \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}_1 \dots \int d\mathbf{y}_n K_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; \tau) v_{i_1}(\mathbf{y}_1, \tau) \dots v_{i_n}(\mathbf{y}_n, \tau), \end{aligned}$$

т. е. его кумулянтные функции имеют структуру

$$K_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{y}_1, t_1; \dots; \mathbf{y}_n, t_n) = K_n^{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n).$$

Уравнения (4.7), (4.9) и (4.12) принимают в этом случае вид замкнутых операторных уравнений для функций $P(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ и $P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)$ в силу равенства (4.3). Так, вместо (4.7), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t), \quad (4.98)$$

$$P(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

конкретный вид которого определяется видом функционала $\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$, т. е. статистическим характером случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Соответственно, вместо (4.12), для m -временной плотности вероятностей получаем операторное уравнение ($t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t_m) \right) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) &= \\ &= \dot{\Theta}_{t_m} \left[t_m, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_m} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_m) \right] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m), \quad (4.99) \end{aligned}$$

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}).$$

Решение уравнения (4.99) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (4.100)$$

Так как все дифференциальные операции в (4.99) относятся к $t_m, \mathbf{x}_m$, то подставляя (4.100) в (4.99), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \dot{\Theta}_t \left[t, t_0; i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (4.101)$$

Здесь мы обозначили переменные $\mathbf{x}_m, t_m$ через $\mathbf{x}, t$ и переменные $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$ через $\mathbf{x}_0, t_0$.

Применяя формулу (4.100) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (4.102)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (4.98) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (4.102) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским. Плотность вероятностей перехода при этом

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}_0, t_0 \rangle.$$

Конкретная модель флуктуаций параметров может существенно упростить полученные уравнения.

Так, например, для гауссового дельта-коррелированного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ корреляционный тензор имеет следующую структуру: $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$)

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t).$$

Функционал $\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)]$ в этом случае принимает вид

$$\Theta[t, t_0; \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau)] = - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{y}_1 \int d\mathbf{y}_2 F_{ij}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \tau) v_i(\mathbf{y}_1, \tau) v_j(\mathbf{y}_2, \tau)$$

и уравнение (4.98) переходит в уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (4.103)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial x_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}}.$$

Отметим, что уравнение (4.9) в этом случае принимает вид обратного уравнения Фоккера–Планка (см., например, [15]):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.104)$$

В виду особой важности случая гауссового дельта-коррелированного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ для физических приложений, это приближение, обычно называемое *приближением гауссового дельта-коррелированного поля* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, с других позиций более подробно рассмотрено в третьей части книги.

Для случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, связанного с дельта-коррелированным пуассоновским случайным процессом (см. гл. 3), можно получить прямое и обратное уравнения Колмогорова–Феллера.

В качестве иллюстрации изложенной выше общей теории приведем несколько примеров.

4.10.1. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим одномерное стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x, t) + z(t)g(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (4.105)$$

где $f(x, t)$ и $g(x, t)$ — детерминированные функции, а $z(t)$ — случайная функция времени. Для индикаторной функции $\varphi(x, t) = \delta(x(t) - x)$ имеем уравнение Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) \varphi(x, t) = -z(t) \frac{\partial}{\partial x} \{g(x, t) \varphi(x, t)\},$$

и, следовательно, уравнение для одновременной плотности вероятностей $P(x, t)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] \varphi(x, t) \right\rangle.$$

Для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$ имеет место

$$\dot{\Theta}_t[t, v(\tau)] = \dot{\Theta}_t[t, v(t)],$$

и, учитывая равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \{g(x, t) \varphi(x, t)\}$$

получаем замкнутое операторное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \dot{\Theta}_t \left[t, i \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right] P(x, t). \quad (4.106)$$

Для гауссового дельта-коррелированного процесса

$$\Theta[t, v(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) v^2(\tau), \quad (4.107)$$

и уравнение (4.106) принимает вид уравнения Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = \frac{1}{2} B(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) P(x, t). \quad (4.108)$$

Для пуассоновского дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$

$$\Theta[t, v(\tau)] = v \int_0^t d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right\}, \quad (4.109)$$

и уравнение (4.106) становится таковым:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = v \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)} - 1 \right\} P(x, t). \quad (4.110)$$

Пусть, например, $g(x, t) = 1$, т. е. уравнение (4.105) выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, t) + z(t), \quad x(0) = x_0.$$

В этом случае оператор в правой части (4.110) является оператором сдвига и уравнение (4.110) принимает вид уравнения Колмогорова–Феллера:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) P(x - \xi, t) - v P(x, t).$$

Пусть теперь $g(x, t) = x$, т. е. уравнение (4.105) записывается в следующей форме:

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, t) + z(t) x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тогда уравнение (4.110) выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = v \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x} x} - 1 \right\} P(x, t). \quad (4.111)$$

Вычислим действие оператора в правой части (4.111) в этом случае. Разложим этот оператор в ряд по ξ и рассмотрим действие каждого члена

разложения

$$\left\{ e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\} P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right)^n P(x, t).$$

Представляя x в виде $x = e^\varphi$, эту формулу можно преобразовать следующим образом (то обстоятельство, что x — знакпеременная величина, несущественно):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} e^{-\varphi} \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} e^\varphi P(e^\varphi, t) &= \\ &= e^{-\varphi} \left\{ e^{-\xi \frac{\partial}{\partial \varphi}} - 1 \right\} e^\varphi P(e^\varphi, t) = e^{-\xi} P(e^{\varphi-\xi}, t) - P(e^\varphi, t). \end{aligned}$$

Возвращаясь теперь к переменной x , можно представить уравнение (4.111) окончательно в виде интегро-дифференциального уравнения типа Колмогорова–Феллера:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right) P(x, t) = v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-\xi} P(x e^{-\xi}, t) - v P(x, t).$$

В гл. 3 говорилось о том, что пуассоновский процесс $x(t)$ с произвольной импульсной функцией $g(t)$ связан с пуассоновским дельта-коррелированным случайным процессом $z(t)$ посредством формулы

$$x(t) = \int_0^t d\tau g(t - \tau) z(\tau).$$

Пусть $g(t) = e^{-\lambda t}$. В этом случае процесс $x(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\lambda x(t) + z(t)$$

и, следовательно, как плотность вероятностей перехода, так и одноточечная плотность вероятностей для него удовлетворяют, согласно (4.110), уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\tilde{z}, t \mid \tilde{z}_0, t_0) = \hat{L}_{\tilde{z}} p(\tilde{z}, t \mid \tilde{z}_0, t_0), \quad \frac{\partial}{\partial t} P(\tilde{z}, t) = \hat{L}_{\tilde{z}} P(\tilde{z}, t),$$

где оператор

$$\hat{L}_{\tilde{z}} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} x + v \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) e^{-\xi \frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\}. \quad (4.112)$$

4.10.2. Линейное операторное уравнение. Рассмотрим теперь в качестве примера случай линейных операторных стохастических уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \hat{A}(t)\mathbf{x}(t) + z(t)\hat{B}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.113)$$

где $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — детерминированные операторы, которые могут быть, например, операторами дифференцирования по вспомогательным переменным или обычными матрицами. Функцию $z(t)$ будем считать случайной дельта-коррелированной функцией.

Усредним систему (4.113). Согласно общим формулам,

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i\delta z(t)} \right] \mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (4.114)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)}\mathbf{x}(t) = \hat{B}(t)\mathbf{x}(t),$$

которое следует непосредственно из (4.113), уравнение (4.114) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle + \dot{\Theta}_t \left[t, -i\hat{B} \right] \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (4.115)$$

Таким образом, для линейной системы (4.113) уравнения для средних значений также являются линейными.

Логарифм характеристического функционала $\Theta[t; v(\tau)]$ для дельта-коррелированных процессов можно разложить в функциональный ряд Тейлора:

$$\Theta[t; v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau K_n(\tau) v^n(\tau), \quad (4.116)$$

где $K_n(t)$ определяют кумулянтные функции процесса $z(t)$. Подставляя выражение (4.116) в (4.115), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n(t) \left[\hat{B}(t) \right]^n \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (4.117)$$

Если теперь существует такая степень оператора $\hat{B}^l(t)$, что $\hat{B}^l(t) = 0$, то уравнение (4.117) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t)\langle \mathbf{x}(t) \rangle + \sum_{n=1}^{l-1} \frac{1}{n!} K_n(t) \left[\hat{B}(t) \right]^n \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (4.118)$$

В этом случае в уравнение для среднего значения входит только часть кумулянтов процесса $z(t)$. Это означает, что если интересоваться только

уравнением для среднего значения, то совсем не обязательно знать распределение вероятностей для функции $z(t)$; достаточно знать только определенные кумулянты процесса $z(t)$ и то обстоятельство, что процесс $z(t)$ можно рассматривать как дельта-коррелированный случайный процесс. Примером такой физической системы является задача статистического описания осциллятора с флуктуирующей частотой.

Стохастический параметрический резонанс. В качестве простейшей линейной динамической системы рассмотрим задачу о статистическом описании осциллятора с флуктуирующей частотой (1.15), допускающую достаточно полный анализ и описываемую уравнением второго порядка с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) &= 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \frac{d}{dt}x(0) = y_0, \end{aligned} \quad (4.119)$$

которое можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -\omega_0^2[1 + z(t)]x(t), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Для системы уравнений (4.120) индикаторная функция

$$\Phi(t; x, y) = \delta(x(t) - x) \delta(y(t) - y)$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi(t; x, y) = \omega_0^2 z(t) x \frac{\partial}{\partial y} \Phi(t; x, y).$$

Совместная одновременная плотность вероятностей для решения системы (4.120) $P(t; x, y) = \langle \Phi(t; x, y) \rangle$ и описывается операторным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta z(\tau)} \right] \Phi(t; x, y) \right\rangle, \quad (4.121)$$

где $\dot{\Theta}_t[t; v(\tau)] = \frac{d}{dt} \Theta[t; v(\tau)]$, а $\Theta[t; v(\tau)]$ — логарифм характеристического функционала процесса $z(t)$,

$$\Theta[t; v(\tau)] = \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

Для дельта-коррелированного процесса $z(t)$ совместная одновременная плотность вероятностей для решения системы (4.120) описывается упрощенным операторным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) = \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i\delta z(t)} \right] \Phi(t; x, y) \right\rangle, \quad (4.122)$$

которое с учетом равенства

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \Phi(t; x, y) = \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \Phi(t; x, y),$$

вытекающего непосредственно из уравнения Лиувилля, можно записать в замкнутом операторном виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) = \dot{\Theta}_t \left[t; -i\omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right] P(t; x, y). \quad (4.123)$$

Из уравнения (4.123) можно получить замкнутую систему уравнений для моментов любого порядка. Это связано с тем обстоятельством, что в операторную часть уравнения (4.123) переменные входят в виде однородной комбинации $x \frac{\partial}{\partial y}$, которая не повышает порядка рассматриваемого момента, что, конечно, является следствием линейности исходной системы уравнений (4.120). При этом в уравнения для моментов войдут только кумулянты процесса $z(t)$, порядок которых не превышает порядка рассматриваемого момента.

В самом деле, рассмотрим векторную величину

$$A_k(t) = x^k(t) y^{N-k}(t) \quad (k = 0, \dots, N).$$

Для нее из системы уравнений (4.120) получаем стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt} A_k(t) = k A_{k-1}(t) - \omega_0^2 (N-k) [1 + z(t)] A_{k+1}(t) \quad (k = 0, \dots, N),$$

что соответствует линейному операторному уравнению (4.113) с постоянными матрицами

$$\hat{A}_{ij} = i\delta_{i,j+1} - \omega_0^2 (N-i)\delta_{i,j-1}, \quad \hat{B}_{ij} = -\omega_0^2 (N-i)\delta_{i,j-1}.$$

Очевидно, что для такой матрицы

$$\hat{B}_{ij}^2 = -\omega_0^4 (N-i)(N-j+i)\delta_{i,j-2}$$

и т. д., и, следовательно,

$$\hat{B}^{N+1} \equiv 0.$$

Уравнение для средней величины $\langle A_k(t) \rangle$ ($k = 0, \dots, N$), согласно (4.117), имеет вид

$$\frac{d}{dt} \langle A_k(t) \rangle = k \langle A_{k-1}(t) \rangle - \omega_0^2 (N - k) \langle A_{k+1}(t) \rangle + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} K_n [\widehat{B}^n]_{kl} \langle A_l(t) \rangle, \quad (4.124)$$

где K_n — кумулянты случайного процесса $z(t)$, и, в соответствии с выше сказанным, в уравнение для средней величины войдут только те кумулянты процесса $z(t)$, порядок которых не превышает N . В частности, для стационарного дельта-коррелированного процесса $z(t)$ первые моменты решения системы стохастических уравнений (4.120) не зависят от флуктуаций параметров системы, так как $K_1 = 0$, а вторые моменты описываются системой уравнений, соответствующих гауссовым флуктуациям параметров системы.

Для дельта-коррелированного процесса $z(t)$ легко определить также и корреляционные функции для решения системы уравнений (4.120). В самом деле умножая систему (4.120) на $x(t')$, где $t' < t$, и усредняя по ансамблю реализаций процесса $z(t)$, получаем замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t) x(t') \rangle &= \langle y(t) x(t') \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle y(t) x(t') \rangle &= -\omega_0^2 \langle x(t) x(t') \rangle, \end{aligned} \quad (4.125)$$

так как

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} x(t) x(t') = 0.$$

Начальным условием для этой системы являются условия

$$\begin{aligned} \langle x(t) x(t') \rangle_{t=t'} &= \langle x^2(t') \rangle, \\ \langle y(t) x(t') \rangle_{t=t'} &= \langle x(t') y(t') \rangle. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Аналогичным образом получаем систему уравнений и для другой пары корреляционных функций при $t > t'$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t) y(t') \rangle &= \langle y(t) y(t') \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle y(t) y(t') \rangle &= -\omega_0^2 \langle x(t) y(t') \rangle, \end{aligned} \quad (4.127)$$

с начальными условиями

$$\langle x(t) y(t') \rangle_{t=t'} = \langle x(t') y(t') \rangle, \quad \langle y(t) y(t') \rangle_{t=t'} = \langle y^2(t') \rangle. \quad (4.128)$$

Решение систем уравнений (4.125), (4.127) с начальными условиями (4.126), (4.128) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \langle x(t) x(t') \rangle &= \langle x^2(t') \rangle \cos \omega_0(t-t') + \frac{1}{\omega_0} \langle x(t') y(t') \rangle \sin \omega_0(t-t'), \\
 \langle y(t) x(t') \rangle &= -\omega_0 \langle x^2(t') \rangle \sin \omega_0(t-t') + \langle x(t') y(t') \rangle \cos \omega_0(t-t'), \\
 \langle x(t) y(t') \rangle &= \langle x(t') y(t') \rangle \cos \omega_0(t-t') + \frac{1}{\omega_0} \langle y^2(t') \rangle \sin \omega_0(t-t'), \\
 \langle y(t) y(t') \rangle &= -\omega_0 \langle x(t') y(t') \rangle \sin \omega_0(t-t') + \langle y^2(t') \rangle \cos \omega_0(t-t').
 \end{aligned} \tag{4.129}$$

Гауссовы дельта-коррелированные флуктуации параметров. Для гауссового стационарного дельта-коррелированного процесса $z(t)$ функционал $\Theta[t; v(\tau)]$ описывается формулой

$$\Theta[t; v(\tau)] = -\sigma^2 \tau_0 \int_0^t d\tau v^2(\tau) \quad (\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t-t')),$$

где σ^2 — дисперсия, а τ_0 — временной радиус корреляции процесса $z(t)$, и уравнение (4.123) принимает вид уравнения Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) &= D \omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y), \\
 P(0; x, y) &= \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),
 \end{aligned} \tag{4.130}$$

где $D = \sigma^2 \tau_0 \omega_0^2$ — коэффициент диффузии в пространстве $\{x, y/\omega_0\}$.

Выпишем уравнения для первых двух моментов решения системы (4.120). Для средних значений $x(t)$ и $y(t)$ получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dt} \langle x(t) \rangle = \langle y(t) \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle y(t) \rangle = -\omega_0^2 \langle x(t) \rangle, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{4.131}$$

совпадающую с системой (4.120) в случае отсутствия флуктуаций, в соответствии с вышесказанным. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \langle x(t) \rangle &= x_0 \cos \omega_0(t-t') + \frac{1}{\omega_0} y_0 \sin \omega_0(t-t'), \\
 \langle y(t) \rangle &= -\omega_0 x_0 \sin \omega_0(t-t') + y_0 \cos \omega_0(t-t').
 \end{aligned} \tag{4.132}$$

Вторые моменты величин $x(t)$ и $y(t)$ описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle &= 2 \langle x(t) y(t) \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle x(t) y(t) \rangle = \langle y^2(t) \rangle - \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle, \\
 \frac{d}{dt} \langle y^2(t) \rangle &= -2\omega_0^2 \langle x(t) y(t) \rangle + D \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.133}$$

Из этой системы можно получить замкнутые уравнения третьего порядка непосредственно для конкретных моментов. Так, например, для величины $\langle U(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle$, описывающей среднюю потенциальную энергию осциллятора, получаем уравнение

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle - 4D\omega_0^2 \langle U(t) \rangle = 0, \quad (4.134)$$

соответствующее стохастическому уравнению для $U(t) = x^2(t)$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} U(t) + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} U(t) + 2\omega_0^2 \left(z(t) \frac{d}{dt} U(t) + \frac{d}{dt} z(t) U(t) \right) &= 0, \\ U(0) = x_0^2, \quad \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0} &= 2x_0 y_0, \\ \frac{d^2}{dt^2} U(t) \Big|_{t=0} &= 2y_0^2 - \omega_0^2 [1 + z(0)] x_0^2, \end{aligned} \quad (4.135)$$

вытекающему непосредственно из системы (4.120).

Чтобы не загромождать последующие вычисления, будем считать, для простоты, что начальные условия для системы (4.120) имеют вид

$$x(0) = 0, \quad y(0) = \omega_0. \quad (4.136)$$

Если считать, что в задаче имеется малый параметр, связанный с интенсивностью флуктуаций процесса $z(t)$, то решение системы уравнений (4.133), с точностью до членов порядка D/ω_0 , можно приближенно записать в виде

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ e^{Dt} - e^{-\frac{Dt}{2}} \left[\cos(2\omega_0 t) + \frac{3D}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right] \right\}, \\ \langle x(t)y(t) \rangle &= \frac{\omega_0}{4} \left\{ 2e^{-\frac{Dt}{2}} \sin(2\omega_0 t) + \frac{D}{\omega_0} \left[e^{Dt} - e^{-\frac{Dt}{2}} \cos(2\omega_0 t) \right] \right\}, \\ \langle y^2(t) \rangle &= \frac{\omega_0^2}{2} \left\{ e^{Dt} + e^{-\frac{Dt}{2}} \left[\cos(2\omega_0 t) - \frac{D}{4\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Таким образом, решение (4.137) системы уравнений (4.133) содержит растущие со временем члены, что соответствует статистической параметрической раскачке динамической системы (4.120) за счет флуктуации частоты. В случае слабых флуктуаций инкремент нарастания, как это видно из (4.137), равен

$$\mu = D \quad (D/\omega_0 \ll 1).$$

Из выражений (4.137) следует, что решение статистической задачи (4.120) имеет два характерных масштаба изменения времени: $t_1 \sim 1/\omega_0$ и $t_2 \sim 1/D$. Первый временной масштаб соответствует периоду колебаний системы (4.120) в случае отсутствия флуктуаций («быстрые процессы»), а второй

связан с появлением медленных изменений статистических характеристик, обусловленных наличием флуктуаций («медленные процессы»). При этом

$$t_1/t_2 = D/\omega_0 \ll 1.$$

Для получения медленных изменений статистических характеристик процессов $x(t)$ и $y(t)$ можно исключить быстрые движения, усредняя соответствующие величины по времени, связанному с периодом быстрых движений ($T = 2\pi/\omega_0$). Обозначая такое усреднение горизонтальной чертой, имеем, например,

$$\overline{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{1}{2} e^{Dt}, \quad \overline{\langle x(t)y(t) \rangle} = 0, \quad \overline{\langle y^2(t) \rangle} = \frac{\omega_0^2}{2} e^{Dt}.$$

Статистическая задача с учетом линейного трения. Если включить в систему уравнений (4.120) линейное трение, т. е. рассмотреть динамическую систему вида

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2 [1 + z(t)] x(t), \quad (4.138)$$

то соответствующее уравнение Фоккера–Планка примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial}{\partial y} y + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) = D \omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y)$$

и система уравнений для вторых моментов, вместо (4.133), принимает вид

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = 2 \langle x(t)y(t) \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle x(t)y(t) \rangle = \langle y^2(t) \rangle - 2\gamma \langle x(t)y(t) \rangle - \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle y^2(t) \rangle = -4\gamma \langle y^2(t) \rangle - 2\omega_0^2 \langle x(t)y(t) \rangle + D\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle.$$

Будем искать решение этой системы, пропорциональное $e^{\lambda t}$. Тогда соответствующее характеристическое уравнение для λ примет вид

$$\lambda^3 + 6\gamma\lambda^2 + 4(\omega_0^2 + 2\gamma^2)\lambda + 4\omega_0^2(2\gamma - D) = 0.$$

Как известно, необходимые и достаточные условия устойчивости, т. е. отсутствие положительных вещественных частей у корней λ_k этого уравнения — это условие Рауса–Гурвица, которое для данного уравнения эквивалентно неравенству $D < 2\gamma$. Таким образом, при нарушении этого условия, т. е. при

$$2\gamma < D, \quad (4.139)$$

вторые моменты экспоненциально растут во времени, т. е. имеет место статистическое параметрическое возбуждение вторых моментов. Отметим,

что условия статистического параметрического возбуждения системы различны для различных моментов. Так, например, условие возбуждения четвертых моментов «слабее», чем условие (4.139), и имеет вид [75]

$$D > \frac{2\gamma}{3} \frac{\omega_0^2 + 3\gamma^2}{\omega_0^2 + 6\gamma^2}.$$

Для стохастического параметрического осциллятора с трением можно рассмотреть задачу и о стационарном режиме, устанавливающемся под действием случайных сил, статистически не зависящих от флуктуаций частоты, описываемую стохастической системой уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2[1 + z(t)]x(t) + f(t), \quad (4.140)$$

где $f(t)$ — гауссов, статистически независимый от процесса $z(t)$ дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\sigma_f^2 \tau_f \delta(t - t'),$$

где σ_f^2 — дисперсия, а τ_f — временной радиус корреляции процесса $f(t)$.

Для стохастической системы уравнений (4.140) одновременная плотность вероятностей описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial}{\partial y} y + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) = \\ = D\omega_0^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y) + \sigma_f^2 \tau_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(t; x, y), \end{aligned} \quad (4.141)$$

и, следовательно,

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle y(t) \rangle = 0.$$

Уравнения для вторых моментов в этом случае выглядят как система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle &= 2 \langle x(t)y(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x(t)y(t) \rangle &= \langle y^2(t) \rangle - 2\gamma \langle x(t)y(t) \rangle - \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle y^2(t) \rangle &= -4\gamma \langle y^2(t) \rangle - 2\omega_0^2 \langle x(t)y(t) \rangle + D\omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle + 2\sigma_f^2 \tau_f, \end{aligned} \quad (4.142)$$

стационарное решение которой при $t \rightarrow \infty$ существует при выполнении неравенства (4.139) и выглядит следующим образом:

$$\langle x(t)y(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_f}{\omega_0^2(D - 2\gamma)}, \quad \langle y^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_f}{D - 2\gamma}.$$

Пуассоновские дельта-коррелированные флуктуации параметров. Для пуассоновского дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$ функционал $\Theta[t; v(\tau)]$ описывается формулой (3.40)

$$\Theta[t; v(\tau)] = v \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) \left[e^{i\xi v(\tau)} - 1 \right]$$

и уравнение (4.122) принимает вид уравнения Колмогорова–Феллера:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + y \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial}{\partial y} \right) P(t; x, y) = v \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi) P(t; x, y + \xi \omega_0^2 x) - v P(t; x, y). \quad (4.143)$$

Для достаточно малых значений параметра ξ логарифм характеристического функционала переходит в выражение

$$\Theta[t; v(\tau)] = -v \langle \xi^2 \rangle \int_0^t d\tau v^2(\tau)$$

и уравнение (4.143) переходит в уравнение Фоккера–Планка (4.130) с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{2} v \langle \xi^2 \rangle \omega_0^2 x.$$

4.10.3. Уравнения в частных производных.

Статистическая интерпретация решений стохастических уравнений. Решение многих чисто детерминированных задач в ряде случаев можно интерпретировать как результат усреднения функционалов определенного типа по случайным траекториям. Такая интерпретация может быть полезна для различных приложений.

Получим условия возможности такой интерпретации для простейших уравнений.

Рассмотрим задачу с начальным условием, описываемую уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{r}) = -q(t, \mathbf{r})u(t, \mathbf{r}) + Q(t, \nabla)u(t, \mathbf{r}), \quad u(0, \mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}). \quad (4.144)$$

Наряду с уравнением (4.144), рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \mathbf{r}) = -q(t, \mathbf{r})\varphi(t, \mathbf{r}) + \mathbf{z}(t) \nabla \varphi(t, \mathbf{r}), \quad \varphi(0, \mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}), \quad (4.145)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi[t, \mathbf{r}; \mathbf{z}(\tau)] = u_0 \left(\mathbf{r} + \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau) \right) \exp \left\{ - \int_0^t d\tau q \left(\tau, \mathbf{r} + \int_\tau^t d\tau' \mathbf{z}(\tau') \right) \right\}. \quad (4.146)$$

Будем считать функцию $z(t)$ случайной функцией, дельта-коррелированной по времени t , статистические характеристики которой описываются характеристическим функционалом $\Phi[t; v(\tau)]$. Усредняя уравнение (4.145) по ансамблю реализаций $z(t)$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi(t, \mathbf{r}) \rangle = -q(t, \mathbf{r}) \langle \varphi(t, \mathbf{r}) \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t, \frac{\delta}{i\delta \mathbf{z}(t)} \right] \varphi(t, \mathbf{r}) \right\rangle, \quad (4.147)$$

$$\langle \varphi(0, \mathbf{r}) \rangle = u_0(\mathbf{r}).$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{z}(t-0)} \varphi(t, \mathbf{r}) = \nabla \varphi(t, \mathbf{r}),$$

которое является следствием исходного динамического уравнения (4.145), можно переписать уравнение (4.147) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi(t, \mathbf{r}) \rangle = -q(t, \mathbf{r}) \langle \varphi(t, \mathbf{r}) \rangle + \dot{\Theta}_t [t, -i\nabla] \langle \varphi(t, \mathbf{r}) \rangle, \quad (4.148)$$

$$\langle \varphi(0, \mathbf{r}) \rangle = u_0(\mathbf{r}).$$

Сравнивая (4.148) с (4.144), видим, что

$$u(t, \mathbf{r}) = \langle \varphi[t, \mathbf{r}; \mathbf{z}(\tau)] \rangle_{\mathbf{z}} \quad (4.149)$$

только при условии

$$Q(t, \nabla) = \dot{\Theta}_t [t, -i\nabla]. \quad (4.150)$$

В этом случае выражение (4.149) можно трактовать как запись решения уравнения (4.144) в виде континуального интеграла.

Выражение (4.149) можно представить также в операторном виде, вводя оператор функционального сдвига

$$u(t, \mathbf{r}) = \langle \varphi[t, \mathbf{r}; \mathbf{z}(\tau) + \mathbf{v}(\tau)] \rangle_{\mathbf{z}}|_{\mathbf{v}=0} = \Phi \left[t, \frac{\delta}{i\delta \mathbf{v}(\tau)} \right] \varphi[t, \mathbf{r}; \mathbf{v}(\tau)] \Big|_{\mathbf{v}=0}, \quad (4.151)$$

где $\Phi[t; \mathbf{v}(\tau)]$ — характеристический функционал процесса $\mathbf{z}(t)$.

Для гауссового процесса

$$\Theta[t, \mathbf{v}(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) \mathbf{v}^2(\tau) \quad \left(Q(t, \nabla) = \frac{1}{2} B(t) \Delta, \quad B(t) > 0 \right),$$

и, следовательно, получаем хорошо известный результат, что решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{r}) = -q(t, \mathbf{r})u(t, \mathbf{r}) + \frac{1}{2} B(t) \Delta u(t, \mathbf{r}), \quad u(0, \mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \quad (4.152)$$

можно трактовать как результат усреднения функционала $\phi[t, \mathbf{r}; \mathbf{z}(\tau)]$ по гауссовому дельта-коррелированному случайному процессу $\mathbf{z}(t)$, т. е.

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{r}) &= \left\langle u_0 \left(\mathbf{r} + \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau) \right) \exp \left\{ - \int_0^t d\tau q \left(\tau, \mathbf{r} + \int_\tau^t d\tau' \mathbf{z}(\tau') \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{z}} = \\ &= \exp \left(- \frac{1}{2} \int_0^t d\tau B(\tau) \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\tau)} \right) \times \\ &\times \left\{ u_0 \left(\mathbf{r} + \int_0^t d\tau \mathbf{v}(\tau) \right) \exp \left[- \int_0^t d\tau q \left(\tau, \mathbf{r} + \int_\tau^t d\tau' \mathbf{v}(\tau') \right) \right] \right\}_{\mathbf{v}=0}. \end{aligned}$$

Для пуассоновского случайного процесса «дробового шума» $\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \delta(t - t_i)$,

$$\dot{\Theta}_t[t, \mathbf{v}(t)] = \mathbf{v} \left\{ \int d\xi p(\xi) e^{i\xi \mathbf{v}(t)} - 1 \right\},$$

$$Q(t, \nabla) = \mathbf{v} \left\{ \int d\xi p(\xi) e^{\xi \nabla} - 1 \right\},$$

и, следовательно, решение интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{r}) &= -q(t, \mathbf{r})u(t, \mathbf{r}) + \mathbf{v} \int d\xi p(\xi) u(t, \mathbf{r} + \xi) - \mathbf{v} u(t, \mathbf{r}), \\ u(0, \mathbf{r}) &= u_0(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.153)$$

удается представить как результат усреднения функционала $\phi[t, \mathbf{r}; \mathbf{z}(\tau)]$, т. е.

$$u(t, \mathbf{r}) = \left\langle u_0 \left(\mathbf{r} + \int_0^t d\tau \mathbf{z}(\tau) \right) \exp \left\{ - \int_0^t d\tau q \left(\tau, \mathbf{r} + \int_\tau^t d\tau' \mathbf{z}(\tau') \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{z}},$$

лишь в том случае, если функцию $p(\xi)$ в (4.153) можно интерпретировать как плотности вероятностей случайной величины ξ .

В случае $p(\xi) = \delta(\xi - \mathbf{r}_0)$ уравнение (4.153) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{r}) = -q(t, \mathbf{r})u(t, \mathbf{r}) + \mathbf{v} [u(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}_0) - u(t, \mathbf{r})], \quad u(0, \mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}). \quad (4.154)$$

Уравнения (4.153) и (4.154) при этом представляют собой уравнения типа переноса.

Для дельта-коррелированных флуктуаций параметров динамических систем, описываемых уравнениями в частных производных более высокого порядка, чем первый, мы приходим к замкнутым уравнениям, но для характеристических функционалов в функциональных пространствах. Рассмотрим два примера таких уравнений.

Параболическое уравнение квазиоптики. Так, если для линейного параболического уравнения (4.13)

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R})$$

считать, что поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ есть однородное дельта-коррелированное случайное поле, то уравнение (4.21) для характеристического функционала $\Phi[x; v, v^*]$ решения задачи принимает вид уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = & \left\langle \dot{\Theta}_x \left[x; \frac{\delta}{i \delta \varepsilon(x, \mathbf{R}')} \right] \Phi[x; v, v^*] \right\rangle + \\ & + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \end{aligned}$$

которое, с учетом равенства (4.20), можно записать в замкнутой операторной форме [38, 40, 155]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = & \dot{\Theta}_x \left[x, \frac{k}{2} \widehat{M}(\mathbf{R}') \right] \Phi[x; v, v^*] + \\ & + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \quad (4.155) \end{aligned}$$

где оператор

$$\widehat{M}(\mathbf{R}') = v(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')},$$

а функционал

$$\dot{\Theta}_x [x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \varepsilon(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R}') \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Из уравнения (4.155) следуют уравнения для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} M_{m,n}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \langle u(x, \mathbf{R}_1) \dots u(x, \mathbf{R}_m) u^*(x, \mathbf{R}'_1) \dots u^*(x, \mathbf{R}'_n) \rangle, \end{aligned}$$

которые для $m = n$ обычно называются *функциями когерентности* порядка $2n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{m,n} = & \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{m,n} + \\ & + \dot{\Theta}_x \left[x, \frac{1}{k} \left(\sum_{p=1}^m \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}'_q) \right) \right] M_{m,n}, \end{aligned} \quad (4.156)$$

что связано с линейностью исходного динамического уравнения (4.13).

Если теперь считать, что поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — однородное гауссово дельта-коррелированное случайное поле с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = A(\mathbf{R})\delta(x), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}),$$

то функционал

$$\Theta[x; \psi(\xi, \mathbf{R}')] = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int d\mathbf{R}' \int d\mathbf{R} A(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \psi(\xi, \mathbf{R}') \psi(\xi, \mathbf{R})$$

и уравнение (4.155) принимает замкнутую операторную форму [38, 40, 75, 78, 155]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi[x; v, v^*] = & -\frac{k^2}{8} \int d\mathbf{R}' \int d\mathbf{R} A(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \widehat{M}(\mathbf{R}') \widehat{M}(\mathbf{R}) \Phi[x; v, v^*] + \\ & + \frac{i}{2k} \left\{ \int d\mathbf{R}' \left[v(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v(\mathbf{R}')} - v^*(\mathbf{R}') \Delta_{\mathbf{R}'} \frac{\delta}{\delta v^*(\mathbf{R}')} \right] \right\} \Phi[x; v, v^*], \end{aligned} \quad (4.157)$$

а уравнения (4.156) для моментных функций волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{m,n} = \\ = \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{m,n} - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_m) M_{m,n}, \end{aligned} \quad (4.158)$$

где

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_m) = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \end{aligned} \quad (4.159)$$

Замечание 4.1. Другой способ вывода уравнений (4.156), (4.158).

Уравнения (4.156), (4.158) для моментных функций волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ для дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды можно получить и другим, физически более наглядным способом.

Как отмечалось выше, поле $u(x, \mathbf{R})$ функционально зависит лишь от предшествующих значений $\varepsilon(\xi, \mathbf{R}')$ при $\xi \leq x$. Однако в общем случае существует статистическая связь между $u(x, \mathbf{R})$ и последующими значениями $\varepsilon(\xi, \mathbf{R}')$ при $\xi \geq x$. В приближении дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды такая статистическая связь отсутствует и значения полей $u(\xi_i, \mathbf{R})$ при $\xi_i < x$ не только функционально, но и статистически независимы от значений $\varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}')$ при $\eta_j > x$, т.е. при $\xi_i < x; \eta_j > x$ имеет место равенство

$$\left\langle \prod_{i,j} u(\xi_i, \mathbf{R}_i) \varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j) \right\rangle = \left\langle \prod_i u(\xi_i, \mathbf{R}_i) \right\rangle \left\langle \prod_j \varepsilon(\eta_j, \mathbf{R}_j) \right\rangle. \quad (4.160)$$

Используя свойство (4.160), легко получить уравнения для статистических моментов поля $u(x, \mathbf{R})$. Покажем это на примере вывода уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$. Для этого перепишем исходное стохастическое уравнение (4.13) в виде интегрального уравнения

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \right\} + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \Delta_{\mathbf{R}} u(\xi, \mathbf{R}). \quad (4.161)$$

При усреднении уравнения (4.161) по ансамблю реализаций случайного поля $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$, учтем равенство (4.160). В результате получаем замкнутое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}) \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle + \\ + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(\xi, \mathbf{R}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.162)$$

Для перехода от интегрального уравнения к дифференциальному заметим, что для дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды имеет место равенство

$$\left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle = \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^{\xi} d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{\xi}^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle,$$

справедливое для любой точки $0 \leq \xi \leq x$. Поэтому, если мы введем функцию

$$\Phi(x, \mathbf{R}) = \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\eta \varepsilon(\eta, \mathbf{R}) \right\} \right\rangle,$$

то уравнение (4.162) можно переписать в виде

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\Phi(x, \mathbf{R})}{\Phi(\xi, \mathbf{R})} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(\xi, \mathbf{R}) \rangle, \quad (4.163)$$

откуда уже легко можно получить дифференциальное уравнение для $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle + \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi(x, \mathbf{R}), \quad u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}),$$

совпадающее с уравнением (4.156) при $m = 1$, $n = 0$. Аналогичным образом можно получить уравнения и для моментов поля $u(x, \mathbf{R})$ произвольного порядка. ♦

Случайные силы в гидродинамической теории турбулентности. Для гидродинамического уравнения (4.22) в предположении однородности, стационарности и дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по времени, уравнение (4.25) для характеристического функционала

$$\Phi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] = \Phi[t; \mathbf{z}] = \langle \varphi[t; \mathbf{z}(\mathbf{k}')] \rangle = \left\langle \exp \left\{ i \int d\mathbf{k}' \mathbf{z}(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \right\} \right\rangle$$

фурье-образа поля скорости принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] &= \left\langle \dot{\Theta}_t \left[t; \frac{\delta}{i \delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)} \right] \varphi[t; \mathbf{z}] \right\rangle - \\ &- \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i, \alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} + \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}], \end{aligned} \quad (4.164)$$

где

$$\dot{\Theta}_t[t; \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\kappa}, \tau)] = \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\kappa} \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}, \tau) \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\kappa}, \tau) \right\} \right\rangle$$

— производная от логарифма характеристического функционала случайного поля внешних сил $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$. С учетом равенства (4.24)

$$\frac{\delta}{\delta \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t-0)} \varphi[t; \mathbf{z}] = i z(k) \varphi[t; \mathbf{z}],$$

уравнение (4.164) можно переписать в виде замкнутого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = & \dot{\Theta}_t[t; \mathbf{z}(\mathbf{k})] \Phi[t; \mathbf{z}] - \\ & - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} + \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}]. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Если теперь считать случайное поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ гауссовым, однородным, изотропным и стационарным во времени случайным полем с корреляционным тензором

$$B_{ij}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) = \langle f_i(\mathbf{x}_1, t_1) f_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle,$$

то поле $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$ — также гауссово стационарное случайное поле с корреляционным тензором

$$\langle \widehat{f}_i(\mathbf{k}, t + \tau) \widehat{f}_j(\mathbf{k}', t) \rangle = \frac{1}{2} F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'),$$

где $F_{ij}(\mathbf{k}, \tau)$ — пространственный спектр внешних сил, определяемый равенством

$$F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = 2(2\pi)^3 \int d\mathbf{x} B_{ij}(\mathbf{x}, \tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

При этом, в силу пространственной изотропности,

$$F_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = F(k, \tau) \Delta_{ij}(\mathbf{k}).$$

Для дельта-коррелированного во времени случайного поля $\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, t)$

$$F(k, \tau) = F(k) \delta(\tau),$$

функционал

$$\Theta[t; \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\chi}, \tau)] = -\frac{1}{4} \int_0^t d\tau \int d\boldsymbol{\chi} F(\boldsymbol{\chi}) \Delta_{ij}(\boldsymbol{\chi}) \psi_i(\boldsymbol{\chi}, \tau) \psi_j(-\boldsymbol{\chi}, \tau),$$

и в этом случае уравнение (4.165) принимает вид замкнутого уравнения [70]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = & -\frac{1}{4} \int d\mathbf{k} F(k) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) z_i(\mathbf{k}) z_j(-\mathbf{k}) \Phi[t; \mathbf{z}] - \\ & - \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_{i,\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} + \nu k^2 \frac{\delta}{\delta z_i(\mathbf{k})} \right\} \Phi[t; \mathbf{z}]. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Уравнение (4.166) играет роль уравнения Фоккера–Планка для рассматриваемой задачи. От обычного уравнения этого типа оно отличается тем,

что записано для характеристического функционала, а не для сопряженной с этим функционалом по фурье-плотности вероятностей.

Второе отличие состоит в том, что уравнение (4.166) соответствует уравнению диффузии в бесконечномерном пространстве, в связи с чем является уравнением с вариационными производными. Роль коэффициента диффузии, различного для различных волновых компонент поля скорости, играет спектральный тензор внешних сил $F(k)\Delta_{ij}(\mathbf{k})$.

Замечание 4.2. *Равновесные распределения для гидродинамических потоков.*

При отсутствии молекулярной вязкости и случайных внешних сил возникает задача об эволюции заданного в начальный момент времени поля скоростей. В этой задаче характеристический функционал для поля скоростей удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi[t; \mathbf{z}] = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \Phi[t; \mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)}. \quad (4.167)$$

Отметим, что именно такое уравнение рассматривалось в классической работе [146] и впоследствии получило название *уравнения Хопфа* (см. также [147, 148]). При этом исходное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \hat{u}_\alpha(\mathbf{k}_1, t) \hat{u}_\beta(\mathbf{k}_2, t) = 0,$$

описывающее движение идеальной жидкости, может обладать рядом интегралов движения, что приводит при $t \rightarrow \infty$ к возможности существования стационарного решения для уравнения (4.167), так называемого *равновесного распределения*, не зависящего от начальных условий. Эти распределения существенно различны для трехмерного и двумерного поля скоростей.

Рассмотрим уравнение (4.167). В силу многочисленных нелинейных взаимодействий между различными гармониками случайного поля скорости, можно ожидать, что существует стационарное распределение поля скорости при $t \rightarrow \infty$, описываемое стационарным уравнением Хопфа

$$\int d\mathbf{k} z_i(\mathbf{k}) \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \Lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}) \frac{\delta^2 \Phi[\mathbf{z}]}{\delta z_\alpha(\mathbf{k}_1) \delta z_\beta(\mathbf{k}_2)} = 0.$$

В работе [149] было показано, что единственным решением этого уравнения на классе гауссовых функционалов является функционал

$$\Phi[\mathbf{z}(\mathbf{k})] = \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} \int d\mathbf{k} \Delta_{ij}(\mathbf{k}) z_i(\mathbf{k}) z_j(-\mathbf{k}) \right\}, \quad (4.168)$$

соответствующий равномерному распределению энергии по волновым числам (белый шум).

Отметим, что решение (4.168) может удовлетворять и исходному уравнению (4.166), если случайные силы «согласованы» с молекулярной вязкостью. Так, подставляя функционал (4.168) в уравнение (4.166) видим, что член со второй вариационной производной обращается в нуль (что

связано с наличием интеграла движения для идеальной жидкости — энергии), а оставшиеся члены, соответствующие линеаризованной исходной динамической задаче, компенсируются только в том случае, если

$$F_{ij}(\mathbf{k}) = 4\nu\gamma k^2 \Delta_{ij}(\mathbf{k}). \quad (4.169)$$

Это соответствует содержанию так называемой *флуктуационно-диссипативной теоремы* для гидродинамических потоков.

Для движения двумерной идеальной жидкости имеется, помимо интеграла энергии, второй квадратичный по скоростям интеграл — квадрат вихря поля скорости. В этом случае существует равновесное распределение, отличное от белого шума (4.169), имеющее ряд специфических особенностей, главной из которых является возможность существования когерентных структур, для которых спектральная плотность энергии является дельта-функцией [36].

В простейшем случае несжимаемый поток жидкости на двумерной плоскости $\mathbf{R} = (x; y)$ описывается функцией тока $\psi(\mathbf{R}, t)$, удовлетворяющей уравнению (1.92) в отсутствие сил Корриолиса и топографических неоднородностей подстилающей поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi(\mathbf{R}, t) = J \{ \Delta \psi(\mathbf{R}, t); \psi(\mathbf{R}, t) \}, \quad \psi(\mathbf{R}, 0) = \psi_0(\mathbf{R}), \quad (4.170)$$

где через величину

$$J \{ \psi(\mathbf{R}, t); \phi(\mathbf{R}, t) \} = \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \frac{\partial \phi(\mathbf{R}, t)}{\partial y} - \frac{\partial \phi(\mathbf{R}, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi(\mathbf{R}, t)}{\partial y}$$

обозначен Якобиан двух функций.

Нелинейное взаимодействие должно привести гидродинамическую систему (4.170) к статистическому равновесию. Учитывая, что процесс установления такого равновесия состоит из большого числа взаимодействий возмущений различных масштабов друг с другом, можно предположить, что в простейшем случае статистически однородного и изотропного случайного начального поля $\psi_0(\mathbf{R})$ такое равновесное распределение будет гауссовым, и задача состоит в определении его параметров. Случайная функция тока $\psi(\mathbf{R}, t)$ в процессе эволюции остается пространственно однородной и изотропной функцией. Учитывая, что она определена с точностью до аддитивной постоянной, ее статистические характеристики описываются одновременной структурной функцией

$$D_\psi(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t) = \left\langle [\psi(\mathbf{R}, t) - \psi(\mathbf{R}', t)]^2 \right\rangle = 2[B_\psi(0, t) - B_\psi(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t)],$$

где через

$$B_\psi(\mathbf{R} - \mathbf{R}', t) = \langle \psi(\mathbf{R}, t) \psi(\mathbf{R}', t) \rangle$$

обозначена пространственная корреляционная функция поля $\psi(\mathbf{R}, t)$.

Если искать стационарное (равновесное) распределение на классе гауссового распределения статистически однородного и изотропного поля $\psi(\mathbf{R}, t)$, которое описывается стационарной структурной функцией

$D_\psi(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_\psi(\mathbf{R}, t)$, то для нее можно получить уравнение

$$(\Delta_q + \lambda) \Delta_q^2 D_\psi(q) = 0, \quad (4.171)$$

где постоянная разделения λ имеет размерность квадрата обратной длины, а Δ_q — радиальная часть оператора Лапласа.

Имеется два возможных решения уравнения (4.171), соответствующих положительному и отрицательному значениям постоянной $\lambda = k_0^2 > 0$ и $\lambda = -k_0^2 < 0$.

В случае $\lambda = k_0^2 > 0$ уравнение (4.171) сводится к уравнению

$$\Delta_q D_\psi(q) = C J_0(k_0 q),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода. В этом случае функция $D_\psi(q)$ определяется из решения уравнения Лапласа, и в результате получаем для спектральной плотности энергии выражение

$$E(k) = E \delta(k - k_0).$$

Дельтообразная структура спектральной плотности свидетельствует о высокой степени корреляции полей $\psi(\mathbf{R}, t)$ и говорит о возможности существования когерентных структур в развитом турбулентном потоке двумерной жидкости (в смысле медленного затухания с расстоянием соответствующей собственной функции).

Во втором случае ($\lambda = -k_0^2 < 0$) уравнение (4.171) сводится к подобному же уравнению

$$\Delta_q D_\psi(q) = C K_0(k_0 q),$$

но содержащему в правой части функцию Макдональдса $K_0(z)$ с параметрами (размерными) k_0 и C . Соответствующая спектральная плотность энергии теперь будет [173–175, 198]

$$E(k) = \frac{E_0}{k^2 + k_0^2}.$$

Особенностью поведения $E(k)$ является логарифмическая расходимость средней кинетической энергии, что неудивительно ввиду отсутствия вязкой диссипации в рассматриваемой модели.

Если теперь рассмотреть стационарное решение исходного динамического уравнения (4.170), то оно удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi(\mathbf{R}) = F(\psi(\mathbf{R})),$$

где $F(\psi(\mathbf{R}))$ — произвольная функция, определяемая из краевых условий на бесконечности. В простейшем случае *фононовского потока* [128], соответствующем линейной функции $F(\psi(\mathbf{R})) = -\lambda \psi(\mathbf{R})$, это уравнение упрощается и принимает вид

$$\Delta \psi(\mathbf{R}) = -\lambda \psi(\mathbf{R}). \quad (4.172)$$

Если теперь формально рассматривать уравнение (4.172) как стохастическое, то легко видеть, что для структурной функций поля $\psi(\mathbf{R})$ получим уравнение, совпадающее с (4.171). Это означает, что гауссово равновесное состояние статистически эквивалентно стохастическому фооновскому потоку жидкости. При этом, конечно, реализации динамических систем (4.170) и (4.172) не имеют ничего общего. Таким образом, несмотря на сильную нелинейность исходного уравнения (4.170), равновесный режим (при $t \rightarrow \infty$) оказывается статистически эквивалентен линейному уравнению, в котором отсутствуют нелинейные взаимодействия.

Аналогичным образом можно рассмотреть и равновесные состояния для квазигеострофических потоков со случайной топографией подстилающей поверхности, описываемых уравнениями (1.92) и (1.93) [44, 161, 162].

Существенной особенностью всех указанных решений является возможность существования в ряде случаев когерентных состояний в развитом турбулентном потоке. Сказать что-либо об их устойчивости нельзя. Отметим, однако, что указанный гауссов равновесный ансамбль является «естественным шумом» для многих геофизических систем, описываемых в квазигеострофическом приближении, и он аналогичен «тепловым шумам» в статистической физике. Таким образом, учет его может быть очень важным, а порой и необходимым, в статистической теории квазигеострофических потоков жидкости. ♦

Глава 5

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С МАРКОВСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Выше мы рассмотрели общие методы статистического описания динамических систем, основанные на знании характеристического функционала флуктуирующих параметров. Однако в большинстве случаев мы можем и не знать его, и тогда приходится прибегать как к различным моделям флуктуирующих параметров, так и к различным асимптотическим приближениям.

Широко распространен метод, основанный на аппроксимации флуктуирующих параметров марковскими случайными процессами и полями с конечным временным радиусом корреляции. Они могут быть получены, например, как решения динамических уравнений с дельта-коррелированными флуктуациями параметров (см. предыдущую главу). Рассмотрим такие методы описания более подробно на примере марковских случайных процессов [39, 40, 155].

Рассмотрим стохастические уравнения вида

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.1)$$

где $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}(t))$ — детерминированная функция своих аргументов, а $\mathbf{z}(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ — векторный марковский процесс, плотность вероятностей перехода которого описывается уравнением (см. гл. 3)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{z}, t \mid \mathbf{z}_0, t_0) = \hat{L}(\mathbf{z}) p(\mathbf{z}, t \mid \mathbf{z}_0, t_0).$$

Оператор $\hat{L}(\mathbf{z})$ при этом называется *кинетическим оператором*.

Наша задача заключается в нахождении статистических характеристик решения уравнения (5.1), если мы знаем статистические характеристики процесса $\mathbf{z}(t)$, например его кинетический оператор $\hat{L}(\mathbf{z})$.

В общем случае произвольного марковского процесса $\mathbf{z}(t)$ сказать что-либо о самом процессе $\mathbf{x}(t)$ не представляется возможным. Можно лишь утверждать, что совокупность двух процессов $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\}$ является марковской. В самом деле, в гл. 3 показано, что для произвольного марковского процесса $\mathbf{z}(t)$ имеет место формула дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \delta(\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle \delta(\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}) \frac{d}{dt} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle + \hat{L}(\mathbf{z}) \langle \delta(\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle, \quad (5.2) \end{aligned}$$

справедливая для произвольного функционала $R[t; \mathbf{z}(\tau)]$, $\tau \leq t$. Умножая равенство (5.2) на произвольную функцию $F(\mathbf{z})$ и интегрируя по $\mathbf{z}$, получаем другую форму записи формулы дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle F(\mathbf{z}(t)) R[t; \mathbf{z}(\tau)] \rangle = \\ = \left\langle F(\mathbf{z}(t)) \frac{d}{dt} R[t; \mathbf{z}(\tau)] \right\rangle + \left\langle R[t; \mathbf{z}(\tau)] \left[\hat{L}^+(\mathbf{z}) F(\mathbf{z}(t)) \right] \right\rangle, \quad (5.3) \end{aligned}$$

где оператор $\hat{L}^+(\mathbf{z})$ — сопряженный к оператору $\hat{L}(\mathbf{z})$.

Возьмем теперь в качестве функционала $R[t; \mathbf{z}(\tau)]$ индикаторную функцию

$$R[t, \mathbf{x}; \mathbf{z}(\tau)] = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (5.1). Тогда функция $R[t, \mathbf{x}; \mathbf{z}(\tau)]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} R[t, \mathbf{x}; \mathbf{z}(\tau)] = - \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) R[t, \mathbf{x}; \mathbf{z}(\tau)],$$

которое является стохастическим уравнением Лиувилля для данной задачи. Отметим, что в этом случае корреляция

$$\langle \delta(\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}) R[t, \mathbf{x}; \mathbf{z}(\tau)] \rangle = P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$$

оказывается одноточечной совместной плотностью вероятностей для процессов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{z}(t)$. Следовательно, формула дифференцирования (5.2) принимает вид замкнутого уравнения для одноточечной плотности вероятностей:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) + \hat{L}(\mathbf{z}) P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t). \quad (5.4)$$

Очевидно, что и плотность вероятностей перехода для процесса $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\}$ также удовлетворяет уравнению (5.4), т. е. процесс $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t)\}$ является марковским. Если бы нам удалось решить уравнение (5.4), то, интегрируя его решение по $\mathbf{z}$, мы бы получили плотность вероятностей решения уравнения (5.1), т. е. функцию $P(\mathbf{x}, t)$. В этом случае процесс $\mathbf{x}(t)$ уже не будет марковским.

Существует, однако, несколько типов процессов $\mathbf{z}(t)$, для которых удается перейти непосредственно к уравнению для $P(\mathbf{x}, t)$, не решая уравнения (5.4) для $P(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)$. Это, прежде всего, процессы телеграфного типа (телеграфный и обобщенный телеграфный процессы), марковские процессы с конечным числом состояний и гауссовый марковский процесс. В качестве примера мы обсудим более подробно применение этих процессов, как наиболее используемых в различных приложениях.

5.11. Телеграфный случайный процесс

Напомним, что телеграфный случайный процесс $z(t)$ (процесс с двумя состояниями) определяется с помощью равенства

$$z(t) = a(-1)^{n(0,t)},$$

где случайная величина a с вероятностями $1/2$ принимает значения $a = \pm a_0$, а $n(t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, — целочисленный пуассоновский случайный процесс со средним значением $\overline{n(t_1, t_2)} = \nu|t_1 - t_2|$.

Телеграфный процесс $z(t)$ стационарен во времени и его корреляционная функция

$$\langle z(t) z(t') \rangle = a_0^2 e^{-2\nu|t-t'|}$$

имеет временной корреляционный радиус $\tau_0 = 1/(2\nu)$.

В гл. 3 для расщепления корреляции телеграфного процесса $z(t)$ с произвольным функционалом от него $R[t; z(\tau)]$, где $t \leq \tau$, было получено соотношение (3.138)

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t_1)} \tilde{R}[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.5)$$

где функционал $\tilde{R}[t; z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; z(\tau) \theta(t_1 - \tau + 0)] \quad (t_1 < t). \quad (5.6)$$

Формулу (5.5) можно использовать для анализа стохастических уравнений, содержащих процесс $z(t)$ линейным образом. Пусть функционал $R[t; z(\tau)]$ — решение некоей системы дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Тогда функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)]$ будет описываться той же системой уравнений, где вместо процесса $z(t)$ будет стоять величина $z(t) \theta(t_1 - t)$. Следовательно, для времени $t > t_1$ функционал $\tilde{R}[t, t_1; z(\tau)] = R[t; 0]$ и описывается этой же системой уравнений при отсутствии флуктуаций, т.е. при $z(t) = 0$, с начальным условием $\tilde{R}[t_1, t_1; z(\tau)] = R[t_1; z(\tau)]$.

Для стохастических уравнений, содержащих случайный телеграфный процесс $z(t)$ линейным образом, удобно использовать также формулу дифференцирования для корреляции его с произвольным функционалом (3.144) ($\tau \leq t$):

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = -2\nu \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle + \left\langle z(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle. \quad (5.7)$$

Кроме того, также имеет место соотношение

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = e^{-2\nu|t-t'|} \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle, \quad t' \geq t, \quad \tau \leq t. \quad (5.8)$$

Формула (5.7) также определяет правило вынесения операции дифференцирования из под знака усреднения:

$$\left\langle z(t) \frac{d^n}{dt^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle = \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right)^n \langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle. \quad (5.9)$$

Продemonстрируем на конкретных примерах, как эти соотношения можно практически использовать. При этом оба указанных метода приводят, естественно, к одному и тому же результату. Однако метод, основанный на формуле дифференцирования, оказывается практически более удобным.

5.11.1. Система линейных операторных уравнений. В качестве первого примера рассмотрим систему линейных операторных уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t) \mathbf{x}(t) + z(t) \hat{B}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.10)$$

где $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — некие детерминированные операторы, которые могут быть и операторами дифференцирования по вспомогательным переменным. Если операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — просто матрицы, то (5.10) описывают случай линейных динамических систем.

Усредним уравнение (5.10) по ансамблю случайных функций $z(t)$. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \hat{B}(t) \boldsymbol{\psi}(t), \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \quad (5.11)$$

где введены новые функции

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle.$$

Для этих функций можно использовать формулу (5.7); в результате получаем равенство

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}(t) = -2\nu \boldsymbol{\psi}(t) + \left\langle z(t) \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (5.12)$$

Подставляя теперь $d\mathbf{x}/dt$ из (5.10) в (5.12) получаем уравнение для вектор-функции $\boldsymbol{\psi}(t)$:

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \boldsymbol{\psi}(t) = \hat{A}(t) \boldsymbol{\psi}(t) + \hat{B}(t) \langle z^2(t) \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (5.13)$$

Далее учтем, что для телеграфного процесса $z^2(t) \equiv a_0^2$, и, следовательно, окончательно приходим к замкнутой системе линейных уравнений для векторов $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{A}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle + \hat{B}(t) \boldsymbol{\psi}(t), \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0, \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \boldsymbol{\psi}(t) = \hat{A}_{ij}(t) \boldsymbol{\psi}(t) + a_0^2 \hat{B}_{ij}(t) \langle \mathbf{x}(t) \rangle, \quad \boldsymbol{\psi}(0) = (0).$$

Если операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — матрицы A и B , не зависящие от времени, то система (5.14) может быть решена с помощью преобразования Лапласа. Преобразованная по Лапласу система (5.14) является алгебраической системой уравнений

$$(pE - A)\langle \mathbf{x}(p) \rangle - B\Psi(p) = \mathbf{x}_0, \quad (5.15)$$

$$[(p + 2\nu)E - A]\Psi(p) - a_0^2 B \langle \mathbf{x}(p) \rangle = 0,$$

где E — единичная матрица. Отсюда получаем решение $\langle \mathbf{x}(p) \rangle$ в виде

$$\langle \mathbf{x}(p) \rangle = \left[(pE - A) - a_0^2 B \frac{1}{(p + 2\nu)E - A} B \right]^{-1} \mathbf{x}_0. \quad (5.16)$$

Стохастический параметрический резонанс. В качестве простейшей линейной динамической системы (5.10) рассмотрим задачу о статистическом описании осциллятора с флуктуирующей частотой, описываемую уравнением второго порядка (1.15) с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega_0^2 [1 + z(t)] x(t) &= 0, \\ x(0) &= x_0, \quad \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0} = y_0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

которой эквивалентна система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -\omega_0^2 [1 + z(t)] x(t), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

При анализе среднего значения решения стохастической задачи (5.17) нам, вообще говоря, нет необходимости записывать ее в виде системы уравнений (5.18). Усредним уравнение (5.17) по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. Получаем незамкнутое уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \langle x(t) \rangle + \omega_0^2 \langle z(t) x(t) \rangle = 0. \quad (5.19)$$

Для расщепления корреляции в правой части (5.19), умножим уравнение (5.17) на функцию $z(t)$ и усредним. В результате получаем уравнение

$$\left\langle z(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) x(t) \right\rangle + \omega_0^2 a_0^2 \langle x(t) \rangle = 0. \quad (5.20)$$

При выводе (5.20) мы учли, что для телеграфного процесса величина $z^2(t) \equiv a_0^2$ не является случайной.

Далее воспользуемся правилом выноса производной из под знака среднего (5.9). В результате уравнение (5.20) можно переписать в виде

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right)^2 + \omega_0^2 \right] \langle z(t)x(t) \rangle + \omega_0^2 a_0^2 \langle x(t) \rangle = 0. \quad (5.21)$$

Уравнения (5.19) и (5.21) уже образуют замкнутую систему уравнений.

Из уравнения (5.21) получаем, что

$$\langle z(t)x(t) \rangle = \omega_0 a_0^2 \int_0^t dt' e^{-2\nu(t-t')} \sin \omega_0(t-t') \langle x(t') \rangle,$$

и, следовательно, уравнение (5.19) можно переписать в виде интегро-дифференциального уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \langle x(t) \rangle + \omega_0^3 a_0^2 \int_0^t dt' e^{-2\nu(t-t')} \sin \omega_0(t-t') \langle x(t') \rangle = 0. \quad (5.22)$$

Систему уравнений (5.19), (5.21), или уравнение (5.22), можно решить с помощью преобразования Лапласа и получить выражение

$$\langle x \rangle_p = F(p) \frac{L(p+2\nu)}{L(p)L(p+2\nu) - \omega_0^4 a_0^2} = F(p) \frac{1}{p^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^4 a_0^2}{(p+2\nu)^2 + \omega_0^2}}, \quad (5.23)$$

где

$$F(p) = px_0 + y_0, \quad L(p) = p^2 + \omega_0^2.$$

При условиях

$$\omega_0 \ll 2\nu, \quad \frac{\omega_0^2 a_0^2}{4\nu^2} \ll 1,$$

выражение (5.23) переходит в выражение, соответствующее равенству (4.132), т. е. гауссовому дельта-коррелированному во времени случайному процессу $z(t)$.

Рассмотрим теперь задачу определения вторых моментов решения уравнения (5.17). Теперь нам уже необходимо перейти к системе уравнений (5.18) и, действуя аналогично выводу системы уравнений (5.19), (5.21), для вторых моментов получаем систему шести уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle &= 2 \langle x(t)y(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle x(t)y(t) \rangle &= \langle y^2(t) \rangle - \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle - \omega_0^2 \langle z(t)x^2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle y^2(t) \rangle &= -2\omega_0^2 \langle x(t)y(t) \rangle - 2\omega_0^2 \langle z(t)x(t)y(t) \rangle; \\ \left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t)x^2(t) \rangle &= 2 \langle z(t)x(t)y(t) \rangle, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \langle z(t) x(t) y(t) \rangle = \langle z(t) y^2(t) \rangle - \omega_0^2 \langle z(t) x^2(t) \rangle - \omega_0^2 a_0^2 \langle x^2(t) \rangle,$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \langle z(t) y^2(t) \rangle = -2\omega_0^2 \langle z(t) x(t) y(t) \rangle - 2\omega_0^2 a_0^2 \langle x(t) y(t) \rangle. \quad (5.24)$$

Из системы уравнений (5.24) можно получить замкнутые системы уравнений для каждой из неизвестных функций $\langle x^2(t) \rangle$, $\langle x(t) y(t) \rangle$, $\langle y^2(t) \rangle$. Так, например, для функции $\langle U(t) \rangle$, где $U(t) = x^2(t)$, описывающей среднее значение потенциальной энергии, получаем замкнутую систему двух уравнений (каждое из которых — уравнение третьего порядка):

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \left(\frac{d}{dt} + \nu\right) \langle z(t) U(t) \rangle = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \left\{ \left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right)^2 + 4\omega_0^2 \right\} \langle z(t) U(t) \rangle + 4\omega_0^2 a_0^2 \left(\frac{d}{dt} + \nu\right) \langle U(t) \rangle = 0. \quad (5.25)$$

Для вывода уравнений (5.25), разумеется, можно и не прибегать к выводу полной системы уравнений (5.24). В самом деле, сама случайная величина описывается стохастическим уравнением третьего порядка (4.135)

$$\frac{d^3}{dt^3} U(t) + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} U(t) + 2\omega_0^2 \left(z(t) \frac{d}{dt} U(t) + \frac{d}{dt} z(t) U(t) \right) = 0 \quad (5.26)$$

с начальными условиями, вообще говоря, зависящими от процесса $z(t)$ и его производных. Усредняя (5.26) по ансамблю реализаций случайного процесса и используя правило (5.9) для выноса производной из под знака среднего, мы и получаем первое уравнение в (5.25). Умножая далее (5.26) на $z(t)$ и снова используя правило (5.9), мы получаем и второе уравнение в (5.25).

Системы уравнений (5.24) и (5.25) можно решить с помощью преобразования Лапласа. Так, например, для начальных условий $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$ имеем

$$U(0) = x_0^2, \quad \frac{d}{dt} U(t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} U(t) \Big|_{t=0} = 2y_0^2, \quad (5.27)$$

и, следовательно, получаем решение уравнений (5.25) в виде

$$\langle U \rangle_p = 2y_0^2 \frac{L(p + 2\nu)}{L(p)L(p + 2\nu) - a_0^2 M^2(p)}, \quad (5.28)$$

$$L(p) = p(p^2 + 4\omega_0^2), \quad M(p) = 4\omega_0^2(p^2 + \nu).$$

В предельном случае больших значений ν и a_0^2 , но конечности отношения $a_0^2/2\nu = \sigma^2 \tau_0$ получаем, например, из второго уравнения в (5.25):

$$\langle z(t) U(t) \rangle = -\frac{\omega_0^2 \sigma^2 \tau_0}{\nu} \langle U(t) \rangle,$$

и, следовательно, величина $\langle U(t) \rangle$ в этом пределе описывается замкнутым уравнением третьего порядка

$$\frac{d^3}{dt^3} \langle U(t) \rangle + 4\omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle U(t) \rangle - 4\omega_0^4 \sigma^2 \tau_0 \langle U(t) \rangle = 0,$$

которое совпадает с уравнением (4.134) и соответствует гауссовому дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

Аналогично выводу системы уравнений (5.24) можно получить и систему уравнений для корреляционных функций $\langle x(t)x(t') \rangle$, $\langle y(t)x(t') \rangle$ при $t > t'$, которая, очевидно, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \langle x(t)x(t') \rangle = \langle y(t)x(t') \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle y(t)x(t') \rangle = -\omega_0^2 \langle x(t)x(t') \rangle - \omega_0^2 \langle z(t)x(t)x(t') \rangle,$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t)x(t)x(t') \rangle = \langle z(t)y(t)x(t') \rangle,$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu \right) \langle z(t)y(t)x(t') \rangle = -\omega_0^2 \langle z(t)x(t)x(t') \rangle - \omega_0^2 a_0^2 \langle x(t)x(t') \rangle.$$

Начальным условием для этой системы является решение системы (5.24) при $t = t'$. Аналогичным образом можно написать и вторую пару уравнений для корреляционных функций $\langle x(t)y(t') \rangle$, $\langle y(t)y(t') \rangle$ при $t > t'$. При предельном переходе $\nu \rightarrow \infty$, $a_0^2 \rightarrow \infty$, но конечности величины $a_0^2/2\nu = \sigma^2 \tau_0$ мы возвращаемся к системам уравнений (4.125), (4.127), соответствующим гауссовому дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

5.11.2. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим теперь нелинейное одномерное уравнение

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x, t) + z(t)g(x, t), \quad x(0) = x_0. \quad (5.29)$$

В этом случае индикаторная функция $\varphi(x, t) = \delta(x(t) - x)$ удовлетворяет стохастическому уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \varphi(x, t) - z(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \varphi(x, t). \quad (5.30)$$

Усреднение уравнения (5.30) по ансамблю реализаций функций $z(t)$ дает уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (5.29) $P(x, t) = \delta \langle \varphi(x, t) \rangle$ вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \Psi(x, t), \quad (5.31)$$

где мы ввели новую функцию

$$\Psi(x, t) = \langle z(t) \varphi(x, t) \rangle.$$

Решение уравнения (5.30) является функционалом процесса $z(t)$, и, следовательно, применяя формулу (5.7) к выражению $\Psi(x, t)$, получаем

равенство

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \Psi(x, t) = \left\langle z(t) \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) \right\rangle. \quad (5.32)$$

Подстановка правой части уравнения (5.30) в (5.32) приводит к уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \Psi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \Psi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \langle z^2(t) \Phi(x, t) \rangle, \quad (5.33)$$

и, следовательно, мы приходим к замкнутой системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \Psi(x, t), \quad (5.34)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \Psi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \Psi(x, t) - a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) P(x, t).$$

Если функции $f(x, t)$ и $g(x, t)$ не зависят от времени, то стационарное распределение вероятностей, если оно существует, удовлетворяет уравнениям

$$f(x) P(x) = -\frac{d}{dx} g(x) \Psi(x), \quad (5.35)$$

$$\left(2\nu + \frac{d}{dx} f(x)\right) \Psi(x) = -a_0^2 \frac{d}{dx} g(x) P(x).$$

Исключая функцию $\Psi(x)$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка [39, 40, 155]:

$$\left(2\nu + \frac{d}{dx} f(x)\right) \frac{f(x)}{g(x)} P(x) = a_0^2 \frac{d}{dx} g(x) P(x),$$

решение которого можно записать в виде квадратуры ($|f(x)| < a_0 |g(x)|$)

$$P(x) = \frac{C |g(x)|}{a_0^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp \left\{ \frac{2\nu}{a_0^2} \int dx \frac{f(x)}{a_0^2 g^2(x) - f^2(x)} \right\}, \quad (5.36)$$

где положительная постоянная C определяется из условия нормировки.

Отметим, что при предельном переходе $\nu \rightarrow \infty$ и $a_0^2 \rightarrow \infty$, так что $a_0^2 \tau_0 = \text{const}$ ($\tau_0 = 1/(2\nu)$), распределение вероятностей (5.36) переходит в выражение

$$P(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ \frac{2\nu}{a_0^2} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right\},$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу $z(t)$, т. е. гауссовому процессу с корреляционной функцией $\langle z(t) z(t') \rangle = 2a_0^2 \tau_0 \delta(t - t')$.

Чтобы увидеть, как может влиять конечность радиуса корреляции процесса $z(t)$ на динамику системы, рассмотрим простой пример, соответствующий $g(x) = 1$, $f(x) = -x$ и $a_0 = 1$. В этом случае получаем из (5.36) распределение вероятностей

$$P(x) = \frac{1}{B(\nu, 1/2)} (1 - x^2)^{\nu-1} \quad (|x| < 1), \quad (5.37)$$

где $B(v, 1/2)$ — бета-функция. Это распределение вероятностей существенно различается в случаях $v > 1$, $v = 1$ и $v < 1$, что схематически изображено

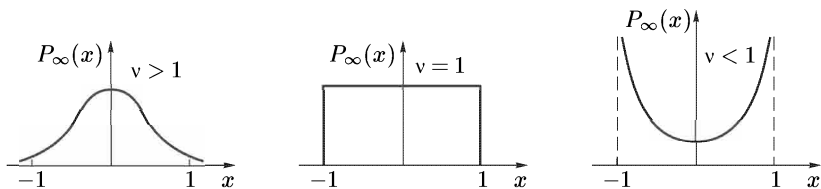


Рис. 2.5. Стационарное распределение вероятностей (5.37) для решения уравне-

ния $\frac{dx(t)}{dt} = -x + z(t)$ в зависимости от параметра v

на рис. 2.5. Из вида распределения следует, что в случае $v > 1$ система проводит основное время вблизи состояния $x = 0$, а в случае $v < 1$ система находится в окрестностях точек $x = \pm 1$. В случае же $v = 1$ получаем равномерное распределение вероятностей на отрезке $[-1, 1]$.

5.11.3. Частица в одномерном потенциальном поле. В качестве другого примера нелинейной системы рассмотрим задачу о влиянии конечности временного радиуса корреляции случайных сил на одномерное движение частицы в поле $U(x)$. Движение частицы будем описывать стохастической системой уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -\frac{dU(x)}{dx} - \lambda y(t) + \mu z(t), \quad (5.38)$$

где функцию $z(t)$ будем считать телеграфным процессом ($z^2(t) = 1$). Производя выкладки, аналогичные выводу уравнения (5.34), получаем операторное уравнение для совместной стационарной плотности вероятностей координаты частицы x и ее скорости y :

$$\hat{L}(x, y)P(x, y) = \mu^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2v + \hat{L}(x, y)} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y), \quad (5.39)$$

где оператор $\hat{L}(x, y)$ (оператор Лиувилля) равен

$$\hat{L}(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial y} - \lambda \frac{\partial}{\partial y} y.$$

При $v \rightarrow \infty$ уравнение (5.39) переходит в стационарное уравнение Фокера–Планка

$$\hat{L}(x, y)P(x, y) = \frac{\mu^2}{2v} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y),$$

решение которого соответствует распределению Гиббса (см. следующую главу):

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\beta \left(\frac{y^2}{2} + U(x) \right) \right\} \quad \left(\beta = \frac{2v\lambda}{\mu^2} \right). \quad (5.40)$$

В общем же случае уравнение (5.39) описывает искажение распределения (5.40) за счет конечности времени корреляции $\tau_0 = 1/(2\nu)$ процесса $z(t)$. Уравнение (5.39) можно переписать в виде уравнения в частных производных:

$$\left\{ (2\nu + \hat{L})^2 \hat{L} - \lambda (2\nu + \hat{L}) \hat{L} \right\} P(x, y) + \left\{ -\mu^2 (2\nu + \hat{L}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \hat{L} \right\} P(x, y) = 0. \quad (5.41)$$

При выводе (5.41) используется формула дифференцирования обратного оператора $\hat{L}^{-1}(\alpha)$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \hat{L}^{-1}(\alpha) = -\hat{L}^{-1}(\alpha) \frac{\partial \hat{L}(\alpha)}{\partial \alpha} \hat{L}^{-1}(\alpha).$$

Уравнение (5.41) имеет достаточно сложный вид, и, по-видимому, решить его для произвольного поля $U(x)$ затруднительно. Легко видеть, однако, что решение уравнения (5.41) уже не будет являться функцией одной только энергии частицы, как это имеет место в (5.40), и что координата и скорость частицы будут уже статистически зависимыми величинами.

5.11.4. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка.

Пусть теперь в уравнении (5.10) операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ — матрицы, т. е.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t) + z(t) B(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Если интересоваться средним значением только одной компоненты, то для нее можно получить операторное уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} z(t) \frac{d^j}{dt^j} x(t) = f(t), \quad (5.42)$$

где оператор

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i},$$

n — порядок матриц A и B в (5.10).

Начальные условия для величин $\mathbf{x}$ включены с помощью соответствующих производных дельта-функции в функцию $f(t)$. Отметим, что при этом функция $f(t)$ может зависеть и от значений производных случайного процесса $z(t)$ при $t=0$, т. е. $f(t)$ — тоже случайная функция, статистически связанная с процессом $z(t)$.

Усредняя уравнение (5.42) по ансамблю реализаций процесса $z(t)$ с использованием формулы (5.9), получаем уравнение

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \langle x(t) \rangle + M \left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} + 2\nu \right] \langle z(t) x(t) \rangle = \langle f(t) \rangle, \quad (5.43)$$

где введено обозначение

$$M[p, q] = \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) p^i q^j.$$

Уравнение (5.43), однако, не замкнуто из-за наличия в нем функции $\langle z(t)x(t) \rangle$. Далее умножим уравнение (5.42) на $z(t)$ и опять усредним. В результате для функции $\langle z(t)x(t) \rangle$ получаем уравнение

$$\hat{L}\left(\frac{d}{dt} + 2\nu\right) \langle z(t)x(t) \rangle + a_0^2 M\left[\frac{d}{dt} + 2\nu, \frac{d}{dt}\right] \langle x(t) \rangle = \langle z(t)f(t) \rangle. \quad (5.44)$$

Система уравнений (5.43), (5.44) — уже замкнутая система уравнений и, для не зависящих от времени функций $a_i(t)$, $b_{ij}(t)$, может быть решена с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем

$$\langle x \rangle_p = \frac{\hat{L}(p + 2\nu) \langle f \rangle_p - M[p, p + 2\nu] \langle zf \rangle_p}{\hat{L}(p) \hat{L}(p + 2\nu) - a_0^2 M[p + 2\nu, p] M[p, p + 2\nu]}. \quad (5.45)$$

Отметим, что рассмотренное ранее уравнение (5.26) является частным случаем уравнения (5.42), и, следовательно, выражение (5.28) является частным случаем (5.45).

5.11.5. Статистическая интерпретация телеграфного уравнения.

В предыдущей главе было показано, что решения некоторого класса уравнений в частных производных могут быть интерпретированы как результат усреднения определенного функционала по случайному, дельта-коррелированному во времени процессу. Аналогичная ситуация имеет место и для телеграфного случайного процесса.

Рассмотрим начальную задачу для волнового уравнения с линейным трением:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\nu \frac{\partial}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) F(x, t) &= 0, \\ F(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \Big|_{t=0} = \psi(x). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Уравнение (5.46) можно переписать в виде интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = \psi(x) e^{-2\nu t} + v^2 \int_0^t dt_1 e^{-2\nu(t-t_1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t). \quad (5.47)$$

Если теперь ввести вспомогательное стохастическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \psi(x) e^{-2\nu t} + v z(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x, t), \quad f(x, 0) = \varphi(x), \quad (5.48)$$

где $z(t)$ — телеграфный случайный процесс ($z^2 = 1$), то из предыдущего изложения очевидно, что

$$F(x, t) = \langle f(x, t) \rangle_z.$$

Решение уравнения (5.48) имеет вид

$$f(x, t) = \varphi \left(x + v \int_0^t d\tau z(\tau) \right) + \int_0^t dt_1 e^{-2vt_1} \psi \left(x + v \int_{t_1}^t d\tau z(\tau) \right),$$

и, следовательно, решение задачи (5.46) можно представить в виде статистического среднего по случайному процессу $z(t)$:

$$F(x, t) = \left\langle \varphi \left(x + v \int_0^t d\tau z(\tau) \right) \right\rangle_z + \int_0^t dt_1 e^{-2vt_1} \left\langle \psi \left(x + v \int_{t_1}^t d\tau z(\tau) \right) \right\rangle_z.$$

5.12. Обобщенный телеграфный случайный процесс

Обобщенный телеграфный процесс определяется по формуле

$$z(t) = a_{n(0,t)}, \quad (5.49)$$

где $n(t_1, t_2)$, $t_1 < t_2$, так же, как и у телеграфного процесса, — целочисленный пуассоновский случайный процесс, статистически независимый от случайных величин a_i , которые также статистически независимы с плотностью вероятностей $p(a)$.

Обобщенный телеграфный процесс $z(t)$ стационарен во времени и его корреляционная функция

$$\langle z(t) z(t') \rangle = \langle a^2 \rangle e^{-v|t-t'|}$$

имеет временной корреляционный радиус $\tau_0 = 1/v$.

При анализе стохастических уравнений с флуктуациями параметров в виде обобщенного телеграфного процесса можно пользоваться, как и для телеграфного процесса, двумя альтернативными методами.

Первый метод связан непосредственно с формулой (3.147) для расщепления корреляции процесса $z(t)$ с произвольными функционалами $R[t; z(\tau)]$ от него:

$$\langle z(t) R[t; z(\tau)] \rangle = \langle \tilde{a} R[t; \tilde{a}] \rangle e^{-vt} + a_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \left\langle \tilde{a} \tilde{R}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.50)$$

где функционал $\tilde{R}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)]$ определяется формулой

$$\tilde{R}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)] = R[t; \tilde{a}\theta(\tau - t_1 + 0) + z(\tau)\theta(t_1 - \tau + 0)], \quad (5.51)$$

а случайная величина $\tilde{a}$ статистически независима от процесса $z(t)$.

Второй метод является более формальным, в отличие от телеграфного процесса, и связан с формулой дифференцирования (3.154), (3.156)

$$\left(\frac{d}{dt} + v\right) \langle F(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle F(z(t)) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle \quad (\tau \leq t) \quad (5.52)$$

при условии, что $\langle F(z(t)) \rangle = \langle F(a) \rangle_a = 0$. В частности, имеем формулу

$$\left(\frac{d}{dt} + v\right)^n \langle F(z(t)) R[t; z(\tau)] \rangle = \left\langle F(z(t)) \frac{d^n}{dt^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \quad (5.53)$$

определяющую правило вынесения производной из под знака усреднения.

Для дальнейшего изложения удобно также выбирать в качестве функции $F(z(t))$ функцию

$$F(t) = F(z(t)) = \frac{1}{1 + \lambda z(t)} - C_0(\lambda), \quad (5.54)$$

где

$$C_k(\lambda) = \left\langle \frac{a^k}{1 + \lambda a} \right\rangle_a, \quad (5.55)$$

а λ — произвольный параметр. Для такой функции $F(t)$ выполняется тождество

$$z(t)F(t) = -\frac{1}{\lambda}F(t) + C_1(t) - z(t)C_0(\lambda). \quad (5.56)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров применения приведенных формализмов.

5.12.1. Стохастическое линейное уравнение. Прежде всего рассмотрим, как и в предыдущем разделе, стохастическое линейное уравнение (5.10), в котором будем считать операторы $\hat{A}(t)$ и $\hat{B}(t)$ постоянными матрицами A и B . Для средней величины $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ в этом случае получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = A \langle \mathbf{x}(t) \rangle + B \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle, \quad (5.57)$$

которое, согласно (5.50), можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle = A \langle \mathbf{x}(t) \rangle + B \langle \tilde{a} \mathbf{x}[t; \tilde{a}] \rangle e^{-vt} + v B \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \langle \tilde{a} \mathbf{x}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)] \rangle. \quad (5.58)$$

Функционал $\mathbf{x}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)]$, согласно (5.51), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A \mathbf{x}(t) + \tilde{a} B \mathbf{x}(t) \quad (t > t_1) \quad (5.59)$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}[t_1, t_1; \tilde{a}, z(\tau)] = \mathbf{x}[t_1; z(\tau)]. \quad (5.60)$$

Следовательно, функционал $\mathbf{x}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)]$ имеет вид

$$\mathbf{x}[t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)] = e^{(A+\tilde{a}B)(t-t_1)} \mathbf{x}(t_1),$$

и уравнение (5.58) становится интегро-дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= A \langle \mathbf{x}(t) \rangle + e^{-\nu t} B \left\langle \tilde{a} e^{(A+\tilde{a}B)t} \right\rangle \mathbf{x}_0 + \\ &+ \nu B \int_0^t dt_1 e^{-\nu(t-t_1)} \left\langle \tilde{a} e^{(A+\tilde{a}B)(t-t_1)} \right\rangle \langle \mathbf{x}(t_1) \rangle \quad (5.61) \end{aligned}$$

с начальным условием $\langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0$.

Уравнение (5.61) может быть легко решено с помощью преобразования Лапласа. В результате получаем

$$\langle \mathbf{x} \rangle_p = (E - \nu C)^{-1} C \mathbf{x}_0, \quad (5.62)$$

где

$$C = \left\langle \{ (p + \nu) E - A - \tilde{a} B \}^{-1} \right\rangle_a,$$

а E — единичная матрица.

Используем теперь альтернативный метод для расщепления корреляции в уравнении (5.57).

Согласно формуле дифференцирования (5.52),

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu \right) \langle F(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \left\langle F(t) \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right\rangle = A \langle F(t) \mathbf{x}(t) \rangle + B \langle z(t) F(t) \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (5.63)$$

Используя теперь равенство (5.56), можно переписать (5.63) в виде тождества:

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \nu \right) E - A + \frac{1}{\lambda} B \right] F(t) \mathbf{x}(t) = B C_1(\lambda) \langle \mathbf{x}(t) \rangle - B C_0(\lambda) \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (5.64)$$

Выполняя преобразование Лапласа в (5.57) и (5.64), получаем незамкнутую систему уравнений

$$(pE - A) \langle \mathbf{x} \rangle_p - B \langle z \mathbf{x} \rangle_p = \mathbf{x}_0, \quad (5.65)$$

$$\left[(p + \nu) E - A + \frac{1}{\lambda} B \right] \langle F(t) \mathbf{x}(t) \rangle_p = B C_1(\lambda) \langle \mathbf{x} \rangle_p - B C_0(\lambda) \langle z \mathbf{x} \rangle_p,$$

справедливую для любого λ . Полагая теперь $\frac{1}{\lambda} = [A - (p + \nu) E] B^{-1}$, обращаем в нуль левую часть второго уравнения, что дает алгебраическую связь между величинами $\langle \mathbf{x} \rangle_p$ и $\langle z \mathbf{x} \rangle_p$, которая совместно с первым уравнением

(5.65) и позволяет получить решение, совпадающее, естественно, с формулой (5.62).

Стохастический параметрический резонанс. В качестве конкретного примера рассмотрим статистическое описание решения задачи (5.17). Усредним уравнение (5.17) по ансамблю реализаций обобщенного телеграфного процесса $z(t)$. Получаем незамкнутое уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \langle x(t) \rangle + \omega_0^2 \langle z(t) x(t) \rangle = 0 \quad (5.66)$$

с начальными условиями

$$\langle x(0) \rangle = x_0, \quad \left\langle \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle_{t=0} = y_0.$$

Для расщепления корреляции в (5.66) умножим уравнение (5.17) на функцию $F(z(t))$ и усредним. Используя далее формулу (5.52), определяющую правило выноса производной из под знака усреднения, получаем уравнение

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \nu \right)^2 + \omega_0^2 \right] \langle F(z(t)) x(t) \rangle + \omega_0^2 \langle z(t) F(z(t)) x(t) \rangle = 0 \quad (5.67)$$

с нулевыми начальными условиями

$$\langle F(z(t)) x(0) \rangle = 0, \quad \left\langle F(z(t)) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle_{t=0} = 0.$$

Для дальнейшего удобно также выбирать в качестве функции $F(z(t))$ функцию (5.54), и уравнение (5.67) можно переписать в виде

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \nu \right)^2 + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \langle F(z(t)) x(t) \rangle + \omega_0^2 C_1(\lambda) \langle x(t) \rangle - \omega_0^2 C_0(\lambda) \langle z(t) x(t) \rangle = 0. \quad (5.68)$$

Выполним теперь преобразование Лапласа в уравнениях (5.66) и (5.68)

$$(p^2 + \omega_0^2) \langle x \rangle_p + \omega_0^2 \langle z x \rangle_p = y_0 + p x_0, \quad (5.69)$$

$$\left[(p + \nu)^2 + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] \langle F x \rangle_p + \omega_0^2 C_1(\lambda) \langle x \rangle_p - \omega_0^2 C_0(\lambda) \langle z x \rangle_p = 0.$$

В уравнениях (5.68), (5.69) параметр λ произволен. Выберем теперь его в виде

$$\lambda = \lambda_p = \frac{\omega_0^2}{L(p + \nu)}, \quad L(p) = p^2 + \omega_0^2. \quad (5.70)$$

Тогда первый член во втором уравнении (5.69) обращается в нуль, и в результате получаем связь корреляции $\langle z x \rangle_p$ со средним решением уравнения

(4.119) $\langle x \rangle_p$ вида

$$\langle zx \rangle_p = \frac{C_1(p)}{C_0(p)} \langle x \rangle_p, \quad (5.71)$$

где

$$C_k(p) = \left\langle \frac{a^k}{L(p+v) + a\omega_0^2} \right\rangle_a.$$

Подставляя (5.71) в первое уравнение из (5.69), получаем решение задачи в виде

$$\langle x \rangle_p = \frac{y_0 + px_0}{L(p) + \omega_0^2 \frac{C_1(p)}{C_0(p)}}. \quad (5.72)$$

Среднее значение решения задачи (5.17), как отмечалось выше, можно получить и другим, альтернативным, более наглядным, методом. С использованием формулы (5.50) уравнение (5.66) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \langle x(t) \rangle = & -\omega_0^2 \langle a\tilde{x}[t; a] \rangle_a e^{-vt} - \\ & - v\omega_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \langle a\tilde{x}[t, t_1; a, z(\tau)] \rangle_a, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где функционал $\tilde{x}[t, t_1; a, z(\tau)]$ описывается уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \tilde{x}(t) + \omega_0^2 a \tilde{x}(t) = 0$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}[t, t_1; a, z(\tau)]_{t=t_1} = x(t_1), \quad \frac{d}{dt} \tilde{x}[t, t_1; a, z(\tau)] \Big|_{t=t_1} = \frac{d}{dt_1} x(t_1),$$

а $\tilde{x}[t; a] = \tilde{x}[t, 0; a, z(\tau)]$.

Решение этого уравнения выглядит так:

$$\tilde{x}[t, t_1; a, z(\tau)] = x(t_1) \cos \left[\omega_0 \sqrt{1+a}(t-t_1) \right] + \frac{dx(t_1)}{dt_1} \frac{\sin \left[\omega_0 \sqrt{1+a}(t-t_1) \right]}{\omega_0 \sqrt{1+a}},$$

и, следовательно, уравнение (5.28) можно переписать в замкнутом виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \langle x(t) \rangle = & -x_0 \omega_0^2 e^{-vt} \left\langle a \cos \left(\omega_0 \sqrt{1+at} \right) \right\rangle_a - \\ & - y_0 \omega_0^2 e^{-vt} \left\langle a \frac{\sin \left(\omega_0 \sqrt{1+at} \right)}{\omega_0 \sqrt{1+a}} \right\rangle_a - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v\omega_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \langle x(t_1) \rangle \left\langle a \cos \left[\omega_0 \sqrt{1+a}(t-t_1) \right] \right\rangle_a - \\
& -v\omega_0^2 \int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)} \frac{d\langle x(t_1) \rangle}{dt_1} \left\langle a \frac{\sin \left[\omega_0 \sqrt{1+a}(t-t_1) \right]}{\omega_0 \sqrt{1+a}} \right\rangle_a. \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Уравнение (5.74) может быть легко решено с помощью преобразования Лапласа, в результате чего мы придем к формуле (5.72).

5.12.2. Одномерное нелинейное дифференциальное уравнение.

Рассмотрим теперь одномерное уравнение (5.29),

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + z(t)g(x), \quad x(0) = x_0,$$

в случае обобщенного телеграфного процесса $z(t)$ с независимыми от времени функциями $f(x)$ и $g(x)$. В этом случае индикаторная функция описывается уравнением Лиувилля (5.30), которое в данном примере имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}f(x)\varphi(x, t) - z(t)\frac{\partial}{\partial x}g(x)\varphi(x, t). \quad (5.75)$$

Усредняя (5.75), получаем уравнение для одновременной плотности вероятностей:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}f(x)P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}g(x)\langle z(t)\varphi(x, t) \rangle = \\
& = -e^{-vt}\frac{\partial}{\partial x}g(x)\langle \tilde{a}\varphi[x, t; \tilde{a}] \rangle - v\frac{\partial}{\partial x}g(x)\int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)}\langle \tilde{a}\tilde{\varphi}[x, t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)] \rangle. \quad (5.76)
\end{aligned}$$

Теперь функционал $\tilde{\varphi}[x, t, t_1; \tilde{a}, z(\tau)]$ будет описываться уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}f(x)\tilde{\varphi}(x, t) - \tilde{a}\frac{\partial}{\partial x}g(x)\tilde{\varphi}(x, t)$$

с начальным условием $\tilde{\varphi}(x, t_1) = \varphi(x, t_1)$, его решение имеет операторный вид

$$\tilde{\varphi}(x, t) = e^{-(t-t_1)\frac{\partial}{\partial x}[f(x)+\tilde{a}g(x)]}\varphi(x, t_1).$$

Следовательно, уравнение для плотности вероятностей (5.76) можно переписать в замкнутом операторном виде

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}f(x) \right) P(x, t) = -e^{-vt}\frac{\partial}{\partial x}g(x)\left\langle \tilde{a}e^{-t\frac{\partial}{\partial x}[f(x)+\tilde{a}g(x)]} \right\rangle \varphi(x, 0) - \\
& -v\frac{\partial}{\partial x}g(x)\int_0^t dt_1 e^{-v(t-t_1)}\left\langle \tilde{a}e^{-(t-t_1)\frac{\partial}{\partial x}[f(x)+\tilde{a}g(x)]} \right\rangle P(x, t_1). \quad (5.77)
\end{aligned}$$

Стационарное же распределение вероятностей, если оно существует, удовлетворяет операторному уравнению

$$f(x)P(x) = -\nu g(x) \int_0^{\infty} d\tau e^{-\nu\tau} \left\langle \tilde{a} e^{-\tau \frac{d}{dx} [f(x) + \tilde{a}g(x)]} \right\rangle P(x),$$

которое можно записать также в виде

$$f(x)P(x) = -\nu g(x) \left\langle \frac{\tilde{a}}{\nu + \frac{d}{dx} [f(x) + \tilde{a}g(x)]} \right\rangle P(x). \quad (5.78)$$

Чтобы перейти от уравнения (5.78) к дифференциальному уравнению, требуется знать конкретное распределение вероятностей случайной величины a .

Пусть, например, интенсивность флуктуаций величины a достаточно мала и $\langle a \rangle = 0$. Тогда, разлагая оператор в правой части (5.78) в ряд по a и ограничиваясь членами порядка $\langle a^2 \rangle$, получаем операторное уравнение

$$f(x)P(x) = -\nu \langle a^2 \rangle g(x) \frac{1}{\nu + \frac{d}{dx} f(x)} \frac{d}{dx} \frac{1}{\nu + \frac{d}{dx} f(x)} P(x). \quad (5.79)$$

Если теперь представить функцию $P(x)$ в виде

$$P(x) = \left[\nu + \frac{d}{dx} f(x) \right] \psi(x),$$

то для функции $\psi(x)$ получаем дифференциальное уравнение второго порядка по x :

$$\left[\nu + \frac{d}{dx} f(x) \right] \frac{F(x)}{g(x)} \left[\nu + \frac{d}{dx} f(x) \right] \psi(x) = -\nu \langle a^2 \rangle \frac{d}{dx} g(x) \psi(x). \quad (5.80)$$

При $\nu \rightarrow \infty$ можно разложить среднюю величину в правой части (5.78) в ряд по $1/\nu$ и получить стационарное уравнение Фоккера–Планка

$$f(x)P(x) = g(x) \frac{\nu}{\langle a^2 \rangle} \frac{d}{dx} g(x) P(x),$$

соответствующее гауссовому дельта-коррелированному процессу $z(t)$.

5.12.3. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка.

Рассмотрим теперь уравнение (5.42)

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} z(t) \frac{d^j}{dt^j} x(t) = f(t)$$

в случае обобщенного телеграфного процесса $z(t)$. Будем считать для простоты, что начальные условия для (5.42) не зависят от $z(t)$ и величины a_i и b_{ij} являются постоянными.

Усредним уравнение (5.42) с учетом формулы (5.53). В результате получаем уравнение

$$\widehat{L}\left(\frac{d}{dt}\right)\langle x(t)\rangle + M\left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} + \nu\right]\langle z(t)x(t)\rangle = f(t), \quad (5.81)$$

где, как и ранее, $M[p, q] = \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t)p^i q^j$.

Рассмотрим теперь функцию $\langle F(t)x(t)\rangle$, где $F(t)$ описывается формулой (5.54). Согласно формуле дифференцирования (5.53), эта функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \widehat{L}\left(\frac{d}{dt} + \nu\right)\langle F(t)x(t)\rangle &= \left\langle F(t)\widehat{L}\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\right\rangle = \\ &= -\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t)\left\langle F(t)\frac{d^i}{dt^i}z(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle - \\ &\quad -\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t)\left(\frac{d}{dt} + \nu\right)^i\left\langle z(t)F(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Используя теперь равенство (5.56), правую часть (5.82) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &-\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t)\left(\frac{d}{dt} + \nu\right)^i - \frac{1}{\lambda}\left\langle F(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle + \\ &+ C_1(\lambda)\frac{d^j}{dt^j}\langle x(t)\rangle - C_0(\lambda)\left\langle z(t)\frac{d^j}{dt^j}x(t)\right\rangle = \frac{1}{\lambda}M\left[\frac{d}{dt} + \nu, \frac{d}{dt} + \nu\right]\langle F(t)x(t)\rangle - \\ &- C_1(\lambda)M\left[\frac{d}{dt} + \nu, \nu\right]\langle x(t)\rangle + C_0(\lambda)M\left[\frac{d}{dt} + \nu, \frac{d}{dt} + \nu\right]\langle z(t)x(t)\rangle. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Следовательно, уравнение (5.82) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left\{\widehat{L}\left(\frac{d}{dt} + \nu\right) - \frac{1}{\lambda}M\left[\frac{d}{dt} + \nu, \frac{d}{dt} + \nu\right]\right\}\langle F(t)x(t)\rangle = \\ &= -C_1(\lambda)M\left[\frac{d}{dt} + \nu, \frac{d}{dt}\right]\langle x(t)\rangle + C_0(\lambda)M\left[\frac{d}{dt} + \nu, \frac{d}{dt} + \nu\right]\langle z(t)x(t)\rangle \end{aligned} \quad (5.84)$$

с начальным условием $\langle F(t)x(t)\rangle|_{t=0} = 0$.

Выполним теперь преобразование Лапласа в (5.81) и (5.84). В результате получаем алгебраическую систему уравнений

$$\widehat{L}(p)\langle x\rangle_p + M[p, p + \nu]\langle z x\rangle_p = f(p),$$

$$\begin{aligned} &\left\{\widehat{L}(p + \nu) - \frac{1}{\lambda}M[p + \nu, p + \nu]\right\}\langle F x\rangle_p = \\ &= -C_1(\lambda)M[p + \nu, p]\langle x\rangle_p + C_0(\lambda)M[p + \nu, p + \nu]\langle z x\rangle_p. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Формулы (5.85) справедливы для любой величины λ . Положим теперь

$$\lambda = \lambda_p = \frac{M[p + v, p + v]}{L(p + v)}. \quad (5.86)$$

В результате второе уравнение (5.85) дает алгебраическую связь между $\langle z x \rangle_p$ и $\langle x \rangle_p$:

$$\langle z(t) x(t) \rangle_p = \frac{\tilde{C}_1(p)}{\tilde{C}_0(p)} \frac{M[p + v, p]}{M[p + v, p + v]} \langle x \rangle_p, \quad (5.87)$$

где

$$\tilde{C}_k(p) = \left\langle \frac{a^k}{\hat{L}(p + v) + a M[p + v, p + v]} \right\rangle_a.$$

Подставляя (5.87) в первое уравнение (5.85), получаем алгебраическое уравнение для $\langle x \rangle_p$, решение которого имеет вид [60]

$$\langle x \rangle_p = f(p) \left[\hat{L}(p) + \frac{M[p + v, p]}{M[p + v, p + v]} \frac{\tilde{C}_1(p)}{\tilde{C}_0(p)} \right]^{-1}. \quad (5.88)$$

5.13. Гауссовы марковские процессы

Рассмотрим теперь несколько примеров, связанных с гауссовыми марковскими процессами.

Определим случайный процесс $z(t)$ по формуле

$$z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t), \quad (5.89)$$

где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с корреляционными функциями

$$\langle z_i(t) z_j(t') \rangle = \delta_{ij} \langle z^2 \rangle e^{-\alpha|t-t'|} \quad (\alpha = 2\nu).$$

Если теперь положить $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$, то при $N \rightarrow \infty$ этот процесс переходит в гауссов марковский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z_i(t) z_j(t') \rangle = \langle z^2 \rangle e^{-\alpha|t-t'|}.$$

Таким образом, процесс $z(t)$ (5.89) является аппроксимацией гауссового марковского процесса марковским процессом с конечным числом состояний.

Для процесса $z(t)$ формула дифференцирования и правило вынесения производной из под знака усреднения, очевидно, принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right) \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; z(\tau)] \rangle &= \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{d}{dt} R[t; z(\tau)] \right\rangle, \\ \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) \frac{d^n}{dt^n} R[t; z(\tau)] \right\rangle &= \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right)^n \langle z_1(t) \dots z_k(t) R[t; z(\tau)] \rangle, \end{aligned} \quad (5.90)$$

где через $R[t; z(\tau)]$ обозначен произвольный функционал процесса $z(t)$ ($\tau \leq t$).

5.13.1. Стохастическое линейное уравнение. Рассмотрим опять уравнение (5.10), которое перепишем в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t) \mathbf{x}(t) + [z_1(t) + \dots + z_N(t)] \hat{B}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (5.91)$$

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{X}_k(t) = \langle z_1(t) \dots z_k(t) \mathbf{x}(t) \rangle, \quad k = 1, \dots, N; \quad \mathbf{X}_0(t) = \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \quad (5.92)$$

Используя формулу (5.90) для дифференцирования корреляций (5.92) и само уравнение (5.91), получаем рекуррентное уравнение для $\mathbf{X}_k(t)$ вида ($k = 0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X}_k(t) &= \hat{A}(t) \mathbf{X}_k(t) + \left\langle z_1(t) \dots z_k(t) [z_1(t) + \dots + z_N(t)] \hat{B}(t) \mathbf{x}(t) \right\rangle = \\ &= \hat{A}(t) \mathbf{X}_k(t) + k \langle z^2 \rangle \hat{B}(t) \mathbf{X}_{k-1}(t) + (N - k) \hat{B}(t) \mathbf{X}_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (5.93)$$

с начальным условием

$$\mathbf{X}_k(0) = \mathbf{x}_0 \delta_{k,0}.$$

Таким образом, среднее значение решения системы (5.91) удовлетворяет замкнутой системе $(N + 1)$ векторного уравнения. Если операторы $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ — матрицы, не зависящие от времени, то система уравнений (5.93) может быть легко решена с помощью преобразования Лапласа. Очевидно, что ее решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби. Если теперь принять значение $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и перейти к пределу $N \rightarrow \infty$, то, как говорилось выше, случайный процесс $z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t)$ перейдет в гауссов марковский процесс, а решение системы уравнений (5.93) запишется в виде бесконечной цепной дроби.

5.13.2. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка. Рассмотрим теперь стохастическое уравнение (5.42)

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} \right) x(t) + \sum_{i+j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{d^i}{dt^i} z(t) \frac{d^j}{dt^j} x(t) = f(t)$$

со случайным процессом $z(t)$ вида (5.89). Как и в предыдущем примере, введем функции

$$X_k(t) = \langle z_1(t) \dots z_k(t) x(t) \rangle, \quad k = 1, \dots, N; \quad X_0(t) = \langle x(t) \rangle.$$

Чтобы получить уравнения для них, умножим уравнение (5.42) на $z_1(t) \dots z_k(t)$ и усредним по ансамблю реализаций $z_i(t)$. В результате с помощью равенств (5.90) получаем, что функция $X_k(t)$ удовлетворяет замкнутой системе рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} \hat{L} \left(\frac{d}{dt} + \alpha k \right) X_k(t) = F_k(t) - k \langle z^2 \rangle M \left[\frac{d}{dt} + \alpha k, \frac{d}{dt} + \alpha(k-1) \right] X_{k-1}(t) - \\ - (N-k) \langle z^2 \rangle M \left[\frac{d}{dt} + \alpha k, \frac{d}{dt} + \alpha(k+1) \right] X_{k+1}(t), \quad (5.94) \end{aligned}$$

где

$$F_k(t) = \langle z_1(t) \dots z_k(t) f(t) \rangle.$$

Если оператор $\hat{L}$ и функции b_{ij} не зависят от времени t , то система уравнений (5.94) с помощью преобразования Лапласа сводится к алгебраической системе

$$\begin{aligned} \hat{L}(p + \alpha k) X_k(p) = F_k(p) - k \langle z^2 \rangle M[p + \alpha k, p + \alpha(k-1)] X_{k-1}(p) - \\ - (N-k) \langle z^2 \rangle M[p + \alpha k, p + \alpha(k+1)] X_{k+1}(p). \quad (5.95) \end{aligned}$$

В частном случае, когда функция $f(t)$ не зависит от $z_k(t)$, т.е. если $F_k(p) = f(p) \delta_{k,0}$, уравнение (5.95) легко решается и его решение имеет вид конечного отрезка цепной дроби:

$$X_0(p) = f(p) K_0(p), \quad K_l(p) = \frac{1}{A_l(p) - B_l(p) K_{l+1}(p)}, \quad (5.96)$$

где

$$A_l(p) = \hat{L}(p + \alpha l),$$

$$B_l(p) = \langle z^2 \rangle (N-l)(l+1) M[p + \alpha l, p + \alpha(l+1)] M[p + \alpha(l+1), p + \alpha l].$$

(5.97)

Если $N = 1$, т.е. рассматривается случай одного телеграфного процесса, то решение (5.96), (5.97) принимает вид равенства (5.45), соответствующего двум этапам цепной дроби.

Если теперь положить $\langle z^2 \rangle = \sigma^2 / N$ и перейти к пределу $N \rightarrow \infty$, то получим решение $\langle x(p) \rangle$, соответствующее гауссовому марковскому процессу $z(t)$ в виде бесконечной цепной дроби (5.96) с параметрами [60]:

$$A_l(p) = \hat{L}(p + \alpha l), \quad (5.98)$$

$$B_l(p) = \sigma^2 (l+1) M[p + \alpha l, p + \alpha(l+1)] M[p + \alpha(l+1), p + \alpha l].$$

Стохастический параметрический резонанс. Проиллюстрируем вышесказанное на примере статистического описания решения задачи (5.17) для гауссового марковского процесса $z(t)$.

Введем функцию

$$X_l(t) = \langle z_1(t) \dots z_l(t) x(t) \rangle, \quad (5.99)$$

где $x(t)$ — решение задачи (5.17). Тогда, умножая уравнение (5.17) на произведение $z_1(t) \dots z_l(t)$, усредняя по ансамблю реализаций всех процессов $z_i(t)$ и используя формулу (5.90), получаем рекуррентное равенство

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} + \alpha l \right) X_l(t) + \omega_0^2 \langle z^2 \rangle l X_{l-1} + \omega_0^2 (N-l) X_{l+1} = 0 \quad (l = 0, \dots, N), \quad (5.100)$$

где оператор

$$\hat{L} \left(\frac{d}{dt} + \alpha l \right) = \left(\frac{d}{dt} + \alpha l \right)^2 + \omega_0^2.$$

Равенство (5.100) можно рассматривать как замкнутую систему N уравнений с начальными условиями

$$X_0(0) = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} X_0(t) \right|_{t=0} = y_0.$$

Выполним теперь преобразование Лапласа. В результате получаем рекуррентную алгебраическую систему уравнений

$$L(p + \alpha l) X_l(p) + \omega_0^2 \langle z^2 \rangle X_{l-1}(p) + \omega_0^2 (N-l) X_{l+1}(p) = F(p) \delta_{l,0}, \quad (5.101)$$

где $F(p) = y_0 + p x_0$. Положим теперь при $l \neq 0$

$$X_l(p) = -\omega_0^2 \langle z^2 \rangle l K_l(p) X_{l-1}. \quad (5.102)$$

Подставляя равенство (5.102) в (5.101), получаем конечный отрезок цепной дроби:

$$K_l(p) = \frac{1}{L(p + \alpha l) - \omega_0^4 \langle z^2 \rangle (N-l)(l+1) K_{l+1}(p)}, \quad (5.103)$$

а само решение задачи (4.119) определяется как

$$\langle x \rangle_p = X_0(p) = F(p) K_0(p). \quad (5.104)$$

При $N = 1$ равенство (5.104) переходит в равенство (5.23), соответствующее случаю одного телеграфного процесса, и соответствует двум этажам цепной дроби (5.103).

Полагая теперь $\langle z^2 \rangle = \sigma^2 / N$ и переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем решение для гауссового марковского процесса в виде бесконечной цепной дроби (5.104), где

$$K_l(p) = \frac{1}{L(p + \alpha l) - \omega_0^4 \sigma^2 (l+1) K_{l+1}(p)}. \quad (5.105)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и вторые моменты решения задачи (4.119). Так, например, рассматривая потенциальную энергию $U(t) = x^2(t)$, описываемую динамическим уравнением (5.26) с начальными условиями (5.27), получаем для среднего значения $\langle U(t) \rangle$ выражение

в виде конечного отрезка цепной дроби (для случая N телеграфных процессов):

$$\langle U \rangle_p = 2y_0^2 K_0(p), \quad K_l(p) = \frac{1}{A_l(p) - B_l(p)K_{l+1}(p)}, \quad (5.106)$$

где

$$\begin{aligned} A_l(p) &= (p + \alpha l) [(p + \alpha l)^2 + 4\omega_0^2], \\ B_l(p) &= 4\langle z^2 \rangle \omega_0^4 (l+1)(N-l) [2p + \alpha(2l+1)^2]. \end{aligned} \quad (5.107)$$

В случае $N = 1$ получаем решение (5.28), соответствующее одному телеграфному процессу. Полагая теперь $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем решение для гауссового марковского процесса в виде бесконечной цепной дроби (5.106), где

$$\begin{aligned} A_l(p) &= (p + \alpha l) [(p + \alpha l)^2 + 4\omega_0^2], \\ B_l(p) &= 4\sigma^2 \omega_0^4 (l+1) [2p + \alpha(2l+1)^2]. \end{aligned}$$

5.13.3. Квадрат гауссового марковского процесса. Конечномерная аппроксимация гауссового марковского процесса (5.89) также полезна и для флуктуаций параметров динамических систем вида $f(z(t))$, где $z(t)$ — гауссов марковский процесс.

Так, например, в случае $F(z(t)) = z^2(t) - \langle z^2(t) \rangle$ конечномерная аппроксимация имеет вид

$$F(z(t)) = \sum_{i \neq k}^N z_i(t) z_k(t).$$

В этом случае среднее значение решения системы уравнений (5.10) (считаем операторы $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$ матрицами)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + \sum_{i \neq k}^N z_i(t) z_k(t) B\mathbf{x}(t) \quad (5.108)$$

будет входить в замкнутую систем $([N/2] - 1)$ векторных уравнений для функций

$$\mathbf{X}_n(t) = \left\langle z_1(t) \dots z_{2n}(t) \mathbf{x}(t) \right\rangle, \quad n = 1, \dots, [N/2]; \quad \mathbf{X}_0(t) = \langle \mathbf{x}(t) \rangle.$$

Здесь через $[N/2]$ обозначена целая часть числа $N/2$.

Функции $\mathbf{X}_n(t)$, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\alpha n \right) \mathbf{X}_n(t) - A\mathbf{X}_n(t) = B \left\langle z_1(t) \dots z_{2n}(t) \sum_{i \neq k}^N z_i(t) z_k(t) \mathbf{x}(t) \right\rangle. \quad (5.109)$$

Далее будем действовать аналогично выводу системы уравнений (5.94). Разобьем сумму по i и k в правой части (5.109) на четыре области (рис. 2.6).

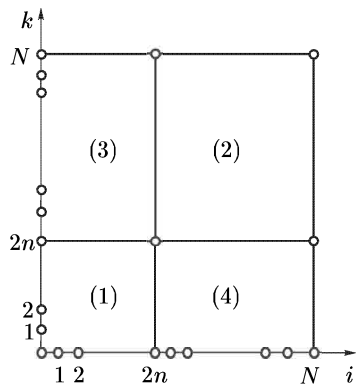


Рис. 2.6. Схема разбиения индексов в сумме (5.109)

В области (1) две функции $z_i(t)$ и $z_k(t)$ будут «погашены» соответствующими функциями из произведения $z_1(t) \dots z_{2n}(t)$. Учитывая, что таких членов будет $2n(2n-1)$, получаем для области (1) правую часть (5.109) в виде

$$2n(2n-1) \langle z^2 \rangle^2 B \mathbf{x}_{n-1}(t).$$

Аналогичным образом в области (2), где не происходит «гашения» функций $z_i(t)$, $z_k(t)$, получаем соответствующий член в правой части (5.109)

$$(N-2n)(N-2n-1) B \mathbf{x}_{n+1}(t).$$

В областях же (3) и (4) будет «гаситься» одна из функций $z_i(t)$, $z_k(t)$. Учитывая, что число таких членов $4n(N-2n)$, получаем соответствующее выражение в правой части (5.109):

$$4n(N-2n) \langle z^2 \rangle B \mathbf{x}_n(t).$$

В результате уравнение (5.109) принимает вид замкнутой системы рекуррентных уравнений:

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + 2\alpha n \right) E - A - 4n(N-2n) \langle z^2 \rangle B \right] \mathbf{X}_n(t) = \\ = 2n(2n-1) \langle z^2 \rangle^2 B \mathbf{X}_{n-1}(t) + (N-2n)(N-2n-1) B \mathbf{X}_{n+1}(t),$$

где $n = 0, 1, \dots, [N/2]$.

Решение этой системы при постоянных матрицах A и B также, очевидно, записывается конечным отрезком цепной дроби. При этом простейшие аппроксимации $N=2$ и $N=3$ приводят к замкнутой системе всего двух векторных уравнений.

5.14. Марковские процессы с конечным числом состояний

Все рассмотренные выше процессы — телеграфный и обобщенный телеграфный процессы, процесс $z(t) = z_1(t) + \dots + z_N(t)$, где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы, являются частными случаями марковских процессов $z(t)$ с конечным числом состояний. Пусть в общем случае возможные значения процесса $z(t)$ есть $z_1, \dots, z_n$. Тогда все реализации процесса $z(t)$ удовлетворяют тождеству

$$(z(t) - z_1)(z(t) - z_2) \dots (z(t) - z_n) \equiv 0$$

и, следовательно,

$$z^n(t) = (z_1 + \dots + z_n) z^{n-1}(t) + (-1)^{n-1} z_1 \dots z_n, \quad (5.110)$$

В этом случае и среднее значение, например, решения системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \hat{A}(t) \mathbf{x}(t) + z(t) \hat{B}(t) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.111)$$

также будет описываться замкнутой системой уравнений. В самом деле, усредняя уравнение (5.111) и применяя последовательно формулу дифференцирования (5.3) для корреляций

$$\langle z^k(t) \mathbf{x}(t) \rangle \quad (k = 1, \dots, n-1),$$

приходим на последнем шаге к функции $\langle z^n(t) \mathbf{x}(t) \rangle$, которая, согласно (5.110), выражается через функции предыдущих шагов, т.е. получаем замкнутую систему векторных уравнений n -го порядка.

5.14.1. Процесс с двумя состояниями. В качестве иллюстрации рассмотрим процесс с двумя состояниями z_1 , z_2 и вероятностями перехода между ними, равными, соответственно, ν и μ . Тогда равенство (5.110) принимает вид

$$z^2(t) = (z_1 + z_2) z(t) - z_1 z_2. \quad (5.112)$$

Усредним уравнение (5.111):

$$\left(E \frac{d}{dt} - \hat{A}(t) \right) \langle \mathbf{x}(t) \rangle = \hat{B}(t) \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle, \quad \langle \mathbf{x}(0) \rangle = \mathbf{x}_0. \quad (5.113)$$

Для корреляции $\langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle$, согласно формуле (5.3), имеем

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \left\langle z(t) \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right\rangle + \left\langle \mathbf{x}(t) \left[\hat{L}^+(z) z(t) \right] \right\rangle,$$

где кинетический и сопряженный к нему операторы описываются матрицами (см. гл. 3)

$$\hat{L}(z) = \begin{pmatrix} -\nu & \mu \\ \nu & -\mu \end{pmatrix}, \quad \hat{L}^+(z) = \begin{pmatrix} -\nu & \nu \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}. \quad (5.114)$$

Учитывая, что действие оператора $\hat{L}^+(z)$ на $z(t)$ можно представить в виде

$$\hat{L}^+(z) z(t) = \begin{pmatrix} -\nu & \nu \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu(z_1 - z_2) \\ \mu(z_1 - z_2) \end{pmatrix} = (\nu z_2 + \mu z_1) - (\nu + \mu) z(t),$$

уравнению для корреляции $\langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle$ удастся придать вид

$$\begin{aligned} \left\{ E \left(\frac{d}{dt} + \mu + \nu \right) - \hat{A}(t) - (z_1 + z_2) \hat{B}(t) \right\} \langle z(t) \mathbf{x}(t) \rangle = \\ = \left\{ (\nu z_2 + \mu z_1) E - z_1 z_2 \hat{B}(t) \right\} \langle \mathbf{x}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Уравнения (5.113) и (5.115) являются замкнутой системой двух векторных уравнений.

Отметим, что в частном случае скалярного уравнения с параметрами $A = 0$, $B(t) = iv(t)$ решение уравнения (5.111) имеет вид

$$x(t) = \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\},$$

и, следовательно, среднее значение этой величины описывает характеристический функционал случайного процесса $z(t)$:

$$\Phi[t; v(\tau)] = \left\langle x(t) \right\rangle = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau z(\tau) v(\tau) \right\} \right\rangle.$$

В этом случае, исключая из системы уравнений (5.113) и (5.115) функцию $\langle z(t)x(t) \rangle$, мы получаем дифференциальное уравнение для функционала $\Phi[t; v(\tau)]$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Phi[t; v(\tau)] + \left[\mu + v - \frac{1}{v(t)} \frac{dv(t)}{dt} - iv(t)(z_1 + z_2) \right] \frac{d}{dt} \Phi[t; v(\tau)] - \\ - [iv(t)(vz_2 + \mu z_1) + z_1 z_2 v^2(t)] \Phi[t; v(\tau)] = 0. \end{aligned} \quad (5.116)$$

5.15. Стохастические причинные интегральные уравнения

Рассмотрим теперь простейшее одномерное интегральное уравнение

$$S(t, t') = g(t - t')\theta(t - t') + \Lambda \int_0^t d\tau g(t - \tau) z(\tau) S(\tau, t'), \quad (5.117)$$

где $z(t)$ — случайная функция времени, $g(t - t')$ — детерминированная функция, Λ — постоянный параметр, а $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Итерируя это уравнение, замечаем, что его решение $S(t, t')$ зависит от случайной функции $z(\tau)$ лишь при $t' \leq \tau \leq t$, т. е. выполняется условие причинности

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} S(t, t') = 0 \quad \text{при} \quad \tau < t', \quad \tau > t.$$

При этом $S(t, t') \sim \theta(t - t')$.

Усредним уравнение (5.117) по ансамблю реализаций функции $z(t)$. Для стационарного процесса $z(t)$ функция

$$\langle S(t, t') \rangle = \langle S(t - t') \rangle$$

и, следовательно,

$$\langle S(t - t') \rangle = g(t - t')\theta(t - t') + \Lambda \int_0^t d\tau g(t - \tau) \int_0^\tau d\tau' Q(\tau - \tau') \langle S(\tau' - t') \rangle, \quad (5.118)$$

где $Q(t) \sim \theta(t)$ — массовая функция, определяемая с помощью равенства

$$\Lambda \langle z(t) S(t, t') \rangle = \int_0^t d\tau Q(t - \tau) \langle S(\tau - t') \rangle.$$

Выполним в (5.118) преобразование Лапласа по переменной $t - t'$. В результате получаем

$$\langle S \rangle_p = g(p) + g(p) Q(p) \langle S \rangle_p, \quad (5.119)$$

где

$$\Lambda \langle z(t) S(t, t') \rangle_p = Q(p) \langle S \rangle_p. \quad (5.120)$$

Отметим, что если интегральное уравнение (5.117) сводится к дифференциальному:

$$L \left(\frac{d}{dt} \right) S(t, t') = \Lambda z(t) S(t, t') + \delta(t - t'),$$

то $g(p) = L^{-1}(p)$.

Для определения структуры функции $Q(p)$ следует, согласно предыдущей главе, рассмотреть вспомогательное уравнение

$$\tilde{S}(t, t') = g(t - t') \theta(t - t') + \Lambda \int_0^t d\tau g(t - \tau) [z(\tau) + \eta(\tau)] \tilde{S}(\tau, t'), \quad (5.121)$$

где $\eta(\tau)$ — произвольная детерминированная функция. Если усреднить уравнение (5.121) и обозначить его решение через $G[t, t'; \eta(\tau)]$, то вершинная функция $\Gamma(t, t_1, t') = \Gamma(t - t_1, t_1 - t')$ определится равенством

$$\Gamma(t, t_1, t') = - \frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} G^{-1}[t, t'; \eta] \Big|_{\eta=0}.$$

Вариационная же производная $\delta G / \delta \eta$ при $\eta(\tau) = 0$ связана с вершинной функцией $\Gamma(t, t_1, t')$ и средней функцией Грина соотношением (4.37)

$$\frac{\delta}{\delta \eta(t_1)} G[t, t'; \eta] \Big|_{\eta=0} = \int d\tau_1 \int d\tau_2 \langle S(t - \tau_1) \rangle \Gamma(\tau_1 - t_1, t_1 - \tau_2) \langle S(\tau_2 - t') \rangle, \quad (5.122)$$

где область интегрирования определяется условием положительности всех аргументов. Выполняя в (5.122) преобразование Лапласа по переменным $(t - t_1)$ и $(t_1 - t')$, получаем равенство

$$\frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q) = \langle S \rangle_p \Gamma(p, q) \langle S \rangle_q, \quad (5.123)$$

позволяющее найти преобразование Лапласа от вершинной функции. Массовая функция при этом связана с характеристическим функционалом процесса $z(t)$.

Величину $\delta G / \delta \eta$, стоящую в левой части равенства (5.123), можно получить, варьируя уравнение (5.121) по $\eta(t_1)$, полагая затем $\eta(t) = 0$ и усредняя

полученное уравнение. Если удастся выполнить усреднение в уравнении (5.121), то величина $\delta G/\delta\eta$ определяется при варьировании его по $\eta(t)$.

Перейдем теперь к реализации описанной схемы для различных процессов $z(t)$.

5.15.1. Телеграфный случайный процесс. Пусть $z(t)$ — телеграфный процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t)z(t') \rangle = \langle z^2 \rangle e^{-\alpha|t-t'|}.$$

Усредним уравнение (5.121), в результате получаем

$$G(t, t') = g(t-t')\theta(t-t') + \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau)\eta(\tau)G(\tau, t') + \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau) \langle z(\tau)\tilde{S}(\tau, t') \rangle. \quad (5.124)$$

Уравнение (5.124) не замкнуто, так как содержит новую неизвестную функцию $\langle z(\tau)\tilde{S}(\tau, t') \rangle$. Чтобы получить уравнение для этой функции, умножим (5.121) на $z(t)$ и усредним:

$$\begin{aligned} \langle z(t)\tilde{S}(t, t') \rangle &= \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau)\eta(\tau) \langle z(t)\tilde{S}(\tau, t') \rangle + \\ &+ \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau) \langle z(t)z(\tau)\tilde{S}(\tau, t') \rangle. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Учитывая теперь формулу (3.139) гл. 3

$$\langle z(t)R[t'; z(\tau)] \rangle = e^{-\alpha(t-t')} \langle z(t')R[t'; z(\tau)] \rangle, \quad (5.126)$$

справедливую для произвольного функционала $R[t'; z(\tau)]$, такого, что $t \geq t'$, получаем уравнение $\langle z^2(t) \rangle \equiv \langle z^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle z(t)\tilde{S}(t, t') \rangle &= \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau)\eta(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)} \langle z(\tau)\tilde{S}(\tau, t') \rangle + \\ &+ \Lambda \langle z^2 \rangle \int_0^t d\tau g(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)} G(\tau, t'). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Система уравнений (5.124) и (5.127) уже замкнута. Полагая в ней $\eta = 0$ и выполняя преобразование Лапласа по переменной $(t-t')$, получаем алгебраическую систему уравнений

$$\langle S \rangle_p = g(p) + \Lambda g(p) \langle zS \rangle_p, \quad \langle zS \rangle_p = \Lambda \langle z^2 \rangle g(p) \langle S \rangle_p, \quad (5.128)$$

решение которой таково:

$$\langle S \rangle_p = \frac{g(p)}{1 - \Lambda^2 \langle z^2 \rangle g(p)g(p+\alpha)}, \quad \langle zS \rangle_p = \frac{\Lambda \langle z^2 \rangle g(p)g(p+\alpha)}{1 - \Lambda^2 \langle z^2 \rangle g(p)g(p+\alpha)}. \quad (5.129)$$

При этом, согласно (5.120), массовая функция $Q(p)$ равна

$$Q(p) = \Lambda^2 \langle z^2 \rangle g(p+\alpha). \quad (5.130)$$

Для нахождения вершинной функции проварируем уравнения (5.124) и (5.127) по $\eta(t_1)$, положим $\eta(t) = 0$ и выполним преобразование Лапласа по переменным $(t - t_1)$ и $(t_1 - t')$. В результате получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q) &= \Lambda g(p) \langle S \rangle_p + \Lambda g(p) \left\langle z \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \eta} \right\rangle_{p, q}, \\ \left\langle z \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \eta} \right\rangle_{p, q} &= \Lambda g(p+\alpha) \langle zS \rangle_q + \Lambda \langle z^2 \rangle g(p+\alpha) \frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q), \end{aligned} \quad (5.131)$$

решение которой, с учетом (5.128), имеет вид

$$\frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q) = \Lambda \langle S \rangle_p \{1 + \Lambda^2 \langle z^2 \rangle g(p+\alpha)g(q+\alpha)\} \langle S \rangle_q. \quad (5.132)$$

Сравнивая (5.132) с формулой (5.123), получаем для вершинной функции выражение

$$\Gamma(p, q) = \Lambda \{1 + \Lambda^2 \langle z^2 \rangle g(p+\alpha)g(q+\alpha)\}. \quad (5.133)$$

5.15.2. Обобщенный телеграфный случайный процесс. Пусть теперь $z(t)$ — обобщенный телеграфный процесс. Усредняя уравнение (5.121), получаем уравнение (5.124). Далее следует написать уравнение для функции $\langle F_\lambda(t) \tilde{S}(t, t') \rangle$, где

$$F_\lambda(t) = \frac{1}{1 + \lambda z(t)} - C_0(\lambda), \quad C_k(\lambda) = \left\langle \frac{a^k}{1 + \lambda a} \right\rangle_a \quad (\langle F_\lambda(t) \rangle_a = 0),$$

а λ — произвольный параметр. Умножая уравнение (5.121) на $F_\lambda(t)$ и усредняя, находим

$$\begin{aligned} \langle F_\lambda(t) \tilde{S}(t, t') \rangle &= \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \eta(\tau) \langle F_\lambda(t) \tilde{S}(\tau, t') \rangle - \\ &\quad - \Lambda \int_0^t d\tau g(t-\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \left\{ \frac{1}{\lambda} \langle F_\lambda(\tau) \tilde{S}(\tau, t') \rangle - \right. \\ &\quad \left. - C_1(\lambda) G(\tau, t') + C_0(\lambda) \langle z(\tau) \tilde{S}(\tau, t') \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.134)$$

При выводе уравнения (5.134) мы воспользовались равенством

$$\langle F_\lambda(t)R[t'; z(\tau)] \rangle = e^{-\alpha(t-t')} \langle F_\lambda(t')R[t'; z(\tau)] \rangle,$$

справедливым для произвольного функционала $R[t; z(\tau)]$ случайного процесса $z(t)$ при $t' \geq t$, и тождеством (5.129)

$$z(t)F(t) = -\frac{1}{\lambda}F(t) + C_1(t) - z(t)C_0(\lambda).$$

Для нахождения массовой функции положим в (5.124) и (5.134) $\eta(t) = 0$ и выполним преобразование Лапласа. В результате получим систему уравнений

$$\langle S \rangle_p = g(p) + \Lambda g(p) \langle zS \rangle_p,$$

$$\begin{aligned} \langle F_\lambda(t)S(t, t') \rangle_p \left\{ 1 + \frac{\Lambda}{\lambda} g(p + \alpha) \right\} = \\ = \Lambda g(p + \alpha) \left\{ C_1(\lambda) \langle S \rangle_p - C_0(\lambda) \langle F_\lambda(t)S(t, t') \rangle_p \right\}, \end{aligned}$$

справедливую при произвольном значении параметра λ . Полагая

$$\lambda = \lambda_p = -\Lambda g(p + \alpha),$$

получаем алгебраическую связь между $\langle zS \rangle_p$ и $\langle S \rangle_p$:

$$\langle z(t)S(t, t') \rangle_p = \langle S \rangle_p \frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)}, \quad (5.135)$$

и, следовательно,

$$\langle S \rangle_p = \frac{g(p)}{1 - \Lambda g(p) \frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)}}. \quad (5.136)$$

С учетом (5.135) функция $\langle F_\lambda(t)S(t, t') \rangle_p$ для произвольного значения λ имеет вид

$$\langle F_\lambda(t)S(t, t') \rangle_p = -\frac{\lambda_p \langle S \rangle_p [C_1(\lambda)C_0(\lambda_p) - C_0(\lambda)C_1(\lambda_p)]}{(\lambda - \lambda_p)C_0(\lambda_p)}. \quad (5.137)$$

Массовая функция, как следует из (5.135), в этом случае равна

$$Q(p) = \Lambda \frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)}. \quad (5.138)$$

Для нахождения вершинной функции проварьируем уравнения (5.124) и (5.134) по $\eta(t_1)$, положим $\eta(t) = 0$ и выполним преобразование Лапласа.

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q) &= \Lambda g(p) \langle S \rangle_q + \Lambda g(p) \left\langle z \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \eta} \right\rangle_{p, q}, \\ \left\langle F_\lambda \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \eta} \right\rangle_p &= \left\{ 1 + \frac{\Lambda}{\lambda} g(p + \alpha) \right\} \Lambda g(p + \alpha) F_\lambda S_q + \\ &+ \Lambda g(p + \alpha) \left\{ C_1(\lambda) \frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q) - C_0(\lambda) \left\langle z \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \eta} \right\rangle_{p, q} \right\}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Полагая теперь в (5.139) $\lambda = \lambda_p$, получаем алгебраическую систему уравнений для $\frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q)$ и $\left\langle z \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \eta} \right\rangle_{p, q}$, решение которой, с учетом (5.136), (5.137) таково:

$$\frac{\delta G}{\delta \eta}(p, q) = \Lambda \langle S \rangle_p \left\{ 1 + \Lambda \frac{g(p + \alpha)g(q + \alpha)}{g(p + \alpha) - g(q + \alpha)} \left[\frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)} - \frac{C_1(\lambda_q)}{C_0(\lambda_q)} \right] \right\} \langle S \rangle_q, \quad (5.140)$$

и, следовательно, вершинная функция равна

$$\Gamma(p, q) = \Lambda \left\{ 1 + \Lambda \frac{g(p + \alpha)g(q + \alpha)}{g(p + \alpha) - g(q + \alpha)} \left[\frac{C_1(\lambda_p)}{C_0(\lambda_p)} - \frac{C_1(\lambda_q)}{C_0(\lambda_q)} \right] \right\}. \quad (5.141)$$

Если распределение вероятностей для величины a имеет вид

$$p(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)],$$

то $C_1(\lambda)/C_0(\lambda) = -\lambda a_0^2$, и мы возвращаемся к случаю телеграфного процесса с параметром $\langle z^2 \rangle = a_0^2$.

Если же a — непрерывная случайная величина со средним значением, равным нулю, и дисперсия ее достаточно мала, то

$$C_0(\lambda) \approx 1, \quad C_1(\lambda) \approx -\lambda \langle a^2 \rangle,$$

и для вершинной функции получаем равенство

$$\Gamma(p, q) = \Lambda \{ 1 + \Lambda^2 \langle a^2 \rangle g(p + \alpha)g(q + \alpha) \}. \quad (5.142)$$

Однако выражение (5.142) справедливо только при выполнении очевидных неравенств

$$|\lambda^2| \langle a^2 \rangle \ll 1 \quad (\lambda = \lambda_p, \lambda_q). \quad (5.143)$$

5.15.3. Гауссов марковский процесс. Пусть теперь $z(t)$ — гауссов марковский процесс с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t') \rangle = \langle z^2 \rangle e^{-\alpha|t - t'|}.$$

Этот процесс можно получить предельным переходом $N \rightarrow \infty$ из процесса с конечным числом состояний:

$$\xi_N = z_1(t) + \dots + z_N(t),$$

где $z_i(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы, у которых $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$.

Итак, рассмотрим уравнение (5.121), в котором $z(t) = \xi_N(t)$, и введем функции

$$G_l(t, t') = \langle z_1(t) \dots z_l(t) \tilde{S}(t, t') \rangle \quad (G_0(t, t') = G(t, t')). \quad (5.144)$$

Умножая (5.121) на $z_1(t) \dots z_N(t)$, усредняя и используя формулу (5.126), можно найти рекуррентное уравнение ($l = 0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} G_l(t, t') = & g(t - t')\theta(t - t')\delta_{l,0} + \Lambda \int_0^t d\tau g(t - \tau)\eta(\tau)e^{-\alpha l(t-\tau)}G_l(\tau, t') + \\ & + \Lambda \int_0^t d\tau g(t - \tau)e^{-\alpha l(t-\tau)} \{ l \langle z^2 \rangle G_{l-1}(\tau, t') + (N - l)G_{l+1}(\tau, t') \}. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Полагая $\eta(t) = 0$ и выполняя преобразование Лапласа по $(t - t')$, получаем алгебраическое рекуррентное соотношение

$$G_l(p) = g_0(p)\delta_{l,0} + \Lambda g_l(p) \{ l \langle z^2 \rangle G_{l-1}(p) + (N - l)G_{l+1}(p) \}, \quad (5.146)$$

где $g_l(p) = g(l + \alpha l)$.

Решение уравнения (5.146) имеет вид конечного отрезка цепной дроби:

$$G_l(p) = \Lambda g_l(p) l \langle z^2 \rangle K_l(p) G_{l-1}(p), \quad l = 1, \dots, N, \quad (5.147)$$

где

$$K_l(p) = \frac{1}{1 - \gamma_l(p)K_{l+1}(p)}, \quad \gamma_l(p) = \Lambda^2 \langle z^2 \rangle (l+1)(N-l)g_l(p)g_{l+1}(p). \quad (5.148)$$

Следовательно,

$$G_l(p) = \Lambda^l \langle z^2 \rangle^l l! \{ g_l(p) K_l(p) \}! g_0(p) K_0(p), \quad (5.149)$$

где через $f_l!$ обозначено произведение $f_1 \dots f_l$. Учитывая, что

$$\langle \xi_N(t) S(t, t') \rangle_p = N G_1(p),$$

находим выражение для массовой функции:

$$Q_N(p) = \Lambda^2 N \langle z^2 \rangle g_1(p) K_1(p). \quad (5.150)$$

Полагая теперь $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем массовую функцию для гауссова марковского процесса

$$Q(p) = \Lambda^2 \sigma^2 g_1(p) K_1(p), \quad (5.151)$$

где $K_1(p)$ — бесконечная цепная дробь (5.148) с параметром

$$\tilde{\gamma}_l(p) = \Lambda^2 \sigma^2 (l+1) g_l(p) g_{l+1}(p). \quad (5.152)$$

При вычислении вершинной функции в случае телеграфного и обобщенного телеграфного процессов мы следовали «в лоб» методике, справедливой для произвольных интегральных уравнений. Это было сделано с иллюстративной целью. Однако для уравнения (5.117) можно сразу написать выражение для вершинной функции, зная лишь решение уравнения Дайсона. В самом деле, согласно равенствам (5.122) и (4.113), для уравнения (5.117) имеет место соотношение

$$\Lambda \langle S(t, t_0) S(t_0, t') \rangle = \iint d\tau_1 d\tau_2 \langle S(t - \tau_1) \rangle \Gamma(\tau_1 - t_1, t_1 - \tau_2) \langle S(\tau_2 - t') \rangle. \quad (5.153)$$

Пусть теперь случайный процесс $z(t)$ — функция от процесса $\xi_N(t)$. Тогда для расщепления корреляции в левой части (5.153) можно воспользоваться формулой (3.134), которая в данном случае принимает вид

$$\langle S(t, t_0) S(t_0, t') \rangle = \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{1}{\langle z^2 \rangle^k} \langle z_1(t_0) \dots z_k(t_0) S(t, t_0) \rangle \langle z_1(t_0) \dots z_k(t_0) S(t_0, t') \rangle. \quad (5.154)$$

Выполняя преобразование Лапласа по переменным $(t - t_0)$ и $(t_0 - t')$, получаем равенство

$$\langle SS \rangle_{p,q} = \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{1}{\langle z^2 \rangle^k} G_k(p) G_k(q), \quad (5.155)$$

где функция $G_k(p)$ определяется выражением (5.144). Следовательно, для вершинной функции $\Gamma(p, q)$ получаем выражение

$$\Gamma(p, q) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{1}{\langle z^2 \rangle^k} \frac{G_k(p) G_k(q)}{G_0(p) G_0(q)}. \quad (5.156)$$

При $z(t) = \xi_N(t)$ функции $G_k(p)$ описываются формулой (5.149) и мы получаем

$$\Gamma_N(p, q) = \Lambda \left[1 + \sum_{k=0}^N \Lambda^{2k} \langle z^2 \rangle^k \frac{N! k!}{(N-k)!} \{g_k(p) g_k(q) K_k(p) K_k(q)\} \right]. \quad (5.157)$$

При $N = 1$ мы возвращаемся к случаю одного телеграфного процесса и формула (5.157) переходит в (5.133).

Полагая теперь $\langle z^2 \rangle = \sigma^2/N$ и переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, получаем вершинную функцию для гауссового марковского процесса в виде бесконечного ряда:

$$\Gamma(p, q) = \Lambda \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} k! \Lambda^{2k} \sigma^{2k} \{g_k(p)g_k(q)K_k(p)K_k(q)\}! \right], \quad (5.158)$$

содержащего бесконечные цепные дроби (5.148) с параметром (5.152). Два первых члена ряда (5.158) таковы:

$$\Gamma(p, q) = \Lambda [1 + \Lambda^2 \sigma^2 g_1(p)g_1(q)K_1(p)K_1(q) + \dots].$$

Остановимся теперь на приближениях, используемых обычно при анализе стохастических интегральных уравнений.

Прежде всего рассмотрим гауссов марковский процесс. В этом случае массовая функция связана с вершинной функцией формулой

$$Q(t - t') = \Lambda \sigma^2 \int \int d\tau_1 d\tau_2 e^{-\alpha(t-\tau)} \langle S(t - \tau_1) \rangle \Gamma(\tau_1 - \tau, \tau - t'), \quad (5.159)$$

где область интегрирования определяется условием положительности всех аргументов. Выполняя в (5.159) преобразование Лапласа по переменной $(t - t')$, получаем равенство

$$Q(p) = \Lambda \sigma^2 \langle S \rangle_{p+\alpha} \Gamma(p + \alpha, p). \quad (5.160)$$

Приближение Крейчнана соответствует замене в формуле (5.159) $\Gamma(p + \alpha, p)$ на Λ , а приближение Бурре — еще и замене $\langle S \rangle_{p+\alpha}$ на $g_1(p)$.

Решение уравнения Дайсона (5.119) определяется в первую очередь полюсами или другими существенными особенностями функции $g_1(p)$. Обозначим особую точку для нее через p_0 . Тогда можно пренебречь всеми членами ряда (5.158), кроме первого, если выполнено условие

$$\Lambda^2 \sigma^2 |g_1(p_0)|^2 |K_1(p_0)|^2 \ll 1. \quad (5.161)$$

Поскольку функции $K_1(p_0)$ сами содержат параметр $\beta^2 = \Lambda^2 |g_1(p_0)|^2$, то при $\beta^2 \ll 1$ также величина $|K_1(p_0)| \sim 1$.

Таким образом, если выполняется условие

$$\beta^2 = \Lambda^2 |g_1(p_0)|^2 \ll 1, \quad (5.162)$$

то вершинную функцию $\Gamma(p, q)$ можно заменить на величину Λ . Однако, как было показано выше, функция $\langle S \rangle_{p_0+\alpha}$ также содержит малый параметр. Поэтому в первом приближении по указанному параметру малости

$$Q(p) = \Lambda^2 g_1(p), \quad (5.163)$$

что соответствует приближению Бурре. Таким образом, приближение Крейчнана для данной задачи не имеет места, в то время как приближение Бурре является первым шагом в асимптотическом разложении решения по указанному малому параметру.

Отметим, что массовая функция в приближении Бурре (5.163) в точности совпадает с массовой функцией для телеграфного процесса (5.130).

Предельный переход $\alpha \rightarrow \infty$ в полученных решениях для всех рассмотренных процессов соответствует гауссовому дельта-коррелированному процессу с корреляционной функцией

$$\langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t'), \quad \tau_0 = 1/\alpha.$$

Это решение, разумеется, можно получить и непосредственно, исходя из уравнения (5.117) (см. следующую главу).

Часть III
АСИМТОТИЧЕСКИЕ
И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ

Глава 6

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ (ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

В предыдущих главах подробно рассматривались общие случаи анализа стохастических уравнений. Здесь же мы более подробно с других позиций рассмотрим приближение дельта-коррелированного во времени гауссового случайного поля в стохастических уравнениях и обсудим физический смысл этого приближения, которое наиболее широко используется при решении практических задач.

6.1. Уравнение Фоккера–Планка

Пусть векторная функция $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.1)$$

где $v_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, \dots, n$) — детерминированные функции, а $f_i(\mathbf{x}, t)$ — случайные функции $(n+1)$ переменных, обладающие следующими свойствами:

(а) $f_i(\mathbf{x}, t)$ — гауссово случайное поле в $(n+1)$ -мерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$;

(б) $\langle f_i(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$.

Будем для определенности считать, что t — временная координата, а $\mathbf{x}$ — пространственная.

Статистические характеристики поля $f_i(\mathbf{x}, t)$ полностью описываются заданием его корреляционного тензора

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Так как уравнение (6.1) является уравнением первого порядка с начальным условием, то для него выполняется условие динамической причинности:

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} x_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad t' < t_0 \quad \text{и} \quad t' > t, \quad (6.2)$$

т.е. его решение $\mathbf{x}(t)$ функционально зависит лишь от предшествующих по t значений $f_j(\mathbf{x}, t')$ из интервала $t_0 \leq t' \leq t$. При этом для вариационной производной имеем равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} x_i(t) = \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}'). \quad (6.3)$$

Однако может существовать статистическая связь между $\mathbf{x}(t)$ и последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$, где $t'' > t$, так как такие значения $f_j(\mathbf{x}, t'')$ коррелированы со значениями $f_j(\mathbf{x}, t')$ при $t' \leq t$. Ясно, что корреляция функции $\mathbf{x}(t)$ с последующими значениями $f_j(\mathbf{x}, t'')$ заметна лишь при $t'' - t \leq \tau_0$, где τ_0 — радиус корреляции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по переменной t .

Для достаточно большого класса реальных физических процессов характерный временной масштаб изменения функции $\mathbf{x}(t)$ имеет величину порядка $T \gg \tau_0$, и в этом случае существует малый параметр — τ_0/T , который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении по этому параметру малости можно рассматривать асимптотику при $\tau_0 \rightarrow 0$. При этом значения $\mathbf{x}(t')$ при $t' < t$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t'')$ при $t'' > t$. Это приближение эквивалентно замене корреляционного тензора B_{ij} на некоторый эффективный тензор, определяемый равенством

$$B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = 2\delta(t - t') F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t). \quad (6.4)$$

Величина $F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ при этом определяется из условия равенства интегралов от $B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ и $B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ по t' :

$$F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'),$$

что и соответствует переходу к гауссовому дельта-коррелированному по времени t случайному полю.

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (6.5)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (6.1), удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (6.6)$$

При этом

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t) \}. \quad (6.7)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (6.1)

$$P(\mathbf{x}, t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, усредняя уравнение (6.6) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \right\rangle. \quad (6.9)$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} \right\rangle, \quad (6.10)$$

справедливой для корреляции гауссового случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него и условием динамической причинности (6.2).

Уравнение (6.9) показывает, что одновременная плотность вероятностей решения $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t определяется функциональной зависимостью решения $\mathbf{x}(t)$ от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}', t)$ для любого времени в интервале (t_0, t) .

В общем случае плотность вероятностей $P(\mathbf{x}, t)$ не описывается замкнутым уравнением. Если же для корреляционной функции поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ воспользоваться приближением (6.4), то возникнут члены, связанные со значениями $\delta \phi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] / \delta f_j(\mathbf{x}', t')$ при совпадающих временных аргументах $t' = t - 0$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\right) P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int d\mathbf{x}' F_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \left\langle \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_j(\mathbf{x}', t-0)} \right\rangle,$$

которые, согласно равенству (6.7), выражаются непосредственно через саму величину $\phi[\mathbf{x}, t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$. Таким образом мы приходим к замкнутому уравнению Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)]\right) P(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) P(\mathbf{x}, t)], \quad (6.11)$$

где

$$A_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}}.$$

Уравнение (6.11) следует решать с начальным условием $P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ или же с начальным условием более общего вида $P(\mathbf{x}, t_0) = W_0(\mathbf{x})$, если начальные условия так же случайны, но статистически независимы от поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Уравнение Фоккера–Планка (6.11) — уравнение в частных производных, и его дальнейший анализ существенно зависит от формулировки краевых условий по $\mathbf{x}$, которые формулируются для анализа конкретных задач.

Рассмотрим величины, входящие в уравнение (6.11). Члены этого уравнения с $A_k(\mathbf{x}, t)$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ обусловлены флуктуациями поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Если поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ стационарно во времени, то величины $A_k(\mathbf{x})$ и $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ не зависят от времени. Если к тому же поле $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ однородно и изотропно по

всем пространственным координатам, то величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \text{const}$, что соответствует постоянному тензору коэффициентов диффузии, а величина $A_k(\mathbf{x}, t) = 0$ (заметим, однако, что зависимость $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ и $A_k(\mathbf{x}, t)$ от $\mathbf{x}$ может быть связана и с использованием криволинейных координат).

6.2. Плотность вероятностей перехода

Вернемся теперь к динамической системе (6.1) и рассмотрим m -временную плотность вероятностей

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \langle \delta(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_1) \dots \delta(\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}_m) \rangle, \quad (6.12)$$

относящуюся к m различным моментам времени $t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Дифференцируя (6.12) по времени t_m и используя затем динамическое уравнение (6.1), условие динамической причинности (6.2), определение функции $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ и формулу Фурутцу–Новикова (6.10), можно получить уравнение, аналогичное уравнению Фоккера–Планка (6.11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_m} P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) + \\ + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mk}} [v_k(\mathbf{x}_m, t_m) + A_k(\mathbf{x}_m, t_m)] P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{mk} \partial x_{ml}} [F_{kl}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m; t_m) P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m)]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Здесь суммирование по индексу m не производится. Начальное условие к (6.13) можно найти из формулы (6.12). Полагая $t_m = t_{m-1}$ в (6.12), получаем

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_{m-1}) = \delta(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (6.14)$$

Решение уравнения (6.13) можно искать в виде

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) P_{m-1}(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}). \quad (6.15)$$

Так как все дифференциальные операции в (6.13) относятся к t_m и $\mathbf{x}_m$, то подставляя (6.15) в (6.13) и (6.14), находим следующее уравнение для плотности вероятностей перехода:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [v_k(\mathbf{x}, t) + A_k(\mathbf{x}, t)] \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} [F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)], \end{aligned}$$

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|_{t \rightarrow t_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

где

$$p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) | \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \rangle.$$

В уравнении (2) мы обозначили переменные $\mathbf{x}_m, t_m$ через $\mathbf{x}, t$, а переменные $\mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}$ через $\mathbf{x}_0, t_0$.

Применяя формулу (6.15) $(m-1)$ раз, получаем соотношение

$$P_m(\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_m, t_m) = p(\mathbf{x}_m, t_m | \mathbf{x}_{m-1}, t_{m-1}) \dots p(\mathbf{x}_2, t_2 | \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1), \quad (6.16)$$

где $P(\mathbf{x}_1, t_1)$ — плотность вероятностей, определяемая уравнением (6.11) и относящаяся к одному моменту времени t_1 . Равенство (6.16) выражает многовременную плотность вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода и означает, что случайный процесс $\mathbf{x}(t)$ является марковским.

Уравнение (6.11) обычно называется *прямым уравнением Фоккера–Планка*. Легко получить и *обратное уравнение Фоккера–Планка*, которое описывает эволюцию плотностей вероятностей перехода по отношению к начальным параметрам $t_0, \mathbf{x}_0$.

Действительно, в гл. 1 ч. 1 книги было получено обратное уравнение Лиувилля (2.4) для индикаторной функции, описывающее эволюцию динамической системы в зависимости от начальных условий $t_0, \mathbf{x}_0$ и имеющее вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \quad (6.17)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Из уравнения (6.17) вытекает равенство, аналогичное (6.7):

$$\frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t_0 + 0)} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \varphi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0). \quad (6.18)$$

Усредняя теперь обратное уравнение Лиувилля (6.17) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с эффективным корреляционным тензором (6.4), используя формулу Фурутцу–Новикова (6.10) и соотношение (6.18) для вариационной производной, мы придем к обратному уравнению Фоккера–Планка (см. также, например, [15])

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \\ & = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0), \quad p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Прямое и обратное уравнения Фоккера–Планка эквивалентны. Первое более удобно для анализа эволюции статистических характеристик во времени решения задачи (6.1). Второе же более удобно для изучения статистических характеристик, связанных с начальными условиями, таких, например, как время пребывания процесса $\mathbf{x}(t)$ в какой-либо области пространства, время достижения ее границ и т. п.. В этом случае вероятность

пребывания случайного процесса $\mathbf{x}(t)$ в области пространства V определяется интегралом

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_V d\mathbf{x} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0),$$

который, согласно уравнению (6.19), описывается замкнутым уравнением

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + [v_k(\mathbf{x}_0, t_0) + A_k(\mathbf{x}_0, t_0)] \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \right) G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \\ = -F_{kl}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0; t_0) \frac{\partial^2}{\partial x_{0k} \partial x_{0l}} G(t; \mathbf{x}_0, t_0), \quad (6.20) \end{aligned}$$

$$G(t; \mathbf{x}_0, t_0) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x}_0 \in V), \\ 0 & (\mathbf{x}_0 \notin V). \end{cases}$$

Необходимо также сформулировать дополнительные краевые условия для уравнения (6.20), которые определяются характером как самой области, V так и ее границ.

6.3. Об условиях применимости уравнения Фоккера–Планка

Для оценки границ применимости уравнения Фоккера–Планка необходимо учитывать конечность радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по временной координате. В этом случае вместо уравнения для плотности вероятностей (6.11) получается уравнение

$$\hat{E}P(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x_k} S'(\mathbf{x}, t),$$

где $\hat{E}$ — оператор, стоящий в левой части уравнения (6.11), в котором величина $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$ заменена на

$$\tilde{F}_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \int_0^t dt' B_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t'),$$

а член $S'(\mathbf{x}, t)$ учитывает поправки к вектору плотности потока вероятностей, связанные с конечностью τ_0 . При $\tau_0 \rightarrow 0$ мы возвращаемся к уравнению (6.11). Таким образом, условие малости параметра τ_0/T является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для возможности описывать статистические характеристики решения уравнения (6.1) на основе приближения дельта-коррелированного случайного поля, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка. Для каждой конкретной задачи необходимо проводить более детальные исследования. Далее мы приведем физически более наглядный метод, называемый *диффузионным приближением*, также приводящий к марковости решения уравнения (6.1), но учитывающий, в определенной мере, конечность временного радиуса корреляции.

Здесь же подчеркнем, что приближение дельта-коррелированного случайного поля не означает формальной замены случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ в (6.1) на случайное поле с корреляционной функцией (6.4). Это приближение соответствует построению асимптотического разложения при стремлении временного радиуса корреляции τ_0 поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ к нулю. И при таком предельном переходе точные средние величины типа

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{x}', \tau)] \rangle$$

переходят в выражения, полученные с помощью формальной замены корреляционного тензора поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на эффективный тензор (6.4).

6.3.1. Уравнение Ланжевена. Проиллюстрируем вышесказанное на примере *уравнения Ланжевена*, допускающего полный статистический анализ [158]:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\lambda x(t) + f(t), \quad x(t_0) = 0, \quad (6.21)$$

где предполагается, что достаточно «хорошая» гладкая функция $f(t)$ — стационарный гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$\langle f(t)f(t') \rangle = B_f(t - t').$$

Для конкретной реализации случайной силы $f(t)$ решение уравнения (6.21) имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t d\tau f(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)}.$$

Следовательно, это решение $x(t)$ — также гауссов процесс с параметрами

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x(t)x(t') \rangle = \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{t'} d\tau_2 B_f(\tau_1 - \tau_2) e^{-\lambda(t+t'-\tau_1-\tau_2)}.$$

И при этом, например,

$$\langle f(t)x(t) \rangle = \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

Отметим, что одноточечная плотность вероятностей $P(x, t) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle$ для уравнения (6.21) описывается точным уравнением, вытекающем из уравнения (4.93):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} x \right) P(x, t) = \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad P(x, t_0) = \delta(x),$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -2\lambda \langle x^2(t) \rangle + 2 \int_0^{t-t_0} d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

При $t_0 \rightarrow -\infty$ процесс $x(t)$ переходит в стационарный гауссов процесс с одновременными статистическими параметрами

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}, \quad \langle f(t) x(t) \rangle = \int_0^\infty d\tau B_f(\tau) e^{-\lambda\tau}.$$

В частности, для корреляционной функции $B_f(t)$ вида

$$B_f(t) = \sigma_f^2 e^{-|t|/\tau_0}$$

получаем выражения

$$\langle x(t) \rangle = 0, \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda(1 + \lambda\tau_0)}, \quad \langle f(t) x(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{1 + \lambda\tau_0}, \quad (6.22)$$

которые при $\tau_0 \rightarrow 0$ переходят в асимптотические выражения

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda}, \quad \langle f(t) x(t) \rangle = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (6.23)$$

Умножим теперь уравнение (6.21) на $x(t)$. Считая функцию $x(t)$ достаточно «хорошей» функцией, получаем равенство

$$x(t) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t) = -\lambda x^2(t) + f(t) x(t).$$

Усредняя его по ансамблю реализаций функции $f(t)$, получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle = -\lambda \langle x^2(t) \rangle + \langle f(t) x(t) \rangle, \quad (6.24)$$

стационарное решение которого,

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle f(t) x(t) \rangle,$$

соответствующее предельному переходу $t_0 \rightarrow -\infty$ и $\tau_0 \rightarrow 0$, совпадает с равенствами (6.22), (6.23).

Учитывая, что $\delta x(t)/\delta f(t-0) = 1$, тот же результат получается для корреляции $\langle f(t) x(t) \rangle$, если использовать формулу

$$\langle f(t) x(t) \rangle = \int_{-\infty}^t d\tau B_f(t-\tau) \left\langle \frac{\delta}{\delta f(\tau)} x(t) \right\rangle \quad (6.25)$$

с «эффективной» корреляционной функцией

$$B_f^{\text{ef}}(t) = 2\sigma_f^2 \tau_0 \delta(t).$$

Как упоминалось выше, статистические характеристики решения динамических задач в приближении дельта-коррелированного случайного процесса (поля) совпадают со статистическими характеристиками марковских процессов. Однако должно быть ясно понято, что это справедливо только для статистических средних величин и уравнений для них. В частности, для уравнения Ланжевена (6.21) реализации процесса $x(t)$ и соответствующего марковского процесса совершенно различные. Последний описывается уравнением (6.21) с идеальным процессом «белого шума» $f(t)$ в правой части, с корреляционной функцией $B_f(t) = 2\sigma_f^2 \tau_0 \delta(t)$, и это уравнение должно пониматься в обобщенном смысле, так как марковские процессы в обычном смысле не дифференцируемы. В то же время процесс $x(t)$, статистические характеристики которого совпадают с характеристиками марковского процесса, — достаточно гладкая функция и дифференцируема в обычном смысле. Например,

$$x(t) \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^2(t),$$

и, в частности, при $t_0 \rightarrow -\infty$

$$\left\langle x(t) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = 0. \quad (6.26)$$

С другой стороны, для идеального марковского процесса $x(t)$, удовлетворяющего уравнению Ланжевена (6.21) в обобщенном смысле, с «белым шумом» в правой части, равенство (6.26) вообще не имеет смысла и соотношение

$$\left\langle x(t) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\lambda \langle x^2(t) \rangle + \langle f(t) x(t) \rangle \quad (6.27)$$

зависит от того, как понимаются средние значения. В самом деле, если мы определим равенство (6.27) как предел равенства

$$\left\langle x(t+\Delta) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\lambda \langle x(t) x(t+\Delta) \rangle + \langle f(t) x(t+\Delta) \rangle \quad (6.28)$$

при $\Delta \rightarrow 0$, то результат будет существенно разным в зависимости от предельных переходов $\Delta \rightarrow +0$ или $\Delta \rightarrow -0$. Так, для $\Delta \rightarrow +0$ имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \langle f(t) x(t+\Delta) \rangle = 2\sigma_f^2 \tau_0$$

и, принимая во внимание равенство (6.25), выражение (6.28) можно переписать в виде

$$\left\langle x(t+0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = \sigma_f^2 \tau_0. \quad (6.29)$$

Если же $\Delta \rightarrow -0$, то $\langle f(t) x(t-0) \rangle = 0$ из-за условия динамической причинности, и равенство (6.28) принимает вид

$$\left\langle x(t-0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle = -\sigma_f^2 \tau_0. \quad (6.30)$$

Сравнивая (6.26) с (6.29) и (6.30), видим, что для идеального марковского процесса, описываемого уравнением Ланжевена с «белым шумом», и обычно называемого *процессом Орнштейна–Уленбека*, имеет место

$$\left\langle x(t+0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle \neq \left\langle x(t-0) \frac{d}{dt} x(t) \right\rangle \neq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2(t) \rangle.$$

Отметим, что равенства (6.29) и (6.30) можно также получить из корреляционной функции

$$\langle x(t) x(t+\tau) \rangle = \frac{\sigma_f^2 \tau_0}{\lambda} e^{-\lambda|\tau|}$$

процесса $x(t)$.

В заключение обсуждения приближения дельта-коррелированного случайного процесса (поля) подчеркнем, что во всех дальнейших примерах под фразой типа «динамическая система (уравнение) с дельта-коррелированными флуктуациями параметров» подразумевается асимптотический случай, в котором временные радиусы корреляции для этих параметров малы по сравнению со всеми характерными временами, возникающими в рассматриваемой задаче.

6.4. О методах решения и анализа уравнения Фоккера–Планка

Уравнения Фоккера–Планка для одноточечной плотности вероятностей (6.11) и для плотности вероятностей перехода (6.15) относятся к параболическому типу уравнений в частных производных, и для их решения можно использовать методы теории уравнений математической физики. Основными методами при этом являются метод разделения переменных, преобразование Фурье по пространственным координатам и другие интегральные преобразования.

Однако существует лишь небольшое число уравнений Фоккера–Планка, допускающих точное решение. Это, прежде всего, уравнения Фоккера–Планка, соответствующие таким стохастическим уравнениям, которые сами допускают отыскание решения в аналитическом виде. Для таких задач зачастую удастся определить не только одноточечную плотность вероятностей и переходную плотность вероятностей, но и характеристический функционал, а также другие важные для приложений статистические характеристики.

6.4.1. Система линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений для компонент вектор-функции $\mathbf{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.31)$$

с постоянной матрицей $\mathbf{A}$. Один частный одномерный случай, который называется уравнением Ланжевена, подробно рассматривался в предыдущем разделе. Функции $f_i(t)$ будем считать гауссовыми функциями, дельта-

коррелированными во времени, т. е.

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2B_{ij} \delta(t - t').$$

Решение системы уравнений (6.31) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t d\tau e^{(t-\tau)A} \mathbf{f}(\tau),$$

и, следовательно, величина $\mathbf{x}(t)$ является гауссовой векторной функцией с параметрами (A^T — матрица, транспонированная к A):

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = e^{(t-t_0)A} \mathbf{x}_0,$$

$$\sigma_{ij}^2(t, t') = \langle [x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle][x_j(t') - \langle x_j(t') \rangle] \rangle = \int_{t_0}^t d\tau \left\{ e^{(t-t_0)A} B e^{(t'-\tau)A^T} \right\}_{ij}. \quad (6.32)$$

В этом случае, как легко видеть, гауссово распределение вероятностей с параметрами (6.32) удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка для плотности вероятностей перехода $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$, соответствующему стохастической системе (6.31):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ik} x_k \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0). \quad (6.33)$$

Отметим, что и само уравнение (6.33) также легко решается путем преобразования Фурье по пространственным координатам.

Самым простым частным случаем уравнения (6.31) является уравнение, определяющее *винеровский случайный процесс*. Учитывая особую важность в физике таких процессов (например, они описывают *броуновское движение частиц*), рассмотрим его более подробно.

Винеровский случайный процесс. Винеровский случайный процесс определяется как решение стохастического уравнения

$$\frac{d}{dt} w(t) = z(t), \quad w(0) = 0,$$

где $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный во времени процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Решение этого уравнения

$$w(t) = \int_0^t d\tau z(\tau)$$

— непрерывный гауссовый нестационарный случайный процесс с параметрами

$$\langle w(t) \rangle = 0, \quad \langle w(t)w(t') \rangle = 2\sigma^2\tau_0 \min(t, t').$$

И, следовательно, его характеристический функционал имеет структуру

$$\begin{aligned} \Phi[t; v(\tau)] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t d\tau w(\tau)v(\tau) \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left(-\sigma^2\tau_0 \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 v(\tau_1)v(\tau_2) \min(\tau_1, \tau_2) \right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Отметим, что приращение процесса $w(t)$ на интервале времени (t_1, t_2)

$$w(t_1; t_2) = w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} d\tau z(\tau),$$

подобно самому процессу $w(t)$, также имеет гауссову статистику с параметрами

$$\langle w(t_1; t_2) \rangle = 0, \quad \langle [w(t_1; t_2)]^2 \rangle = 2\sigma^2\tau_0 |t_2 - t_1|.$$

Винеровский случайный процесс $w(t)$ — гауссов непрерывный процесс с независимыми приращениями. Это означает, что для неперекрывающихся интервалов $(t_1; t_2)$ и $(t_3; t_4)$ приращения процесса $w(t)$ на этих интервалах статистически независимы.

Характеристический функционал процесса

$$w(t_0; t_0 + t) = \int_{t_0}^{t_0+t} d\tau z(\tau)$$

совпадает с характеристическим функционалом процесса $w(t)$. Это означает, что реализации процессов $w(t)$ и $w(t_0; t_0 + t)$ — статистически эквивалентны для любого заданного значения параметра t_0 . Таким образом, если мы имеем только реализации процесса, то мы не можем определить, к какому процессу они принадлежат. Статистически эквивалентны и процессы $w(t)$ и $w(-t)$, и, значит, винеровский случайный процесс обратим во времени в указанном выше смысле.

Реализациям винеровского процесса присуще еще одно — *фрактальное* — свойство. Согласно этому свойству сжатые (при $a > 1$) во времени реализации винеровского процесса $w(at)$ статистически эквивалентны растяжению по вертикали реализациям $a^{1/2}w(t)$. Фрактальное свойство винеровского процесса можно еще трактовать как свойство статистической эквивалентности реализаций $w(t)$ и сжатого по t и по вертикальной координате процесса $w(at)/a^{1/2}$, поскольку их характеристические функционалы совпадают.

Обсудим более общий процесс со сносом, зависящим от параметра α по формуле

$$w(t; \alpha) = -\alpha t + w(t), \quad \alpha > 0.$$

Процесс $w(t; \alpha)$ — марковский процесс, и его плотность вероятностей

$$P(w, t; \alpha) = \langle \delta(w(t; \alpha) - w) \rangle$$

описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial w} \right) P(w, t; \alpha) = D \frac{\partial^2}{\partial w^2} P(w, t; \alpha), \quad P(w, 0; \alpha) = \delta(w), \quad (6.35)$$

где через коэффициент диффузии обозначена величина $D = \sigma^2 \tau_0$. Его решение имеет вид гауссового распределения:

$$P(w, t; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (6.36)$$

Соответствующая интегральная функция распределения, равная вероятности того, что $w(t; \alpha) < w$, равна

$$F(w, t; \alpha) = \int_{-\infty}^w dw P(w, t; \alpha) = \Phi \left(\frac{w}{\sqrt{2Dt}} + \alpha \sqrt{\frac{t}{2D}} \right), \quad (6.37)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} \quad (6.38)$$

— интеграл вероятностей.

Дополним уравнение (6.35), помимо начального, еще и граничным условием

$$P(w, t; \alpha)|_{w=h} = 0, \quad (t > 0), \quad (6.39)$$

обрывающим реализации процесса $w(t; \alpha)$ в момент достижения ими границы h . Решение краевой задачи (6.35), (6.39), которое обозначим через $P(w, t; \alpha, h)$, описывает при $w < h$ вероятностное распределение тех реализаций процесса $w(t; \alpha)$, которые «выжили» к моменту t , т. е. за весь интервал времени ни разу не достигли границы h . Соответственно, плотность вероятностей нормирована не на единицу, а на вероятность того, что $t < t^*$, где t^* — момент первого достижения процессом $w(t; \alpha)$ границы h :

$$\int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h) = P(t < t^*). \quad (6.40)$$

Введем интегральную функцию распределения и плотность вероятностей случайного момента первого достижения границы h :

$$F(t; \alpha, h) = P(t^* < t) = 1 - P(t < t^*) = 1 - \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h), \quad (6.41)$$

$$P(t; \alpha, h) = \frac{\partial}{\partial t} F(t; \alpha, h) = -\frac{\partial}{\partial w} P(w, t; \alpha, h)|_{w=h}.$$

При $\alpha > 0$, когда процесс $w(t; \alpha)$ с ростом t в среднем сносится от границы h и при $t \rightarrow \infty$, вероятность $P(t < t^*)$ (6.40) стремится к вероятности того, что процесс $w(t; \alpha)$ никогда не достигнет границы h . Другими словами предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h) = P(w_{\max}(\alpha) < h) \quad (6.42)$$

равен вероятности того, что абсолютный максимум процесса

$$w_{\max}(\alpha) = \max_{t \in (0, \infty)} w(t; \alpha)$$

меньше h . Таким образом, из (6.42) следует, что интегральная функция распределения значений абсолютного максимума $w_{\max}(\alpha)$ равна

$$F(h; \alpha) = P(w_{\max}(\alpha) < h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^h dw P(w, t; \alpha, h). \quad (6.43)$$

Решив краевую задачу (6.35), (6.39), например, методом отражения, получим

$$P(w, t; \alpha, h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left\{ \exp \left[-\frac{(w + \alpha t)^2}{4Dt} \right] - \exp \left[-\frac{h\alpha}{D} - \frac{(w - 2h + \alpha t)^2}{4Dt} \right] \right\}. \quad (6.44)$$

Подставив это выражение в (6.41), найдем плотность вероятностей момента t^* первого достижения процессом $w(t; \alpha)$ границы h :

$$P(t; \alpha, h) = \frac{1}{2Dt\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(h + \alpha t)^2}{4Dt} \right\}.$$

Наконец, интегрируя (6.44) по w и устремив $t \rightarrow \infty$, получим, согласно (6.43), интегральную функцию распределения значений абсолютного максимума $w_{\max}(\alpha)$ процесса $w(t; \alpha)$ в виде [51, 160]

$$F(h; \alpha) = P(w_{\max}(\alpha) < h) = 1 - \exp \left\{ -\frac{h\alpha}{D} \right\}. \quad (6.45)$$

Следовательно, абсолютный максимум винеровского процесса имеет экспоненциальную плотность вероятностей:

$$P(h; \alpha) = \langle \delta(w_{\max}(\alpha) - h) \rangle = \frac{\alpha}{D} \exp \left\{ -\frac{h\alpha}{D} \right\}.$$

С помощью винеровского случайного процесса можно конструировать различные другие процессы, удобные для моделирования различных физических явлений. Для положительных величин такой простейшей аппроксимацией является логарифмически нормальный (логнормальный) процесс, который мы и рассмотрим более подробно.

Логарифмически нормальный процесс. Определим логнормальный случайный процесс по формуле

$$y(t; \alpha) = e^{w(t; \alpha)} = \exp \left\{ -\alpha t + \int_0^t d\tau z(\tau) \right\}, \quad (6.46)$$

где $z(t)$ — гауссов процесс «белого шума» с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Он описывается стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} y(t; \alpha) = \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1.$$

Одновременная плотность вероятностей логнормального процесса

$$P(y, t; \alpha) = \left\langle \delta \left(e^{w(t; \alpha)} - y \right) \right\rangle = \frac{1}{y} P(w, t; \alpha)|_{w=\ln y},$$

где $P(w, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей винеровского процесса со сносом, описываемая равенством (6.36), и, следовательно,

$$P(y, t; \alpha) = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{(\ln y + \alpha t)^2}{4Dt} \right\} = \frac{1}{2y\sqrt{\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 (ye^{\alpha t})}{4Dt} \right\}, \quad (6.47)$$

где параметр $D = \sigma^2 \tau_0$. Графики логарифмически нормальной плотности вероятностей (6.47) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = Dt = 0.1$ и 1 приведены на рис. 3.1. Характерной особенностью этих графиков является появление длинного пологого «хвоста» при $\tau = 1$, означающего усиление роли больших выбросов процесса $y(t; \alpha)$ в формировании одновременной статистики. Соответственно, интегральная функция распределения, согласно (6.37), (6.38), определяется выражением

$$\begin{aligned} F(y, t; \alpha) &= P(y(t; \alpha) < y) = \\ &= \Phi \left(\frac{\ln (ye^{\alpha t})}{\sqrt{2Dt}} \right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

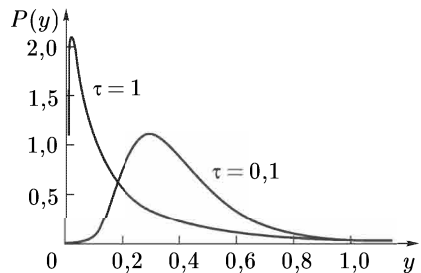


Рис. 3.1. Логарифмически нормальная плотность вероятностей (6.47) для значения параметра $\alpha/D = 1$ и безразмерного времени $\tau = 0,1$ и 1

Зная только одноточечные статистические характеристики процесса $y(t; \alpha)$, можно получить важную информацию о поведении реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времен $(0, \infty)$. В частности:

1. Зная интегральную функцию распределения, можно вычислить типичную реализацию логнормального процесса $y(t; \alpha)$ (см. гл. 3), которая оказывается экспоненциально спадающей кривой [51, 160]

$$y^*(t; \alpha) = e^{-\alpha t}. \quad (6.49)$$

2. Логнормальный процесс $y(t; \alpha)$ является марковским процессом, и его одновременная плотность вероятностей (6.47) описывается уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(y, t; \alpha) = D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} P(y, t; \alpha), \quad P(y, 0; \alpha) = \delta(y - 1). \quad (6.50)$$

Исходя из уравнения (6.50) легко написать уравнения для моментных функций процесса $y(t; \alpha)$, решения которых определяются равенствами

$$\langle y^n(t; \alpha) \rangle = e^{n(n-\alpha/D)Dt}, \quad \left\langle \frac{1}{y^n(t; \alpha)} \right\rangle = e^{n(n+\alpha/D)Dt}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.51)$$

и экспоненциально растут во времени. Следовательно, экспоненциальный рост моментов обусловлен выбросами процесса $y(t; \alpha)$ относительно кривой типичной реализации $y^*(t; \alpha)$ как в сторону больших, так и малых значений y .

Для значения параметра $\alpha/D = 1$ среднее значение процесса $y(t; D)$ не зависит от времени и равно единице. При этом, однако, вероятность выполнения неравенства $y < 1$ при $Dt \gg 1$, согласно (6.48), быстро стремится к единице по закону

$$P(y(t; D) < 1) = \Phi\left(\sqrt{\frac{Dt}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-Dt/4},$$

т. е. подавляющее время графики реализаций процесса лежат ниже уровня его среднего значения $\langle y(t; D) \rangle = 1$, хотя статистические моменты процесса $y(t; D)$, в основном, определяются его большими выбросами.

Таким образом, мы имеем явное противоречие между характером поведения статистических характеристик процесса $y(t; \alpha)$ и его реализаций.

3. Поведение реализаций процесса $y(t; \alpha)$ на всем интервале времени можно также оценить с помощью p -мажорантных кривых $M_p(t, \alpha)$, которые определим следующим образом [51, 160]. Назовем мажорантной кривой такую кривую $M_p(t, \alpha)$, для которой при любом времени t с вероятностью p выполняется неравенство $y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha)$, т. е.

$$P\{y(t; \alpha) < M_p(t, \alpha) \quad \text{для всех} \quad t \in (0, \infty)\} = p.$$

Полученная выше статистика абсолютного максимума (6.45) винеровского процесса со сносом $w(t; \alpha)$ позволяет указать достаточно богатый

класс мажорантных кривых. В самом деле, пусть вероятность того, что абсолютный максимум $w_{\max}(\beta)$ вспомогательного процесса $w(t; \beta)$ с произвольным значением параметра β , лежащим в пределах $0 < \beta < \alpha$, удовлетворяет неравенству $w(t; \beta) < h = \ln A$, равна p . Тогда, очевидно, с той же вероятностью p вся реализация процесса $y(t; \alpha)$ будет лежать ниже мажорантной кривой

$$M_p(t, \alpha, \beta) = A e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (6.52)$$

Как видно из (6.45), вероятность, с которой процесс $y(t; \alpha)$ нигде не превышает мажорантной кривой (6.52), следующим образом зависит от ее параметров:

$$p = 1 - A^{-\beta/D},$$

и, следовательно, мы получаем однопараметрический класс экспоненциально спадающих мажорантных кривых

$$M_p(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{(1-p)^{D/\beta}} e^{(\beta - \alpha)t}. \quad (6.53)$$

Обратим внимание на тот замечательный факт, что, несмотря на постоянство статистического среднего $\langle y(t; D) \rangle = 1$ и экспоненциальный рост высших моментов процесса $y(t; D)$, всегда можно указать экспоненциально спадающую мажорантную кривую (6.53), ниже которой будут лежать реализации процесса $y(t; D)$ с любой наперед заданной вероятностью $p < 1$. В частности, например, с вероятностью $p = 1/2$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} y(t; D) &< M_{1/2}(t, D, D/2) = \\ &= 4e^{-Dt/2} \end{aligned} \quad (6.54)$$

для любого момента времени t из интервала $(0, \infty)$. Схематическое поведение реализации процесса $y(t; D)$ и мажорантной кривой (6.54) приведено на рис. 3.2. Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что экспоненциальный рост моментов процесса $y(t; D)$ во времени — эффект чисто статистический, обусловленный усреднением по всему ансамблю реализаций.

Отметим, что площадь под экспоненциально убывающими мажорантными кривыми конечна. Следовательно, большие выбросы процесса $y(t; \alpha)$, вызывая экспоненциальный рост

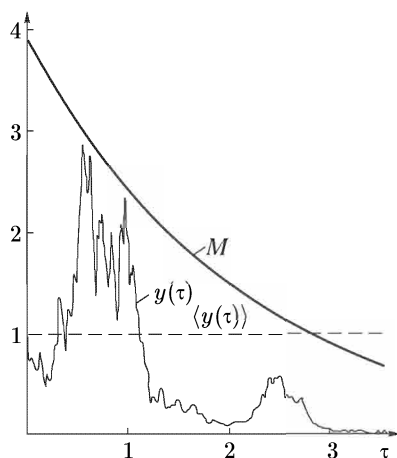


Рис. 3.2. Схематическое поведение реализации процесса $y(t; D)$ и мажорантной кривой (6.54)

высших моментов, не вносят существенного вклада в площадь под реализациями, которая практически для всех реализаций также конечна, т.е. выбросы логнормального процесса $y(t; \alpha)$ достаточно узки.

4. В связи со сказанным представляется интересным исследовать непосредственно статистику случайной площади под реализациями процесса $y(t; \alpha)$:

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau y^n(\tau; \alpha). \quad (6.55)$$

Эта функция описывается системой стохастических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_n(t; \alpha) &= y^n(t; \alpha), \quad S_n(0; \alpha) = 0, \\ \frac{d}{dt} y(t; \alpha) &= \{-\alpha + z(t)\} y(t; \alpha), \quad y(0; \alpha) = 1, \end{aligned} \quad (6.56)$$

и, следовательно, двухкомпонентный процесс $\{y(t; \alpha), S_n(t; \alpha)\}$ является марковским процессом, одновременная плотность вероятностей которого

$$P(S_n, y, t; \alpha) = \langle \delta(S_n(t; \alpha) - S_n) \delta(y(t; \alpha) - y) \rangle,$$

также, как и плотность вероятностей перехода, описываются уравнением Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + y^n \frac{\partial}{\partial S_n} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} y \right) P(S_n, y, t; \alpha) &= D \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial}{\partial y} y P(S_n, y, t; \alpha), \\ P(S_n, y, 0; \alpha) &= \delta(S_n) \delta(y - 1). \end{aligned} \quad (6.57)$$

К сожалению, решить уравнение (6.57) не удастся, и, следовательно, невозможно изучить полную статистику процесса $S_n(t; \alpha)$. Однако если интересоваться только одновременными статистическими средними процесса $S_n(t; \alpha)$, т.е. для фиксированного момента времени, то их можно изучить достаточно полно [51, 160].

Для этого перепишем выражение (6.55) в виде интеграла:

$$\begin{aligned} S_n(t; \alpha) &= \int_0^t d\tau \exp\left(-n\alpha\tau + n \int_0^\tau d\tau_1 z(\tau_1)\right) = \\ &= \int_0^t d\tau \exp\left(-n\alpha(t - \tau) + n \int_0^{t-\tau} d\tau_1 z(t - \tau - \tau_1)\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для одновременной статистики величина $S_n(t; \alpha)$ статистически эквивалентна величине

$$S_n(t; \alpha) = \int_0^t d\tau \exp\left(-n\alpha(t - \tau) + n \int_0^{t-\tau} d\tau_1 z(\tau + \tau_1)\right). \quad (6.58)$$

Дифференцируя теперь (6.58) по времени, получаем статистически эквивалентное стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt} S_n(t; \alpha) = 1 - n\{\alpha - z(t)\} S_n(t; \alpha), \quad S_n(0; \alpha) = 0,$$

статистические характеристики которого описываются для одновременной плотности вероятностей $P(S_n, t; \alpha) = \langle \delta(S_n(t; \alpha) - S_n) \rangle$ уравнением Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S_n} - n\alpha \frac{\partial}{\partial S_n} S_n \right) P(S_n, t; \alpha) = n^2 D \frac{\partial}{\partial S_n} S_n \frac{\partial}{\partial S_n} S_n P(S_n, y, t; \alpha). \quad (6.59)$$

Из (6.59) видно, что существует стационарная плотность вероятностей для случайных интегралов $S_n(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y^n(\tau; \alpha)$:

$$P(S_n; \alpha) = \frac{1}{(n^2 D)^{\alpha/nD} \Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right) S_n^{1+\alpha/D}} \exp\left\{-\frac{1}{n^2 D S_n}\right\},$$

где $\Gamma(z)$ — Гамма-функция. В частности, при $n = 1$ для величины

$$S(\alpha) = S_1(\alpha) = \int_0^\infty d\tau y(\tau; \alpha)$$

имеем

$$P(S; \alpha) = \frac{1}{D^{\alpha/D} \Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right) S^{1+\alpha/D}} \exp\left\{-\frac{1}{DS}\right\}. \quad (6.60)$$

Если теперь и параметр $\alpha = D$, то стационарная плотность вероятностей и соответствующая ей интегральная функция распределения имеют вид:

$$P(S; D) = \frac{1}{DS^2} \exp\left\{-\frac{1}{DS}\right\}, \quad F(S; D) = \exp\left\{-\frac{1}{DS}\right\}. \quad (6.61)$$

Дополнительную информацию о динамике поведения реализаций процесса $y(t; \alpha)$ во времени несет зависимость вероятностного распределения случайного процесса

$$\tilde{S}(t, \alpha) = \int_t^\infty d\tau y(\tau; \alpha) \quad (6.62)$$

от времени t . Интеграл в правой части (6.62) можно представить в виде

$$\tilde{S}(t, \alpha) = y(t; \alpha) \int_0^\infty d\tau \exp\left\{-\alpha\tau + \int_0^\tau d\tau_1 z(\tau_1 + t)\right\}. \quad (6.63)$$

Случайный процесс $y(t; \alpha)$ в (6.63) статистически не зависит от интеграла, стоящего в правой части (6.63), так как они функционально зависят от случайного процесса $z(\tau)$ в не перекрывающихся интервалах значений τ ,

и, при этом, сам интеграл статистически эквивалентен случайной величине $S(\alpha)$. Следовательно, одноточечная плотность вероятностей для случайного процесса $\tilde{S}(t, \alpha)$ $P(\tilde{S}, t; \alpha) = \left\langle \delta \left(\tilde{S}(t; \alpha) - \tilde{S} \right) \right\rangle$ описывается выражением

$$P(\tilde{S}, t; \alpha) = \int_0^\infty \int_0^\infty dy dS \delta(yS - \tilde{S}) P(y, t; \alpha) = \int_0^\infty \frac{dy}{y} P(y, t; \alpha) P(\tilde{S}/y; \alpha), \quad (6.64)$$

где $P(y, t; \alpha)$ — одновременная плотность вероятностей логнормального процесса $y(t; \alpha)$, описываемая формулой (6.47), а $P(\tilde{S}/y; \alpha)$ — плотность вероятностей для площади (6.60).

Соответствующая интегральная функция распределения

$$F(\tilde{S}, t; \alpha) = P \left(P(\tilde{S}, t; \alpha) < \tilde{S} \right) = \int_0^{\tilde{S}} d\tilde{S} P(\tilde{S}, t; \alpha)$$

будет описываться интегралом

$$F(\tilde{S}, t; \alpha) = \int_0^\infty dy P(y, t; \alpha) F(\tilde{S}/y; \alpha),$$

где $F(S; \alpha)$ — интегральная функция распределения для случайной площади $S(t; \alpha)$. В частности, для значения параметра $\alpha = D$, согласно (6.47) и (6.61), получаем выражение

$$F(\tilde{S}, t; \alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^\infty \frac{dy}{y} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(ye^{Dt})}{4Dt} - \frac{y}{D\tilde{S}} \right\},$$

и вероятность выполнения неравенства $\tilde{S}(t; \alpha) < \tilde{S}$ с ростом Dt монотонно стремится к единице для любого наперед заданного значения $D\tilde{S}$. Это еще раз свидетельствует о стремлении каждой отдельной реализации логнормального процесса к нулю при увеличении Dt , несмотря на экспоненциальный рост моментных функций процесса $y(t; \alpha)$, обусловленный большими выбросами.

6.4.2. Интегральные преобразования. Весьма мощным методом решения уравнения Фоккера–Планка является метод, основанный на использовании интегральных преобразований. Так, как указывалось ранее, если тензор коэффициентов диффузии $F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t)$ в (6.11) не зависит от $\mathbf{x}$, то можно использовать интегральное преобразование Фурье. В других случаях используются интегральные преобразования, связанные с собственными функциями диффузионного оператора

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}; t).$$

Например, для оператора Лежандра

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x}$$

естественно воспользоваться интегральным преобразованием, связанным с функциями Лежандра. Это преобразование называется *преобразованием Меллера–Фока* (см., например, [27]) и определяется посредством интеграла

$$F(\mu) = \int_1^{\infty} dx f(x) P_{-1/2+i\mu}(x) \quad (\mu > 0), \quad (6.65)$$

где $P_{-1/2+i\mu}(x)$ — функция Лежандра первого рода, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_{-1/2+i\mu}(x) = -\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) P_{-1/2+i\mu}(x). \quad (6.66)$$

Формула обращения для преобразования (6.65) имеет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} d\mu \mu \tanh(\pi\mu) F(\mu) P_{-1/2+i\mu}(x) \quad (1 \leq x \leq \infty), \quad (6.67)$$

где $F(\mu)$ описывается формулой (6.65).

Другое интегральное преобразование, называемое интегральным *преобразованием Канторовича–Лебедева* (см., например, [27]), связано с диффузионным оператором $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ и имеет вид

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} dx f(x) K_{i\tau}(x) \quad (\tau > 0),$$

где $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда первого рода, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 + \tau^2 \right) K_{i\tau}(x) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} - x \frac{d}{dx} \right) K_{i\tau}(x) &= (x^2 - \tau^2) K_{i\tau}(x). \end{aligned} \quad (6.68)$$

Формула обращения при этом имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^{\infty} d\tau \sinh(\pi\tau) F(\tau) K_{i\tau}(x). \quad (6.69)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим уравнение Фоккера–Планка ($x \geq 1$)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x_0, t_0) = D \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x_0, t_0), \quad (6.70)$$

$$p(x, t_0 | x_0, t_0) = \delta(x - x_0).$$

Введем обозначение

$$p(t, \mu) = \int_1^{\infty} dx p(x, t | x_0, t_0) P_{-1/2+i\mu}(x).$$

Умножая теперь уравнение (6.70) на $P_{-1/2+i\mu}(x)$ и интегрируя по x в пределах от 1 до ∞ , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, \mu) = D \int_1^{\infty} dx P_{-1/2+i\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t | x_0, t_0) \quad (6.71)$$

с начальным условием

$$p(t_0, \mu) = P_{-1/2+i\mu}(x_0). \quad (6.72)$$

Интегрируя дважды по частям в правой части (6.71) и используя дифференциальное уравнение Лежандра для $P_{-1/2+i\mu}(x)$ (6.66), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $p(t, \mu)$:

$$\frac{d}{dt} p(t, \mu) = -D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) p(t, \mu),$$

решение которого с начальным условием (6.72) имеет вид

$$p(t, \mu) = P_{-1/2+i\mu}(x_0) e^{-D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0)}.$$

Используя теперь формулу обращения (6.67), получаем запись решения уравнения (6.70) в виде интеграла Меллера–Фока:

$$p(x, t | x_0, t_0) = \int_0^{\infty} d\mu \mu \tanh(\pi\mu) e^{-D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0)} P_{-1/2+i\mu}(x) P_{-1/2+i\mu}(x_0). \quad (6.73)$$

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина $x_0 = 1$, то мы получаем выражение

$$P(x, t) = \int_0^{\infty} d\mu \mu \tanh(\pi\mu) e^{-D \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) (t - t_0)} P_{-1/2+i\mu}(x), \quad (6.74)$$

соответствующее решению уравнению Фоккера–Планка для одноточечной плотности вероятностей (6.70) с начальным условием

$$P(x, 0) = \delta(x - 1).$$

6.4.3. Стационарные решения уравнения Фоккера–Планка. Выше мы говорили об общих методах решения уравнения Фоккера–Планка как для плотности вероятностей перехода, так и для одноточечной плотности вероятностей. Задача о нахождении одноточечной плотности вероятностей, однако, может иметь и специфические черты, связанные с возможностью существования стационарного решения, которое в ряде случаев удается

найти непосредственно. Это стационарное решение, если оно существует, не зависит от начальных условий и представляет предельное при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения Фоккера–Планка.

Существуют два класса задач, для которых стационарное решение уравнения Фоккера–Планка находится легко. Это, во-первых, случай одномерных нелинейных уравнений и, во-вторых, случай гамильтоновых систем уравнений. Рассмотрим эти случаи более подробно.

Одномерное нелинейное уравнение. Одномерные нелинейные системы с флуктуирующими параметрами описываются стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + z(t)g(x), \quad x(0) = x_0, \quad (6.75)$$

где, как и ранее, $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)z(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (D = \sigma_z^2\tau_0).$$

Соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right) P(x, t) = D \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) P(x, t). \quad (6.76)$$

Стационарное распределение вероятностей $P(x)$, если оно существует, удовлетворяет уравнению

$$f(x)P(x) = Dg(x) \frac{d}{dx} g(x) P(x) \quad (6.77)$$

(мы считаем, что $P(x)$ сосредоточено во всей области пространства, т. е. $-\infty < x < \infty$), решение которого таково:

$$P(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp \left\{ \frac{1}{D} \int dx \frac{f(x)}{g^2(x)} \right\}, \quad (6.78)$$

где постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1.$$

В частном случае уравнения Ланжевена (6.21) ($f(x) = -\lambda x$, $g(x) = 1$) выражение (6.78) принимает вид гауссового распределения вероятностей:

$$P(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi D}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2D} x^2 \right\}. \quad (6.79)$$

Гамильтоновы системы. Другой тип уравнений, позволяющий получать стационарное распределение вероятностей, описывается гамильтоновой системой с линейным трением:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}_i(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}), \\ \frac{d}{dt}\mathbf{p}_i(t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) - \lambda \mathbf{p}_i + \mathbf{f}_i(t),\end{aligned}\tag{6.80}$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, а функция Гамильтона

$$H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

λ — постоянный коэффициент (трение), а случайные силы $\mathbf{f}_i(t)$ — гауссовы дельта-коррелированные случайные векторные функции с тензором корреляций

$$\langle f_i^\alpha(t) f_j^\beta(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'), \quad D = \sigma_f^2 \tau_0.\tag{6.81}$$

Здесь α и β — векторные индексы.

Система уравнений (6.80) описывает броуновское движение системы N взаимодействующих частиц. Уравнение Фоккера–Планка для совместной плотности вероятностей решения системы (6.80) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t) + \sum_{k=1}^N \{H, P\}_{(k)} - \lambda \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} \{\mathbf{p}_k P\} = \\ = D \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}_k^2} P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}, t),\end{aligned}\tag{6.82}$$

где

$$\{\varphi, \psi\}_{(k)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}_k}$$

— скобка Пуассона для k -ой частицы.

Легко проверить, что стационарное решение уравнения (6.82) имеет вид *канонического распределения Гиббса*:

$$P(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(\{\mathbf{r}_i\}, \{\mathbf{p}_i\}) \right\}.\tag{6.83}$$

Характерной чертой этого распределения является гауссовость по импульсным переменным и статистическая независимость координат и импульсов частиц.

Проинтегрировав (6.83) по всем $\mathbf{r}$, можно получить *максвелловское распределение* по скоростям, описывающие флуктуации скорости броуновских частиц. Случай $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$ соответствует описанию броуновского движения свободных частиц (6.79).

Если проинтегрировать распределение вероятностей (6.83) по импульсам (скоростям), то получаем *больцмановское распределение* по координатам частицы:

$$P(\{\mathbf{r}_i\}) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} U(\{\mathbf{r}_i\}) \right\}. \quad (6.84)$$

При достаточно большом коэффициенте трения равновесное распределение (6.83) устанавливается в две стадии. Сперва достаточно быстро устанавливается гауссово распределение по импульсам (максвелловское распределение), а затем уже значительно медленнее устанавливается распределение по пространственной координате (больцмановское распределение). Последняя стадия описывается при этом стохастическим уравнением, вытекающем из (6.80):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i(t) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U(\{\mathbf{r}_i\}) + \frac{1}{\lambda} \mathbf{f}_i(t),$$

и соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\mathbf{r}_i\}, t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} \left(\frac{\partial U(\{\mathbf{r}_i\})}{\partial \mathbf{r}_k} P(\{\mathbf{r}_i\}, t) \right) + \frac{D}{\lambda^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}_k^2} P(\{\mathbf{r}_i\}, t), \quad (6.85)$$

которое обычно называется *уравнением Эйнштейна–Смолуховского*. Переход от уравнения Фоккера–Планка (6.82) к уравнению (6.85) обычно называется *проблемой Крамерса* (см., например, [80]).

В одномерном случае уравнения (6.80) упрощаются и принимают вид системы уравнений

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) - \lambda y(t) + f(t), \quad (6.86)$$

стационарное распределение вероятностей для которой имеет вид

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(x, y) \right\}, \quad H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x). \quad (6.87)$$

Системы гидродинамического типа. Отметим, что система уравнений (6.86) может возникать и в задачах, не имеющих никакого отношения к броуновскому движению.

Рассмотрим, в качестве примера, простейшую систему гидродинамического типа, описываемую стохастической системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0(t) &= -v_1^2(t) - v_0(t) + R + f(t), \\ \frac{d}{dt} v_1(t) &= v_0(t)v_1(t) - v_1(t). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Эта система описывает движение триплета (гироскопа) с линейным трением, возбуждаемого силой, действующей на неустойчивую моду, имеющей как регулярную составляющую R , так и случайную $f(t)$.

Если $R < 1$, то в отсутствие случайной составляющей силы $f(t) = 0$ имеется устойчивое стационарное решение

$$v_1 = 0, \quad v_0 = R \quad (6.89)$$

и флуктуации компоненты $v_0(t)$ под действием случайной силы будут описываться стохастическим уравнением

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) = -\tilde{v}_0(t) + f(t) \quad (\tilde{v}_0(t) = v_0(t) - R). \quad (6.90)$$

Таким образом, при $R < 1$ стационарное распределение вероятностей для компоненты $\tilde{v}_0(t)$, согласно (6.79), будет гауссовым.

Иначе дело обстоит при $R > 1$. В этом случае при $f(t) = 0$ имеются два устойчивых состояния равновесия

$$v_0 = 1, \quad v_1 = \pm \sqrt{R-1}. \quad (6.91)$$

Представим компоненту $v_0(t)$ в виде $v_0(t) = 1 + \tilde{v}_0(t)$. Тогда система уравнений (6.88) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) &= -v_1^2(t) - \tilde{v}_0(t) + (R-1) + f(t), \\ \frac{d}{dt} v_1(t) &= \tilde{v}_0(t) v_1(t) \end{aligned} \quad (6.92)$$

и эволюция компоненты $v_1(t)$ определяется ее начальным значением. Если $v_1(0) > 0$, то и $v_1(t) > 0$. Представляя в этом случае $v_1(t)$ как

$$v_1(t) = e^{\varphi(t)},$$

систему уравнений (6.92) можно записать в гамильтоновом виде (6.86):

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}_0(t) = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} - \tilde{v}_0(t) + f(t), \quad \frac{d}{dt} \varphi(t) = \tilde{v}_0(t), \quad (6.93)$$

где

$$U(\varphi) = \frac{1}{2} e^{2\varphi} - (R-1)\varphi.$$

Здесь переменная $\varphi(t)$ играет роль координаты частицы, а переменная $v_0(t)$ — ее скорости. На рис. 3.3 сплошной линией изображено поведение функции $U(\varphi)$. Эта функция имеет минимум $U(\varphi_0) = \frac{1}{2}(R-1)[1 - \ln(R-1)]$ в точке $\varphi_0 = \ln \sqrt{R-1}$, соответствующий устойчивому положению равновесия $v_1 = \sqrt{R-1}$. Таким образом, стационарное распределение вероятностей для $\varphi(t)$ и $\tilde{v}_0(t)$ аналогично распределению Гиббса (6.87):

$$\begin{aligned} P(\tilde{v}_0, \varphi) &= C \exp \left\{ -\frac{1}{D} H(\tilde{v}_0, \varphi) \right\}, \\ H(\tilde{v}_0, \varphi) &= \frac{\tilde{v}_0^2}{2} + U(\varphi). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Из формулы (6.94) следует, что при $R > 1$ стационарное распределение

вероятностей для компоненты $v_0(t)$ системы уравнений (6.88) будет гауссовым:

$$P(v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp \left\{ -\frac{(v_0 - 1)^2}{2D} \right\},$$

а распределение вероятностей для величины $\varphi(t)$ не является гауссовым, и они не коррелируют между собой. Возвращаясь к переменной $v_1(t)$, получаем для нее стационарное распределение вероятностей в виде

$$P(v_1) = \text{const } v_1^{\frac{R-1}{D}-1} \exp \left\{ -\frac{v_1^2}{2D} \right\}. \quad (6.95)$$

При критическом режиме ($R = 1$), как видно из (6.95), не существует стационарного распределения вероятностей для компоненты $v_1(t)$. Отметим, что включение дополнительной случайной силы, действующей на компоненту $v_1(t)$, приводит к существованию стационарной плотности вероятностей и при критическом режиме. В этом случае интенсивность флуктуаций компоненты $v_1(t)$ возрастает и, например, $\langle v_1^2(t) \rangle \sim \sqrt{D}$ (см., например, [38]).

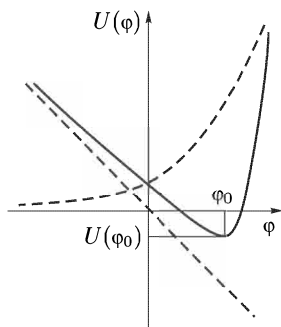


Рис. 3.3. График зависимости потенциальной функции $U(\varphi)$. Штриховыми линиями обозначены кривая $U(\varphi) = \exp\{2\varphi\}/2$ и прямая $U(\varphi) = -(R-1)\varphi$

6.4.4. Краевые задачи для уравнения Фоккера–Планка (статистическое описание явления переброса). Уравнения Фоккера–Планка являются уравнениями в частных производных и для них, вообще говоря, необходимо ставить краевые условия, в зависимости от того, какие задачи рассматриваются. При этом можно исходить как из прямого уравнения Фоккера–Планка, так и из обратного, которые эквивалентны друг другу. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Явление переброса в регулярных системах. Рассмотрим нелинейный осциллятор с трением, описываемый уравнением

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) \quad (\beta, \lambda > 0), \quad (6.96)$$

где случайную силу $f(t)$ считаем гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = 2D \delta(t - t') \quad (D = \sigma_f^2 \tau_0).$$

При $\lambda = 0$ и $f(t) = 0$ это уравнение называется *уравнением Дюффинга*.

Уравнение (6.96) можно переписать в стандартной форме гамильтоновой системы для функций $x(t)$ и $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\partial}{\partial v} H(x, v), \quad \frac{d}{dt} v(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x, v) - \lambda v + f(t),$$

где функция Гамильтона

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x), \quad U(x) = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}.$$

Стационарное решение соответствующего уравнения Фоккера–Планка, согласно (6.87), имеет вид

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} H(x, v) \right\}. \quad (6.97)$$

Из вида этого распределения ясно, что стационарное распределение вероятностей для $v(t)$ является гауссовым, а распределение вероятностей для величины $x(t)$ негауссово, и они не коррелируют между собой. Интегрируя (6.97) по v , получаем стационарное распределение вероятностей для $x(t)$:

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} \left(\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right) \right\}.$$

Это распределение имеет максимум в точке $x = 0$, соответствующей положению устойчивого равновесия.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) - \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) \quad (\beta, \lambda > 0). \quad (6.98)$$

В этом случае стационарное распределение вероятностей имеет тот же вид (6.97), где

$$H(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x), \quad U(x) = -\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4}.$$

Стационарное распределение вероятностей для величины $x(t)$ теперь имеет вид

$$P(x, v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda}{D} \left(-\frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} \right) \right\}, \quad (6.99)$$

максимумы в точках $x = \pm \sqrt{\omega_0^2 / \beta}$ и минимум в точке $x = 0$, соответствующих устойчивым и неустойчивой точкам равновесия задачи (6.98) при $f(t) = 0$. Распределение вероятностей (6.99) изображено на рис. 3.4, а. При этом, как указывалось ранее, установление распределения (6.99) описывается уравнением Эйнштейна–Смолуховского (6.85), которое в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} P(x, t) \right) + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (6.100)$$

которому статистически эквивалентно динамическое уравнение

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial U(x)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda} f(t). \quad (6.101)$$

Распределение вероятностей (6.99) соответствует усреднению по ансамблю реализаций случайного процесса $f(t)$. Если же имеется одна реализация, то система с вероятностью $1/2$ придет в одно из положений, соответствующих максимуму распределения. В этом случае будет формироваться распределение вероятностей (усреднение по времени) в окрестности положения максимума. Однако благодаря существованию достаточно больших значений функции $f(t)$ система будет переброшена из окрестности одного максимума в окрестность другого максимума за время T (тем большего, чем меньше D). Таким образом, распределение вероятностей (6.100) будет формироваться только за время $t \gg T$.

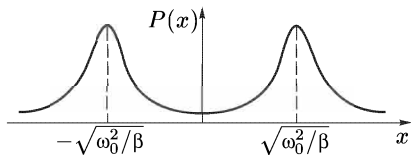


Рис. 3.4. Распределение вероятностей (6.99)

Вводя безразмерные координату $x \rightarrow x\sqrt{\omega_0^2/\beta}$ и время $t \rightarrow t(\lambda/\omega_0^2)$ уравнение (6.100) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} P(x, t) \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (6.102)$$

где

$$\mu = \frac{\beta D}{\lambda \omega_0^4}, \quad U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

При этом эквивалентное стохастическое уравнение (6.101) принимает вид уравнения (1.10) гл. 1 книги:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + f(t). \quad (6.103)$$

Оценим время, за которое система перейдет из одного наиболее вероятного состояния ($x = -1$) в другое ($x = 1$).

Пусть в момент времени t_0 система, описываемая стохастическим уравнением (6.103), находилась в точке внутри интервала (a, b) . Соответствующая вероятность выхода из этого интервала

$$G(t; x_0, t_0) = 1 - \int_a^b dx p(x, t | x_0, t_0)$$

описывается уравнением (6.20), вытекающим из обратного уравнения Фоккера–Планка (6.19), т. е. уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G(t; x_0, t_0) = \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} G(t; x_0, t_0) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} G(t; x_0, t_0)$$

с краевыми условиями

$$G(t; x_0, t) = 0, \quad G(t; a, t_0) = G(t; b, t_0) = 1.$$

Учитывая, что в нашей задаче $G(t; x_0, t_0) = G(t - t_0; x_0)$, эту краевую задачу можно переписать в виде краевой задачи $(t - t_0) = \tau$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau; x_0) &= \frac{\partial U(x_0)}{\partial x_0} \frac{\partial}{\partial x_0} G(\tau; x_0) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} G(\tau; x_0), \\ G(0; x_0) &= 0, \quad G(\tau; a,) = G(\tau; b) = 1 \quad \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau; x_0) = 0 \right). \end{aligned} \quad (6.104)$$

Из (6.104) легко видеть, что среднее время выхода системы из интервала (a, b)

$$T(x_0) = \int_0^\infty d\tau \tau \frac{\partial G(\tau; x_0)}{\partial \tau}$$

удовлетворяет краевой задаче

$$\mu \frac{d^2 T(x_0)}{dx_0^2} - \frac{dU(x_0)}{dx_0} \frac{dT(x_0)}{dx_0} = -1, \quad T(a) = T(b) = 0. \quad (6.105)$$

Уравнение (6.105) легко решается, и мы получаем для среднего времени перехода системы под действием случайных сил из состояния $x_0 = -1$ в состояние $x_0 = 1$, которое обычно называется *временем Крамерса*, выражение

$$T = \frac{1}{\mu} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-\infty}^{\xi} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{\mu} [U(\xi) - U(\eta)] \right\} = \frac{C(\mu)}{\mu} \int_0^1 d\xi \exp \left\{ \frac{1}{\mu} U(\xi) \right\}, \quad (6.106)$$

где $C(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{\frac{1}{\mu} U(\xi)}$. При $\mu \ll 1$

$$T \approx \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{4\mu}},$$

т. е. среднее время перехода растет экспоненциально с уменьшением интенсивности флуктуаций силы.

Замечание 6.1. *Стохастический резонанс.*

Наряду со стохастическим уравнением Дюффинга (6.98), в последнее время уделяется большое внимание уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \lambda \frac{d}{dt} x(t) - \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = f(t) + A \cos \omega_0 t \quad (\beta, \lambda > 0)$$

и, в частности, анализу влияния дополнительного (кроме шумового) периодического воздействия на статистические характеристики решения уравнения (6.98) (см., например, обзорные работы [4] и [34]). При этом в ряде случаев наблюдается явление, которое обычно называется стохастическим резонансом. Термин «резонанс» имеет здесь, однако, нестандартный физический смысл. Он отражает немонотонную («резонансную») зависимость отклика нелинейного стохастического осциллятора на внешнее воздействие

от интенсивности стохастического шума $f(t)$. И такой стохастический «резонанс» для указанной задачи наблюдается при совпадении частоты периодического сигнала ω_0 с частотой переброса между двумя устойчивыми состояниями $\omega \sim 1/T$, которая называется частотой Крамерса. ♦

Явление переброса в сингулярных системах. Рассмотрим теперь стохастическую задачу с сингулярными особенностями, описываемую уравнением (1.14) гл. 1 книги, которое запишем в виде ($\lambda = 1$)

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x^2(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.107)$$

где будем считать случайный процесс $f(t)$, как и ранее, гауссовым дельта-коррелированным во времени процессом с параметрами

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (D = \sigma_f^2 \tau_0).$$

При отсутствии флуктуаций решение задачи (6.107) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{t - t_0}, \quad t_0 = -\frac{1}{x_0}.$$

Если $x_0 > 0$, решение задачи монотонно стремится к нулю. В случае же $x_0 < 0$, решение обращается в бесконечность за конечное время t_0 .

Решение статистической задачи (6.107) описывается прямым и обратным уравнениями Фоккера–Планка ($t - t_0 = \tau$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= \frac{\partial}{\partial x} x^2 p(x, \tau | x_0) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, \tau | x_0), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= -x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} p(x, \tau | x_0) + D \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(x, \tau | x_0). \end{aligned} \quad (6.108)$$

Отметим, что величины x , $p(x, \tau | x_0)$ и D имеют соответственно размерности

$$[x] = \tau^{-1}, \quad [D] = \tau^{-3}, \quad [p] = \tau,$$

и, следовательно, обезразмеривая уравнения (6.108), можно переписать их в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= \frac{\partial}{\partial x} x^2 p(x, \tau | x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, \tau | x_0), \\ \frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau | x_0) &= -x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} p(x, \tau | x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(x, \tau | x_0). \end{aligned} \quad (6.109)$$

Необходимо далее сформулировать краевые условия для (6.109). Существует два типа задач, представляющих непосредственный интерес.

Первый тип краевых условий возникает, если предположить, что кривая $x(t)$ обрывается в точке t_0 , где она обращается в $(-\infty)$. Это соответствует тому условию, что плотность потока вероятностей

$$J(\tau, x) = x^2 p(x, \tau | x_0) + \frac{\partial}{\partial x} p(x, \tau | x_0) \quad (6.110)$$

должна равняться нулю при $x \rightarrow \infty$, т. е. условиям

$$\begin{aligned} J(\tau, x) &\rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \\ p(x, \tau | x_0) &\rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

В этом случае величина $G(\tau | x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, \tau | x_0) \neq 1$ определяет вероятность того, что функция $x(t)$ остается конечной на всей оси $(-\infty, \infty)$, т. е. вероятность отсутствия сингулярной точки в момент времени $t - G(\tau | x_0) = P(t < t_0)$. Следовательно, вероятность появления сингулярной точки в момент времени t определяется равенством

$$P(t > t_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, \tau | x_0),$$

и ее плотность вероятностей

$$p(\tau | x_0) = \frac{\partial}{\partial t} P(t > t_0) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x, \tau | x_0) \quad (6.111)$$

описывается уравнением, вытекающим из обратного уравнения Фоккера-Планка: (6.109)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p(\tau | x_0) = -x_0^2 \frac{\partial}{\partial x_0} p(\tau | x_0) + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} p(\tau | x_0), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty} p(\tau | x_0) \rightarrow 0. \quad (6.112)$$

Оценим среднее время

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_0^{\infty} d\tau \tau p(\tau | x_0),$$

за которое система перейдет из состояния x_0 в состояние $(-\infty)$. Эта величина описывается уравнением, вытекающим из (6.112):

$$-1 = -x_0^2 \frac{d}{dx_0} \langle T(x_0) \rangle + \frac{d^2}{dx_0^2} \langle T(x_0) \rangle, \quad (6.113)$$

с краевыми условиями $\langle T(x_0) \rangle \rightarrow 0$ при $x_0 \rightarrow -\infty$, и величина $\langle T(x_0) \rangle$ ограничена при $x_0 \rightarrow \infty$. Это уравнение легко интегрируется, и в результате получаем

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_{-\infty}^{x_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - \eta^3) \right\}. \quad (6.114)$$

Для среднего времени между двумя сингулярными точками из (6.114) получаем

$$\langle T(\infty) \rangle = \sqrt{\pi} \frac{12^{1/6}}{3} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \approx 4,976.$$

Отметим также, что величина $\langle T(x_0) \rangle = \frac{2}{3} \langle T(\infty) \rangle$ соответствует среднему времени перехода из состояния $x_0 = 0$ в состояние $x_0 = -\infty$.

Совершенно другие краевые условия возникают, если считать, что функция $x(t)$ разрывна и определена для всех значений времени t . Если при этом ее обращение в $(-\infty)$ в момент времени $t \rightarrow t_0 - 0$ немедленно сопровождается ее появлением при $t \rightarrow t_0 + 0$ со значением ∞ , то краевым условием для уравнения (6.109) будет условие непрерывности плотности потока вероятностей (6.110), т. е. условие

$$J(\tau, x)|_{x=-\infty} = J(\tau, x)|_{x=+\infty}.$$

В этом случае существует стационарная плотность вероятностей, не зависящая от x_0 :

$$P(x) = J \int_{-\infty}^x d\xi \exp \left\{ \frac{1}{3} (\xi^3 - x^3) \right\}, \quad (6.115)$$

где стационарная плотность потока вероятностей

$$J = 1 / \langle T(\infty) \rangle.$$

Для больших значений x из (6.115) следует асимптотическая формула

$$P(x) \approx \frac{1}{\langle T(\infty) \rangle x^2}. \quad (6.116)$$

Эта асимптотика формируется разрывами функции $x(t)$. В самом деле, в окрестности разрыва функция $x(t)$ имеет структуру

$$x(t) = \frac{1}{t - t_k}$$

и влияние случайностей не существенно. Для достаточно больших t ($t \gg \langle T(\infty) \rangle$) и x в этом случае имеем

$$\begin{aligned} p(x, t | x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(x - \frac{1}{t - t_k} \right) \right\rangle = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta(t - t_k) \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \langle e^{i\omega t_k} \rangle = \frac{1}{2\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\Phi_0(\omega)}{1 - \Phi(\omega)}, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(\omega) = \langle e^{i\omega t_0} \rangle$ — характеристическая функция первой сингулярной точки, а $\Phi(\omega) = \langle e^{i\omega T} \rangle$ — характеристическая функция времени между сингулярностями. Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ получаем асимптотику

$$P(x) = -\frac{1}{2\pi i x^2 \langle T(\infty) \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega + i0} = \frac{J}{x^2},$$

совпадающую с (6.116).

6.4.5. Асимптотические и приближенные методы решения уравнения Фоккера–Планка. Если флуктуации параметров динамической системы достаточно малы, то возможно использовать различные асимптотические и приближенные методы. Остановимся подробнее на трех таких методах, наиболее часто используемых в статистическом анализе.

Асимптотическое разложение. Можно сформулировать метод последовательных приближений по малым параметрам, связанным с флуктуирующими величинами. Этот метод является стандартным для уравнений в частных производных, в которых малый параметр входит при старшей производной. Схема его построения такова (см., например, [15]).

Перепишем уравнение Фоккера–Планка в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) + A(\mathbf{x}, t; \varepsilon) P(\mathbf{x}, t) + B_i(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_i} P(\mathbf{x}, t) = \\ = \varepsilon^2 D_{ij}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.117)$$

где введен параметр ε^2 , характеризующий интенсивность флуктуирующих параметров динамической системы. Представим решение уравнения (6.117) в виде

$$P(\mathbf{x}, t) = C(\varepsilon) \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \right\}. \quad (6.118)$$

Тогда для функции $\varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon)$ получаем нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) - \varepsilon^2 A(\mathbf{x}, t; \varepsilon) + B_i(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) - \\ - \varepsilon^2 D_{ij}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) + \\ + D_{ij}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.119)$$

решение которого можно искать в виде степенного ряда по параметру: ε^2

$$\varphi(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 \varphi_1(\mathbf{x}, t) + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение (6.119), разлагая его коэффициенты также в степенной ряд по ε^2 и группируя члены при соответствующей степени ε^2 , мы и получаем метод последовательных приближений для уравнения (6.119). Так, для функции $\varphi_0(\mathbf{x}, t)$ получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + B_i(\mathbf{x}, t; 0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varphi_0(\mathbf{x}, t) + D_{ij}(\mathbf{x}, t; 0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_0(\mathbf{x}, t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_0(\mathbf{x}, t) \right) = 0,$$

которое является уравнением в частных производных первого порядка и может быть решено, например, методом характеристик. Этот первый член ряда последовательных приближений описывает основную сингулярную особенность уравнения Фоккера–Планка. Следующий член ряда $\varphi_1(\mathbf{x}, t)$

описывает предэкспоненциальный множитель, а постоянная $C(\varepsilon^2)$ в (6.118) определяется из поведения решения уравнения (6.117) при $t \rightarrow 0$ и начального условия для него.

Описанный метод последовательных приближений справедлив лишь на конечном начальном этапе эволюции и не допускает возможности предельного перехода при $t \rightarrow \infty$. Для анализа уравнения (6.117) в этом предельном случае обычно преобразовывают его к виду, содержащему самосопряженный оператор по пространственным переменным, который имеет дискретный спектр.

Остановимся теперь на двух приближенных методах решения уравнения Фоккера–Планка.

Метод кумулянтных разложений. Первый метод называется методом кумулянтных разложений [64]. Если в уравнении Фоккера–Планка (6.11) произвести преобразование Фурье по пространственным переменным $\mathbf{x}$, т. е. перейти от плотности вероятностей решения стохастических уравнений (6.1) к характеристической функции

$$\Phi(\boldsymbol{\lambda}, t) = \langle e^{i\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}(t)} \rangle = e^{\Theta(\boldsymbol{\lambda}, t)} \quad (6.120)$$

и разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $\boldsymbol{\lambda}$, то для коэффициентов разложения (т. е. одноточечных кумулянтов случайного процесса $\mathbf{x}(t)$) получится бесконечная система нелинейных уравнений. Метод кумулянтных разложений соответствует пренебрежению в этой системе уравнений всеми кумулянтами высокого порядка, начиная с некоторого (третьего — гауссово приближение, четвертого — эксцессное приближение и т. д.). Для оставшихся кумулянтов получается замкнутая нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющая проследить их эволюцию во времени. Отметим, что в монографии [64] развит общий метод, позволяющий выписывать такие уравнения, исходя непосредственно из стохастических уравнений (6.1) и не прибегая к уравнению Фоккера–Планка (6.11) или к уравнению для характеристической функции. Недостатком такого метода является то обстоятельство, что пренебрежение бесконечным рядом кумулянтов, как хорошо известно, «портит» распределение вероятностей. Так, в частности, у такого распределения вероятностей появляются области пространственных переменных, в которых оно имеет отрицательное значение. Однако, как показывают примеры, для большого класса задач метод кумулянтных разложений правильно описывает динамику отдельных кумулянтов. Такой класс задач ограничивается, по-видимому, задачами, в которых статистические характеристики решения являются аналитическими функциями по интенсивности случайных воздействий. Задачи, связанные с неаналитической зависимостью по указанному параметру (например, задачи о выходе траектории системы из какой-либо области пространства, задача о достижении заданной границы и т. п.), по-видимому, нельзя описать на основе этого метода.

Метод усреднения по быстрым осцилляциям. Другой приближенный метод, играющий большую роль в стохастических колебательных системах,

называется методом усреднения по быстро меняющимся величинам. Пусть, например, стохастическая система описывается динамическими уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= A(x, \tilde{\varphi}) + z(t)B(x, \tilde{\varphi}), \\ \frac{d}{dt}\varphi(t) &= C(x, \tilde{\varphi}) + z(t)D(x, \tilde{\varphi}),\end{aligned}\tag{6.121}$$

где

$$\tilde{\varphi}(t) = \omega_0 t + \varphi(t),$$

функции $A(x, \tilde{\varphi})$, $B(x, \tilde{\varphi})$, $C(x, \tilde{\varphi})$, и $D(x, \tilde{\varphi})$ — периодические функции по переменной $\tilde{\varphi}$, а $z(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad D = \sigma^2 \tau_0.$$

Переменная $x(t)$ может, например, быть модулем вектора, а $\varphi(t)$ — его фазой. Для системы уравнений (6.121) соответствующее уравнение Фоккера–Планка имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(x, \varphi, t) &= -\frac{\partial}{\partial x}A(x, \tilde{\varphi})P(x, \varphi, t) - \frac{\partial}{\partial \varphi}C(x, \tilde{\varphi})P(x, \varphi, t) + \\ &+ D \left[\frac{\partial}{\partial x}B(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}D(x, \tilde{\varphi}) \right]^2 P(x, \varphi, t).\end{aligned}\tag{6.122}$$

Уравнение (6.122) обычно является сложным для непосредственного анализа совместной плотности вероятностей. Перепишем его в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(x, \varphi, t) &= -\frac{\partial}{\partial x}A(x, \tilde{\varphi})P(x, \varphi, t) - \frac{\partial}{\partial \varphi}C(x, \tilde{\varphi})P(x, \varphi, t) - \\ &- D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial x} + \frac{\partial B(x, \tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} D(x, \tilde{\varphi}) \right) P(x, \varphi, t) - \\ &- D \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial D(x, \tilde{\varphi})}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial D^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial \tilde{\varphi}} \right) P(x, \varphi, t) + \\ &+ D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} B^2(x, \tilde{\varphi}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} B(x, \tilde{\varphi}) D(x, \tilde{\varphi}) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} D^2(x, \tilde{\varphi}) \right\} P(x, \varphi, t).\end{aligned}\tag{6.123}$$

Пусть теперь функции $A(x, \tilde{\varphi})$ и $C(x, \tilde{\varphi})$ достаточно малы, а также мала интенсивность флуктуаций $z(t)$. В этом случае статистические характеристики системы уравнений (6.121) мало меняются на временах $\sim 1/\omega_0$. И для изучения таких малых изменений (накапливающихся эффектов) можно усреднить уравнение (6.123) по периоду колебаний всех функций. Считая,

что сама функция $P(x, \varphi, t)$ при этом не меняется, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(x, \varphi, t)} = & -\frac{\partial}{\partial x} \overline{A(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t)} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{C(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t)} - \\ & - D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial B^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial x}} + \overline{\frac{\partial B(x, \tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} D(x, \tilde{\varphi})} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{\frac{\partial D(x, \tilde{\varphi})}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi})} \right\} \overline{P(x, \varphi, t)} + \\ & + D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{B^2(x, \tilde{\varphi})} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \overline{B(x, \tilde{\varphi}) D(x, \tilde{\varphi})} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \overline{D^2(x, \tilde{\varphi})} \right\} \overline{P(x, \varphi, t)}, \end{aligned} \quad (6.124)$$

где чертой обозначены величины, усредненные по периоду колебаний.

Интегрируя уравнение (6.124) по φ , получаем для функции $\overline{P(x, t)}$ уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(x, \varphi, t)} = & -\frac{\partial}{\partial x} \overline{A(x, \tilde{\varphi}) P(x, \varphi, t)} + \\ & + D \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{\frac{\partial B^2(x, \tilde{\varphi})}{2\partial x}} + \overline{\frac{\partial B(x, \tilde{\varphi})}{\partial \tilde{\varphi}} D(x, \tilde{\varphi})} \right) \overline{P(x, \varphi, t)} + \\ & + D \frac{\partial}{\partial x} \overline{B^2(x, \tilde{\varphi})} \frac{\partial}{\partial x} \overline{P(x, \varphi, t)}. \end{aligned} \quad (6.125)$$

Отметим, что в этом приближении величина $x(t)$ является марковским одномерным случайным процессом.

Если же в уравнении (6.124)

$$\overline{B(x, \tilde{\varphi}) D(x, \tilde{\varphi})} = \overline{\frac{\partial D(x, \tilde{\varphi})}{\partial x} B(x, \tilde{\varphi})} = 0,$$

а $\overline{C(x, \tilde{\varphi})} = \text{const}$, $\overline{D^2(x, \tilde{\varphi})} = \text{const}$, то процессы $x(t)$ и $\varphi(t)$ статистически независимы и процесс $\varphi(t)$ является марковским гауссовым процессом, дисперсия которого линейно растет с ростом времени t . Это означает, что при больших t (при $\overline{C(x, \tilde{\varphi})} = 0$) распределение вероятностей для величины $\varphi(t)$ становится равномерным на отрезке $[0, 2\pi]$.

В качестве конкретного примера применения описанной методики рассмотрим задачу о стохастическом параметрическом резонансе.

Стохастический параметрический резонанс. Рассмотрим стохастическое уравнение второго порядка, эквивалентное системе уравнений первого порядка (4.138):

$$\frac{d}{dt} x(t) = y(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = -2\gamma y(t) - \omega_0^2 [1 + z(t)] x(t), \quad (6.126)$$

Эта задача для дельта-коррелированных флуктуаций частоты с общих позиций рассматривалась в гл. 4. Здесь же будем предполагать, что случайный процесс $z(t)$ — гауссов процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t) z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0 \delta(t - t').$$

Введем вместо функций $x(t)$ и $y(t)$ новые переменные — амплитуду и фазу колебаний — с помощью равенств

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad y(t) = \omega_0 A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (6.127)$$

Подставляя (6.127) в систему уравнений (6.126), получаем систему уравнений для функций $A(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) &= -2\gamma A(t) \cos^2 \psi(t) - \frac{\omega_0}{2} z(t) A(t) \sin(2\psi(t)), \\ \frac{d}{dt} \varphi(t) &= 2\gamma \sin(2\psi(t)) + \omega_0 z(t) \sin^2 \psi(t), \end{aligned} \quad (6.128)$$

где $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$. Представляя амплитуду $A(t)$ в виде $A(t) = e^{u(t)}$, можно переписать систему (6.128) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) &= -2\gamma \cos^2 \psi(t) - \frac{\omega_0}{2} z(t) \sin(2\psi(t)), \\ \frac{d}{dt} \varphi(t) &= \gamma \sin(2\psi(t)) + \omega_0 z(t) \sin^2 \psi(t). \end{aligned} \quad (6.129)$$

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей для решения системы уравнений (6.128) $P(t; u, \varphi) = \langle \Phi(t; u, \varphi) \rangle$, где индикаторная функция

$$\Phi(t; u, \varphi) = \delta(u(t) - u) \delta(\varphi(t) - \varphi)$$

описывается уравнением Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; u, \varphi) &= \gamma \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial u} \cos^2 \psi(t) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(2\psi(t)) \right\} \Phi(t; u, \varphi) + \\ &+ z(t) \omega_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \sin(2\psi(t)) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin^2 \psi(t) \right\} \Phi(t; u, \varphi). \end{aligned} \quad (6.130)$$

Усредняя теперь уравнение (6.130) по ансамблю реализаций случайного дельта-коррелированного процесса $z(t)$, используя формулу Фурутцу–Новикова и равенство

$$\frac{\delta}{\delta z(t-0)} \Phi(t; u, \varphi) = \omega_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \sin(2\psi(t)) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin^2 \psi(t) \right\} \Phi(t; u, \varphi),$$

вытекающее из (6.130), получаем для плотности вероятностей уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; u, \varphi) &= \gamma \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial u} \cos^2 \psi(t) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(2\psi(t)) \right\} P(t; u, \varphi) + \\ &+ D \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \sin(2\psi(t)) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin^2 \psi(t) \right\}^2 P(t; u, \varphi), \end{aligned}$$

где $D = \sigma^2 \tau_0 \omega_0^2$, которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; u, \varphi) = & \gamma \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial u} \cos^2 \psi(t) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(2\psi(t)) \right\} P(t; u, \varphi) + \\ & + D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \cos(2\psi(t)) \sin^2 \psi(t) - 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin^3 \psi(t) \cos \psi(t) \right\} P(t; u, \varphi) + \\ & + D \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sin^2(2\psi(t)) - \frac{\partial^2}{\partial u \partial \varphi} \sin(2\psi(t)) \sin^2 \psi(t) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sin^4 \psi(t) \right\} P(t; u, \varphi). \end{aligned} \quad (6.131)$$

Считая теперь, что параметр поглощения $\gamma \ll \omega_0$, можно усреднить уравнение (6.131) по периоду колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ (для этого достаточно усреднить тригонометрические функции, входящие в правую часть (6.131), в силу предположения о малости изменения статистических характеристик на временах $\sim T$) и получить уравнение для усредненной плотности вероятностей, описывающей медленные изменения статистических характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{P(t; u, \varphi)} = & \gamma \frac{\partial}{\partial u} \overline{P(t; u, \varphi)} - \frac{D}{4} \frac{\partial}{\partial u} \overline{P(t; u, \varphi)} + \\ & + \frac{D}{8} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \overline{P(t; u, \varphi)} + \frac{3D}{8} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \overline{P(t; u, \varphi)} \end{aligned} \quad (6.132)$$

с начальным условием

$$\overline{P(0; u, \varphi)} = \delta(u - u_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$

Так, например, для начальных условий $u_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, соответствующих $x(0) = 0$, $y(0) = \omega_0$, из уравнения (6.132) следует, что статистические характеристики амплитуды и фазы колебаний (усредненные по периоду колебаний) статистически независимы и соответствующие плотности вероятностей являются гауссовыми:

$$\begin{aligned} \overline{P(t; u)} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(t)}} \exp\left(-\frac{(u - \langle u(t) \rangle)^2}{2\sigma_u^2(t)}\right), \\ \overline{P(t; \varphi)} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2(t)}} \exp\left(-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma_\varphi^2(t)}\right), \end{aligned} \quad (6.133)$$

где

$$\langle u(t) \rangle = u_0 - \gamma t + \frac{D}{4} t, \quad \sigma_u^2(t) = \frac{D}{4} t, \quad \langle \varphi(t) \rangle = \varphi_0, \quad \sigma_\varphi^2(t) = \frac{3D}{4} t.$$

В качестве примера использования полученных выше выражений рассмотрим выражения $\langle x(t) \rangle$ и $\langle x^2(t) \rangle$ при начальных условиях $u_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

Так, для среднего значения имеем выражение

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \langle A(t) \rangle \langle \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \rangle = \\ &= \frac{1}{2i} \langle e^{u(t)} \rangle \langle e^{i\omega_0 t + i\varphi(t)} - e^{-i\omega_0 t - i\varphi(t)} \rangle = \\ &= \exp \left\{ \langle u(t) \rangle + \frac{1}{2} \sigma_u^2(t) - \frac{1}{2} \sigma_\varphi^2(t) \right\} \sin(\omega_0 t) e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t), \quad (6.134)\end{aligned}$$

совпадающее с решением задачи при отсутствии флуктуаций.

Для величины $\langle x^2(t) \rangle$ аналогичным образом получаем выражение

$$\begin{aligned}\langle x^2(t) \rangle &= \langle e^{2u(t)} \rangle \langle \sin^2(\omega_0 t + \varphi(t)) \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{2u(t)} \rangle \{1 - \langle \cos 2(\omega_0 t + \varphi(t)) \rangle\} = \\ &= \frac{1}{2} e^{2\langle u(t) \rangle + 2\sigma_u^2(t)} \left\{ 1 - e^{-2\sigma_\varphi^2(t)} \cos(\omega_0 t) \right\} = \frac{1}{2} e^{(D-2\gamma)t} \left\{ 1 - e^{-\frac{3D}{2}t} \cos(2\omega_0 t) \right\}, \quad (6.135)\end{aligned}$$

совпадающее при отсутствии поглощения с выражением (4.137) гл. 4 с точностью до членов порядка $D/\omega_0 \ll 1$, и статистическое параметрическое возбуждение системы имеет место при выполнении условия

$$D > 2\gamma.$$

Как указывалось выше, случайная амплитуда имеет логнормальное распределение вероятностей, и, следовательно, ее моментные функции описываются выражением

$$\langle A^n(t) \rangle = \langle e^{nu(t)} \rangle = A_0^n \exp \left\{ -n\gamma t + \frac{1}{8} n(n+2)Dt \right\}. \quad (6.136)$$

При выполнении условия

$$8\gamma < (n+2)D$$

стохастическая динамическая система (6.126) статистически параметрически возбуждается начиная с моментной функции порядка n . Отметим, однако, что типичная реализация случайной амплитуды имеет вид

$$A^*(t) = A_0 e^{-\left(\gamma - \frac{D}{4}\right)t},$$

и при достаточно малом поглощении, а именно

$$1 < 4\frac{\gamma}{D} < 1 + \frac{n}{2},$$

что выполняется для достаточно больших значений n , типичная реализация экспоненциально убывает во времени, в то время как все моментные функции случайной амплитуды $A(t)$ порядка n и выше экспоненциально растут во времени. Это означает, что в этом случае статистика случайной амплитуды $A(t)$ формируется большими выбросами относительно экспоненциально спадающей типичной реализации. Это обстоятельство обусловлено логнормальностью случайной амплитуды $A(t)$.

Глава 7

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННОГО ВО ВРЕМЕНИ ГАУССОВОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ (ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИЧИННЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Для задач, рассмотренных в предыдущем разделе, удается получить замкнутое статистическое описание в приближении дельта-коррелированного случайного поля благодаря тому факту, что эти задачи соответствуют системе дифференциальных уравнений первого порядка по времени с начальными условиями при $t = 0$. Для них выполняется условие динамической причинности, которое заключается в том, что решение задачи в момент времени t определяется только флуктуациями параметров системы в предшествующие моменты времени и не зависит от последующих.

Условие причинности, однако, может выполняться и для задач, описываемых интегральными уравнениями, которые, вообще говоря, не всегда сводятся к системе дифференциальных уравнений.

Исходным стохастическим уравнением является линейное интегральное уравнение для функции Грина:

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2) S(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'), \quad (7.1)$$

где через $\mathbf{r}$ обозначены все аргументы функций $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $f(\mathbf{r})$, включая и индексные, по которым интегрирование заменяется суммированием. Функция $f(\mathbf{r})$ предполагается случайным полем, а функция $S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является функцией Грина задачи в отсутствие флуктуаций параметров, т. е. при $f(\mathbf{r}) = 0$. Величину $\Lambda(\{\mathbf{r}_i\})$ будем считать функцией.

Решение уравнения (7.1) является функционалом поля $f(\mathbf{r})$, т. е. $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})]$, и при этом уравнение (7.1) эквивалентно функциональному уравнению с вариационной производной в функциональном пространстве $\{f(\tilde{\mathbf{r}})\}$ (4.30):

$$\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_0)} S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})] = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 S[\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; f(\tilde{\mathbf{r}})] \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) S[\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})], \quad (7.2)$$

с начальным условием

$$S[\mathbf{r}, \mathbf{r}'; f(\tilde{\mathbf{r}})]_{f=0} = S_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Выделим теперь в уравнении (7.1) временную координату t , т. е. запишем уравнение (7.1) в виде

$$S(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = S_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \int d\tau S_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2, \tau) S(\mathbf{r}_3, \tau; \mathbf{r}', t'). \quad (7.3)$$

7.5. Причинное во времени интегральное уравнение

Далее будем считать, что функция

$$S_0(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \theta(t - t'),$$

$\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. В этом случае и решение уравнения (7.3) имеет структуру

$$S(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \theta(t - t'),$$

где функция $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ описывается причинным во времени интегральным уравнением

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \int_{t'}^t d\tau g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) f(\mathbf{r}_2, \tau) G(\mathbf{r}_3, \tau; \mathbf{r}', t'). \quad (7.4)$$

Функция $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ является функционалом поля $f(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)$, т. е.

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G[\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t'; f(\tilde{\mathbf{r}}, \tau)],$$

и, следовательно, условия динамической причинности имеют вид

$$\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_0, \tau)} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0 \quad \text{при} \quad \tau < t' \quad \text{и} \quad \tau > t.$$

Для вариационной производной, в силу равенства (7.2), в этом случае получаем выражение

$$\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_0, t_0)} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_0) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, t_0; \mathbf{r}', t'), \quad (7.5)$$

откуда следует, что

$$\frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_0, t - 0)} G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, t; \mathbf{r}', t'). \quad (7.6)$$

7.6. Статистическое усреднение

Пусть теперь случайное поле $f(\mathbf{r}, t)$ будет гауссовым случайным полем, среднее значение которого равно нулю. В этом случае все его статистические характеристики описываются заданием его корреляционной функции

$$B(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle f(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}', t') \rangle.$$

Для статистически пространственно-однородного и стационарного во времени случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$

$$B(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = B(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t').$$

Усредним уравнение (7.4) по ансамблю реализаций поля $f(\mathbf{r}, t)$. В результате получаем уравнение

$$\langle G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle = g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \int_{t'}^t d\tau g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \langle f(\mathbf{r}_2, \tau) G(\mathbf{r}_3, \tau; \mathbf{r}', t') \rangle. \quad (7.7)$$

Для расщепления корреляции в правой части (7.7) воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова (6.10). В результате получаем

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle &= g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \int_{t'}^t d\tau g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ &\times \int d\mathbf{r}_0 \int_{t'}^{\tau} dt_0 B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0; \tau - t_0) \left\langle \frac{\delta}{\delta f(\mathbf{r}_0, t_0)} G(\mathbf{r}_3, \tau; \mathbf{r}', t') \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Воспользуемся теперь выражением (7.5) для вариационной производной. В результате уравнение (7.8) принимает вид равенства

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle &= g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \int_{t'}^t d\tau g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ &\times \int d\mathbf{r}_0 \int_{t'}^{\tau} dt_0 B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0; \tau - t_0) \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \langle G(\mathbf{r}_3, \tau; \mathbf{r}', t_0) \Lambda(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \mathbf{r}'') G(\mathbf{r}'', t_0; \mathbf{r}', t') \rangle. \end{aligned} \quad (7.9)$$

В правую часть равенства (7.9) теперь входит корреляционная функция поля $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$.

Если теперь временной радиус корреляции τ_0 случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$ стремится к нулю, то уравнение (7.9) упрощается и при $t \gg \tau_0$ принимает вид замкнутого интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \rangle &= g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \int_{t'}^t d\tau g(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, \tau) \Lambda(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \times \\ &\times \int d\mathbf{r}_0 F(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}_3, \tau; \mathbf{r}', \tau) \Lambda(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \mathbf{r}') \langle G(\mathbf{r}', \tau; \mathbf{r}', t') \rangle, \end{aligned}$$

где

$$F(\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} dt B(\mathbf{r}; t).$$

Это эквивалентно введению в уравнение (7.8) эффективной корреляционной функции случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$

$$B(\mathbf{r}; t) = 2F(\mathbf{r})\delta(t), \quad F(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dt B(\mathbf{r}; t)$$

и использованию вместо (7.5) равенства (7.6), что и соответствует приближению дельта-коррелированности во времени для случайного поля $f(\mathbf{r}, t)$.

Аналогичным образом можно рассмотреть вывод уравнения и для корреляционной функции решения уравнения (7.4). Чтобы не загромождать изложение, проиллюстрируем это на простейшем примере одномерного причинного уравнения ($t > t'$):

$$G(t; t') = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) z(\tau) G(\tau; t'), \quad (7.10)$$

где считаем случайную функцию $z(t)$ гауссовой функцией, дельта-коррелированной во времени с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0,$$

$$\langle z(t) z(t') \rangle = 2D\delta(t - t') \quad (D = \sigma_z^2 \tau_0).$$

В этом случае, при усреднении уравнения (7.10) по ансамблю реализаций случайной функции $z(t)$, получаем уравнение

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) \langle z(\tau) G(\tau; t') \rangle. \quad (7.11)$$

Учитывая теперь равенство (7.6), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta z(t)} G(t; t') = g(t; t) \Lambda G(t; t'), \quad (7.12)$$

корреляцию в правой части уравнения (7.11) можно записать в виде

$$\langle z(\tau) G(\tau; t') \rangle = D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau)} G(\tau; t') \right\rangle = \Lambda D g(\tau; \tau) \langle G(\tau; t') \rangle,$$

и мы видим, что уравнение (7.11) переходит в замкнутое интегральное уравнение для средней функции Грина:

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda^2 D \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) g(\tau; \tau) \langle G(\tau; t') \rangle, \quad (7.13)$$

которое, согласно общей методике, имеет форму *уравнения Дайсона*:

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau g(t; \tau) \int_{t'}^{\tau} d\tau' Q(\tau; \tau') \langle G(\tau'; t') \rangle, \quad (7.14)$$

$$\langle G(t; t') \rangle = g(t; t') + \Lambda \int_{t'}^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \int_{t'}^{\tau} d\tau' Q(\tau; \tau') g(\tau'; t'), \quad (7.15)$$

с *массовой функцией* вида

$$Q(\tau; \tau') = \Lambda^2 D g(\tau; \tau') \delta(\tau - \tau'). \quad (7.16)$$

Получим теперь уравнение для корреляционной функции

$$\Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = \langle G(t; t') G^*(t_1; t'_1) \rangle \quad (t > t', \quad t_1 > t'_1),$$

где $G^*(t; t')$ — комплексно сопряженная функция Грина. Для этого умножим уравнение (7.10) на $G^*(t_1; t'_1)$ и усредним по ансамблю реализаций случайной функции $z(t)$. В результате получаем уравнение, которое запишем в символическом виде

$$\Gamma = g \langle G^* \rangle + \Lambda g \langle z G G^* \rangle. \quad (7.17)$$

Учитывая уравнение Дайсона (7.15)

$$\langle G \rangle = \{1 + \langle G \rangle Q\} g,$$

подействуем на (7.17) оператором $\{1 + \langle G \rangle Q\}$. В результате получаем уравнение, записанное в символическом виде,

$$\Gamma = \langle G \rangle \langle G^* \rangle + \langle G \rangle \Lambda \{ \langle z G G^* \rangle - Q \Gamma \},$$

которое можно переписать в виде уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) = & \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + \\ & + \Lambda D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \left[\left\langle \frac{\delta G(\tau; t')}{\delta z(\tau)} G^*(t_1; t'_1) + 2G(\tau; t') \frac{\delta G^*(t_1; t'_1)}{\delta z(\tau)} \right\rangle \right] - \\ & - \Lambda^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle g(\tau; \tau') \Gamma(\tau, t'; t_1, t'_1). \end{aligned} \quad (7.18)$$

При выводе уравнения (7.18) мы также воспользовались формулой (3.165) гл. 3 для расщепления корреляций гауссового дельта-коррелированного процесса $z(t)$ с функционалами от него:

$$\langle z(t') R[t; z(\tau)] \rangle = \begin{cases} D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t)} R[t; z(\tau)] \right\rangle & (t' = t, \quad \tau < t), \\ 2D \left\langle \frac{\delta}{\delta z(t')} R[t; z(\tau)] \right\rangle & (t' < t, \quad \tau < t). \end{cases}$$

Учитывая теперь формулы (7.12) и (7.2), последняя из которых для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta z(\tau)} G^*(t_1; t'_1) = \Lambda G^*(t_1; \tau) G^*(\tau; t'_1),$$

уравнение (7.18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) &= \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + \\ &+ 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) G(\tau; t') G^*(\tau; t'_1) \rangle. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Теперь учтем то обстоятельство, что функция $G^*(t_1; \tau)$ функционально зависит от случайного процесса $z(\tilde{\tau})$ при $\tilde{\tau} \geq \tau$, а функции $G(\tau; t')$ и $G^*(\tau; t'_1)$ — при $\tilde{\tau} \leq \tau$, и, следовательно, для дельта-коррелированного процесса $z(\tilde{\tau})$ статистически независимы. Следовательно, уравнение (7.19) можно переписать в виде замкнутого уравнения ($t_1 \geq t$)

$$\begin{aligned} \Gamma(t, t'; t_1, t'_1) &= \\ &= \langle G(t; t') \rangle \langle G^*(t_1; t'_1) \rangle + 2|\Lambda|^2 D \int_0^t d\tau \langle G(t; \tau) \rangle \langle G^*(t_1; \tau) \rangle \Gamma(\tau; t'; \tau, t'_1), \end{aligned} \quad (7.20)$$

что соответствует уравнению Бете–Солпитера (см. гл. 5) с ядром оператора интенсивности

$$K(\tau_1, \tau'; \tau_2, \tau'') = 2|\Lambda|^2 D \delta(\tau_1 - \tau') \delta(\tau_2 - \tau'') \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (7.21)$$

Таким образом, для дельта-коррелированного процесса $z(t)$ «лестничное приближение» (см. гл. 5) для одномерного причинного уравнения (7.10) является точным равенством.

Глава 8

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ (т.е. уравнения Фоккера–Планка) является условие малости временного радиуса корреляции τ_0 случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче. Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ можно провести в рамках диффузионного приближения (см., например, [158, 160]).

Это приближение более наглядно и физично, чем формальное математическое приближение дельта-коррелированного случайного поля. Это приближение справедливо также для достаточно малых флуктуаций параметров стохастической динамической системы и позволяет получить не только условия применимости дельта-коррелированного приближения, но и описать новые физические эффекты, порожденные конечностью временного радиуса корреляции случайных параметров. В рамках диффузионного приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 не существенно, т.е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная.

Пусть опять векторная функция $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению (6.1)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.1)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — векторная детерминированная функция, а $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — случайное статистически однородное в пространстве и стационарное во времени гауссово векторное поле со статистическими характеристиками

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = B_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t') = \langle f_i(\mathbf{x}, t) f_j(\mathbf{x}', t') \rangle.$$

Введем индикаторную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}), \quad (8.2)$$

где $\mathbf{x}(t)$ — решение уравнения (8.1), удовлетворяющую уравнению Лиувилля (6.6)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (8.3)$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (8.1)

$$P(\mathbf{x}(t) = \langle \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

получим, как и ранее, усредняя уравнение (8.3) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (8.4)$$

$$P(\mathbf{x}, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (6.10)

$$\langle f_k(\mathbf{x}, t) R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \rangle = \int d\mathbf{x}' \int dt' B_{kl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_l(\mathbf{x}', t')} R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)] \right\rangle,$$

справедливую для корреляции гауссового случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ с произвольным функционалом $R[t; \mathbf{f}(\mathbf{y}, \tau)]$ от него, уравнение (8.4) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) P(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{t_0}^t dt' B_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\langle \frac{\delta}{\delta f_j(\mathbf{x}', t')} \varphi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \quad (8.5)$$

В диффузионном приближении уравнение (8.5) является точным, а вариационная производная и индикаторная функция на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \tau_0$ — описываются системой динамических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \right\}, \\ \frac{\delta \varphi(\mathbf{x}, t)}{\delta f_i(\mathbf{x}', t')} \Big|_{t=t'} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varphi(\mathbf{x}, t') \}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \}, \quad \varphi(\mathbf{x}, t)|_{t=t'} = \varphi(\mathbf{x}, t').$$

Решение задачи (8.5), (8.6) справедливо для всех времен t . Однако в этом случае решение задачи (8.1) $\mathbf{x}(t)$ не является векторным марковским случайным процессом, так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (8.1) в диффузионном приближении уже будет марковским случайным процессом и условиями применимости его является малость всех статистических эффектов на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 .

Применение диффузионного приближения к конкретным физическим проблемам будет рассмотрено в следующей части книги. Здесь же в качестве иллюстрации мы рассмотрим задачу о динамике частицы с линей-

ным трением в поле случайных сил, описываемую стохастической системой (1.12):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}(t), & \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) &= -\lambda\mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, & \mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Введем индикаторную функцию для положения частицы в пространстве и ее скорости:

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}).$$

Для нее имеем стохастическое уравнение Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (8.8)$$

Усредняя уравнение (8.8) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, получаем уравнение для одновременной плотности вероятностей

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}) \rangle$$

вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle, \quad (8.9)$$

которое с учетом формулы Фурутцу–Новикова (6.10) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (8.10)$$

Вариационную производную в правой части (8.10) можно выразить через вариационные производные функций $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ и переписать его в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \\ &\times \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial r_k} \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} + \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} \right] \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Вариационные производные функций $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, входящие в уравнение (8.11), описываются системой уравнений, вытекающей из (8.7) при $t' < t$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} &= \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} &= -\lambda \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} + \frac{\partial f_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} \frac{\delta r_l(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'} = 0, \quad \left. \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} \right|_{t=t'} = \delta_{kj} \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'). \quad (8.13)$$

Интеграл по времени, входящий в правую часть (8.11), определяется поведением вариационных производных в интервале времен $t - t' \sim \tau_0$. Считая, что в таких масштабах времени влияние случайных сил несущественно, можно опустить последний член в уравнении (8.12) и перейти к детерминированной системе уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} = \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} = -\lambda \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')}, \quad (8.14)$$

начальные условия для которой (8.13), однако, содержат случайности в виде стохастической функции $\mathbf{r}(t')$.

Решение системы (8.14) с начальными условиями (8.13) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta v_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} &= \delta_{kj} e^{-\lambda(t-t')} \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'), \\ \frac{\delta r_k(t)}{\delta f_j(\mathbf{r}', t')} &= \frac{1}{\lambda} \delta_{kj} \left[1 - e^{-\lambda(t-t')} \right] \delta(\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Далее, считая, что на таких масштабах времен действие случайных сил несущественно и для динамики самой частицы, мы можем заменить значение $\mathbf{r}(t')$, входящее в (8.15), через $\mathbf{r}(t)$, используя упрощенную систему уравнений (8.7)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = -\lambda \mathbf{v}(t) \quad (8.16)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{r}(t)|_{t=t'} = \mathbf{r}(t'), \quad \mathbf{v}(t)|_{t=t'} = \mathbf{v}(t'), \quad (8.17)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}(t) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{v} \left[e^{\lambda(t-t')} - 1 \right], \quad \mathbf{v}(t') = e^{\lambda(t-t')} \mathbf{v}(t). \quad (8.18)$$

Выполненные упрощающие процедуры перехода от (8.12), (8.13) к (8.15) и от (8.7) к (8.18) и составляют основу диффузионного приближения для рассматриваемой задачи.

Используя теперь выражения (8.15) и (8.18), можно уравнение (8.11) переписать в замкнутом виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= - \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{1}{\lambda} [1 - e^{-\lambda\tau}] + \frac{\partial}{\partial v_j} e^{-\lambda\tau} \right\} \delta \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{1}{\lambda} [1 - e^{-\lambda\tau}] \mathbf{v} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Оператор, стоящий в фигурных скобках, перестановочен с дельта-функцией, и после интегрирования по $\mathbf{r}'$, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial v_j} + D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial r_j} \right\} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (8.20) \end{aligned}$$

где введены коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}, t) &= \int_0^t d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right), \\ D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}, t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t d\tau [1 - e^{-\lambda\tau}] B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Уравнение (8.21) правильно описывает одноточечную плотность вероятностей и для времен $t < \tau_0$. Однако в этом случае решение задачи (8.7) $\{\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\}$ не является векторным марковским случайным процессом, так как ее многовременная плотность вероятностей не допускает факторизации с помощью плотности вероятностей перехода. В асимптотическом случае $t \gg \tau_0$ решение исходной динамической системы (8.7) уже будет марковским случайным процессом. В этом случае можно заменить верхние пределы в интегралах (8.21) на бесконечность. При этом мы приходим к уравнению Фоккера–Планка для одновременной плотности вероятностей:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_j} + D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial r_j} \right\} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (8.22)$$

с коэффициентами диффузии

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) &= \int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right), \\ D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty d\tau [1 - e^{-\lambda\tau}] B_{ij} \left(\frac{1}{\lambda} [e^{\lambda\tau} - 1] \mathbf{v}, \tau \right). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Отметим, что приближению дельта-коррелированного случайного поля соответствует уравнение (8.20) с коэффициентами диффузии

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(0, \tau), \quad D_{ij}^{(2)}(\mathbf{v}) = 0.$$

Интегрируя уравнение (8.22) по $\mathbf{r}$, получаем для одновременной плотности вероятностей скорости частицы уравнение Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v}\right) P(\mathbf{v}, t) = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_j} P(\mathbf{v}, t).$$

Стационарная плотность вероятностей, соответствующая предельному переходу $t \rightarrow \infty$, описывается уравнением

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} P(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij}^{(1)}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_j} P(\mathbf{v}), \quad (8.24)$$

и его решение существенно зависит от вида коэффициента диффузии, т. е. от корреляционной функции случайного векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$. Так, например, в одномерном случае, если корреляционную функцию $B_f(x, t)$ задать в виде

$$B_f(x, t) = \sigma_f^2 \exp \left\{ -\frac{|x|}{l_0} - \frac{|t|}{\tau_0} \right\},$$

где l_0 и τ_0 — пространственный и временной радиус корреляции соответственно, то для достаточно малого трения ($\lambda \tau_0 \ll 1$) решение уравнения (8.24) имеет вид [158]

$$P(v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda v^2}{2\sigma_f^2 \tau_0} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{|v| \tau_0}{l_0} \right] \right\}. \quad (8.25)$$

Для малых значений скорости частицы $|v| \tau_0 \ll l_0$ распределение вероятностей (8.25) переходит в гауссово распределение, соответствующее приближению дельта-коррелированности во времени случайного поля $f(x, t)$. Однако в обратном предельном случае $|v| \tau_0 \gg l_0$ распределение вероятностей (8.25) убывает значительно быстрее, чем в случае приближения дельта-коррелированности во времени случайного поля $f(x, t)$, а именно:

$$P(v) = C \exp \left\{ -\frac{\lambda v^2 |v|}{3\sigma_f^2 l_0} \right\}, \quad (8.26)$$

что соответствует убыванию коэффициента диффузии по закону $D^{(1)} \sim \sim 1/|v|$ для больших значений скорости частицы. С физической точки зрения это означает, что влияние поля случайных сил $f(x, t)$ на быстродвигающиеся частицы существенно меньше, чем на медленнодвигающиеся частицы.

Таким образом, диффузионное приближение позволяет снять основное ограничение, связанное с малостью временного радиуса корреляции τ_0 , оставаясь при этом в рамках марковского процесса.

Замечание 8.1. *Диффузия в быстропеременных случайных волновых полях скорости.*

В ряде случаев, однако, коэффициенты диффузии как в приближении дельта-коррелированного случайного поля, так и в диффузионном приближении могут обратиться в ноль. Такой случай осуществляется, например, при движении частиц в быстропеременных случайных волновых полях скорости [55].

Так, диффузия частиц в этом случае описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (8.27)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — статистически однородное в пространстве и стационарное во времени случайное волновое векторное поле, такое, что $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, а корреляционный тензор имеет структуру

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} F_{ij}(\mathbf{k}) \cos\{\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t\}. \quad (8.28)$$

Спектральная функция $F_{ij}(\mathbf{k})$ такова, что $\int d\mathbf{k} F_{ii}(\mathbf{k}) = \sigma_u^2$, а $\omega = \omega(\mathbf{k}) > 0$ — дисперсионная кривая для волновых движений. Для традиционных волновых движений спектральная функция поля скорости удовлетворяет условию $\Phi_{ij}(0) = 0$, где $\Phi_{ij}(\omega) = \int d\mathbf{k} F_{ij}(\mathbf{k}) \delta[\omega - \omega(\mathbf{k})]$ и тензорный коэффициент диффузии в уравнении Фоккера–Планка обращается в нуль, т. е.

$$D_{ij} = \int_0^\infty dt B_{ij}(0, t) = 0.$$

Этот же коэффициент диффузии возникает и в диффузионном приближении при условии $t \gg \tau_0$, где τ_0 — временной радиус корреляции поля скорости. И, следовательно, как приближение дельта-коррелированности поля скоростей, так и диффузионное приближение не приводят к конечному результату, для получения которого необходимо учитывать члены высшего порядка малости [55].

Пусть максимум спектральной функции $F_{ij}(\mathbf{k})$ соответствует некоторому волновому числу — k_m , а максимум спектральной функции $\Phi_{ij}(\omega)$ — частоте ω_m . Определим пространственный и временной масштабы $l = 1/k_m$, $\tau_0 = 1/\omega_m$. При этом величина $\varepsilon = \sigma_u \tau_0 / l$ для реальных волновых полей, как правило, мала и может рассматриваться как основной малый параметр задачи, т. е. $\varepsilon \ll 1$. ♦

Часть IV
КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ
В СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Глава 9

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ И ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ И ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

Задача о распространении пассивной примеси в случайном поле скоростей является одной из проблем статистической гидродинамики и имеет большое значение в экологических проблемах диффузии примеси в атмосфере Земли и океанах [68, 118, 182, 193, 202], диффузии в пористых средах [119] и в проблеме крупномасштабного распределения массы на последней стадии формирования Вселенной [24, 210]. Изучение ее интенсивно ведется, начиная с классических работ [105, 106, 221, 222]. В дальнейшем многими исследователями были получены разнообразные уравнения для статистических характеристик поля примеси в эйлеровом и лагранжевом описании. Вывод таких уравнений для различных моделей флуктуирующих параметров в различных приближенных схемах (как для моментных функций поля плотности примеси, так и для ее плотности вероятностей) и их анализ продолжают интенсивно и в последнее десятилетие.

9.1. Общие замечания

Эволюция плотности пассивной примеси, движущейся в поле скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (9.1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей (средний поток), а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая. В общем случае случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ может иметь как соленоидальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$), так и потенциальную (для которой $\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$) составляющие. Правая часть уравнения (9.1) учитывает молекулярную диффузию с коэффициентом диффузии μ , и при этом общая масса примеси сохраняется в процессе эволюции, т. е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const.}$$

На начальных этапах эволюции можно пренебречь эффектами молекулярной диффузии. Тогда уравнение (9.1) упрощается и принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (9.2)$$

Для более полного анализа необходимо включить в рассмотрение поле градиента концентрации примеси $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$, которое описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) p_i(\mathbf{r}, t) = -p_k(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}}, \quad (9.3)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \nabla \rho_0(\mathbf{r}).$$

Это *эйлерово описание* эволюции поля плотности.

Уравнение (9.2) — уравнение в частных производных 1-го порядка и может быть решено методом характеристик. Введя характеристические кривые $\mathbf{r}(t)$, описывающие уравнения движения частицы

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (9.4)$$

перейдем от (9.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = - \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \rho(t), \quad \rho(0) = \rho_0(\mathbf{r}_0). \quad (9.5)$$

Решения уравнений (9.4), (9.5) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они описывают эволюцию плотности в окрестности фиксированной частицы примеси, траектория которой задается равенством $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Причем, как видно из (9.5), плотность в дивергентных потоках меняется, увеличиваясь в областях сжатия и уменьшаясь в областях разрежения среды.

Решения системы (9.4), (9.5) зависят от характеристического параметра $\mathbf{r}_0$ — начальной координаты частицы:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0), \quad \rho(t) = \rho(t | \mathbf{r}_0), \quad (9.6)$$

что будем отмечать вертикальной чертой. Компоненты вектора $\mathbf{r}_0$, однозначно определяющего положение произвольной частицы, называют *лагранжевыми координатами*. При этом уравнения (9.4), (9.5) соответствуют *лагранжеву описанию* эволюции поля плотности. Связь между эйлеровым и лагранжевым описаниями задается первым из равенств (9.6). Разрешив его относительно $\mathbf{r}_0$, получим соотношение, выражающее лагранжевы координаты через эйлеровы:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t). \quad (9.7)$$

Исключая затем, с помощью (9.7), зависимость от $\mathbf{r}_0$ в последнем равенстве (9.6), вернемся к *эйлерову описанию* плотности:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(t | \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)) = \int d\mathbf{r}_0 \rho(t | \mathbf{r}_0) j(t | \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (9.8)$$

где введена новая функция, называемая *расходимостью*,

$$j(t | \mathbf{r}_0) = \det ||j_{ik}(t | \mathbf{r}_0)|| = \det \left\| \frac{\partial r_i(t | \mathbf{r}_0)}{\partial r_{0k}} \right\|.$$

Дифференцируя (9.4) по компонентам вектора $\mathbf{r}_0$, придем к уравнениям для элементов якобиевой матрицы — $j_{ik}(t | \mathbf{r}_0)$:

$$\frac{d}{dt} j_{ik}(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} j_{lk}(t | \mathbf{r}_0), \quad j_{ik}(0 | \mathbf{r}_0) = \delta_{ik}.$$

Отсюда следует, что определитель этой матрицы описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} j(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} j(t | \mathbf{r}_0), \quad j(0 | \mathbf{r}_0) = 1. \quad (9.9)$$

Величина $j(t | \mathbf{r}_0)$ является количественной мерой степени сжатия или растяжения физически бесконечно малых жидких частиц. Сопоставляя уравнения (9.5) и (9.9), видим, что

$$\rho(t | \mathbf{r}_0) = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j(t | \mathbf{r}_0)}. \quad (9.10)$$

Таким образом, выражение (9.8) можно переписать в виде равенства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}), \quad (9.11)$$

устанавливающего связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками. Дельта-функция в правой части (9.11) является *индикаторной функцией* для положения лагранжевой частицы, и, следовательно, после усреднения равенства (9.11) по ансамблю реализаций случайного поля скоростей, получаем хорошо известную связь средней плотности в эйлеровом описании с одновременной плотностью вероятностей

$$P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \langle \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle$$

лагранжевой частицы (см., например, [68])

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0).$$

Аналогичным образом получаем и связь пространственной корреляционной функции поля плотности в эйлеровом описании

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle$$

с совместной плотностью вероятностей положения двух частиц

$$P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t | \mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t | \mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle$$

в виде равенства

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \int d\mathbf{r}_{01} \int d\mathbf{r}_{02} \rho_0(\mathbf{r}_{01}) \rho_0(\mathbf{r}_{02}) P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}).$$

Для бездивергентного поля скоростей ($\operatorname{div} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0$) расходимость частицы, также как и ее плотность, сохраняются, т. е.

$$j(t | \mathbf{r}_0) = 1, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0),$$

и, следовательно, решение уравнения (9.2) в этом случае имеет структуру

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t)).$$

Замечание 9.1. *Учет эффекта молекулярной диффузии.*

Отметим, что и в общем случае уравнения (9.1), как отмечалось во второй части книги, можно воспользоваться статистической интерпретацией решения стохастического уравнения, содержащего производные первого порядка, а именно: если рассмотреть вспомогательное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (9.12)$$

где $\mathbf{V}(t)$ — векторный гауссовый процесс «белого шума» с характеристиками

$$\langle V_i(t) \rangle = 0, \quad \langle V_i(t) V_j(t') \rangle = 2\mu \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (9.13)$$

то

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\mathbf{V}}.$$

Решение же самого уравнения (9.12), согласно равенству (9.11), можно записать в виде

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r})$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) \langle \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{V}}, \quad (9.14)$$

где характеристическая кривая (траектория частицы) описывается динамическим уравнением

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (9.15)$$

Усредняя теперь равенство (9.14) по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\}$, получаем окончательное равенство

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{r}_0 \rho_0(\mathbf{r}_0) P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0), \quad (9.16)$$

где теперь одновременная плотность вероятностей положения лагранжевой частицы

$$P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \langle \langle \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{V}} \rangle_{\mathbf{U}}. \quad (9.17)$$

Таким образом, и для уравнения с частными производными второго порядка (9.1) можно рассматривать лагранжево описание на основе динамического уравнения (9.12). Аналогичным образом для пространственной корреляционной функции поля плотности в эйлеровом описании с учетом эффекта молекулярной диффузии

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle$$

получаем связь с совместной плотностью вероятностей положения двух частиц

$$P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t | \mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t | \mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle$$

в виде равенства

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \int d\mathbf{r}_{01} \int d\mathbf{r}_{02} \rho_0(\mathbf{r}_{01}) \rho_0(\mathbf{r}_{02}) P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}),$$

где совместная плотность вероятностей положения двух частиц

$$P(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_{01}, \mathbf{r}_{02}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t | \mathbf{r}_{01}) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t | \mathbf{r}_{02}) - \mathbf{r}_2) \rangle_{\{\mathbf{V}\}, \mathbf{U}}$$

определяется из статистического анализа динамики двух частиц, описываемых теперь уравнениями

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}_1, t) + \mathbf{V}_1(t), \quad \mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_{01}, \quad (9.18)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}_2, t) + \mathbf{V}_2(t), \quad \mathbf{r}_2(0) = \mathbf{r}_{02}, \quad (9.19)$$

где $\mathbf{V}_1(t)$ и $\mathbf{V}_2(t)$ — статистически независимые векторные процессы с параметрами (9.13). ♦

Итак, в лагранжевом представлении поведение пассивной примеси описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (9.4), (9.5), (9.9). От них легко перейти к линейному уравнению Лиувилля в соответствующем фазовом пространстве. Для этого введем индикаторную функцию

$$\Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}) \delta(\rho(t | \mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j(t | \mathbf{r}_0) - j), \quad (9.20)$$

в форме записи которой явно учтено, что решение исходных динамических уравнений зависит от лагранжевых координат $\mathbf{r}_0$. Дифференцируя (9.20) по времени и используя уравнения (9.4), (9.5) и (9.9), придем к эквивалентному исходной задаче уравнению Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0),$$

$$\Phi_{\text{Lag}}(0; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1). \quad (9.21)$$

Одновременная плотность вероятностей для решения динамических задач (9.4), (9.5) и (9.9) совпадает с индикаторной функцией, усредненной по ансамблю реализаций

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \langle \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \rangle.$$

Для описания поля плотности в эйлеровом представлении введем индикаторную функцию, аналогичную (9.20):

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho), \quad (9.22)$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ в трехмерном случае или контуре в двумерном случае. Уравнение для нее имеет вид (см. гл. 2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho)], \quad (9.23)$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho).$$

Для бездивергентного поля скоростей уравнения (9.23) и (9.2) совпадают. Принципиальные отличия возникают только для дивергентного поля скоростей.

Одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (9.2) в этом случае совпадает с усредненной по ансамблю реализаций индикаторной функцией

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \rangle,$$

и, следовательно, одноточечная плотность вероятностей поля плотности в эйлеровом описании связана с одновременной плотностью вероятностей в лагранжевом описании с помощью равенства

$$P(t, \mathbf{r}; \rho) = \int d\mathbf{r}_0 \int_0^\infty dj \, j P(t; \mathbf{r}, \rho, j \mid \mathbf{r}_0). \quad (9.24)$$

Наряду с этим, индикаторная функция дает богатую количественную и качественную информацию о геометрической структуре случайных полей (см. гл. 3).

В статистической топографии, как и в обычной топографии горных массивов, основным объектом изучения является система контуров — линий уровня (в двумерном случае) или поверхностей (в трехмерном случае) постоянных значений, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}.$$

Для анализа системы контуров (здесь для простоты будем говорить о двумерном случае) удобно ввести сингулярную индикаторную функцию (9.22), сосредоточенную на них и являющуюся функционалом параметров среды.

Через функцию (9.22) выражаются, например, такие величины, как общая площадь областей, ограниченных линиями уровня, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$:

$$S(t, \rho) = \int_\rho^\infty d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \, \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad (9.25)$$

и общая «масса» поля, заключенная в этих областях:

$$M(t, \rho) = \int_\rho^\infty \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} \, \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}). \quad (9.26)$$

Так, для динамики пассивной примеси, описываемой уравнением Лиувилля (9.23), дифференцируя по времени равенства (9.25) и (9.26), получаем выражения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} S(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \\ \frac{\partial}{\partial t} M(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \tilde{\rho} + 1 \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}),\end{aligned}$$

и, следовательно, площадь области, ограниченной контуром $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$, а также общая масса, сосредоточенная в этой области, сохраняются для бездивергентного поля скорости. В этом случае, очевидно, также сохраняется число замкнутых контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени исходя из заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве, определяемого равенством $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho = \text{const}$.

При наличии у поля скорости потенциальной составляющей все эти величины эволюционируют во времени.

Средние по ансамблю реализаций значения выражений (9.25) и (9.26) непосредственно определяются одноточечной плотностью вероятностей.

Дополнительную информацию о детальной структуре поля $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно получить, включив в рассмотрение его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$. Так, например, величина

$$l(t, \rho) = \int d\mathbf{r} |\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)| \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) = \oint dl \quad (9.27)$$

описывает общую длину контуров $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$.

Выражение (9.27) описывается расширенной индикаторной функцией

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}), \quad (9.28)$$

удовлетворяющей для примеси в случайном поле скоростей уравнению Лиувилля, вытекающему из (9.2) и (9.3):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) &= \\ &= \left[\frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial p_i} p_k + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial p_i} \rho \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}),\end{aligned}$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho) \delta(\mathbf{p}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{p}). \quad (9.29)$$

Следствием уравнения (9.29), например, является эволюционное уравнение

для длины контура (9.27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} l(t, \rho) &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} p \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{p} \left[-\frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \frac{p_i p_k}{p} + \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_k} p \frac{\partial}{\partial p} \rho - \frac{\partial^2 U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i \partial r_k} \frac{p_i}{p} \rho \right] \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (9.30)$$

откуда видно, что длина контура эволюционирует во времени даже для бездивергентного поля скоростей.

Отметим, что средние значения формул (9.27), (9.30) связаны с совместной одноточечной плотностью вероятностей полей $\rho(\mathbf{r}, t)$ и его градиента $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$, определяемой путем усреднения индикаторной функции (9.28) по ансамблю реализаций, т. е. функцией

$$P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \langle \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p}) \rangle.$$

9.2. Статистический анализ

Рассмотрим теперь задачу статистического описания диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей.

Случайное поле скоростей предполагается в общем случае дивергентным ($\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \neq 0$), статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ($\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$)

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle &= B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \\ E_{ij}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (9.31)$$

где N — размерность пространства, а спектральный тензор поля скоростей имеет структуру

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + E^p(k, t) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (9.32)$$

Здесь через $E^s(k, t)$ и $E^p(k, t)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей.

Непосредственный практический интерес представляют случаи:

- чисто бездивергентного гидродинамического потока, для которого $\text{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ ($E^p(k, t) = 0$);
- случай чисто потенциального поля скоростей ($E^s(k, t) = 0$);
- смешанный случай.

В дальнейшем, при расчете статистических свойств поля плотности и его градиента воспользуемся приближением дельта-коррелированности во времени поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, в рамках которого корреляционный тензор

(9.31) аппроксимируется выражением

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = 2B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r})\delta(t), \quad (9.33)$$

где

$$B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dt B_{ij}(\mathbf{r}, t).$$

В силу однородности и изотропности поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} B_{kl}^{\text{ef}}(0) &= D_0 \delta_{kl}, \quad \frac{\partial}{\partial r_i} B_{kl}^{\text{ef}}(0) = 0, \\ -\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} B_{kl}^{\text{ef}}(0) &= \frac{D^s}{N(N+2)} [(N+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] + \\ &\quad + \frac{D^p}{N(N+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}], \quad (9.34) \\ \frac{\partial^4}{\partial r_i \partial r_k \partial r_j \partial r_l} B_{kl}^{\text{ef}}(0) &= D_4^p \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь по повторяющимся индексам, как обычно, предполагается суммирование и введены обозначения

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} [(N-1)E^s(k, t) + E^p(k, t)], \\ D^s &= \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k, t), \quad D^p = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k, t), \quad (9.35) \\ D_4^p &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{k} k^4 E^p(k, t). \end{aligned}$$

Диффузия примеси в случайном поле скоростей и в лагранжевом представлении описывается уравнением Лиувилля (9.21), а в эйлеровом представлении — уравнениями (9.23), (9.29). Усреднение этих уравнений по ансамблю реализаций поля скоростей $\{\mathbf{u}\}$ приводит к уравнениям для одновременного лагранжева вероятностного распределения $P(t; \mathbf{r}, \mathbf{p}, j | \mathbf{r}_0)$ и одноточечных эйлеровых вероятностных распределений $P(t, \mathbf{r}; \mathbf{p})$ и $P(t, \mathbf{r}; \mathbf{p})$.

9.2.1. Лагранжево описание (диффузия частиц).

Одноточечные статистические характеристики. Усреднив уравнение (9.21) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, используя формулу Фурутцу–Новикова и принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}', t=0)} \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \\ = \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_{\mathbf{p}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial r_{\mathbf{p}}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial}{\partial j} j \right) \right\} \Phi_{\text{Lag}}(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

и соотношения (9.34), придем к уравнению Фоккера–Планка для одновременной лагранжевой плотности вероятностей:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \\ = D^p \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial j} \rho j + \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2 \right) P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0), \quad (9.36) \end{aligned}$$

$$P(0; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho) \delta(j - 1).$$

Решение уравнения (9.36) таково:

$$P(t; \mathbf{r}, \rho, j | \mathbf{r}_0) = P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) P(t; j | \mathbf{r}_0) \delta \left(\rho - \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{j} \right), \quad (9.37)$$

где

$$P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}') = e^{D_0 t \Delta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(4\pi D_0 N t)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4 D_0 t} \right\} \quad (9.38)$$

— вероятностное распределение координат частицы пассивной примеси, а

$$P(t; j | \mathbf{r}_0) = e^{D^p t \frac{\partial^2}{\partial j^2} j^2} \delta(j - 1) = \frac{1}{2j \sqrt{\pi \tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(j e^\tau)}{4\tau} \right\} \quad (9.39)$$

— вероятностное распределение поля расходимости в ее окрестности. В (9.39) и ниже используется безразмерное время $\tau = D^p t$. Подчеркнем, что полученное решение (9.37) означает статистическую независимость координат $\mathbf{r}(t | \mathbf{r}_0)$ и расходимости $j(t | \mathbf{r}_0)$ в окрестности частицы с лагранжевыми координатами $\mathbf{r}_0$. Причем логарифмически нормальное распределение (9.39) означает, что величина $\chi(t | \mathbf{r}_0) = \ln j(t | \mathbf{r}_0)$ распределена по гауссовому закону с параметрами

$$\langle \chi(t | \mathbf{r}_0) \rangle = -\tau, \quad \sigma_\chi^2(t) = 2\tau. \quad (9.40)$$

В частности, из (9.39), как впрочем и непосредственно из уравнения (9.36), вытекают следующие выражения для моментов случайного поля расходимости:

$$\langle j^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = e^{n(n-1)\tau}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.41)$$

Подчеркнем, что средняя расходимость постоянна $\langle j(t | \mathbf{r}_0) \rangle = 1$, а ее высшие моменты экспоненциально растут со временем.

Заметим еще, что, согласно (9.10) и (9.41), имеем следующее выражение для лагранжевых моментов плотности:

$$\langle \rho^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}_0) e^{n(n+1)\tau},$$

означающее, в частности, экспоненциальный рост как средней плотности, так и ее высших моментов в лагранжевом представлении. При этом плотность вероятностей для плотности частицы имеет вид

$$P(t; \rho | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^{-\tau}/\rho_0(\mathbf{r}_0))}{4\tau} \right\}. \quad (9.42)$$

Его можно получить и как решение уравнения Фоккера–Планка, следующего из (9.36),

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \rho | \mathbf{r}_0) = D^p \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P(t; \rho | \mathbf{r}_0), \quad P(0; \rho | \mathbf{r}_0) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}_0) - \rho).$$

Выявленное выше парадоксальное поведение статистических характеристик расходимости и плотности, состоящее в одновременном росте со временем их моментных функций, объясняется свойствами логарифмически нормального распределения вероятностей. Так, типичной реализацией случайной расходимости является экспоненциально спадающая кривая

$$j^*(t) = e^{-t}.$$

При этом для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также мажорантные оценки. И, например, с вероятностью $p = 1/2$

$$j(t | \mathbf{r}_0) < 4e^{-t/2}$$

на всем интервале времени $t \in (t_1, t_2)$.

Аналогично, для реализаций плотности имеем типичную реализацию и минорантную оценку:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^{\tau}, \quad \rho(t | \mathbf{r}_0) > \frac{\rho_0}{4} e^{\tau/2}.$$

Подчеркнем, что исследованные выше лагранжевы статистические свойства частицы в потоках, содержащих случайную потенциальную составляющую, качественно отличаются от статистических свойств частицы в бездивергентных потоках, где $j(t | \mathbf{r}_0) \equiv 1$, а плотность в окрестности фиксированной частицы сохраняется, т.е. $\rho(t | \mathbf{r}_0) = \rho_0(\mathbf{r}_0) = \text{const}$. Приведенные выше статистические оценки для частицы означают, что статистика случайных процессов $j(t | \mathbf{r}_0)$ и $\rho(t | \mathbf{r}_0)$ формируется выбросами их реализаций относительно типичных реализаций.

В то же время распределения вероятностей координат частиц в обоих случаях дивергентного и бездивергентного поля скоростей по сути одинаковы.

Плоско-параллельный средний поток. Выше мы рассмотрели статистическое описание динамики частицы в отсутствие среднего потока. Представляет также определенный интерес случай двумерного плоскопараллельного среднего потока жидкости, для которого

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = v(y)\mathbf{l},$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{l} = (1, 0)$. В этом случае векторное уравнение (9.4) сводится к двум скалярным:

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(\mathbf{r}, t). \quad (9.43)$$

Практический интерес представляют потоки следующих видов:

- линейный сдвиговой поток, для которого $v(y) = \alpha y$;
- тангенциальный разрыв, для которого $v(y) = v_0\theta(y - y_0) - v_0\theta(y_0 - y)$, где $\theta(y)$ — ступенчатая функция Хевисайда, равная 1 при $y > 0$ и 0 в противоположном случае;

- колмогоровский поток, для которого $v(y) = v_0 \sin \beta y$;

- струйное течение, для которого $v(y) = \overline{v(y)}\theta(|y_0| - y)$.

Информацию об устойчивости таких потоков жидкости можно найти, например, в монографиях [17, 29, 68].

В этом случае для задачи (9.43) стохастическое уравнение Лиувилля для индикаторной функции

$$\Phi(t; x, y) = \delta(x(t) - x) \delta(y(t) - y)$$

упрощается и принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} u_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial y} u_2(\mathbf{r}, t) \right] \Phi(t; \mathbf{r}). \quad (9.44)$$

Усреднив теперь уравнение (9.44) по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, получаем уравнение Фоккера–Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) P(t; \mathbf{r}) = D_0 \Delta P(t; \mathbf{r}), \quad P(0; \mathbf{r}) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (9.45)$$

В этом случае уравнению (9.45) стохастически эквивалентна частица, динамика которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(t),$$

где $u_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые гауссовы процессы «белого шума» со статистическими характеристиками

$$\langle \mathbf{u}(t) \rangle = 0, \quad \langle u_i(t) u_j(t') \rangle = 2D_0 \delta(t - t').$$

Эти уравнения интегрируются:

$$y(t) = y_0 + w_2(t), \quad x(t) = x_0 + w_1(t) + \int_0^t d\tau v(y + w_2(\tau)), \quad (9.46)$$

где

$$w_i(t) = \int_0^t d\tau u_i(\tau)$$

— независимые винеровские процессы с характеристиками

$$\langle \mathbf{w}(t) \rangle = 0, \quad \langle w_i(t) w_j(t') \rangle = 2D_0 \delta_{ij} \min\{t, t'\}.$$

В частности, из (9.46) следует, что координата $y(t)$ имеет гауссову плотность распределения вероятностей с параметрами

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle y^2(t) \rangle = y_0^2 + 2D_0 t,$$

что соответствует обычному броуновскому движению с коэффициентом диффузии D_0 .

Из равенств (9.46) также легко вычислить любые моментные функции $\langle x^n(t) \rangle$ и корреляции $\langle x^n(t) y^m(t) \rangle$ для траектории частиц.

Так, в простейшем примере линейного сдвигового потока

$$v_x = \alpha y, \quad v_y = 0$$

равенства (9.46) соответствуют совместной гауссовой плотности вероятностей с параметрами [118, 136, 225]

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle x(t) \rangle = x_0 + \alpha y_0 t,$$

$$\sigma_{xx}^2(t) = 2D_0 t \left(1 + \alpha t + \frac{1}{3} \alpha^2 t^2 \right), \quad \sigma_{yy}^2(t) = 2D_0 t, \quad \sigma_{xy}^2(t) = 2D_0 t (1 + \alpha t).$$

В случае колмогоровского течения имеем [43]

$$\langle y(t) \rangle = y_0, \quad \langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta^2 D_0} \left[1 - e^{-\beta^2 D_0 t} \right] \sin(\beta y_0),$$

и при условии $t \gg 1/(D_0 \beta^2)$

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0}{\beta^2 D_0} \sin(\beta y_0),$$

т. е. частица в среднем находится в конечной части пространства. В этом случае корреляция $x(t)$ и $y(t)$ также не зависит от времени:

$$\langle (x(t) - x_0)(y(t) - y_0) \rangle_{t \rightarrow \infty} = x_0 + \frac{4v_0}{\beta^3 D_0} \cos(\beta y_0).$$

Однако в этом пределе величина $x(t)$ ведет себя, как броуновская частица с коэффициентом диффузии D_0 , т. е. $\sigma_{xx}^2 \sim 2D_0 t$.

Отметим, что после потери устойчивости течения Колмогорова устанавливается квазипериодический в плоскости (x, y) поток. Диффузия примеси в потоке такого типа с $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \{B \cos y, A \sin x\}$ рассматривалась в работах [117, 125].

Замечание 9.2. *Диффузия облака примеси.*

Выше мы рассмотрели диффузию частиц при наличии среднего плоскопараллельного потока жидкости. В этом случае уравнение для средней плотности в эйлеровом описании, очевидно, также описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = D_0 \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \langle \rho(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0(\mathbf{r}),$$

отличающимся от (9.45) только начальным условием. С точки зрения эйлерова описания для средней концентрации поля примеси найденные моментные функции типа $\langle x^n(t) y^m(t) \rangle$, характеризуют расплывание «облака» примеси. Так, величина

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \frac{1}{M} \int d\mathbf{r} \, \mathbf{r} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

где $M = \int d\mathbf{r} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \int dr \rho_0(r)$ — общая масса примеси, определяет положение «центра тяжести» во времени облака примеси, а более высокие моменты, как, например,

$$\langle r_i(t) r_j(t) \rangle = \frac{1}{M} \int d\mathbf{r} \, r_i r_j \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

характеризуют деформацию этого облака. $\blacklozenge$

Двухточечные статистические характеристики. Рассмотрим теперь совместную динамику двух частиц в отсутствие среднего потока. В этом случае индикаторная функция

$$\Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_2)$$

описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right] \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Ее усреднение по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, с учетом формулы Фурутцу–Новикова и равенства

$$\frac{\delta}{\delta u_j(\mathbf{r}', t=0)} \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = - \left[\frac{\partial}{\partial r_{1j}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial r_{2j}} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \right] \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

приводит для совместной плотности вероятностей положения двух частиц

$$P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \Phi(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$$

к уравнению Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \left[\frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] B_{ij}^{\text{ef}}(0) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) P(t; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Умножая теперь уравнение (9.47) на функцию $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{l})$ и интегрируя по $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, получаем для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц

$$P(t; \mathbf{l}) = \langle \delta(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{l}) \rangle$$

уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{l}) = \frac{\partial^2}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) P(t; \mathbf{l}), \quad P(0; \mathbf{l}) = \delta(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0), \quad (9.48)$$

где

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = 2 [B_{\alpha\beta}^{\text{ef}}(0) - B_{\alpha\beta}^{\text{ef}}(\mathbf{l})]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, а $\mathbf{l}_0$ — начальное расстояние между частицами.

В общем случае решить уравнение (9.48) не удастся. Однако если начальное расстояние между частицами $l_0 \ll l_{\text{cor}}$, где l_{cor} — пространственный радиус корреляции поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, то можно разложить функции $D_{\alpha\beta}(\mathbf{l})$ в ряд Тейлора, в результате чего в первом приближении получаем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = - \left. \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}^{\text{ef}}(\mathbf{l})}{\partial l_i \partial l_j} \right|_{\mathbf{l}=0} l_i l_j.$$

С использованием представления (9.32)–(9.35) диффузионный тензор упрощается и может быть записан, например, в двумерном случае в виде

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{l}) = \frac{1}{8} [3D^s + D^p] l^2 \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} [D^s - D^p] l_\alpha l_\beta. \quad (9.49)$$

Подставляя теперь (9.49) в (9.48), умножая обе части получившегося уравнения на l^n и интегрируя по $\mathbf{l}$, получаем замкнутое уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle l^n(t) \rangle = \frac{1}{8} n [n(D^s + 3D^p) + 2(D^s - D^p)] \langle l^n(t) \rangle,$$

решение которого соответствует экспоненциально растущим во времени функциям для всех моментов ($n = 1, 2, \dots$). При этом распределение вероятностей для случайного процесса $l(t)/l_0$ будет логарифмически нормальным с параметрами

$$\langle \ln[l(t)/l_0] \rangle = \frac{1}{4} (D^s - D^p) t, \quad \sigma_{\ln[l(t)/l_0]}^2 = \frac{1}{4} (D^s + 3D^p) t.$$

Следовательно, типичной реализацией для расстояния между двумя частицами будет экспоненциальная функция времени [46, 47, 52]

$$l^*(t) = l_0 \exp \left\{ \frac{1}{4} (D^s - D^p) t \right\},$$

растущая или затухающая в зависимости от знака разности $(D^s - D^p)$. В частности, для бездивергентного поля скоростей ($D^p = 0$) имеем экспоненциально растущую типичную реализацию, что соответствует экспоненциально быстрому разбеганию частиц при малых расстояниях между ними. Этот результат справедлив для времен

$$\frac{1}{4} D^s t \ll \ln \left(\frac{l_{\text{cor}}}{l_0} \right),$$

при которых справедливо разложение (9.49). В другом предельном случае — потенциальном поле скоростей ($D^s = 0$), типичной реализацией будет экспоненциально убывающая кривая, т. е. налицо стремление частиц «слиться». Учитывая, что при этом сами жидкие частицы сжимаются, мы видим, что в этом случае должны образовываться *кластеры*, т. е. зоны компактного

сосредоточения частиц, расположенные в большей степени в разреженных зонах, что согласуется с результатами численного моделирования эволюции реализации однородного вначале распределения частиц в случайном потенциальном поле скоростей, приведенного на рис. 1.1, б (правда для совершенно другой статистической модели поля скоростей). Это означает, что само явление кластеризации не зависит от модели случайного поля скоростей, хотя, конечно, статистические параметры, характеризующие это явление, могут существенно зависеть от модели.

9.2.2. Эйлерово описание. Прежде всего отметим, что в случае дельта-коррелированного случайного поля скорости от линейного уравнения (9.1), в отсутствие среднего потока, сравнительно легко перейти к замкнутым уравнениям как для средней плотности плавучей примеси, так и для ее высших многоточечных корреляционных функций. Например, усреднив уравнение (9.1), используя формулу Фурутцу–Новикова (6.10) и вытекающее из (9.1) выражение для вариационной производной

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_\alpha(\mathbf{r}', t - 0)} = -\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t),$$

получим уравнение для средней плотности примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = (D_0 + \mu) \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (9.50)$$

При выполнении условия $D_0 \gg \mu$ ($\mu \ll \sigma_u^2 l_{\text{cor}}^2$), где σ_u^2 — дисперсия случайного поля скоростей, а l_{cor}^2 — его радиус корреляции, уравнение (9.50) совпадает с уравнением для вероятностного распределения координат частицы (9.38) и, следовательно, коэффициент диффузии D_0 , аналогично диффузии в бездивергентном случайном поле скоростей, характеризует лишь масштабы области сосредоточения примеси в целом, не неся информации о локальной структуре реализаций плотности.

Аналогичным образом для пространственной корреляционной функции поля плотности

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle \rho(\mathbf{r}_1, t) \rho(\mathbf{r}_2, t) \rangle$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = & \left[\frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{2i} \partial r_{2j}} \right] [B_{ij}^{\text{ef}}(0) + \mu \delta_{ij}] \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \end{aligned}$$

совпадающее с уравнением для двухчастичной плотности вероятностей в отсутствие молекулярного коэффициента диффузии ($\mu = 0$).

В частном случае постоянства начального распределения поля плотности ($\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$) случайное поле $\rho(\mathbf{r}, t)$ будет однородным и изотропным случайным полем. В этом случае $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0$, а уравнение для

корреляционной функции упрощается и принимает вид ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, t) = 2\mu \Delta \Gamma(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} D_{ij}(\mathbf{r}) \Gamma(\mathbf{r}, t),$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = 2 [B_{ij}^{\text{ef}}(0) - B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r})]$$

— структурная матрица векторного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, и при отсутствии молекулярной диффузии совпадает с уравнением для плотности вероятностей относительной диффузии двух частиц. Для турбулентного потока жидкости это уравнение анализировалось в работе [63].

Для описания локального поведения реализаций примеси в случайном поле скоростей нужно знать вероятностное распределение ее плотности. В пренебрежении молекулярной диффузией уравнение для эйлеровой плотности вероятностей легко вывести, в силу формулы (9.24), домножив уравнение (9.36) на j и интегрируя его по всем возможным значениям j и $\mathbf{r}_0$. В итоге находим уравнение для плотности вероятностей поля плотности в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) P(t, \mathbf{r}; \rho) = D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho P(t, \mathbf{r}; \rho), \quad P(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho). \quad (9.51)$$

Отсюда, в частности, следует, что моментные функции поля плотности описываются уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0 \Delta \right) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = D^p n(n-1) \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, 0) \rangle = \rho_0^n(\mathbf{r}). \quad (9.52)$$

Его решение имеет структуру

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{n(n-1)\tau} \int d\mathbf{r}' P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}') \rho_0^n(\mathbf{r}'), \quad (9.53)$$

где функция $P(t; \mathbf{r} | \mathbf{r}')$ описывается равенством (9.38).

Так, если начальная плотность примеси всюду одинакова, $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$, то вероятностное распределение плотности не зависит от $\mathbf{r}$ и лог-нормально с плотностью вероятностей и соответствующей интегральной функцией распределения:

$$P(t; \rho) = \frac{1}{2\rho\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2(\rho e^\tau / \rho_0)}{4\tau} \right\}, \quad F(t; \rho) = \Phi \left(\frac{\ln(\rho e^\tau / \rho_0)}{2\sqrt{\tau}} \right), \quad (9.54)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл ошибок равен

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z dy \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\}.$$

При этом все моментные функции, начиная со второй, экспоненциально растут со временем:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0^n e^{n(n-1)\tau}, \quad (9.55)$$

а типичная реализация поля плотности в любой фиксированной точке пространства экспоненциально спадает во времени:

$$\rho^*(t) = \rho_0 e^{-\tau}, \quad (9.56)$$

что свидетельствует о наличии кластерного характера флуктуаций плотности среды в произвольных дивергентных потоках. Формирование же эйлеровой статистики плотности в любой фиксированной точке пространства идет за счет флуктуаций плотности вокруг этой кривой.

Выше мы обсудили одноточечное вероятностное распределение плотности примеси в эйлеровом представлении, что уже позволило нам сделать ряд заключений о поведении реализаций поля плотности во времени в фиксированных точках пространства. Покажем теперь, что это распределение дает также возможность выяснить некоторые характерные особенности пространственно-временной структуры реализаций поля плотности.

Для наглядности здесь ограничимся двумерным случаем. Как говорилось выше, важные сведения о пространственном поведении реализаций несет анализ линий уровня, определяемых равенством

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}. \quad (9.57)$$

В частности, для таких функционалов поля плотности, как общая величина площади, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho = S(t, \rho)$, общая масса примеси, заключенная в этих областях — $M(t, \rho)$, средние значения описываются одноточечной плотностью вероятностей,

$$\langle S(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}), \quad \langle M(t, \rho) \rangle = \int_{\rho}^{\infty} \tilde{\rho} d\tilde{\rho} \int d\mathbf{r} P(t, \mathbf{r}; \tilde{\rho}). \quad (9.58)$$

Подставив сюда решение уравнения (9.51), после несложных преобразований легко найти явные выражения для этих величин:

$$\begin{aligned} \langle S(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \left(\frac{\rho_0(\mathbf{r}) e^{-\tau}}{\rho} \right) \right), \\ \langle M(t, \rho) \rangle &= \int d\mathbf{r} \rho_0(\mathbf{r}) \Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} \ln \left(\frac{\rho_0(\mathbf{r}) e^{\tau}}{\rho} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.59)$$

Отсюда видно, в частности, что при $\tau \gg 1$ средняя площадь областей, где плотность выше уровня ρ , убывает со временем по закону

$$\langle S(t, \rho) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau\rho}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}, \quad (9.60)$$

в то время как заключенная в этих областях средняя масса примеси

$$\langle M(t, \rho) \rangle \approx M - \sqrt{\frac{\rho}{\pi\tau}} e^{-\tau/4} \int d\mathbf{r} \sqrt{\rho_0(\mathbf{r})} \quad (9.61)$$

— монотонно стремится к полной ее массе $M = \int d\mathbf{r}\rho_0(\mathbf{r})$. Это еще раз подтверждает сделанный ранее вывод о том, что частицы примеси со временем стремятся собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности, окруженные разреженными областями.

Динамику формирования кластеров можно проиллюстрировать на примере, когда первоначально плавающая примесь равномерно распределена на плоскости — $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0 = \text{const}$. При этом средняя удельная площадь областей (приходящаяся на единицу площади), внутри которых $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, равна

$$s(t, \rho) = \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 e^{-\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (9.62)$$

где $P(t; \rho)$ — не зависящее от $\mathbf{r}$ решение уравнения (9.51) (т.е. функция (9.54)), а удельная средняя масса примеси (приходящаяся на единицу площади), сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$m(t, \rho) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \tilde{\rho} P(t; \tilde{\rho}) = \Phi\left(\frac{\ln(\rho_0 e^{\tau}/\rho)}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (9.63)$$

Из (9.62), (9.63) следует, что на больших временах их средняя удельная площадь убывает по закону

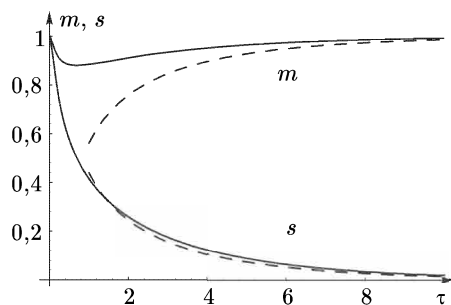
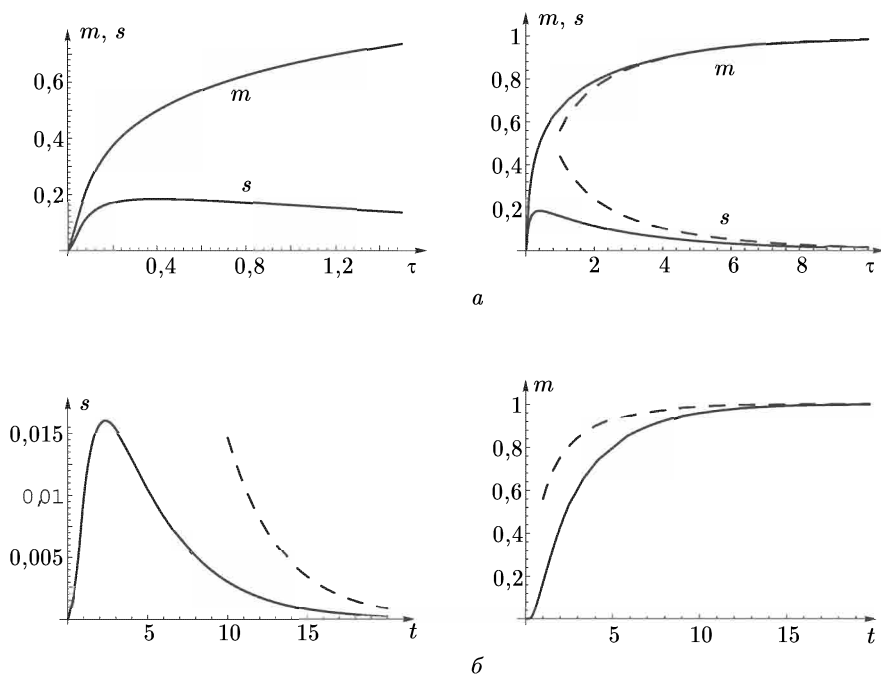
$$s(t, \rho) = \Phi(-\sqrt{\tau}/2) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\tau/4}, \quad (9.64)$$

независимо от отношения ρ/ρ_0 , в то время как внутри них собираются практически вся масса примеси:

$$m(t, \rho) = \Phi(\sqrt{\tau}/2) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\tau/4}. \quad (9.65)$$

Характер же временной эволюции образования кластерной структуры существенно зависит от отношения ρ/ρ_0 . Так, если $\rho/\rho_0 < 1$, то в начальный момент времени $s(0, \rho) = 1$ и $m(0, \rho) = 1$. Далее, ввиду того что частицы плавающей примеси первое время стремятся разбежаться, образуются небольшие области, где $\rho(\mathbf{r}, t) < \rho$, содержащие незначительную часть общей массы. С течением времени эти области быстро увеличиваются, а их масса перетекает в кластерные области, довольно быстро выходя на асимптотические зависимости (9.64), (9.65) (рис. 4.1). Отметим, что в момент времени $\tau^* = -\ln(\rho/\rho_0)$ величина площади $s(\tau^*, \rho) = 1/2$.

В обратном, более интересном, случае $\rho/\rho_0 > 1$ в начальный момент времени $s(0, \rho) = 0$ и $m(0, \rho) = 0$. Из-за начального разбегания частиц образуются небольшие кластерные области, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, практически сохраняющиеся во времени и интенсивно втягивающие в себя значительную часть общей массы. В дальнейшем площади этих областей с течением времени уменьшаются, а содержащаяся в них масса увеличивается согласно асимптотическим зависимостям (9.64), (9.65) (рис. 4.2, а, б).

Рис. 4.1. Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 0,5$ Рис. 4.2. Динамика образования кластеров для $\rho/\rho_0 = 1,5$ (а) и $\rho/\rho_0 = 10$ (б)

Для более детального описания поля плотности в случайном поле скоростей необходимо, как указывалось ранее, рассматривать его пространственный градиент $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \nabla \rho(\mathbf{r}, t)$ и, вообще говоря, производные высшего порядка.

Градиент плотности описывается динамическим уравнением (9.3), и, следовательно, индикаторная функция

$$\Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{p})$$

описывается уравнением (9.29). Усредняя теперь (9.29) по ансамблю реализаций поля скоростей в приближении дельта-коррелированного во времени поля скоростей, получаем уравнение для одноточечной совместной плотности вероятностей плотности и его градиента $P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \langle \Phi(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) \rangle$, зависящей от пространственно временной точки $(\mathbf{r}, t)$, вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = & \left[D_0 \Delta + \frac{2}{N} D^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \rho + D^p \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 + \right. \\ & + \frac{1}{N(N+2)} D^s \widehat{L}^s(\mathbf{p}) + \frac{1}{N(N+2)} D^p \widehat{L}^p(\mathbf{p}) + \\ & \left. + \frac{2(N+1)}{N} D^p \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho + D^p \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \rho^2 \right] P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}), \quad (9.66) \end{aligned}$$

где введены операторы

$$\begin{aligned} \widehat{L}^s(\mathbf{p}) &= (N+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} - 2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 = (N+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l, \\ \widehat{L}^p(\mathbf{p}) &= \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 + (N^2 + 4N + 6) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 + (N^2 + 2N + 2) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Уравнение (9.66) не удается исследовать в общем случае. Это можно сделать только для бездивергентного поля скоростей, когда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) &= D_0 \Delta P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{N(N+2)} D^s \left((N+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}). \quad (9.67) \end{aligned}$$

Так как случайное поле скоростей является бездивергентным, то решение уравнения (9.67) имеет структуру

$$P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{r}_0 P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0), \quad (9.68)$$

где $P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ и $P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0)$ — соответствующие лагранжевы плотности вероятностей положения частицы и ее градиента. Первая функция описывается выражением (9.38), а вторая описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0) = \frac{1}{N(N+2)} D^s \left((N+1) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0). \quad (9.69)$$

Следствием уравнения (9.69) является сохранение среднего значения градиента плотности частицы примеси — $\langle \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)$. Что же касается моментных функций модуля градиента плотности, то они описываются

уравнениями, вытекающими из (9.69):

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle p^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \frac{n(N+n)(N-1)}{N(N+2)} D^s \langle p^n(t | \mathbf{r}_0) \rangle, \quad \langle p^n(0 | \mathbf{r}_0) \rangle = p_0^n(\mathbf{r}_0). \quad (9.70)$$

Следовательно, модуль градиента поля плотности в лагранжевом описании является логарифмически нормальной величиной, типичная реализация которой, так же, как и его моментные функции, экспоненциально растут во времени. В частности, первый и второй момент в двумерном случае описываются равенствами

$$\langle |\mathbf{p}(t | \mathbf{r}_0)| \rangle = |\mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)| \exp \left\{ \frac{3}{8} D^s t \right\}, \quad \langle \mathbf{p}^2(t | \mathbf{r}_0) \rangle = \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}_0) e^{D^s t}. \quad (9.71)$$

Отметим, что логнормальное распределение для модуля градиента примеси, впервые предположенное в работе [137], согласуется с атмосферными экспериментальными данными [120, 153].

Кроме того, из уравнения (9.67) с учетом формулы (9.27) следует, что общая средняя длина контура $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho = \text{const}$ (в двумерном случае) также экспоненциально растет во времени по закону

$$\langle l(t, \rho) \rangle = l_0 e^{D^s t},$$

где l_0 — начальная длина контура [165, 166, 208]. Напомним, что в этом случае для бездивергентного поля скоростей сохраняется число контуров, которые не могут исчезать и порождаться в среде, а лишь эволюционируют во времени исходя из заданного в начальный момент времени их распределения в пространстве.

Таким образом, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным; пространственные градиенты обостряются, и линии уровня приобретают фрактальный характер. Такую картину мы видели на рис. 1.1, а, соответствующей численному моделированию, правда, для совершенно другой модели флуктуаций поля скоростей. Это означает, что общие особенности поведения, отмеченные выше, не зависят от типа моделей.

Замечание 9.3. *Диффузия неконсервативной примеси.*

Выше мы изучали статистические характеристики решения уравнения (9.2) в лагранжевом и эйлеровом описании, и было показано, что при наличии потенциальной составляющей у поля скорости происходит кластеризация как в динамике частиц, так и в эйлеровом поле плотности. Наряду с динамическим уравнением (9.2) представляет определенный интерес и уравнение, соответствующее переносу не консервативной примеси (см., например, [61]):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}).$$

В этом случае в лагранжевом описании уравнение для динамики частиц совпадает с уравнением (9.4) и, следовательно, для частиц осуществляется кластеризация. Однако в эйлеровом описании, как легко видеть, кластеризация не осуществляется. В этом случае, аналогично бездивергентному

полю скоростей, сохраняется среднее число контуров, средняя площадь, где $\rho(\mathbf{r}, t) > \rho$, и средняя «масса» примеси $\int dS \rho(\mathbf{r}, t)$, сосредоточенная в этих контурах. ♦

9.3. Учет дополнительных факторов

Выше мы рассмотрели простейшую статистическую задачу о диффузии примеси в случайном поле скоростей в отсутствие регулярного потока и эффекта молекулярной диффузии. Также для статистического описания использовалось приближение дельта-коррелированного во времени случайного поля. Все неучтенные факторы начинают действовать с какого-то момента времени, так что полученные выше результаты справедливы лишь на начальном этапе диффузии. Кроме того, эти факторы могут приводить и к новым физическим эффектам. В данном разделе кратко обсудим эти дополнительные задачи для бездивергентного (несжимаемого) поля скоростей.

9.3.1. Плоско-параллельный средний поток. При наличии среднего плоско-параллельного потока жидкости динамика частиц рассматривалась в шестом разделе предыдущей главы книги.

Более полную картину диффузии примеси можно получить, включив в рассмотрение поле градиента плотности примеси. В этом случае для двумерной задачи, соответствующей линейному сдвигу $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) = \alpha y \mathbf{l}$, $\mathbf{l} = (1, 0)$, вместо уравнения (9.67) получаем уравнение [165, 166]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) = & \left[-\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + D_0 \Delta \right] P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}) + \\ & + \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) \right\} P(t, \mathbf{r}; \rho, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (9.72)$$

Решение уравнения (9.72) можно также записать в виде интеграла (9.68), где лагранжевы плотности вероятностей $P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ и $P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0)$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \left[-\alpha y \frac{\partial}{\partial x} + D_0 \Delta \right] P(t, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0), \quad P(0, \mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad (9.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0) = & \left\{ \alpha p_x \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) \right\} P(t, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0), \\ P(0, \mathbf{p} | \mathbf{r}_0) = & \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0)). \end{aligned} \quad (9.74)$$

Диффузия частицы, описываемая уравнением (9.73), рассматривалась ранее. Следствием уравнения (9.74) является то, что среднее значение градиента поля плотности примеси уже не сохраняется и соответствует решению задачи при отсутствии флуктуаций поля скоростей:

$$\langle p_x(t) \rangle = p_x(0), \quad \langle p_y(t) \rangle = p_y(0) - \alpha p_x(0)t.$$

Что касается вторых моментов градиента, то они описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle p^2(t) \rangle &= D^s \langle p^2(t) \rangle - 2\alpha \langle p_x(t) p_y(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_x(t) p_y(t) \rangle &= -\frac{1}{2} D^s \langle p_x(t) p_y(t) \rangle - \alpha \langle p_x^2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p_x^2(t) \rangle &= \frac{3}{4} D^s \langle p^2(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle p_x^2(t) \rangle,\end{aligned}\tag{9.75}$$

вытекающей из (9.74). Подставляя в систему (9.75) решение экспоненциального вида $e^{\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение для λ :

$$\left(\lambda + \frac{1}{2} D^s\right)^2 (\lambda - D^s) = \frac{3}{2} \alpha^2 D^s,\tag{9.76}$$

корни которого существенно зависят от параметра α/D^s .

Для малых значений $\alpha/D^s \ll 1$ имеем для корней уравнения (9.76) приближенные решения

$$\lambda_1 = D_2^s + \frac{2\alpha^2}{3D_2^s}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} D_2^s + i|\alpha|, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} D_2^s - i|\alpha|.$$

Следовательно, в диапазоне времен $D^s t \gg 2$ решение задачи полностью определяется случайным фактором. Это означает, что эффекты, связанные с флуктуациями поля скоростей, полностью доминируют над эффектами, связанными со слабым градиентом линейного сдвига.

В другом предельном случае, $\alpha/D^s \gg 1$, уравнение (9.76) имеет корни

$$\lambda_1 = \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s\right)^{1/3}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s\right)^{1/3} e^{i(2/3)\pi}, \quad \lambda_3 = \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s\right)^{1/3} e^{-i(2/3)\pi}.$$

Так как действительные части λ_2 и λ_3 отрицательны, то асимптотическое решение системы (9.75) при $\left(\frac{3}{2} \alpha^2 D^s\right)^{1/3} t \gg 1$ имеет вид

$$\langle p^2(t) \rangle \sim \exp \left\{ \left(\frac{3}{2} \alpha^2 D_2^s\right)^{1/3} t \right\}$$

и, следовательно, даже малые флуктуации поля скоростей являются определяющими в присутствии сильного градиента сдвигового потока.

9.3.2. Учет молекулярной диффузии. Как отмечалось ранее, гладкое вначале распределение примеси становится все более и более пространственно неоднородным, возникает динамика на все меньших и меньших масштабах и пространственные градиенты плотности обостряются при наличии флуктуаций поля скоростей. В реальных условиях, конечно, существование молекулярной диффузии сглаживает такие процессы, и описанная выше динамика справедлива лишь на ограниченном интервале времен.

При наличии молекулярной диффузии диффузия примеси описывается стохастическим уравнением в частных производных второго порядка

(9.1), для которого уже не удается получить уравнения для одноточечной плотности вероятностей. В этом случае приходится прибегать к различным приближенным методам (см., например, [114, 133, 154, 216]) или численному моделированию. Первая попытка численного моделирования анализа влияния молекулярной диффузии на кластерную структуру поля примеси в потенциальных полях скорости предпринята в работе [58].

Оценка условия применимости пренебрежения молекулярной диффузией. Оценим время в простейшем случае бездивергентного двумерного потока, для которого эффекты молекулярной диффузии не существенны [165, 166].

Следствием уравнения (9.1) является то обстоятельство, что теперь величина $\rho^n(\mathbf{r}, t)$, $n = 1, 2, \dots$, будет описываться незамкнутым уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho^n(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho^n(\mathbf{r}, t) - \mu n(n-1) \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t).$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля скоростей, получаем незамкнутое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = (D_0 + \mu) \Delta \langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (9.77)$$

При условии $\mu \ll D_0$ уравнение (9.77) можно переписать в интегральном виде:

$$\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{D_0 t \Delta} \rho_0^n(\mathbf{r}) - \mu n(n-1) \int_0^t d\tau e^{D_0(t-\tau)\Delta} \langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (9.78)$$

Чтобы оценить последний член в (9.78), воспользуемся уравнением (9.69), соответствующим отсутствию молекулярной диффузии. В результате для величины $\langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, \tau) \rangle$ можно получить замкнутое уравнение, решение которого имеет вид

$$\langle \rho^{n-2}(\mathbf{r}, t) \mathbf{p}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = e^{D^s t + D_0 t \Delta} \rho_0^{n-2}(\mathbf{r}) \mathbf{p}_0^2(\mathbf{r}). \quad (9.79)$$

Подставляя (9.79) в (9.78), можно получить условия, при которых последний член в правой части (9.78) не играет роли. Эти условия накладывают ограничения на характерный пространственный масштаб начального распределения плотности — $\mathbf{r}_0^2$ и на временной интервал. Они имеют вид

$$D^s \mathbf{r}_0^2 \gg \mu n(n-1), \quad D^s t \ll \ln \frac{D^s \mathbf{r}_0^2}{\mu n^2}.$$

Задача со средним градиентом плотности. Случай наличия среднего градиента плотности допускает более полный анализ [163, 165, 166]. Этот случай соответствует решению уравнения (9.1) с начальными условиями (здесь мы также ограничиваемся двумерным случаем)

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G} \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{G}.$$

Представляя поле плотности в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \mathbf{G}\mathbf{r} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t),$$

получаем уравнение для флуктуирующей части $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$ поля плотности:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{G}\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mu \Delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{r}, 0) = 0. \quad (9.80)$$

Решение этой задачи, в отличие от рассмотренных выше, является статистически пространственно однородным случайным полем, т.е. все одноточечные статистические средние не зависят от $\mathbf{r}$, и имеет стационарные (при $t \rightarrow \infty$) плотности вероятностей как самого поля плотности, так и его градиента и в последнее время привлекает большое внимание как с теоретической, так и с экспериментальной стороны (см. работы [135, 144, 145, 153, 205, 206, 215]). В этих работах на основе численного моделирования и использования феноменологических моделей было обнаружено существование у распределения «медленно затухающих хвостов» экспоненциального типа. Отметим, что в работе [215] было обнаружено, что и стационарная плотность самого поля плотности также имеет «медленно затухающие хвосты».

В этом случае вместо уравнения (9.77) из уравнения (9.80) следует уравнение

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1) D_0 \mathbf{G}^2 \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (9.81)$$

где

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{G}.$$

В стационарном режиме (при $t \rightarrow \infty$) из (9.81) следует, что

$$\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{\mu} \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (9.82)$$

и, в частности, для $n = 2$ выражение для дисперсии флуктуаций градиента плотности [163]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{D_0 \mathbf{G}^2}{\mu}. \quad (9.83)$$

Следовательно, выражение (9.82) можно переписать в виде

$$\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (9.84)$$

т.е. в стационарном режиме величины $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$ и $\tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t)$ — статистически независимы.

Перепишем теперь уравнение (9.81) в виде

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1) D_0 \mathbf{G}^2 \langle f(\mathbf{r}, t) \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (9.85)$$

где

$$f(\mathbf{r}, t) = 1 - \frac{\mu}{D_0 \mathbf{G}^2} \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t).$$

Следовательно, дисперсия плотности описывается следующим выражением ($\langle \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$):

$$\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2D_0 \mathbf{G}^2 \int_0^t d\tau \langle f(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (9.86)$$

При отсутствии молекулярной диффузии имеем $f(\mathbf{r}, t) \equiv 1$ и, следовательно,

$$\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle = 2D_0 \mathbf{G}^2 t. \quad (9.87)$$

В этом случае одноточечное распределение поля $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ — гауссово и $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ — не коррелировано с его пространственным градиентом. В общем случае выражение (9.87) справедливо для достаточно малых времен.

Отметим, что корреляционная функция поля: $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \langle \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1, t) \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

для данной задачи описывается уравнением, вытекающим из (9.80),

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, t) = 2G_i G_j B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}) + 2[B_{ij}^{\text{ef}}(0) - B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}, t),$$

и, следовательно, стационарное значение

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(\mathbf{r}, t)$$

описывается уравнением

$$G_i G_j B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}) = -[B_{ij}^{\text{ef}}(0) - B_{ij}^{\text{ef}}(\mathbf{r}) + \mu \delta_{ij}] \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \Gamma(\mathbf{r}). \quad (9.88)$$

Полагая $\mathbf{r} = 0$ в этом уравнении, мы приходим, с учетом соотношений (9.34), (9.35), к равенству (9.83). А дифференцируя уравнение (9.88) дважды по $\mathbf{r}$ и полагая $\mathbf{r} = 0$, получаем равенство

$$\mu^2 \langle (\Delta \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t))^2 \rangle = \frac{1}{2} D_2^s (D_0 + \mu) \mathbf{G}^2. \quad (9.89)$$

Точные равенства (9.83) и (9.89) можно использовать для тестирования различных численных схем и проверки результатов численного моделирования. Однако для вычисления стационарного значения $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$ необходимо знать временную эволюцию второго момента $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$. Такую информацию можно получить лишь при отсутствии молекулярной диффузии. В этом случае плотность вероятностей для градиента плотности описывается уравнением (9.67), которое для рассматриваемой задачи

упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}) = \frac{1}{8} D^s \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \mathbf{p}^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_l} p_k p_l \right) P(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}), \quad (9.90)$$

$$P(0, \mathbf{r}; \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{G}).$$

Следовательно, согласно равенству (9.71),

$$\langle |\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = \mathbf{G}^2 \left\{ e^{D^s t} - 1 \right\}. \quad (9.91)$$

Точная формула (9.83) и равенство (9.91) позволяют оценить время выхода на статистический стационарный режим для величины $\langle \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$, а именно

$$D^s T_0 \sim \ln \left(\frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Следовательно, для стационарной дисперсии флуктуаций поля плотности из равенства (9.86) получаем оценку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle \sim 2 \frac{D_0}{D^s} \mathbf{G}^2 \ln \left(\frac{D_0 + \mu}{\mu} \right).$$

Принимая во внимание, что $D_0 \sim \sigma_u^2 \tau_0$ и $D_0/D^s \sim l_0^2$, где σ_u^2 — дисперсия флуктуаций поля скорости, а τ_0 и l_0 соответственно его временной и пространственный радиусы корреляции, видим, что время T_0 , ввиду логарифмической зависимости от коэффициента молекулярной зависимости μ , может быть не слишком большим:

$$T_0 \approx \frac{l_0^2}{\sigma_u^2 \tau_0} \ln \left(\frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right),$$

а величина

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle \sim \mathbf{G}^2 l_0^2 \ln \left(\frac{\sigma_u^2 \tau_0}{\mu} \right) \quad \text{при} \quad \mu \ll \sigma_u^2 \tau_0.$$

9.3.3. Учет конечности временного радиуса корреляции. Условием применимости приближения дельта-коррелированности случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, использованного выше, является условие малости временного радиуса корреляции τ_0 случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ по сравнению со всеми временными масштабами, имеющимися в рассматриваемой задаче, т. е. $\tau_0 \ll \tau_1 = L/v$, где параметр L представляет типичный масштаб длины. Этот масштаб может зависеть от свойств среднего потока, например, $L = u_0/|\nabla u_0|$ — типичный размер вихрей, или от плотности примесей — $L = \rho/|\nabla \rho|$. В любом случае эти размеры уменьшаются со временем за счет появления мелкомасштабных структур. В результате два временных масштаба становятся сравнимы, и в такой ситуации приближение дельта-коррелированности становится

неприменимым. Необходимо принимать во внимание конечность временного радиуса корреляции τ_0 . Общая формальная математическая классификация возможных областей параметров, где используются различные приближенные схемы, приведена в работе [204].

Учет конечности временного радиуса корреляции случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, как отмечалось ранее, можно провести в рамках диффузионного приближения. В рамках этого приближения предполагается, что влияние случайных воздействий на временных масштабах порядка τ_0 не существенно, т.е. система на этих масштабах эволюционирует как свободная. Это накладывает, конечно, также ограничения на параметры статистической задачи.

Предельный случай стационарного случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, соответствующий предельному случаю $\tau_0 \rightarrow \infty$, не описывается диффузионным приближением. Этот случай, удобный для численного моделирования, очень труден для аналитических исследований, хотя некоторые результаты были получены и в этом случае (см., например, работы [100, 188, 189]).

В качестве иллюстрации рассмотрим в диффузионном приближении вывод уравнений диффузии оседающей примеси [50], диффузии примеси в плоскопараллельном потоке жидкости [43], а также уравнений для среднего поля плотности и для примеси с постоянным градиентом концентрации.

Диффузия оседающей примеси. В проблемах экологии и климатологии важную роль играет распространение инородных частиц и включений, которые, вследствие сил плавучести и тяжести, имеют заметную скорость относительно среды, покоящейся в среднем. К такого рода включениям относятся мелкодисперсная пыль от промышленных объектов и очагов экологических катастроф, искусственные центры конденсации или рассеяния. Скорость оседания или всплывания включений $\mathbf{v}$, направленная, как правило, по вертикали, определяется балансом сил плавучести и сил вязкого трения движущегося включения и описывается, например, формулой

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_i - \rho_m) = 6\pi\eta r v,$$

где r — радиус включения, g — ускорение свободного падения, ρ_i и ρ_m — плотности включения и среды соответственно, η — динамическая вязкость среды. Если частица также участвует в хаотическом движении среды, то коэффициент диффузии ее может существенно измениться благодаря наличию постоянной скорости оседания. Рассмотрим подробно этот случай в несжимаемой среде и учтем при этом эффект молекулярной диффузии.

Исходным является стохастическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\eta}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad (9.92)$$

где случайный векторный дельта-коррелированный во времени процесс $\boldsymbol{\eta}(t)$ имеет статистические характеристики (см. Замечание 9.1)

$$\langle \eta_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = 2\mu \delta_{ij} \delta(t - t'),$$

$\mathbf{v} = \text{const}$ и случайное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ предполагается бездивергентным гауссовым однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным полем с корреляционным и спектральным тензорами:

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \Delta_{ij}(\mathbf{k}), \quad \Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Пространственным и временным радиусами корреляции для поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ являются l_0 и τ_0 соответственно.

Индикаторная функция для координаты частицы

$$\varphi(t; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r})$$

описывается уравнением Лиувилля

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\eta}(t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(t; \mathbf{r}) = 0, \quad \varphi(0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (9.93)$$

Усредняя уравнение (9.93) по ансамблю реализаций случайного процесса $\boldsymbol{\eta}(t)$, получаем уравнение для функции

$$\Phi(t; \mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \rangle_{\boldsymbol{\eta}(t)}$$

вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta \Phi(t; \mathbf{r}), \quad \Phi(0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (9.94)$$

Уравнение (9.94) — все еще стохастическое уравнение и описывает диффузию пассивной примеси в случайном поле скоростей с учетом молекулярной диффузии.

Усредним теперь уравнение (9.94) по ансамблю реализаций случайного поля $\{\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}$. С учетом формулы Фурутцу–Новикова получаем уравнение с вариационной производной для одночастичной плотности вероятностей:

$$P(t; \mathbf{r}) = \left\langle \langle \delta(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}) \rangle_{\boldsymbol{\eta}(t)} \right\rangle_{\mathbf{u}}$$

вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial}{\partial r_i} \left\langle \frac{\delta \Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (9.95)$$

В диффузионном приближении вариационная производная при $t' < t$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \left\langle \frac{\delta \Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle = \mu \Delta \left\langle \frac{\delta \Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle$$

с начальным условием

$$\left\langle \frac{\delta \Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \Phi(t'; \mathbf{r}),$$

решение которого

$$\left\langle \frac{\delta \Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle = -e^{(t-t')\left(\mu\Delta - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)} \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \Phi(t'; \mathbf{r}) \right]. \quad (9.96)$$

На временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 и сама функция $\Phi(t; \mathbf{r})$ описывается задачей с начальным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta \Phi(t; \mathbf{r}), \quad \Phi(t; \mathbf{r})|_{t=t'} = \Phi(t'; \mathbf{r}). \quad (9.97)$$

Следовательно,

$$\Phi(t'; \mathbf{r}) = e^{-(t-t')\left(\mu\Delta - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)} \Phi(t; \mathbf{r}). \quad (9.98)$$

Подставляя (9.96) и (9.98) в уравнение (9.95), получаем замкнутое уравнение для одночастичной плотности: вероятностей

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) &= \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) + \\ &+ \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \frac{\partial}{\partial r_i} e^{\tau\left(\mu\Delta - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)} \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} e^{-\tau\left(\mu\Delta - \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)} P(t; \mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (9.99)$$

с начальным условием $P(0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. В уравнении (9.99) можно выполнить операции сдвига и переписать его в окончательной форме операторного уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) &= \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) e^{\tau\mu\Delta} \left[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}\tau) \frac{\partial}{\partial r_j} e^{-\tau\mu\Delta} P(t; \mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (9.100)$$

Уравнение (9.100) может быть решено в явном виде. Для этого введем преобразование Фурье по переменной $\mathbf{r}$ с помощью формул

$$P(t; \mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} \hat{P}(t; \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad \hat{P}(t; \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r} P(t; \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

т.е. функция $\hat{P}(t; \mathbf{q})$ является характеристической функцией для случайного процесса $\mathbf{r}(t)$. Тогда из уравнения (9.100) для фурье-образа $\hat{P}(t; \mathbf{q})$

получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{q}\mathbf{v}\right) \hat{P}(t; \mathbf{q}) = -\left\{ \mu q^2 + q_i q_j \int_0^t d\tau D_{ij}(\tau, \mathbf{q}; \mathbf{v}) \right\} \hat{P}(t; \mathbf{q}), \quad (9.101)$$

где

$$D_{ij}(\tau, \mathbf{q}; \mathbf{v}) = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) \exp \left\{ -\mu\tau (k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{q}) + i\tau\mathbf{k}\mathbf{v} \right\}. \quad (9.102)$$

Здесь мы ввели пространственную спектральную функцию поля скорости. Интегрируя уравнение (9.102), получаем выражение

$$\hat{P}(t; \mathbf{q}) = \hat{P}_0(\mathbf{q}) \exp \left\{ -\mu q^2 t - i\mathbf{q}\mathbf{v}t + q_i q_j \int_0^t d\tau (t - \tau) D_{ij}(\tau, \mathbf{q}; \mathbf{v}) \right\}, \quad (9.103)$$

и, следовательно,

$$P(t; \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r}' P_0(\mathbf{r}') \times \\ \times \int d\mathbf{q} \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}t) - \mu q^2 t + q_i q_j \int_0^t d\tau (t - \tau) D_{ij}(\tau, \mathbf{q}; \mathbf{v}) \right\}, \quad (9.104)$$

откуда при достаточно больших t следует асимптотическая формула

$$P(t; \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r}' P_0(\mathbf{r}') \int d\mathbf{q} \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}t) - \mu q^2 t + q_i q_j t D_{ij}(\mathbf{v}) \right\}, \quad (9.105)$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \int_0^\infty d\tau D_{ij}(\tau, 0; \mathbf{v}) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, \tau) e^{-\mu\tau k^2 + i\tau\mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (9.106)$$

Из выражения (9.106) видно, что возникает естественная анизотропия тензора диффузии по отношению к направлению оседания примеси вектора $\mathbf{v}$.

Отметим, что из определения преобразования Фурье для характеристической функции $\hat{P}(t; \mathbf{q})$ следуют выражения для статистических моментов координат частицы:

$$\langle r_k(t) \rangle = i(2\pi)^N \frac{\partial}{\partial q_k} \hat{P}(t; \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=0}, \\ \langle r_k(t) r_l(t) \rangle = -(2\pi)^N \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} \hat{P}(t; \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=0}, \dots,$$

и при этом $(2\pi)^N \hat{P}(t; 0) = 1$. Дифференцируя теперь уравнение (9.101) нужное число раз и полагая $\mathbf{q} = 0$, получаем уравнения для моментных функций

координаты частицы. В частности, для средней траектории частицы $\langle \mathbf{r}(t) \rangle$ и ее дисперсии

$$\sigma_{ij}^2(t) = \langle [r_i(t) - \langle r_i(t) \rangle][r_j(t) - \langle r_j(t) \rangle] \rangle$$

получаем

$$\langle \mathbf{r}(t) \rangle = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t,$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{ij}^2(t) = 2 \left[\mu \delta_{ij} + \int_0^t d\tau D_{ij}(\tau, 0; \mathbf{v}) \right],$$

и, следовательно, при больших временах t величина $D_{ij}(\mathbf{v})$ определяет общий «турбулентный» коэффициент диффузии:

$$D_{ij}^{\text{tur}}(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}\sigma_{ij}^2(t) = 2[\mu \delta_{ij} + D_{ij}(\mathbf{v})].$$

При этом

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = A(v)\delta_{ij} + B(v)\Delta_{ij}(\mathbf{v}),$$

где

$$A(v) = \frac{v_i v_j}{\mathbf{v}^2} D_{ij}(\mathbf{v}), \quad B(v) = \frac{1}{N-1} \left[\delta_{ij} - N \frac{v_i v_j}{\mathbf{v}^2} \right] D_{ij}(\mathbf{v}).$$

Из такого представления следует, что если направить одну из осей системы координат — x — по вектору $\mathbf{v}$, то диффузия частицы статистически независима по разным осям и коэффициент диффузии в направлении $\mathbf{v}$ будет определяться величиной

$$D_{\parallel}(v) = A(v),$$

а по осям в поперечной плоскости $\mathbf{r}$ — величиной

$$D_{\perp} = A(v) + B(v).$$

Это свойство связано с конечностью временного радиуса корреляции случайного поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и отсутствует в приближении дельта-коррелированного случайного поля. В этой системе координат формула (9.105) принимает вид

$$P(t; \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\mathbf{r}' P_0(\mathbf{r}') \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{q}_{\perp} \times \\ \times \exp \left\{ -q(x - x' - vt) - i\mathbf{q}_{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - q^2 t [\mu + D_{\parallel}(\mathbf{v})] - \mathbf{q}_{\perp}^2 t [\mu + D_{\perp}(\mathbf{v})] \right\}.$$

или

$$P(t; \mathbf{r}) = \frac{1}{[4\pi t(\mu + A(v) + B(v))]^{N/2}} \sqrt{\frac{\mu + A(v) + B(v)}{\mu + A(v)}} \times \\ \times \int d\mathbf{r}' P_0(\mathbf{r}') \exp \left\{ -\frac{(x - x' - vt)^2}{4t[\mu + D_{\parallel}(\mathbf{v})]} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4t[\mu + D_{\perp}(\mathbf{v})]} \right\}, \quad (9.107)$$

Для частиц, у которых начальная плотность вероятностей

$$P_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

равенство (9.107) упрощается и принимает вид гауссового распределения:

$$P(t; \mathbf{r}) = \frac{1}{[4\pi t (\mu + A(v) + B(v))]^{N/2}} \sqrt{\frac{\mu + A(v) + B(v)}{\mu + A(v)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x - x_0 - vt)^2}{4t [\mu + D_{\parallel}(\mathbf{v})]} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{4t [\mu + D_{\perp}(\mathbf{v})]} \right\}. \quad (9.108)$$

Для оценки коэффициентов диффузии воспользуемся моделью флуктуаций поля скоростей, для которой спектральная функция имеет вид

$$E(k, t) = E(k) e^{-|t|/\tau_0},$$

где τ_0 — временной радиус корреляции поля скоростей. В этом случае

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{v} \int d\mathbf{k} E(k) \Delta_{ij}(\mathbf{k}) \frac{p(\mathbf{k}, \mathbf{v})}{k} \frac{1}{1 + p^2(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \cos^2 \theta},$$

где $\cos \theta = \mathbf{k}\mathbf{v}/kv$ и введена функция

$$p(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}\tau_0}{1 + \mu k^2 \tau_0} = p(k, v) \cos \theta, \quad p(k, v) = \frac{kv\tau_0}{1 + \mu k^2 \tau_0}.$$

Следовательно, в трехмерном случае ($N = 3$) для проекции этого тензора на направление оседания примеси и на плоскость, перпендикулярную этому направлению, получаем выражения

$$D_{\parallel}(v) = \frac{4\pi}{v} \int_0^{\infty} dk k E(k) f_{\parallel}(k, v), \quad D_{\perp}(v) = \frac{4\pi}{v} \int_0^{\infty} dk k E(k) f_{\perp}(k, v),$$

где

$$f_{\parallel}(k, v) = \arctan p(k, v) + \frac{1}{p(k, v)} \left(\frac{1}{p(k, v)} \arctan p(k, v) - 1 \right), \\ f_{\perp}(k, v) = \arctan p(k, v) - \frac{1}{p(k, v)} \left(\frac{1}{p(k, v)} \arctan p(k, v) - 1 \right). \quad (9.109)$$

При малых значениях параметра p ($v\tau_0 \ll l_0$, где l_0 — пространственный радиус корреляции поля скоростей) функции $f_{\parallel}(k, v)$, $f_{\perp}(k, v)$ близки к $2p/3$, что соответствует изотропной, не зависящей от скорости оседания, диффузии, а при больших значениях параметра p ($v\tau_0 \gg l_0$) имеем $f_{\parallel}(k, v) = 2f_{\perp}(k, v) \cong \pi/2$. Такая анизотропия диффузии объясняется тем обстоятельством, что диффузия примеси относительно турбулентных движений уменьшает время пребывания частицы примеси в пределах области коррелирующих скоростей. Вместе с тем, в изотропном бездивергентном поле случайных скоростей поперечный радиус корреляции поля скоростей вдвое меньше продольного радиуса корреляции (см., например, [68]), что

и объясняет указанную анизотропию коэффициента диффузии, для значений параметра $\mu_0 \ll l_0^2$ тензор диффузии $D_{ij}(\mathbf{v})$ не зависит от параметра μ . Подчеркнем еще раз, что этот эффект анизотропии связан с конечностью временного радиуса корреляции для поля скоростей.

Аналогичным образом можно рассмотреть, как упоминалось выше, и диффузию облака примеси в эйлеровом описании и, в частности, задачу с источником примеси. При этом, разумеется, диффузия примеси будет происходить с теми же коэффициентами диффузии (9.118).

Плоско-параллельный средний поток. Рассмотрим теперь двумерную задачу о диффузионном приближении для плоско-параллельного среднего потока, описываемую динамической системой (9.43) и дополненную случайными членами, ответственными за эффекты молекулярной диффузии:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = v(y)\mathbf{l} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{l} = (1, 0),$$

или в скалярном виде:

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(y) + u_1(\mathbf{r}, t) + V_1(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = u_2(\mathbf{r}, t) + V_2(t). \quad (9.110)$$

В этом случае для задачи (9.110), вместо стохастического уравнения Лиувилля (9.44), получаем для индикаторной функции

$$\varphi(t; \mathbf{r}) = \varphi(t; x, y) = \delta(x(t) - x)\delta(y(t) - y)$$

векторное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \varphi(t; \mathbf{r}) = -[\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{V}(t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi(t; \mathbf{r}), \quad (9.111)$$

или в скалярном виде:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(t; x, y) = \\ & = - \left\{ [u_1(\mathbf{r}, t) + V_1(t)] \frac{\partial}{\partial x} + [u_2(\mathbf{r}, t) + V_2(t)] \frac{\partial}{\partial y} \right\} \varphi(t; x, y). \end{aligned} \quad (9.112)$$

Усреднив теперь уравнение (9.111) по ансамблю реализаций случайной функции $\boldsymbol{\eta}(t)$, получаем уравнение для функции

$$\Phi(t; \mathbf{r}) = \Phi(t; x, y) = \langle \delta(x(t) - x)\delta(y(t) - y) \rangle_{\mathbf{V}(t)}$$

вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + [v(y)\mathbf{l} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta \Phi(t; \mathbf{r}). \quad (9.113)$$

Уравнение (9.113) — все еще стохастическое уравнение. Усредняя его по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, получаем уравнение уже для одноточечной плотности вероятностей

$$P(t; \mathbf{r}) = \langle \Phi(t; x, y) \rangle_{\mathbf{u}} = \langle \langle \delta(x(t) - x)\delta(y(t) - y) \rangle_{\mathbf{V}} \rangle_{\mathbf{u}},$$

вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(t; \mathbf{r}) = \mu\Delta P(t; \mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\partial}{\partial r_i} \left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}}. \quad (9.114)$$

В диффузионном приближении вариационная производная при $t' < t$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}} = \mu\Delta \left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}} \quad (9.115)$$

с начальным условием

$$\left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{t=t'} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \Phi(t'; \mathbf{r}). \quad (9.116)$$

Обычно в геофизических задачах действие величины μ — коэффициента молекулярной диффузии — достаточно мало на временных масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 . И член, содержащий μ , может быть опущен в уравнениях (9.114), (9.115) (во всяком случае нас интересует предел $\mu \rightarrow 0$), т. е. для вариационной производной можно рассматривать более простое уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}} &= 0, \\ \left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle_{t=t'} &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \Phi(t'; \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (9.117)$$

При этом можно сохранить член, содержащий μ в уравнении (9.114), так как он в некоторых случаях может быть регуляризирующим фактором. В этом случае решение уравнения (9.117) имеет структуру

$$\left\langle \frac{\delta\Phi(t; \mathbf{r})}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle = -e^{-(t-t')v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \Phi(t'; \mathbf{r}). \quad (9.118)$$

Также в диффузионном приближении величина $\Phi(t'; \mathbf{r})$ в правой части (9.118) может быть определена из первоначальной динамической системы (9.113) в отсутствие флуктуационного члена и члена с параметром μ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \Phi(t; \mathbf{r}) = 0, \quad \Phi(0; \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (9.119)$$

и, следовательно,

$$\Phi(t'; \mathbf{r}) = e^{(t-t')v(y)\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \Phi(t; \mathbf{r}). \quad (9.120)$$

Подставляя теперь равенства (9.118) и (9.120) в уравнение (9.114), получаем искомое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) + \\ + \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ e^{-\tau v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r_j} \left[e^{\tau v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} P(t; \mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (9.121)$$

В уравнении (9.121) можно выполнить интегрирование по $\mathbf{r}'$ и в результате получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) + \quad (9.122)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r_i} \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau v(y) \mathbf{l}, \tau) e^{-\tau v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \frac{\partial}{\partial r_j} \left[e^{\tau v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} P(t; \mathbf{r}) \right]. \quad (9.123)$$

Отметим, что оператор в правой части уравнения (9.123) можно переписать в виде

$$e^{-\tau v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} \frac{\partial}{\partial r_j} e^{\tau v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} = \frac{\partial}{\partial r_j} + \tau \frac{dv(y)}{dy} \delta_{j,2} \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}},$$

и, следовательно, уравнение (9.123) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) + \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} \left(D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_j} + D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) P(t; \mathbf{r}), \quad (9.124)$$

где введены коэффициенты диффузии

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t d\tau B_{ij}(\tau v(y) \mathbf{l}, \tau), \quad D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t d\tau \tau B_{i2}(\tau v(y) \mathbf{l}, \tau) \frac{dv(y)}{dy}. \quad (9.125)$$

Уравнение (9.124) правильно описывает динамику одноточечной плотности вероятностей $P(t; \mathbf{r})$ и для временных масштабов $t \leq \tau_0$, где τ_0 — временной корреляционный радиус случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Однако в этом случае статистическое решение уравнения (9.110) для частицы не обладает марковским свойством. Если упростить задачу, рассматривая поведение системы на временных масштабах $t \gg \tau_0$, то можно заменить верхние пределы в интегралах (9.125) на бесконечность и переписать уравнение (9.124) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(y) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) P(t; \mathbf{r}) = \mu \Delta P(t; \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial r_i} \left(D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_j} + D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x} \right) P(t; \mathbf{r}), \quad (9.126)$$

где теперь коэффициенты диффузии равны

$$D_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\tau v(y)\mathbf{l}, \tau), \quad D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty d\tau \tau B_{i2}(\tau v(y)\mathbf{l}, \tau) \frac{dv(y)}{dy}. \quad (9.127)$$

В этом случае решение уравнения (9.110) уже будет марковским процессом, плотность вероятностей которого, очевидно, будет также описываться уравнением (9.126).

Диффузионное приближение для среднего поля плотности. Усреднение уравнения (9.1) по ансамблю реализаций гауссового случайного поля скоростей, с учетом формулы Фурутцу–Новикова (6.10), приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) \right) \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \\ = \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle - \frac{\partial}{\partial r_j} \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (9.128)$$

В диффузионном приближении уравнение (9.128) является точным, а вариационная производная на масштабах порядка временного радиуса корреляции τ_0 описывается динамическим уравнением с начальным условием

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) \right) \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = \mu \Delta \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \\ \frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \Big|_{t=t'} = - \frac{\partial}{\partial r_j} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t') \}. \end{aligned} \quad (9.129)$$

Поле плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ на этих масштабах также описывается динамическим уравнением с начальным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \mu \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, t)|_{t=t'} = \rho(\mathbf{r}, t'). \quad (9.130)$$

Исключая из (9.129) и (9.130) функцию $\rho(\mathbf{r}, t')$, получаем связь вариационной производной с функцией $\rho(\mathbf{r}, t)$, и, таким образом, уравнение (9.128) переходит в замкнутое уравнение для функции $\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle$.

В частности, при отсутствии среднего потока,

$$\rho(\mathbf{r}, t') = e^{-\mu(t-t')\Delta} \rho(\mathbf{r}, t),$$

и вариационная производная принимает вид

$$\frac{\delta \rho(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = -e^{\mu(t-t')\Delta} \frac{\partial}{\partial r_j} \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\mu(t-t')\Delta} \rho(\mathbf{r}, t) \right\}.$$

Следовательно, уравнение (9.128) в этом случае переходит в замкнутое уравнение для среднего поля плотности вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) e^{\mu\tau\Delta} \frac{\partial}{\partial r_j} \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\mu\tau\Delta} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle \right\}. \end{aligned}$$

При $t \gg \tau_0$ верхний предел в интеграле можно заменить на бесконечность, и в результате приходим к окончательному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \mu \Delta \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} \int d\mathbf{r}' \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) e^{\mu\tau\Delta} \frac{\partial}{\partial r_j} \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\mu\tau\Delta} \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle \right\}, \quad (9.131) \end{aligned}$$

которое легко решается с помощью преобразования Фурье по пространственной координате.

Диффузионное приближение для примеси с постоянным градиентом плотности. Для этой задачи, используя формулу Фурутцу–Новикова, вместо уравнения (9.81) получаем уравнение с вариационной производной:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = -\mu n(n-1) \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ + n(n-1) G_i \int d\mathbf{r}' \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \left\langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \frac{\delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} \right\rangle. \quad (9.132) \end{aligned}$$

В диффузионном приближении вариационная производная определяется выражением

$$\frac{\delta \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{\delta u_j(\mathbf{r}', t')} = -e^{\mu(t-t')\Delta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[\frac{\partial}{\partial r_j} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t') - G_j \right],$$

где

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t') = e^{-\mu(t-t')\Delta} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t).$$

Следовательно, уравнение (9.132) можно переписать в замкнутом виде

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{\rho}^n(\mathbf{r}, t) \rangle = n(n-1) D_0(t; \mu) \mathbf{G}^2 \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \rangle - \mu n(n-1) \langle \tilde{\rho}^{n-2}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{p}}^2(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad (9.133)$$

где

$$D_0(t; \mu) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int d\mathbf{k} E^s(k, t) e^{-\mu\tau k^2}. \quad (9.134)$$

Условием применимости диффузионного приближения является условие

$$D_0(t; \mu) \mathbf{G}^2 \tau_0 \ll 1. \quad (9.135)$$

Если к тому же выполняются условия

$$\mu \tau_0 / l_0^2 \ll 1 \quad \text{и} \quad t \gg \tau_0, \quad (9.136)$$

то уравнение (9.133) переходит в уравнение (9.81), соответствующее приближению дельта-коррелированного во времени поля скоростей. В этом случае условие (9.135) может быть переписано в виде

$$\sigma_u^2 \mathbf{G}^2 \tau_0 \ll 1. \quad (9.137)$$

При выводе оценки для стационарного значения $\langle \tilde{\rho}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ мы нуждались в информации относительно случайного поля градиента плотности, и, в частности, в формуле (9.91). Условием ее применимости является, очевидно, условие

$$D^s \tau_0 \ll 1,$$

эквивалентное условию

$$\sigma_u^2 \tau_0^2 \ll l_0^2. \quad (9.138)$$

Таким образом условиями применимости приближения дельта-коррелированности во времени случайного поля скоростей являются условия (9.136)–(9.138). Эти условия накладывают ограничения на малость как дисперсии поля скоростей, так и коэффициента молекулярной диффузии. Однако они не являются сильными ограничениями, например, для геофизических потоков.

Замечание 9.4. *Диффузия примеси в случайных волновых полях.*

Особенностью диффузии примеси в случайных волновых полях, как отмечалось в разделе 8.2, является то обстоятельство, что для таких задач коэффициенты диффузии как в приближении дельта-коррелированности во времени поля скоростей, так и в диффузионном приближении обращаются в нуль. В этом случае для анализа задач приходится прибегать к высшим приближениям [55]. ♦

В заключение данной главы приведем некоторые общие выводы, вытекающие из предыдущего рассмотрения.

- Статистические характеристики решения задачи о диффузии пассивной примеси в случайных дивергентных полях скоростей могут иметь мало общего с поведением отдельных реализаций. Для таких задач традиционный подход, основанный на моментном описании, не информативен. Для этих задач необходимо иметь статистическое описание на уровне плотностей вероятностей (как минимум одновременной или одноточечной).

- В задачах о диффузии пассивной примеси в случайных дивергентных полях скоростей существуют, однако, когерентные статистические физические явления, осуществляющиеся с вероятностью единица (кластеризация частиц и поля консервативной примеси в дивергентном поле скоростей). Это означает, что данное явление осуществляется почти во всех реализациях случайного поля плотности.

• Сами когерентные явления практически не зависят от модели флуктуирующих параметров динамической системы и в простейшем случае их временная динамика может быть описана в рамках одновременных и одноточечных распределений вероятностей с помощью методов статистической топографии. При этом, конечно, конкретные параметры, характеризующие это явление (например, характерные времена образования кластерных структур и их пространственные характерные масштабы), могут существенно зависеть от моделей.

Так, например, в гл. 1 были приведены примеры образования кластерной структуры поля примеси в случайном поле скоростей вида $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r})$, где $f(\mathbf{r})$ — детерминированная функция, а $\mathbf{v}(t)$ — векторный случайный гауссовый процесс. Будем считать $\mathbf{v}(t)$ гауссовым случайным стационарным векторным процессом с параметрами

$$\langle \mathbf{v}(t) \rangle = 0, \quad B_{ij}(t - t') = \langle v_i(t)v_j(t') \rangle \quad (B_v(0) = \langle \mathbf{v}^2(t) \rangle).$$

В приближении дельта-коррелированности процесса $\mathbf{v}(t)$ считаем, что

$$B_{ij}(t - t') = 2\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 \delta(t - t') \quad \left(\sigma^2 \delta_{ij} \tau_0 = \int_0^\infty dt B_{ij}(\tau) \right), \quad (9.139)$$

где σ^2 — дисперсия флуктуаций поля скоростей, а τ_0 — их временной радиус корреляции.

Итак, в эйлеровом представлении индикаторная функция $\Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho(\mathbf{r}, t) - \rho)$ описывается уравнением Лиувилля:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}(t)f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = \mathbf{v}(t) \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \Phi(t, \mathbf{r}; \rho),$$

$$\Phi(0, \mathbf{r}; \rho) = \delta(\rho_0(\mathbf{r}) - \rho),$$

которое запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho) = -\mathbf{v}(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}) - \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \right\} \Phi(t, \mathbf{r}; \rho). \quad (9.140)$$

Усредняя уравнение (9.140) по ансамблю случайного процесса $\mathbf{v}(t)$, получаем уравнение для плотности вероятностей вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho) = \sigma^2 \tau_0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} f^2(\mathbf{r}) - \left(3 + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} + \right. \\ \left. + f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right) + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \right)^2 \right\} P(t, \mathbf{r}, \rho). \end{aligned} \quad (9.141)$$

Если теперь функция $f(\mathbf{r})$ имеет характерный масштаб изменения по $\mathbf{r}$ — $\tilde{k}^{-1}$ — и является как бы периодической функцией («быстрое изменение»), то дополнительно усредняя уравнение (9.141) по этим масштабам,

получаем уравнение для «медленных» пространственных изменений:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{r}; \rho) = \sigma^2 \tau_0 \left\{ \overline{f^2(\mathbf{r})} \Delta + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \rho^2 \right\} P(t, \mathbf{r}, \rho). \quad (9.142)$$

Уравнение (9.142) совпадает с уравнением (9.51), и, следовательно, рассматриваемая модель поля скоростей для одноточечных статистических характеристик поля плотности статистически эквивалентна модели гауссового дельта-коррелированного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Следовательно, для этой модели флуктуаций поля скорости также должна осуществляться кластеризация примеси, если $\mathbf{v}(t) \partial f(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r} \neq 0$, что и наблюдалось в результатах численного моделирования в простейшем случае функции $f(\mathbf{r}) = \sin 2(\mathbf{k}\mathbf{r})$.

Для этой модели в частном случае, когда начальное распределение плотности не зависит от $\mathbf{r}$, т. е. $\rho_0(\mathbf{r}_0) = \rho_0$, поле плотности можно записать в виде

$$\rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0 = \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}.$$

Следовательно, усредненная по быстрым пространственным переменным величина

$$\overline{\rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0} = 1$$

и не зависит от случайного фактора $T(t)$.

Аналогичным образом получаем, например, что

$$\overline{(\rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0)^2} = \frac{1}{2} \left(e^{T(t)} + e^{-T(t)} \right),$$

и, следовательно, для гауссового случайного процесса $v_x(t)$

$$\left\langle \overline{(\rho(\mathbf{r}, t) / \rho_0)^2} \right\rangle = \left\langle e^{T(t)} \right\rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle T^2(t) \rangle \right\},$$

в соответствии с логнормальным распределением вероятностей для поля $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Глава 10

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Задача о распространении плоских волн в слоистых средах описывается одномерной краевой задачей и традиционно привлекает внимание многих исследователей. Это обусловлено, с одной стороны, ее простотой по сравнению с аналогичными задачами для двух и трех измерений, а с другой стороны — ее важностью для понимания процесса распространения волн в случайных средах. Учитывая, что одномерная задача допускает точное асимптотическое решение, можно проследить влияние различных моделей, параметров среды и краевых условий на статистические характеристики волнового поля.

В одномерном случае постановка задачи описана в первой части книги.

Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$. Плоская волна с единичной амплитудой падает на него из области $x > L$. Волновое поле в слое неоднородной среды описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2(x) u(x) = 0, \quad (10.1)$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)],$$

а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды. В простейшем случае несогласованной границы считаем, что вне слоя $k(x) = k$, т. е. $\varepsilon(x) = 0$; внутри же слоя предполагаем, что $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(x)$ — действительная часть, ответственная за процессы рассеяния волны в среде, а мнимая часть $\gamma \ll 1$ описывает поглощение волны в среде.

Краевыми условиями для уравнения (10.1) являются условия непрерывности функции $u(x)$ и ее производной $\frac{d}{dx} u(x)$ на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx}\right) u(x) \Big|_{x=L} = 2, \quad \left(1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx}\right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (10.2)$$

Из уравнения (10.1) при $x < L$ следует равенство

$$k\gamma I(x) = \frac{d}{dx} S(x), \quad (10.3)$$

где плотность потока энергии — $S(x)$ — определяется равенством

$$S(x) = \frac{i}{2k} \left[u(x) \frac{d}{dx} u^*(x) - u^*(x) \frac{d}{dx} u(x) \right],$$

а интенсивность волнового поля — $I(x) = |u(x)|^2$. При этом

$$S(L) = 1 - |R_L|^2, \quad S(L_0) = |T_L|^2,$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды, а T_L — комплексный коэффициент прохождения волны. Следовательно, интегрируя (10.3) по пространству неоднородной среды, получаем равенство

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 + k\gamma \int_{L_0}^L dx I(x) = 1. \quad (10.4)$$

Если затухание волны в среде отсутствует ($\gamma = 0$), то сохранение плотности потока энергии выражается равенством

$$|R_L|^2 + |T_L|^2 = 1.$$

Краевую задачу (10.1), (10.2) с помощью метода погружения можно переформулировать с самого начала в виде динамической задачи с начальными условиями по параметру L — геометрическому положению правой границы слоя, рассматривая ее как функцию параметра L . Так коэффициент отражения R_L удовлетворяет при этом уравнению Риккати (см. приложение В):

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \quad (10.5)$$

а волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ описывается линейным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik u(x; L) + \frac{ik}{2}\varepsilon(L)(1 + R_L)u(x; L), \quad u(x; x) = 1 + R_x. \quad (10.6)$$

Из уравнений (10.5) и (10.6) следуют уравнения для квадрата модуля коэффициента отражения $W_L = |R_L|^2$ и интенсивности волнового поля $I(x; L) = |u(x; L)|^2$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_L &= -\frac{k\gamma}{2}[4W_L + (R_L + R_L^*)(1 + W_L)] - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*)(1 - W_L), \\ W_{L_0} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial L} I(x; L) &= -\frac{k\gamma}{2}(2 + R_L + R_L^*)I(x; L) - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*)I(x; L), \\ I(x; x) &= |1 + R_x|^2, \end{aligned} \quad (10.7)$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} \ln(1 - W_L) &= -\frac{k\gamma}{2} \frac{4W_L + (R_L + R_L^*)(1 + W_L)}{1 - W_L} - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*), \\ \frac{\partial}{\partial L} \ln I(x; L) &= -\frac{k\gamma}{2}(2 + R_L + R_L^*) - \frac{ik}{2}\varepsilon_1(L)(R_L - R_L^*). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Исключая из (10.8) члены, связанные с функцией $\epsilon_1(L)$, получаем равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} \ln \frac{I(x; L)}{1 - W_L} = -k\gamma \frac{|1 + R_L|^2}{1 - W_L}.$$

Следовательно, интенсивность волнового поля связана с коэффициентом отражения с помощью равенства

$$I(x; L) = \frac{|1 + R_x|^2 (1 - W_L)}{1 - W_x} \exp \left\{ -k\gamma \int_x^L d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - W_\xi} \right\}. \quad (10.9)$$

Полагая в (10.9) точку $x = L_0$, получаем связь модуля коэффициента прохождения волны с коэффициентом отражения:

$$|T_L|^2 = (1 - W_L) \exp \left\{ -k\gamma \int_{L_0}^L d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - W_\xi} \right\}. \quad (10.10)$$

При отсутствии поглощения в среде из равенства (10.9) следует выражение

$$I(x; L) = \frac{|1 + R_x|^2 (1 - W_L)}{1 - W_x}. \quad (10.11)$$

Таким образом, при отсутствии в среде поглощения уравнение (10.7) для интенсивности волнового поля интегрируется, и интенсивность волнового поля внутри неоднородной среды простым образом связана с коэффициентом отражения волны от слоя среды.

Аналогичным образом поле точечного источника, расположенного в слое случайно неоднородной среды, описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x; x_0) + k^2 [1 + \epsilon(x)] G(x; x_0) = 2ik\delta(x - x_0),$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Отметим, что положение источника на границе слоя $x_0 = L$ соответствует краевой задаче (10.1), (10.2) о падении волны на слой среды, т. е.

$$G(x; L) = u(x; L).$$

Решение краевой задачи (10.12) в области $x < x_0$ может быть записано в виде (1.35)

$$G(x; x_0) = \frac{[1 + R_1(x_0)][1 + R_2(x_0)]}{1 - R_1(x_0)R_2(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad (10.13)$$

где величина $R_1(L) = R_L$ — коэффициент отражения плоской волны, падающей на слой среды из области $x > L$. Аналогичным образом величина

$R_2(x_0)$ — коэффициент отражения волны падающей на слой среды (x_0, L) из однородного полупространства $x < x_0$ (т. е. при $\varepsilon = 0$).

Задача с абсолютно отражающими границами, на которых поля $G(x; x_0)$ или $\frac{d}{dx}G(x; x_0)$ обращаются в нуль, имеют большое прикладное значение. Так, в последнем случае, для источника плоских волн, расположенного на этой границе, имеем $R_2(x_0) = 1$ и, следовательно,

$$G_{\text{ref}}(x; x_0) = \frac{2}{1 - R_1(x_0)} \exp \left[ik \int_x^{x_0} d\xi \frac{1 - R_1(\xi)}{1 + R_1(\xi)} \right], \quad x \leq x_0. \quad (10.14)$$

Из уравнения (10.12) при $x < x_0$ вытекает также равенство для интенсивности волнового поля $I(x; x_0) = |G(x; x_0)|^2$:

$$k\gamma I(x; x_0) = \frac{d}{dx} S(x; x_0), \quad (10.15)$$

где плотность потока энергии — $S(x; x_0)$ — определяется равенством

$$S(x; x_0) = \frac{i}{2k} \left[G(x; x_0) \frac{d}{dx} G^*(x; x_0) - G^*(x; x_0) \frac{d}{dx} G(x; x_0) \right].$$

Используя выражение (10.13), можно представить $S(x; x_0)$ в виде ($x \leq x_0$)

$$S(x; x_0) = S(x_0; x_0) \exp \left[-k\gamma \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_1(\xi)|^2}{1 - |R_1(\xi)|^2} \right],$$

где плотность потока энергии в точке расположения источника равна

$$S(x_0; x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0) R_2(x_0)|^2} \quad (10.16)$$

Далее нас будут интересовать статистические задачи о падении волны на полупространство случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) и источник в неограниченном пространстве ($L_0 \rightarrow -\infty, L \rightarrow \infty$) при достаточно малом поглощении ($\gamma \rightarrow 0$). Из выражения (10.15) видно, что, вообще говоря, эти предельные переходы не перестановочны. Действительно, если $\gamma = 0$, то имеет место сохранение плотности потока энергии $S(x; x_0)$ во всем полупространстве $x < x_0$. В присутствии малого конечного поглощения, однако, интегрируя равенство (10.15) по полупространству $x < x_0$, получаем ограничение на значение энергии, сосредоточенной в этом полупространстве:

$$k\gamma \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x; x_0) = S(x_0; x_0) = \frac{[1 - |R_1(x_0)|^2] |1 + R_2(x_0)|^2}{|1 - R_1(x_0) R_2(x_0)|^2}. \quad (10.17)$$

Представляют интерес три простейшие статистические задачи:

- падение волны на слой среды (конечный и полупространство);
- источник волн внутри слоя среды (конечного и неограниченного пространства);

- влияние границ на статистические характеристики волнового поля.

Все эти задачи удастся решить в полном объеме аналитическими методами. Также легко в этом случае осуществить численное моделирование и провести сопоставление его результатов с аналитическими.

Будем считать, что $\varepsilon_1(x)$ — гауссов дельта-коррелированный случайный процесс с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(L) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(L) \varepsilon_1(L') \rangle = B_\varepsilon(L - L') = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(L - L'), \quad (10.18)$$

где $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$ — дисперсия, а l_0 — радиус корреляции для случайной функции $\varepsilon_1(L)$. Такая аппроксимация означает, что переход к асимптотическому случаю $l_0 \rightarrow 0$ в точном решении задачи с конечным радиусом корреляции l_0 приводит к результатам, совпадающим с решением статистической задачи с параметрами (10.18).

В силу малости параметра σ_ε^2 все статистические эффекты могут быть разделены на два типа — локальные и накапливающиеся, из-за эффекта многократного переотражения волны в среде. Нас будут интересовать последние.

Из постановки краевых волновых задач на основе метода погружения видно, что существует два типа характеристик волнового поля, представляющих непосредственный интерес. Первый тип величин связан со значениями волнового поля на границах слоя (коэффициенты отражения и прохождения R_L , T_L), полем в точке местонахождения источника $G(x_0; x_0)$, плотностью потока энергии в точке нахождения точечного источника $S(x_0; x_0)$ и т. д. Второй тип величин связан с определением статистических характеристик интенсивности волнового поля внутри слоя среды, что и является предметом статистической теории переноса излучения.

10.4. Статистическое описание волнового поля на границах слоя среды

10.4.1. Коэффициенты отражения и прохождения волны. Комплексный коэффициент отражения волны от слоя среды описывается замкнутым уравнением — уравнением Риккати (10.5).

Обозначим модуль коэффициента отражения через ρ_L , т. е. положим $R_L = \rho_L e^{i\varphi_L}$, где φ_L — фаза коэффициента отражения. Тогда, исходя из уравнения (10.5), для величины $W_L = \rho_L^2 = |R_L|^2$ — квадрата модуля коэффициента отражения и его фазы, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} W_L &= -2k\gamma W_L + k\varepsilon_1(L) \sqrt{W_L} (1 - W_L) \sin \varphi_L, \quad W_{L_0} = 0, \\ \frac{d}{dL} \varphi_L &= 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}} \cos \varphi_L \right\}, \quad \varphi_{L_0} = 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Быстро осциллирующие функции в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты, опущены в системе уравнений (10.19) (по сравнению с уравнением (10.7)).

Введем индикаторную функцию $\Phi(L; W) = \delta(W_L - W)$, которая описывается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial L} \Phi(L; W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W \Phi(L; W)\} - k\varepsilon_1(L) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \varphi_L \Phi(L; W) \right\}. \quad (10.20)$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций функции $\varepsilon_1(L)$ и используя формулу Фурутцу–Новикова (6.10), получаем для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения $P(L; W) = \langle \Phi(L; W) \rangle$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W P(L; W)\} - \\ - k \frac{\partial}{\partial W} \int_{L_0}^L dL' B_\varepsilon(L - L') \sqrt{W} (1 - W) \times \\ \times \left\langle \cos \varphi_L \frac{\delta \varphi_L}{\delta \varepsilon_1(L')} \Phi(L; W) + \sin \varphi_L \frac{\delta \Phi(L; W)}{\delta \varepsilon_1(L')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (10.21)$$

где $B_\varepsilon(L - L')$ — корреляционная функция случайного процесса $\varepsilon_1(L)$. Подставляя теперь в это уравнение функцию вида (10.18) и учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi(L; W)}{\delta \varepsilon_1(L - 0)} = -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \sin \varphi_L \Phi(L; W) \right\}, \\ \frac{\delta \varphi_L}{\delta \varepsilon_1(L - 0)} = k \left\{ 1 + \frac{1 + W_L}{2\sqrt{W_L}} \cos \varphi_L \right\}, \end{aligned}$$

вытекающие непосредственно из уравнений (10.20) и (10.19), получаем для плотности вероятностей $P(L; W)$ незамкнутое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \{W P(L; W)\} - \\ - k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \left\langle \left[\sqrt{W} \cos \varphi_L + \frac{1}{2} (1 + W) \cos^2 \varphi_L \right] \Phi(L; W) \right\rangle + \\ + k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1 - W) \frac{\partial}{\partial W} \left[\sqrt{W} (1 - W) \langle \sin^2 \varphi_L \Phi(L; W) \rangle \right] \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что фаза коэффициента отражения имеет структуру

$$\varphi_L = k(L - L_0) + \tilde{\varphi}_L,$$

т. е. быстро меняется на расстояниях порядка длины волны, можно дополнительно усреднить это уравнение по быстрым осцилляциям, что справедливо при естественном ограничении $k/D \gg 1$, и мы приходим к уравнению

Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L; W) = 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} W P(L; W) - 2D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W) P(L; W) + \\ + D \frac{\partial}{\partial W} W (1 - W)^2 \frac{\partial}{\partial W} P(L; W) \end{aligned} \quad (10.22)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

В некоторых случаях оказывается более удобным представлять величину W_L в виде

$$W_L = \frac{u_L - 1}{u_L + 1}, \quad u_L = \frac{1 + W_L}{1 - W_L}, \quad u_L \geq 1. \quad (10.23)$$

Тогда величина u_L описывается стохастической системой уравнений

$$\frac{d}{dL} u_L = -k\gamma (u_L^2 - 1) + k\varepsilon_1(L) \sqrt{u_L^2 - 1} \sin \varphi_L, \quad u_{L_0} = 1,$$

$$\frac{d}{dL} \varphi_L = 2k + k\varepsilon_1(L) \left\{ 1 + \frac{u_L}{\sqrt{u_L^2 - 1}} \cos \varphi_L \right\}, \quad \varphi_{L_0} = 0$$

и для плотности вероятностей случайной величины u_L — $P(L; u) = \langle \delta(u_L - u) \rangle$ получаем уравнение Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L; u) = k\gamma \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) P(L; u) + D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(L; u). \quad (10.24)$$

Отметим, что обратная величина к коэффициенту диффузии, определяющая естественный масштаб длины, связанный со случайными неоднородностями среды, обычно называется *длиной локализации*, т. е.

$$l_{\text{loc}} = 1/D.$$

Далее, при анализе статистических характеристик волнового поля, мы увидим, что именно эта величина определяет масштаб *динамической локализации волн* в отдельных реализациях волнового поля, несмотря на то, что в ряде случаев *статистическая локализация*, связанная со статистическими характеристиками волнового поля, может и не осуществляться.

Недиссипативная среда (случай нормального падения волны). Если поглощение в среде отсутствует (т. е. $\gamma = 0$), то уравнение (10.24) для безразмерной толщины слоя $\eta = D(L - L_0)$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta; u) = \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} P(\eta; u). \quad (10.25)$$

Его решение легко получить, используя интегральное преобразование Меллера–Фока (см. гл. 6, раздел 6.4.2), которое имеет вид формулы (6.74)

$$P(\eta, u) = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) \exp\left\{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)\eta\right\} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u), \quad (10.26)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)$ — функция Лежандра первого порядка (функция конуса). Учитывая, что

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x) = \frac{\pi}{\cosh(\mu\pi)} K_n(\mu),$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n} \left[\mu^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right] K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1,$$

из представление (10.26), можно вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения $W_L = |R_L|^2$ и прохождения $|T_L|^2 = 1 - |R_L|^2 = 2/(1+u_L)$ и, в частности, получить выражение для моментов квадрата модуля коэффициента прохождения [40, 41, 155]:

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle = 2^n \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} K_n(\mu) e^{-(\mu^2+1/4)\eta}. \quad (10.27)$$

График зависимости величин $\langle W_L \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$ и $\langle |T_L|^2 \rangle = 1 - \langle |R_L|^2 \rangle$ от толщины слоя приведен на рис. 4.3.

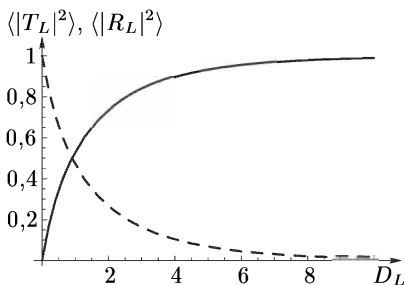


Рис. 4.3. Зависимости величин $\langle |R_L|^2 \rangle$ и $\langle |T_L|^2 \rangle$ от толщины слоя

При достаточно большой толщине слоя, а именно $\eta = D(L - L_0) \gg 1$, для моментов модуля коэффициента прохождения из (10.27) следует асимптотическая формула

$$\langle |T_L|^{2n} \rangle \approx \frac{[(2n-3)!!]^2 \pi^2 \sqrt{\pi}}{2^{2n-1} (n-1)!} \frac{1}{\eta \sqrt{\eta}} e^{-\eta/4},$$

и, следовательно, асимптотическая зависимость любого момента модуля коэффициента прохождения $|T_L|$ от толщины слоя имеет универсальную зависимость (меняется лишь численный коэффициент).

Стремление к нулю всех моментов величины $|T_L|$ с увеличением толщины слоя означает, что $|R_L| \rightarrow 1$ с вероятностью единица, т. е. *полупространство случайно-неоднородной недиссипативной слоистой среды полностью отражает падающую на нее волну*. Очевидно, что это явление не зависит от статистической модели среды и от условия справедливости описания

с помощью дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям, связанного с фазой коэффициента отражения.

В приближении дельта-коррелированности случайного процесса $\varepsilon_1(L)$ случайные процессы W_L и u_L — марковские процессы по параметру L . При этом плотность вероятностей перехода

$$p(u, L | u', L') = \langle \delta(u_L - u | u_{L'} = u') \rangle$$

описывается, очевидно, также уравнением (10.25), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial L} p(u, L | u', L') = D \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} p(u, L | u', L')$$

с начальным условием

$$p(u, L'' | u', L') = \delta(u - u'),$$

решение которого имеет структуру (6.73), т. е.

$$p(u, L | u', L') = \int_0^\infty d\mu \mu \tanh(\pi\mu) e^{-D(\mu^2 + 1/4)(L - L')} P_{-\frac{1}{2} + i\mu}(u) P_{-\frac{1}{2} + i\mu}(u'). \quad (10.28)$$

При $L' = L_0$ и $u' = 1$ выражение (10.28) переходит в одноточечную плотность вероятностей (10.26).

Недиссипативная среда (случай наклонного падения волны). Ситуация не меняется и для случая наклонного падения волны на полупространство случайно-неоднородной слоистой среды под углом θ к оси x . В этом случае коэффициент отражения и волновое поле внутри среды описываются уравнениями погружения (В.42 приложения В):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(\cos\theta) R_L + \frac{ik}{2(\cos\theta)} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= ik(\cos\theta) u(x; L) + \frac{ik}{2(\cos\theta)} \varepsilon(L) (1 + R_L) u(x; L), \\ u(x; x) &= 1 + R_x. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Из первого уравнения (10.29) следует, что для недиссипативной среды величина $W_L = |R_L|^2$ описывается уравнением

$$\frac{d}{dL} W_L = \frac{k}{\cos\theta} \varepsilon_1(L) \sqrt{W_L} (1 - W_L) \sin\varphi_L, \quad W_{L_0} = 0, \quad (10.30)$$

где φ_L — фаза коэффициента отражения. Совершенно очевидно, что с вероятностью, равной единице, для любого случайного процесса $\varepsilon_1(L)$ и для любого угла θ падения для полупространства случайной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$) величина $W_L \rightarrow 1$.

В этом случае коэффициент отражения имеет структуру $R_L = e^{i\varphi_L}$, где фаза φ_L описывается уравнением погружения, вытекающим из (10.29):

$$\frac{d}{dL}\varphi_L = 2k(\cos\theta) + \frac{k}{\cos\theta}\varepsilon_1(L)(1 + \cos\varphi_L), \quad \varphi_{L_0} = 0. \quad (10.31)$$

Нас интересует закон распределения вероятностей случайной величины φ_L . Решение уравнения (10.31) определяет его на всей оси $\varphi_L(-\infty, \infty)$. Однако для приложений полезнее знание распределения вероятностей на интервале $(-\pi, \pi)$, которое для полупространства, естественно, не должно зависеть от L . Для получения этого распределения удобно вместо фазы волны φ_L рассматривать функцию $z_L = \tan(\varphi_L/2)$, имеющую сингулярные точки. Динамическое уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dL}z_L = k\cos\theta(1 + z_L^2) + \frac{k}{\cos\theta}\varepsilon_1(L), \quad z_{L_0} = 0. \quad (10.32)$$

Считая, что случайная функция $\varepsilon_1(L)$ является гауссовой дельта-коррелированной случайной функцией с параметрами (10.18) для плотности вероятностей

$$P(L, z) = \langle \delta(z_L - z) \rangle,$$

определенной на всей оси $(-\infty, \infty)$, получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial L}P(L, z) = -k\cos\theta\frac{\partial}{\partial z}(1 + z_L^2)P(L, z) + \frac{2D}{\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial z^2}P(L, z). \quad (10.33)$$

Для полупространства случайно-неоднородной среды ($L_0 \rightarrow -\infty$), соответствующее «стационарное» решение уравнения Фоккера–Планка

$$P(z) = \lim_{L_0 \rightarrow -\infty} P(L, z),$$

независящее от L , описывается уравнением

$$-\kappa\frac{d}{dz}(1 + z^2)P(z) + \frac{d^2}{dz^2}P(z) = 0, \quad (10.34)$$

где параметр

$$\kappa = \frac{\alpha}{2}\cos^3\theta, \quad \alpha = \frac{k}{D}, \quad D = \frac{k^2\sigma_\varepsilon^2 l_0}{2}.$$

Отметим, что в случае нормального падения волны ($\theta = 0$) параметр $\kappa = \alpha/2$ описывает влияние волнового числа на статистические характеристики задачи [72, 73, 91].

Решение уравнения (10.34), соответствующее постоянству плотности потока вероятностей, имеет вид ([142, 160])

$$P(z) = J(\kappa) \int_z^\infty d\xi \exp \left\{ -\kappa \xi \left[1 + \frac{\xi^3}{3} + z(z + \xi) \right] \right\}, \quad (10.35)$$

где «стационарное» значение плотности потока вероятностей

$$J^{-1}(\kappa) = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} d\xi \exp \left\{ -\kappa \left(\xi + \frac{\xi^3}{12} \right) \right\}.$$

Соответствующее распределение вероятностей для фазы волны в интервале $(-\pi, \pi)$

$$P(\varphi) = \frac{1+z^2}{2} P(z) \Big|_{z=\tan(\varphi/2)}$$

приведено на рис. 4.4, а для различных значений параметра ($\kappa = 0, 1; 1, 0; 10$). При $\kappa \gg 1$ асимптотически имеем

$$P(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)},$$

что соответствует равномерному распределению фазы коэффициента отражения:

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

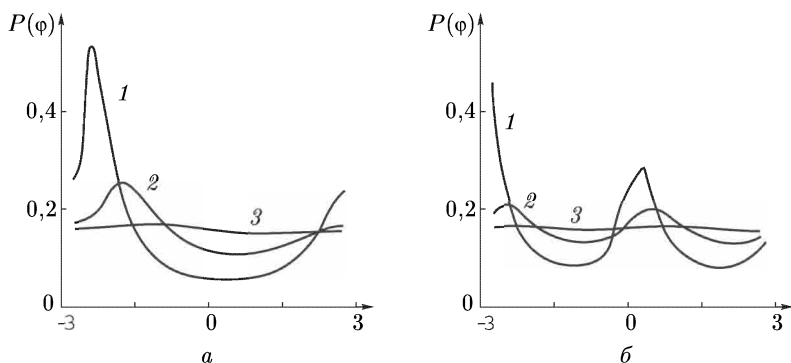


Рис. 4.4. Стационарная плотность вероятностей $P(\varphi)$ для несогласованной (а) и согласованной (б) границ. Кривая 1 соответствует параметру $\kappa = 0, 1$; 2 — $\kappa = 1$; 3 — $\kappa = 10$

В обратном предельном случае, $\kappa \ll 1$, соответствующему пологому падению волны на полупространство $m(\theta \rightarrow \pi/2)$, мы получаем

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/6)} \Gamma \left(\frac{1}{3}, \frac{\kappa z^3}{3} \right),$$

где $\Gamma(\mu, z)$ — *неполная Гамма-функция*. При $\kappa |z|^3 \gg 3$ и $|z| \rightarrow \infty$ отсюда следует, что

$$P(z) = \kappa^{1/3} \left(\frac{3}{4} \right)^{1/6} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/6)} \left(\frac{3}{\kappa z^3} \right)^{2/3}.$$

Распределение вероятностей (10.35) позволяет вычислить различные статистические характеристики, связанные с коэффициентом отражения. В частности, например, на границе слоя $x = L$ средняя интенсивность волнового поля описывается асимптотическими выражениями

$$\langle I(L; L) \rangle = 2 \langle 1 + \cos \varphi_L \rangle = \begin{cases} 2, & \kappa \gg 1, \\ 2(3)^{1/6} \Gamma(2/3) \kappa^{1/3}, & \kappa \ll 1. \end{cases}$$

Таким образом, для пологого падения волны, когда $\theta \rightarrow \pi/2$, величина $R_L \rightarrow -1$ и, следовательно, волновое поле на границе слоя $x = L - u(L, L) = 1 + R_L$ стремятся к нулю. Этот результат показывает, что случайно-неоднородная среда для пологого падения волны является как бы зеркалом. Этот эффект существенно связан со скачком функции $\epsilon_1(x)$ на границе слоя $x = L$. Этот малый скачок не вносит существенного вклада в статистику при малых углах падения волны (нормальное падение), однако для пологого падения этот скачок проявляется как бесконечный барьер и статистическая ситуация меняется кардинальным образом. Следовательно, распределение вероятностей для фазы коэффициента отражения (10.35) содержит информацию как о рассеянии волны на случайных неоднородностях среды, так и о рассеянии на скачке функции $\epsilon_1(x)$ на границе слоя, не разделяя эти эффекты. Разделить эти эффекты можно рассматривая задачу с согласованной границей в рамках диффузионного приближения, что и будет сделано в дальнейшем.

Диссипативная среда. При наличии поглощения в среде уравнения (10.22) и (10.24) не могут быть решены аналитически для слоя конечной толщины. Однако для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) существует «стационарная» плотность вероятностей для величин W_L и u_L [1, 168], не зависящая от L и удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} 2(\beta - 1 + W)P(W) + (1 - W)^2 \frac{d}{dW} P(W) &= 0, \quad 0 < W < 1, \\ \beta P(u) + \frac{d}{du} P(u) &= 0, \quad u > 1, \end{aligned} \quad (10.36)$$

где $\beta = k\gamma/D$ — безразмерный коэффициент поглощения.

Решения уравнений (10.36) имеют вид

$$P(W) = \frac{2\beta}{(1 - W)^2} \exp \left\{ -\frac{2\beta W}{1 - W} \right\}, \quad P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}, \quad (10.37)$$

и график функции $P(W)$ представлен для различных значений параметра β на рис. 4.5.

Физический смысл плотности вероятностей (10.37) очевиден — она описывает статистические свойства коэффициента отражения от достаточно протяженного хаотически неоднородного слоя, до конца которого падающая волна не проникает вследствие ее динамического поглощения средой.

С помощью распределений (10.37) можно вычислить все моменты величины $W_L = |R_L|^2$. Так, для среднего значения квадрата модуля коэффициента отражения получаем

$$\langle W \rangle = \int_0^1 dW W P(W) = \int_1^\infty du \frac{u-1}{u+1} P(u) = 1 + 2\beta e^{2\beta} \text{Ei}(-2\beta),$$

где $\text{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}$ ($x > 0$) — интегральная показательная функция.

Учитывая асимптотические разложения для функции $\text{Ei}(-x)$ (см., например, [2])

$$\text{Ei}(-x) = \begin{cases} \ln x & (x \ll 1), \\ -e^{-x} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) & (x \gg 1), \end{cases}$$

получаем асимптотические разложения для величины $\langle W \rangle = \langle |R_L|^2 \rangle$:

$$\langle W \rangle \approx \begin{cases} 1 - 2\beta \ln(1/\beta), & \beta \ll 1, \\ 1/2\beta, & \beta \gg 1. \end{cases} \quad (10.38)$$

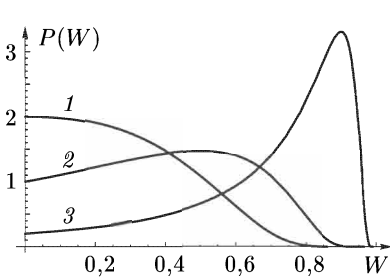


Рис. 4.5. Плотность вероятностей для квадрата модуля коэффициента отражения $P(W)$. Кривая 1 соответствует параметру $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,5$; 3 — $\beta = 0,1$

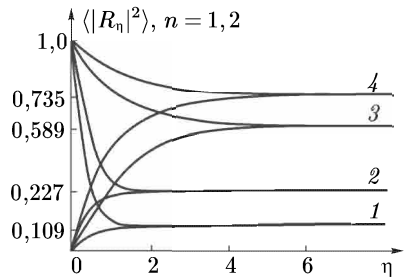


Рис. 4.6. Графики зависимости статистических характеристик $W_L = |R_L|^2$: кривые 1, 2 — второй и первый моменты при $\beta = 1$, кривые 3, 4 — второй и первый моменты при $\beta = 0,08$

Для нахождения высших моментов величины $W_L = |R_L|^2$ умножим первое уравнение в (10.36) на W^n и проинтегрируем по W от 0 до 1. В результате получаем рекуррентное соотношение

$$n \langle W^{n+1} \rangle - 2(\beta + n) \langle W^n \rangle + n \langle W^{n-1} \rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (10.39)$$

с помощью которого можно последовательно вычислить все старшие моменты. Так, для $n = 1$, получаем

$$\langle W^2 \rangle = 2(\beta + 1) \langle W \rangle - 1.$$

Переход к «стационарному» распределению вероятностей можно осуществить не только предельным переходом $L_0 \rightarrow -\infty$, но и переходом $L \rightarrow \infty$. Уравнение (10.22) решалось численно для двух значений параметра, $\beta = 1,0$ и $\beta = 0,08$, для различных начальных условий [41, 155]. По найденному решению вычислялись величины $\langle W_L \rangle$, $\langle W_L^2 \rangle$, графики поведения которых в зависимости от безразмерной толщины слоя $\eta = D(L - L_0)$ представлены на рис. 4.6. Из графиков видно, что при $\beta \geq 1$ распределение вероятностей выходит на свое «стационарное» распределение довольно быстро ($\eta \sim 1,5$), в случае же $\beta = 0,08$ (большая «стохастичность» задачи) — $\eta \geq 5$.

Отметим, что для рассматриваемой задачи плотность потока энергии и интенсивность волнового поля на границе слоя среды $x = L$ выражаются через коэффициент отражения и, следовательно, при $\beta \ll 1$

$$\langle S(L, L) \rangle = 1 - \langle W_L \rangle = 2\beta \ln(1/\beta), \quad \langle I(L, L) \rangle = 1 + \langle W_L \rangle = 2. \quad (10.40)$$

Учитывая, что для полупространства случайно-неоднородной среды $|T_L| = 0$, для энергии волнового поля, заключенного в этом полупространстве:

$$E = D \int_{-\infty}^L dx I(x; L),$$

исходя из равенства (10.4) получаем распределение вероятностей вида

$$P(E) = \beta P(W)_{W=(1-\beta E)} = \frac{2}{E^2} \exp \left\{ -\frac{2}{E} (1 - \beta E) \right\} \theta(1 - \beta E), \quad (10.41)$$

и, в частности, например, при $\beta \ll 1$

$$\langle E \rangle = 2 \ln(1/\beta). \quad (10.42)$$

Отметим, что распределение вероятностей (10.41) допускает предельный переход $\beta = 0$, в результате которого получаем предельную плотность вероятностей

$$P(E) = \frac{2}{E^2} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \right\}, \quad (10.43)$$

затухающую степенным образом для больших значений энергии E , с интегральной функцией распределения

$$F(E) = \exp \left\{ -\frac{2}{E} \right\}.$$

Следствием (10.43) является то, что все моменты полной энергии волнового поля равны бесконечности. И в то же время существует конечная вероятность ограничения полной энергии произвольной величиной в отдельных реализациях волнового поля.

Можно также показать [40, 41, 155], что для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) при $\beta \ll 1$ имеет место выражение

$$D \int_{-\infty}^L dx \langle I^2(x; L) \rangle = \frac{1}{\beta}.$$

10.4.2. Источник внутри среды. Для источника плоских волн, находящегося внутри среды, волновое поле и плотность потока энергии в точке расположения источника описываются формулами (10.13) и (10.16). Для модели дельта-коррелированных флуктуаций $\epsilon_1(x)$ величины $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ статистически независимы, так как они описываются динамическими уравнениями (1.34) в неперекрывающихся частях пространства (см. гл. 1). Для неограниченного пространства ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) плотности вероятностей для величин $R_1(x_0)$ и $R_2(x_0)$ описываются формулой (10.37) и, следовательно, для средней интенсивности волнового поля в точке расположения источника и среднего значения плотности потока энергии в точке расположения источника получаем выражение [40, 41, 155]

$$\langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta}. \quad (10.44)$$

Неограниченный рост средней интенсивности в точке расположения источника при $\beta \rightarrow 0$ свидетельствует о накоплении энергии волны в хаотически слоистой среде, а в то же время среднее значение плотности потока энергии в точке расположения источника $\langle S(x_0; x_0) \rangle = 1$ не зависит от флуктуаций параметра среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Аналогичным образом с помощью формул (10.14) и (10.16) для источника, расположенного на отражающей границе $x_0 = L$, получаем

$$\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right), \quad \langle S_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4, \quad (10.45)$$

т. е. среднее значение плотности потока энергии от источника, расположенного на отражающей границе, также не зависит от флуктуаций параметров среды и совпадает с плотностью потока энергии в свободном пространстве.

Отметим, что полученные выше формулы (10.44), (10.45), при $\beta \rightarrow 0$ обращаются в бесконечность, т. е. наличие поглощения в среде (хоть и сколь угодно малого) является регуляризующим фактором в задаче о точечном источнике.

Используя равенство (10.17), можно получить распределение вероятностей для энергии волнового поля в полупространстве:

$$E = D \int_{-\infty}^{x_0} dx I(x; x_0).$$

В частности, для источника, находящегося на отражающей границе, получаем выражение

$$P_{\text{ref}}(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{E\sqrt{E}} \exp \left\{ -\frac{2}{E} \left(1 - \frac{\beta E}{4} \right)^2 \right\},$$

допускающее предельный переход $\beta \rightarrow 0$, аналогично случаю падения волны на полупространство случайно-неоднородной среды.

10.4.3. Статистическая локализация. Полученные выше равенства, связанные со значениями волнового поля в фиксированных точках пространства (на границе среды и в точке расположения источника) позволяют, в силу равенства (10.17), сделать некоторые общие заключения и о поведении средней интенсивности волнового поля внутри случайно-неоднородной среды.

Так, для средней энергии, содержащейся в полупространстве $(-\infty, x)$, из (10.17) следует выражение

$$\langle E \rangle = D \int_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \langle S(x_0; x_0) \rangle. \quad (10.46)$$

Следовательно, для падающей на полупространство $x \leq L$ плоской волны ($x_0 = L$) при условии $\beta \ll 1$ из (10.40) и (10.46) вытекают равенства

$$\langle E \rangle = 2 \ln(1/\beta), \quad \langle I(L; L) \rangle = 2. \quad (10.47)$$

Следовательно, большая часть средней энергии сосредоточена в части пространства

$$Dl_\beta \cong \ln(1/\beta),$$

т. е. осуществляется *статистическая локализация волнового поля*, связанная с поглощением волны. Отметим, что и при отсутствии флуктуаций параметров среды также осуществляется локализация энергии на масштабах порядка длины поглощения $Dl_{\text{abs}} \cong 1/\beta$. Однако при выполнении условия $\beta \ll 1$ имеет место соотношение $l_{\text{abs}} \gg l_\beta$. Если $\beta \rightarrow 0$, то величина $l_\beta \rightarrow \infty$ и в предельном случае непоглощающей среды статистическая локализация волнового поля отсутствует.

Для источника в неограниченном пространстве имеем

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\beta}, \quad \langle I(x_0; x_0) \rangle = 1 + \frac{1}{\beta},$$

и, следовательно, в отличие от предыдущего случая, локализация средней энергии осуществляется на пространственном масштабе $D|x - x_0| \cong 1$ при $\beta \rightarrow 0$.

Аналогичным образом для источника, расположенного на отражающей границе, имеем

$$\langle E \rangle = \frac{4}{\beta}, \quad \langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle = 4 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right),$$

и, следовательно, локализация средней энергии осуществляется на вдвое меньшем пространственном масштабе $D(L - x) \cong 1/2$ при $\beta \rightarrow 0$.

В рассмотренных выше задачах средняя энергия волнового поля существенно зависит от параметра β и стремится к бесконечности при условии $\beta \rightarrow 0$. Однако это справедливо только для средних величин. Далее при анализе волнового поля внутри случайно-неоднородной среды мы убедимся, что даже при отсутствии поглощения в среде в отдельных реализациях волнового поля осуществляется *динамическая локализация*.

10.4.4. Диффузионное приближение.

Задача с несогласованной границей. При выводе уравнений (10.22) и (10.24) мы использовали приближение дельта-коррелированности функции $\varepsilon_1(x)$ и дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, что накладывает определенные ограничения на условие малости пространственного радиуса корреляции l_0 случайного процесса $\varepsilon_1(x)$. Для учета конечности пространственного радиуса корреляции l_0 можно воспользоваться диффузионным приближением. В рамках этого приближения предполагается малость влияния флуктуаций процесса $\varepsilon_1(x)$ на динамику волнового поля на масштабах порядка радиуса корреляции l_0 , т. е. что на масштабах порядка l_0 волна распространяется, как в свободном пространстве.

Исходным уравнением является точное равенство (10.21). В рамках диффузионного приближения вариационные производные $\delta\varphi_L/\delta\varepsilon_1(L')$ и $\delta\Phi(L;W)/\delta\varepsilon_1(L')$ на масштабах порядка l_0 описываются уравнениями с начальными условиями (поглощение волны в среде также считаем малым):

$$\frac{\partial}{\partial L} \frac{\delta\Phi(L;W)}{\delta\varepsilon_1(L')} = 0, \quad \left. \frac{\delta\Phi(L;W)}{\delta\varepsilon_1(L')} \right|_{L=L'} = -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1-W) \sin \varphi_{L'} \Phi(L';W) \right\},$$

$$\frac{d}{dL} \frac{\delta\varphi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} = 0, \quad \left. \frac{\delta\varphi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} \right|_{L=L'} = k \left\{ 1 + \frac{1+W_{L'}}{2\sqrt{W_{L'}}} \cos \varphi_{L'} \right\}.$$

При этом и сами функции $\Phi(L;W)$, W_L и φ_L на масштабах порядка l_0 описываются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial L} \Phi(L;W) = 0, \quad \Phi(L;W)|_{L=L'} = \Phi(L';W),$$

$$\frac{d}{dL} W_L = 0, \quad W_L|_{L=L'} = W_{L'}, \quad \frac{d}{dL} \varphi_L = 2k, \quad \varphi_L|_{L=L'} = \varphi_{L'}.$$

Следовательно, в рамках диффузионного приближения

$$\Phi(L';W) = \Phi(L;W), \quad W_{L'} = W_L, \quad \varphi_{L'} = \varphi_L - 2k(L-L'),$$

и вариационные производные $\delta\varphi_L/\delta\varepsilon_1(L')$ и $\delta\Phi(L;W)/\delta\varepsilon_1(L')$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi(L;W)}{\delta\varepsilon_1(L')} &= -k \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \sqrt{W} (1-W) \sin [\varphi_L - 2k(L-L')] \Phi(L;W) \right\}, \\ \frac{\delta\varphi_L}{\delta\varepsilon_1(L')} &= k \left\{ 1 + \frac{1+W_{L'}}{2\sqrt{W_{L'}}} \cos [\varphi_L - 2k(L-L')] \right\}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Подставляя равенства (10.48) в уравнение (10.21), проводя дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям и считая, что толщина слоя случайно-неоднородной среды много больше масштаба l_0 и длины волны,

мы приходим к уравнению Фоккера–Планка (10.22) с коэффициентом диффузии

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) \cos(2k\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(2k), \quad (10.49)$$

где $\Phi_\varepsilon(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) e^{iq\xi}$ — спектральная функция случайного процесса $\varepsilon_1(x)$. Появление спектра функции $\varepsilon_1(x)$ на удвоенной пространственной гармонике физически связано с известным *условием Брэгга* для дифракции на пространственных структурах (см., например, [9]).

Диффузионное приближение соответствует предположению малости влияния флуктуаций процесса $\varepsilon_1(x)$ на динамику волнового поля на масштабах порядка радиуса корреляции l_0 . В этом случае волновое поле, как функция параметра L , является марковским случайным процессом, что справедливо при выполнении условий

$$D(k, l_0) l_0 \ll 1, \quad \alpha = \frac{k}{D(k, l_0)} \gg 1.$$

Структура коэффициента диффузии $D(k, l_0)$ зависит от параметра kl_0 . Если $kl_0 \ll 1$, справедливо приближении дельта-коррелированности процесса $\varepsilon_1(x)$, в котором коэффициент диффузии не зависит от модели среды и

$$D(k, l_0) = \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_\varepsilon(\xi) = \frac{k^2}{4} \Phi_\varepsilon(0).$$

В другом предельном случае, $kl_0 \gg 1$, коэффициент диффузии может существенно зависеть от модели среды.

Таким образом, диффузионное приближение справедливо для достаточно малого значения параметра, $\sigma_\varepsilon^2 \ll 1$.

Задача с согласованной границей. Как отмечалось ранее, для несогласованной границы $x = L$, отражение волны осуществляется не только за счет неоднородностей среды, но и за счет скачка функции $\varepsilon_1(x)$ на этой границе. Разделить эти эффекты можно, рассматривая случай согласованной границы, когда отсутствует скачок функции $\varepsilon_1(x)$ на границе слоя $x = L$, т. е. когда волновое число в свободном полупространстве $x > L - k_L = k\sqrt{1 + \varepsilon_1(L)}$. В этом случае волновое поле описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) + k^2(x) u(x) &= 0, \\ \left(1 + \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx}\right) u(x) \Big|_{x=L} &= 2, \quad \left(1 - \frac{i}{k(x)} \frac{d}{dx}\right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0, \end{aligned} \quad (10.50)$$

где

$$k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)].$$

Краевую задачу (10.50) с помощью метода погружения также можно переформулировать как задачу с начальными условиями по параметру L — положению правой границы слоя, на которую падает волна (см. приложение В). Коэффициент отражения R_L и волновое поле в слое среды $u(x) \equiv u(x; L)$ для малых флуктуаций функции $\varepsilon_1(L)$ описываются уравнениями

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ikR_L - k\gamma R_L + \frac{\xi(L)}{2} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0, \quad (10.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik u(x; L) - \frac{k\gamma}{2} u(x; L) + \frac{\xi(L)}{2} (1 - R_L) u(x; L), \quad (10.52)$$

$$u(x; x) = 1 + R_x,$$

где $\xi(L) = \varepsilon'_1(L)$, и мы видим, что изменилась структура нелинейного члена в уравнении для коэффициента отражения и случайные неоднородности описываются пространственной производной функции $\varepsilon_1(L)$. Ввиду этого приближение дельта-коррелированности процесса неприменимо, и необходимо в качестве простейшего приближения использовать диффузионное.

Для гауссового процесса с корреляционной функцией $B_\varepsilon(x)$ случайный процесс $\xi(x)$ — также гауссов с корреляционной функцией

$$B_\xi(x - x') = \langle \xi(x) \xi(x') \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_\varepsilon(x - x'). \quad (10.53)$$

Рассмотрим, как и ранее, величину $W_L = |R_L|^2$. Для нее получаем динамическое уравнение

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L + \frac{\xi(L)}{2} (1 - W_L) (R_L + R_L^*), \quad W_{L_0} = 0. \quad (10.54)$$

Введем индикаторную функцию $\Phi(L; W) = \delta(W_L - W)$, которая описывается уравнением Лиувилля:

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \right) \Phi(L; W) = -\frac{\xi(L)}{2} \frac{\partial}{\partial W} \{ (1 - W) (R_L + R_L^*) \Phi(L; W) \}. \quad (10.55)$$

Усредняя это уравнение по ансамблю реализаций функции $\xi(L)$ и используя формулу Фурутцу–Новикова (6.10), получаем для плотности вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения $P(L; W) = \langle \Phi(L; W) \rangle$ уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial L} - 2k\gamma \frac{\partial}{\partial W} \right) P(L; W) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \int_{L_0}^L dL' B_\xi(L - L') (1 - W) \times \\ & \times \left\langle \left(\frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} + \frac{\delta R_L^*}{\delta \xi(L')} \right) \Phi(L; W) + (R_L + R_L^*) \frac{\delta \Phi(L; W)}{\delta \xi(L')} \right\rangle, \end{aligned} \quad (10.56)$$

где $B_\xi(L - L')$ — корреляционная функция случайного процесса $\xi(L)$.

В рамках диффузионного приближения вариационные производные $\delta R_L / \delta \xi(L')$ и $\delta \Phi(L; W) / \delta \xi(L')$ на масштабах порядка l_0 описываются уравнениями с начальными условиями (поглощение волны в среде также считаем малым)

$$\frac{\partial}{\partial L} \frac{\delta \Phi(L; W)}{\delta \xi(L')} = 0,$$

$$\left. \frac{\delta \Phi(L; W)}{\delta \xi(L')} \right|_{L=L'} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \{ (1-W)(R_{L'} + R_{L'}^*) \Phi(L'; W) \},$$

$$\frac{d}{dL} \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} = 2ik \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')}, \quad \left. \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} \right|_{L=L'} = \frac{1}{2} (1 - R_{L'}^2).$$

При этом и сами функции $\Phi(L; W)$ и R_L на масштабах порядка l_0 описываются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial L} \Phi(L; W) = 0, \quad \Phi(L; W)|_{L=L'} = \Phi(L'; W),$$

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik R_L, \quad R_L|_{L=L'} = R_{L'}.$$

Следовательно, в рамках диффузионного приближения

$$\Phi(L'; W) = \Phi(L; W), \quad R_{L'} = R_L e^{-2ik(L-L')},$$

и вариационные производные $\delta R_L / \delta \xi(L')$ и $\delta \Phi(L; W) / \delta \xi(L')$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi(L; W)}{\delta \xi(L')} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \left\{ \left(R_L e^{-2ik(L-L')} + R_L^* e^{2ik(L-L')} \right) (1-W) \Phi(L; W) \right\}, \\ \frac{\delta R_L}{\delta \xi(L')} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial W} \left(e^{2ik(L-L')} - R_L^2 e^{-2ik(L-L')} \right) (1-W) \Phi(L; W). \end{aligned} \quad (10.57)$$

Подставляя равенства (10.57) в уравнение (10.56), проводя дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям и считая, что толщина слоя случайно-неоднородной среды много больше масштаба l_0 и длины волны, мы приходим к уравнению Фоккера–Планка (10.22) с коэффициентом диффузии

$$D(k, l_0) = \frac{1}{16} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta B_{\xi}(\eta) \cos(2k\eta) = \frac{1}{16} \Phi_{\xi}(2k) = \frac{k^2}{4} \Phi_{\epsilon}(2k). \quad (10.58)$$

Таким образом, статистика модуля коэффициента отражения для задачи с согласованной границей совпадает со статистикой решения задачи с несогласованной границей. Это естественно, так как для нормального падения волны на несогласованную границу скачок функции $k(L)$ на этой границе мал. Расхождение следует ожидать только для наклонного пологого падения волны или для случая, когда невозможно проводить усреднение по быстрым осцилляциям.

При отсутствии поглощения из уравнений (10.51) и (10.54) ясно, что для полупространства случайно-неоднородной среды $x < L$ ($L_0 \rightarrow -\infty$) $W_L = 1$, т.е. волна полностью отражается случайно-неоднородным полупространством. Аналогичная ситуация имеет место и для наклонного падения волны под углом θ к оси x . В этом случае, вместо уравнения (10.51) для коэффициента отражения и (10.52) для волнового поля внутри среды, мы имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(\cos\theta) R_L + \frac{\xi(L)}{2\cos^2\theta} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= ik(\cos\theta) u(x; L) + \frac{\xi(L)}{2\cos^2\theta} (1 - R_L) u(x; L), \\ u(x; x) &= 1 + R_x. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Для пологого падения волны для полупространства $x < L$ величина $R_L^2 \rightarrow -1$, и потому $R_L \rightarrow \pm 1$. Следовательно, эти значения вносят наибольший вклад в статистику фазы коэффициента отражения.

Представляя коэффициент отражения в виде $R_L = e^{i\varphi_L}$, для фазы получаем уравнение

$$\frac{d}{dL} \varphi_L = 2k(\cos\theta) - \frac{\xi(L)}{2\cos^2\theta} \sin\varphi_L, \quad \varphi_{L_0} = 0. \quad (10.60)$$

Введем новую функцию $z_L = \tan(\varphi_L/2)$, имеющую сингулярные точки, аналогично случаю с несогласованной границей. Динамическое уравнение для нее имеет вид

$$\frac{d}{dL} z_L = 2k(\cos\theta) (1 + z_L^2) - \frac{\xi(L)}{2\cos^2\theta} z_L, \quad z_{L_0} = 0. \quad (10.61)$$

Для стохастического уравнения (10.55), действуя, как и ранее, в диффузионном приближении для плотности вероятностей $P(L, z) = \langle \delta(z_L - z) \rangle$, определенной на всей оси $(-\infty, \infty)$, получаем уравнение Фоккера-Планка [140]

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L, z) = -k\cos\theta \frac{\partial}{\partial z} (1 + z_L^2) P(L, z) + \frac{2D}{\cos^2\theta} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} z P(L, z), \quad (10.62)$$

где величина $D = k^2 \sigma_\epsilon^2 l_0 / 2$ определяет, как и ранее, коэффициент диффузии для нормального падения волны на слой среды.

Для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) «стационарная», не зависящая от L плотность вероятностей $P(z)$ описывается уравнением

$$-\kappa \frac{d}{dz} (1 + z_L^2) P(z) + \frac{2D}{\cos^2\theta} \frac{d}{dz} z \frac{d}{dz} z P(z), \quad (10.63)$$

где, как и ранее, параметр

$$\kappa = \frac{\alpha}{2} \cos^3\theta, \quad \alpha = \frac{k}{D}.$$

Решение этого уравнения с условием постоянства плотности потока вероятностей имеет вид квадратуры:

$$P(z) = -\frac{J(\kappa)}{z} \int_{z_0}^z \frac{dz_1}{z_1} \exp \left\{ \kappa \left(z - \frac{1}{z} - z_1 + \frac{1}{z_1} \right) \right\}.$$

Постоянная $J(\kappa)$ определяется из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} dz P(z) = 1$, а произвольная величина z_0 должна быть выбрана из условия конечности квадратуры для всех z из $(-\infty, \infty)$.

Следовательно,

$$P(z) = \theta(z)P_+(z) + \theta(-z)P_-(z),$$

$$\begin{aligned} P_+(z) &= \frac{J(\kappa)}{z} \int_0^{\infty} \frac{ds}{1+s} \exp \left\{ -\kappa s \left(z + \frac{1}{z(1+s)} \right) \right\}, \quad z > 0, \\ P_-(z) &= -\frac{J(\kappa)}{z} \int_0^1 \frac{ds}{1-s} \exp \left\{ \kappa s \left(z + \frac{1}{z(1-s)} \right) \right\}, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Плотность вероятностей $P(z)$ — непрерывная функция, и

$$P_+(z=+0) = P_-(z=-0) = \frac{J(\kappa)}{\kappa},$$

где

$$\frac{1}{J(\kappa)} = \pi^2 [J_0^2(2\kappa) + N_0^2(2\kappa)] = \begin{cases} \pi, & \kappa \gg 1, \\ \left[\pi^2 + 4(\ln \kappa + C)^2 \right], & \kappa \ll 1. \end{cases}$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя, $N_0(x)$ — функция Неймана и C — постоянная Эйлера.

При условии $\kappa \gg 1$, получаем асимптотическое решение в виде

$$P(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)},$$

соответствующее однородному распределению фазы коэффициента отражения

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

на $(-\pi, \pi)$. При $\kappa \ll 1$ невозможно написать асимптотическое выражение для $P(\varphi)$, однородное по φ . Численные результаты приведены на рис. 4.4, б для $\kappa = 0, 1; 1, 0; 10$.

Рассмотрим теперь статистические характеристики волнового поля на границе $x = L$, связанные с фазовыми флуктуациями коэффициента отражения в асимптотическом случае $\kappa \ll 1$. Среднее значение интенсивности

волнового поля на границе $x = L$ описывается выражением

$$\langle I(L; L) \rangle = 2 + \langle R_L + R_L^* \rangle = 2 \langle (1 + \cos \varphi_L) \rangle = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} P(z),$$

и, следовательно, при $\kappa \ll 1$ получаем равенство

$$\langle I(L; L) \rangle = 2,$$

которое означает, что статистические веса значений $R_L = +1$ и $R_L = -1$ совпадают, хотя плотность вероятностей и существенно отличается от равномерной.

10.5. Статистическое описание волнового поля внутри случайно-неоднородной среды (статистическая теория переноса излучения)

Перейдем теперь к статистическому описанию волнового поля внутри среды. Рассмотрим две задачи — о падении волны на слой среды и об источнике волн внутри среды.

10.5.1. Нормальное падение волны на слой случайно-неоднородной среды. В общем случае при наличии поглощения в среде волновое поле описывается краевой задачей (10.1), (10.2). Введем в рассмотрение комплексные встречные волны

$$u(x) = u_1(x) + u_2(x), \quad \frac{d}{dx} u(x) = -ik[u_1(x) - u_2(x)],$$

связанные с волновым полем с помощью равенств (1.23)

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), & u_1(L) &= 1, \\ u_2(x) &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} \right] u(x), & u_2(L_0) &= 0. \end{aligned} \tag{10.65}$$

Волновое поле, как функция параметра L , описывается уравнением погружения (10.6). Очевидно, что и встречные волны также будут удовлетворять уравнениям (10.6), но с различными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u_1(x; L) &= ik \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right) u_1(x; L), & u_1(x; x) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial L} u_2(x; L) &= ik \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right) u_2(x; L), & u_2(x; x) &= R_x, \end{aligned} \tag{10.66}$$

где коэффициент отражения R_L описывается уравнением (10.5).

Введем теперь интенсивности встречных волн $W_1(x; L) = |u_1(x; L)|^2$ и $W_2(x; L) = |u_2(x; L)|^2$, удовлетворяющие, очевидно, уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} W_1(x; L) &= -k\gamma W_1(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_1(x; L), \\ W_1(x; x) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial L} W_2(x; L) &= -k\gamma W_2(x; L) + \frac{ik}{2} \varepsilon(L) (R_L - R_L^*) W_2(x; L), \\ W_2(x; x) &= |R_x|^2. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Величина $W_L = |R_L|^2$, входящая в начальное условие в (10.67), удовлетворяет уравнению (10.7) или уравнению

$$\frac{d}{dL} W_L = -2k\gamma W_L - \frac{ik}{2} \varepsilon_1(L) (R_L - R_L^*) (1 - W_L), \quad W_{L_0} = 0. \quad (10.68)$$

В уравнениях (10.67) и (10.68) опущены слагаемые в диссипативных членах, не вносящие вклада в накапливающиеся эффекты.

Будем по-прежнему считать $\varepsilon_1(x)$ гауссовым дельта-коррелированным случайным процессом с корреляционной функцией (10.18). В силу того, что уравнения (10.67), (10.68) — уравнения первого порядка с начальными условиями можно для совместной плотности вероятностей величин $W_1(x; L)$, $W_2(x; L)$ и W_L

$$P(x; L; W_1, W_2, W) = \langle \delta(W_1(x; L) - W_1) \delta(W_2(x; L) - W_2) \delta(W_L - W) \rangle$$

обычным образом получить уравнение Фоккера–Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(x; L; W_1, W_2, W) &= \\ &= k\gamma \left(\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 + 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) P(x; L; W_1, W_2, W) + \\ &+ D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] P(x; L; W_1, W_2, W) + \\ &+ D \left[\frac{\partial}{\partial W_1} W_1 + \frac{\partial}{\partial W_2} W_2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W P(x; L; W_1, W_2) \end{aligned} \quad (10.69)$$

с начальным условием

$$P(x; x; W_1, W_2, W) = \delta(W_1 - 1) \delta(W_2 - W) P(x; W), \quad (10.70)$$

где функция $P(L; W)$ — плотность вероятностей квадрата модуля отражения W_L , описываемая уравнением (10.22). В уравнении (10.69), как и ранее, коэффициент диффузии $D = k^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0 / 2$, и при выводе уравнения используется дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, обусловленным решением задачи при $\varepsilon = 0$ — $u(x) \sim e^{\pm ikx}$.

Учитывая, что уравнения (10.67) для функций $W_n(x; L)$ линейны, можно перейти к производящей функции для моментов интенсивностей встречных волн:

$$Q(x; L; \mu, \lambda, W) = \int_0^1 dW_1 \int_0^1 dW_2 W_1^{\mu-\lambda} W_2^\lambda P(x; L; W_1, W_2, W), \quad (10.71)$$

удовлетворяющей более простому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} Q(x; L; \mu, \lambda, W) = & -k\gamma \left(\mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(x; L; \mu, \lambda, W) - \\ & - D \left[\mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(x; L; \mu, \lambda, W) + \\ & + \left[\mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(x; L; \mu, \lambda, W), \\ Q(x; x; \mu, \lambda, W) = & W^\lambda P(x; W). \end{aligned} \quad (10.72)$$

Зная функцию $Q(x; L; \mu, \lambda, W)$, можно определить моментные функции интенсивностей встречных волн с помощью равенства

$$\langle W_1^{\mu-\lambda}(x; L) W_2^\lambda(x; L) \rangle = \int_0^1 dW Q(x; L; \mu, \lambda, W). \quad (10.73)$$

Уравнение (10.72) описывает статистическое поведение волнового поля внутри слоя среды $L_0 \leq x \leq L$ и, в частности, коэффициент прохождения волны, если в нем положить $x = L_0$. В предельном случае полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) уравнение (10.72) переходит в уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi; \mu, \lambda, W) = & -\beta \left(\mu - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) Q(\xi; \mu, \lambda, W) - \\ & - \left[\mu + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] Q(\xi; \mu, \lambda, W) + \left[\mu - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W Q(\xi; \mu, \lambda, W), \\ Q(0; \mu, \lambda, W) = & W^\lambda P(W), \end{aligned} \quad (10.74)$$

где введено безразмерное расстояние $\xi = D(L - x) > 0$, а «стационарная», не зависящая от L , плотность вероятностей для модуля коэффициента отражения $P(W)$ описывается формулой (10.37). Равенство (10.73) в этом случае переписывается в виде

$$\langle W_1^{\mu-\lambda}(\xi) W_2^\lambda(\xi) \rangle = \int_0^1 dW Q(\xi; \mu, \lambda, W). \quad (10.75)$$

Далее нам будет более удобно рассмотреть в отдельности случаи случайной среды без поглощения и случайной среды при наличии поглощения.

Недиссипативная среда (стохастический волновой параметрический резонанс и динамическая локализация волн). При отсутствии поглощения в среде уравнения метода погружения (10.5) и (10.6) упрощаются. В этом случае уравнение для интенсивности волнового поля (10.7) интегрируется и интенсивность непосредственно связана с коэффициентом отражения с помощью равенства (10.11). Это равенство с помощью представления (10.23) для коэффициента отражения можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} I(x; L) = \frac{u_x + \sqrt{u_x^2 - 1} \cos \varphi_x}{1 + u_L}, \quad (10.76)$$

где фаза коэффициента отражения φ_x имеет структуру $\varphi_x = 2kx + \tilde{\varphi}_x$, а функции u_x и $\tilde{\varphi}_x$ медленно меняются на расстояниях порядка длины волны. Поэтому при изучении различных комбинаций из функции $I(x; L)$ целесообразно рассматривать их медленные изменения по x , т. е. предварительно усреднить по функциям, быстро меняющимся на длине волны. Такое усреднение будем обозначать горизонтальной чертой. Так, усреднение выражения (10.76) дает

$$\frac{1}{2} \overline{I(x; L)} = \frac{u_x}{1 + u_L}. \quad (10.77)$$

Аналогично получаем

$$\frac{1}{4} \overline{I^2(x; L)} = \frac{3u_x^2 - 1}{2(1 + u_L)^2} \quad (10.78)$$

и т. д.

Как указывалось выше, функция u_x в (10.77), (10.78) и т. п. является марковским случайным процессом, описываемым плотностью вероятностей перехода (10.28) и одноточечной плотностью вероятностей (10.26). Таким образом, нахождение статистических характеристик интенсивности волны просто сводится к вычислению квадратуры. Так, для величины $\overline{I^n(x; L)}$ получаем выражение

$$\frac{1}{2^n} \overline{I^n(x; L)} = \frac{g_n(u_x)}{(1 + u_L)^n}, \quad (10.79)$$

где $g_n(u_x)$ — полином по u_x степени n и, следовательно,

$$\frac{1}{2^n} \left\langle \overline{I^n(x; L)} \right\rangle = \int_1^\infty \frac{du_L}{(1 + u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_n(u_x) p(u_L, L | u_x, x) P(x, u_x). \quad (10.80)$$

Подставляя в (10.80) выражение (10.28) для $p(u_L, L | u_x, x)$, с помощью формулы

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1 + x)^n} P_{-\frac{1}{2} + i\mu}(x) = \frac{\pi}{\cosh(\mu\pi)} K_n(\mu), \quad (10.81)$$

где

$$K_{n+1}(\mu) = \frac{1}{2n} \left[\mu^2 + \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right] K_n(\mu), \quad K_1(\mu) = 1,$$

можно выполнить интегрирование по u_L и перейти к двукратному (по внешнему виду) интегралу

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \langle \overline{I^n(x; L)} \rangle = \\ = \pi \int_0^\infty d\mu \mu \frac{\sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} K_n(\mu) e^{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(L-x)} \int_1^\infty du g_n(u) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u) P(x, u). \end{aligned} \quad (10.82)$$

Здесь введены безразмерные расстояния $DL \rightarrow L$ и $Dx \rightarrow x$. Будем считать также, что $L_0 = 0$.

Поскольку

$$I(0; L) = |T_L|^2 = \frac{2}{1+u_L},$$

интеграл

$$\int_1^\infty \frac{du_L}{(1+u_L)^n} \int_1^\infty du_x g_k(u_x) p(u_L, L|u_x, x) P(x, u_x)$$

описывает корреляции коэффициента прохождения волны с интенсивностью внутри слоя.

Дальнейшая задача заключается в вычислении внутренних интегралов в (10.82), что сводится к решению простой системы дифференциальных уравнений [40, 41, 155].

В самом деле, рассмотрим выражения

$$f_k(x) = \int_1^\infty du u^k P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(u) P(x, u) \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (10.83)$$

являющиеся преобразованием Меллера–Фока для функций $u^k P(x; u)$ (см. раздел 6.4.2 гл. 6). Дифференцируя равенство (10.83) по x , используя уравнение Фоккера–Планка (10.25) для функции $P(x; u)$, дифференциальное уравнение для функции Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)$

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 1) \frac{d}{dx} P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x) = -\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)$$

и интегрируя по частям, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dx} f_k(x) = -\left(\mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 - k\right) f_k(x) + 2k\psi_k(x) - k(k-1)f_{k-2}(x), \quad (10.84)$$

где

$$\psi_k(x) = \int_1^{\infty} du u^{k-1} P(x, u) (u^2 - 1) \frac{d}{du} P_{-\frac{1}{2} + i\mu}(u). \quad (10.85)$$

Дифференцируя теперь функцию $\psi_k(x)$ по x , аналогичным образом получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi_k(x) = & - \left(\mu^2 + \frac{1}{4} - k^2 + k \right) \psi_k(x) - 2k \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) f_k(x) - \\ & - (k-1)(k-2) \psi_{k-2}(x) + 2(k-1) \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) f_{k-2}(x). \end{aligned} \quad (10.86)$$

Начальными условиями для (10.84) и (10.86) являются, очевидно, условия

$$f_k(0) = 1, \quad \psi_k(0) = 0.$$

Таким образом, функции $f_k(x)$ и $\psi_k(x)$ связаны замкнутой рекуррентной системой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которую не представляет труда решить.

Представим решение системы уравнений (10.84), (10.86) в виде

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \tilde{f}_k(x) e^{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4} - k^2\right)x}, \\ \psi_k(x) &= \tilde{\psi}_k(x) e^{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4} - k^2\right)x}. \end{aligned} \quad (10.87)$$

Тогда для функций $\tilde{f}_k(x)$ и $\tilde{\psi}_k(x)$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - k \right) \tilde{f}_k(x) &= 2k \tilde{\psi}_k(x) - k(k-1) \tilde{f}_{k-2}(x) e^{-4(k-1)x}, \\ \left(\frac{d}{dx} + k \right) \tilde{\psi}_k(x) &= -2k \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{f}_k(x) + \\ &+ (k-1) \left[2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{f}_{k-2}(x) - (k-2) \tilde{\psi}_{k-2}(x) \right] e^{-4(k-1)x} \end{aligned} \quad (10.88)$$

с начальными условиями

$$\tilde{f}_k(0) = 1, \quad \tilde{\psi}_k(0) = 0.$$

Отметим, что соответствующее решение однородной системы имеет вид

$$\tilde{f}_k(x) = A(\mu) \sin(2k\mu x) + B(\mu) \cos(2k\mu x).$$

Рассмотрим простейшие случаи.

1. В случае $k = 0$ имеем

$$\frac{d}{dx} \tilde{f}_0(x) = 0, \quad \tilde{f}_0(L_0) = 1,$$

и, следовательно,

$$f_0(x) = \exp \left\{ - \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) x \right\}. \quad (10.89)$$

Тогда интеграл

$$\begin{aligned} \langle |T_L|^{2n} \rangle &= \int_1^\infty \frac{du_L}{(1+u_L)^n} \int_1^\infty du \, p(u_L, L | u, x) P(x, u) = \\ &= 2^n \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} K_n(\mu) e^{-\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(L-L_0)} \end{aligned}$$

описывает моменты модуля коэффициента прохождения волны через слой флуктуирующей среды.

2. В случае $k = 1$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - 2 \right) \tilde{f}_1(x) &= 2\tilde{\psi}_1(x), \\ \left(\frac{d}{dx} + 1 \right) \tilde{\psi}_1(x) &= -2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \tilde{f}_1(x), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f_1(x) = \exp \left\{ - \left(\mu^2 - \frac{3}{4} \right) x \right\} \left(\cos(2\mu x) + \frac{1}{2\mu} \sin(2\mu x) \right). \quad (10.90)$$

Интеграл (10.80) при $n = 1$ при этом описывает распределение средней интенсивности волнового поля внутри слоя неоднородной среды [14]:

$$\langle \overline{I(x; L)} \rangle = 2\pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} e^{x - \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)L} \left(\cos(2\mu x) + \frac{1}{2\mu} \sin(2\mu x) \right). \quad (10.91)$$

Это распределение интенсивности приведено на рис. 4.7 для различных толщин слоя.

3. В случае $k = 2$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} - 2 \right) \tilde{f}_2(x) &= 4\tilde{\psi}_2(x) - 2e^{-4x}, \\ \left(\frac{d}{dx} + 2 \right) \tilde{\psi}_2(x) &= -2 \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \left[2\tilde{f}_2(x) - e^{-4x} \right], \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{\mu^2 + 5/4}{2(1 + \mu^2)} \cos(4\mu\pi) + \frac{\mu^2 + 3/4}{2\mu(1 + \mu^2)} \sin(4\mu\pi) + \frac{\mu^2 + 3/4}{2(1 + \mu^2)} e^{-4x}.$$

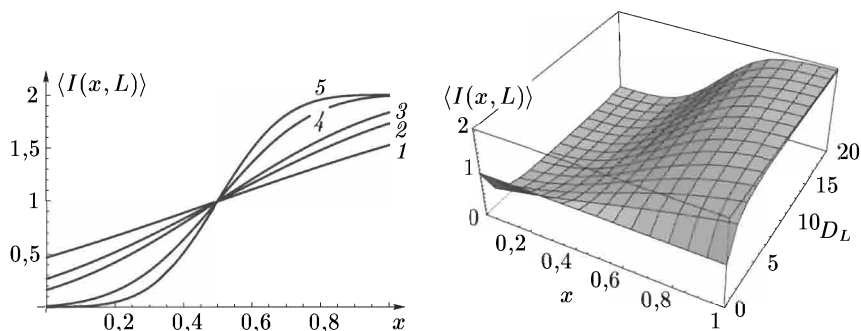


Рис. 4.7. Средняя интенсивность волнового поля в задаче о падении волны на слой среды. Кривая 1 соответствует $DL = 1$; 2 — $DL = 2$; 3 — $DL = 3$; 4 — $DL = 10$; 5 — $DL = 20$

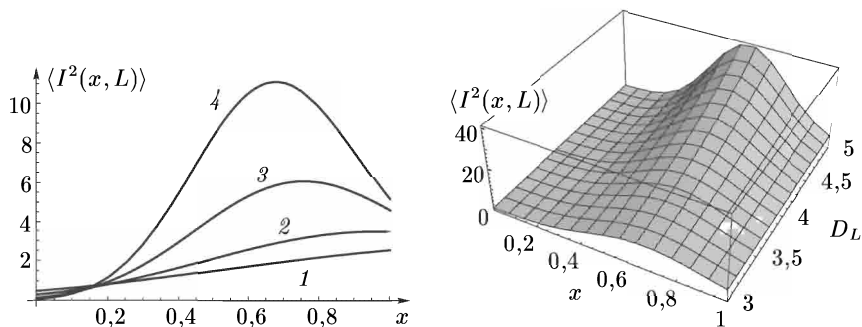


Рис. 4.8. Второй момент интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды. Кривая 1 соответствует $DL = 0,5$; 2 — $DL = 1$; 3 — $DL = 2$; 4 — $DL = 3$

В этом случае интеграл (10.82) при $n = 2$ описывает распределение второго момента интенсивности по толщине слоя:

$$\langle \overline{I^2(x; L)} \rangle = \pi \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} e^{-(\mu^2 + \frac{1}{4})L} \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \left(3e^{4x} \tilde{f}_2(x) - 1 \right),$$

график поведения которого приведен на рис. 4.8 для различных толщин слоя.

Таким образом, решая последовательно рекуррентную систему уравнений (10.88), можно выразить соответствующий момент интенсивности через единственную квадратуру.

Рассмотрим структуру полученных выражений. Как мы видели выше, моменты интенсивности волнового поля внутри слоя среды описываются

интегралами вида

$$\begin{aligned} \langle I^n(x; L) \rangle &\sim \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} \Phi(\mu) e^{n^2 x + 2in\mu x - (\mu^2 + \frac{1}{4})L} = \\ &= e^{-\frac{1}{4}L + n^2 L \xi(1-\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\sinh(\mu\pi)}{\cosh^2(\mu\pi)} \Phi(\mu) e^{-(\mu - in\xi)^2 L}, \quad (10.92) \end{aligned}$$

где величина $\xi = x/L$, а $\Phi(\mu)$ — алгебраическая функция параметра μ . Если обратиться к асимптотическому случаю $L \rightarrow \infty$, ξ — фиксированная величина, то из выражения (10.92) следует, что существуют два масштаба длины:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right) \quad \text{и} \quad \xi_2 = 1 - \frac{1}{2n},$$

такие, что при $0 \leq \xi \leq \xi_1$ величина $\langle I^n(x; L) \rangle$ экспоненциально мала. При $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ величина $\langle I^n(x; L) \rangle$ экспоненциально велика и достигает максимума вблизи точки $\xi \approx 1/2$, где $\langle I^n(x; L) \rangle_{\max} \sim \exp\{(n^2 - 1)l/4\}$. При $1 \geq \xi \geq \xi_2$ величина $\langle I^n(x; L) \rangle$ экспоненциально быстро стремится к единице. Все вышесказанное относится к случаю $n \geq 2$. Исключение составляет случай $n = 1$, когда точки ξ_1 и ξ_2 сливаются и распределение средней интенсивности носит монотонный характер.

Первый масштаб определяется равенством $n^2 \xi(1 - \xi) \sim 1/4$, а второй обусловлен тем, что в силу условия $\langle I^n(x; L) \rangle \rightarrow 2^n$ при $L \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл (10.92) должен давать полюс $\mu_n = i(n - 1/2)$ и контур интегрирования должен располагаться выше значения μ_n , т.е. $\mu_n < in\xi$. С ростом n переменная $\xi_1 \rightarrow 0$, а $\xi_2 \rightarrow 1$ (рис. 4.9).

Тот факт, что моментные функции интенсивности экспоненциально растут внутри слоя, свидетельствует о наличии явления *стохастического волнового параметрического резонанса*, аналогичного обычному параметрическому резонансу. Разница

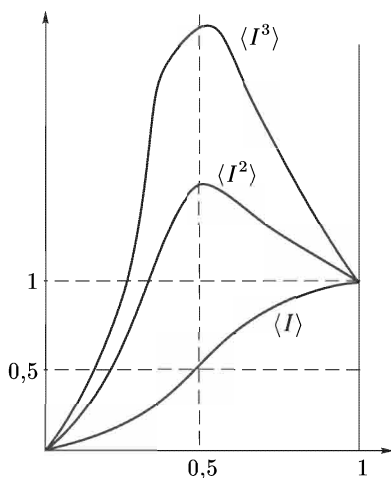


Рис. 4.9. Схематическое поведение моментов интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды (стохастический волновой параметрический резонанс)

заключается лишь в том, что, поскольку в граничных точках моменты интенсивности асимптотически заданы, экспоненциальный рост моментов интенсивности волнового поля происходит внутри слоя и максимальное значение достигается вблизи его середины.

При переходе к полупространству ($L_0 \rightarrow -\infty$) область экспоненциального роста моментов, начиная со второго, занимает все полупространство, а $\langle I(x; L) \rangle = 2$.

Вернемся теперь к уравнению для моментов интенсивности встречных волн при отсутствии поглощения волны в среде, т. е. к уравнению (10.74) при $\beta = 0$ для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) случайно-неоднородной среды. В этом случае с вероятностью единица $W_L = 1$ и решение уравнения (10.74) имеет структуру

$$Q(x, L; \mu, \lambda, W) = \delta(W - 1) e^{D\lambda(\lambda-1)(L-x)},$$

и, следовательно,

$$\langle W_1^{\lambda-\mu}(x; L) W_2^{\mu}(x; L) \rangle = e^{D\lambda(\lambda-1)(L-x)}. \quad (10.93)$$

Это означает, в силу произвольности параметров λ и μ , что

$$W_1(x; L) = W_2(x; L) = W(x; L)$$

с вероятностью единица, и величина $W(x; L)$ имеет логнормальную плотность вероятностей. При этом ее среднее значение равно единице, а высшие моменты, начиная со второго, экспоненциально растут вглубь среды:

$$\langle W(x; L) \rangle = 1, \quad \langle W^n(x; L) \rangle = e^{Dn(n-1)(L-x)}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (10.94)$$

Отметим, что интенсивность волнового поля $I(x; L)$ в этом случае имеет структуру

$$I(x; L) = 2W(x; L)(1 + \cos \varphi_x), \quad (10.95)$$

где φ_L — фаза коэффициента отражения.

По свойствам логнормального распределения вероятностей типичной реализацией функции $W(x; L)$ является экспоненциально спадающая вглубь среды кривая

$$W^*(x; L) = e^{-D(L-x)}, \quad (10.96)$$

и, например, с вероятностью $1/2$ для ее реализаций имеет место неравенство

$$W(x; L) < 4e^{-D(L-x)/2},$$

справедливое для всего полупространства.

Экспоненциальное спадание с ростом $\xi = D(L-x)$ типичной реализации (10.96) и отождествляется обычно в физике неупорядоченных систем со свойством *динамической локализации* (см., например, [51, 62, 96, 130], [212]–[214]), и величина

$$l_{\text{loc}} = \frac{1}{D}$$

обычно называется *локализационной длиной*. При этом

$$l_{\text{loc}}^{-1} = -\frac{\partial}{\partial L} \langle \kappa(x; L) \rangle,$$

где

$$\kappa(x; L) = \ln W(x; L).$$

С физической точки зрения логнормальность интенсивности волнового поля $W(x; L)$ означает наличие больших выбросов относительно кривой типичной реализации (10.96) как в сторону больших значений интенсивности, так и в сторону малых. Этот результат согласуется с примером численного моделирования (рис. 1.7), который был представлен в гл. 1. Такие скачки интенсивности, однако, не содержат много энергии, так как, по свойству логнормального распределения вероятностей (раздел 6.4.1 гл. 6), случайная величина

$$S_n(L) = D \int_{-\infty}^L dx W^n(x; L),$$

описывающая площадь под кривой $W^n(x; L)$, имеет стационарную, не зависящую от L , плотность вероятностей

$$P_n(S) = \frac{1}{n^{2/n} \Gamma(1/n)} \frac{1}{S^{1+1/n}} \exp \left\{ -\frac{1}{n^2 S} \right\}, \quad (10.97)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. В частности, площадь под кривой $W(x; L)$

$$S_1(L) = D \int_{-\infty}^L dx W(x; L)$$

распределена по закону

$$P_1(S) = \frac{1}{S^2} \exp \left\{ -\frac{1}{S} \right\},$$

что согласуется с распределением всей энергии волнового поля внутри полупространства (10.43) при $E = 2S$. Это означает, что присутствие в выражении (10.95) члена, связанного с быстро осциллирующей фазой коэффициента отражения, не вносит существенного вклада в общую энергию.

Таким образом, знание одноточечной плотности вероятностей позволяет понять эволюцию во всем пространстве интенсивности волнового поля в отдельных реализациях и оценить параметры этой эволюции в терминах статистических характеристик флуктуирующей среды.

Диссипативная среда. В присутствии конечного поглощения (хоть и сколь угодно малого), волны в среде, занимающей полупространство, экспоненциальный рост моментных функций должен прекратиться и смениться затуханием. Если параметр $\beta \gg 1$ (т. е. поглощение велико по сравнению с диффузией), то $P(W) = 2\beta e^{-2\beta W}$, и, как легко видеть из уравнения (10.74), интенсивности встречных волн $W_1(x; L)$ и $W_2(x; L)$ статистически

независимы, т. е. они не коррелируют друг с другом. При этом

$$\langle W_1(\xi) \rangle = \exp \left\{ -\beta \xi \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}, \quad \langle W_2(\xi) \rangle = \frac{1}{2\beta} \exp \left\{ -\beta \xi \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right\}.$$

На рис. 4.10–4.13 представлены в качестве примеров результаты численного решения уравнений (10.74) и квадратуры (10.75) для моментных функций случайных процессов для различных значений параметра β [8, 41, 56, 102, 155]. Кривые с различными номерами соответствуют различным значениям параметра β . Рис. 4.10 соответствует средним интенсивностям проходящей и отраженной волн. Кривые монотонно убывают с увеличением ξ . На рис. 4.11 изображены соответствующие зависимости для вторых моментов. При $\xi = 0$ — $\langle W_1^2(0) \rangle = 1$, $\langle W_2^2(0) \rangle = \langle |R_L|^4 \rangle$. При $\beta < 1$ зависимость от ξ становится немонотонной — моменты вначале растут, проходят через максимум и лишь затем начинают монотонно убывать. С уменьшением параметра β положение максимума смещается вправо, а максимальное значение увеличивается. На рис. 4.12 изображена аналогичная зависимость для третьего момента $\langle W_1^3(\xi) \rangle$, а на рис. 4.13 построены кривые для величины $\langle \Delta W_1(\xi) \Delta W_2(\xi) \rangle$ ($\Delta W_n(\xi) = W_n(\xi) - \langle W_n(\xi) \rangle$), описывающей корреляцию между интенсивностями проходящей и отраженной волн. При $\beta \geq 1$ такая корреляция исчезает. Ввиду наличия сильной корреляции при $\beta < 1$ ясно, что разделение волн на встречные волны никакого физического смысла не имеет. Это чисто математический прием. При $\beta \geq 1$ такое разделение оправдано отсутствием корреляции.

Как было показано выше для параметра $\beta = 0$, все моменты волнового поля, начиная со второго, для полупространства случайно-неоднородной среды экспоненциально растут с дистанцией, проходимой волной. Ясно, что для малого параметра $\beta \ll 1$ решение задачи должно иметь сингулярный характер по β , чтобы обратить решение в нуль при достаточно больших расстояниях, пройденных волной. Рассмотрим этот асимптотический случай более подробно [138].

Введем функцию

$$Q(x; L; \mu, \lambda, u) = \langle W_1^{\mu-\lambda}(x; L) W_2^\lambda(x; L) \delta(u_L - u) \rangle,$$

которая для полупространства описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi; \mu, \lambda, u) = & \left(-\beta \mu + \beta \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) + \mu(\mu + 1) - \frac{2\mu^2}{u + 1} \right) Q(\xi; \mu, \lambda, u) + \\ & + \left[2\mu(u - 1) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} \right] Q(\xi; \mu, \lambda, u) \quad (10.98) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$Q(0; \mu, \lambda, u) = \left(\frac{u-1}{u+1} \right)^\lambda P(u),$$

где $\xi = D(L - x) > 0$, а $P(u)$ — стационарная плотность вероятностей (10.37).

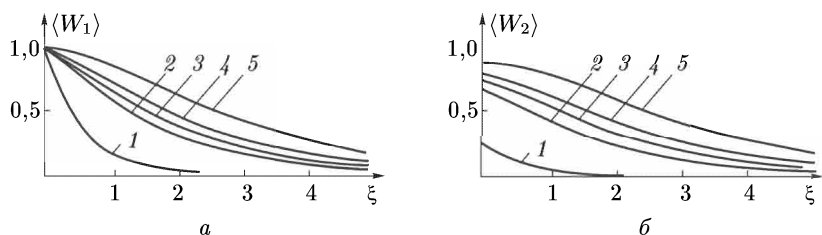


Рис. 4.10. Распределение средней интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

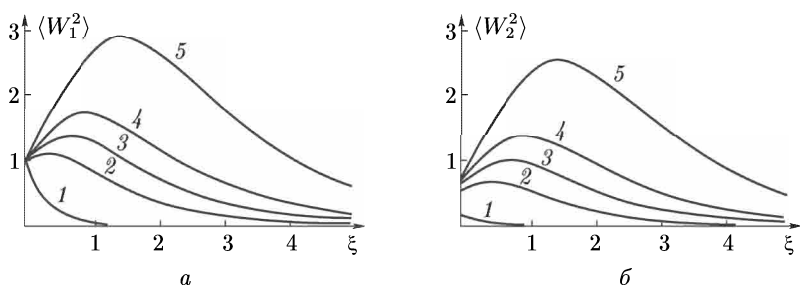


Рис. 4.11. Распределение второго момента интенсивности волнового поля внутри среды: проходящая волна (а); отраженная волна (б). Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

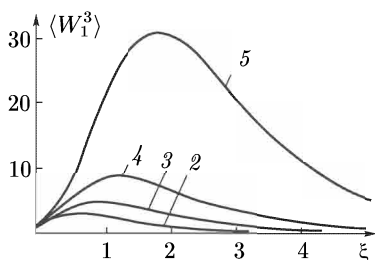


Рис. 4.12. Распределение третьего момента интенсивности проходящей волны. Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

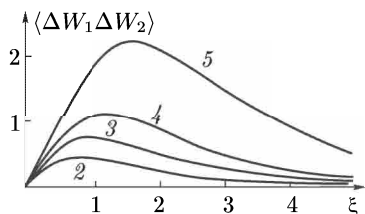


Рис. 4.13. Корреляция интенсивностей проходящей и отраженной волн. Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

Нас интересуют величины

$$\langle W_1^{\mu-\lambda}(\xi) W_2^\lambda(\xi) \rangle = \int_1^\infty du Q(\xi; \mu, \lambda, u).$$

Сделаем в уравнении (10.98) замену переменных $u \rightarrow \beta(u-1)$ и перейдем к пределу $\beta \rightarrow 0$. В результате получаем более простое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} Q(\xi; \mu, \lambda, u) = \left(\mu(\mu+1) - \frac{2\mu^2\beta}{u} + 2\mu u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \frac{\partial}{\partial u} \right) Q(\xi; \mu, \lambda, u),$$

$$Q(0; \mu, \lambda, u) = e^{-u}. \quad (10.99)$$

Решение этого уравнения имеет сингулярную особенность по отношению к переменной u (и, следовательно, параметру β) для произвольно малого, но конечного поглощения в среде и может быть получено с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева (см. раздел 6.4.2 гл. 6). В результате для целочисленных значений параметров $\mu = n$, $\lambda = m$ получаем асимптотическое представление в виде квадратуры:

$$\langle W_1^{n-m}(\xi) W_2^m(\xi) \rangle = \frac{4}{\pi(\varepsilon n)^{2n-1}} \int_0^\infty d\tau \tau \sinh\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) e^{-\xi(1+\tau^2)/4} g_n(\tau) \psi_0(\tau),$$

$$\psi_0(\tau) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^{2(n+1)}} \frac{e^{-1/y^2}}{(1+2\beta y^2)^m} K_{i\tau}(\varepsilon n y), \quad (10.100)$$

где параметр $\varepsilon = \sqrt{8\beta}$,

$$g_n(\tau) = [(2n-3)^2 + \tau^2] g_{n-1}(\tau), \quad g_1(\tau) = 1,$$

и функция $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональдса первого рода, удовлетворяющая уравнениям (6.68).

Из (10.100) видно, что для значений параметра $\beta \ll 1$ интенсивности встречных волн равны друг другу с вероятностью единица и для малых расстояний от границы решение задачи совпадает с решением, соответствующим стохастическому параметрическому резонансу.

Для достаточно больших расстояний ξ , а именно

$$\xi \gg 4 \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n}{\beta} \right),$$

величины $\langle W^n(\xi) \rangle$ имеют универсальную пространственную локализационную структуру [138]

$$\langle W^n(\xi) \rangle \cong A_n \frac{1}{\beta^{n-1/2}} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4},$$

которая совпадает с асимптотическим поведением моментов коэффициента прохождения волны через слой толщиной ξ при $\beta = 0$ (отличие лишь в численном коэффициенте).

Таким образом, поведение моментов интенсивности встречных волн существенно различается в трех областях. В первой области, соответствующей стохастическому параметрическому резонансу, моменты экспоненциально нарастают в глубину среды и роль поглощения волны в среде не существенна. Во второй области роль поглощения наиболее важна, потому что оно останавливает экспоненциальный рост моментов. И, наконец, в третьей области убывание моментных функций интенсивности встречных волн не зависит от поглощения. Границы этих областей определяются параметром β и стремятся к бесконечности при $\beta \rightarrow 0$.

Отметим, что в общем случае произвольного параметра β для среднего значения логарифма интенсивности прямой волны и ее дисперсии из уравнений (10.67) следуют равенства [40, 41]

$$\langle \kappa_1(x; L) \rangle = -(1 + \beta)\xi, \quad \sigma_{\kappa_1}^2(x; L) = 2 \langle |R_L|^2 \rangle \xi, \quad (10.101)$$

где величина $\langle |R_L|^2 \rangle$ описывается формулой (10.38).

10.5.2. Источник плоских волн внутри случайно-неоднородной среды. Выше мы подробно рассмотрели задачу о падении волны на слой (полупространство) случайно-неоднородной среды. Аналогичным образом можно рассмотреть и задачу об источнике плоских волн в случайной среде. Пусть слой среды занимает, как и ранее, часть пространства. Тогда волновое поле внутри слоя описывается решением краевой задачи (10.12). При рассмотрении зависимости ее решения от параметра L можно получить уравнения погружения (см. приложение В)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) &= i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u(x_0; L) u(x; L), \\ G(x; x_0; L)_{L=\max(x, x_0)} &= \begin{cases} u(x; x_0), & x \geq x_0 \\ u(x_0; x), & x \leq x_0 \end{cases}, \\ \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= i k \{1 + \varepsilon(L) u(L; L)\} u(x; L), \quad u(x; x) = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} u(L; L) &= 2 i k [u(L; L) - 1] + i \frac{k}{2} \varepsilon(L) u^2(L; L), \quad R_{L_0} = 0. \end{aligned} \quad (10.102)$$

При этом два последних уравнения в (10.102) описывают волновое поле $u(x; L)$ в задаче о падении волны на слой среды (L_0, L) и поле на границе слоя $x = L - u(L; L) = 1 + R_L$, где R_L — коэффициент отражения.

Введем интенсивность волнового поля $I(x; x_0; L) = |G(x; x_0; L)|^2$ и рассмотрим ее среднее значение. Используя уравнение (10.102), а также комплексно сопряженное к нему, усредняя по ансамблю реализаций случайной функции $\varepsilon_1(x)$ и быстрым осцилляциям, для средней интенсивности получаем уравнение погружения

$$\frac{\partial}{\partial L} \langle I(x; x_0; L) \rangle = D \langle I(x_0; L) I(x; L) \rangle, \quad (10.103)$$

где $I(x; L) = |u(x; L)|^2$ — интенсивность волнового поля в задаче о падении волны на слой среды. Следовательно (для определенности считаем, что $x_0 > x$),

$$\langle I(x; x_0; L) \rangle = \langle I(x; x_0) \rangle + D \int_{x_0}^L d\xi \langle I(x_0; \xi) I(x; \xi) \rangle, \quad (10.104)$$

и эта величина определяется корреляционной функцией интенсивности волнового поля в задаче о падении волны на слой среды.

Введем функции

$$\begin{aligned} \psi(x; x_0; L, W) &= \langle I(x_0; L) I(x; L) \delta(|R_L|^2 - W) \rangle, \\ \chi(x; L, W) &= \langle I(x; L) \delta(|R_L|^2 - W) \rangle. \end{aligned} \quad (10.105)$$

Очевидно, что они описываются уравнениями (10.72) при $\mu = 2$ (для функции ψ) при $x \neq x_0$ и $\mu = 1$ (для функции χ), т. е. уравнениями с начальными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \psi(x; x_0; L, W) &= -2k\gamma \left(1 - \frac{\partial}{\partial W} W\right) \psi(x; x_0; L, W) - \\ &- D \left[2 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \psi(x; x_0; L, W) + \\ &+ D \left[2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \psi(x; x_0; L, W), \\ \psi(x; x_0; x_0, W) &= (1 + W) \chi(x; L, W), \end{aligned} \quad (10.106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \chi(x; L, W) &= -k\gamma \left(1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W\right) \chi(x; L, W) - \\ &- D \left[1 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \chi(x; L, W) + \\ &+ D \left[1 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \chi(x; L, W), \\ \chi(x; x, W) &= (1 + W) P(x; W). \end{aligned} \quad (10.107)$$

При $x = x_0$ функция $\psi(x; x; L, W)$ также описывается уравнением (10.106), но с другим начальным условием, а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \psi(x; x; L, W) &= -2k\gamma \left(1 - \frac{\partial}{\partial W} W\right) \psi(x; x; L, W) - \\ &- D \left[2 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right] \psi(x; x; L, W) + D \left[2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W)\right]^2 W \psi(x; x; L, W), \\ \psi(x; x; x, W) &= (1 + 4W + W^2) P(x; W). \end{aligned} \quad (10.108)$$

В уравнениях (10.107), (10.108) функция $P(L; W) = \langle \delta(|R_L|^2 - W) \rangle$ — плотность вероятностей квадрата модуля коэффициента отражения, которая описывается уравнением (10.22).

Неограниченное пространство случайно-неоднородной среды. Для нахождения средней интенсивности волнового поля, создаваемого источником в неограниченном пространстве перейдем к пределу $L_0 \rightarrow -\infty$. Обозначим величину $D(L - x_0) = \eta$, а величину $D(x_0 - x) = \xi$ будем считать фиксированной. В результате выражение (10.104) переходит в равенство

$$\langle I(x; x_0; L) \rangle = \langle I(\xi) \rangle + S(\xi),$$

где

$$\langle I(\xi) \rangle = \int_0^1 dW \chi(\xi; W), \quad S(\xi) = \int_0^1 dW \int_0^\infty d\eta \psi(\xi; \eta; W),$$

а функции $\psi(\xi; \eta; W)$, $\chi(\xi; W)$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\xi; \eta; W) = & -2\beta \left(1 - \frac{\partial}{\partial W} W \right) \psi(\xi; \eta; W) - \\ & - \left[2 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] \psi(\xi; \eta; W) + \left[2 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W \psi(\xi; \eta; W), \\ \psi(\xi; 0; W) \begin{cases} (1 + W) \chi(\xi; W), & (\xi \neq 0), \\ (1 + 4W + W^2) P(W), & (\xi = 0), \end{cases} \end{aligned} \quad (10.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \chi(\xi; W) = & -\beta \left(1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) \chi(\xi; W) - \\ & - \left[1 + \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right] \chi(\xi; W) + \left[1 - \frac{\partial}{\partial W} (1 - W) \right]^2 W \chi(\xi; W), \\ \chi(0; W) = & (1 + W) P(W). \end{aligned} \quad (10.110)$$

Уравнение (10.109) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\xi; \eta; W) = \left\{ 2\beta W + 2W(1 - W) + \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial W} \psi(\xi; \eta; W). \quad (10.111)$$

Интегрируя уравнение (10.111) по η в пределах $(0, \infty)$, получаем для функции

$$\tilde{\psi}(\xi; W) = \int_0^\infty d\eta \psi(\xi; \eta; W)$$

простое уравнение вида

$$-\psi(\xi; 0; W) = \left\{ 2\beta W + 2W(1 - W) + \frac{\partial}{\partial W} W(1 - W)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial W} \tilde{\psi}(\xi; W),$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\Psi}(\xi; W) = \int_W^1 \frac{dW_1}{W_1} \int_0^{W_1} \frac{dW_2}{(1-W_2)^2} \Psi(\xi; 0; W) \exp \left\{ 2\beta \left[\frac{1}{1-W_1} - \frac{1}{1-W_2} \right] \right\}. \quad (10.112)$$

Интегрируя далее (10.112) по W , для функции $S(\xi)$ получаем окончательное выражение

$$S(\xi) = \int_0^1 \frac{dW}{(1-W)^2} \Psi(\xi; 0; W) \left[1 - W + 2\beta \exp \left(\frac{2\beta}{1-W} \right) \text{Ei} \left(-\frac{2\beta}{1-W} \right) \right], \quad (10.113)$$

где $\text{Ei}(-x) = -\int_x^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}$ — интегральная показательная функция.

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля от источника в неограниченном пространстве описывается решением единственного уравнения (10.110) и имеет вид ($x < x_0$)

$$\langle I(\xi) \rangle = \int_0^1 dW \left\{ 1 + \frac{1+W}{(1-W)^2} \left[1 - W + 2\beta e^{\frac{2\beta}{1-W}} \text{Ei} \left(-\frac{2\beta}{1-W} \right) \right] \right\} \chi(\xi; W). \quad (10.114)$$

На рис. 4.14 приведены результаты численного интегрирования равенства (10.114) для различных значений параметра β .

В случае $\beta \gg 1$ из (10.114) и (10.110) находим выражение

$$\langle I(\xi) \rangle = \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) e^{-2\gamma(x_0-x)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}, \quad (10.115)$$

соответствующее линейной феноменологической теории переноса излучения. Асимптотический случай $\beta \ll 1$ будет подробно рассмотрен немного позднее.

Полупространство случайно-неоднородной среды. Если же источник плоских волн находится в области $L_0 < x_0 < \infty$, то средняя интенсивность

Рис. 4.14. Распределение средней интенсивности поля источника в неограниченном пространстве. Кривые соответствуют: 1 — $\beta = 1$; 2 — $\beta = 0,1$; 3 — $\beta = 0,06$; 4 — $\beta = 0,04$; 5 — $\beta = 0,02$

будет по-прежнему описываться формулой (10.104) при $L \rightarrow \infty$ ($x_0 \leq x$). В случае ($x_0 \geq x$) надо поменять местами точки x_0 и x в формуле (10.104).

Введем безразмерные переменные $\tilde{x} = Dx$, $\tilde{x}_0 = Dx_0$, $h = DL$. Повторяя дословно выкладки предыдущего подпункта, получаем, что средняя интенсивность $\langle I(x; x_0) \rangle$ будет описываться выражением (знак тильды опускаем)

$$\langle I(x; x_0) \rangle = \int_0^1 dW \left\{ 1 + \frac{1+W}{(1-W)^2} \left[1 - W + 2\beta e^{\frac{2\beta}{1-W}} \text{Ei} \left(-\frac{2\beta}{1-W} \right) \right] \right\} \chi(x; x_0; W), \quad (10.116)$$

где функция $\chi(x; h; W)$, как функция переменных h и W , удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \chi(x; h; W) = & -\beta \left(1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) \chi(x; h; W) - \\ & - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ 1 - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} W \right\} \chi(x; h; W) \end{aligned} \quad (10.117)$$

с начальным условием

$$\chi(x; x; W) = (1+W) P(x; W). \quad (10.118)$$

Функция $P(h; W)$ является плотностью вероятностей для величины $|R_h|^2$ и описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} P(h; W) = & -2\beta \frac{\partial}{\partial W} W P(h; W) - \\ & - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) \left\{ 1 - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) W \right\} P(h; W), \end{aligned} \quad (10.119)$$

$$P(h_0; W) = \delta(W - |R_0|^2).$$

Введем новые переменные: $\xi = x_0 - x$, $\eta = x - h_0$. Тогда функция $\chi(x; h; W) = \chi(\xi; \eta; W)$ и описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \chi(\xi; \eta; W) = & -\beta \left(1 - 2 \frac{\partial}{\partial W} W \right) \chi(\xi; \eta; W) - \\ & - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} \left\{ 1 - (1-W) \frac{\partial}{\partial W} W \right\} \chi(\xi; \eta; W), \end{aligned} \quad (10.120)$$

$$\chi(0; \eta; W) = (1+W) P(\eta; W),$$

где функция $P(\eta; W)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} P(\eta; W) = & -2\beta \frac{\partial}{\partial W} W P(\eta; W) - \\ & - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) \left\{ 1 - \frac{\partial}{\partial W} (1-W) W \right\} P(\eta; W), \end{aligned} \quad (10.121)$$

$$P(0; W) = \delta(W - |R_0|^2).$$

Таким образом, в случае $x_0 > x$ для нахождения средней интенсивности волнового поля в среде требуется последовательно решить уравнения (10.120), (10.121) и вычислить квадратуру (10.116). В случае же $x_0 < x$ уравнения (10.120), (10.121) остаются в силе, но под ξ и η теперь следует понимать $\xi = x - x_0$, $\eta = x_0 - h$.

Случай источника в неограниченном пространстве соответствует предельному переходу $\eta \rightarrow \infty$ в (10.121). В этом случае уравнение (10.121) имеет стационарное решение и задача сводится к решению уравнения (10.120) с начальным условием $\chi(0; \eta; W) = (1 + W)P(W)$. Этот случай анализировался в предыдущем подпункте.

Величина $|R_0|^2$, фигурирующая в (10.121), определяется параметрами среды в области $x < L_0$. В случае $R_0 = 0$ это соответствует свободному выходу волны за границу раздела. Предельному случаю отражающих границ соответствует значение $|R_0|^2 = 1$ и развитая теория не различает разные случаи $R_0 = \pm 1$. Это связано с использованием метода усреднения по быстрым осцилляциям. Аналогичная ситуация существует и в линейной феноменологической теории переноса излучения, которая соответствует асимптотическому случаю $\beta \gg 1$.

Уравнения (10.120), (10.121) интегрировались численно в работе [56] (см. также [41, 155]). Расчеты выполнялись для двух значений параметров β ($\beta = 1$ и $\beta = 0,08$). Первый случай ($\beta = 1$) должен дать результат, близкий к результату линейной феноменологической теории переноса излучения, а случай $\beta = 0,08$ соответствует большей «стохастичности» задачи. На рис. 4.15, а приведены кривые расчета средней интенсивности волны в полупространстве для $\beta = 1$ при различных положениях границы, отмеченных штриховыми линиями, и разных краевых условий. При наличии

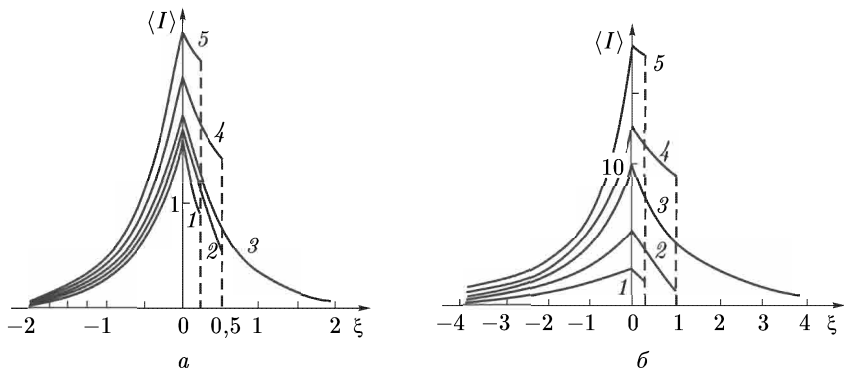


Рис. 4.15. Распределение средней интенсивности поля источника при наличии границы: $\beta = 1$ (а); $\beta = 0,08$ (б): 1, 2 — пропускающая граница; 4, 5 — отражающая граница; 3 — случай неограниченного пространства

«пропускающей» границы ($R_0 = 0$) соответствующие кривые лежат ниже, чем для источника в неограниченном пространстве. В случае же отражающей границы ($|R_0|^2 = 1$) кривые лежат выше. На рис. 4.15, б приведены аналогичные кривые для случая $\beta = 0,08$. Тенденция поведения кривых

остается прежней, однако этот случай характеризуется более интенсивными изменениями.

Асимптотический случай малого поглощения. Рассмотрим теперь асимптотическое решение задачи об источнике плоских волн в неограниченном пространстве ($L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$) при условии $\beta \rightarrow 0$. Для вычисления средней интенсивности волнового поля в области $x < x_0$ в этом случае удобно воспользоваться соотношениями (10.15) и (10.16)

$$\beta \langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle S(x; x_0) \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial x} \langle \psi(x; x_0) \rangle, \quad (10.122)$$

где функция $\psi(x; x_0)$

$$\psi(x; x_0) = \exp \left\{ -\beta D \int_x^{x_0} d\xi \frac{|1 + R_\xi|^2}{1 - |R_\xi|^2} \right\},$$

и, следовательно, как функция параметра x_0 , описывается стохастическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \psi(x; x_0) = -\beta D \frac{|1 + R_{x_0}|^2}{1 - |R_{x_0}|^2} \psi(x; x_0), \quad \psi(x; x) = 1. \quad (10.123)$$

Введем функцию

$$\Phi(x; x_0; u) = \psi(x; x_0) \delta(u_{x_0} - u), \quad (10.124)$$

где величина $u_L = (1 + W_L)/(1 - W_L)$ описывается стохастической системой уравнений (10.23). Дифференцируя (10.124) по x_0 , получаем стохастическое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \Phi(x; x_0; u) = & -\beta D \left\{ u + \sqrt{u^2 - 1} \cos \varphi_{x_0} \right\} \Phi(x; x_0; u) + \\ & + \beta D \frac{\partial}{\partial u} \left\{ (u^2 - 1) \Phi(x; x_0; u) \right\} - k \varepsilon_1(x_0) \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \varphi_{x_0} \Phi(x; x_0; u) \right\}. \end{aligned} \quad (10.125)$$

Усредним теперь уравнение (10.125) по ансамблю реализаций случайного процесса $\varepsilon_1(x_0)$, который, как и ранее, считаем гауссовым дельта-коррелированным процессом по x_0 . Используя далее формулу Фурутцу–Новикова (6.10), выражения для вариационных производных

$$\frac{\delta \Phi(x; x_0; u)}{\delta \varepsilon_1(x_0)} = -k \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} \sin \varphi_{x_0} \Phi(x; x_0; u) \right\},$$

$$\frac{\delta \varphi_{x_0}}{\delta \varepsilon_1(x_0)} = k \left[1 + \frac{u_{x_0}}{\sqrt{u_{x_0}^2 - 1}} \right] \cos \varphi_{x_0}$$

и дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям (фазе коэффициента отражения), получаем для функции

$$\Phi(\xi; u) = \langle \Phi(x; x_0; u) \rangle = \langle \psi(x; x_0) \delta(u_{x_0} - u) \rangle,$$

где $\xi = D|x - x_0|$, уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi; u) &= -\beta u \Phi(\xi; u) + \beta \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \Phi(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} \Phi(\xi; u), \\ \Phi(0; u) &= P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}. \end{aligned} \quad (10.126)$$

Среднее значение интенсивности теперь может быть представлено в виде

$$\beta \langle I(x; x_0) \rangle = -\frac{\partial}{\partial \xi} \int_1^\infty du \Phi(\xi; u) = \beta \int_1^\infty du u \Phi(\xi; u). \quad (10.127)$$

В уравнении (10.126) возможно совершить предельный переход $\beta \rightarrow 0$. В результате получаем более простое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\Phi}(\xi; u) = -u \tilde{\Phi}(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \tilde{\Phi}(\xi; u) + \frac{\partial}{\partial u} u^2 \frac{\partial}{\partial u} \tilde{\Phi}(\xi; u), \quad \tilde{\Phi}(0; u) = e^{-u}. \quad (10.128)$$

Следовательно, локализационное распределение в пространстве средней интенсивности описывается квадратурой

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \int_1^\infty du u \tilde{\Phi}(\xi; u), \quad (10.129)$$

где

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta \langle I(x; x_0) \rangle = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I(x; x_0) \rangle}{\langle I(x_0; x_0) \rangle}. \quad (10.130)$$

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля точечного источника при $\beta \ll 1$ имеет асимптотическое поведение

$$\langle I(x; x_0) \rangle = \frac{1}{\beta} \Phi_{\text{loc}}(\xi). \quad (10.131)$$

Решение уравнения (10.128) может быть легко получено с помощью интегрального преобразования Конторовича–Лебедева (см. раздел 6.4.2 гл. 6), и в результате для локализационной кривой получаем выражение [156, 157]

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty d\tau \tau \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\sinh(\pi\tau)}{\cosh^2(\pi\tau)} e^{-\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)\xi}. \quad (10.132)$$

Отметим, что выражение (10.132) имеет структуру

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi} |T_\xi|^2,$$

где $|T_\xi|^2$ — квадрат модуля коэффициента прохождения для падающей волны на слой среды толщины ξ (см. формулу (10.27)).

Для малых значений расстояний ξ локализационная кривая убывает довольно быстро по закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx e^{-2\xi}. \quad (10.133)$$

Для больших значений ξ (а именно, $\xi \gg \pi^2$) она убывает существенно медленнее по универсальному закону

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) \approx \frac{\pi^2 \sqrt{\pi}}{8} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi}} e^{-\xi/4} \quad (10.134)$$

и при этом общее значение интеграла

$$\int_0^\infty d\xi \Phi_{\text{loc}}(\xi) = 1.$$

График функции (10.132) представлен на рис. 4.16, где для сравнения также приведены асимптотические кривые (10.133) и (10.134).

Локализационная кривая (10.132) соответствует двойному предельному переходу

$$\Phi_{\text{loc}}(\xi) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\substack{L_0 \rightarrow -\infty \\ L \rightarrow \infty}} \frac{\langle I(x; x_0) \rangle}{\langle I(x_0; x_0) \rangle},$$

и легко видеть, что эти предельные переходы не перестановочны.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае источника плоских волн, расположенного на отражающей границе. В этом случае получаем выражение

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\langle I_{\text{ref}}(x; L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle} = \frac{1}{2} \Phi_{\text{loc}}(\xi), \quad (10.135)$$

$$\xi = D(L - x).$$

Этот результат справедлив в области $\xi > 1/3$, так как он соответствует пренебрежению корреляцией $|\langle R_x R_L^* \rangle| = e^{-3\xi}$, в отличие от случая источника в неограниченном пространстве.

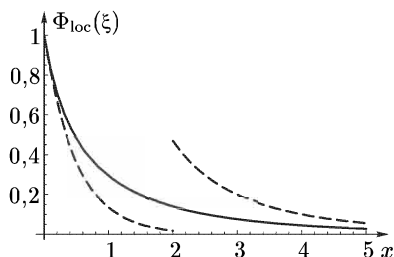


Рис. 4.16. График локализационной кривой для источника в неограниченном пространстве (10.132) — 1. Кривые 2 и 3 соответствуют асимптотикам на малых и больших расстояниях от источника

10.5.3. Численное моделирование. Развита выше теория основывалась на двух упрощениях: использовании приближения дельта-коррелированности функции $\epsilon_1(x)$ (или диффузионного приближения) и усреднении по быстрым осцилляциям для нахождения медленных (на масштабе длины волны) изменений статистических характеристик. Метод усреднения по быстрым осцилляциям обоснован только для анализа статистических

характеристик коэффициента отражения волны от полупространства случайно-неоднородной среды. Для расчета же статистических характеристик интенсивности волнового поля в среде обосновать его если и возможно, то очень сложно (этот метод является в большей степени физическим методом, чем математическим). Численное моделирование точной задачи позволяет как подтвердить эти упрощения, так и получить ответ в более сложных ситуациях, в которых мы не имеем аналитических результатов.

Такое численное моделирование, в принципе, можно было бы осуществить путем многократного решения задачи для различных реализаций параметров среды с последующим усреднением полученных решений по ансамблю реализаций (см., например, работу [167], где такая процедура осуществлялась для задачи о поле точечного источника). Однако такой подход мало перспективен, так как для получения значащих результатов требуется огромное число реализаций параметров среды. Этот подход совершенно непригоден для реальных физических задач, например, для распространения волн в атмосфере Земли и океане, где, как правило, имеется всего одна реализация. Более перспективен подход, основанный на свойстве эргодичности решения краевых задач по отношению к сдвигу всей задачи вдоль одной реализации функции $\varepsilon_1(x)$, определенной на полуоси (L_0, ∞) (см. рис. 4.17). На основе такого подхода статистические характеристики вычисляются с помощью формулы

$$\langle F(L_0; x, x_0; L) \rangle = \lim_{\delta \rightarrow \infty} F_\delta(L_0; x, x_0; L),$$

где

$$F_\delta(L_0; x, x_0; L) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta d\Delta F(L_0 + \Delta; x + \Delta, x_0 + \Delta; L + \Delta).$$

В задачах, связанных с полупространством $(L_0 \rightarrow -\infty)$, статистические характеристики не зависят от L_0 , и, следовательно изучаемая задача обладает свойством эргодичности по отношению к параметру L — положению

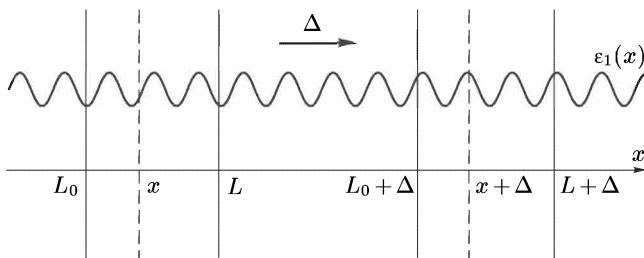


Рис. 4.17. Схема усреднения по параметру сдвига Δ , основанная на свойстве эргодичности уравнений метода погружения для полупространства случайно-неоднородной среды

правой границы слоя (который является переменной в методе погружения), так как он отождествляется в этом случае с параметром сдвига. Это позволяет при решении уравнений метода погружения для одной реализации

параметров среды одновременно получать и все статистические характеристики ее решения, представляющие непосредственный интерес, с помощью очевидного равенства

$$\langle F(x, x_0; L) \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} d\xi F(\xi, \xi + x_0 - x; \xi + (L - x_0) + (x_0 - x))$$

для достаточно большого интервала $(0, \delta)$. Такой подход позволяет вычислять и такие статистические характеристики волны, которые современная статистическая теория дать не в состоянии, причем в отсутствие каких-либо дополнительных упрощающих предположений.

Для слоя конечной толщины задача не является эргодичной по параметру L . Однако ее решение может быть выражено через два независимых решения задач о полупространстве [48] и, следовательно, сводится к эргодическому по L случаю.

Систематическая реализация программы численного моделирования была осуществлена в работе [57] (см. также [41, 155]). При моделировании для параметров $\alpha = k/D$ (безразмерное волновое число) и $\beta = k\gamma/D$ (параметр, характеризующий степень стохастичности рассматриваемой задачи) выбирались значения

$$\alpha = 25, \quad \beta = 1; 0,08.$$

Значения параметра β выбирались из тех соображений, что при $\beta = 1$ приближенно должна работать линейная феноменологическая теория переноса излучения, а при $\beta = 0,08$ задача является более «статистической» и линейная теория неприменима. Для этих значений параметра β имеется графический материал, полученный аналитически, путем усреднения по ансамблю реализаций, что позволяет сопоставить его с результатами численного моделирования.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные результаты, полученные путем численного моделирования.

Падение волны на слой среды. Первый этап моделирования состоял в изучении первого и второго моментов интенсивности волнового поля $I(x; L)$ в задаче о падении волны на полупространство со случайными неоднородностями. Одновременно исследовалась зависимость результатов от длины выборки, по которой проводилось усреднение. Результаты моделирования сопоставлялись с теоретическими расчетами, полученными выше.

Результаты моделирования $\langle I(x; L) \rangle$, $\langle I^2(x; L) \rangle$ для $\beta = 1$ точно ложатся на теоретические расчеты, приведенные на рис. 4.18. Численный анализ показал, что в этом случае удовлетворительные результаты дают выборки безразмерной длины $L \sim 10-20$. Для $\beta = 0,08$ такая выборка уже недостаточна и для получения более полного соответствия с теоретическим результатом требуется выборка $L \sim 300$ (рис. 4.19).

Источник плоских волн внутри среды. На рис. 4.20 представлены результаты моделирования величины $\langle I(x, x_0) \rangle$ для источника в неогра-

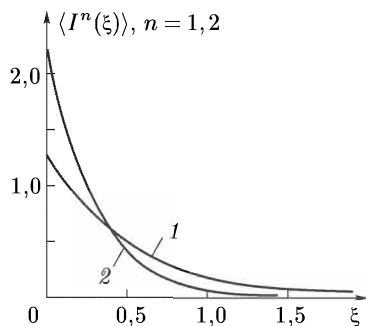


Рис. 4.18. Распределение моментов интенсивности волнового поля в среде при $\beta = 1$ в задаче о падении волны на слой среды. Кривая 1 — $\langle I(x; L) \rangle$; 2 — $\langle I^2(x; L) \rangle$ усреднение по ансамблю

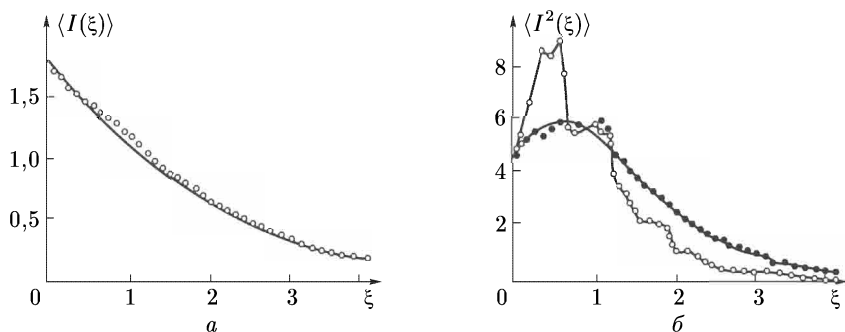


Рис. 4.19. Распределение моментов интенсивности волнового поля в среде при $\beta = 0,08$ в задаче о падении волны на слой среды: $\langle I(x; L) \rangle$ — (а); $\langle I^2(x; L) \rangle$ — (б). Сплошная линия — усреднение по ансамблю; $\circ$ — усреднение по реализации длиной $L = 10$, $\bullet$ — усреднение по реализации длиной $L = 300$

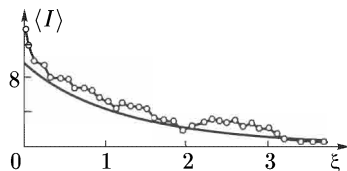


Рис. 4.20. Распределение средней интенсивности поля источника $\langle I(x, x_0) \rangle$ в неограниченном пространстве при $\beta = 0,08$: сплошная линия — усреднение по ансамблю; $\circ$ — усреднение по реализации длиной $L = 10$

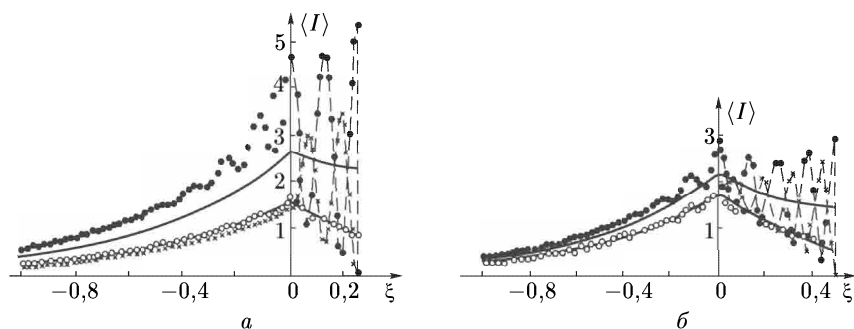


Рис. 4.21. Распределение средней интенсивности поля источника при $\beta = 1$ и разных положениях границы: $DH = 0,25$ (а); $DH = 0,5$ (б). Сплошная линия — усреднение по ансамблю; результаты моделирования: $\circ$ — свободное прохождение через границу, $\bullet$ — отражающая граница с условием $dG(H; x_0)/dx = 0$; $\times$ — отражающая граница с условием $G(H; x_0) = 0$

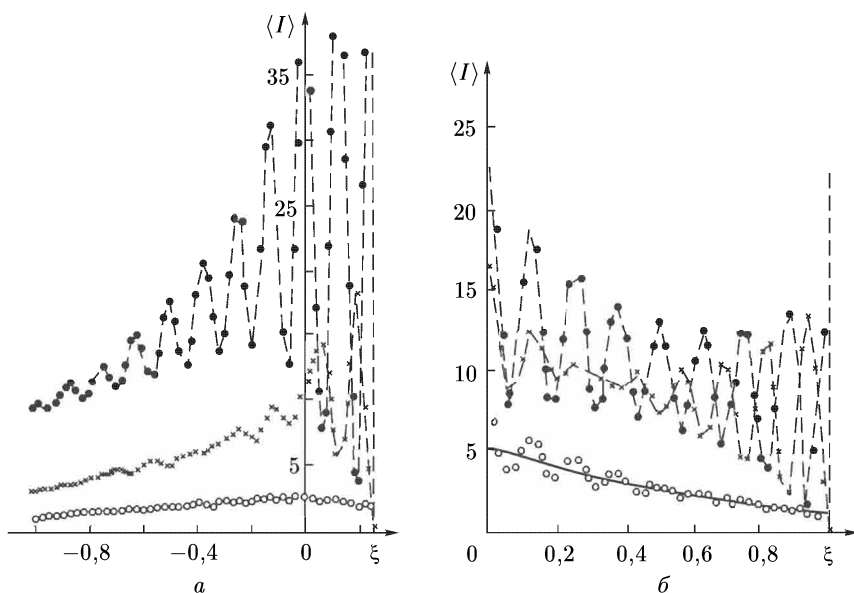


Рис. 4.22. Распределение средней интенсивности поля источника при $\beta = 0,08$ и разных положениях границы: $DH = 0,25$ (а); $DH = 1$ (б). Сплошная линия — усреднение по ансамблю для свободного прохождения через границу; результаты моделирования: $\circ$ — свободное прохождение через границу, $\bullet$ — отражающая граница с условием $dG(H; x_0)/dx = 0$; $\times$ — отражающая граница с условием $G(H; x_0) = 0$

ниченном пространстве при длине выборки $L = 10$ и $\beta = 0,08$. Сплошная линия соответствует теоретическим расчетам. Из этого рисунка видно, что даже такая малая выборка правильно улавливает тенденцию изменения средней интенсивности поля источника в неограниченном пространстве. Все дальнейшие кривые были получены с длиной выборки $L = 300-400$.

На рис. 4.21 изображены результаты моделирования средней интенсивности поля источника для $\beta = 1$ при различных краевых условиях на границе. Сплошные кривые также соответствуют теоретическим результатам. Из рис. 4.21 видно хорошее соответствие результатов моделирования теоретическим кривым для краевого условия, соответствующего выходу волны из слоя, и сильные осцилляции средней интенсивности при наличии

отражающей границы, что свидетельствует о сложной интерференционной структуре средней интенсивности даже при значении параметра $\beta = 1$. При удалении источника от границы амплитуда осцилляций уменьшается.

На рис. 4.22 приведены аналогичные кривые для $\beta = 0,08$. Этот случай характеризуется более интенсивными изменениям функции $\langle I(x, x_0) \rangle$. При удалении границы от источника амплитуда осцилляций уменьшается.

Метод моделирования позволяет находить и такие статистические характеристики волны, для которых не имеется соответствующих теоретических расчетов. Так на рис. 4.23 и рис. 4.24 изображены результаты моделирования вторых моментов интенсивности поля от источника $\langle I^2(x, x_0) \rangle$ при $\beta = 1$ и $\beta = 0,08$ при различных краевых условиях на границе. Вторые моменты интенсивности сохраняют осцилляции с тем же периодом, но со значительным увеличением их амплитуд.

Как видно из приведенных выше рисунков характерной особенностью поведения моментов интенсивности волнового поля источника при

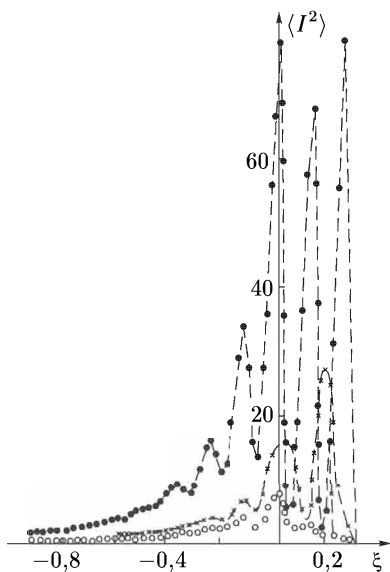


Рис. 4.23. Распределение второго момента интенсивности поля источника при $\beta = 1$ и положения границы $DH = 0,25$. Результаты моделирования: $\circ$ — свободное прохождение через границу, $\bullet$ — отражающая граница с условием $dG(H; x_0)/dx = 0$; $\times$ — отражающая граница с условием $G(H; x_0) = 0$

наличии границы раздела являются осцилляции с периодом $\sim 0,13$. Это связано с выбранной величиной волнового параметра $\alpha = 25$, так как период осцилляций $T = \pi/\alpha = 0,126$.

В работе [42] рассматривался случай положения точечного источника на отражающей границе $x_0 = L$ с краевым условием $dG(x, x_0)/dx|_{x=L} = 0$.

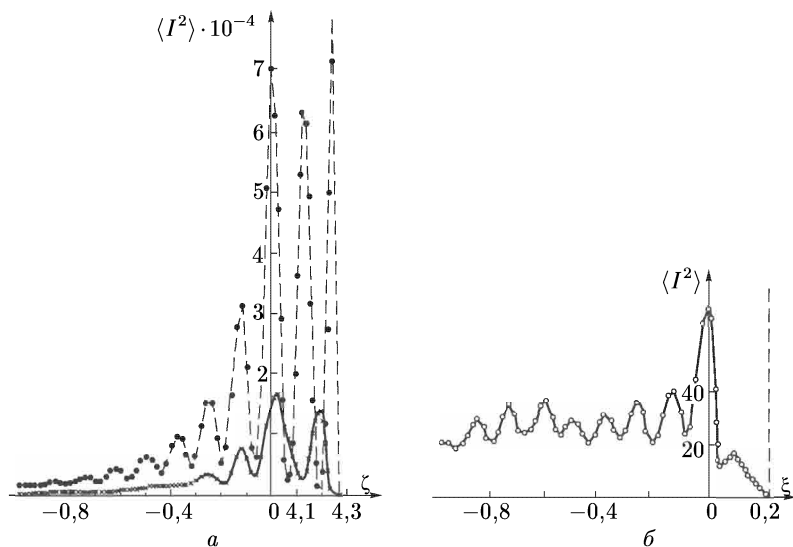


Рис. 4.24. Распределение второго момента интенсивности поля источника при $\beta = 0,08$ и разных положениях границы: отражающая граница при $DH = 4,3$ (а); свободное прохождение через границу $DH = 0,25$ (б). Результаты моделирования: $\circ$ — свободное прохождение через границу, $\bullet$ — отражающая граница с условием $dG(H; x_0)/dx = 0$; $\times$ — отражающая граница с условием $G(H, x_0) = 0$

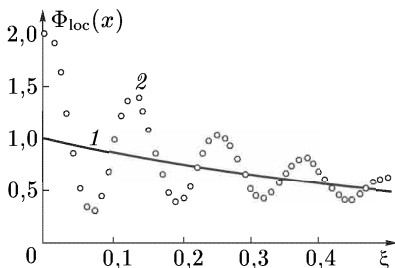


Рис. 4.25. Распределение средней интенсивности поля источника $2 \frac{\langle I_{\text{ref}}(x; L) \rangle}{\langle I_{\text{ref}}(L; L) \rangle}$, находящегося на отражающей границе при $\beta = 0,08$. 1 — локализационная кривая (10.132)

На рис. 4.25 представлен результат моделирования величины $\langle I_{\text{ref}}(x, x_0) \rangle$ при $\beta = 0,08$ и $k/D = 25$. На этом рисунке видны осцилляции в области $\xi = D(L - x) < 0,3$ с периодом колебаний $T = 0,13$. Для больших значений ξ (результаты моделирования хорошо согласуются с локализационной кривой (10.135)).

10.6. Многомерные волновые задачи в слоистых случайных средах

Рассмотрим теперь обобщение стационарной задачи о плоских волнах в слоистых случайных средах на случай простейших многомерных задач. Такими задачами являются нестационарные задачи о распространении временных импульсов в слоисто-неоднородных средах и трехмерная стационарная задача о поле точечного источника в слоистых средах.

10.6.1. Нестационарные задачи.

Формулировка краевых волновых задач. Рассмотрим нестационарную задачу о падении из области $x > L$ плоской волны $f[t + (x - L)/c_0]$ на слой среды, занимающий часть пространства $L_0 < x < L$, где c_0 — скорость распространения волны в свободном пространстве. Волновое поле внутри слоя среды описывается волновым уравнением

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma} \right) \right] u(x, t) = 0, \quad (10.136)$$

с краевыми условиями

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} f(t), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (10.137)$$

Аналогично для источника плоских волн, расположенного внутри слоя среды в точке x_0 , мы имеем краевую задачу

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\gamma} \right) \right] u(x; x_0; t) = -\frac{2}{c_0} \delta(x - x_0) \frac{\partial}{\partial t} f(t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x; x_0; t) \Big|_{x=L} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - 1 \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x; x_0; t) \Big|_{x=L_0} = 0. \quad (10.138)$$

Отметим, что краевая задача (10.136), (10.137) соответствует краевой задаче (10.138) при расположении источника на границе слоя, т. е. при $x_0 = L - u(x; L; t) = u(x; t)$.

Решение задачи (10.138) может быть записано в виде интеграла Фурье к(параметр $\tilde{\gamma}$ предполагается малым):

$$u(x; x_0; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{\omega}(x; x_0) f(\omega) e^{-i\omega t}, \quad G_{\omega}(x; x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt G(x; x_0; t) e^{i\omega t}, \quad (10.139)$$

где

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}.$$

Функция $G_\omega(x; x_0)$ — решение стационарной задачи о поле точечного источника внутри слоисто-неоднородной среды (10.12):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G_\omega(x; x_0) + k^2[1 + \varepsilon(x)] G_\omega(x; x_0) &= 2ik\delta(x - x_0), \\ \left(\frac{d}{dx} + ik\right) G_\omega(x; x_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik\right) G_\omega(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (10.140)$$

где

$$\frac{1}{c^2(x)} = \frac{1}{c_0^2}[1 + \varepsilon(x)], \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\frac{\tilde{\gamma}}{\omega}, \quad k = \frac{\omega}{c_0}.$$

Эта задача рассматривалась выше. Параметр $\tilde{\gamma}$, который характеризует поглощение волны в среде, связан с параметром γ , введенным ранее с помощью соотношения $\gamma = \tilde{\gamma}/2c_0$.

Введем нестационарную функцию Грина $G(x; L; t)$. Падающая на слой волна $f[t + (x - L)/c_0]$ создает на границе $x = L$ распределение источников $\tilde{f}(t_0)$, такое, что

$$f(t) = \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \theta(t - t_0) \tilde{f}(t_0), \quad \tilde{f}(t_0) = 2c_0 \frac{\partial}{\partial t_0} f(t_0).$$

Тогда волновое поле внутри среды может быть записано в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G(x; L; t - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} f(t_1),$$

где функция $G(x; L; t - t_0)$ удовлетворяет волновому уравнению (10.136) с краевым условием на границе $x = L$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t}\right) G(x; L; t - t_0) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0).$$

Краевая задача определения $G(x; L; t)$ (предполагаем для простоты отсутствие поглощения волны в среде) с помощью метода погружения может быть переформулирована в задачу с начальными условиями по параметру L (считаем, что $t_0 = 0$) [6, 41]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t}\right) G(x; L; t) &= -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial}{\partial t} G(x; L; t - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} H(L; t_1), \\ G(x; L; t) \Big|_{L=x} &= H(x; t). \end{aligned} \quad (10.141)$$

Функция $H(L; t) = G(L; L; t)$ — волновое поле на границе среды, описывается замкнутым интегро-дифференциальным уравнением с начальным

условием:

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) H(L; t) = \frac{2}{c_0} \delta(t) - \frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial}{\partial t} H(L; t - t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} H(L; t_1),$$

$$H(L; t)|_{L=L_0} = \theta(t). \quad (10.142)$$

Функция $G(x; L; t)$ описывает волновое поле в среде при падении на нее волны вида $\theta(t + (x - L)/c_0)$. Функция $H(L; t)$ также имеет структуру

$$H(L; t) = \theta(t) H_L(t). \quad (10.143)$$

Подставляя выражение (10.143) в уравнение (10.142) и разделяя сингулярную $\sim \delta(t)$ и регулярную $\sim \theta(t)$ части в уравнении (10.142), получаем уравнение [10]

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)} \frac{\partial}{\partial t}\right) H_L(t) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_0^t dt_1 \frac{\partial H_L(t - t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (10.144)$$

$$H_{L_0}(t) = 1, \quad H_L(+0) = \frac{2c(L)}{c(L) + c_0}.$$

Статистическое описание. Рассмотрим теперь статистические характеристики решения нестационарной задачи, описывающей распространение временного импульса, генерируемого внутри случайно-неоднородной среды. Эта задача описывается уравнением (10.136), и ее решение может быть представлено в виде интеграла Фурье (10.139). Нас интересуют предельные значения средней величины интенсивности волнового поля

$$I(x; x_0; t) = u^2(x; x_0; t)$$

при $t \rightarrow \infty$ и $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$. Среднюю интенсивность можно записать в виде

$$\langle I(x; x_0; t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \langle I_{\omega, \psi}(x; x_0) \rangle f\left(\omega + \frac{\psi}{2}\right) f^*\left(\omega - \frac{\psi}{2}\right) e^{-i\psi t}.$$

При $t \rightarrow \infty$ значение интеграла определяется поведением подынтегрального выражения при малых значениях ψ , т. е. величиной

$$\langle I(x; x_0; t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \langle I_{\omega, \psi}(x; x_0) \rangle e^{-i\psi t}. \quad (10.145)$$

В формуле (10.145) введен двухчастотный аналог интенсивности плоской волны:

$$I_{\omega, \psi}(x; x_0) = G_{\omega + \psi/2}(x; x_0) G_{\omega - \psi/2}^*(x; x_0).$$

Отметим, что для малых значений ψ и $\tilde{\gamma}$ из уравнения (10.140) следует равенство (при $x \leq x_0$)

$$\frac{d}{dx} S_{\omega, \psi}(x; x_0) = \frac{1}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) I_{\omega, \psi}(x; x_0), \quad (10.146)$$

где $S_{\omega, \psi}(x; x_0)$ — двухчастотный аналог плотности потока энергии:

$$S_{\omega, \psi}(x; x_0) = \frac{c_0}{2i\psi} \left[G_{\omega+\psi/2}(x; x_0) \frac{d}{dx} G_{\omega-\psi/2}^*(x; x_0) - G_{\omega-\psi/2}^*(x; x_0) \frac{d}{dx} G_{\omega+\psi/2}(x; x_0) \right].$$

Интегрируя равенство (10.146) по всему полупространству $-\infty < x < x_0$, получаем

$$S_{\omega, \psi}(x; x_0) = \frac{1}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) \int_{-\infty}^{x_0} dx I_{\omega, \psi}(x; x_0).$$

Следовательно, после интегрирования равенства (10.145) по полупространству, для среднего значения энергии, заключенной в этом полупространстве, получаем выражение

$$E(t) = \int_{-\infty}^{x_0} dx \langle I(x; x_0; t) \rangle = \frac{c_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\tilde{\gamma} - i\psi} \langle S_{\omega, \psi}(x; x_0) \rangle e^{-i\psi t}. \quad (10.147)$$

Рассмотрим теперь статистическое описание величин $S_{\omega, \psi}(x; x_0)$ и $I_{\omega, \psi}(x; x_0)$. Согласно соответствующим выражениям для стационарной задачи, они будут описываться величиной

$$W_{\omega, \psi}(x_0) = R_{\omega+\psi/2}(x_0) R_{\omega-\psi/2}^*(x_0),$$

которая является двухчастотным аналогом квадрата модуля коэффициента отражения $W = |R|^2$.

При $\psi = 0$ выражения для $S_{\omega, \psi}(x; x_0)$ и $I_{\omega, \psi}(x; x_0)$ переходят в соответствующие выражения для одночастотных характеристик стационарной задачи. Таким образом, для вычисления средних значений $S_{\omega, \psi}(x; x_0)$ и $I_{\omega, \psi}(x; x_0)$ необходимо знание статистики величины $W_{\omega, \psi}(x_0)$.

Функция $R_{\omega}(x)$, как функция x , удовлетворяет стохастическому уравнению Риккати, которое запишем в виде

$$\frac{d}{dx} R_{\omega}(x) = \frac{2i}{c_0} \left(\omega + i \frac{\tilde{\gamma}}{2} \right) R_{\omega}(x) + \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon_1(x) (1 + R_{\omega}(x))^2, \quad R_{\omega}(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0.$$

Следовательно, функция $W_{\omega, \psi}(x)$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W_{\omega, \psi}(x) = & -\frac{2}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) W_{\omega, \psi}(x) - \\ & - i \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon_1(x) \left(R_{\omega+\psi/2}(x) - R_{\omega-\psi/2}^*(x) \right) (1 - W_{\omega, \psi}(x)), \end{aligned}$$

и для модели гауссова дельта-коррелированного процесса $\varepsilon_1(x)$ с параметрами

$$\langle \varepsilon_1(x) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_1(x) \varepsilon_1(x') \rangle = 2\sigma_\varepsilon^2 l_0 \delta(x - x')$$

стандартным путем для величины $W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) = \langle [W_{\omega, \psi}(x)]^n \rangle$ получаем рекуррентное равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) = & -\frac{2n}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) + \\ & + D(\omega) n^2 \left\{ W_{\omega, \psi}^{(n+1)}(x) - 2W_{\omega, \psi}^{(n)}(x) + W_{\omega, \psi}^{(n-1)}(x) \right\}, \end{aligned}$$

где, как и ранее,

$$D(\omega) = \frac{\omega^2 \sigma_\varepsilon^2 l_0}{2c_0^2}.$$

Следовательно, решение, не зависящее от x и соответствующее подпространству случайно-неоднородной среды, удовлетворяет рекуррентному равенству

$$\frac{2}{c_0} (\tilde{\gamma} - i\psi) W_{\omega, \psi}^{(n)} = D(\omega) n \left\{ W_{\omega, \psi}^{(n+1)} - 2W_{\omega, \psi}^{(n)} + W_{\omega, \psi}^{(n-1)} \right\}. \quad (10.148)$$

При $\psi = 0$ равенство (10.148) переходит в равенство (10.39), которому соответствует плотность вероятностей (10.37). Равенство (10.148) можно рассматривать как аналитическое продолжение в комплексную область равенства (10.39) по параметру $\tilde{\gamma}$. Следовательно, и все статистические характеристики, полученные в стационарной задаче, будучи продолжены в комплексную область по параметру затухания $\tilde{\gamma}$, будут определять соответствующие двухчастотные статистические характеристики [85].

Таким образом, при отсутствии в исходной задаче поглощения в среде ($\tilde{\gamma} = 0$), необходимо заменить параметр $\tilde{\gamma}$ на $0 - i\psi$ в соответствующих статистических характеристиках задачи о плоских волнах, для того чтобы получить выражения для двухчастотных статистических характеристик, т. е. положить

$$\beta(\omega) = \frac{1}{c_0 D(\omega)} (0 - i\psi).$$

Как результат получаем при $t \rightarrow \infty$ и $\tilde{\gamma} = 0$ для достаточно малого значения ψ выражения

$$\langle S_{\omega, \psi}(x_0; x_0) \rangle = 1, \quad \langle I_{\omega, \psi}(x_0; x_0) \rangle = i \frac{D(\omega) c_0}{\psi + i0}.$$

Следовательно, формулы (10.145) и (10.147) переходят в выражения, соответствующие асимптотике $t \rightarrow \infty$ (после интегрирования по ψ):

$$\langle I(x_0; x_0; \infty) \rangle = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2, \quad E(\infty) = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2. \quad (10.149)$$

Таким образом, средняя интенсивность волнового поля в точке расположения источника и общая энергия во всем полупространстве остаются конечными величинами (если, конечно, соответствующие интегралы существуют). Этот факт подтверждает существование пространственной статистической локализации для средней интенсивности и локализационная длина, очевидно, будет описываться формулой

$$l_{\text{loc}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2}.$$

Это свойство статистической локализации обусловлено конечностью общей энергии, сосредоточенной в полупространстве, что, в свою очередь, обусловлено независимостью среднего потока энергии от параметров флуктуирующей среды в стационарной задаче о плоских волнах. Форму локализационной кривой в пространстве получаем исходя из равенства (10.131)

$$\langle I(x; x_0; \infty) \rangle = \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2 \Phi_{\text{loc}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega)|x - x_0|) \quad (10.150)$$

где $\Phi_{\text{loc}}(\xi)$ — локализационная кривая (10.132) для стационарной задачи. Ее зависимость от параметра ω входит только через коэффициент диффузии $D(\omega)$.

Если импульс $f(t)$ характеризуется только одним параметром (шириной импульса), то из равенства (10.150) для больших значений $|x - x_0|$ получаем асимптотическую зависимость

$$\langle I(x; x_0; \infty) \rangle \sim |x - x_0|^{-3/2}.$$

Если же мы имеем импульс с высокочастотным заполнением (с частотой ω_0), то асимптотическая зависимость принимает вид

$$\langle I(x; x_0; \infty) \rangle \sim \Phi_{\text{loc}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega)|x - x_0|).$$

Аналогичным образом можно получить соответствующие выражения и для источника, расположенного на отражающей границе:

$$\begin{aligned} \langle I_{\text{ref}}(x; x_0; \infty) \rangle &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2 \Phi_{\text{loc}}(\xi) \quad (\xi = D(\omega)(L - x)), \\ \langle I_{\text{ref}}(x_0; x_0; \infty) \rangle &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega D(\omega) |f(\omega)|^2, \\ E(\infty) &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2. \end{aligned} \quad (10.151)$$

Следовательно, в этом случае статистическая локализация осуществляется на масштабе вдвое меньшем, чем в предыдущем случае.

В случае падения импульса на полупространство случайно-неоднородной среды $x < L$, имеем для величины $I(L; t) = u^2(L; t)$:

$$\begin{aligned} \langle I(L; t) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \left\{ 1 + W_{\omega, \psi}^{(1)} \right\} e^{-i\psi t}, \\ E(t) &= \int_{-\infty}^L dx \langle I(x; L; t) \rangle = \frac{c_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{0 - i\psi} \left\{ 1 - W_{\omega, \psi}^{(1)} \right\} e^{-i\psi t}, \end{aligned} \quad (10.152)$$

где

$$W_{\omega, \psi}^{(1)} = -\beta(\omega) \int_0^{\infty} du \frac{u}{u+2} e^{-\beta(\omega)u}$$

— аналитическое продолжение соответствующего выражения для $\langle |R_L|^2 \rangle$ по отношению к параметру β . Выполняя интегрирование по ω и u в выражениях (10.152), получаем следующее асимптотическое выражение для достаточно большого t [112]:

$$\begin{aligned} \langle I(L; t) \rangle &= \frac{c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \frac{D(\omega)}{[2 + D(\omega)c_0 t]^2}, \\ E(t) &= \frac{2c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |f(\omega)|^2 \frac{1}{2 + D(\omega)c_0 t}. \end{aligned} \quad (10.153)$$

Выражения (10.153) дают асимптотическую зависимость поведения во времени средней интенсивности импульса, отраженного от полупространства, и средней энергии, содержащейся в случайно-неоднородной среде. В этом случае для импульсов с и без высокочастотного заполнения получаем асимптотики

$$\langle I(L; t) \rangle \sim t^{-2} \quad \text{или} \quad \langle I(L; t) \rangle \sim t^{-3/2}.$$

Из равенств (10.153) также следует, что при $t \rightarrow \infty$ падающая волна полностью высвечивается из случайно-неоднородной среды.

Выше мы рассмотрели статистическое описание волнового импульса в случайно-неоднородной среде. Аналогичным образом можно рассмотреть и задачу о распространении пространственного волнового пакета в случайно-неоднородных средах [97]–[99], [111], [169]–[172], [203]. Свойство статистической локализации, полученное выше, очевидно, сохраняется и в этом случае. Его можно трактовать в этом случае как существование статистического волновода в направлении, перпендикулярном оси x [19, 20, 129, 130].

10.6.2. Точечный источник в слоистой случайной среде.

Факторизация волнового уравнения в слоистых средах. Рассмотрим теперь задачу о волновом поле многомерного точечного источника внутри слоистой случайно-неоднородной среды [139], для которой функция Грина описывается уравнением

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 [1 + \varepsilon(z, \mathbf{R})] \right] G(z, \mathbf{R}; z_0) = \delta(\mathbf{R}) \delta(z - z_0), \quad (10.154)$$

где $\mathbf{R} = \{x, y\}$, $\Delta_{\mathbf{R}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для функции Грина в этом случае имеется интегральное представление в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах соответственно [139] (см. приложение Б):

$$\begin{aligned} G^{(1)}(z; z_0) &= \frac{1}{2ik} \int_0^\infty dt e^{i \frac{kt}{2}} \psi(t, z; z_0), \\ G^{(2)}(x, z; z_0) &= \frac{1}{2ik} \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} e^{i \frac{k}{2t} (x^2 + t^2)} \psi(t, z; z_0), \\ G^{(3)}(z, \mathbf{R}; z_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{i \frac{k}{2t} (\mathbf{R}^2 + t^2)} \psi(t, z; z_0), \end{aligned} \quad (10.155)$$

где $\psi(t, z; z_0)$ — решение уравнения (со вспомогательным параметром, который мы обозначили через t)

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, z; z_0) = \frac{i}{2k} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon(z) \right] \psi(t, z; z_0), \quad \psi(0, z; z_0) = \delta(z - z_0). \quad (10.156)$$

Формулы (10.155), (10.156) выражают свойство факторизации для уравнения Гельмгольца в слоистой среде.

Эволюционная задача (10.156) должна быть дополнена краевым условием по z . Мы будем рассматривать следующие краевые задачи:

а) источник в неограниченном пространстве с условиями излучения при $z \rightarrow \pm\infty$;

б) источник на отражающей границе, на которой выполняется условие $\partial\psi/\partial z|_{z=z_0-0} = 0$ и условие излучения при $z \rightarrow \infty$;

в) источник расположен на границе однородного полупространства с условием излучения $\rightarrow \pm\infty$.

При $x, |\mathbf{R}| \rightarrow \infty$ из выражений (10.155) следуют асимптотические формулы

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x, z; z_0) &\approx \frac{1}{2ik} e^{ik|x|} \psi(|x|, z; z_0), \\ G^{(3)}(z, \mathbf{R}; z_0) &\approx \frac{1}{4\pi\sqrt{R}} \sqrt{\frac{2\pi i}{kR}} e^{ikR} \psi(R, z; z_0), \end{aligned} \quad (10.157)$$

справедливые при условии, что функция $\psi(t, z; z_0)$ не имеет экспоненциального поведения по t . Формулы (10.157) соответствуют малоугловому рассеянию (приближение параболического уравнения). Для того чтобы учесть рассеяние на большие углы, необходимо использовать точные представления (10.155) для функции Грина.

Используя преобразование Фурье, функцию $\psi(t, z; z_0)$ можно записать в виде

$$\psi_\omega(z; z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(t, z; z_0) e^{-i\omega t},$$

где функция $\psi_\omega(z; z_0)$ описывается уравнением

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2k\omega + k^2 \epsilon(z) \right] \psi_\omega(z; z_0) = 2ik \delta(z - z_0). \quad (10.158)$$

Решение уравнения (10.158) $\psi_{\omega < 0}(z; z_0)$ соответствует распространяющимся волнам при $\omega < 0$ и затухающим — при $\omega > 0$.

Нас интересует асимптотическое поведение функций Грина при $x, |\mathbf{R}| \rightarrow \infty$. Для них мы имеем

$$\begin{aligned} G^{(1)}(z; z_0) &= \frac{1}{2ik} \psi_{-k/2-i0}(z; z_0), \\ G^{(2)}(x, z; z_0) &= \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{1+2\omega/k}} e^{ikx\sqrt{1+2\omega/k}} \psi_{\omega-i0}(z; z_0), \\ G^{(3)}(z, \mathbf{R}; z_0) &= -\frac{1}{8\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi i}{kR}} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1+2\omega/k)^{1/4}} e^{ikR\sqrt{1+2\omega/k}} \psi_{\omega-i0}(z; z_0), \end{aligned} \quad (10.159)$$

откуда видно, что формулы (10.157) следуют из равенств (10.159) при выполнении условия $2\omega/k \ll 1$.

Параболическое уравнение. Рассмотрим сперва статистическое описание функций Грина в приближении параболического уравнения. Функция

$\psi(t, z; z_0)$ может быть записана в виде

$$\psi(t, z; z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\frac{k}{2\omega}} \tilde{\psi}_\omega(z; z_0) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \psi_\omega(z; z_0) e^{i\omega t}, \quad (10.160)$$

где функция $\tilde{\psi}_\omega(z; z_0)$ описывается уравнением

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + 2k\omega + k^2\varepsilon(z) \right] \tilde{\psi}_\omega(z; z_0) = 2ik\sqrt{2k\omega} \delta(z - z_0). \quad (10.161)$$

Для затухающих волн влияние флуктуаций $\varepsilon(z)$ не существенно, и функция

$$\psi_{\omega>0}(z; z_0) = -i\sqrt{\frac{k}{2\omega}} e^{-\sqrt{2k\omega}|z-z_0|}$$

соответствует полю в свободном пространстве. Неизвестная функция $\tilde{\psi}_\omega(z; z_0)$ — решение уравнения (10.161), статистический анализ которого проводился ранее в разделе для стационарных одномерных задач.

Основной важной особенностью одномерной задачи о поле точечного источника в случайно-неоднородной среде, как мы видели раньше, является необходимость принимать во внимание конечность поглощения волны в среде $\gamma \ll 1$ (хоть и сколь угодно малое). Введем его как мнимую часть функции $\varepsilon(z) = \varepsilon_1(z) + i\gamma$, где $\varepsilon_1(z)$ — случайная функция. Нас интересует средняя интенсивность

$$\langle I(t, z; z_0) \rangle = \langle \psi(t, z; z_0) \psi^*(t, z; z_0) \rangle$$

при достаточно больших значениях параметра t .

Среднюю интенсивность можно записать в виде

$$\langle I(t, z; z_0) \rangle = I_{\text{флук}}(t, z; z_0) + I_1(t, z; z_0) + I_2(t, z; z_0), \quad (10.162)$$

где функции $I_{\text{флук}}(t, z; z_0)$, $I_2(t, z; z_0)$ описывают вклад в среднюю интенсивность, благодаря первому и второму членам в правой части равенства (10.160), а функция $I_1(t, z; z_0)$ учитывает перекрестный член $\langle \tilde{\psi}_{\omega_1}(z; z_0) \psi_{\omega_2}^*(z; z_0) \rangle$.

Рассмотрим сначала величину

$$I_{\text{флук}}(t, z; z_0) = \frac{k}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \int_{-2\Omega}^{2\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega^2 - \omega^2/4}} e^{-i\omega t} \langle I_{\Omega, \omega}(z; z_0) \rangle,$$

где

$$\langle I_{\Omega, \omega}(z; z_0) \rangle = \langle \tilde{\psi}_{\Omega+\omega/2}(z; z_0) \psi_{\Omega-\omega/2}^*(z; z_0) \rangle$$

— двухчастотный коррелятор решения соответствующей краевой задачи. При $t \rightarrow \infty$ основной вклад в этот интеграл дает окрестность точки $\omega \rightarrow 0$.

Статистические характеристики решения уравнения (10.161) определяются статистикой коэффициента отражения плоской волны $R_{z_0}(\omega)$, падающей на полупространство $z_0 > z$ из однородного полупространства. Функция $R_{z_0}(\omega)$ теперь, как легко видеть, описывается уравнением Риккати:

$$\frac{d}{dz_0} R_{z_0}(\omega) = \left[2i\sqrt{2k\omega} - k\sqrt{\frac{k}{2\omega}}\gamma \right] R_{z_0}(\omega) + i\frac{k}{2}\sqrt{\frac{k}{2\omega}}\varepsilon_1(z_0)[1 + R_{z_0}(\omega)]^2.$$

Одночастотные статистические характеристики коэффициента отражения выражаются через единственный безразмерный параметр

$$\beta = \frac{k\gamma}{D}\sqrt{\frac{k}{2\Omega}},$$

где

$$D = D_0 \frac{k}{2\Omega}, \quad D_0 = \frac{k^2 \sigma_e^2 l_0}{2},$$

а функциональная зависимость волнового поля от параметра β зависит от вида краевой задачи. В этом случае для гауссового дельта-коррелированного случайного процесса $\varepsilon_1(z)$ существует плотность вероятностей $P(u)$ для величины $u = (1 + W)/(1 - W)$, не зависящая от z_0 (полупространство) (10.37):

$$P(u) = \beta e^{-\beta(u-1)}. \quad (10.163)$$

Для двухчастотной функции $W_{z_0}(\Omega, \omega) = R_{z_0}(\Omega + \omega/2)R_{z_0}^*(\Omega - \omega/2)$ при $\omega \rightarrow 0$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_0} W_{z_0}(\Omega, \omega) = & -2\sqrt{\frac{k}{2\Omega}}(k\gamma - i\omega)W_{z_0}(\Omega, \omega) - \\ & - i\frac{k}{2}\sqrt{\frac{k}{2\Omega}}\varepsilon_1(z_0)[R_{z_0}(\Omega) - R_{z_0}^*(\Omega)][1 - W_{z_0}(\Omega, \omega)]. \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли членами, пропорциональными $\omega\gamma$, $\omega\varepsilon_1(z_0)$. И процесс определения двухчастотной функции $W_{z_0}(\Omega, \omega)$ при малых значениях ω сводится к аналитическому продолжению в комплексную плоскость соответствующих одночастотных характеристик по параметру β :

$$\beta \rightarrow \beta(\Omega, \omega) = \sqrt{\frac{k}{2\Omega}} \frac{k\gamma - i\omega}{D} = -i\sqrt{\frac{2\Omega}{k}} \frac{\omega + ik\gamma}{D_0}. \quad (10.164)$$

Дальнейший анализ зависит от вида исходной краевой задачи.

а) Источник в неограниченном пространстве.

Рассмотрим среднюю интенсивность в точке расположения источника $z_0 = z$. Одночастотная величина

$$\langle I_{\Omega,0}(z_0; z_0) \rangle = \langle \tilde{\Psi}_{\Omega}(z_0; z_0) \Psi_{\Omega}^*(z_0; z_0) \rangle = 1 + 1/\beta.$$

Выполняя аналитическое продолжение по параметру β , получаем

$$I_{\text{fluc}}(t, z; z_0) = \frac{k D_0}{2i (2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \int_{-2\Omega}^{2\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega^2 - \omega^2/4}} e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{k}{2\Omega}} \frac{1}{\omega + i\gamma}. \quad (10.165)$$

Выражение (10.165) для $I_{\text{fluc}}(t, z; z_0)$ существует для точечного источника только в случае конечного поглощения волны в среде γ , и при $\gamma \rightarrow 0$

$$I_{\text{fluc}}(t, z; z_0) \sim \frac{k D_0}{\sqrt{\gamma}}.$$

Следовательно, существование малого, но конечного поглощения в среде существенно для статистического описания статистических характеристик волнового поля (этот результат аналогичен одномерной задаче).

б) Источник на отражающей границе.

В этом случае все заключения об источнике в неограниченном пространстве, очевидно, также справедливы.

в) Источник расположен на границе однородного полупространства.

Если источник расположен на границе $z = z_0$ среды, одноточечное среднее имеет вид

$$\langle I_{\Omega,0}(z_0; z_0) \rangle = \langle \tilde{\Psi}_\Omega(z_0; z_0) \Psi_\Omega^*(z_0; z_0) \rangle = 1 + \langle |R_{z_0}(\Omega)|^2 \rangle,$$

где среднее значение вычисляется с помощью плотности вероятностей (10.163). Следовательно, для средней интенсивности на границе среды имеем

$$\langle I(t, z; z_0) \rangle = I_{\text{free}}(t, z; z_0) + I_{\text{fluc}}(t, z; z_0),$$

$$I_{\text{fluc}}(t, z; z_0) = \frac{k}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty d\Omega \int_{-2\Omega}^{2\Omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\Omega^2 - \omega^2/4}} e^{-i\omega t} \beta(\Omega, \omega) \int_0^\infty \frac{u du}{u+2} e^{-\beta(\Omega, \omega)u},$$

где параметр $\beta(\Omega, \omega)$ описывается формулой (10.164). Интегрирование по ω и u дает выражение ($\gamma \rightarrow 0$)

$$I_{\text{fluc}}(t, z; z_0) = \frac{k^{3/2} D_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\Omega \Omega^{-3/2} \left[2 + D_0 \sqrt{\frac{k}{2\Omega}} t \right]^{-2},$$

и, следовательно, при $t \rightarrow \infty$, получаем

$$I_{\text{fluc}}(t, z; z_0) = I_{\text{free}}(t, z; z_0) = \frac{k}{2\pi t},$$

т.е. средняя интенсивность волнового поля удваивается. Этот результат аналогичен одномерной задаче.

Общий случай. Для точного описания задачи о точечном источнике в неограниченном пространстве, рассмотрим двумерный случай, а именно функцию $G^{(2)}(x, z; z_0)$ (10.159).

Разобьем область интегрирования на три части: $(-\infty, -k/2)$, $(-k/2, 0)$ и $(0, +\infty)$. Вклад первой области в функцию Грина приблизительно равен $\psi_{-k/2}(z_0, z_0)/kx$ из-за затухающей экспоненты при $x \rightarrow \infty$. Это дает член

$$\langle I_1^{(2)}(x) \rangle \sim \frac{D_0}{(kx)^2 k\gamma}$$

в выражении для средней интенсивности.

Чтобы оценить вклад второй области, мы используем метод, аналогичный методу, использованному для анализа параболического уравнения. Это дает соответствующий вклад в среднюю интенсивность вида

$$\langle I_2^{(2)}(x) \rangle \sim \frac{D_0}{k\sqrt{\gamma}} \quad (10.166)$$

для достаточно больших значений x , но $k\gamma x \ll 1$.

В третьей области волновое поле $\psi_\omega(z_0, z_0)$ соответствует волне, распространяющейся в свободном пространстве, и дает вклад в среднюю интенсивность

$$\langle I_3^{(2)}(x) \rangle \sim 1/(kx).$$

Отметим, что перекрестные члены между различными областями не дают степенной зависимости по γ в знаменателях соответствующих асимптотических выражений.

Комбинируя все полученные члены, видим, что при условии

$$\gamma^{3/4} \ll k\xi \ll 1$$

член $\langle I_2^{(2)}(x) \rangle$ является определяющим в выражении для средней интенсивности.

В трехмерном случае получаем аналогичный результат

$$\langle I_1^{(3)}(x) \rangle \sim \frac{D_0 k}{(kR)^4 \gamma}, \quad \langle I_2^{(3)}(x) \rangle \sim \frac{D_0}{R\sqrt{\gamma}}, \quad \langle I_3^{(3)}(x) \rangle \sim \frac{1}{(kR)^2}$$

при $R \rightarrow \infty, \gamma kR \ll 1$. При выполнении условия $\gamma^{5/6} \ll k\gamma R$ функция $\langle I_2^{(3)}(x) \rangle$ вносит определяющий вклад в среднюю интенсивность в точке расположения точечного источника $z = z_0$, который соответствует цилиндрической волне.

Аналогичный результат справедлив и для точечного источника, расположенного на отражающей границе.

Если источник расположен на границе случайно-неоднородного полупространства, средняя интенсивность описывается интегралом

$$\langle I(x, z; z_0) \rangle = I_{\text{free}}(x, z; z_0) \left(1 + 2D_0 x \int_0^1 \frac{ds}{[D_0 x + 2s\sqrt{1-s^2}]} \right).$$

Нас интересуют два асимптотических режима: $D_0x \ll 1$, но $kx \gg 1$ и $D_0x \gg 1$. В первом случае

$$\langle I(x, z; z_0) \rangle = 2I_{\text{free}}(x, z; z_0).$$

Этот результат аналогичен результату, полученному для параболического уравнения и показывает, что в этом режиме рассеяние на большие углы не оказывает влияния на статистику.

В случае же $D_0x \gg 1$ средняя интенсивность описывается выражением

$$\langle I(x, z; z_0) \rangle = I_{\text{free}}(x, z; z_0) \left(1 + \frac{2}{D_0x} \right)$$

и рассеяние на большие углы существенно в формировании статистики. Оно проявляется в появлении дополнительного ослабляющего множителя при интенсивности в свободном пространстве. Аналогичный результат осуществляется и в трехмерном случае.

Мы видели ранее, что принципиальной особенностью одномерной задачи о плоских волнах в слоистых случайных средах является необходимость учета малого, но конечного поглощения волны в среде (параметр γ). Статистика волнового поля формируется интерференцией многократно переотраженных волн в случайной среде и приводит к сингулярной зависимости средней интенсивности $\langle I \rangle$ от параметра γ , например, $\langle I \rangle \sim 1/\gamma$ для точечного источника в неограниченном пространстве.

В многомерных слоистых задачах пространственная дифракция действует подобно эффекту затухания, что позволяет вычислять статистические характеристики волнового поля с помощью аналитического продолжения в комплексную плоскость по параметру γ . Можно было надеяться, что эти дифракционные эффекты снимут сингулярную зависимость статистических характеристик от параметра γ и что в многомерных задачах возможен предельный переход $\gamma \rightarrow 0$. Однако эти надежды не оправдались. Дифракционные эффекты уменьшают степень сингулярности, но не ликвидируют ее. Таким образом, поглощение волн в среде является регуляризующим фактором в многомерных задачах о волнах в случайно-слоистых средах.

В заключение отметим существование ряда работ по численному моделированию статистических характеристик поля точечного источника в трехмерных слоистых случайных средах [23, 72, 73, 141].

10.7. Двухслойная модель среды

10.7.1. Постановка краевых задач. Простейшая модель распространения волн в двухслойной среде приведена в гл. 1 и описывается системой волновых уравнений (1.38)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + k^2 \psi_1(x) - \alpha_1 F(\psi_1(x) - \psi_2(x)) &= 0, \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2(x) + \alpha_2 F(\psi_1(x) - \psi_2(x)) &= 0, \end{aligned} \quad (10.167)$$

где параметры $\alpha_1 = 1/H_1$, $\alpha_2 = 1/H_2$ (H_1 , H_2 — толщины верхнего и нижнего слоев), F характеризует взаимодействие волн, а функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды в нижнем слое. Считаем, как и ранее, что функция $\varepsilon(x)$ отлична от нуля только в области (L_0, L) и является случайной функцией. Краевыми условиями для системы уравнений (10.167) являются условия излучения на бесконечности и условие непрерывности волновых полей и их производных на границах области L_0 и L . Рассмотрим статистическое описание этой задачи, следуя работе [21].

Рассмотрим систему уравнений для функции Грина:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x; x_0) + k^2 \psi_1(x; x_0) - \alpha_1 F (\psi_1(x; x_0) - \psi_2(x; x_0)) &= -v_1 \delta(x - x_0), \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x; x_0) + k^2 [1 + \varepsilon(x)] \psi_2(x; x_0) + \alpha_2 F (\psi_1(x; x_0) - \psi_2(x; x_0)) &= \\ &= -v_2 \delta(x - x_0), \end{aligned} \quad (10.168)$$

соответствующую задаче о возбуждении волн в верхнем и нижнем слоях соответственно. Вводя векторное обозначение

$$\Psi(x; x_0) = \{\psi_1(x; x_0), \psi_2(x; x_0)\}, \quad \mathbf{v} = \{v_1, v_2\},$$

можно переписать систему (10.168) в векторной форме

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x; x_0) = -\mathbf{v} \delta(x - x_0), \quad (10.169)$$

где матрицы

$$A^2 = \begin{pmatrix} k^2 - \alpha_1 F & \alpha_1 F \\ \alpha_2 F & k^2 - \alpha_2 F \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.170)$$

и введены параметр $\lambda^2 = \left[1 - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{F}{k^2} \right]$, описывающий моду, которую будем называть λ -волной (считаем, что $\lambda^2 > 0$), и относительные толщины слоев:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_2}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{H_1}{H_0}, \quad \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = 1.$$

В такой форме записи уравнение (10.169) подобно уравнению Гельмгольца (10.1), где матрица A описывает постоянное значение показателя преломления, а величина $\varepsilon(x)\Gamma$ описывает неоднородности среды.

Рассмотрим матрицу Ψ , описываемую уравнением

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma \right] \Psi(x; x_0) = -E \delta(x - x_0), \quad (10.171)$$

через которую вектор-функция $\Psi(x; x_0)$ определяется, согласно равенству

$$\Psi(x; x_0) = \Psi(x; x_0) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \psi_{11} + v_2 \psi_{12} \\ v_1 \psi_{21} + v_2 \psi_{22} \end{pmatrix}. \quad (10.172)$$

Как следствие, компоненты матрицы $\{\psi_{11}, \psi_{21}\}$ и $\{\psi_{12}, \psi_{22}\}$ описывают волны, генерируемые источниками $\{v_1, 0\}$, $\{0, v_2\}$ в верхнем и нижнем слоях соответственно. Краевыми условиями для уравнения (10.171) являются условия

$$\left(\frac{d}{dx} - iA\right)\Psi(x; x_0)\Big|_{x=L} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} + iA\right)\Psi(x; x_0)\Big|_{x=L_0} = 0, \quad (10.173)$$

где матрица

$$A = k \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_2 + \lambda \tilde{\alpha}_1 & (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_1 \\ (1 - \lambda) \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 + \lambda \tilde{\alpha}_2 \end{pmatrix}.$$

Далее еще больше упростим задачу, а именно будем считать, что источник плоских волн расположен на границе области существования неоднородностей $x_0 = L$. В этом случае, используя условие на скачок волнового поля в точке расположения источника x_0 , получаем краевую задачу

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + A^2 + k^2 \varepsilon(x) \Gamma\right] \Psi(x; L) = 0, \quad (10.174)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - iA\right)\Psi(x; L)\Big|_{x=L} = E, \quad \left(\frac{d}{dx} + iA\right)\Psi(x; L)\Big|_{x=L_0} = 0.$$

Последнее уравнение может быть упрощено диагонализацией матрицы A (10.170) с помощью матрицы

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 & 1 \\ -\tilde{\alpha}_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы A и Γ превращаются в

$$B = \tilde{A} = k \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\Gamma} = K \Gamma K^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_2 & -1 \\ -\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 & \tilde{\alpha}_1 \end{bmatrix},$$

и мы получаем новую систему для преобразованной матрицы Ψ

$$\Psi \rightarrow U(x; L) = -2iK\Psi(x; L)K^{-1}B, \quad (10.175)$$

в виде

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + B^2 + k^2 \varepsilon(x) \tilde{\Gamma}\right] U(x; L) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} - iB\right)U(x; L)\Big|_{x=L} = -2iB, \quad \left(\frac{d}{dx} + iB\right)U(x; L)\Big|_{x=L_0} = 0. \quad (10.176)$$

Краевая задача (10.176) описывает падение на среду k - и λ -волн с единичными амплитудами. Причем падающая λ -волна — U_{11} генерирует k -волну — U_{21} , а падающая k -волна — U_{22} генерирует λ -волну — U_{12} .

Из системы (10.176) следует, что амплитуда генерируемой k -волны — U_{21} пропорциональна параметру

$$\delta = \lambda \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 = \frac{\lambda H_1 H_2}{H_0^2}.$$

В общем случае параметр $\delta < \lambda/4$. Однако поскольку обычно в моделях, описывающих реальные среды, $\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \ll 1$ (так, например, для атмосферы предполагается, что $H_2 \ll H_1$ или $\tilde{\alpha}_1 \ll 1$, $\tilde{\alpha}_2 \cong 1$, а для океана предполагается, что $H_1 \ll H_2$ или $\tilde{\alpha}_1 \cong 1$, $\tilde{\alpha}_2 \ll 1$), в рассматриваемой задаче появляется малый параметр δ . Для моделей среды, где $H_2/H_1 \cong 1$, параметр $\delta \ll 1$ при $\lambda \ll 2$.

Введем теперь матрицы $R(L) = U(L; L) - E$ и $T(L) = U(L_0; L)$. Тогда R_{ij} , T_{ij} будут комплексными коэффициентами отражения и прохождения падающих ($i = j$) и возбужденных ($i \neq j$) λ - и k -волн соответственно.

Из системы (10.176) следует существование двух интегралов, соответствующих сохранению плотности потока энергии λ - и k -волн:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[U_{11}^*(x) \frac{d}{dx} U_{11}(x) - U_{11}(x) \frac{d}{dx} U_{11}^*(x) \right] + \\ + U_{21}^*(x) \frac{d}{dx} U_{21}(x) - U_{21}(x) \frac{d}{dx} U_{21}^*(x) = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 \left[U_{12}^*(x) \frac{d}{dx} U_{12}(x) - U_{12}(x) \frac{d}{dx} U_{12}^*(x) \right] + \\ + U_{22}^*(x) \frac{d}{dx} U_{22}(x) - U_{22}(x) \frac{d}{dx} U_{22}^*(x) = \text{const}. \end{aligned}$$

В терминах коэффициентов отражения и прохождения они записываются в виде равенств

$$\begin{aligned} \delta \left[1 - |R_{11}|^2 - |T_{11}|^2 \right] &= |R_{21}|^2 + |T_{21}|^2, \\ 1 - |R_{22}|^2 - |T_{22}|^2 &= \delta \left[|R_{12}|^2 + |T_{12}|^2 \right]. \end{aligned} \tag{10.177}$$

Если осуществляется полная локализация волн в области неоднородностей среды (L_0, L) , то все коэффициенты прохождения T_{ij} должны стремиться к нулю при увеличении ее размера.

Равенства (10.177) определяют связь коэффициентов прохождения с коэффициентами отражения, которые, на основе метода погружения, можно описать замкнутой системой уравнений. Метод погружения позволяет перейти от задачи с краевыми условиями для матричной функции $U(x; L)$ к системе уравнений для матричных функций $U(x; L)$ и $U(L; L)$ с начальными условиями по параметру L (в этом случае переменная x рассматривается как параметр):

$$\frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = iU(x; L)B + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)U(x; L)B^{-1}\tilde{\Gamma}U(L; L),$$

$$U(x; L)|_{L=x} = U(x; x);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} U(L; L) = -2iB + i[U(L; L)B + BU(L; L)] + \\ + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)U(L; L)B^{-1}\tilde{\Gamma}U(L; L), \quad U(L; L)|_{L=L_0} = E. \end{aligned} \quad (10.178)$$

Последнее уравнение для матрицы $R(L) = U(L; L) - E$ можно переписать в виде матричного уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} R(L) = i[R(L)B + BR(L)] + \frac{i}{2}k^2\varepsilon(L)[E + R(L)]B^{-1}\tilde{\Gamma}[E + R(L)], \\ R(L)|_{L=L_0} = 0. \end{aligned} \quad (10.179)$$

Расписывая это уравнение в виде системы уравнений для компонент R_{ij} , легко видеть, что имеется дополнительный интеграл

$$R_{21} = \delta R_{12}.$$

Это позволяет рассматривать систему из трех уравнений для R_{11} , R_{12} и R_{22} .

10.7.2. Статистический анализ. Перейдем теперь к статистическому анализу, рассматриваемой задачи.

Введем интенсивности всех отраженных волн $W_{ij}(L) = |R_{ij}(L)|^2$ и индикаторную функцию

$$\Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \delta(W_{11}(L) - W_{11})\delta(W_{22}(L) - W_{22})\delta(W_{12}(L) - W_{12}),$$

удовлетворяющую соответствующему уравнению Лиувилля. Будем считать, что случайная функция $\varepsilon(x)$ — однородный гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной и спектральной функциями

$$B_{\varepsilon}(\xi) = \langle \tilde{\varepsilon}(x)\tilde{\varepsilon}(x') \rangle, \quad \Phi_{\varepsilon}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi B_{\varepsilon}(\xi)e^{iq\xi}, \quad \xi = x - x', \quad (10.180)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(L) = \frac{k}{2\lambda}\varepsilon(L).$$

Усредняя уравнение Лиувилля для функции $\Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12})$ по ансамблю реализаций случайного процесса $\varepsilon(L)$, в диффузионном приближении можно получить уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятностей

$$P(L; W_{11}, W_{22}, W_{12}) = \langle \Phi_L(W_{11}, W_{22}, W_{12}) \rangle$$

вида

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L} P(L; W_{11}, W_{22}, W_{12}) = & \frac{\partial}{\partial W_{11}} [-D_1(1 - W_{11})^2 - 4\delta^2 D_4 W_{12} + \\
& + 2\delta(D_3 + D_4)W_{11} - \delta^2 D_2 W_{12}^2 - 4\delta^2 D_3 W_{11} W_{12}] + \frac{\partial}{\partial W_{22}} [-D_2(1 - W_{22})^2 - \\
& - 4\delta^2 D_4 W_{12} + 2\delta(D_3 + D_4)W_{22} - \delta^2 D_1 W_{12}^2 - 4\delta^2 D_3 W_{22} W_{12}] + \\
& + \frac{\partial}{\partial W_{12}} [(D_1(1 - W_{11}) + D_2(1 - W_{22}) + 2\delta(D_3 + 2D_4) - \delta^2 D_3 W_{12}) W_{12} - \\
& - D_3(1 + W_{11} W_{22}) - D_4(W_{11} + W_{22})] + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} W_{11} [D_1(1 - W_{11})^2 + 4\delta^2 D_4 W_{12} + 4\delta^2 D_3 W_{11} W_{12} + \delta^2 D_2 W_{12}^2] + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} W_{22} [D_2(1 - W_{22})^2 + 4\delta^2 D_4 W_{12} + 4\delta^2 D_3 W_{22} W_{12} + \delta^2 D_1 W_{12}^2] + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial W_{12}^2} W_{12} [W_{12}(D_1 W_{11} + D_2 W_{22} + \delta^2 D_3 W_{12} - 2\delta D_3) + D_3(1 + W_{11} W_{22}) + \\
& + D_4(W_{11} + W_{22})] + 8\delta^2 D_3 \frac{\partial^2}{\partial W_{11} \partial W_{22}} W_{22} W_{11} W_{12} - \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial W_{11} \partial W_{12}} W_{11} W_{12} [D_1(1 - W_{11}) + 2\delta(D_3 + D_4) - 2\delta^2 D_2 W_{12}] - \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22} \partial W_{12}} W_{22} W_{12} [D_2(1 - W_{22}) + 2\delta(D_3 + D_4) - \\
& - 2\delta^2 D_2 W_{12}] \} P(L; W_{11}, W_{22}, W_{12}), \quad (10.181)
\end{aligned}$$

где введены коэффициенты диффузии

$$\begin{aligned}
D_1 = 2\tilde{\alpha}_2^2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\epsilon}}(\xi) \cos(2\lambda k\xi), \quad D_2 = 2(\lambda\tilde{\alpha}_1)^2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\epsilon}}(\xi) \cos(2k\xi), \\
D_3 = 2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\epsilon}}(\xi) \cos[k(1+\lambda)\xi], \quad D_4 = 2 \int_0^\infty d\xi B_{\tilde{\epsilon}}(\xi) \cos[k(1-\lambda)\xi],
\end{aligned}$$

которые можно выразить через спектральную функцию случайного процесса $\tilde{\epsilon}(x)$, согласно (10.180), в виде

$$\begin{aligned}
D_1 = \left(\frac{k}{2\lambda} \frac{H_1}{H_0} \right)^2 \Phi_{\tilde{\epsilon}}(2\lambda k), \quad D_2 = \left(\frac{k}{2} \frac{H_2}{H_0} \right)^2 \Phi_{\tilde{\epsilon}}(2k), \\
D_3 = \left(\frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_{\tilde{\epsilon}}(k(1+\lambda)), \quad D_4 = \left(\frac{k}{2\lambda} \right)^2 \Phi_{\tilde{\epsilon}}(k(1-\lambda)).
\end{aligned} \quad (10.182)$$

При выводе уравнения (10.181) использовалось также дополнительное усреднение по быстроменяющимся функциям (что можно делать при выполнении условий $k\lambda \gg D_i$). Диффузионное приближение применимо при условии $Dl_0 \ll 1$.

Для мелкомасштабных неоднородностей среды ($kl_0 \ll 1$) все коэффициенты диффузии выражаются через один — D , а именно:

$$D_1 = \left(\frac{1}{\lambda} \frac{H_1}{H_0}\right)^2 D; \quad D_2 = \left(\frac{H_2}{H_0}\right)^2 D; \quad D_3 = D_4 = \frac{1}{\lambda^2} D, \quad (10.183)$$

где

$$D = \frac{k^2}{4} \Phi_{\varepsilon}(0). \quad (10.184)$$

Отметим, что в случае однослойной модели среды коэффициент отражения R_L описывается уравнением Риккати, которому соответствует уравнение Фоккера–Планка (при отсутствии затухания)

$$\frac{\partial}{\partial L} P(L; W) = D \left\{ -\frac{\partial}{\partial W} (1-W)^2 + \frac{\partial^2}{\partial W^2} W(1-W)^2 \right\} P(L; W) \quad (10.185)$$

с коэффициентом диффузии для мелкомасштабных флуктуаций неоднородностей среды (10.184).

Как упоминалось выше, в рассматриваемой двухслойной задаче существует параметр δ , малость которого можно использовать для упрощения анализа задачи. Пренебрегаем в уравнении для плотностей вероятностей (10.181) слагаемыми второго порядка по δ , т.е. эффектами вторичного переизлучения волн. В этом приближении величины W_{11} и W_{22} статистически независимы и их плотности вероятностей $P(L, W_{11})$ и $P(L, W_{22})$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{11}) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{11}} [-D_1(1-W_{11})^2 + 2\delta(D_3 + D_4)W_{11}] + \right. \\ & \left. + D_1 \frac{\partial^2}{\partial W_{11}^2} (1-W_{11})^2 W_{11} \right\} P(L, W_{11}), \\ \frac{\partial}{\partial L} P(L, W_{22}) = & \left\{ \frac{\partial}{\partial W_{22}} [-D_2(1-W_{22})^2 + 2\delta(D_3 + D_4)W_{22}] + \right. \\ & \left. + D_2 \frac{\partial^2}{\partial W_{22}^2} (1-W_{22})^2 W_{22} \right\} P(L, W_{22}), \quad (10.186) \end{aligned}$$

которые отличаются от уравнения (10.185) для однослойной модели наличием члена

$$2\delta(D_3 + D_4) \frac{\partial}{\partial W} [W P(L, W)].$$

Это означает, что процесс генерации λ - или k -волны падающей k - или λ -волной статистически эквивалентен включению «затухания» в исходную стохастическую задачу для падающих волн U_{11} , U_{22} (т.е. замене в уравнениях для этих волн $\varepsilon(x) \rightarrow \varepsilon(x) + i\delta(D_3 + D_4)$). При этом для полупространства ($L_0 \rightarrow -\infty$) существуют «стационарные» (не зависящие от L) решения

уравнений (10.186) вида (10.37)

$$P(W_{11}) = \frac{2\gamma_1}{(1 - W_{11})^2} e^{-\frac{2\gamma_1 W_{11}}{1 - W_{11}}}, \quad P(W_{22}) = \frac{2\gamma_2}{(1 - W_{22})^2} e^{-\frac{2\gamma_2 W_{22}}{1 - W_{22}}}, \quad (10.187)$$

где параметры

$$\gamma_1 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_1}, \quad \gamma_2 = \delta \frac{D_3 + D_4}{D_2} \quad (10.188)$$

определяют относительную роль такого «затухания» (т. е. генерации вторичных волн) по сравнению с непосредственной диффузией этих волн (т. е. многократным переотражением этих волн на неоднородностях среды). Для мелкомасштабных неоднородностей среды параметры «затухания»

$$\gamma_1 = 2\lambda \frac{H_2}{H_1}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{\lambda} \frac{H_1}{H_2}, \quad (10.189)$$

определяются только относительными толщинами слоев (для фиксированной длины λ -волны) и не зависят от статистических характеристик неоднородностей. При этом имеет место равенство $\gamma_1 \gamma_2 = 4$, т. е. малость одного из параметров γ по сравнению с единицей означает большое значение для другого параметра.

Распределения вероятностей (10.187) позволяют вычислить статистические характеристики коэффициентов отражения для падающих волн. В частности, при $\gamma_i \ll 1$ имеем

$$\langle W_{11} \rangle \approx 1 - 2\gamma_1 \ln(1/\gamma_1), \quad \langle W_{22} \rangle \approx 1 - 2\gamma_2 \ln(1/\gamma_2). \quad (10.190)$$

В обратных предельных случаях $\gamma_i \gg 1$ получаем соответственно

$$\langle W_{11} \rangle \approx \frac{1}{2\gamma_1}, \quad \langle W_{22} \rangle \approx \frac{1}{2\gamma_2}. \quad (10.191)$$

Из сказанного выше ясно, что для достаточно большой области (L_0, L) (или предельного случая полупространства $L_0 \rightarrow -\infty$) величины $|T_{11}|^2$ и $|T_{22}|^2$ равны нулю с вероятностью единица, т. е. падающие λ - и k -волны локализованы, и их локализационные длины определяются либо коэффициентами диффузии, если диффузия действует существенно сильнее, чем «затухание», либо «затуханием» — в противоположном случае. Так, если $\gamma_1 \ll 1$ ($\gamma_2 \gg 1$), то

$$l_{\text{loc}}^{(1)} = \frac{1}{D_1} = \left(\frac{\lambda H_0}{H_1} \right)^2 l_{\text{loc}}, \quad l_{\text{loc}}^{(2)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{\text{loc}},$$

где $l_{\text{loc}} = 1/D$ — локализационная длина в однослойной задаче. В случае выполнения обратного неравенства $\gamma_2 \ll 1$ ($\gamma_1 \gg 1$) имеем

$$l_{\text{loc}}^{(1)} = \frac{1}{2\delta(D_3 + D_4)} = \frac{\lambda H_0}{4H_1 H_2} l_{\text{loc}}, \quad l_{\text{loc}}^{(2)} = \frac{1}{D_2} = \left(\frac{H_0}{H_2} \right)^2 l_{\text{loc}}.$$

Нахождение статистики W_{12} — существенно более сложная задача, так как она обусловлена корреляцией W_{12} с W_{11}, W_{22} .

Чтобы оценить средние значения коэффициентов прохождения возбуждаемых волн, воспользуемся равенствами (10.177), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} 1 - \langle W_{11} \rangle - \delta \langle W_{12} \rangle &= \delta \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle, \\ 1 - \langle W_{22} \rangle - \delta \langle W_{12} \rangle &= \delta \langle |T_{21}|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (10.192)$$

Из уравнения Фоккера–Планка (10.181) видно, что для комбинаций $T_1 = 1 - W_{11} - \delta W_{12}$ и $T_2 = 1 - W_{22} - \delta W_{12}$, определяющих коэффициенты прохождения возбуждаемых волн, для полупространства, в отличие от однослойной среды, стационарные решения вида $P(T_i) = \delta(T_i)$ отсутствуют. Это означает отсутствие локализации для генерируемых волн [21].

Поскольку уравнение (10.181) симметрично по индексам 1 и 2, среднее значение $\langle W_{12} \rangle$ также должно быть симметрично по этим индексам и, следовательно, с точностью до симметричных частей порядок величин $\langle |T_{ij}|^2 \rangle$, по крайней мере, должен определяться порядком несимметричных частей равенств (10.190).

Так, для асимптотического случая $\gamma_1 \ll 1$ ($\gamma_2 \gg 1$) равенства (10.192), в силу (10.190) и (10.191), принимают вид

$$\begin{aligned} 2\gamma_1 \ln(1/\gamma_1) &= \delta \langle W_{12} \rangle + \delta \langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle, \\ 1 - \frac{1}{2\gamma_2} &= \delta \langle W_{12} \rangle + \delta \langle |T_{12}|^2 \rangle, \end{aligned}$$

т. е.

$$\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle \sim \frac{2}{\delta} \gamma_1 \ln(1/\gamma_1), \quad \langle |T_{12}|^2 \rangle \sim \frac{1}{\delta}. \quad (10.193)$$

Аналогичным образом для противоположного асимптотического случая $\gamma_2 \ll 1$ ($\gamma_1 \gg 1$) получаем оценку

$$\langle |\tilde{T}_{21}|^2 \rangle \sim \frac{1}{\delta}, \quad \langle |T_{12}|^2 \rangle \sim \frac{2}{\delta} \gamma_2 \ln(1/\gamma_2). \quad (10.194)$$

Возвращаясь к первоначальной постановке задачи об источниках, расположенных в верхнем и нижнем слоях среды (на границе области существования неоднородностей $x_0 = L$), находим, что коэффициенты прохождения для волн, генерируемых источниками как в верхнем, так и нижнем слоях среды, отличны от нуля во всей среде, т. е. локализация волн не осуществляется. Конкретные же их значения определяются как отношением толщин слоев, так и параметром λ .

Замечание 10.1. Локализация волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии подстилающей поверхности.

Неоднородности формы дна, так же как и β -эффект, играют важную роль в распространении крупномасштабных низкочастотных колебаний в атмосфере Земли и океане (волны Россби). Эффект влияния топографии на распространение таких волн зависит, в основном, от соотношения между

длиной волны l и горизонтальным масштабом топографических неоднородностей l_h [207]. В практически важном случае $l \gg l_h$ такие неоднородности топографии могут поддерживать распространение крупномасштабных волн даже в отсутствие β -эффекта, что можно использовать для лабораторного моделирования процессов генерации и распространения волн Россби [28, 75].

Имеется много исследований, в которых неоднородности топографии рассматривались на классах периодических или квазипериодических функций, а также суперпозиции фурье-мод (для двухслойной модели среды см., например, [74]). В действительности, неоднородности топографии в высшей степени нерегулярны и, по сути дела, могут рассматриваться как конкретные реализации из большого ансамбля случайных полей с заданными статистическими характеристиками. Это позволяет использовать для анализа таких движений, и, в частности, распространения волн Россби в отсутствие зонального потока, аппарат теории случайных процессов и полей [152, 209, 223], что существенно упрощает математический анализ. Однако учитывая, что в реальности отсутствует ансамбль и исследователи имеют дело все-таки с отдельными реализациями, окончательные выводы необходимо формулировать в виде, пригодном для анализа реальных ситуаций.

Крупномасштабные низкочастотные движения в двухслойной среде (атмосфере, океане) переменной глубины в рамках квазигеострофической модели описываются линеаризованными уравнениями (1.93) гл. 1, которые для функций $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ вида

$$\psi_1(x, y) = \psi_1(y)e^{-i(\omega t + \kappa x)}, \quad \psi_2(x, y) = \psi_2(y)e^{-i(\omega t + \kappa x)},$$

соответствующего распространяющейся на запад волне, при $\kappa > 0$, $\omega > 0$, принимают вид системы уравнений (10.167) с параметрами

$$k^2 = \kappa \left(\frac{\beta}{\omega} - \kappa \right), \quad \varepsilon(y) = \frac{\kappa f_0}{H_2 \omega k^2} \frac{d}{dy} h(y).$$

Величина k^2 (при условии $k^2 > 0$) соответствует квадрату y -компоненты волнового вектора распространяющейся баротропной моды волны Россби с фиксированными κ и ω . Особенностью такой задачи является то, что в эту систему входит не сама топография, а ее пространственная производная.

Следовательно, результаты рассмотренного выше анализа волн в двухслойной среде позволяют изучить и задачу о локализации волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии подстилающей поверхности [22, 45, 164]. ♦

Глава 11

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

При распространении волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многократного рассеяния вперед флуктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием. Начиная с некоторого расстояния становятся непригодными расчеты волнового поля по теории возмущений в той или иной ее форме (область сильных флуктуаций). Сильные флуктуации интенсивности волнового поля могут возникать при распространении радиоволн через ионосферу, солнечную корону или межзвездную среду, при просвечивании атмосферы планет во время покрытия ими естественных или искусственных источников излучения и в ряде других случаев.

Общее состояние теории распространения волн в случайно-неоднородных средах приведено в монографиях и обзорных работах [32, 40, 75, 77, 108, 132, 155, 176, 190]. Ниже мы, следуя [40, 54, 78, 155], рассмотрим описание процесса распространения волн в случайно-неоднородных средах в рамках параболического уравнения квазиоптики на основе приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды и обсудим условия применимости такого подхода.

При этом целесообразно разбить рассматриваемый материал на две части. В первой части рассмотрение ведется на основе изучения статистических свойств исходного стохастического уравнения в частных производных, описывающего процесс распространения волны, а во второй части изучаются статистические свойства решения этого стохастического уравнения, выписанного в явном виде (в виде континуального интеграла).

11.8. Метод стохастического уравнения

11.8.1. Исходные стохастические уравнения и некоторые их следствия. Распространение монохроматической волны в среде с крупномасштабными неоднородностями будем описывать комплексным скалярным параболическим уравнением (1.82)

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x, \mathbf{R}), \quad (11.1)$$

где через функцию $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ обозначена флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости или показателя преломления (отклонение от единицы), ось x выбрана в направлении первоначального распространения волны, а через $\mathbf{R}$ обозначены координаты в поперечной плоскости. Начальным

условием к уравнению (11.1) является условие

$$u(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (11.2)$$

Так как уравнение (11.1) является уравнением первого порядка по x с начальным условием (11.2) при $x = 0$, то для этого уравнения выполняется условие причинности по x , (координата x играет роль времени), т. е. имеет место соотношение

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0 \quad \text{при} \quad x' < 0, x' > x. \quad (11.3)$$

Для вариационной производной при $x = x'$ получаем стандартным путем равенство

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x - 0, \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x, \mathbf{R}). \quad (11.4)$$

В общем случае величина $\delta u(x, \mathbf{R}) / \delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $0 \leq x' < x$ может быть выражена через функцию Грина уравнения (11.1), связывающую $u(x, \mathbf{R})$ и $u(x', \mathbf{R}')$ при $0 \leq x' < x$:

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}'), \quad (11.5)$$

и, в частности,

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' G(x, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}') u_0(\mathbf{R}'),$$

при помощи соотношения

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = \frac{ik}{2} G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}').$$

Функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ удовлетворяет при этом интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') + \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' g(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') G(x'', \mathbf{R}''; x', \mathbf{R}'), \quad (11.6)$$

где функция

$$g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = e^{\frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \frac{k}{2\pi i(x-x')} e^{\frac{ik(\mathbf{R}-\mathbf{R}')^2}{2(x-x')}} \quad (11.7)$$

при $x > x'$ представляет собой функцию Грина для уравнения (11.1) в отсутствие неоднородностей. При $x \rightarrow x'$ формула (11.6) переходит в формулу

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')|_{x \rightarrow x'} = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')|_{x \rightarrow x'} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Отметим, что функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ описывает поле сферической волны, распространяющейся из точки $(x', \mathbf{R}')$.

Интегральное уравнение (11.6) можно записать в эквивалентной форме в виде функционального уравнения в вариационных производных:

$$\frac{\delta G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')}{\delta \varepsilon(\xi, \mathbf{R}_1)} = i \frac{k}{2} G(x, \mathbf{R}; \xi, \mathbf{R}_1) G(\xi, \mathbf{R}_1; x', \mathbf{R}'), \quad (11.8)$$

с функциональным «начальным» условием

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')|_{\varepsilon=0} = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}').$$

Функция Грина $G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$, помимо уравнения (11.6), удовлетворяет также уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') + \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' G(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') g(x'', \mathbf{R}''; x', \mathbf{R}'). \quad (11.9)$$

В этом легко можно убедиться, сравнивая итерационные ряды по $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для уравнений (11.6) и (11.9).

Выполним комплексное сопряжение в уравнении (11.9) и переставим точки $(x, \mathbf{R})$ и $(x', \mathbf{R}')$ (имея в виду, что, по-прежнему, $x > x'$). Учитывая тождество

$$g^*(x', \mathbf{R}'; x, \mathbf{R}) = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}'),$$

получаем уравнение

$$G^*(x', \mathbf{R}'; x, \mathbf{R}) = g(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') + \frac{ik}{2} \int_{x'}^x dx'' \int d\mathbf{R}'' g(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') \varepsilon(x'', \mathbf{R}'') G^*(x', \mathbf{R}'; x'', \mathbf{R}''),$$

сравнение которого с уравнением (11.6) дает равенство

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = G^*(x', \mathbf{R}'; x, \mathbf{R}) \quad (x > x'), \quad (11.10)$$

выражающее теорему взаимности для рассматриваемой задачи (в приближении параболического уравнения). При этом функция $G^*(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')$ описывает сферическую волну (распространяющуюся в отрицательном направлении по оси x) источник которой находится в точке $(x', \mathbf{R}')$.

Уравнения (11.6), (11.9) можно записать, очевидно, также в виде дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') &= \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}'), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}'} \right) G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') &= -\frac{ik}{2} \varepsilon(x', \mathbf{R}') G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') \end{aligned} \quad (11.11)$$

с начальным условием

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}')|_{x \longleftrightarrow x'} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

При этом, как легко видеть, функция Грина удовлетворяет условиям ортогональности

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{R} G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') G^*(x, \mathbf{R}; x'', \mathbf{R}'') &= \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}''), \\ \int d\mathbf{R}' G(x_1, \mathbf{R}_1; x', \mathbf{R}') G^*(x_2, \mathbf{R}_2; x', \mathbf{R}') &= \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \end{aligned} \quad (11.12)$$

Следствием этих условий является равенство

$$\int d\mathbf{R} u_1(x, \mathbf{R}) u_2^*(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} u_1^0(\mathbf{R}) u_2^{0*}(\mathbf{R}), \quad (11.13)$$

где $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — решения уравнения (11.1) с начальными условиями $u_1^0(\mathbf{R})$, $u_2^0(\mathbf{R})$. В частном случае, когда $u_1^0(\mathbf{R}) = u_2^0(\mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R})$, формула (11.13) выражает сохранение мощности:

$$\int d\mathbf{R} I(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R} I_0(\mathbf{R}) = \text{const} \quad (I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2). \quad (11.14)$$

11.8.2. Приближение дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды. Рассмотрим теперь статистическое описание волнового поля. Будем считать, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является гауссовым однородным и изотропным полем с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle.$$

Как отмечалось выше, поле $u(x, \mathbf{R})$ функционально зависит лишь от предшествующих значений $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Однако может существовать статистическая связь между $u(x, \mathbf{R})$ и последующими значениями $\varepsilon(x_1, \mathbf{R})$ ($x_1 > x$), так как значения $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $x' < x$ коррелированы со значениями $\varepsilon(\xi, \mathbf{R})$ при $\xi > x$. Ясно, что корреляция поля $u(x, \mathbf{R})$ с последующими значениями $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ заметна при $x' - x \sim l_{||}$, где $l_{||}$ — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В то же время характерный радиус корреляции поля $u(x, \mathbf{R})$ по продольному направлению имеет величину порядка x (см., например, [75, 77]). Поэтому в рассматриваемой задаче существует малый параметр $l_{||}/x$, который может быть использован для построения приближенного решения.

В первом приближении можно положить $l_{||}/x \rightarrow 0$. В этом случае значения полей $u(\xi_i, \mathbf{R})$ при $\xi_i < x$ будут не только функционально, но и статистически независимы от значений $\varepsilon(\eta_j, \mathbf{R})$ при $\eta_j > x$. Это эквивалентно аппроксимации корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ дельта функцией в продольном направлении, т. е. замене корреляционной функции на «эффektivную»:

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) = B_\varepsilon^{\text{ef}}(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.15)$$

В рамках этого приближения получим уравнения для моментных функций:

$$M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \left\langle \prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x; \mathbf{R}_p) u^*(x; \mathbf{R}'_q) \right\rangle, \quad (11.16)$$

которые для $m = n$ обычно называются *функциями когерентности* порядка $2n$.

Дифференцируя функцию (11.16) по x и используя уравнение (11.1) и комплексно сопряженное к нему, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) + \\ + i \frac{k}{2} \left\langle \left(\sum_{p=1}^m \varepsilon(x, \mathbf{R}_p) - \sum_{q=1}^n \varepsilon(x, \mathbf{R}'_q) \right) \left[\prod_{p=1}^m \prod_{q=1}^n u(x; \mathbf{R}_p) u^*(x; \mathbf{R}_q) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Для расщепления корреляции в правой части (11.17) воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова, которая в данной задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u(x; \mathbf{R}_p) \rangle &= \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta u(x; \mathbf{R}_p)}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle, \\ \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) u^*(x; \mathbf{R}'_q) \rangle &= \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta u^*(x; \mathbf{R}'_q)}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle. \end{aligned}$$

Для приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды, описываемых эффективной корреляционной функцией (11.15), эти равенства упрощаются и, учитывая равенство (11.12) и комплексно сопряженному к нему, мы приходим к замкнутому уравнению для моментной функции волнового поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \frac{i}{2k} \left(\sum_{p=1}^m \Delta_{\mathbf{R}_p} - \sum_{q=1}^n \Delta_{\mathbf{R}'_q} \right) M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) - \\ - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) M_{mn}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n), \end{aligned} \quad (11.18)$$

где

$$Q(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m; \mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n) = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}'_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\mathbf{R}'_i - \mathbf{R}'_j). \quad (11.19)$$

Также можно получить и уравнение для характеристического функционала случайного поля $u(x, \mathbf{R})$ (см. гл. 4), которое, однако, будет линейным уравнением в вариационных производных.

Выпишем уравнения для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$, функции когерентности второго порядка

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') \rangle, \quad \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}'),$$

и функции когерентности четвертого порядка

$$\Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}'_1) u^*(x, \mathbf{R}'_2) \rangle,$$

вытекающие из (11.18) и (11.19) при $m = 1, n = 0$; $m = n = 1$ и $m = n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle - \frac{k^2}{8} A(0) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle, \quad (11.20) \\ \langle u(0, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}} - \Delta_{\mathbf{R}'}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}') - \frac{k^2}{4} D(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{R}'), \\ \Gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{R}') = u_0(\mathbf{R}) u_0^*(\mathbf{R}'), \quad (11.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = \\ = \frac{i}{2k} (\Delta_{\mathbf{R}_1} + \Delta_{\mathbf{R}_2} - \Delta_{\mathbf{R}'_1} - \Delta_{\mathbf{R}'_2}) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) - \\ - \frac{k^2}{8} Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2), \\ \Gamma_4(0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = u_0(\mathbf{R}_1) u_0(\mathbf{R}_2) u_0^*(\mathbf{R}'_1) u_0^*(\mathbf{R}'_2), \quad (11.22)$$

где введены новые функции

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}),$$

$$Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2) = D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_1) + D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_2) + D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_2) + \\ + D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_1) - D(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) - D(\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}'_1),$$

связанные со структурной функцией случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Уравнение (11.21) для новых переменных

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p}, \quad \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{p}$$

можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = -\frac{k^2}{4} D(\mathbf{p}) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}),$$

$$\Gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) u_0^* \left(\mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right). \quad (11.23)$$

Замечание 11.1. Малоугловое приближение для теории переноса излучения.

Отметим, что уравнение (11.23) соответствует так называемому малоугловому приближению для феноменологической теории переноса излучения. Действительно, если ввести функцию

$$J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}},$$

то для нее получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\mathbf{R}} \right) J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = -\gamma J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) + \int d\mathbf{q}' f(\mathbf{q} - \mathbf{q}') J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}'),$$

$$J(0, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} \Gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}}. \quad (11.24)$$

В этом уравнении $\gamma = k^2 A(0)/4 = \int d\mathbf{q} f(\mathbf{q})$ — коэффициент экстинкции, $f(\mathbf{q}) = \pi k^2 \Phi_\epsilon(0, \mathbf{q})/2$ — индикатриса рассеяния, а

$$\Phi_\epsilon(q_1, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int d\mathbf{R} B_\epsilon(x, \mathbf{R}) e^{-iq_1 x - i\mathbf{q}\mathbf{R}} \quad (11.25)$$

— трехмерная спектральная плотность корреляционной функции поля $\epsilon(x, \mathbf{R})$. Отметим также, что введенная функция $J(x, \mathbf{R}, \mathbf{q})$ связана со средним значением функции Вигнера, определяемой равенством

$$W(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}},$$

где

$$\gamma_2(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = u \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) u^* \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right). \quad \blacklozenge$$

Уравнения (11.20) и (11.23) легко решаются для произвольной функции $D(\mathbf{p})$ и произвольных начальных условий. Так, для среднего волнового поля получаем выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0(x, \mathbf{R}) e^{-\frac{\gamma}{2}x}, \quad (11.26)$$

где $u_0(x, \mathbf{R})$ — решение задачи в отсутствие флуктуаций параметров среды:

$$u_0(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' g(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') u_0(\mathbf{R}'),$$

функция $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве (11.7), а величина $\gamma = k^2 A(0)/4$ — коэффициент экстинкции. Соответственно для функции когерентности второго порядка имеем

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \rho - \mathbf{q} \frac{x}{k} \right) \exp \left\{ i\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\rho - \mathbf{q} \frac{\xi}{k} \right) \right\}, \quad (11.27)$$

где

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \gamma_0(\mathbf{R}, \rho) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Дальнейший анализ задачи зависит от вида начальных условий для уравнения (11.1) и характера флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В практических исследованиях обычно рассматриваются начальные условия трех типов:

- плоская падающая волна, соответствующая $u_0(\mathbf{R}) = u_0$;
- сферическая расходящая волна, соответствующая $u_0(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R})$;
- падающий волновой пучок, распределение поля в начальном сечении которого имеет вид

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} + i\frac{k\mathbf{R}^2}{2F} \right\}, \quad (11.28)$$

где a — эффективная ширина пучка, F — расстояние до центра излучения (если $F = \infty$, то в свободном пространстве пучок коллимированный, если же $F < 0$, то в свободном пространстве пучок сфокусирован на расстоянии $x = |F|$).

Для случая плоской падающей волны, когда

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 = \text{const}, \quad \gamma_0(\mathbf{R}, \rho) = |u_0|^2, \quad \gamma_0(\mathbf{q}, \rho) = |u_0|^2 \delta(\mathbf{q}),$$

выражения (11.26) и (11.27) существенно упрощаются и принимают вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = u_0 e^{-\frac{1}{2}\gamma x}, \quad \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \rho) = |u_0|^2 e^{-\frac{1}{4}k^2 x D(\rho)}, \quad (11.29)$$

не зависящий от эффекта дифракции плоской волны в случайно-неоднородной среде. При этом в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, появляется новый статистический масштаб $\rho_{\text{cог}}$, определяемый из условия

$$\frac{1}{4}k^2 x D(\rho_{\text{cог}}) = 1, \quad (11.30)$$

называемый *радиусом когерентности* для поля $u(x, \mathbf{R})$. Радиус когерентности зависит от длины волны, дистанции, пройденной волной, и статистических параметров среды.

Для волнового пучка (11.28) функция

$$\gamma_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{|u_0|^2 a^2}{4\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{a^2} + \left(\frac{k\mathbf{p}}{F} - \mathbf{q} \right)^2 a^2 \right] \right\}.$$

Для турбулентной атмосферы структурная функция $D(\mathbf{R})$ описывается законом Колмогорова–Обузова (см., например, [40, 75, 77, 155]):

$$D(\mathbf{R}) = N C_\epsilon^2 R^{5/3} \quad (R_{\min} \ll R \ll R_{\max}),$$

где численная постоянная $N = 1,46$, а C_ϵ^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды, и в этом случае для средней интенсивности в пучке

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_2(x, \mathbf{R}, 0)$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \\ = \frac{2|u_0|^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \int_0^\infty dt J_0 \left(\frac{2kaRt}{xg(x)} \right) \exp \left\{ -t^2 - \frac{3\pi N}{32} C_\epsilon^2 k^2 x \left(\frac{2a}{g(x)} \right)^{5/3} t^{5/3} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$g(x) = \sqrt{1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{F} \right)^2},$$

а $J_0(t)$ — функция Бесселя. Эта формула неоднократно проверялась экспериментально для условий турбулентной атмосферы, и было получено хорошее совпадение экспериментальных данных с этой теоретической записью.

Уравнение (11.22) для функции когерентности четвертого порядка уже нельзя решить в аналитическом виде, и для ее анализа требуются либо численные либо приближенные методы. Эта функция описывает флуктуации интенсивности и, в частности, для совпадающих поперечных координат — ее дисперсию.

Для плоской падающей волны введением новых поперечных координат

$$\tilde{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{R}'_1 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_2, \quad \tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}'_1,$$

уравнение (11.22) может быть упрощено (тильду не пишем)

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{i}{k} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_1 \partial \mathbf{R}_2} \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) - \frac{k^2}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \Gamma_4(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \quad (11.31)$$

где

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2).$$

Асимптотика решения для этого уравнения будет приведена в следующем разделе.

Аналогичным образом можно исследовать и задачу о распространении волновых пучков в случайно-неоднородных средах при наличии средней стратификации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, т. е. рассматривая динамическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} u(x, \mathbf{R}) + \frac{ik}{2} [\varepsilon_0(\mathbf{R}) + \varepsilon(x, \mathbf{R})] u(x, \mathbf{R}). \quad (11.32)$$

Так, для распространения пучка (11.28) в параболическом волноводе, когда

$$\varepsilon_0(\mathbf{R}) = -\alpha^2 \mathbf{R}^2,$$

для функции когерентности второго порядка легко получить выражение [40, 155]

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = & \frac{e^{-i\alpha \mathbf{R} \mathbf{p} \tan(\alpha x)}}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \times \\ & \times \exp \left\{ i \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{\cos(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{p} - \frac{1}{\alpha k} \frac{\sin[\alpha(x-\xi)]}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

При $\alpha = 0$ эта формула переходит, естественно, в формулу (11.27). Полагая теперь в (11.33) $\mathbf{p} = 0$, получаем выражение для средней интенсивности:

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = & \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, -\frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \times \\ & \times \exp \left\{ i \frac{1}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{1}{\alpha k} \frac{\sin(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (11.34)$$

а полагая в (11.34) $\mathbf{R} = 0$, получаем изменение средней интенсивности вдоль оси волновода:

$$\begin{aligned} \langle I(x, 0) \rangle = & \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} \int d\mathbf{q} \gamma_0 \left(\mathbf{q}, -\frac{\mathbf{q}}{\alpha k} \tan(\alpha x) \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\frac{1}{\alpha k} \frac{\sin(\alpha \xi)}{\cos(\alpha x)} \mathbf{q} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Замечание 11.2. Локализация волн в стохастическом параболическом волноводе.

Рассмотрим теперь распространение волнового пучка

$$u_0(\mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} \right\}, \quad (11.36)$$

где параметр a описывает ширину пучка, в случайном параболическом волноводе [40, 155, 160].

Будем предполагать, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ теперь имеет структуру

$$\varepsilon(x, \mathbf{R}) = -[\alpha^2 - z(x)] \mathbf{R}^2, \quad (11.37)$$

где параметр α — детерминированный, а функцию $z(x)$ будем считать случайной.

В случае отсутствия флуктуаций параметров среды волновое поле описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} [\Delta_{\mathbf{R}} - \alpha^2 k^2 \mathbf{R}^2] u_0(x, \mathbf{R}). \quad (11.38)$$

Решение уравнения (11.38) можно представить в виде

$$u_0(x, \mathbf{R}) = f(x, \mathbf{R}) \tilde{u}(x, \mathbf{R}), \quad (11.39)$$

где функции

$$\begin{aligned} f(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{\cos(\alpha x)} \exp \left\{ -i \frac{\alpha k^2}{2} \mathbf{R}^2 \tan(\alpha x) \right\}, \\ \tilde{u}(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} u_0(\mathbf{q}) \exp \left\{ -i \frac{\mathbf{q}^2}{2k\alpha} \tan(\alpha x) + i \frac{\mathbf{q}\mathbf{R}}{\cos(\alpha x)} \right\}, \\ u_0(\mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} u_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad u_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Отметим, что функция $f(x, \mathbf{R})$ описывает распространение плоской волны и волновое поле в этом в этом случае является периодической функцией с периодом $L = 2\pi/\alpha$. При этом в точках $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2\alpha}$ функция $f(x, \mathbf{R})$ обращается в бесконечность, что соответствует фокусировке плоской волны. Волновое же поле $u_0(x, \mathbf{R})$ в общем случае в бесконечность не обращается.

Для волнового пучка (11.36) волновое поле имеет структуру

$$\begin{aligned} u_0(x, \mathbf{R}) &= \frac{u_0}{\cos(\alpha x) \left(1 + \frac{i}{a^2 k \alpha} \tan(\alpha x) \right)} \times \\ &\times \exp \left\{ i \alpha k \tan(\alpha x) + \frac{1}{a^2 \cos^2(\alpha x) \left(1 + \frac{i}{a^2 k \alpha} \tan(\alpha x) \right)} \right\}, \end{aligned} \quad (11.41)$$

а интенсивность волнового поля принимает вид

$$I_0(x, \mathbf{R}) = |u_0(x, \mathbf{R})|^2 = \frac{|u_0|^2}{g_\alpha^2(x)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{g_\alpha^2(x)} \right\}, \quad (11.42)$$

где

$$g_\alpha^2(x) = \cos^2(\alpha x) + \frac{1}{k^2 \alpha^2 a^4} \sin^2(\alpha x).$$

Если волновой пучок (11.36) согласован с неоднородным волноводом, т. е.

$$k\alpha a^2 = 1, \quad (11.43)$$

то волновое поле $u_0(x, \mathbf{R})$ принимает вид

$$u_0(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} - i\alpha x \right\},$$

и, следовательно, его амплитуда не меняется в процессе распространения, т. е. является собственной модой задачи.

При наличии флуктуаций диэлектрической проницаемости решение уравнения (11.1) с функцией $\epsilon(x, \mathbf{R})$ вида (11.37) можно представить в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} A(x) + B(x) \right\},$$

где комплексные функции $A(x)$ и $B(x)$ описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} A(x) &= -\frac{i}{ka^2} [A^2(x) - \alpha^2 k^2 a^4] - ika^2 z(x), \quad \dot{A}(0) = 1, \\ \frac{d}{dx} B(x) &= -\frac{i}{ka^2} A(x), \quad B(0) = 0. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Следовательно,

$$B(x) = -\frac{i}{ka^2} \int_0^x d\xi A(\xi),$$

и интенсивность волнового поля описывается выражением

$$I(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{2a^2} [A(x) + A^*(x)] - \frac{i}{ka^2} \int_0^x d\xi [A(\xi) - A^*(\xi)] \right\}. \quad (11.45)$$

Мнимую часть функции $A(x)$ в (11.45) можно исключить, используя первое уравнение (11.44), а именно:

$$-\frac{i}{ka^2} [A(x) - A^*(x)] = \frac{d}{dx} \ln [A(x) + A^*(x)].$$

В результате получаем следующее выражение для интенсивности волнового поля (считаем, для простоты что $|u_0|^2 = 1$):

$$I(x, \mathbf{R}) = I(x, 0) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{a^2} I(x, 0) \right\}, \quad (11.46)$$

где

$$I(x, 0) = \frac{1}{2} [A(x) + A^*(x)] \quad (11.47)$$

— интенсивность пучка в неоднородном волноводе на его оси. Следовательно, статистические характеристики интенсивности волнового поля

описываются статистическими характеристиками решения единственного уравнения (11.44) для функции $A(x)$, которое аналогично уравнению для коэффициента отражения волны в одномерной слоисто-неоднородной среде, рассмотренной в предыдущей главе.

Представим функцию $A(x)$ в виде

$$A(x) = k\alpha a^2 \frac{1 + \psi(x)e^{-2i\alpha x}}{1 - \psi(x)e^{-2i\alpha x}}.$$

Тогда функция $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению, вытекающему из (11.44):

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = -\frac{i}{2\alpha k} (e^{i\alpha x} - \psi(x)e^{-i\alpha x})^2 z(x), \quad \psi(0) = \frac{1 - k\alpha a^2}{1 + k\alpha a^2}.$$

Введем теперь амплитуду и фазу для функции $\psi(x)$ по формуле

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{w(x)-1}{w(x)+1}} e^{i\{\varphi(x)-2\alpha x\}}, \quad w \geq 1.$$

Тогда для функций $w(x)$ и $\varphi(x)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} w(x) &= -\frac{1}{\alpha k} z(x) \sqrt{w^2(x) - 1} \sin(\varphi(x) - 2\alpha x), \\ w(0) &= \frac{1}{2\alpha k a^2} (1 + k^2 \alpha^2 a^4); \\ \frac{d}{dx} \varphi(x) &= \frac{1}{\alpha k} z(x) \left(1 - \frac{w}{\sqrt{w^2(x) - 1}} \cos(\varphi(x) - 2\alpha x) \right), \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned} \tag{11.48}$$

Следовательно, выражение для интенсивности волнового поля на оси волновода (11.46) принимает вид

$$I(x, 0) = \frac{\alpha k a^2}{w(x) + \sqrt{w^2(x) - 1} \cos(\varphi(x) - 2\alpha x)}. \tag{11.49}$$

Как и ранее, будем считать случайную функцию $z(x)$ гауссовой дельта-коррелированной функцией с параметрами

$$\langle z(x) \rangle = 0; \quad \langle z(x) z(x') \rangle = 2\sigma^2 l_0 \delta(x - x').$$

Кроме того, считаем что дисперсия флуктуаций $z(x)$ достаточно мала ($\sigma^2 \ll 1$). Тогда статистические характеристики функций $w(x)$ и $\varphi(x)$ медленно меняются на масштабе порядка $1/\alpha$ и для определения статистических характеристик интенсивности волны (11.49) можно использовать дополнительное усреднение по быстрым осцилляциям, что соответствует статистической независимости функций $w(x)$ и $\varphi(x)$ и равномерному распределению вероятностей для фазы $\varphi(x)$. В результате для плотности

вероятностей функции $w(x)$

$$P(x, w) = \langle \delta(w(x) - w) \rangle$$

получаем уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x, w) = D \frac{\partial}{\partial w} (w^2 - 1) \frac{\partial}{\partial w} P(x, w), \quad P(0, w) = \delta(w(0) - w) \quad (11.50)$$

с коэффициентом диффузии $D = \sigma^2 l_0 / 2\alpha^2 k^2$.

В рамках указанных предположений вычислим моменты интенсивности на оси волновода $\langle I^n(x, 0) \rangle$. Усреднение проведем в два этапа. На первом этапе усредняем по быстрым осцилляциям фазы. В результате получаем выражение

$$\left\langle \left(\frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle_\varphi = P_{n-1}(w). \quad (11.51)$$

Здесь через $P_n(w)$ обозначен полином Лежандра порядка n . На втором этапе усредним (11.51) по распределению w (11.50). Для этого умножим уравнение (11.50) на $P_{n-1}(w)$ и проинтегрируем по всем $w \geq 1$. Интегрируя по частям и используя равенство

$$\frac{d}{dw} (w^2 - 1) \frac{d}{dw} P_{n-1}(w) = n(n-1) P_{n-1}(w),$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle P_{n-1}(w) \rangle = D n(n-1) \langle P_{n-1}(w) \rangle,$$

решение которого имеет вид

$$\langle P_n(w) \rangle = P_{n-1}(w_0) e^{Dn(n-1)x},$$

и, следовательно,

$$\left\langle \left(\frac{I}{\alpha k a^2} \right)^n \right\rangle = P_{n-1}(w_0) e^{Dn(n-1)x}. \quad (11.52)$$

Для согласованного с волноводом волнового пучка (11.43) $w_0 = 1$ и формула (11.52) переходит в

$$\langle I^n(x, 0) \rangle = e^{Dn(n-1)x}, \quad (11.53)$$

что означает, что величина $I(x, 0)$ распределена согласно логнормальному закону. Среднее значение интенсивности на оси волновода сохраняется, а все высшие моменты экспоненциально растут с проходимой волной дистанции. Однако при этом, как мы видели ранее, типичная реализация процесса $I(x, 0)$ экспоненциально спадает вглубь среды:

$$I^*(x, 0) = e^{-Dx},$$

и в конкретных реализациях излучение должно уходить с оси волновода в поперечном направлении, что соответствует свойству динамической локализации в x -направлении. Типичной реализацией интенсивности в поперечном направлении будет, согласно формуле (11.46), выражение

$$I^*(x, \mathbf{R}) = I^*(x, 0) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{R}^2}{a^2} I^*(x, 0) \right\}.$$

Таким образом, в стохастическом цилиндрическом волноводе, в котором

$$\varepsilon(x, \mathbf{R}) = -\alpha \mathbf{R}^2 + z(x) \mathbf{R}^2,$$

в отличие от решения (11.35), соответствующего однородным и изотропным флуктуациям поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, затухающим с ростом проходимой волной дистанции x , средняя интенсивность сохраняется, а ее высшие моменты экспоненциально растут с ростом дистанции x . Сравнение этих результатов с (11.35) показывает, что упомянутые цилиндрические флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ оказывают существенно больший эффект на прохождение волнового пучка, чем однородные и изотропные флуктуации. ♦

11.8.3. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций параметров среды и диффузионное приближение для волнового поля.

Метод последовательных приближений. Остановимся теперь на условиях применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Может быть построена теория последовательных приближений, уточняющая функциональную зависимость статистических характеристик волны от поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Рассмотренное выше приближение дельта-коррелированных флуктуаций является первым шагом в этой теории; следующие приближения учитывают конечность продольного радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и приводят к системе замкнутых интегро-дифференциальных уравнений для моментов волнового поля.

Указанный метод последовательных приближений строится следующим образом. Вначале выписывается бесконечная зацепляющаяся система уравнений для какой-либо моментной функции. При этом используется предположение о гауссовском распределении для $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и формула Фурутцу–Новикова, однако предположение о дельта-коррелированности $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ не используется. В каждое из этих уравнений входит корреляционная функция $B_\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Если использовать условие дельта-коррелированности (11.15) в первом из этих уравнений, то мы приходим к описанному выше приближению дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а остальные уравнения системы оказываются ненужными. Если же в первых $(n-1)$ уравнениях оставить точное значение $B_\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а в n -м уравнении использовать аппроксимацию (11.15), то мы приходим к замкнутой системе из n уравнений для интересующей нас моментной функции. Проиллюстрируем этот метод на примере уравнения для среднего поля.

Усредним уравнение (11.1) по ансамблю реализаций поля и для нахождения корреляции используем формулу Фурутцу–Новикова. В результате

получим уравнение для среднего поля в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle = i\frac{k}{2}\int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_{\varepsilon}(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}') \left\langle \frac{\delta u(x; \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle. \quad (11.54)$$

Уравнение (11.54) не является замкнутым, так как содержит новую неизвестную функцию $\langle \delta u(x; \mathbf{R}) \delta \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle$. Чтобы получить уравнение для нее, проварируем уравнение (11.1) по полю $\varepsilon(x', \mathbf{R}')$ при $x' < x$ и усредним. Получаем уравнение с начальным условием

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right) \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle &= i\frac{k}{2} \left\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle_{x=x'+0} &= i\frac{k}{2} \delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle. \end{aligned} \quad (11.55)$$

Для вычисления величины $\left\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle$ снова воспользуемся формулой Фурутцу–Новикова. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right) \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle &= \\ &= i\frac{k}{2} \int_0^x dx'' \int d\mathbf{R}'' B_{\varepsilon}(x-x'', \mathbf{R}-\mathbf{R}'') \left\langle \frac{\delta^2 u(x; \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}') \delta \varepsilon(x'', \mathbf{R}'')} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle_{x=x'+0} &= i\frac{k}{2} \delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}') \langle u(x', \mathbf{R}') \rangle. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Уравнение (11.56) снова оказывается незамкнутым, так как содержит вторую вариационную производную от поля $u(x, \mathbf{R})$. Теперь мы можем написать уравнение для второй вариационной производной и т. д. Таким образом, уравнения (11.54), (11.56) и т. д. образуют зацепляющуюся бесконечную систему уравнений. Начальные условия к появляющимся новым уравнениям содержат функции, входящие в уравнения предыдущего шага. Замкнутое уравнение в приближении дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, как указывалось выше, получается при замене в уравнениях (11.54) корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ на эффективную, так как в этом случае вариационная производная при совпадающих значениях $x = x'$ выражается через $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$.

Замену корреляционной функции на эффективную можно произвести не в первом уравнении цепочки (11.60), а в одном из последующих. Если

это сделать, например, в уравнении (11.56), то получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\left\langle\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \epsilon(x', \mathbf{R}')}\right\rangle = -i\frac{k^2}{4}A(0)\left\langle\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \epsilon(x', \mathbf{R}')}\right\rangle, \quad (11.57)$$

$$\left\langle\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \epsilon(x', \mathbf{R}')}\right\rangle_{x=x'+0} = i\frac{k}{2}\delta(\mathbf{R}-\mathbf{R}')\langle u(x', \mathbf{R})\rangle.$$

Уравнения (11.54) и (11.56) образуют замкнутую систему уравнений второго приближения.

Аналогичным образом можно получить замкнутую систему уравнений следующих приближений, а также и системы уравнений для других моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$.

Решение уравнения (11.57) имеет вид

$$\left\langle\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \epsilon(x', \mathbf{R}')}\right\rangle = i\frac{k}{2}e^{-\frac{k^2}{8}A(0)(x-x')}g(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}')\langle u(x', \mathbf{R})\rangle, \quad (11.58)$$

где $g(x, \mathbf{R})$ — функция Грина свободного пространства (11.7). Подставляя (11.58) в уравнение (11.54), получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle = -\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' e^{-\frac{k^2}{8}A(0)(x-x')} \times$$

$$\times B_{\epsilon}(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}')g(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}')\langle u(x', \mathbf{R}')\rangle. \quad (11.59)$$

Уравнение (11.59) можно решить с помощью преобразования Лапласа по x и преобразования Фурье по $\mathbf{R}$. Мы, однако, не будем этого делать, а выясним лишь, при каких условиях решение уравнения (11.59) переходит в решение уравнения, соответствующего приближению дельта-коррелированного случайного поля $\epsilon(x, \mathbf{R})$.

Функция Грина $g(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}')$ в (11.59) представляет собой «размазанную» δ -функцию на масштабе $a = \sqrt{(x-x')/l_{\parallel}}$ по переменной $(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$. В свою очередь, величина $(x-x')$ ограничивается величиной порядка продольного масштаба неоднородностей $l_{\parallel}$ за счет множителя $B_{\epsilon}(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}')$, откуда получаем, что $a \sim (l_{\parallel}/k)^{1/2}$. Если масштаб a мал по сравнению с $l_{\perp}$ — масштабом функции $B_{\epsilon}(x-x', \mathbf{R}-\mathbf{R}')$ по переменной $(\mathbf{R}-\mathbf{R}')$, т. е. $l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2$, то функцию Грина можно заменить на δ -функцию. Итак, если $l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2$, то уравнение (11.59) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}\Delta_{\mathbf{R}}\right)\langle u(x, \mathbf{R})\rangle = -\frac{k^2}{4}\int_0^x dx' e^{-\frac{k^2}{8}A(0)x'} B_{\epsilon}(x', 0)\langle u(x-x', \mathbf{R})\rangle. \quad (11.60)$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$\frac{k^2}{8} A(0) l_{\parallel} \ll 1,$$

т.е. ослабление среднего поля на масштабах порядка $l_{\parallel}$ мало, то можно пренебречь экспоненциальным множителем и сдвигом аргумента функции $\langle u(x - x', \mathbf{R}) \rangle$, т.е. положить $\langle u(x - x', \mathbf{R}) \rangle \approx \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$. В результате уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' B_{\varepsilon}(x', 0) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle.$$

Если, наконец, $x \gg l_{\parallel}$, то верхний предел интегрирования можно устремить к бесконечности, и мы приходим к уравнению (11.20).

Таким образом, приближение дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для среднего поля $\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle$ справедливо при выполнении следующих трех условий:

$$l_{\parallel} \ll k l_{\perp}^2, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1, \quad x \gg l_{\parallel} \quad (A(0) \sim \sigma_{\varepsilon}^2 l_{\parallel}). \quad (11.61)$$

Аналогичным образом можно получить и исследовать уравнения второго приближения для функции когерентности $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p})$. Условия применимости приближения дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для функции $\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p})$ имеют вид (например, для плоской падающей волны)

$$\rho \ll x, \quad kx |\nabla A(\mathbf{p})| \ll 1. \quad (11.62)$$

Важно подчеркнуть, что условия (11.61) и (11.62) практически независимы, так как накладывают ограничения на различные параметры. В частности, может оказаться, что условия (11.62) выполняются в том случае, когда условие $\sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1$ нарушается. Отметим также, что условия (11.62) накладывают ограничения только на локальные характеристики флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и поэтому могут быть записаны и для турбулентной среды, в то время как величина $\gamma = k^2 A(0)/4$ определяется наиболее крупномасштабными флуктуациями поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Диффузионное приближение для волнового поля. Рассмотрим теперь применение диффузионного приближения для описания статистических свойств решения параболического уравнения (11.1). Отметим, что это приближение для рассматриваемой задачи близко по «своему духу» к *локальному методу Чернова* [82], оно более физично, чем формальное приближение дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, учитывает конечность продольного радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и описывает распространение волн в среде с вытянутыми вдоль направления распространения неоднородностями [13, 76].

Как и ранее, будем предполагать, что поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — однородное гауссово случайное поле с корреляционной функцией $B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R})$.

Рассмотрим сперва уравнение для среднего поля. Усредним уравнение (11.1) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Тогда, с учетом формулы Фурутцу–Новикова, получаем точное уравнение (11.54).

В диффузионном приближении вариационная производная описывается детерминированным уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = 0 \quad (11.63)$$

со стохастическим начальным условием

$$\left. \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right|_{x=x'+0} = i \frac{k}{2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R}), \quad (11.64)$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} = i \frac{k}{2} e^{\frac{i(x-x')}{2k}} \Delta_{\mathbf{R}} [\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') u(x', \mathbf{R})]. \quad (11.65)$$

Отметим, что действие оператора, стоящего в правой части (11.65), на дельта-функцию, как указывалось ранее, определяет функцию Грина для уравнения (11.1) в случае отсутствия флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ (поле точечного источника в свободном пространстве).

В рамках диффузионного приближения и волновое поле $u(x', \mathbf{R})$ связано с полем $u(x', \mathbf{R})$ с помощью равенства

$$u(x', \mathbf{R}) = e^{-\frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} u(x, \mathbf{R}),$$

которое есть следствие решения задачи (11.1) в случае отсутствия флуктуаций. Следовательно,

$$\left\langle \frac{\delta u(x, \mathbf{R})}{\delta \varepsilon(x', \mathbf{R}')} \right\rangle = i \frac{k}{2} e^{\frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') e^{-\frac{i(x-x')}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \right].$$

Подставляя это выражение в правую часть (11.54), получаем замкнутое операторное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int d\mathbf{R}' B_{\varepsilon}(x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') e^{\frac{i x'}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \left[\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') e^{-\frac{i x'}{2k} \Delta_{\mathbf{R}}} \langle u(x, \mathbf{R}) \rangle \right] \end{aligned} \quad (11.66)$$

с начальным условием $\langle u(0, \mathbf{R}) \rangle = u_0(\mathbf{R})$.

Введем теперь двумерную спектральную плотность неоднородностей и и фурье-образ волнового поля $u(x, \mathbf{R})$ по поперечным координатам:

$$B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} B_{\varepsilon}(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}};$$

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \tilde{u}(x, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \tilde{u}(x, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Тогда для функции $\tilde{u}(x, \mathbf{q})$ вместо (11.66) получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\mathbf{q}^2}{2k} \right) \langle \tilde{u}(x, \mathbf{q}) \rangle = -\frac{k^2}{2} D(x, \mathbf{q}) \langle \tilde{u}(x, \mathbf{q}) \rangle, \quad \langle \tilde{u}(0, \mathbf{q}) \rangle = \tilde{u}_0(\mathbf{q}),$$

где

$$\tilde{u}_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}$$

и

$$D(x, \mathbf{q}) = \int_0^x d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}) \right\}.$$

Следовательно,

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}'^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^x dx' D(x', \mathbf{q}) \right\}. \quad (11.67)$$

При расстояниях, проходимых волной $x \gg l_{\parallel}$, где $l_{\parallel}$ — продольный радиус корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, выражение (11.67) упрощается и принимает вид

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{R}' u_0(\mathbf{R}') \exp \left\{ i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') - i\frac{\mathbf{q}'^2 x}{2} - \frac{k^2}{2} x D(\mathbf{q}) \right\}, \quad (11.68)$$

где

$$D(\mathbf{q}) = \int_0^\infty d\xi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon^{(2)}(\xi, \mathbf{q}') \exp \left\{ -\frac{i\xi}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}) \right\}. \quad (11.69)$$

Если теперь ввести трехмерную спектральную функцию поля $\varepsilon(x, \mathbf{R}) - \Phi_\varepsilon(q_1, \mathbf{q})$ (11.25), то выражение для коэффициента $D(\mathbf{q})$ упрощается и принимает вид

$$D(\mathbf{q}) = \pi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon \left(\frac{1}{2k} (\mathbf{q}'^2 - 2\mathbf{q}'\mathbf{q}), \mathbf{q}' \right). \quad (11.70)$$

Отметим, что дельта-коррелированному приближению соответствует коэффициент $D(\mathbf{q})$ вида

$$D(\mathbf{q}) = \pi \int d\mathbf{q}' \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}').$$

Для плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = 1$, и, следовательно, из равенства (11.68) получаем (не зависящее от $\mathbf{R}$) выражение

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = e^{-\frac{1}{2}k^2 x D(0)}, \quad D(0) = \pi \int d\mathbf{q}' \Phi_\epsilon \left(\frac{\mathbf{q}'^2}{2k}, \mathbf{q}' \right), \quad (11.71)$$

условием применимости которого является условие

$$\frac{k^2}{2} D(0) l_{\parallel} \ll 1.$$

Аналогичным образом можно вывести и уравнения для моментных функций поля $u(x, \mathbf{R})$ более высокого порядка. Рассмотрим динамическое уравнение для функции

$$\gamma_2(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = u \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) u^* \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right),$$

вытекающее из исходного параболического уравнения (11.1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) &= i \frac{k}{2} \left[\varepsilon \left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) - \varepsilon \left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) \right] \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}), \\ \gamma_2(0, \mathbf{R}, \mathbf{p}) &= u_0 \left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) u_0^* \left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right). \end{aligned} \quad (11.72)$$

Усредняя уравнение (11.72) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ и используя формулу Фурутцу–Новикова для расщепления корреляции, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) &= \\ &= i \frac{k}{2} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{R}_1 \left[B_\varepsilon \left(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) - B_\varepsilon \left(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) \right] \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)} \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Для среднего значения вариационной производной, стоящей в правой части (11.73), в диффузионном приближении имеем выражение

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta}{\delta \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)} \gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) \right\rangle &= \\ &= i \frac{k}{2} e^{\frac{i}{k}(x-x_1)\nabla_{\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{p}}} \left\{ \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) - \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{p} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\frac{i}{k}(x-x_1)\nabla_{\mathbf{R}}\nabla_{\mathbf{p}}} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) \right\}, \end{aligned} \quad (11.74)$$

подставляя которое в (11.73), получаем замкнутое операторное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int \mathbf{R}_1 \left[B_{\epsilon} \left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) - B_{\epsilon} \left(x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) \right] \times \\ \times e^{\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}}} \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) - \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) \right] e^{-\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}}} \Gamma_2(x - x_1, \mathbf{R}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (11.75)$$

Далее будем действовать, как и при выводе уравнения для среднего поля. Выразим корреляционную функцию поля $\epsilon(x, \mathbf{R})$ через ее спектральную плотность по поперечным координатам. В результате получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int \mathbf{R}_1 \int d\mathbf{q} \Phi_{\epsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1)} \left[e^{\frac{i}{2} \mathbf{q} \mathbf{p}} - e^{-\frac{i}{2} \mathbf{q} \mathbf{p}} \right] \times \\ \times e^{\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}}} \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) - \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{p} \right) \right] e^{-\frac{i}{k} x_1 \nabla_{\mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{p}}} \Gamma_2(x - x_1, \mathbf{R}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (11.76)$$

Далее, введем фурье-образ функции когерентности по переменной: $\mathbf{R}$

$$\Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \int d\mathbf{q} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) e^{i\mathbf{q} \mathbf{R}}, \quad \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \Gamma_2(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{q} \mathbf{R}}.$$

Тогда для функции $\tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{q}_1 \Phi_{\epsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}_1) \times \\ \times \left\{ \cos \left[\frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] - \cos \left[\mathbf{q}_1 \mathbf{p} - \frac{x_1}{2k} \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}) \right] \right\} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (11.77)$$

с начальным условием

$$\tilde{\Gamma}_2(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{\gamma}_2(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

которое уже, в отличие от уравнения для среднего поля, является интегродифференциальным уравнением.

Для дельта-коррелированного приближения уравнение (11.77) переходит в дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{k} \mathbf{q} \nabla_{\mathbf{p}}\right) \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx_1 \int d\mathbf{q}_1 \Phi_{\varepsilon}^{(2)}(x_1, \mathbf{q}_1) \{1 - \cos[\mathbf{q}_1 \mathbf{p}]\} \tilde{\Gamma}_2(x, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}),$$

эквивалентное уравнению (11.23).

Отметим, что как приближение дельта-коррелированного по x поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, так и диффузионное приближение не применимы в случае $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(\mathbf{R})$ или в случае слоистых сред $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = \varepsilon(z)$. В этих случаях случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ имеет формально бесконечный радиус корреляции по оси x .

11.8.4. Амплитудно-фазовые флуктуаций волнового поля (метод плавных возмущений). Рассмотрим теперь статистическое описание амплитудно-фазовых флуктуаций волны.

Введем амплитуду и фазу волнового поля, а также комплексную фазу волны по формуле

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R}) e^{iS(x, \mathbf{R})} = e^{i\varphi(x, \mathbf{R})},$$

где

$$\varphi(x, \mathbf{R}) = \chi(x, \mathbf{R}) + iS(x, \mathbf{R}),$$

$\chi(x, \mathbf{R}) = \ln A(x, \mathbf{R})$ — уровень амплитуды волны, а $S(x, \mathbf{R})$ — флуктуации фазы волны относительно фазы падающей волны kx . Исходя из параболического уравнения (11.1) можно получить для комплексной фазы нелинейное уравнение так называемого *метода плавных возмущений* Рытова: (МПВ)

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R}) + \frac{i}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R})]^2 + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.78)$$

Для случая плоской падающей волны, который и будет рассматриваться в дальнейшем, без ограничения общности можно считать, что $u_0(\mathbf{R}) = 1$ и, следовательно, $\varphi(0, \mathbf{R}) = 0$. Разделяя в уравнении (11.78) действительную и мнимую части, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})] [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0, \quad (11.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 + \frac{1}{2k} [\nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})]^2 = \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.80)$$

С помощью уравнения (11.79) можно получить уравнение для интенсивности волны $I(x, \mathbf{R}) = e^{2\chi(x, \mathbf{R})}$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})] = 0. \quad (11.81)$$

Если функция $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ достаточно мала, то для решения уравнений (11.79) и (11.80) можно построить итерационные ряды по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При этом так называемому первому приближению МПВ соответствуют гауссовы поля $\chi(x, \mathbf{R})$, $S(x, \mathbf{R})$, статистические характеристики которых определяются из статистического усреднения соответствующих итерационных рядов. Так, вторые моменты (в том числе и дисперсии) этих полей определяются из линеаризованной системы уравнений (11.79) и (11.80), т. е. системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \chi_0(x, \mathbf{R}) &= -\frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} S_0(x, \mathbf{R}), \\ \frac{\partial}{\partial x} S_0(x, \mathbf{R}) &= \frac{1}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \chi_0(x, \mathbf{R}) + \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (11.82)$$

а средние значения определяются из непосредственного усреднения уравнений (11.79) и (11.80).

Линейная система уравнений (11.82) может быть решена с помощью преобразования Фурье по поперечной координате. Вводя фурье-образы всех полей, а также фурье-образ случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ по формулам

$$\begin{aligned} \chi_0(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} \chi_{\mathbf{q}}^0(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \chi_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \chi_0(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \\ S_0(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} S_{\mathbf{q}}^0(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad S_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} S_0(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \\ \varepsilon(x, \mathbf{R}) &= \int d\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{q}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} \varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (11.83)$$

получаем решение системы уравнений (11.82) в виде

$$\chi_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \sin \frac{q^2}{2k} (x - \xi), \quad S_{\mathbf{q}}^0(x) = \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon_{\mathbf{q}}(\xi) \cos \frac{q^2}{2k} (x - \xi). \quad (11.84)$$

При вычислении конкретных интегралов, связанных со случайным полем $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, корреляционная и спектральная функции которого описываются формулами (11.15) и (11.25), легко получить и корреляционную функцию случайного гауссового поля $\varepsilon_{\mathbf{q}}(x)$.

В самом деле, для дельта-коррелированного приближения случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ связь между корреляционной и спектральной функциями имеет вид

$$B_{\varepsilon}(x_1 - x_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) = 2\pi \delta(x_1 - x_2) \int d\mathbf{q} \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}. \quad (11.85)$$

Умножая теперь равенство (11.85) на $\frac{1}{(2\pi)^4} e^{-i(\mathbf{q}_1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{q}_2 \mathbf{R}_2)}$ и интегрируя по всем $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$, с учетом определения (11.83), получаем искомое равенство

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi \delta(x_1 - x_2) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_{\varepsilon}(0, \mathbf{q}_1). \quad (11.86)$$

Отметим, что если поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ отлично от нуля только в конечном слое $(0, \Delta x)$, а при $x > \Delta x$ поле $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$, то вместо формулы (11.86) получаем выражение

$$\langle \varepsilon_{\mathbf{q}_1}(x_1) \varepsilon_{\mathbf{q}_2}(x_2) \rangle = 2\pi \delta(x_1 - x_2) \theta(\Delta x - x) \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}_1). \quad (11.87)$$

Если рассмотреть флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, вызываемые турбулентными пульсациями температуры в атмосфере Земли, то в значительном интервале волновых чисел трехмерная спектральная плотность имеет вид

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = AC_\varepsilon^2 q^{-11/3} \quad (q_{\min} \ll q \ll q_{\max}), \quad (11.88)$$

где $A = 0,033$ — численная постоянная, C_ε^2 — структурная характеристика флуктуаций диэлектрической проницаемости, зависящая от внешних параметров среды. В ряде случаев интегралы, описывающие статистические характеристики амплитудно-фазовых флуктуаций волнового поля и содержащие спектральную функцию вида (11.88), расходятся. В этом случае используется феноменологическая спектральная функция вида

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = \Phi_\varepsilon(q) = AC_\varepsilon^2 q^{-11/3} e^{-q^2/\varkappa_m^2}, \quad (11.89)$$

где $\varkappa_m$ — волновое число, соответствующее *микромасштабу турбулентности*.

Статистические свойства амплитудных флуктуаций в рассматриваемом приближении для среды, занимающей конечную часть пространства Δx , описываются дисперсией уровня амплитуды, т. е. параметром

$$\sigma_0^2(x) = \langle \chi_0^2(x, \mathbf{R}) \rangle,$$

для которого, согласно формулам (11.84) и (11.86), имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0^2(x) &= \int \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \langle \chi_{\mathbf{q}_1}^0(x) \chi_{\mathbf{q}_2}^0(x) \rangle e^{i(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)\mathbf{R}} = \\ &= \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 \Delta x} \left[\sin \frac{q^2 x}{k} - \sin \frac{q^2 (x - \Delta x)}{k} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.90)$$

Чтобы найти среднее значение уровня амплитуды, воспользуемся уравнением (11.81). Для плоской падающей волны, усредняя это уравнение по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем равенство

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = 1,$$

которое можно переписать в виде

$$\langle I(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle e^{2\chi_0(x, \mathbf{R})} \rangle = e^{2\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle + 2\sigma_0^2(x)} = 1.$$

Следовательно, в первом приближении МПВ

$$\langle \chi_0(x, \mathbf{R}) \rangle = -\sigma_0^2(x).$$

Условиями применимости первого приближения МПВ является, очевидно, условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Что касается дисперсии интенсивности волны, которая называется *индексом мерцания*, то для нее в первом приближении МПВ имеем

$$\beta_0^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = \langle e^{4\chi_0(x, \mathbf{R})} \rangle - 1 \approx 4\sigma_0^2(x). \quad (11.91)$$

Следовательно, одноточечное распределение вероятностей поля $\chi(x, \mathbf{R})$ в этом приближении имеет вид

$$P(x; \chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{2}{\beta_0(x)} \left(\chi + \frac{1}{4}\beta_0(x) \right)^2 \right\}.$$

Таким образом, интенсивность волнового поля является логарифмически-нормальным случайным полем и его одноточечная плотность вероятностей определяется выражением

$$P(x; I) = \frac{1}{I\sqrt{2\pi\beta_0(x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta_0(x)} \ln^2 \left(I e^{\frac{1}{4}\beta_0(x)} \right) \right\}. \quad (11.92)$$

При статистическом анализе обычно рассматриваются два предельных асимптотических случая.

Первый случай соответствует предположению $\Delta x \ll x$ и называется *случайным фазовым экраном*. В этом случае волна после прохождения тонкого слоя флуктуирующей среды распространяется далее в пустом пространстве. В тонком слое среды имеются только фазовые флуктуации волнового поля, которые в дальнейшем, при распространении в свободном пространстве трансформируются в амплитудные флуктуации в силу нелинейности уравнений (11.79), (11.80).

Второй случай соответствует *непрерывной среде*, т. е. условию $\Delta x = x$.

Рассмотрим эти случаи подробнее для слабых флуктуаций волнового поля.

Случайный фазовый экран ($\Delta x \ll x$). В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается выражением, вытекающим из (11.90):

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\varepsilon(q) \left\{ 1 - \cos \frac{q^2 x}{k} \right\}. \quad (11.93)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ вызваны турбулентными пульсациями среды, то функция $\Phi_\varepsilon(q)$ описывается формулой (11.88) и интеграл (11.90) легко вычисляется. В результате получаем выражение

$$\sigma_0^2(x) = 0,144 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x, \quad (11.94)$$

и, следовательно, индекс мерцания

$$\beta_0^2(x) = 0,563 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{5/6} \Delta x. \quad (11.95)$$

Что касается фазовых флуктуаций, то непосредственный физический интерес представляет величина, описывающая угол прихода волны в точку $(x, \mathbf{R})$:

$$\alpha(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}).$$

Для ее дисперсии, аналогично выводу формулы (11.93), получаем формулу

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 \Delta x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\epsilon(q) \left\{ 1 + \cos \frac{q^2 x}{k} \right\}.$$

Случай непрерывной среды ($\Delta x = x$). В этом случае дисперсия уровня амплитуды описывается формулой

$$\sigma_0^2(x) = \frac{\pi^2 k^2 x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\epsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\}, \quad (11.96)$$

а параметры $\sigma_0^2(x)$ и $\beta_0^2(x)$ для турбулентных пульсаций среды описываются выражениями

$$\sigma_0^2(x) = 0,077 C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}, \quad \beta_0^2(x) = 0,307 C_\epsilon^2 k^{7/6} x^{11/6}. \quad (11.97)$$

Дисперсия угла прихода волны в точку $(x, \mathbf{R})$ в этом случае описывается формулой

$$\langle \alpha^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{\pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q \Phi_\epsilon(q) \left\{ 1 + \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\}. \quad (11.98)$$

Аналогичным образом можно исследовать и дисперсию градиента уровня амплитуды. При этом приходится считать, что спектральная функция $\Phi_\epsilon(q)$ описывается формулой (11.88). При условии, что так называемый *волновой параметр* (см., например, [75]) $D(x) = \kappa_m^2 x / k \gg 1$, для параметра $\sigma_q^2(x) = \langle [\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})]^2 \rangle$ получаем выражение для турбулентной среды, занимающей все пространство:

$$\sigma_q^2(x) = \frac{k^2 \pi^2 x}{2} \int_0^\infty dq q^3 \Phi_\epsilon(q) \left\{ 1 - \frac{k}{q^2 x} \sin \frac{q^2 x}{k} \right\} = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \quad (11.99)$$

где введен естественный масштаб длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящий от параметров среды, — размер первой зоны Френеля $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тень при дифракции на краю непрозрачного экрана (см., например, [75]).

Условием справедливости первого приближения МПВ для амплитудных флуктуаций в общем случае является условие

$$\sigma_0^2(x) \ll 1.$$

Область флуктуаций амплитуды, в которой выполняется это неравенство, называется *областью слабых флуктуаций*. В области, где $\sigma_0^2(x) \geq 1$ (которая называется *областью сильных флуктуаций*), необходимо изучать полную систему уравнений (11.79), (11.80).

На рис. 4.26 приведена экспериментальная зависимость дисперсии уровня амплитуды $\beta(x) = 2\sigma_\chi(x)$ от параметра $\beta_0(x) = 2\sigma_0(x)$ при распространении света в турбулентной атмосфере [26]. Решение, соответствующее первому приближению МПВ, показано на этом рисунке штриховой пря-

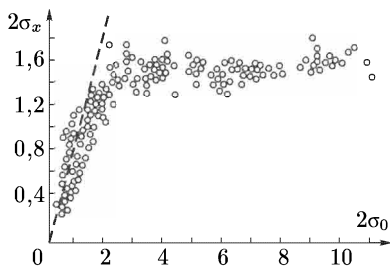


Рис. 4.26. Экспериментальные значения дисперсии уровня амплитуды в зависимости от параметра σ_0 (штриховая линия соответствует расчету по первому приближению МПВ)

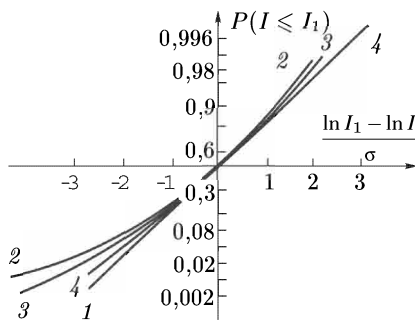


Рис. 4.27. Распределение вероятностей для интенсивности света в турбулентной среде. Линия 1 соответствует $\sigma_0^2 < 1$; 2 — $\sigma_0^2 = 1/4$; 3 — $\sigma_0^2 > 4$; 4 — $\sigma_0^2 \geq 25$

мой. Область слабых флуктуаций интенсивности, как видно из рисунка, ограничивается значениями параметра $\beta_0(x) \leq 1$. Из этого рисунка также видно, что для больших значений параметра $\beta_0(x) = 2\sigma_0(x)$ величина $\beta(x) = 2\sigma_\chi(x)$ выходит на постоянное значение. На рис. 4.27 изображено распределение вероятностей для уровня амплитуды. Из этого рисунка видно, что в области слабых и очень сильных флуктуаций распределение вероятностей близко к гауссову, отклонения от которого наблюдаются только в области $\sigma_0^2(x) \sim 1$.

Что касается флуктуаций угла прихода волны в точку наблюдения, связанных с флуктуациями величины $\alpha(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} S(x, \mathbf{R})/k$, то они хорошо описываются первым приближением МПВ даже для больших значений параметра $\sigma_0(x)$.

Отметим, что приближение дельта-коррелированного случайного поля $\epsilon(x, \mathbf{R})$ для уравнения (11.1) практически не накладывает ограничения на амплитудные флуктуации и, следовательно, уравнения для моментов поля $u(x, \mathbf{R})$, полученные выше, справедливы и в области сильных флуктуаций

амплитуды. Анализ статистических характеристик интенсивности волнового поля в этом случае будет проведен в дальнейшем.

11.9. Геометрическая оптика в случайно-неоднородной среде

11.9.1. Диффузия лучей в случайно-неоднородной среде (лагранжево описание). В приближении геометрической оптики характеристические кривые (лучи) описываются системой уравнений (1.85)

$$\frac{d}{dx}\mathbf{R}(x) = \mathbf{p}(x), \quad \frac{d}{dx}\mathbf{p}(x) = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{R}}\varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.100)$$

При этом интенсивность волнового поля и матрица вторых производных фазы волны вдоль этих лучей описываются уравнениями (1.86)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}I(x) &= -I(x)u_{ii}(x), \\ \frac{d}{dx}u_{ij}(x) + u_{ik}(x)u_{kj}(x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j}\varepsilon(x, \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (11.101)$$

Уравнения (11.100) и (11.101) являются исходными для описания структуры волнового поля в рамках геометрической оптики в малоугловом приближении, и при этом уравнения (11.100) совпадают по внешнему виду с уравнениями для частицы в поле случайных внешних сил в отсутствие трения и соответствуют гамильтоновой системе уравнений.

Для однородного изотропного гауссового дельта-коррелированного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0, \quad B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = A(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\delta(x - x')$$

одноточечная совместная плотность вероятностей

$$P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R})\delta(\mathbf{p}(x) - \mathbf{p}) \rangle$$

описывается, очевидно, уравнением Фоккера–Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D \Delta_{\mathbf{R}} P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (11.102)$$

где коэффициент диффузии

$$D = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0} = \pi^2 \int_0^\infty d\kappa \kappa^3 \Phi_\varepsilon(0, \kappa),$$

а через функцию

$$\Phi_\varepsilon(q, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty dx \int d\mathbf{R} B_\varepsilon(x, \mathbf{R}) e^{-i(qx + \kappa \mathbf{R})},$$

$$A(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\mathbf{x} \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}}$$

обозначена трехмерная спектральная плотность случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$.

Уравнение (11.102) легко решается, и его решение, соответствующее начальному условию $P(0; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \delta(\mathbf{R})\delta(\mathbf{p})$, является гауссовой плотностью вероятностей с параметрами

$$\begin{aligned} \langle R_j(x) R_k(x) \rangle &= \frac{2}{3} D \delta_{jk} x^3, \quad \langle R_j(x) p_k(x) \rangle = D \delta_{jk} x^2, \\ \langle p_j(x) p_k(x) \rangle &= 2D \delta_{jk} x. \end{aligned} \quad (11.103)$$

На основе уравнений (11.100) легко получить и продольную корреляционную функцию смещений луча. Умножим (11.100) на $\mathbf{R}(x')$, где $x' < x$, и усредним по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x') \rangle &= \langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle, \\ \frac{d}{dx} \langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{R}(x') \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle \end{aligned} \quad (11.104)$$

с заданными начальными условиями при $x = x'$:

$$\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x') \rangle_{x=x'} = \langle \mathbf{R}^2(x') \rangle, \quad \langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle_{x=x'} = \langle \mathbf{p}(x') \mathbf{R}(x') \rangle. \quad (11.105)$$

Так как для модели дельта-коррелированных по x неоднородностей величина $\mathbf{R}(x')$ не коррелирована с «последующими» значениями $\nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R})$, т. е.

$$\langle \mathbf{R}(x') \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \rangle = 0 \quad \text{при} \quad x' < x,$$

то

$$\langle \mathbf{p}(x) \mathbf{R}(x') \rangle = \langle \mathbf{p}(x') \mathbf{R}(x') \rangle = 2D(x')^2.$$

Подставляя это значение в первое из уравнений (11.104) и решая его, получаем

$$\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x') \rangle = 2D(x')^2 \left(x - \frac{1}{3} x' \right).$$

Рассмотрим теперь задачу о совместной диффузии двух лучей, которая описывается системой уравнений

$$\frac{d}{dx} \mathbf{R}_v(x) = \mathbf{p}_v(x), \quad \frac{d}{dx} \mathbf{p}_v(x) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}_v} \varepsilon(x, \mathbf{R}_v), \quad (11.106)$$

где индексом $v = 1, 2$ обозначены номера соответствующих лучей. Для совместной плотности вероятностей

$$\begin{aligned} P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2) &= \\ &= \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}_2) \delta(\mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_2) \rangle \end{aligned}$$

получаем уравнение Фоккера-Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_1} + \mathbf{p}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_2} \right) P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}) = \\ = \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) P(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}), \quad (11.107)$$

где оператор

$$\hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) = \frac{\pi}{4} \int d\boldsymbol{\kappa} \Phi_\varepsilon(0, \boldsymbol{\kappa}) \left[\left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right)^2 + \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \cos[\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)] \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \right) \left(\boldsymbol{\kappa} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \right].$$

Для плотности вероятностей относительной диффузии двух лучей, т. е. для функции

$$P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \langle \delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}) \rangle,$$

получим уравнение, умножая уравнение (11.102) на

$$\delta(\mathbf{R}_1(x) - \mathbf{R}_2(x) - \mathbf{R}) \delta(\mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p})$$

и интегрируя по $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. В результате приходим к уравнению Фоккера-Планка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}). \quad (11.108)$$

Здесь через матрицу $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ обозначена величина

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\boldsymbol{\kappa} [1 - \cos(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{R})] \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \boldsymbol{\kappa}).$$

Если обозначить через l_0 корреляционный радиус случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, то при условии $R \gg l_0$ имеем

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = 2D\delta_{\alpha\beta},$$

т. е. их относительная диффузия осуществляется с удвоенным коэффициентом диффузии по отношению к диффузии отдельного луча, что соответствует статистической независимости каждого луча. В этом случае совместная плотность вероятностей для относительной диффузии является гауссовой.

В общем случае уравнение (11.108) не допускает решения в аналитическом виде. Ясно лишь, что при переменном коэффициенте диффузии решение его не является гауссовым распределением.

Асимптотический случай $R \ll l_0$ допускает достаточно полный анализ. В этом случае функцию $\{1 - \cos(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{R})\}$ можно разложить в ряд Тейлора

и диффузионная матрица принимает вид

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \pi R_i R_j \int d\kappa \kappa_i \kappa_j \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Ясно, что в статистически изотропном случае

$$\int d\kappa \kappa_i \kappa_j \kappa_\alpha \kappa_\beta \Phi_\varepsilon(0, \kappa) = B (\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}).$$

Свертывая это равенство по парам индексов i, j и α, β , найдем, что

$$B = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\kappa \kappa^5 \Phi_\varepsilon(0, \kappa),$$

и, следовательно,

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \pi B (\mathbf{R}^2 \delta_{\alpha\beta} + 2R_\alpha R_\beta). \quad (11.109)$$

Заметим, что величина B определяет в приближении геометрической оптики амплитудные флуктуации. Это не является неожиданным, ибо амплитудные флуктуации связаны с изменениями сечения лучевой трубки, т. е. с относительными смещениями лучей.

Коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R})$ можно использовать в форме (11.109) лишь в том случае, когда средний квадрат расстояния между лучами мал по сравнению с l_0^2 . Из уравнения (11.108) с коэффициентами (11.109), т. е. из уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \pi B (\mathbf{R}^2 \delta_{\alpha\beta} + 2R_\alpha R_\beta) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} P(x; \mathbf{R}, \mathbf{p}),$$

следуют уравнения для моментных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle &= 8\pi B \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle, & \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}^2(x) \rangle &= 2 \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle, \\ \frac{d}{dx} \langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle &= \langle \mathbf{p}^2(x) \rangle, \end{aligned} \quad (11.110)$$

которые легко решить. Из решения этой системы следует, что если существует такой интервал значений x , на котором $\alpha x \gg 1$ ($\alpha = (16\pi B)^{1/3}$), но все еще $R_0^2 e^{\alpha x} \ll l_0^2$ (он всегда существует для достаточно малых значений R_0 — начальных расстояний между лучами), то в этой области происходит экспоненциальный рост величин $\langle \mathbf{R}^2(x) \rangle$, $\langle \mathbf{R}(x) \mathbf{p}(x) \rangle$ и $\langle \mathbf{p}^2(x) \rangle$. Заметим, что начало этой области экспоненциального роста, определяемое условием $\alpha x \sim 1$, совпадает с началом области сильных флуктуаций интенсивности, так как $\alpha x \sim \sigma_I^{2/3} = \langle [\ln(I/I_0)]^2 \rangle^{1/3}$.

Остановимся теперь на условиях применимости уравнения Фоккера–Планка. Уравнение Фоккера–Планка для диффузии лучей было получено

в малоугловом приближении. Отсюда, согласно (11.103), вытекает условие

$$\langle \mathbf{p}^2(x) \rangle \ll 1, \quad \text{или} \quad Dx \ll 1. \quad (11.111)$$

Что касается поправок, связанных с конечностью продольного радиуса корреляции, то очевидно, что требование их малости приводит к условию $x \gg l_0$ и к тому же условию (11.111).

11.9.2. Возникновение каустик в случайно-неоднородной среде.

Как мы видели выше, в рамках параболического уравнения квазиоптики, статистические характеристики, определяющие относительную диффузию лучей, экспоненциально растут с ростом дистанции, проходимой этими лучами, т.е. имеет место статистическое разбегание лучей. В тоже самое время с вероятностью, равной единице, в среде образуются каустики на конечных расстояниях [159, 178, 224, 227]. Эта задача близка к задаче о статистическом описании явления переброса и соответствует рассмотрению статистических характеристик кривизны фазового поля и интенсивности волны в случайно-неоднородной среде, описываемых стохастическими уравнениями (11.101).

В двумерном случае задача упрощается и кривизна фазовой поверхности в плоскости (x, y) описывается уравнением

$$\frac{d}{dx} u(x) = -u^2(x) + f(x), \quad u(0) = u_0, \quad (11.112)$$

где $f(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon(x, y(x))$, а поперечное смещение луча $y(x)$ описывается системой уравнений (11.100).

Для однородных изотропных гауссовых дельта-коррелированных флуктуаций поля $\varepsilon(x, y)$ с параметрами

$$\langle \varepsilon(x, y) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(x, y) \varepsilon(x', y') \rangle = \delta(x - x') A(y - y')$$

одноточечная плотность вероятностей кривизны статистически не зависит от смещения луча и описывается уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x; u) = \frac{\partial}{\partial u} u^2(x; u) P(x; u) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(x; u), \quad P(0; u) = \delta(u - u_0), \quad (11.113)$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \frac{1}{4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} A(0) = \pi \int_0^\infty d\kappa \kappa^4 \Phi_\varepsilon(0, \kappa),$$

где $\Phi_\varepsilon(0, \kappa)$ — двумерная спектральная функция случайного поля $\varepsilon(x, y)$.

Уравнение (11.113) рассматривалось в гл. 6. Было показано, что случайный процесс $u(x)$ является разрывным и обращается в $-\infty$ на конечном расстоянии $x(u_0)$, которое определяется начальным условием u_0 , что означает фокусировку волны в случайно-неоднородной среде. Среднее значение

$\langle x(u_0) \rangle$ в этом случае описывается выражением

$$\langle x(u_0) \rangle = \frac{2}{D} \int_{-\infty}^{u_0} d\xi \int_{\xi}^{\infty} d\eta \exp \left\{ \frac{2}{3D} (\xi^3 - \eta^3) \right\} \quad (11.114)$$

и, следовательно, [178, 224, 227]

$$D^{1/3} \langle x(\infty) \rangle \approx 6,27, \quad D^{1/3} \langle x(0) \rangle = \frac{2}{3} D^{1/3} \langle x(\infty) \rangle \approx 4,18.$$

Величина $\langle x(0) \rangle$ описывает среднее расстояние возникновения фокуса для плоской падающей волны, а величина $\langle x(\infty) \rangle$ описывает среднее расстояние между двумя последовательными фокусами. Учитывая, что дисперсия уровня амплитуды в первом приближении метода плавных возмущений (см., например, [40, 75, 77, 155]) $\sigma^2(x) \cong Dx^3$, видно, что случайная фокусировка осуществляется в области сильных флуктуаций интенсивности, где $\sigma^2(x) \geq 1$.

Дальнейший анализ уравнения (11.113) существенно зависит от краевых условий по переменной u . Так, если рассматривать функцию $u(x)$ разрывной и определенной для всех значений x таким образом, что ее обращение в $-\infty$ в точке $x \rightarrow x_0 - 0$ немедленно сопровождается значением ∞ в точке $x \rightarrow x_0 + 0$, то краевым условием для уравнения (11.113) является условие

$$J(x; u)|_{u \rightarrow \infty} = J(x; u)|_{u \rightarrow -\infty},$$

где плотность потока вероятностей

$$J(x; u) = u^2 P(x; u) + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x; u).$$

Этот случай рассматривался в гл.6 (раздел 6.4.4) и уравнение (11.113) имеет «стационарную», не зависящую от x , предельную плотность вероятностей, соответствующую постоянству плотности потока вероятностей:

$$P(u) = J \int_{-\infty}^u d\xi \exp \left\{ \frac{2}{3D} (\xi^3 - u^3) \right\}, \quad (11.115)$$

где

$$J = \frac{1}{\langle x(\infty) \rangle}.$$

При больших значениях u из (11.113) следует асимптотическая формула

$$P(u) \approx \frac{1}{\langle x(\infty) \rangle u^2},$$

что означает формирование стационарной статистики поведением функции $u(x)$ в окрестности ее разрывов:

$$u(x) = \frac{1}{x - x_k}.$$

Интенсивность волнового поля в окрестности разрывов имеет структуру, вытекающую из (11.101):

$$I(x) = \frac{x_k}{|x - x_k|}.$$

В этом случае асимптотика плотности вероятностей величины $z(x) = I^2(x)$ для достаточно больших значений x и z описывается выражением

$$\begin{aligned} P(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(\frac{x_k^2}{(x - x_k)^2} - z \right) \right\rangle = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \delta \left(\frac{(x - x_k)^2}{x_k^2} - \frac{1}{z} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{x}{z\sqrt{z}} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \delta(x - x_k) \rangle = \frac{x}{z\sqrt{z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \frac{\Phi_0(k)}{1 + \Phi(k)}, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(k)$ — характеристическая функция расстояния первого возникновения каустики, а $\Phi(k)$ — характеристическая функция расстояния между двумя соседними каустиками. Следовательно, при $x \gg \langle x(\infty) \rangle$, распределение плотности вероятностей для величины z имеет вид

$$P(x, z) = \frac{x}{\langle x(\infty) \rangle z\sqrt{z}},$$

и асимптотическое поведение плотности вероятностей для больших значений интенсивности волны I имеет вид

$$P(x, I) = \frac{2x}{\langle x(\infty) \rangle I^2},$$

зависящий от расстояния, пройденного волной, и затухающий при больших значениях I степенным образом.

Как отмечалось ранее, другой тип краевых условий возникает в предположении, что кривая $u(x)$ обрывается при достижении $-\infty$ в точке $x = x_0$. Это соответствует условиям

$$J(x, u) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad u \rightarrow \pm\infty,$$

и вероятность возникновения фокуса на расстоянии x определяется выражением

$$P(x > x_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} du P(x, u).$$

Следовательно, ее плотность вероятностей связана с плотностью потока вероятностей с помощью равенства [178, 224, 227]

$$p(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(x > x_0) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} du P(x, u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} J(x, u).$$

Чтобы получить асимптотическую зависимость $p(x)$ от малого параметра ($D \rightarrow 0$), воспользуемся стандартной процедурой анализа параболического уравнения с малым параметром при старшей производной.

Представим решение уравнения (11.113) в виде

$$P(x, u) = C(D) \exp \left\{ -\frac{1}{D} A(x, u) - B(x, u) \right\}. \quad (11.116)$$

Подставляя (11.116) в уравнение (11.113) и выделяя члены порядка D_0 и D^{-1} , получаем уравнения в частных производных для функций $A(x, u)$ и $B(x, u)$. Постоянная $C(D)$ определяется из условия, что при $x \rightarrow 0$ плотность вероятностей, например для плоской падающей волны, должна иметь вид

$$P(x, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D x}} \exp \left\{ -\frac{u^2}{2D x} \right\}.$$

Это дает оценку $C(D) \cong 1/\sqrt{D}$. Подставляя (11.116) в выражение для плотности вероятностей образования фокуса, получаем

$$p(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} P(x, u) \left[u^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} A(x, u) \right]. \quad (11.117)$$

Отметим, что представление $P(x, u)$ в виде (11.116) позволяет получить немедленно структурную зависимость $p(x)$ от x из размерных соображений [159]. В самом деле величины u , D и $P(x, u)$ имеют размерности соответственно

$$[u] = x^{-1}, \quad [D] = x^{-3}, \quad [P(x, u)] = x,$$

и, следовательно, исходя из (11.116) и (11.117) получаем зависимость

$$p(x) = C_1 D^{-1/2} x^{-5/2} e^{-C_2/D x^3},$$

и задача состоит в вычислении постоянных C_1 и C_2 . Эти постоянные были вычислены в работе [178], и окончательная формула имеет вид

$$p(x) = 3\alpha^2 (2\pi D)^{-1/2} x^{-5/2} e^{-\alpha^4/6 D x^3}, \quad (11.118)$$

где параметр $\alpha = 2,85$.

Условием применимости выражения (11.118) является условие $D x^3 \ll 1$. Однако, как было показано в упомянутой работе [178] путем численного моделирования, выражение (11.118) также достаточно хорошо описывает плотность вероятностей и при $D x^3 \sim 1$.

Обсудим теперь трехмерную задачу. В этом случае матрица, описывающая кривизну фазового фронта:

$$u_{ij}(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} S(x, \mathbf{R}),$$

удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{d}{dx} u(x) + u^2(x) = F(x, \mathbf{R}(x)), \quad (11.119)$$

где матричная функция

$$F_{ij}(x, \mathbf{R}(x)) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}), \quad i, j = 1, 2.$$

Симметричная матрица $u_{ij}(x)$ может быть приведена к диагональному виду с помощью преобразования поворота:

$$D^T(x) u(x) D(x) = \Lambda(x), \quad (11.120)$$

где матрицы $\Lambda(x)$ и $D(x)$ ($D^T(x)$ — транспонированная матрица) имеют структуру

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix}, \quad D(x) = \begin{pmatrix} \cos \theta(x) & -\sin \theta(x) \\ \sin \theta(x) & \cos \theta(x) \end{pmatrix},$$

а величины $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ описывают главные кривизны фазового фронта $S(x, \mathbf{R}) = \text{const.}$

Дифференцируя (11.120) по x и используя динамическое уравнение (11.119), получаем стохастическое матричное уравнение для $\Lambda(x)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Lambda(x) = -\Lambda^2(x) + \frac{dD^T(x)}{dx} D(x) \Lambda(x) + \\ + \Lambda(x) D^T(x) \frac{dD(x)}{dx} + D^T(x) F(x) D(x), \end{aligned} \quad (11.121)$$

которое эквивалентно системе трех уравнений для ее компонент:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \lambda_1(x) &= -\lambda_1^2(x) + F_{11}(x) \cos^2 \theta(x) + F_{22}(x) \sin^2 \theta(x) + F_{12}(x) \sin 2\theta(x), \\ \frac{d}{dx} \lambda_2(x) &= -\lambda_2^2(x) + F_{22}(x) \cos^2 \theta(x) + F_{11}(x) \sin^2 \theta(x) - F_{12}(x) \sin 2\theta(x), \\ \frac{d}{dx} \theta(x) &= \frac{1}{2} \frac{F_{22}(x) - F_{11}(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)} \sin 2\theta(x) + \frac{F_{12}(x)}{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)} \cos 2\theta(x). \end{aligned} \quad (11.122)$$

В результате приходим к уравнению Фоккера–Планка для совместной плотности вероятностей величин $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ вида [159]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P(x; \lambda_1, \lambda_2) = & \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[\lambda_1^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left[\lambda_2^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \right) P(x; \lambda_1, \lambda_2) + \\ & + D \left(3 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2^2} \right) P(x; \lambda_1, \lambda_2), \quad (11.123) \\ P(0; \lambda_1, \lambda_2) = & \delta(\lambda_1) \delta(\lambda_2), \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{1}{64} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(\mathbf{R}) \Big|_{\mathbf{R}=0} = \frac{\pi^2}{16} \int_0^\infty d\kappa \kappa^5 \Phi_\varepsilon(0, \kappa).$$

Отметим, что этому уравнению Фоккера–Планка статистически эквивалентна стохастическая динамическая система

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \lambda_1(x) = & -\lambda_1^2 + \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + F(x) + \tilde{F}(x), \\ \frac{d}{dx} \lambda_2(x) = & -\lambda_2^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + F(x) - \tilde{F}(x) \end{aligned} \quad (11.124)$$

со случайными дельта-коррелированными функциями $F(x)$ и $\tilde{F}(x)$ и, следовательно, для малых значений x , а именно $Dx^3 \ll 1$, получаем совместную плотность вероятностей для $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ вида

$$P(x; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{32\sqrt{2\pi}(Dx)^3} \exp \left\{ -\frac{1}{32Dx} (3\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2) \right\}. \quad (11.125)$$

Естественно, вероятность возникновения каустик в этой области пространства ($Dx^3 \ll 1$) ничтожно мала. Ее плотность вероятностей описывается равенством, аналогичным равенству для двумерного случая [224]:

$$p(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \nabla_{\lambda} \mathbf{J}(x; \lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad (11.126)$$

где вектор плотности потока вероятностей, определенный из уравнения (11.123), имеет структуру

$$\mathbf{J}(x; \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + 3D \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \\ \lambda_2^2 + \frac{2D}{\lambda_1 - \lambda_2} + 3D \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \end{pmatrix} P(x; \lambda_1, \lambda_2).$$

Равенство (11.126) можно переписать в виде контурного интеграла:

$$p(x) = \oint_C ds \mathbf{J}(x; \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{n}, \quad (11.127)$$

в пределе C (диаметр) $\rightarrow \infty$, где вектор $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе контура C .

Как отмечалось выше, для того чтобы получить асимптотическое решение уравнения (11.123), необходимо построить ряд теории возмущений по параметру D , представляя решение уравнения (11.123) в виде

$$P(x; \lambda_1, \lambda_2) = D^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{D} A(x; \lambda_1, \lambda_2) - B(x; \lambda_1, \lambda_2) \right\}.$$

Отметим, что эта функция $P(x; \lambda_1, \lambda_2)$ должна иметь стационарную точку на контуре C , в которой функция $A(x; \lambda_1, \lambda_2)$ имеет минимальное значение. Это дает дополнительный фактор $D^{1/2}$ при $Dx^3 \rightarrow 0$, и, следовательно, используя соображения размерности, можно получить для плотности вероятностей образования каустик выражение [159]

$$p(x) = \frac{\alpha}{Dx^4} \exp \left\{ -\frac{\beta}{Dx^3} \right\},$$

где α и β — численные постоянные. Этот закон с $\alpha = 2,74$ и $\beta = 0,66$ был получен в работе [224].

11.9.3. Амплитудно-фазовые флуктуации волнового поля (эйлерово описание). Если справедливо приближение геометрической оптики ($k \rightarrow \infty$), рассмотрение амплитудно-фазовых флуктуаций в эйлеровом описании существенно упрощается.

Введем в рассмотрение величину, называемую обычно *эйконалом*

$$\Theta(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{k} S(x, \mathbf{R}),$$

и перейдем к пределу $k \rightarrow \infty$. В этом случае уравнение для величины $\chi(x, \mathbf{R})$ (11.79) и, следовательно, для интенсивности волнового поля (11.81) не меняется, т. е. сохраняет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, \mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}} [I(x, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})] = 0, \quad (11.128)$$

а уравнение (11.80) для фазы волнового поля принимает вид уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(x, \mathbf{R}) + \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 = \frac{1}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.129)$$

При этом для поперечного градиента фазы волны мы получаем замкнутое квазилинейное уравнение

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Theta(x, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \nabla_{\mathbf{R}} \right\} \nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.130)$$

Уравнения (11.128)–(11.130) являются исходными уравнениями для анализа амплитудно-фазовых флуктуаций в приближении геометрической оптики, и при этом уравнение для фазы волны не зависит от амплитуды. Это уравнение является уравнением в частных производных первого порядка и характеристическими уравнениями для него являются лучи, статистическое описание которых было рассмотрено выше. Здесь же мы рассмотрим те следствия, которые можно получить из непосредственного рассмотрения уравнений в частных производных (11.128)–(11.130), т. е. эйлерового описания.

Из уравнений для интенсивности и фазы волны (11.128), (11.129) легко получить, с учетом пространственной однородности всех полей в плоскости $x = \text{const}$, выражение

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle I(x, \mathbf{R}) \Theta(x, \mathbf{R}) \rangle = \left\langle I(x, \mathbf{R}) [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \rangle.$$

С другой стороны, в приближении геометрической оптики имеет место соотношение

$$\frac{1}{k^2} \nabla_{\mathbf{R}_1} \nabla_{\mathbf{R}_2} \Gamma_2(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \Big|_{\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}} = \left\langle I(x, \mathbf{R}) [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \right\rangle. \quad (11.131)$$

Левая часть равенства (11.131) может быть вычислена в приближении дельта-коррелированного случайного поля. В этом случае функция $\Gamma_2(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ для плоской падающей волны описывается формулой (11.29) ($u_0 = 1$), а $\langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) I(x, \mathbf{R}) \rangle = 0$. Следовательно, в этом случае имеют место равенства

$$\begin{aligned} \left\langle I(x, \mathbf{R}) [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \right\rangle &= -\frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) x = \gamma(x), \\ \langle I(x, \mathbf{R}) \Theta(x, \mathbf{R}) \rangle &= -\frac{1}{16} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) x, \end{aligned} \quad (11.132)$$

где

$$\gamma(x) = \pi^2 x \int_0^\infty dq q^3 \Phi_\varepsilon(q) = \left\langle [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta_0(x, \mathbf{R})]^2 \right\rangle$$

— дисперсия угла прихода волны в точку наблюдения в первом приближении МПВ в приближении геометрической оптики.

В приближении геометрической оптики и приближении дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ можно получить также замкнутое уравнение для функции

$$G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = \langle I(x, \mathbf{R}) \delta(\Theta(x, \mathbf{R}) - \Theta) \delta(\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}) \rangle,$$

описывающей корреляции интенсивности с фазой и градиентом фазы волн. Дифференцируя эту функцию по x , используя динамические уравнения

(11.128)–(11.130) и расщепляя корреляции с помощью формулы Фурутцу–Новикова, после несложных преобразований получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}\nabla_{\mathbf{R}} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\frac{\partial}{\partial\Theta}\right)G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = \\ = \frac{1}{4}\left(A(0)\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} - \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{R}}A(0)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{p}^2}\right)G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}). \quad (11.133)$$

Для плоской падающей волны, в силу статистической однородности всех полей в плоскости $x = \text{const}$, $\nabla_{\mathbf{R}}G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = 0$, т. е. функция $G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = G(x; \Theta, \mathbf{p})$ не зависит от $\mathbf{R}$ и уравнение (11.133) упрощается:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2\frac{\partial}{\partial\Theta}\right)G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}) = \frac{1}{4}\left(A(0)\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} - \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{R}}A(0)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{p}^2}\right)G(x, \mathbf{R}; \Theta, \mathbf{p}). \quad (11.134)$$

Это уравнение обладает той особенностью, что для величин

$$\langle I(x, \mathbf{R})\Theta^m(x, \mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}\Theta(x, \mathbf{R})|^n\rangle$$

из него может быть получена замкнутая конечномерная линейная система уравнений первого порядка, решение которой не вызывает особых затруднений. Полученные выше выражения (11.132) являются частным случаем решений такой системы уравнений.

Отметим, что если проинтегрировать уравнение (11.133) по Θ , т. е. исключить фазу волны из рассмотрения, то мы приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p}\nabla_{\mathbf{R}}\right)G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}) = -\frac{1}{8}\Delta_{\mathbf{R}}A(0)\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{p}^2}G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}), \quad (11.135)$$

которое совпадает с уравнением для плотности вероятностей, описывающим диффузию отдельного луча. Это естественно, так как якобиан преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым координатам $j(x) = 1/I(x)$.

Замечание 11.3. *Функция Вигнера и приближение геометрической оптики.*

Ранее мы ввели функцию Вигнера, определенную в виде интеграла:

$$W(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} \, u\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p}\right) u^*\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p}\right) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}},$$

среднее значение которой является преобразованием Фурье от функции когерентности второго порядка. Вводя в эту формулу амплитуду и фазу волнового поля и переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ (в этом пределе следует

разложить все функции по $\mathbf{p}$), получаем выражение

$$\begin{aligned} W(x, \mathbf{R}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} A\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p}\right) A\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left\{i\left[S\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{p}\right) - S\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{p}\right) - \mathbf{p}\mathbf{p}\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} I(x, \mathbf{R}) e^{i\left[\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}\mathbf{p}\right]} = I(x, \mathbf{R}) \delta\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} S(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, функция когерентности второго порядка в геометрикооптическом приближении совпадает с функцией $G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p})$, т. е. если мы теперь определим функцию $F(x, \mathbf{R}; \mathbf{p})$ как преобразование Фурье от функции $G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p})$:

$$F(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{p}},$$

то для нее, с помощью уравнения (11.135), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R} \partial \mathbf{p}}\right) G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}) = \frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) \mathbf{p}^2 G(x, \mathbf{R}; \mathbf{p}),$$

которое совпадает с уравнением для функции когерентности второго порядка (11.23), если в этом уравнении разложить функции $D(\mathbf{p})$ в ряд Тейлора по аргументу $\mathbf{p}$ [7, 40, 155, 200]. ♦

Если же искать уравнение для плотности вероятностей

$$P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}) = \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\Theta(x, \mathbf{R}) - \Theta) \delta(\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R}) - \mathbf{p}) \rangle,$$

параметрически зависящей от пространственной точки $(x, \mathbf{R})$, то получить его в замкнутом виде не удастся. Однако уравнение для плотности вероятностей можно замкнуть, если ее переменные дополнить симметричной матрицей, характеризующей кривизну фазового фронта:

$$u_{ij}(x, \mathbf{R}) = \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \Theta(x, \mathbf{R}),$$

компоненты которой описываются уравнениями

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} + (\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})) \nabla_{\mathbf{R}} \right\} u_{ij}(x, \mathbf{R}) + u_{il}(x, \mathbf{R}) u_{lj}(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \varepsilon(x, \mathbf{R}). \quad (11.136)$$

Это связано с тем, что именно флуктуации кривизны фазового фронта порождают флуктуации интенсивности волны в геометрикооптическом приближении.

Введем теперь индикаторную функцию

$$W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = \\ = \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\Theta(x, \mathbf{R}) - \Theta) \delta\left(\frac{\partial\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial\mathbf{R}} - \mathbf{p}\right) \delta\left(\frac{\partial^2\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} - u_{ij}\right),$$

стохастическое уравнение Лиувилля для которой, имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2} \frac{\partial}{\partial \Theta} - u_{ii} \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii}\right) W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = \\ = -\frac{1}{2} \left(\varepsilon(x, \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{\partial \varepsilon(x, \mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial^2 \varepsilon(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_k} \frac{\partial}{\partial u_{ik}}\right) W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}). \quad (11.137)$$

Усредним уравнение (11.137) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. Используя для расщепления корреляций формулу Фурутцу–Новикова, для совместной плотности вероятностей всех величин

$$P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = \langle W(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) \rangle$$

получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{p}^2}{2} \frac{\partial}{\partial \Theta} - u_{ii} \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii}\right) P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = \\ = \frac{1}{4} \left[A(0) \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \Delta_{\mathbf{R}} A(0) \left(\frac{\partial^2}{\partial \Theta \partial u_{ii}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2} \right) \right] P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}). \quad (11.138)$$

Для плоской падающей волны, в силу пространственной однородности, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = 0$ и $P(x, \mathbf{R}; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij}) = P(x; I, \Theta, \mathbf{p}, u_{ij})$.

Интегрируя уравнение (11.138) по Θ и I , получаем более простое уравнение, описывающее плотность вероятностей для флуктуаций фазовых градиентов

$$P(x; \mathbf{p}, u_{ij}) = \left\langle \delta\left(\frac{\partial\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial\mathbf{R}} - \mathbf{p}\right) \delta\left(\frac{\partial^2\Theta(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} - u_{ij}\right) \right\rangle,$$

вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii}\right) P(x; \mathbf{p}, u_{ij}) = \\ = -\frac{1}{8} \left[\Delta_{\mathbf{R}} A(0) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} + \frac{1}{4} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2} \right) \right] P(x; \mathbf{p}, u_{ij}). \quad (11.139)$$

Аналогичным образом, интегрируя уравнение (11.138) по Θ и по $\mathbf{p}$, получаем уравнение для плотности вероятностей

$$P(x; I, u_{ij}) = \left\langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta \left(\frac{\partial^2 \Theta(x, \mathbf{R})}{\partial R_i \partial R_j} - u_{ij} \right) \right\rangle,$$

описывающее флуктуации интенсивности волнового поля:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - u_{ii} \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii} \right) P(x; I, u_{ij}) = \\ = -\frac{1}{32} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2} \right) P(x; I, u_{ij}). \end{aligned} \quad (11.140)$$

Интегрируя уравнение (11.140) по I , получаем уравнение для плотности вероятностей вторых производных фазы, описывающих кривизну фазового фронта, вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u_{ik}} u_{il} u_{lk} - u_{ii} \right) P(x; u_{ij}) = -\frac{1}{32} \Delta_{\mathbf{R}}^2 A(0) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial u_{kl}^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_{ii}^2} \right) P(x; u_{ij}). \quad (11.141)$$

Сравнивая (11.141) с (11.139), видим что первые и вторые производные фазы волны являются статистически независимыми и плотность вероятностей для градиентов фазы удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} P(x; \mathbf{p}) = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} P(x; \mathbf{p}). \quad (11.142)$$

Из уравнения (11.142) следует, что распределение (одноточечное) величины $\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})$ является гауссовым с дисперсией

$$\left\langle [\nabla_{\mathbf{R}} \Theta(x, \mathbf{R})]^2 \right\rangle = -\frac{1}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(0) x,$$

что совпадает с известным результатом для малых флуктуаций амплитуды волны и, следовательно, обобщает его на случай произвольных флуктуаций амплитуды. В то же время, как видно из (11.140), существует сильная статистическая связь между флуктуациями интенсивности и кривизной фазового фронта.

Уравнения (11.138)–(11.141) существенно упрощаются в двумерном случае. Так, уравнение (11.140) в этом случае принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial u} u^2 - u \right) P(x; I, u) = -\frac{3}{32} \frac{\partial^2 A(0)}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} P(x; I, u). \quad (11.143)$$

Полученные выше уравнения достаточно сложны и в настоящее время практически не изучены.

11.10. Континуальная запись решения задачи

Рассмотрим теперь статистическое описание характеристик волнового поля в среде со случайными неоднородностями, основанное на использовании функциональной записи решения задачи [40, 53, 113, 121, 122, 155], [218]–[220].

Для описания процесса распространения волны в неоднородной среде будем исходить, как и ранее, из параболического уравнения (11.1), решение которого можно представить в операторной форме или в виде континуального интеграла.

Для этого рассмотрим, вместо (11.1), более сложное уравнение, содержащее произвольную детерминированную векторную функцию $\mathbf{v}(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}) + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}),$$

$$\Phi(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}). \quad (11.144)$$

Тогда решению параболического уравнения (11.1) соответствует равенство

$$u(x, \mathbf{R}) = \Phi(x, \mathbf{R})|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (11.145)$$

Для вариационной производной $\delta\Phi(x, \mathbf{R})/\delta\mathbf{v}(x-0)$ стандартным путем получаем выражение

$$\frac{\delta\Phi(x, \mathbf{R})}{\delta\mathbf{v}(x-0)} = \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}), \quad (11.146)$$

и уравнение (11.144) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mathbf{R}) = \frac{i}{2k} \frac{\delta^2 \Phi(x, \mathbf{R})}{\delta \mathbf{v}^2(x-0)} + i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \Phi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(x, \mathbf{R}). \quad (11.147)$$

Будем искать решение уравнения (11.146) в виде

$$\Phi(x, \mathbf{R}) = \exp \left(\frac{i}{2k} \int_0^{x-0} d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right) \varphi(x, \mathbf{R}). \quad (11.148)$$

Оператор, стоящий в экспоненте (11.148), перестановочен с функцией $\mathbf{v}(x)$ и, следовательно, для функции $\varphi(x, \mathbf{R})$ получаем уравнение первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, \mathbf{R}) = i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varphi(x, \mathbf{R}) + \mathbf{v}(x) \nabla_{\mathbf{R}} \varphi(x, \mathbf{R}), \quad \varphi(0, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}), \quad (11.149)$$

решение которого, как функционал от $\mathbf{v}(\xi)$, выглядит следующим образом:

$$\varphi(x, \mathbf{R}) = \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] = u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\}. \quad (11.150)$$

Следовательно, с учетом равенств (11.148) и (11.145), получаем операторную запись решения параболического уравнения (11.1) в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ \times u_0 \left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Bigg|_{\mathbf{v}(x)=0}. \quad (11.151)$$

В случае плоской падающей волны $u_0(\mathbf{R}) = u_0$ и формула (11.151) упрощается:

$$u(x, \mathbf{R}) = u_0 \exp \left(\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \Bigg|_{\mathbf{v}(x)=0} \quad (11.152)$$

Рассмотрим теперь формально уравнение (11.149) как стохастическое, где функцию $\mathbf{v}(x)$ будем теперь считать «гауссовой» случайной векторной функцией со средним значением, равным нулю, и мнимой «корреляционной» функцией:

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = \frac{i}{k} \delta_{ij} \delta(x - x'). \quad (11.153)$$

Легко видеть, что все формулы, справедливые для обычных гауссовых случайных процессов, верны и в этом случае.

Усредняя уравнение (11.149) по ансамблю реализаций случайного процесса $\mathbf{v}(x)$, мы для среднего значения $\langle \varphi(x, \mathbf{R}) \rangle_{\mathbf{v}}$ получаем уравнение, совпадающее с уравнением (11.1). Таким образом, решение параболического уравнения (11.1) допускает вероятностную интерпретацию, а именно: его можно формально записать в виде средней величины

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}}. \quad (11.154)$$

Это равенство можно записать в виде *Фейнмановского континуального интеграла*

$$u(x, \mathbf{R}) = \int D\mathbf{v}(x) u_0\left(\mathbf{R} + \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi)\right) \exp\left\{i\frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon\left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta)\right)\right]\right\}, \quad (11.155)$$

где интегральная мера

$$D\mathbf{v}(x) = \frac{\prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi)}{\int \dots \int \prod_{\xi=0}^x d\mathbf{v}(\xi) \exp\left\{i\frac{k}{2} \int_0^x d\xi \mathbf{v}^2(\xi)\right\}}.$$

Представления (11.151) и (11.154) эквивалентны. В самом деле, рассматривая решение уравнения (11.149) как функционал случайного процесса $\mathbf{v}(\xi)$, равенство (11.154) можно переписать в виде цепочки равенств

$$\begin{aligned} u(x, \mathbf{R}) &= \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi) + \mathbf{y}(\xi)] \rangle_{\mathbf{y}=0} = \\ &= \left\langle \exp\left\{ \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \frac{\delta}{\delta \mathbf{y}(\xi)} \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}} \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0} = \\ &= \exp\left(\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{y}^2(\xi)} \right) \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{y}(\xi)] \Big|_{\mathbf{y}=0}, \end{aligned}$$

и, следовательно, в операторном виде (11.151).

Используя вероятностную аналогию, выражение (11.154) можно переписать в более удобном виде. Представим его в виде

$$u(x, \mathbf{R}) = \langle \varphi[x, \mathbf{R}; \mathbf{v}(\xi)] \rangle_{\mathbf{v}} = \int d\mathbf{q} \tilde{u}_0(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \left\langle \exp\left\{ i\mathbf{q} \int_0^x d\xi \mathbf{v}(\xi) + i\frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon\left(\xi, \mathbf{R} + \int_\xi^x d\eta \mathbf{v}(\eta)\right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}},$$

где

$$\tilde{u}_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{R} u_0(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}}.$$

Далее можно вынести экспоненту из под знака среднего (см. гл. 3, формулу (3.125)). В результате получаем выражение

$$u(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} \tilde{u}_0(\mathbf{q}) e^{i\left(\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{q^2}{2k}x\right)} \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}), \quad (11.156)$$

где функция

$$\psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}} \quad (11.157)$$

и ее можно записать также в операторной форме:

$$\psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = \exp \left(\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (11.158)$$

Представления (11.157), (11.158) являются решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{R}} \right) \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = i \frac{k}{2} \varepsilon(x, \mathbf{R}) \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) - \frac{\mathbf{q}}{k} \nabla_{\mathbf{R}} \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}),$$

$$\psi(0, \mathbf{R}, \mathbf{q}) = 1, \quad (11.159)$$

которое, разумеется можно получить исходя из параболического уравнения (11.1). При этом выражения (11.156)–(11.158) представляют разложение задачи по плоским волнам. Выражение, стоящее в правой части (11.156) под знаком интеграла, описывает дифракцию плоской волны за счет неоднородностей поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$; при этом множитель $\tilde{u}_0(\mathbf{q}) \exp \left\{ i \mathbf{q} \mathbf{R} - \frac{i \mathbf{q}^2}{2k} x \right\}$ описывает дифракцию в свободном пространстве в отсутствие флуктуаций $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, а множитель $\psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q})$ учитывает влияние неоднородностей на такую дифрагированную волну.

В заключение приведем выражения для функции Грина уравнения (11.1), описывающей поле сферической волны, соответствующее начальному условию в точке $x = x'$ вида $u(x', \mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$:

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = \exp \left(\frac{i}{2k} \int_{x'}^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right) \times$$

$$\times \left[\delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}' + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{x'}^x d\xi \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right\} \right]_{\mathbf{v}=0}, \quad (11.160)$$

$$G(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = \int D\mathbf{v}(x) \delta \left(\mathbf{R} - \mathbf{R}' + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}(\xi) \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_{x'}^x d\xi \left[\mathbf{v}^2(\xi) + \varepsilon \left(\xi, \mathbf{R} + \int_{\xi}^x d\eta \mathbf{v}(\eta) \right) \right] \right\}. \quad (11.161)$$

Комплексно сопряженные формулы описывают функцию Грина для сферической волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси x .

11.10.1. Статистическое описание волнового поля. Перейдем теперь к статистическому описанию распространения волны в случайно-неоднородной среде. Будем считать, что флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ являются гауссовым однородным случайным полем с корреляционной функцией

$$B_\varepsilon(x, \mathbf{R}; x', \mathbf{R}') = B_\varepsilon(x - x', \mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \varepsilon(x, \mathbf{R}) \varepsilon(x', \mathbf{R}') \rangle. \quad (11.162)$$

Усредняя формулу (11.156) по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем выражение для среднего поля в виде

$$\langle u(x, \mathbf{R}) \rangle = \int d\mathbf{q} \tilde{u}_0(\mathbf{q}) e^{i\left(\mathbf{q}\mathbf{R} - \frac{q^2}{2k}x\right)} \langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle, \quad (11.163)$$

где функция

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle = \left\langle \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 B_\varepsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}}. \quad (11.164)$$

Ее можно записать также в операторной форме

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 B_\varepsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\}_{\mathbf{v}=0}. \end{aligned} \quad (11.165)$$

Аналогичным образом для функции когерентности второго порядка получаем интегральное представление:

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) &= \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \tilde{u}_0(\mathbf{q}_1) \tilde{u}_0(\mathbf{q}_2) \times \\ &\times \exp \left\{ i \left(\mathbf{q}_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{q}_2 \mathbf{R}_2 \right) - \frac{i \left(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2 \right)}{2k} x \right\} \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle, \end{aligned} \quad (11.166)$$

где функция

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle = & \\
 = \left\langle \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 \left[B_\epsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k} \right] \right) + \right. \right. \right. & \\
 + B_\epsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k} \right] \right) - & \\
 \left. \left. - 2B_\epsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_{\xi_1}^x d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k} \right] - \int_{\xi_2}^x d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k} \right] \right) \right\} \right\rangle_{\mathbf{v}_i} . & \\
 (11.167) &
 \end{aligned}$$

Формулу (11.167) можно записать также в операторной форме

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_2^2(\xi)} \right] \right\} \times & \\
 \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 \left[B_\epsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k} \right] \right) + \right. & \\
 + B_\epsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k} \right] \right) - & \\
 \left. \left. - 2B_\epsilon \left(\xi_1 - \xi_2, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_{\xi_1}^x d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1}{k} \right] - \int_{\xi_2}^x d\eta \left[\mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_2}{k} \right] \right) \right] \right\}_{\mathbf{v}_i=0} . & \\
 (11.168) &
 \end{aligned}$$

К сожалению, мы не в состоянии в настоящее время вычислить континуальные интегралы (11.164) (11.167) или соответствующие им операторные выражения (11.165), (11.168). Необходимо прибегать к упрощающим предположениям. Так, если для корреляционной функции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ использовать приближение (11.15)

$$B_\epsilon(x, \mathbf{R}) = \delta(x) A(\mathbf{R}), \quad A(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\epsilon(x, \mathbf{R}),$$

т.е. считать поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ дельта-коррелированным по x , то выписанные выше интегралы вычисляются. При этом более удобно проводить все выкладки с операторной формой записи.

В этом случае для функции $\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle$ получаем выражение

$$\langle \psi(x, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \rangle = \exp \left(\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right) e^{-\frac{k^2}{8} A(0)x} \bigg|_{v=0} = e^{-\frac{k^2}{8} A(0)x},$$

и формула (11.163), естественно, совпадает с выражением (11.26), полученным непосредственным усреднением стохастического параболического уравнения (11.1).

Аналогичным образом для формулы (11.168) получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle &= \exp \left(\frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left[\frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1^2(\xi)} - \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_2^2(\xi)} \right] \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 + \int_{\xi}^x d\eta \left[\mathbf{v}_1(\eta) - \mathbf{v}_2(\eta) - \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2}{k} \right] \right) \right\}_{\mathbf{v}_i=0}, \end{aligned} \quad (11.169)$$

где, как и ранее, $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$.

Делая функциональную замену переменных

$$\mathbf{v}_1(x) - \mathbf{v}_2(x) = \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{v}_1(x) + \mathbf{v}_2(x) = 2\mathbf{V}(x)$$

и обозначая

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 2\mathbf{R}, \quad \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = \mathbf{q},$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, \mathbf{R}_1, \mathbf{q}_1) \psi^*(x, \mathbf{R}_2, \mathbf{q}_2) \rangle &= \exp \left(\frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}(\xi) \delta \mathbf{V}(\xi)} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} + \int_{\xi}^x d\eta \left[\mathbf{v}(\eta) - \frac{\mathbf{q}}{k} \right] \right) \right\}_{\mathbf{v}_i=0} = \\ &= \exp \left(-\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi D \left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - \xi) \right) \right), \end{aligned} \quad (11.170)$$

и, следовательно, получить выражение для функции когерентности второго порядка, совпадающее с формулой (11.27).

Выражения для среднего поля и функции когерентности второго порядка легко получить и непосредственно, усредняя соответствующие стохастические уравнения. В этом смысле для вычисления указанных величин упомянутые методы можно считать эквивалентными. Однако, представляется существенным, что с помощью операторного метода (или континуального

интеграла) мы можем выписывать выражения для таких величин, которые не могут быть описаны замкнутыми уравнениями (например, выражения, связанные с флуктуациями интенсивности волны). Так, например, можно получить замкнутое уравнение для функции когерентности четвертого порядка:

$$\Gamma_4(x; \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \langle u(x, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3) u^*(x, \mathbf{R}_4) \rangle,$$

с помощью которого затем найти величину $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$, полагая в решении $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}$. Однако решить аналитически это уравнение не представляется возможным, и оно содержит много лишних (для нахождения $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$) параметров, в то время как запись величины в виде континуального интеграла этих параметров не содержит. Поэтому такая запись решения задачи может быть полезна для изучения асимптотических характеристик любых моментов и, следовательно, распределения вероятностей для интенсивности волнового поля. Кроме того, в ряде случаев представление поля в операторном виде позволяет вычислить соответствующие средние характеристики более простым путем технически по сравнению с изучением соответствующих уравнений. Так, если мы захотим, например, вычислить величину

$$\langle \varepsilon(y, \mathbf{R}_1) I(x, \mathbf{R}) \rangle \quad (y < x),$$

то, если исходить из уравнения (11.1), следует составить дифференциальное уравнение для величины $\varepsilon(y, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3)$ при $y < x$, усреднить его по ансамблю реализаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, установить граничное условие для величины $\langle \varepsilon(y, \mathbf{R}_1) u(x, \mathbf{R}_2) u^*(x, \mathbf{R}_3) \rangle$ при $x = y$, решить полученное уравнение с соответствующим граничным условием, а уже затем положить $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}$. В то же время вычисление этой величины с помощью представления в операторном виде мало чем отличается от вычисления величины $\langle \psi \psi^* \rangle$, рассмотренного выше.

Перейдем теперь к анализу асимптотического поведения флуктуаций интенсивности плоской волны в области сильных флуктуаций в случайно-неоднородной среде, следуя работам [30, 40, 155], и т. п.

11.10.2. Асимптотический анализ флуктуаций интенсивности плоской волны. Рассмотрим статистический момент поля $u(x, \mathbf{R})$

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \left\langle \prod_{k=1}^n u(x, \mathbf{R}_{2k-1}) u^*(x, \mathbf{R}_{2k}) \right\rangle. \quad (11.171)$$

В приближении дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ удовлетворяет уравнению (11.18) при $n = m$, которое

для плоской падающей волны в переменных $\mathbf{R}_k$ записывается в виде уравнения с начальным условием:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{l+1} \Delta_{\mathbf{R}_l} \right) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \\ = \frac{k^2}{8} \sum_{l,j=1}^{2n} (-1)^{l+j} D(\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_j) M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}), \quad (11.172)$$

где функция $D(\mathbf{R})$ описывается формулой

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}) = 2\pi \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q}) [1 - \cos(\mathbf{q}\mathbf{R})], \quad (11.173)$$

а $\Phi_\varepsilon(0, \mathbf{q})$ — трехмерный спектр поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ от двумерного вектора $\mathbf{q}$.

Используя запись поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла (11.155), усредняя по полю $\varepsilon(x, \mathbf{R})$, получаем выражение для $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ в виде

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \int \dots \int D\mathbf{v}_1(\xi) \dots D\mathbf{v}_{2n}(\xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \int_0^x d\xi \mathbf{v}_j^2(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x d\xi D \left(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_{\xi}^x dx' [\mathbf{v}_j(x') - \mathbf{v}_l(x')] \right) \right\}. \quad (11.174)$$

Формулу (11.174) можно также получить, решая уравнение (11.172) непосредственно методом, описанным выше. Формулу (11.174) можно записать в операторной форме

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) = \prod_{l=1}^{2n} \exp \left\{ \frac{i}{2k} (-1)^{l+1} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}^2(\xi)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} \int_0^x dx' D \left(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_j(\xi) - \mathbf{v}_l(\xi)] \right) \right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (11.175)$$

Если совместить точки $\mathbf{R}_{2k-1} = \mathbf{R}_{2k}$, то функция $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$ перейдет в функцию $\left\langle \prod_{k=1}^n I(x, \mathbf{R}_{2k-1}) \right\rangle$, описывающую корреляционные характеристики интенсивности волны. Если же теперь положить все $\mathbf{R}_l = \mathbf{R}$ то функция

$$M_{nn}(x, \mathbf{R}, \dots, \mathbf{R}) = \Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$$

будет описывать n -ый момент интенсивности волнового поля.

Прежде чем обсуждать асимптотику функций $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R})$ для случая непрерывной случайной среды, рассмотрим более простую задачу о флуктуациях волнового поля за случайным фазовым экраном.

Случайный фазовый экран. Пусть имеется слой неоднородной среды, толщина которого настолько мала, что волна при прохождении через слой приобретает только случайный набег фазы

$$S(\mathbf{R}) = \frac{k}{2} \int_0^{\Delta x} d\xi \varepsilon(\xi, \mathbf{R}) \quad (11.176)$$

и не меняет амплитуды. Будем считать, как и ранее, что случайное поле $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — гауссово дельта-коррелированное по x поле. После прохождения неоднородного слоя волна распространяется в однородной среде, и ее распространение описывается уравнением, которое получается из (11.1) при $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Решение этой задачи дается формулами

$$u(x, \mathbf{R}) = e^{i \frac{x}{2k} \Delta \mathbf{R}} e^{iS(\mathbf{R})} = \frac{k}{2\pi i x} \int d\mathbf{v} \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \mathbf{v}^2 + iS(\mathbf{R} + \mathbf{v}) \right\}, \quad (11.177)$$

которые являются конечномерным аналогом формул (11.152), (11.155).

Рассмотрим функцию $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$. Подставляя (11.177) в (11.171) и усредняя, легко получаем формулу

$$\begin{aligned} M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n}) &= \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_l + \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \right\}. \end{aligned} \quad (11.178)$$

Эта формула является аналогом (11.174).

Прежде всего рассмотрим подробнее случай $n = 2$ при попарно совмещенных точках наблюдения

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' - \mathbf{R}'' = \boldsymbol{\rho}.$$

Тогда функция

$$\Gamma_4(x; \mathbf{R}', \mathbf{R}', \mathbf{R}'', \mathbf{R}'') = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$$

— ковариация интенсивностей $I(x, \mathbf{R}) = |u(x, \mathbf{R})|^2$. Если в (11.178) (при $n = 2$) ввести новые переменные интегрирования

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{R}_3, \quad \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{R},$$

то интегрирование по $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_3$ можно выполнить и получить в результате более простую формулу

$$\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^2 \iint d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \exp \left\{ \frac{ik}{x} \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 - \boldsymbol{\rho}) - \frac{k^2 \Delta x}{4} F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \right\}, \quad (11.179)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$ и функция $F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ определяется из равенства (11.31), т. е.

$$F(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = 2D(\mathbf{R}_1) + 2D(\mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) - D(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2),$$

$$D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R}).$$

Интеграл (11.179) подробно исследовался (в том числе и численными методами) во многих работах. И его асимптотика при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle = & 1 + \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D(\boldsymbol{\rho}) \right\} + \\ & + \pi k^2 \Delta x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right] \exp \left\{ i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} + \\ & + \pi k^2 \Delta x \int d\mathbf{q} \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q}\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}^2 x}{k} \right) \right] \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (11.180)$$

Отметим, что теперь в задаче, помимо пространственного масштаба $\rho_{\text{cог}}$, появляется второй характерный пространственный масштаб

$$r_0 = \frac{x}{k\rho_{\text{cог}}}. \quad (11.181)$$

Если теперь в выражении (11.180) положить $\boldsymbol{\rho} = 0$, то для дисперсии квадрата интенсивности можно получить выражение

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = 1 + \pi \Delta x \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) \exp \left\{ -\frac{k^2 \Delta x}{2} D\left(\frac{\mathbf{q}x}{k}\right) \right\} + \dots \quad (11.182)$$

Если флуктуации поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ в неоднородном слое вызываются турбулентностью, так что $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$ описывается формулой (11.88), то равенство (11.182) приводит к результату

$$\beta^2(x) = 1 + 0,429\beta_0^{-4/5}(x), \quad (11.183)$$

где $\beta_0^2(x)$ — дисперсия квадрата интенсивности, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений для случайного фазового экрана (11.95).

Изложенные соображения легко обобщаются на высшие моментные функции поля $u(x, \mathbf{R})$ и, в частности, на функции $\Gamma_{2n}(x, \mathbf{R}) = \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$.

Формула (11.178) в этом случае имеет вид

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\}, \quad (11.184)$$

где

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} (-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \quad (11.185)$$

Функция $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n})$ связана со случайными набегам фазы $S(\mathbf{v}_i)$, определяемыми формулой (11.176), соотношением

$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) = \frac{1}{2} \left\langle \left[\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} S(\mathbf{v}_j) \right]^2 \right\rangle \geq 0.$$

Отсюда ясно, что если все нечетные точки $\mathbf{v}_{2l+1}$ совпадают попарно с какими-либо четными точками, то положительные и отрицательные набег фаз компенсируются и функция $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n})$ обращается в нуль. Поэтому становится очевидным, что при $\sqrt{x/k} \gg \rho_{\text{cог}}$ основной вклад в $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ будут давать те области, где происходит такая компенсация. Нетрудно подсчитать, что число таких областей равно $n!$. Тогда, заменяя (11.184) на умноженный на $n!$ интеграл лишь по одной из этих областей (A_1), в которой

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sim |\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4| \sim \dots \sim |\mathbf{v}_{2n-1} - \mathbf{v}_{2n}| < \rho_{\text{cог}},$$

получим

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle \approx n! \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int_{A_1} \dots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}) \right\}. \quad (11.186)$$

Убывание подынтегрального выражения по каждой из переменных $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4$ и т.д. обеспечивается соответствующим слагаемым из (11.185):

$$\frac{k^2 \Delta x}{8} D(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad \frac{k^2 \Delta x}{8} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) \quad \text{и т.д.}$$

Эти слагаемые следует оставить в показателе экспоненты, а экспоненту от остальных слагаемых следует разложить в ряд:

$$\begin{aligned} \langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle &\approx n! \left(\frac{k}{2\pi x} \right)^{2n} \int_{A_1} \cdots \int d\mathbf{v}_1 \dots d\mathbf{v}_{2n} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{2x} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} \mathbf{v}_j^2 - \frac{k^2 \Delta x}{4} \sum_{l=1}^n D(\mathbf{v}_{2l-1} - \mathbf{v}_{2l}) \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{k^2 \Delta x}{8} \sum_{j,l=1}^{2n} '(-1)^{j+l+1} D(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_l) + \dots \right\}. \quad (11.187) \end{aligned}$$

Штрих у знака суммы означает, что из нее выброшены члены, вошедшие в экспоненту. В формуле (11.187) интегрирование можно распространить на все пространство, так как вне области A_1 подынтегральная функция пренебрежимо мала. С учетом этого многократный интеграл в (11.187) можно вычислить точно и получить для $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ формулу

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (11.188)$$

в которой величина $\beta^2(x)$ определяется выражением (11.183). Обсуждение полученной формулы мы проведем несколько позднее, после того как рассмотрим распространение волн в непрерывной случайно-неоднородной среде, поскольку получающиеся в обоих случаях результаты аналогичны.

Случай непрерывной случайной среды. Рассмотрим теперь асимптотику высших моментных функций волнового поля $M_{nn}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{2n})$, распространяющегося в случайно-неоднородной среде. Формальное решение этой задачи дается выражениями (11.174), (11.175). От рассмотренных выше формул для фазового экрана они отличаются лишь заменой обычного интегрирования на континуальное. Рассмотрим сначала величину $\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$, которая получается из $M_{22}(x, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_4)$ при попарном слиянии точек наблюдения $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}'$, $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}''$. Для плоской волны ($u_0(\mathbf{R}) = 1$), используя (11.175) и вводя новые переменные, аналогичные случаю фазового экрана, получаем ($\rho = \mathbf{R}' - \mathbf{R}''$)

$$\begin{aligned} \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle &= \exp \left\{ \frac{i}{k} \int_0^x d\xi \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{v}_1(\xi) \delta \mathbf{v}_2(\xi)} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \left[2D \left(\rho + \int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}_1(\xi) \right) + 2D \left(\int_{x'}^x d\xi \mathbf{v}_2(\xi) \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - D \left(\rho + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_1(\xi) + \mathbf{v}_2(\xi)] \right) - D \left(\rho + \int_{x'}^x d\xi [\mathbf{v}_1(\xi) - \mathbf{v}_2(\xi)] \right) \right] \right\}_{\mathbf{v}=0}. \quad (11.189) \end{aligned}$$

Формулу (11.189) можно записать и в виде континуального интеграла, вытекающем из (11.174), однако мы будем использовать операторную форму записи. Аналогично случаю фазового экрана выражение для $\langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle$ можно записать при $x \rightarrow \infty$ в виде

$$B_I(x, \mathbf{p}) = \langle I(x, \mathbf{R}') I(x, \mathbf{R}'') \rangle - 1 = B_I^{(1)}(x, \mathbf{p}) + B_I^{(2)}(x, \mathbf{p}) + B_I^{(3)}(x, \mathbf{p}), \quad (11.190)$$

где

$$B_I^{(1)}(x, \mathbf{p}) = \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{2} D(\mathbf{p}) \right\},$$

$$B_I^{(2)}(x, \mathbf{p}) = \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\mathbf{q} \Phi_\epsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x') \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \mathbf{q} \mathbf{p} - \frac{k^2 x'}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\},$$

$$B_I^{(3)}(x, \mathbf{p}) = \pi k^2 \int_0^x dx' \int d\mathbf{q} \Phi_\epsilon(\mathbf{q}) \left[1 - \cos \left(\mathbf{q} \mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x') \right) \right] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\}.$$

Полагая здесь $\mathbf{p} = 0$ и учитывая первый член разложения в ряд функции

$$1 - \cos \frac{\mathbf{q}^2}{k} (x - x'),$$

для дисперсии интенсивности

$$\beta^2(x) = \langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle - 1 = B_I(x, 0) - 1$$

будем иметь формулу, аналогичную (11.182):

$$\beta^2(x) = 1 + \pi \int_0^x dx' (x - x') \int d\mathbf{q} q^4 \Phi_\epsilon(\mathbf{q}) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{k^2 x'}{2} D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x') \right) - \frac{k^2}{2} \int_{x'}^x dx'' D \left(\frac{\mathbf{q}}{k} (x - x'') \right) \right\} + \dots \quad (11.191)$$

Если рассмотреть случай турбулентной среды, то из (11.191) имеем

$$\beta^2(x) = 1 + 0,861 (\beta_0^2(x))^{-2/5}, \quad (11.192)$$

где $\beta_0^2(x)$ — дисперсия интенсивности волнового поля, рассчитанная по первому приближению метода плавных возмущений (11.97).

Выражение (11.191) остается в силе и в том случае, когда функции $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q})$, $D(\mathbf{p})$ медленно меняются вдоль оси x . В этом случае легко перейти от (11.204) к (11.182), если считать, что $\Phi_\varepsilon(\mathbf{q}) = 0$ вне слоя $0 \leq x' \leq \Delta x \ll x$.

Относительно корреляционной функции $B_I(x, \mathbf{p})$ отметим, что главный член $B_I^{(1)}(x, \mathbf{p})$ в (11.190) представляет собой квадрат модуля функции когерентности второго порядка (см., например, [30], а также [40, 155]).

Рассмотрим теперь высшие моментные функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = \Gamma_{2n}(x, 0)$. Аналогично случаю фазового экрана легко получить, что и в случае распространения волн в случайно-неоднородной среде для дисперсии интенсивности волнового поля имеет место разложение

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \left[1 + n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} + \dots \right], \quad (11.193)$$

совпадающее с выражением (11.188) для фазового экрана; при этом, разумеется, $\beta^2(x)$ в каждом случае определяется различными формулами.

Формула (11.193) дает первые два члена асимптотического разложения функции $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$. Так как $\beta^2(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$, второе слагаемое в (11.193) мало по сравнению с первым при достаточно больших $\beta_0^2(x)$. Лишь в том случае, когда

$$n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \ll 1, \quad (11.194)$$

выражение (11.193) имеет смысл. Однако при фиксированном $\beta_0^2(x)$ всегда найдутся такие номера n , для которых условие (11.194) будет нарушаться. Поэтому формула (11.193) справедлива лишь для не слишком больших n . Следует также отметить, что и выход на асимптотику (11.193) при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$ может быть достаточно медленным.

Формула (11.193) приводит к плотности вероятностей для интенсивности с сингулярными особенностями. Чтобы избежать их, можно аппроксимировать эту формулу выражением (см., например, [122])

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n! \exp \left\{ n(n-1) \frac{\beta^2(x) - 1}{4} \right\}, \quad (11.195)$$

которому соответствует плотность вероятностей вида (см., например, [115, 122])

$$P(x, I) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty dz \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (11.196)$$

Отметим, что, вообще говоря, распределение вероятностей (11.196) не применимо в узкой окрестности $I \sim 0$ (окрестность тем уже, чем больше параметр $\beta_0^2(x)$). Это связано с тем, что из формулы (11.196) следуют бесконечно большие значения для моментов величины $1/I(x, \mathbf{R})$. Однако для конечного значения $\beta_0^2(x)$ (сколь велико оно ни было бы) величины $\langle 1/I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ конечны, и, следовательно, должно выполняться равенство $P(x, 0) = 0$. Существование такой узкой окрестности точки $I \sim 0$, конечно, не сказывается на поведении моментов (11.195) для больших значений параметра $\beta_0^2(x)$.

Асимптотические формулы (11.195), (11.196) описывают переход в область *насыщенных* флуктуаций интенсивности, где $\beta(x) \rightarrow 1$ при $\beta_0^2(x) \rightarrow \infty$. В этой области, соответственно, имеем

$$\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle = n!, \quad P(x, I) = e^{-I}. \quad (11.197)$$

Экспоненциальное распределение вероятностей (11.197) означает, что комплексное поле $u(x, \mathbf{R})$ является гауссовым случайным полем. При этом

$$u(x, \mathbf{R}) = A(x, \mathbf{R})e^{iS(x, \mathbf{R})} = u_1(x, \mathbf{R}) + iu_2(x, \mathbf{R}), \quad (11.198)$$

где $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ — действительная и мнимая части соответственно. Тогда интенсивность волнового поля

$$I(x, \mathbf{R}) = A^2(x, \mathbf{R}) = u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R}).$$

Гауссовость комплексного поля $u(x, \mathbf{R})$ означает, что случайные поля $u_1(x, \mathbf{R})$ и $u_2(x, \mathbf{R})$ также гауссовы, статистически независимые поля с дисперсиями

$$\langle u_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle u_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (11.199)$$

Естественно считать, что и их градиенты $\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_1(x, \mathbf{R})$, $\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} u_2(x, \mathbf{R})$ также статистически не зависят от полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и являются гауссовыми однородными и изотропными полями в плоскости $\mathbf{R}$ с дисперсиями

$$\sigma_{\mathbf{p}}^2(x) = \langle \mathbf{p}_1^2(x, \mathbf{R}) \rangle = \langle \mathbf{p}_2^2(x, \mathbf{R}) \rangle. \quad (11.200)$$

Следовательно, совместная плотность вероятностей полей $u_1(x, \mathbf{R})$, $u_2(x, \mathbf{R})$ и их градиентов $\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R})$ и $\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})$ имеет вид

$$P(x; u_1, u_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{\pi^3 \sigma_{\mathbf{p}}^4(x)} \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_{\mathbf{p}}^2(x)} \right\}. \quad (11.201)$$

Рассмотрим теперь совместную плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$ и градиента амплитуды:

$$\kappa(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) = \frac{u_1(x, \mathbf{R})\mathbf{p}_1(x, \mathbf{R}) + u_2(x, \mathbf{R})\mathbf{p}_2(x, \mathbf{R})}{\sqrt{u_1^2(x, \mathbf{R}) + u_2^2(x, \mathbf{R})}}.$$

Для нее имеем

$$\begin{aligned}
 P(x; I, \kappa) &= \langle \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \delta(\kappa(x, \mathbf{R}) - \kappa) \rangle_{u_i, \mathbf{p}_i} = \\
 &= \frac{1}{\pi^3 \sigma_p^4(x)} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \exp \left\{ -u_1^2 - u_2^2 - \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2}{\sigma_p^2(x)} \right\} \times \\
 &\times \delta(u_1^2 + u_2^2 - I) \delta\left(\frac{u_1 \mathbf{p}_1 + u_2 \mathbf{p}_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \kappa\right) = \frac{1}{2\pi \sigma_p^2(x)} \exp \left\{ -I - \frac{\kappa^2}{2\sigma_p^2(x)} \right\}, \\
 &\quad (11.202)
 \end{aligned}$$

и, следовательно, поперечный градиент амплитуды статистически не зависит от интенсивности волнового поля и является гауссовым случайным полем с дисперсией

$$\langle \kappa^2(x, \mathbf{R}) \rangle = 2\sigma_p^2(x). \quad (11.203)$$

Отметим, что поперечный градиент амплитуды также статистически не зависит от вторых производных по поперечным координатам интенсивности волнового поля.

В области сильных флуктуаций интенсивности функция когерентности второго порядка не зависит от дифракционных явлений и описывается выражением

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2(x, \mathbf{R} - \mathbf{R}') &= \langle u(x, \mathbf{R}) u^*(x, \mathbf{R}') \rangle = \\
 &= \langle u_1(x, \mathbf{R}) u_1^*(x, \mathbf{R}') \rangle + \langle u_2(x, \mathbf{R}) u_2^*(x, \mathbf{R}') \rangle = e^{-\frac{1}{4} k^2 x D(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}, \quad (11.204)
 \end{aligned}$$

где $D(\mathbf{R}) = A(0) - A(\mathbf{R})$. И, следовательно, величина $\sigma_p^2(x)$ из (11.199) определяется выражением

$$\sigma_p^2(x) = \frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} D(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0} = -\frac{k^2 x}{8} \Delta_{\mathbf{R}} A(\mathbf{R})|_{\mathbf{R}=0},$$

которое для турбулентных флуктуаций поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ совпадает, естественно, с формулой (11.99):

$$\sigma_p^2(x) = \frac{1,476}{L_f^2(x)} D^{1/6}(x) \beta_0(x), \quad (11.205)$$

где $L_f(x) = \sqrt{x/k}$ — размер первой зоны Френеля, $D(x) = \kappa_m^2 x/k \gg 1$ — волновой параметр, а κ_m — волновое число, соответствующее микромасштабу турбулентности.

В заключение этого раздела отметим, что представление поля $u(x, \mathbf{R})$ в виде континуального интеграла позволяет исследовать и вопрос о пределах применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для флуктуаций интенсивности волны. При этом оказывается, что все условия применимости дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ для вычисления величины $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$ совпадают с условиями применимости дельта-коррелированного приближения для величины $\langle I^2(x, \mathbf{R}) \rangle$.

Иначе говоря, приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ не изменяет вида распределения вероятностей для интенсивности волнового поля.

Для турбулентных пульсаций температуры в области слабых флуктуаций приближение дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ справедливо при выполнении неравенств

$$\lambda \ll \sqrt{\lambda x} \ll x,$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

В области же сильных флуктуаций условием применимости приближения дельта-коррелированного случайного поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ является условие

$$\lambda \ll \rho_{\text{cог}} \ll r_0 \ll x,$$

где $\rho_{\text{cог}}$ и r_0 определяются формулами (11.30) и (11.181). Все эти неравенства имеют простой физический смысл. Пока в задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями наименьшим из всех продольных масштабов является радиус корреляции $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ (его роль для турбулентных пульсаций температуры играет размер первой зоны Френеля), справедливо дельта-коррелированное приближение. При распространении волны в области сильных флуктуаций появляется продольный масштаб $\sim \sim \rho_{\text{cог}} \sqrt{kx}$, который постепенно уменьшается, так что при достаточно большом значении параметра $\beta_0^2(x)$ он может стать меньше радиуса корреляции поля $\varepsilon(x, \mathbf{R})$. При возникновении такой ситуации уже нельзя пользоваться дельта-коррелированным приближением.

Приведенные выше неравенства можно рассматривать и как ограничения снизу и сверху на величину масштаба функции корреляции интенсивности. При этом дельта-коррелированное приближение справедливо лишь в том случае, когда любые масштабы, возникающие в задаче, остаются малыми по сравнению с длиной трассы.

11.10.3. Каустическая структура волнового поля в случайно-неоднородной среде. Рассмотренные выше статистические характеристики волнового поля $u(x, \mathbf{R})$, например корреляционная функция интенсивности в области сильных флуктуаций, совершенно не отражают реального поведения волнового поля в отдельных реализациях параметров среды (см. рис. 1.11, рис. 1.12 во введении). Для анализа детальной структуры случайного волнового поля можно воспользоваться методами статистической топографии, которые позволяют, понять каким образом образуется каустическая структура волнового поля и выяснить, какими статистическими параметрами она описывается. Отметим, что впервые, по-видимому, теория выбросов случайного поля интенсивности была применена для анализа задачи о распространении волн в турбулентной среде в работах [11, 12] (см. также [18]).

Элементы статистической топографии случайного поля интенсивности. Для плоской падающей волны, в силу пространственной однородности, все одноточечные статистические характеристики, в том числе

и плотности вероятностей, не зависят от переменной $\mathbf{R}$. В этом случае можно ввести удельные (приходящиеся на единицу площади) значения ряда физических величин, достаточно полно характеризующих кластерную структуру интенсивности волнового поля. При этом, как указывалось выше, естественным масштабом длины в плоскости $x = \text{const}$, не зависящим от параметров среды, является размер *первой зоны Френеля* $L_f(x) = \sqrt{x/k}$, определяющий размер переходной области свет-тьнь при дифракции на краю непрозрачного экрана. К таким величинам относятся:

- удельная средняя общая площадь областей в плоскости $\{\mathbf{R}\}$, ограниченных линиями уровня, где $I(x, \mathbf{R}) > I$,

$$\langle s(x, I) \rangle = \int_I^\infty dI' P(x; I'),$$

где $P(x; I)$ — плотность вероятностей интенсивности волнового поля $I(x, \mathbf{R})$;

- удельная средняя мощность поля, заключенная в этих областях

$$\langle e(x, I) \rangle = \int_I^\infty dI' I' P(x; I'),$$

- удельное среднее значение длины этих контуров

$$\langle l(x, I) \rangle = L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\mathbf{p}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} I(x, \mathbf{R})$ — поперечный градиент интенсивности волнового поля;

- оценка для среднего числа разности числа контуров с противоположной ориентацией векторов нормали, приходящихся на первую зону Френеля:

$$\langle n(x, I) \rangle = \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \kappa(x, \mathbf{R}; I) |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle,$$

где $\kappa(x, \mathbf{R}; I)$ — кривизна линии уровня,

$$\kappa(x, \mathbf{R}; I) =$$

$$= \frac{-p_y^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial z^2} - p_z^2(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y^2} + 2p_y(x, \mathbf{R}) p_z(x, \mathbf{R}) \frac{\partial^2 I(x, \mathbf{R})}{\partial y \partial z}}{p^3(x, \mathbf{R})}.$$

Рассмотрим теперь динамику всех этих величин в зависимости от проходящей волной дистанции x (параметра $\beta_0(x)$).

Область слабых флуктуаций интенсивности. Область слабых флуктуаций интенсивности ограничивается значениями параметра $\beta_0(x) \leq 1$ и в этом случае интенсивность волнового поля имеет логнормальный характер и описывается выражением (11.92).

Для этого логарифмически-нормального процесса типичной реализацией случайной интенсивности является экспоненциально спадающая с дистанцией кривая

$$I^*(x) = e^{-\frac{1}{2}\beta_0(x)}$$

и формирование статистики (например, моментных функций $\langle I^n(x, \mathbf{R}) \rangle$) осуществляется за счет больших выбросов процесса $I(x, \mathbf{R})$ относительно этой кривой.

Кроме того, для реализаций логарифмически нормального процесса существуют также различные мажорантные оценки. Так, например, с вероятностью $p = 1/2$ для отдельных реализаций интенсивности волнового поля выполняется неравенство

$$I(x) < 4e^{-\frac{1}{4}\beta_0(x)}$$

на всем интервале расстояний $x \in (0, \infty)$. Все эти обстоятельства указывают на начало образования кластерной структуры интенсивности волнового поля.

Знание плотности вероятностей (11.92) позволяет, как указывалось выше, получить некоторые количественные характеристики таких кластерных образований. Так, средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta_0(x)}} \ln \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta_0(x)}}{I} \right) \right), \quad (11.206)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2\beta_0(x)}} \ln \left(\frac{e^{\frac{1}{2}\beta_0(x)}}{I} \right) \right), \quad (11.207)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z dy e^{-y^2}$ — стандартный интеграл ошибок.

Характер пространственной эволюции кластерной структуры при изменении параметра $\beta_0(x)$ существенно зависит от фиксируемого уровня I . В наиболее интересном случае $I > 1$ в начальной плоскости $\langle s(0, I) \rangle = 0$ и $\langle e(0, I) \rangle = 0$. С ростом $\beta_0(x)$ образуются небольшие кластерные области (где $I(x, \mathbf{R}) > I$), практически сохраняющиеся на некоторых расстояниях и интенсивно вытягивающие в себя значительную часть общей мощности. В дальнейшем площади этих областей уменьшаются с увеличением $\beta_0(x)$, а содержащаяся в них мощность увеличивается, что соответствует увеличению средней яркости внутри этих областей. Эти процессы связаны с фокусировкой излучения отдельными участками среды. На рис. 4.28, а, б приведены графики изменения функций $\langle s(x, I) \rangle$ и $\langle e(x, I) \rangle$ в зависимости от параметра $\beta_0(x)$ из указанного диапазона значений. Максимальная

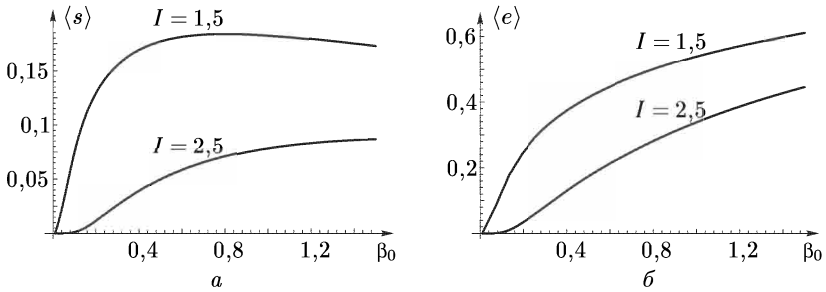


Рис. 4.28. Зависимости средней удельной площади (а) и мощности (б) от параметра $\beta_0(x)$

величина средней удельной площади достигается при $\beta_0(x) = 2 \ln(I)$ и

$$\langle s(x, I) \rangle_{\max} = \Phi \left(-\frac{1}{\sqrt{\ln(I)}} \right).$$

При этом значении $\beta_0(x)$ средняя мощность $\langle e(x, I) \rangle = 1/2$.

В области слабых флуктуаций интенсивности пространственный градиент уровня амплитуды $\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$ статистически не зависит от $\chi(x, \mathbf{R})$. Это позволяет вычислить как удельную среднюю длину контуров $I(x, \mathbf{R}) = I$, так и оценить удельное среднее число таких контуров. В самом деле, плотность вероятностей для градиента уровня амплитуды $\mathbf{q}(x, \mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R})$ в области слабых флуктуаций имеет вид гауссового распределения:

$$P(x; \mathbf{q}) = \langle \delta(\nabla_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) - \mathbf{q}) \rangle = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{q}^2}{\sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} \right\}, \quad (11.208)$$

где $\sigma_{\mathbf{q}}^2(x) = \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle$ — дисперсия градиента уровня амплитуды, описываемая формулой (11.99).

Следовательно, для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\langle l(x, I) \rangle = 2L_f(x) \langle |q(x, \mathbf{R})| \rangle IP(x; I) = L_f(x) \sqrt{\pi \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)} IP(x; I). \quad (11.209)$$

Аналогичным образом, для удельного среднего числа контуров имеем

$$\begin{aligned} \langle n(x, I) \rangle &= \frac{1}{2\pi} L_f^2(x) \langle \chi(x, \mathbf{R}, I) | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) | \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2\pi} L_f^2(x) I \langle \Delta_{\mathbf{R}} \chi(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= -\frac{1}{\pi} L_f^2(x) \langle \mathbf{q}^2(x, \mathbf{R}) \rangle I \frac{\partial}{\partial I} IP(x; I) = \frac{L_f^2(x) \sigma_{\mathbf{q}}^2(x)}{\pi \beta_0(x)} \ln \left(I e^{\frac{1}{2} \beta_0(x)} \right) IP(x; I). \end{aligned} \quad (11.210)$$

Отметим, что при значении $I = I_0(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta_0(x)\right\}$ выражение (11.210) обращается в ноль. Это означает, что для данного уровня интенсивности среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$. Графики зависимости $\langle l(x, I) \rangle$ и $\langle n(x, I) \rangle$ от параметра $\beta_0(x)$ приведены на рис. 4.29, а, б.

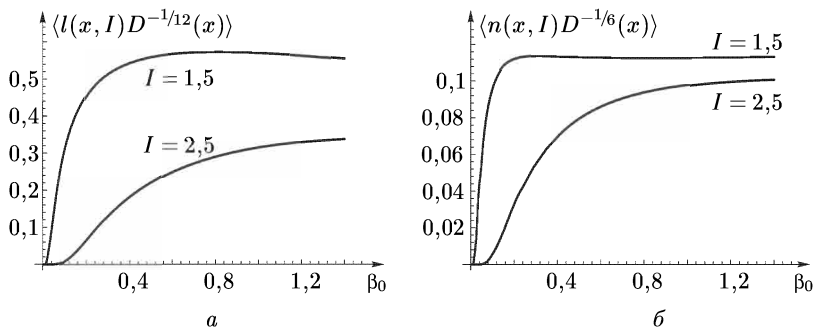


Рис. 4.29. Зависимости средних удельной длины контуров (а) и их числа (б) от параметра $\beta_0(x)$

Зависимость средней удельной длины линий уровня и среднего удельного числа контуров от микромасштаба турбулентности указывает на существование мелкой ряби, накладывающейся на более крупномасштабный случайный рельеф. Эта рябь не влияет на перераспределение площадей и мощности, но ведет к большей изрезанности линий уровня и появлению малых контуров.

Как указывалось ранее, полученное описание справедливо при значениях $\beta_0(x) \leq 1$. При дальнейшем увеличении параметра $\beta_0(x)$ метод плавных возмущений перестает быть справедливым и необходимо принимать во внимание нелинейный характер уравнения для комплексной фазы волнового поля. Эта область флуктуаций, называемая *областью сильных фокусировок*, очень трудна для аналитических исследований. При дальнейшем же увеличении параметра $\beta_0(x)$ ($\beta_0^2(x) \geq 10$) статистические характеристики интенсивности выходят на режим насыщения, и эта область изменения параметра $\beta_0(x)$ называется *областью сильных флуктуаций интенсивности*.

Область сильных флуктуаций интенсивности. Из выражения для плотности вероятностей (11.196) следует, что средняя удельная площадь областей, внутри которых $I(x, \mathbf{R}) > I$, равна

$$\langle s(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}, \quad (11.211)$$

а удельная средняя мощность, сосредоточенная в этих областях, описывается выражением

$$\langle e(x, I) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi(\beta(x) - 1)}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z} \left(I + \frac{1}{z} \right) \exp \left\{ -zI - \frac{[\ln z - (\beta(x) - 1)/4]^2}{\beta(x) - 1} \right\}. \quad (11.212)$$

На рис. 4.30, а, б приведены графики зависимостей выражений (11.211) и (11.212) от параметра $\beta(x)$. Отметим очень медленную зависимость параметра $\beta(x)$ от $\beta_0(x)$. Так, предельному переходу $\beta_0(x) \rightarrow \infty$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1$, а величине $\beta_0(x) = 1$ соответствует значение параметра $\beta(x) = 1,861$.

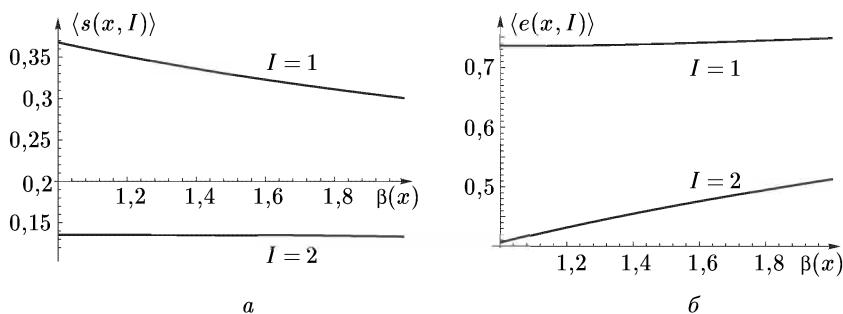


Рис. 4.30. Зависимости средних удельной площади (а) и мощности (б) в области сильных флуктуаций интенсивности от параметра $\beta(x)$

Асимптотические формулы (11.211), (11.212) описывают переход в область насыщенных флуктуаций интенсивности ($\beta(x) \rightarrow 1$). В этой области соответственно имеем

$$P(I) = e^{-I}, \quad \langle s(I) \rangle = e^{-I}, \quad \langle e(I) \rangle = (I + 1)e^{-I}, \quad (11.213)$$

а для удельной средней длины контуров получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle l(x, I) \rangle &= L_f(x) \langle |\mathbf{p}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\boldsymbol{\kappa}(x, \mathbf{R})| \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\ &= 2L_f(x) \sqrt{I} \langle |\mathbf{q}(x, \mathbf{R})| \rangle P(x; I) = L_f(x) \sqrt{2\pi\sigma_q^2(x)I} P(x; I), \end{aligned} \quad (11.214)$$

где дисперсия градиента уровня амплитуды в области насыщенных флуктуаций совпадает с дисперсией, вычисленной по первому приближению метода плавных возмущений. Максимальное значение в (11.214) достигается при $I = 1/\sqrt{2}$.

Для оценки среднего удельного числа контуров в этой области имеем

$$\begin{aligned}
 \langle n(x, I) \rangle &= \frac{L_f^2(x)}{2\pi} \langle \chi(x, \mathbf{R}, I) | \mathbf{p}(x, \mathbf{R}) | \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\
 &= -\frac{L_f^2(x)}{2\pi} \sqrt{I} \langle \Delta_{\mathbf{R}} A(x, \mathbf{R}) \delta(I(x, \mathbf{R}) - I) \rangle = \\
 &= -\frac{L_f^2(x)}{\pi} \langle \chi^2(x, \mathbf{R}) \rangle \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} P(x; I) = \\
 &= -\frac{2L_f^2(x) \sigma_q^2(x)}{\pi} \sqrt{I} \frac{\partial}{\partial I} \sqrt{I} e^{-I} = \frac{2L_f^2(x) \sigma_q^2(x)}{\pi} \left(I - \frac{1}{2} \right) e^{-I}. \quad (11.215)
 \end{aligned}$$

Максимальное значение в (11.215) достигается при $I = 3/2$, а значение уровня, при котором среднее удельное число контуров, ограничивающих область $I(x, \mathbf{R}) > I_0$, совпадает со средним удельным числом контуров, для которых $I(x, \mathbf{R}) < I_0$, в данном случае равно $I_0 = 1/2$.

Отметим, что формула (11.215) не применима в узкой окрестности значения $I \sim 0$. Для $I = 0$ должно быть $\langle n(x, 0) \rangle = 0$.

Как видно из выражений (11.214), (11.215) в области насыщенных флуктуаций средняя длина линий уровня и среднее число контуров продолжает расти с ростом параметра $\beta_0(x)$, хотя ограниченные ими средние площади и мощности, заключенные в них, остаются постоянными. Это связано с тем, что определяющую роль в этом режиме играет интерференция парциальных волн, приходящих с разных направлений.

Динамическая картина поведения линий уровня зависит от соотношения между процессами фокусировки и дефокусировки излучения отдельными участками турбулентной среды. Фокусировка на неоднородностях большого масштаба проявляется в появлении высоких пиков на случайном рельефе интенсивности. В режиме максимальных фокусировок ($\beta_0(x) \sim 1$) около половины всей мощности волны концентрируется в узких высоких пиках. При увеличении параметра $\beta_0(x)$ начинает преобладать дефокусировка излучения, приводящая к расплыванию высоких пиков и образованию сильноизрезанного (интерференционного) рельефа с большим числом вершин уровня $I \sim 1$.

Средняя длина уровня и среднее число контуров зависит, кроме параметра $\beta_0(x)$, также от волнового параметра $D(x)$, т. е. растет с уменьшением масштаба неоднородностей. Это связано с тем, что на более крупномасштабный рельеф накладывается мелкая рябь, возникающая вследствие рассеяния на малых неоднородностях.

Таким образом, мы сделали попытку дать качественное объяснение кластерной (каустической) структуры волнового поля плоской световой волны в поперечной плоскости при распространении ее в турбулентной среде и количественно оценить параметры такой структуры. В общем случае задача является многопараметрической. Однако если ограничиться анализом задачи в фиксированной плоскости, то для плоской волны, при постоянном значении волнового параметра, решение задачи описывается единственным параметром — дисперсией интенсивности в области слабых флуктуаций

$\beta_0(x)$. Мы проанализировали два крайних асимптотических случая, соответствующих слабым и насыщенным флуктуациям интенсивности. Следует заметить, что, скорее всего, пределы применимости асимптотических формул зависят от величины уровня интенсивности I . Естественно думать, что для меньших значений уровня эти пределы расширяются.

Для анализа же наиболее интересного, с точки зрения приложений, промежуточного случая, соответствующего области развитой каустической структуры, требуется знание плотности вероятностей интенсивности и ее поперечного градиента для произвольного значения дистанции, пройденной волной. Такой анализ можно произвести либо используя аппроксимирующие выражения для плотности вероятностей для всех значений параметров [115], либо на основе численного моделирования, выполненного, например, в работах [126, 127, 191, 192].

Глава 12

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Во второй части книги мы рассмотрели строгий подход к анализу статистики решений нелинейных уравнений гидродинамики, основанный на выводе и исследовании точных уравнений в вариационных производных для характеристических функционалов нелинейных случайных полей. Однако на этом пути возникают громадные трудности, связанные с неразвитостью теории уравнений в вариационных производных. Поэтому многие исследователи предпочитают исходить из более привычных уравнений в частных производных для различных моментных функций рассматриваемых полей. Нелинейность же исходных динамических уравнений для случайных полей приводит к тому, что в уравнение для каждой данной моментной функции входят моментные функции высших порядков. В итоге, даже для нахождения среднего поля или корреляционных функций необходимо, строго говоря, решать бесконечную иерархию зацепляющихся уравнений.

Таким образом, при этом подходе основная проблема состоит в обрыве указанной цепочки уравнений с помощью тех или иных физических гипотез. Наиболее известным примером здесь может служить *гипотеза Миллионщикова*, согласно которой высшие четные моментные функции выражают через низшие по законам гауссовой статистики. Недостатком подобных подходов является то, что практически невозможно строго обосновать справедливость привлекаемых гипотез, а также что обрывание цепочек уравнений часто ведет к физически противоречивым результатам, например, к отрицательности энергетических спектров турбулентности для некоторых волновых чисел. Тем не менее такие приближенные подходы помогают лучше осмыслить физические механизмы формирования статистики сильно-нелинейных случайных полей и получить количественные выражения для их корреляционных функций и спектров. Так, гипотеза Миллионщикова по-видимому дает правильные спектры развитой турбулентности в вязком интервале [68].

Подчеркнем еще, что упомянутые приближенные уравнения позволяют обнаружить многие нетривиальные эффекты, присущие нелинейным случайным полям и не имеющие аналогов в поведении детерминированных полей и волн. Здесь мы проиллюстрируем подобные методы анализа, обсудив интересный физический эффект проявления квазиупругих волновых свойств у средних потоков несжимаемой жидкости на фоне развитых турбулентных пульсаций. На этот эффект впервые обращено внимание в работе [199], где изучалась реакция турбулентности на изменение поперечного градиента средней скорости. В этой работе отмечается, что турбулентная среда в некотором смысле ведет себя как упругая среда, а именно: для плоскопараллельного потока изменение профиля средней скорости описывается волновым уравнением.

12.11. О квазиупругих свойствах однородной изотропной и стационарной несжимаемой турбулентной среды

Пусть $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ — случайное поле скорости развитой, стационарной во времени и однородной и изотропной в пространстве турбулентности $\langle \mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t) = 0 \rangle$. В реальных условиях на турбулентные пульсации жидкости накладываются регулярные средние потоки, поле скорости которых обозначим через $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$. Турбулентные пульсации и средние потоки нелинейно взаимодействуют, так что полное поле скорости представимо в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t), \quad (12.1)$$

Здесь $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ — «невозмущенное» турбулентное поле в отсутствие средних потоков, а $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ — возмущение турбулентного поля, обусловленное его взаимодействием с регулярным потоком ($\langle \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$).

Вообще говоря, проблема исследования нелинейных взаимодействий регулярных потоков с турбулентными пульсациями, как, впрочем, и проблема анализа самих турбулентных пульсаций $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$, весьма сложна. Все же, если средние потоки слабы, т. е. если выполнено неравенство

$$\mathbf{U}^2(\mathbf{r}, t) \ll 2T(t),$$

где $T(t) = \frac{1}{2} \langle [\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle$ — средняя плотность энергии турбулентных пульсаций, то в линейном приближении по малым возмущениям $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ и при заданных спектральных свойствах турбулентных пульсаций $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ удастся достаточно подробно обсудить влияние турбулентности на эволюцию средних потоков $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$.

Полное поле скорости (12.1), а также его турбулентная составляющая $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют уравнению Навье–Стокса (1.88). Поэтому подставив (12.1) в (1.88) и линеаризовав уравнения для среднего поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и флуктуационной составляющей $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$, придем к приближенным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_k} T_{ik}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t), \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u'_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_k} [u_i(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) - \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) \rangle] + \\ + u_l^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + U_l(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} = - \frac{\partial}{\partial r_i} p'(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (12.3)$$

где $T_{ik}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) \rangle$ — тензор напряжений Рейнольдса, а $P(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ — соответственно средняя и возмущенная турбулентная составляющие давления. Здесь и далее пренебрегается влиянием вязкости на динамику и статистику возмущенных полей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$. Будем, кроме того, иметь в виду, что поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют условию несжимаемости (1.88):

$$\nabla \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (12.4)$$

Для эволюции тензора напряжений Рейнольдса $T_{ik}(\mathbf{r}, t)$ из уравнения (12.3) с привлечением уравнения (1.88) для поля турбулентных пульсаций $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T_{ik}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r_l} \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) u_l(\mathbf{r}, t) \rangle + \\ + \langle u_k^T(\mathbf{r}, t) u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \langle u_i^T(\mathbf{r}, t) u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial U_k(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l} + \\ + U_l(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \langle u_i^T(\mathbf{r}, t) u_k^T(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial r_l} = \\ = - \left\langle \left[u_k^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_i} p'(\mathbf{r}, t) + u_i^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} p'(\mathbf{r}, t) \right] \right\rangle. \quad (12.5) \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$u_i(\mathbf{r}, t) u_k(\mathbf{r}, t) u_l(\mathbf{r}, t) = u_i^T(\mathbf{r}, t) u_k^T(\mathbf{r}, t) u_l'(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Пульсации давления, входящие в это уравнение, связаны с возмущенными скоростями $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t)$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned} -p'(\mathbf{r}, t) = \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \\ \times \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r'_m \partial r_n} [u_m(\mathbf{r}', t) u_n(\mathbf{r}', t) - \langle u_m(\mathbf{r}', t) u_n(\mathbf{r}', t) \rangle] + 2 \frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_m} \frac{\partial U_m(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_l} \right\}, \end{aligned}$$

где интегральный оператор $\Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — обратный к оператору Лапласа. Уравнения (12.2), (12.5) вместе с выражением для $p'(\mathbf{r}, t)$ образуют систему уравнений относительно среднего поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и тензора напряжений $T_{ik}(\mathbf{r}, t)$. Эти уравнения не замкнуты, поскольку в них входят более высокие тройные корреляции скорости типа $\langle u_i^T(\mathbf{r}, t) u_k^T(\mathbf{r}, t) u_l'(\mathbf{r}, t) \rangle$. Предполагая несущественность влияния таких корреляций на динамику возмущений, а также учитывая условия (12.4) и статистическую однородность поля $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$, сводим систему уравнений (12.2), (12.5) к виду $(\tau_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r_k} T_{ik}(\mathbf{r}, t))$:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i(\mathbf{r}, t) + \tau_i(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t), \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tau_i(\mathbf{r}, t) + \langle u_k^T(\mathbf{r}, t) u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle \frac{\partial^2 U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_l \partial r_k} = \\ = 2 \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\left\langle u_k^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_i} \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_m} \frac{\partial U_m(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_l} \right) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle u_i^T(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial r_k} \Delta^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\frac{\partial u_l^T(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_m} \frac{\partial U_m(\mathbf{r}', t)}{\partial r'_l} \right) \right\rangle \right]. \quad (12.7) \end{aligned}$$

Это уже полностью замкнутая относительно $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ система уравнений. Коэффициенты в левой части уравнения (12.7) и стоящий в правой его

части интегральный оператор определяются корреляционным тензором вихревого поля «невозмущенной» турбулентности $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$:

$$\langle u_i^T(\mathbf{r}, t) u_j^T(\mathbf{r}', t) \rangle = \int d\mathbf{q} \Phi_{ij}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (12.8)$$

Причем в силу соленоидальности поля $\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{q}) = \Delta_{ij}(\mathbf{q}) F(q).$$

Здесь, как и раньше, использовано обозначение

$$\Delta_{ij}(\mathbf{q}) = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}.$$

Будем считать энергетический спектр турбулентных пульсаций $F(q)$ заданным. Из (12.8), в частности, следует, что энергия турбулентных пульсаций выражается через энергетический спектр равенством

$$T = \frac{1}{2} \langle [\mathbf{u}^T(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty dq q^2 F(q),$$

а коэффициенты в левой части уравнения (12.7) равны

$$\langle u_k^T(\mathbf{r}, t) u_l^T(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{2}{3} T \delta_{kl}. \quad (12.9)$$

Наконец, правую часть уравнения (12.7) можно, с помощью (12.8), представить в виде

$$- \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_m(\mathbf{q}, t) g_{im}(\mathbf{q}), \quad (12.10)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{q}, t)$ — пространственный фурье-образ поля средней скорости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, а тензор $g_{im}(\mathbf{q})$ определяется выражением

$$g_{im}(\mathbf{p}) = 2 \int d\mathbf{q} \frac{q_m p_l p_k}{(\mathbf{q} + \mathbf{p})^2} \times [(q_i + p_i) \Delta_{kl}(\mathbf{q}) + (q_k + p_k) \Delta_{il}(\mathbf{q})] F(q). \quad (12.11)$$

Из очевидного свойства инвариантности тензора $g_{im}(\mathbf{p})$ относительно вращений в пространстве следует, что он обладает структурой

$$g_{im}(\mathbf{p}) = A(p) \delta_{im} + B(p) \frac{p_i p_m}{p^2}, \quad (12.12)$$

причем в силу несжимаемости среднего поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, выраженного уравнением (12.4) и вытекающим из него тождеством $\mathbf{p}\mathbf{U}(\mathbf{p}, t) = 0$, член с $B(p)$ в (12.12) исчезает, и правая часть (12.10) уравнения (12.7) равна

$$- \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_i(\mathbf{q}, t) A(q).$$

Подставив это выражение в правую часть (12.7) и учитывая (12.9), перепишем уравнения (12.6), (12.7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U_i(\mathbf{r}, t) + \tau_i(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial r_i} P(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \tau_i(\mathbf{r}, t) + \frac{2}{3} T \Delta U_i(\mathbf{r}, t) &= -A(-i\nabla) U_i(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Ядро входящего в правую часть второго уравнения интегрального оператора получим, сопоставив (12.11) с (12.12):

$$A(p) = \int d\mathbf{q} \frac{F(q)}{(q^2 + p^2)} \left[p^2 - \frac{(\mathbf{qp})^2}{q^2} \right] \left[q^2 - (\mathbf{qp}) - 2 \frac{(\mathbf{qp})^2}{p^2} \right]. \quad (12.14)$$

В интеграле (12.14) можно выполнить интегрирование по углам и получить в результате выражение

$$A(p) = 2\pi p^2 \int_0^\infty dq F(q) \left\{ \frac{2q^2}{3p^2} - \frac{q^4 - p^4}{4p^4} + \frac{(q^2 - p^2)^3}{8qp^5} \ln \left| \frac{q+p}{q-p} \right| \right\}. \quad (12.15)$$

Заметив еще, что из уравнений (12.13), с учетом (12.4), вытекает тождество $\Delta P(\mathbf{r}, t) = 0$, а, следовательно, $P(\mathbf{r}, t) = P_0 = \text{const}$, и исключив из системы уравнений (12.11), (12.4) величину $\tau_i(\mathbf{r}, t)$, придем к одному уравнению для векторного поля средней скорости жидкости $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - \left[\frac{2}{3} T \Delta + A(-i\nabla) \right] \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (12.16)$$

Соответствующее этому уравнению дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2(p) = \frac{2}{3} T p^2 - A(p).$$

Его можно записать в виде

$$\omega^2(p) = 2\pi p^2 \int_0^\infty dq F(q) f(q/p),$$

где

$$f(x) = \frac{2-x^2}{3} + \frac{x^4-1}{8} - \frac{(x^2-1)^3}{16x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Функция $f(x)$ имеет асимптотики

$$f(x) = \begin{cases} 2/3, & x \ll 1, \\ 4/15 & x \gg 1. \end{cases}$$

Кроме того, при любых x выполняются неравенства

$$\frac{2}{3} \geq f(x) \geq \frac{4}{15}.$$

Таким образом, динамика развития возмущений среднего потока во времени описывается гиперболическим уравнением (12.16), и турбулентная среда обладает определенными квазиупругими свойствами, а именно: возмущения распространяются в ней в виде поперечных волн с дисперсией. Фазовые и групповые скорости при этом заключены в пределах

$$\sqrt{\frac{2}{3}}T \geq c \geq \sqrt{\frac{4}{15}}T.$$

12.12. Излучение звука вихревыми движениями

Выше мы рассмотрели физический эффект, сугубо связанный со статистическим усреднением нелинейной системы гидродинамических уравнений в несжимаемой среде. Рассмотрим теперь эффект, связанный со слабой сжимаемостью среды — задачу об излучении звука слабо сжимаемой турбулентной средой. Эта задача соответствует включению случайных сил в линеаризованные уравнения гидродинамики. Отметим, что параметрическое воздействие турбулентной среды в рамках линейных уравнений приводит, например, к уравнениям акустики со случайным показателем преломления. Задачи такого типа рассматривались в предыдущей главе.

Турбулентное движение жидкости в некоторой конечной области пространства вне этой области в сжимаемой среде излучает акустические волны. При этом поле звука таково, как будто бы оно производится статистическим распределением акустических квадрупольей с мгновенной «мощностью» на единицу объема для слабо сжимаемой среды, равной

$$T_{ij}(\mathbf{r}, t) = \rho_0 v_i^T(\mathbf{r}, t) v_j^T(\mathbf{r}, t),$$

где ρ_0 — средняя плотность, а $v_i^T(\mathbf{r}, t)$ — компоненты вектора скорости жидкости в турбулентной области V , внутри которой турбулентность предполагается однородной и изотропной в пространстве и стационарной во времени (в рассматриваемой системе координат отсутствует перемещение жидкости в целом). Вызванные турбулентным движением флуктуационные волны плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяют при этом волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right) \rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} T_{ij}(\mathbf{r}, t), \quad (12.17)$$

где c_0 — скорость звука в однородной среде, не охваченной турбулентным движением.

Решение этого уравнения имеет вид «запаздывающего решения»:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \int_V d\mathbf{y} T_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}{c_0} \right).$$

На расстояниях, много больших линейных размеров турбулентной области V , это решение описывается асимптотическим выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{r_i r_j}{x^3} \int_V d\mathbf{y} \ddot{T}_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}{c_0} \right), \quad (12.18)$$

где обозначено

$$\ddot{T}_{ij}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}(\mathbf{y}, t).$$

Соответственно для средней плотности потока энергии акустической волны, порожденной турбулентным движением:

$$q(\mathbf{r}, t) = \frac{c_0^3 \langle \rho^2(\mathbf{r}, t) \rangle}{\rho_0},$$

получаем выражение

$$q(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{16\pi^2 c_0^5} \frac{r_i r_j r_k r_l}{r^6} \int_V d\mathbf{y} \int_V d\mathbf{z} \left\langle \ddot{T}_{ij} \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{y}|}{c_0} \right) \ddot{T}_{kl} \left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{z}|}{c_0} \right) \right\rangle. \quad (12.19)$$

Дальнейшие вычисления требуют знания пространственно-временных корреляций поля скорости, которые современная теория сильной турбулентности дать не может. Поэтому исследователи ограничиваются использованием различных правдоподобных гипотез, позволяющих провести вычисления до конца (см., например, [68], [179]–[181]). В частности, из (12.19), с учетом несжимаемости жидкости в объеме V , с использованием гипотезы Колмогорова–Обухова и ряда упрощающих гипотез, позволяющих расщепить пространственно-временные корреляции, было показано, что средняя плотность потока энергии, а также акустическая мощность пропорциональны $\sim M^5$, где

$$M = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t) \rangle}}{c_0}$$

— число *Маха* (существенно меньшее единицы).

Отметим, что данный результат допускает чисто детерминированную гидродинамическую интерпретацию, основанную на анализе взаимодействия вихрей в слабо сжимаемой среде [35]. Простейшими вихревыми системами, излучающими звук, будут две вихревые нити, излучающие цилиндрические волны, и два вихревых кольца, излучающие сферические волны.

12.12.1. Излучение звука вихревыми нитями. Рассмотрим две параллельные вихревые нити, расположенные на расстоянии $2h$ одна от другой, с одинаковыми интенсивностями

$$\kappa = \frac{1}{2} \pi \xi \sigma,$$

где ξ — завихренность (величина вихря, равномерно распределенного по площади бесконечно малого сечения σ), т. е. циркуляция вокруг каждой из вихревых нитей равна

$$\Gamma = 2\pi\xi.$$

Эти вихревые нити будем называть просто вихрями. В несжимаемой жидкости эти вихри вращаются относительно точки, расположенной посредине соединяющей их прямой, с угловой скоростью ω (см., например, [66])

$$\omega = \frac{\kappa}{2h^2}.$$

Выберем систему координат с началом в неподвижной точке и осью z , направленной вдоль вихревой нити. Тогда для потенциала скорости движения $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = -\text{Re}\nabla\varphi_0(\mathbf{r}, t)$ и квадрата скорости имеем

$$\begin{aligned}\varphi_0(\mathbf{r}, t) &= ik \ln [r^2 e^{2i\theta} - h^2 e^{2i\omega t}], \\ \mathbf{v}_0^2(\mathbf{r}, t) &= \frac{4\kappa^2 r^2}{r^4 + h^4 - 2r^2 h^2 \cos 2(\omega t - \theta)}.\end{aligned}\tag{12.20}$$

Здесь $re^{i\theta}$ — радиус-вектор точки наблюдения.

Согласно уравнению Бернулли локальные пульсации скорости, описываемые (12.20), должны создавать соответствующие пульсации давления, которые в случае слабо сжимаемой среды, а именно при $M \ll 1$ (где $M = \frac{\kappa}{2hc_0}$ — число Маха, c_0 — скорость звука), будут распространяться на большие расстояния от вихрей в виде звуковых волн.

Окружим начало координат окружностью радиуса R , такой, что $h \ll R \ll \lambda$, где λ — длина звуковой волны. Заметим, что

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{\pi}{M} \gg 1 \quad \text{при} \quad M \ll 1.$$

В области $r < R$ динамика жидкости приближенно совпадает с динамикой жидкости, рассматриваемой в качестве несжимаемой, т. е. описывается формулами (12.20).

В области же $r > R$ уравнения движения будут обычными уравнениями акустики (см., например, [61])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad p'(\mathbf{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t).\tag{12.21}$$

Здесь $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал скорости движения в акустической волне, $p'(\mathbf{r}, t)$ — давление в ней, а ρ_0 — плотность жидкости.

Учитывая, что $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t)$ зависит от t и θ только в комбинации $2(\omega t - \theta)$, будем искать решение уравнения (12.21) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = f(r) e^{2i(\omega t - \theta)},\tag{12.22}$$

Подставляя (12.22) в уравнение (12.21) и решая уравнение для функции $f(r)$ с условием излучения волн, получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = A H_2^2 \left(\frac{2\omega r}{c_0} \right) e^{2i(\omega t - \theta)}, \quad (12.23)$$

где $H_2^2(z)$ — функция Ганкеля второго рода, A — некоторая постоянная.

В случае $r \gg c_0/2\omega$ имеем обычную расходящуюся цилиндрическую волну с длиной волны $\lambda = \pi c_0/\omega$:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = A \sqrt{\frac{c}{\pi \omega r}} \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \theta - \frac{3\pi}{8} \right) \right\}.$$

В случае же $r \ll \lambda$ получаем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = i \frac{A}{\pi} \left(\frac{c}{\omega r} \right)^2 e^{2i(\omega t - \theta)}.$$

Учитывая, что в области $h \ll r \ll \lambda$ потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ должен совпадать с переменной частью $\varphi_0(\mathbf{r}, t)$ (см., например, [61]), которая равна

$$\varphi_0^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -i\kappa \frac{h^2}{r^2} e^{2i(\omega t - \theta)},$$

получаем для постоянной величины A значение

$$A = -\pi\kappa M^2 = -\frac{\pi\kappa^3}{4h^2 c_0^2}.$$

Следовательно, потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в волновой зоне имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\kappa M^{3/2} \sqrt{\frac{\pi h}{r}} \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \theta - \frac{3\pi}{8} \right) \right\}. \quad (12.24)$$

Из (12.24) при помощи (12.21) находим давление в звуковой волне:

$$p'(\mathbf{r}, t) = -2\kappa\omega\rho_0 M^{3/2} \sqrt{\frac{\pi h}{r}} \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \theta - \frac{3\pi}{8} \right) \right\}.$$

Для интенсивности звука (энергии, излучаемой в единицу времени), интегрируя по окружности радиуса $R \gg \lambda$, получаем

$$I = \frac{c_0}{\rho_0} \oint dl \left\langle [p'(r, t)]^2 \right\rangle = 2\pi^2 \rho_0 M^4 \frac{\kappa^3}{h^2}. \quad (12.25)$$

Эта излучаемая энергия должна поступать из энергии взаимодействия вихрей, находящихся в области $r < R$. Полная энергия, заключенная в области $r < R$, равна

$$E = \frac{\rho_0}{2} \int dS \mathbf{v}_0^2(\mathbf{r}, t). \quad (12.26)$$

Подставляя (12.20) в (12.26) и исключая бесконечные энергии, соответствующие энергии движения самих вихрей (так как считаем вихри точечными), получаем для энергии взаимодействия

$$E_1 = 4\pi\kappa^2\rho_0 \ln \frac{R}{h}. \quad (12.27)$$

Изменение энергии взаимодействия может происходить только за счет изменения расстояния между вихрями, т. е. $h = h(t)$, так как циркуляция сохраняется, поскольку рассматривается невязкая среда.

Дифференцируя (12.27) по времени, получаем изменение энергии

$$I(t) = -4\pi\rho_0 \frac{\kappa^2}{h(t)} \frac{d}{dt} h(t), \quad (12.28)$$

которое и переходит в энергию акустических волн. Из (12.25) и (12.28) получаем для скорости разбегания вихрей уравнение

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{\pi\kappa M^4}{2h(t)}. \quad (12.29)$$

Интегрируя (12.29) с учетом того, что $M = M(t) = \kappa / (2h(t)c_0)$, получаем выражение

$$h(t) = h_0 [1 + 6\pi M_0^4 \omega_0 t]^{1/6}.$$

Таким образом, интенсивность излучаемого звука $I \sim M^4$. В случае статистически распределенной системы пар вихревых нитей на некоторой части плоскости эта оценка, очевидно, не изменяется.

12.12.2. Излучение звука вихревыми кольцами. В несжимаемой жидкости вихревое кольцо с интенсивностью κ вызывает движение жидкости со скоростью, равной согласно *закону Био-Савара* (см., например, [66]),

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{2} a \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Здесь $\mathbf{s}$ — единичный вектор касательной к вихревому кольцу, совпадающей по направлению с вектором вихря; a — радиус кольца; $\mathbf{r}$ — вектор, характеризующий положение точки наблюдения относительно точек на кольце. В цилиндрических координатах с началом в центре кольца и осью z , направленной вдоль оси кольца, получаем

$$v_R = \frac{\kappa}{2} a \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi}{r^3}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = \frac{\kappa}{2} a \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{a - R\cos\varphi}{r^3}, \quad (12.30)$$

где

$$r = (R^2 + z^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi)^{1/2}.$$

Здесь радиус-вектор точки наблюдения имеет координаты (R, θ, z) .

Пусть теперь имеются два вихревых кольца с одинаковыми интенсивностями одинаковых радиусов a_0 , находящиеся на расстоянии $2h_0$ одно от другого. В этом случае переднее кольцо начнет увеличиваться в размерах, заднее же — уменьшаться и будет догонять переднее. В некоторый момент времени оно пройдет сквозь переднее и кольца поменяются местами. Этот эффект называется *игрой вихревых колец*. В слабо сжимаемой среде эти движения колец создают локальные сжатия и разрежения среды, которые на больших расстояниях будут распространяться в виде сферических акустических волн. Для определения структуры излучаемого звука необходимо знать движение одного кольца относительно другого в несжимаемой жидкости.

Пусть в некоторый момент времени t кольца имеют радиусы $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно и находятся на расстоянии $2h(t)$ друг от друга. Скорости изменения радиусов колец равны радиальным скоростям, индуцированным кольцами друг на друга, а скорость изменения расстояния между кольцами равна разности z компонент скоростей, индуцированных кольцами. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} a_1(t) &= 2\kappa a_2(t) h(t) \int_0^\pi d\varphi \frac{\cos \varphi}{|a_1(t) - a_2(t)|^3}, \\ \frac{d}{dt} a_2(t) &= -2\kappa a_1(t) h(t) \int_0^\pi d\varphi \frac{\cos \varphi}{|a_1(t) - a_2(t)|^3}, \\ \frac{d}{dt} h(t) &= -\frac{\kappa}{2} [a_1^2(t) - a_2^2(t)] \int_0^\pi d\varphi \frac{1}{|a_1(t) - a_2(t)|^3},\end{aligned}\quad (12.31)$$

где

$$|a_1(t) - a_2(t)| = [a_1^2(t) + a_2^2(t) + 4h^2(t) - 2a_1(t)a_2(t)\cos\varphi]^{1/2}.$$

Уравнения (12.31) надо решать с начальными условиями при $t = 0$:

$$a_1(0) = a_2(0) = a_0, \quad h(0) = h_0.$$

Первые два уравнения сразу дают связь между $a_1(t)$ и $a_2(t)$, а именно:

$$a_1^2(t) + a_2^2(t) = 2a_0^2, \quad (12.32)$$

которая показывает, что сохраняется момент инерции колец относительно оси z .

Интегралы, входящие в правую часть (12.31), выражаются через эллиптические функции. Если кольца находятся далеко друг от друга ($\gamma = h_0/a_0 \gg 1$), то их взаимодействие мало, и они движутся в первом приближении независимо друг от друга с постоянной скоростью, определяемой размером сечения колец. В другом предельном случае ($\gamma \ll 1$), который и будет далее рассматриваться, кольца активно взаимодействуют. Основной вклад в интегралы, входящие в правую часть (12.31), вносит окрестность точки $\varphi = 0$. Поэтому можно заменить

в первых двух уравнениях $\cos \varphi$, входящий в числитель, на единицу. Тогда получаем второй интеграл движения

$$4h^2(t) + [a_1(t) - a_2(t)]^2 = 4h_0^2. \quad (12.33)$$

Интеграл (12.33) означает, что сохраняется величина расстояния между точками на разных кольцах, имеющими один и тот же полярный угол.

Существование интегралов (12.32) и (12.33) позволяет свести систему (12.31) к одному уравнению относительно переменной $\theta(t)$, вводимой согласно равенствам

$$a_1(t) = \sqrt{2}a_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma \sin \theta(t)\right), \quad a_2(t) = \sqrt{2}a_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma \sin \theta(t)\right), \\ h(t) = h_0 \cos \theta(t). \quad (12.34)$$

Тогда (в первом порядке по γ) законы сохранения (12.32) и (12.33) будут автоматически выполняться. Подставляя (12.34) в (12.31), разлагая в ряд и вычисляя интеграл, получаем

$$\theta(t) = \frac{\kappa}{2h_0^2} t.$$

Следовательно, для радиусов колец и расстояния между ними имеем

$$a_1(t) = a_0(1 + \gamma \sin(\omega t)), \quad a_2(t) = a_0(1 - \gamma \sin(\omega t)), \\ h(t) = h_0 \cos(\omega t), \quad (12.35)$$

где, как и в случае вихревых нитей,

$$\omega = \frac{\kappa}{2h_0^2}. \quad (12.36)$$

Отметим, что бесконечно тонкие кольца движутся с бесконечно большой скоростью. Реальные же вихревые кольца движутся с конечной скоростью, много меньшей скорости звука, а динамика движения колец друг относительно друга мало чем отличается от рассмотренной выше. Совпадение (12.36) с соответствующей угловой скоростью для вихревых нитей показывает, что точки на кольцах, имеющие один и тот же полярный угол, вращаются относительно точки, находящейся посередине прямой, их соединяющей, с той же частотой, что и вихревые нити, находящиеся на том же расстоянии с теми же интенсивностями, что и кольца.

Для изучения структуры излучаемого нашей системой звука необходимо знать поле скоростей на больших расстояниях от колец. Свяжем систему координат с точкой, находящейся посередине между кольцами на их общей оси. Скорость движения жидкости вне колец равна

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{2} a_1(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\kappa}{2} a_2(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2}{r_2^3}. \quad (12.37)$$

Здесь $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы, касательные к вихревым кольцам, а $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — векторы, характеризующие положение точки наблюдения относительно точек на кольцах. На больших расстояниях от колец в цилиндрических координатах переменные части скорости имеют вид

$$\begin{aligned} v_R^{(1)}(t) &= \frac{3\kappa}{4} \frac{R(4z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} h(a_1^2 - a_2^2), \quad v_\theta^{(1)}(t) = 0, \\ v_z^{(1)}(t) &= \frac{3\kappa}{4} \frac{z(2z^2 - 3R^2)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} h(a_1^2 - a_2^2). \end{aligned} \quad (12.38)$$

Вводя потенциал $\mathbf{v}^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)}$, получаем

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\kappa}{4} \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} h(a_1^2 - a_2^2). \quad (12.39)$$

Подставляя (12.35) в (12.39) и переходя к сферическим координатам, можно (12.39) переписать в комплексном виде

$$\varphi^{(1)} = i\frac{\kappa}{2} a_0^3 \gamma^2 \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} e^{2i\omega t}. \quad (12.40)$$

Далее будем действовать аналогично случаю двух вихревых нитей. Окружим начало координат сферой радиуса L , такой, что $a_0 \ll L \ll \lambda$, где λ — длина волны излучаемых звуковых волн. Будем пользоваться тем, что внутри сферы движение жидкости приближенно совпадает с движением несжимаемой жидкости. Вне сферы уравнения движения будут иметь вид (12.21) с той лишь разницей, что теперь Δ — пространственный оператор Лапласа.

Представим потенциал φ в виде

$$\varphi(r, \theta) = f(r, \theta) e^{2i\omega t}.$$

Подставляя это выражение в (12.21) и учитывая, что при $r \gg \lambda$ должны быть расходящиеся сферические волны, получаем для $f(r, \theta)$ выражение

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{r}} H_{n+1/2}^{(2)}\left(\frac{2\omega r}{c_0}\right) P_n(\cos\theta),$$

где $H_{n+1/2}^{(2)}(z)$ — функция Ганкеля второго рода, а $P_n(z)$ — полином Лежандра. Сравнивая потенциал $\varphi(r, \theta)$ для $r \ll \lambda$ с $\varphi^{(1)}(r, \theta)$ получаем, что $n = 2$ и постоянная

$$A_2 = \frac{2\sqrt{\pi} \kappa \gamma^2 a_0^3 \omega^{5/2}}{3 c_0^{5/2}}.$$

Следовательно, в волновой зоне потенциал и давление имеют вид

$$\varphi(r, \theta) = \frac{2\kappa}{3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0} \right)^2 \frac{a_0}{r} (1 - 3\cos^2\theta) \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \frac{3\pi}{4} \right) \right\},$$

$$p'(r, \theta) = \frac{4i\kappa}{3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0} \right)^2 \frac{a_0 \omega}{r} \rho_0 (1 - 3 \cos^2 \theta) \exp \left\{ 2i \left(\omega t - \frac{\omega r}{c_0} - \frac{3\pi}{4} \right) \right\},$$

и для распределения по углам излучаемой энергии за единицу времени получаем

$$I(\theta) = \frac{8\pi \kappa^3 a_0^2}{9 h_0^3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0} \right)^5 \rho_0 (1 - 3 \cos^2 \theta)^2.$$

Излучение энергии вихревыми кольцами носит квадрупольный характер, и основная часть энергии излучается в конусе с осью z с углом раствора 106° как в положительном направлении z , так и в отрицательном. Интегрируя по θ , получаем для полной энергии за единицу времени выражение

$$I = \frac{64\pi \kappa^3 a_0^2}{45 h_0^3} \left(\frac{\kappa}{2h_0 c_0} \right)^5 \rho_0.$$

Таким образом, интенсивность звука, излучаемого двумя вихревыми кольцами, $\sim M^5$. В случае статистически распределенной системы пар вихревых колец в некоторой части пространства интенсивность звука также будет $\sim M^5$, что согласуется с оценками [179]–[181].

Часть V
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

ВАРИАЦИОННЫЕ (ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ) ПРОИЗВОДНЫЕ

Прежде всего напомним общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

$$\text{а) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau a(\tau)\varphi(\tau),$$

где $a(t)$ — заданная (фиксированная) функция, а пределы t_1, t_2 могут быть как конечными, так и бесконечными. Это — линейный функционал.

$$\text{б) } F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 \int_{t_1}^{t_2} d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2),$$

где $B(t_1, t_2)$ — фиксированная заданная функция. Это — квадратичный функционал.

$$\text{в) } F[\varphi(\tau)] = f(\Phi[\varphi(\tau)]),$$

где $f(x)$ — заданная функция, а величина $\Phi[\varphi(\tau)]$ — сама является функционалом.

Оценим разность значений одного и того же функционала, взятого для двух функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$, где $\delta\varphi(\tau) \neq 0$ при $t - \frac{1}{2}\Delta t < \tau < t + \frac{1}{2}\Delta t$ (см. рис. 5.1). Вариацией функционала называется линейная по $\delta\varphi(\tau)$ часть разности

$$\delta F[\varphi(\tau)] = \{F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)]\}.$$

Вариационной (или функциональной) производной называется предел (см., например, [68])

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau)}. \quad (\text{А.1})$$

С целью сокращения записи вместо обозначения $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)dt$ будем использовать $\delta F[\varphi(\tau)]/\delta\varphi(t)$.

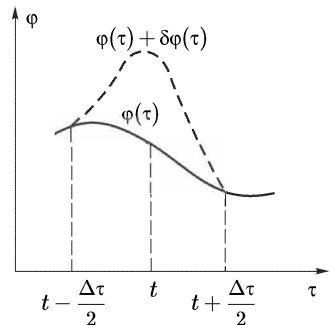


Рис. 5.1. К определению вариационной производной

Отметим, что если в (А.1) взять в качестве $\delta\varphi(\tau)$ функцию $\alpha\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — обычная дельта-функция Дирака, то формулу (А.1) можно записать в виде обычной производной:

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d}{d\alpha} F[\varphi(\tau) + \alpha\delta(\tau - t)].$$

Вариационная производная от функционала $F[\varphi(\tau)]$ является снова функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим еще от точки t как от параметра. Следовательно, эта вариационная производная будет иметь производные двоякого типа, ее можно дифференцировать обычным образом по параметру t , а можно также составить ее вариационную производную по $\varphi(\tau)$ в точке $\tau = t'$, являющуюся второй вариационной производной от исходного функционала:

$$\frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t')\delta\varphi(t)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(t')} \left[\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \right].$$

Вторая вариационная производная будет уже функционалом от $\varphi(\tau)$, зависящим от пары точек t, t' , и т. д.

Найдем вариационные производные от функционалов а), б) и в).

В случае а) имеем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F[\varphi(\tau)] = \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} d\tau a(\tau)\delta\varphi(\tau).$$

Если функция $a(t)$ непрерывна на отрезке Δt , то по теореме о среднем получаем

$$\delta F[\varphi(\tau)] = a(t') \int_{\Delta t} d\tau \delta\varphi(\tau),$$

где точка t' принадлежит отрезку $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$, так что

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a(t') = a(t). \quad (\text{А.2})$$

Аналогично в случае б) получаем

$$\frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} = \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(\tau, t) + B(t, \tau)]\varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2).$$

Отметим, что здесь функцию $B(\tau_1, \tau_2)$ всегда можно считать симметричной функцией своих аргументов.

В случае в) имеем

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] &= f(\Phi[\varphi(\tau)]) + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots = \\ &= F[\varphi(\tau)] + \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial \Phi} \delta\Phi[\varphi(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно, получаем

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} f(\Phi[\varphi(\tau)]) = \frac{\partial f(\Phi[\varphi(\tau)])}{\partial\Phi} \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \Phi[\varphi(\tau)]. \quad (\text{A.3})$$

Рассмотрим теперь функционал $\Phi[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)] F_2[\varphi(\tau)]$. Для него имеем

$$\begin{aligned} \delta\Phi[\varphi(\tau)] &= \{F_1[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] F_2[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)] - F_1[\varphi(\tau)] F_2[\varphi(\tau)]\} = \\ &= F_1[\varphi(\tau)] \delta F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)] \delta F_1[\varphi(\tau)] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)] F_2[\varphi(\tau)] = F_1[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_2[\varphi(\tau)] + F_2[\varphi(\tau)] \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F_1[\varphi(\tau)]. \quad (\text{A.4})$$

Можно формально определить и выражение для вариационной производной функционала $\varphi(\tau_0)$ по функции $\varphi(t)$ соотношением

$$\frac{\delta\varphi(\tau_0)}{\delta\varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \quad (\text{A.5})$$

Формулу (A.5) можно обосновать, например, рассматривая линейный функционал вида

$$F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \varphi(\tau) \exp\left\{-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{A.6})$$

Для него, согласно (A.2), вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F[\varphi(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(t - \tau_0)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (\text{A.7})$$

Переходя теперь формально к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ в выражениях (A.6) и (A.7), мы и получаем формулу (A.5).

С помощью формулы (A.5) очень удобно производить функциональное дифференцирование функционалов, явно зависящих от $\varphi(\tau)$. Так, для квадратичного функционала б) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) &\stackrel{(\text{A.4})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_1 d\tau_2 B(\tau_1, \tau_2) \left[\frac{\delta\varphi(\tau_1)}{\delta\varphi(t)} \varphi(\tau_2) + \varphi(\tau_1) \frac{\delta\varphi(\tau_2)}{\delta\varphi(t)} \right] \stackrel{(\text{A.5})}{=} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\tau [B(t, \tau) + B(\tau, t)] \varphi(\tau) \quad (t_1 < t < t_2). \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим функционал

$$F[\varphi(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L\left(\tau, \varphi(\tau), \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\right).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} F[\varphi(\tau)] &\stackrel{(A.3)}{=} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \left[\frac{\delta L(\tau, \varphi(\tau), d\varphi(\tau)/d\tau)}{\delta\varphi(\tau)} + \frac{\delta L(\tau, \varphi(\tau), d\varphi(\tau)/d\tau)}{\delta\dot{\varphi}(\tau)} \frac{d}{d\tau} \right] \frac{\delta\varphi(\tau)}{\delta\varphi(t)} \stackrel{(A.5)}{=} \\ &= \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}(t)} + \frac{\partial}{\partial\varphi(t)} \right) L\left(t, \varphi(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right), \end{aligned}$$

где $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$, если точка t принадлежит интервалу (t_1, t_2) .

Подобно тому как функция может быть разложена в ряд Тейлора, функционал $F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)]$ можно разложить в функциональный ряд Тейлора по функции $\eta(\tau)$ в окрестности $\eta(\tau) \sim 0$:

$$\begin{aligned} F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] &= F[\varphi(\tau)] + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t)} \eta(t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F[\varphi(\tau)]}{\delta\varphi(t_1) \delta\varphi(t_2)} \eta(t_1) \eta(t_2) + \dots \quad (A.8) \end{aligned}$$

Отметим, что операторное выражение типа

$$\begin{aligned} 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \frac{\delta^2}{\delta\varphi(t_1) \delta\varphi(t_2)} + \dots \\ = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} + \frac{1}{2!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \right]^2 + \dots \quad (A.9) \end{aligned}$$

можно сокращенно записать в виде оператора

$$\exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \right\}, \quad (A.10)$$

действие которого надо понимать именно в смысле разложения (A.9). С помощью этого оператора формулу (A.8) можно переписать в виде

$$F[\varphi(\tau) + \eta(\tau)] = \exp \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \eta(t) \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \right) F[\varphi(\tau)], \quad (A.11)$$

что позволяет нам интерпретировать оператор (A.10) как оператор функционального сдвига.

Рассмотрим теперь функционал $F[t; \varphi(\tau)]$, зависящий от параметра t . Этот функционал можно дифференцировать по t , а также найти его вариационную производную по $\varphi(t')$. Легко видеть, что эти операции перестановочны, т. е. имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta F[t; \varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} = \frac{\delta}{\delta \varphi(t')} \frac{\partial F[t; \varphi(\tau)]}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

Если область изменения τ не зависит от t , то равенство (A.12) очевидно. В противном случае, например, для функционалов $F[t; \varphi(\tau)]$, у которых $0 \leq \tau \leq t$, равенство (A.12) проверяется путем разложения функционала $F[t; \varphi(\tau)]$ в функциональный ряд Тейлора.

Рассмотрим теперь преобразование функциональных производных при функциональной замене переменных.

Пусть вместо функции $\varphi(t)$ вводится новая функция $\psi(t)$ согласно равенству

$$\varphi(t) = \Psi[\psi(\tau); t], \quad (\text{A.13})$$

где $\Psi[\psi(\tau); t]$ — некоторый функционал функции $\psi(\tau)$, зависящий также от точки t . Тогда функционал $F[\varphi(\tau)]$ является некоторым сложным функционалом от $\psi(\tau)$:

$$F[\varphi(\tau)] = F[\Psi[\psi(\tau); \tau]] \equiv F_1[\psi(\tau)].$$

В этом случае очевидно, что

$$\frac{\delta F_1[\psi(\tau)]}{\delta \varphi(t)} = \int dt' \frac{\delta F[\varphi(\tau)]}{\delta \varphi(t')} \frac{\delta \Psi[\psi(\tau); t']}{\delta \psi(t)}. \quad (\text{A.14})$$

Приложение Б

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В данном приложении мы обсудим некоторые свойства фундаментальных решений (функций Грина) волновых уравнений в свободном пространстве и слоистых средах, следуя монографии [41] и работам [139, 160].

Б.1. Случай свободного пространства

Прежде всего рассмотрим функцию Грина для одномерного уравнения Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x; x_0) + k^2g(x; x_0) = \delta(x - x_0). \quad (\text{Б.1})$$

Решение уравнения (Б.1) с условиями излучения при $x \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$g(x; x_0) = g(x - x_0) = \frac{1}{2ik}e^{ik|x-x_0|}. \quad (\text{Б.2})$$

Появление модуля $|x - x_0|$ в правой части (Б.2) обусловлено тем, что уравнение (Б.1) — уравнение второго порядка по x . Однако если мы зафиксируем взаимное расположение точек наблюдения и расположения источника, то функция Грина будет удовлетворять равенству (для определенности считаем, что $x_0 > x$)

$$\frac{\partial}{\partial x_0}g(x - x_0) = ikg(x - x_0),$$

которое можно рассматривать как уравнение первого порядка, если дополнить его начальным условием

$$g(x - x_0)|_{x_0=x} = g(0) = \frac{1}{2ik}.$$

Таким образом, при фиксированном расположении источника относительно точки наблюдения, порядок уравнения для функции Грина понижается. Это обстоятельство является общим для волновых задач (*свойство факторизации волновых уравнений*) и соответствует тому факту, что в однородном пространстве волна, излучаемая, например, в направлении $x < x_0$ (или $x > x_0$), распространяется без изменения направления.

В общем случае функция Грина удовлетворяет операторному уравнению второго порядка

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta}) \right\} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \delta(x - x_0)g(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (\text{Б.3})$$

где оператор $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ действует на временную и другие пространственные переменные, обозначенные через $\boldsymbol{\eta}$. Так, для уравнения (Б.1) оператор $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})$ есть просто число $\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta}) = k^2$.

Функция Грина имеет структуру, аналогичную (Б.2):

$$g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = e^{i|x-x_0|\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})} g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = e^{i|x-x_0|\widehat{M}(-\boldsymbol{\eta}_0)} g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (\text{Б.4})$$

и, следовательно, например при $x < x_0$, описывается операторным уравнением первого порядка по x (x_0) вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \\ &= i\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = i\widehat{M}(-\boldsymbol{\eta}_0)g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \end{aligned}$$

с начальным условием

$$g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0)|_{x_0=x} = g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \equiv g(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0).$$

Решение уравнения (Б.3) непрерывно по x , а его производная по x терпит разрыв в точке расположения источника $x = x_0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \right|_{x=x_0+0} - \left. \frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) \right|_{x=x_0-0} = \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (\text{Б.5})$$

Подставляя (Б.4) в (Б.5), получаем выражение

$$2i\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (\text{Б.6})$$

В общем случае оператор $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ можно рассматривать как интегральный оператор. В самом деле, действие оператора $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ на произвольную функцию $f(\boldsymbol{\eta})$ можно представить в виде

$$\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widehat{M}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \xi)f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi M(\boldsymbol{\eta} - \xi)f(\xi),$$

где ядро интегрального оператора определяется равенством

$$M(\boldsymbol{\eta} - \xi) = \widehat{M}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \xi). \quad (\text{Б.7})$$

Можно ввести и обратный оператор $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ с ядром $M^{-1}(\boldsymbol{\eta} - \xi)$. Действуя на равенство (Б.6) оператором $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$, получаем, согласно (Б.7), ядро интегрального оператора вида

$$M(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = 2i\widehat{M}^2(\boldsymbol{\eta})g(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0), \quad (\text{Б.8})$$

а действуя на (Б.6) обратным оператором $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$, получаем ядро обратного интегрального оператора

$$M^{-1}(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = \widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})\delta(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0) = 2ig(0, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_0). \quad (\text{Б.9})$$

Таким образом, ядра интегральных операторов $\widehat{M}(\boldsymbol{\eta})$ и $\widehat{M}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ просто определяются самим фундаментальным решением волновых уравнений.

Рассмотрим теперь конкретные волновые задачи.

1. Уравнение Гельмгольца запишем в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k^2 \right) g(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \delta(x - x_0) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (\text{Б.10})$$

где через $\mathbf{R}$ обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси x .

Решение уравнения (Б.10) с условиями излучения на бесконечности имеет вид

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad \mathbf{r} = \{x, \mathbf{R}\}.$$

Функция $g(\mathbf{r})$ допускает интегральное представление

$$g(x, \mathbf{R}) = \frac{1}{8i\pi^2} \int \frac{d\mathbf{q}}{\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2}} \exp \left\{ i\sqrt{k^2 - \mathbf{q}^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R} \right\},$$

Следовательно, оператор $\widehat{M}(\mathbf{R})$ в данном случае имеет вид

$$\widehat{M}(\mathbf{R}) = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}, \quad \widehat{M}(\mathbf{R}_0) = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}}$$

и соответствующие ядра интегральных операторов определяются, согласно (Б.8), (Б.9), выражениями

$$\begin{aligned} M(\mathbf{R}) &= 2i(k^2 + \Delta_{\mathbf{R}})g(\mathbf{R}) = -\frac{i}{2\pi R^2} \left(\frac{1}{R} - ik \right) e^{ikR}, \\ M^{-1}(\mathbf{R}) &= -\frac{i}{2\pi R} e^{ikR}. \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

В двумерном случае соответственно имеем

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \quad (\mathbf{r} = \{x, y\}),$$

где $H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}|)$ — функция Ханкеля, и, следовательно, ядра соответствующих интегральных операторов

$$\widehat{M}(y) = \sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}, \quad \widehat{M}^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}}$$

определяются выражениями

$$M(y) = \frac{k}{2|y|} H_1^{(1)}(k|y|), \quad M^{-1}(y) = \frac{1}{2} H_0^{(1)}(k|y|). \quad (\text{Б.12})$$

В одномерном случае, как указывалось выше, операторы $\widehat{M}$, $\widehat{M}^{-1}$ являются просто числами.

2. Нестационарное волновое уравнение запишем в виде (Б.3)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0, t - t_0) = \delta(x - x_0) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \delta(t - t_0). \quad (\text{Б.13})$$

Для этого уравнения оператор $\widehat{M}^2(\eta)$ является оператором дифференцирования:

$$\widehat{M}^2(\mathbf{R}, t) = \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Решение уравнения (Б.13) с условиями излучения (запаздывающее решение) в трехмерном случае имеет вид

$$g(x, \mathbf{R}, t) = -\frac{c}{2\pi} \theta(t) \delta(c^2 t^2 - x^2 - \mathbf{R}^2)$$

и, следовательно, ядра соответствующих интегральных операторов имеют вид

$$M(\mathbf{R}, t) = \frac{i\theta(t)}{\pi c t} \frac{\partial}{\partial t} \delta(c^2 t^2 - \mathbf{R}^2), \quad M^{-1}(\mathbf{R}, t) = -\frac{ic}{\pi} \theta(t) \delta(c^2 t^2 - \mathbf{R}^2). \quad (\text{Б.14})$$

В двумерном случае

$$g(x, y, t) = -\frac{c}{2\pi} \frac{\theta(ct - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{c}{2\pi} \frac{\theta(c^2 t^2 - x^2 - y^2)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}}$$

и, следовательно,

$$M(y, t) = \frac{i}{\pi c t} \theta(t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\theta(c^2 t^2 - y^2)}{\sqrt{c^2 t^2 - y^2}}, \quad M^{-1}(y, t) = -\frac{ic}{\pi} \frac{\theta(ct - y)}{\sqrt{c^2 t^2 - y^2}}. \quad (\text{Б.15})$$

В одномерном случае

$$g(x, t) = -\frac{c}{2} \theta(ct - |x|)$$

и, следовательно,

$$M(t) = \frac{i}{c} \delta'(t), \quad M^{-1}(t) = -ic\theta(t). \quad (\text{Б.16})$$

Выше мы рассмотрели некоторые свойства фундаментальных решений (функций Грина) волновых уравнений, описывающих поле точечного источника в неограниченном свободном пространстве. Отметим, что изложенный анализ существенно не меняется и для задач о поле точечного источника в конечном слое свободного или слоистого пространства.

Б.2. Случай слоистой среды

Волновые уравнения в слоистой среде, для которой $\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(z)$, факторизуются, так как волны распространяются в плоскости (x, y) и не рассеиваются назад. Обозначим волновое поле точечного источника в одномерном

пространстве через функцию $G^{(1)}(z; z_0)$. Она удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2(z) \right] G^{(1)}(z; z_0) = \delta(z - z_0),$$

решение которого можно записать в операторном виде

$$G^{(1)}(z; z_0) = \hat{L}^{-2}(z) \delta(z - z_0),$$

где оператор

$$\hat{L}^2(z) = \frac{d^2}{dz^2} + k^2(z).$$

Волновое поле точечного источника в двумерном пространстве описывается функцией Грина $G^{(2)}(x, z; z_0)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{L}^2(z) \right] G^{(2)}(x, z; z_0) = \delta(x) \delta(z - z_0).$$

Решение этого уравнения имеет структуру

$$G^{(2)}(x, z; z_0) = e^{i|x|\hat{L}(z)} G^{(2)}(0, z; z_0), \quad (\text{Б.17})$$

где функция $G^{(2)}(0, z; z_0)$ описывает волновое поле на оси $x = 0$. Скачок производной $\frac{\partial}{\partial x} G^{(2)}(x, z; z_0)$ в точке $x = 0$ описывается выражением

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} G^{(2)}(x, z; z_0) \right|_{x=+0} - \left. \frac{\partial}{\partial x} G^{(2)}(x, z; z_0) \right|_{x=-0} = \delta(z - z_0),$$

и, следовательно, с помощью соотношения (Б.17) получаем равенство

$$2i\hat{L}(z)G^{(2)}(0, z; z_0) = \delta(z - z_0), \quad (\text{Б.18})$$

из которого следует, что

$$G^{(2)}(0, z; z_0) = \frac{1}{2i} \hat{L}^{-1}(z) \delta(z - z_0). \quad (\text{Б.19})$$

Действуя теперь оператором $\hat{L}^2(z)$ на (Б.18), получаем равенство

$$\hat{L}^2(z)G^{(2)}(0, z; z_0) = \frac{1}{2i} \hat{L}(z) \delta(z - z_0). \quad (\text{Б.20})$$

Операторы $\hat{L}(z)$ и $\hat{L}^{-1}(z)$ можно рассматривать как интегральные операторы и, следовательно, равенства (Б.20), (Б.19) определяют их ядра. Принимая это во внимание, видим, что равенство (Б.19) представляет собой нелинейное интегральное уравнение для функции $G^{(2)}(0, z; z_0)$, описывающей волновое поле на оси $x = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi G^{(2)}(0, z; \xi) G^{(2)}(0, \xi; z_0) = -\frac{1}{4} G^{(1)}(z; z_0),$$

где функция $G^{(1)}(z; z_0)$ — функция Грина для одномерной задачи.

В трехмерном случае в слоистой среде функция Грина описывается уравнением

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{L}^2(z) \right] G^{(3)}(x, y, z; z_0) = \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0).$$

Запишем его решение в виде

$$G^{(3)}(x, y, z; z_0) = e^{i|x|\hat{L}(y,z)} G^{(3)}(0, y, z; z_0), \quad (\text{Б.21})$$

где оператор $\hat{L}(y, z) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{L}^2(z)$, а функция $G^{(3)}(0, y, z; z_0)$ описывает волновое поле в плоскости (y, z) . Условие скачка для производной $\frac{\partial}{\partial x} G^{(3)}(x, y, z; z_0)$ в плоскости $x = 0$ дает операторное равенство

$$G^{(3)}(0, y, z; z_0) = \frac{1}{2i} \hat{L}^{-1}(y, z) \delta(y) \delta(z - z_0),$$

которое можно переписать в виде, содержащем функцию Ганкеля первого рода:

$$G^{(3)}(0, y, z; z_0) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left[y \hat{L}(z) \right] \delta(z - z_0).$$

Используя интегральное представление для функции Ганкеля

$$H_0^{(1)}(\beta\mu) = \frac{1}{i\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \exp \left\{ i \frac{\mu}{2} \left(x + \frac{\beta^2}{x} \right) \right\},$$

получаем связь функции $G^{(3)}(0, y, z; z_0)$ с решением параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, z; z_0) = \frac{i}{2k} \hat{L}^2(z) u(t, z; z_0), \quad u(0, z; z_0) = \delta(z - z_0)$$

по вспомогательному параметру t в виде квадратуры

$$G^{(3)}(0, y, z; z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left[i \frac{k}{2t} y^2 \right] u(t, z; z_0)$$

или в виде

$$G^{(3)}(0, y, z; z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left\{ i \frac{k}{2t} (y^2 + t^2) \right\} \psi(t, z; z_0),$$

где функция $\psi(t, z; z_0)$ является решением параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, z; z_0) = \frac{i}{2k} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) - k^2 \right] \psi(t, z; z_0), \quad \psi(0, z; z_0) = \delta(z - z_0). \quad (\text{Б.22})$$

Так как ориентация оси x была произвольной, то при $y > 0$ функция

$$G^{(3)}(x, y, z; z_0) = G^{(3)}(\rho, z; z_0),$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$ определяет функцию Грина во всем пространстве:

$$G^{(3)}(x, y, z; z_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left\{ i \frac{k}{2t} (x^2 + y^2 + t^2) \right\} \psi(t, z; z_0). \quad (\text{Б.23})$$

Интегрируя равенство (Б.23) сперва по y , а затем и по x , получаем соответствующие интегральные представления для двумерной и одномерной функций Грина в виде

$$G^{(2)}(x, z; z_0) = \frac{1}{2ik} \left(\frac{k}{2\pi i} \right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp \left\{ i \frac{k}{2t} (x^2 + t^2) \right\} \psi(t, z; z_0), \quad (\text{Б.24})$$

$$G^{(1)}(z; z_0) = \frac{1}{2ik} \int_0^\infty dt \exp \left\{ i \frac{kt}{2} \right\} \psi(t, z; z_0). \quad (\text{Б.25})$$

Приложение В

МЕТОД ПОГРУЖЕНИЯ В КРАЕВЫХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧАХ

При статистическом описании динамических систем используются различные статистические методы, которые применимы, однако, только для задач определенного типа, обладающих свойством динамической причинности, когда решение задачи определяется лишь «предыдущими» (по времени или пространству) значениями параметров и не зависит от последующих. Краевые задачи не относятся к этому типу. В таких случаях желательно перейти к задачам эволюционного типа с начальными условиями. Такой переход необходим для статистических задач и может быть полезным для численного решения детерминированных проблем.

Использование *метода погружения* (обычно называемого в математической литературе *методом инвариантного погружения*) позволяет свести рассматриваемые краевые задачи к задачам эволюционного типа с начальными условиями, обладающими свойством динамической причинности по вспомогательному параметру.

Идея метода впервые была предложена в работах В. А. Амбарцумяна [3, 94, 95] (так называемый *принцип инвариантности Амбарцумяна*) для решения уравнений линейной теории переноса излучения. В дальнейшем эта идея была взята «на вооружение» математиками для сведения краевых (вообще говоря, нелинейных) задач к задачам эволюционного типа с начальными данными, более удобным для численных расчетов. По этой тематике опубликовано несколько монографий (см., например, [33, 107, 151]), в которых рассматриваются как физические аспекты метода, так и его вычислительные возможности.

В волновых краевых задачах метод погружения развивался в работах [5, 41, 101, 155]. Примечательно, что в волновых задачах параметром погружения для построения эволюционных уравнений является геометрически наглядная величина — координата границы раздела сред. По-видимому, метод погружения является наиболее простым методом, позволяющим в общем случае поставить правильным образом статистические волновые краевые задачи.

Основные уравнения метода получены для многих стационарных, нестационарных, линейных и нелинейных краевых волновых задач в пространствах различной размерности. Они описываются нелинейными интегродифференциальными уравнениями в конечномерном, а зачастую и в бесконечномерном, пространстве с вариационными производными. В общем случае эти уравнения достаточно сложны и практически не исследованы. Исключение составляют стационарные задачи о плоских волнах в слоистых средах, которые сводятся к одномерным задачам и допускают достаточно полный систематический анализ [40, 102], [155]–[157] и [160].

Отметим, что такие естественные природные среды, как атмосфера Земли и океаны могут рассматриваться в первом приближении как слоистые. И задачи о плоских волнах в слоистых средах могут служить первоначальной основой для анализа более сложных задач.

Любопытно отметить, что метод погружения, развитый первоначально для решения некоторых простейших уравнений теории переноса излучения, в настоящее время представляется тем инструментом, который может дать обоснование линейной теории переноса излучения и указать, каким образом она должна быть видоизменена в случае ее неприменимости.

Метод погружения также удобен для численного решения детерминированных задач при естественной стратификации параметров среды, так как он допускает использование натурных данных, полученных путем непосредственного зондирования среды. Для стохастических задач, при наличии эргодичности по параметру погружения, полученные уравнения чрезвычайно удобны для нахождения и анализа статистических характеристик волновых полей на основе численного моделирования. Это особенно важно ввиду того, что в естественных условиях, как правило, имеется одна или несколько реализаций параметров среды и невозможно осуществить усреднение по ансамблю реализаций. При наличии же эргодичности достаточно иметь лишь одну реализацию параметров среды.

Выбор параметров погружения, как и вывод основных уравнений метода погружения, неединственен. Тем не менее все такие уравнения, несмотря на их разный вид и структуру, эквивалентны исходной краевой задаче. И конкретный выбор параметра погружения и соответствующих уравнений метода определяется удобством для конкретных исследований.

В данном приложении мы рассмотрим различные краевые волновые задачи, получим для них и проанализируем уравнения погружения с начальными условиями.

В.3. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (\text{В.1})$$

определенных на отрезке $t \in [0, T]$ с краевыми условиями

$$g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v}, \quad (\text{В.2})$$

где g и h постоянные матрицы.

Для динамической задачи (В.1), (В.2) не выполняется условие динамической причинности, т. е. решение этой задачи $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t функционально зависит от внешних сил $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$ для всех $0 \leq \tau \leq T$. Более того, даже краевые значения $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(T)$ являются функционалами поля $\mathbf{F}(\tau, \mathbf{x}(\tau))$. Отсутствие динамической причинности в (В.1), (В.2) не позволяет применить известные статистические методы для анализа статистических характеристик решения уравнения (В.1), если $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ — случайное

пространственно-временное поле. Если ввести одновременную плотность вероятностей для решения уравнения (В.1) $P(t; \mathbf{x})$, то в силу условия (В.2) она не будет определена ни в одной точке. Краевое условие налагает на нее только определенное функциональное ограничение.

Заметим, что решение задачи (В.1), (В.2) параметрически зависит от T и $\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})$. Следуя работе [134], введем функции

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v}), \quad \mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v}),$$

описывающие краевые значения решения уравнения (В.1).

Продифференцируем теперь уравнение (В.1) по T и $\mathbf{v}$. Получаем два линейных уравнения для соответствующих производных:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t; T, \mathbf{v})}{\partial T}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k} &= \frac{\partial F_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial x_l(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}. \end{aligned} \quad (\text{В.3})$$

Эти уравнения имеют одинаковую структуру и, следовательно, можно ожидать, что их решения связаны линейным равенством

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = \lambda_k(T, \mathbf{v}) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (\text{В.4})$$

если векторная величина $\lambda(T, \mathbf{v})$ такова, что выполняются краевые условия (В.2) и решение задачи единственное. Для нахождения $\lambda(T, \mathbf{v})$ положим сперва в (В.4) $t = 0$ и умножим на матрицу g ; положим затем $t = T$ и умножим на матрицу h ; сложим получившиеся равенства. С учетом (В.2) получаем

$$g \frac{\partial \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v})}{\partial T} + h \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T} = \lambda(T, \mathbf{v}).$$

Ввиду того, что (с учетом уравнения (В.1))

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \mathbf{x}(T; T, \mathbf{v})}{\partial T} - \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial t} \Big|_{t=T} = \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} - \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})),$$

для величины $\lambda(T, \mathbf{v})$ получаем окончательное выражение

$$\lambda(T, \mathbf{v}) = -h\mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (\text{В.5})$$

Равенство (В.4) с параметром $\lambda(T, \mathbf{v})$, определенным согласно (В.5), т. е.

$$\frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial x_i(t; T, \mathbf{v})}{\partial v_k}, \quad (\text{В.6})$$

можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение, если дополнить его соответствующим начальным условием

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})|_{T=t} = \mathbf{R}(t, \mathbf{v})$$

и считать функцию $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$ известной.

Уравнение для нее можно получить, используя равенство

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{t=T} + \left. \frac{\partial \mathbf{x}(t; T, \mathbf{v})}{\partial T} \right|_{t=T}. \quad (\text{B.7})$$

Правая часть (B.7) определяется правыми частями (B.1) и (B.4) при $t = T$. В результате получаем замкнутое нелинейное (квазилинейное) уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{R}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} + \mathbf{F}(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})). \quad (\text{B.8})$$

Начальное условие для (B.8) вытекает из (B.2) при $T \rightarrow 0$:

$$\mathbf{R}(T, \mathbf{v})|_{T=0} = (g + h)^{-1} \mathbf{v}. \quad (\text{B.9})$$

Полагая теперь в (B.3) $t = 0$, получаем уравнение для второй краевой величины $\mathbf{S}(T, \mathbf{v}) = \mathbf{x}(0; T, \mathbf{v})$ вида

$$\frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial T} = -h_{kl} F_l(T, \mathbf{R}(T, \mathbf{v})) \frac{\partial \mathbf{S}(T, \mathbf{v})}{\partial v_k} \quad (\text{B.10})$$

с начальным условием, вытекающим из (B.9):

$$\mathbf{S}(T, \mathbf{v})|_{T=0} = (g + h)^{-1} \mathbf{v}.$$

Таким образом наша задача свелась к замкнутому квазилинейному уравнению (B.8) с начальным условием (B.9) и к линейному уравнению (B.4), начальное условие и коэффициенты которого определяются решением уравнения (B.8).

Для рассматриваемой задачи «вход» и «выход», 0 и T , симметричны. Поэтому к решению краевой задачи можно подходить не только со стороны $T \rightarrow 0$, но и наоборот, со стороны $0 \rightarrow T$. При этом функции $\mathbf{R}(T, \mathbf{v})$ и $\mathbf{S}(T, \mathbf{v})$ как бы меняются местами.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Уравнение (B.4) является линейным в силу того, что это по сути дела, уравнение для вариаций, несмотря на то, что исходная задача (B.1) нелинейная. За нелинейность задачи отвечает уравнение (B.8).

Отметим, что рассматриваемый метод вывода уравнений метода погружения для уравнения (B.1) легко обобщается на краевое условие [134]

$$g(\mathbf{x}(0)) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T d\tau \mathbf{K}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) = \mathbf{v},$$

где $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{K}(T, \mathbf{x})$ — произвольные заданные векторные функции.

Если функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ линейна по $\mathbf{x}$, т. е. $F_i(t, \mathbf{x}) = A_{ij}(t) x_j(t)$, то краевая задача (B.1), (B.2)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A(t) \mathbf{x}(t), \quad g\mathbf{x}(0) + h\mathbf{x}(T) = \mathbf{v},$$

упрощается и решения уравнений (В.4), (В.8) и (В.10) также будут линейными функциями по $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}(t; T, \mathbf{v}) = X(t; T)\mathbf{v}. \quad (\text{В.11})$$

В результате приходим к замкнутому матричному уравнению Риккати для матрицы $R(T) = X(T; T)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} R(T) &= A(T)R(T) - R(T)hA(T)R(T), \\ R(0) &= (g + h)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{В.12})$$

Для матрицы же $X(t, T)$ получаем линейное матричное уравнение с начальным условием

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} X(t; T) &= -X(t; T)hA(T)R(T), \\ X(t; T)_{T=t} &= R(t). \end{aligned} \quad (\text{В.13})$$

Рассмотрим теперь применение развитого выше формализма для различных линейных краевых волновых задач (стационарных и нестационарных различной размерности). При этом для конкретных задач практически удобнее получать уравнения погружения непосредственно, исходя из конкретной постановки задачи. Применение метода погружения для нелинейных волновых задач описано в монографиях [41, 155].

В.4. Стационарные краевые волновые задачи

Непосредственный интерес для физических приложений представляют линейные волновые задачи, описывающие распространение акустических и электромагнитных волн в слоисто-неоднородных средах и их обобщения как на многомерный случай, так и на нелинейный случай. В простейшей постановке, исходными уравнениями являются одномерное уравнение Гельмгольца, описывающее падение плоской волны на слой среды, и уравнение для функции Грина уравнения Гельмгольца, описывающее процесс генерации плоских волн точечным источником.

В.4.1. Одномерные стационарные краевые волновые задачи.

Уравнение Гельмгольца с несогласованной границей. Рассмотрим одномерную краевую стационарную волновую задачу

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) \right) u(x) = 0, \quad (\text{В.14})$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1 \right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ik_0,$$

описывающую падение плоской волны $u(x) = e^{-ik_0(x-L)}$ из однородного полупространства $x > L$ с волновым параметром $k_0 \neq k(L)$ на слой неоднородной среды $L_0 < x < L$. Полупространство $x < L_0$ также предполагается однородным, описываемым волновым параметром k_1 . Отметим, что краевая задача (В.14) описывает пространственную структуру монохроматической волны, пропорциональной $e^{-i\omega t}$, в неоднородной среде, и при этом $k(x) = \omega/c(x)$, где $c(x)$ — скорость распространения волны в среде.

Представим функцию $k^2(x)$ в виде

$$k^2(x) = k_0^2[1 + \varepsilon(x)],$$

где функция $\varepsilon(x)$ описывает неоднородности среды (скорости распространения волны в среде, показателя преломления или диэлектрической проницаемости). В общем случае функция $\varepsilon(x)$ — комплексная функция $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + i\gamma$, где параметр γ описывает поглощение волны в среде. Тогда краевая задача (В.14) запишется в виде

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2[1 + \varepsilon(x)] \right) u(x) = 0, \quad (B.15)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1 \right) u(x) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0 \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ik_0.$$

Для рассматриваемого случая границы $x = L$ отражение волны осуществляется не только из-за неоднородностей среды внутри слоя, но также и из-за разрыва функции $k(x)$ на этой границе. Поэтому краевую задачу (В.14) будем называть задачей с *несогласованной границей* $x = L$.

Значения поля на границах слоя определяют коэффициент отражения волны от слоя среды $R_L = u(L) - 1$ и коэффициент прохождения волны $T_L = u(L_0)$.

Замечание В.1. Структура решения задачи для однородной среды.

Рассмотрим структуру решения краевой задачи (В.14) для однородной среды, когда $k(x) \equiv k = \text{const}$. Рассмотрим двухслойный ($k_1 = k$) и трехслойный ($k_1 \neq k$) случаи. Для двухслойной задачи решение краевой задачи (В.14), очевидно, имеет вид $u(x) = (1 + R_0)e^{-ik(x-L)}$, где коэффициент отражения определяется равенством

$$R_0 = \frac{k_0 - k}{k_0 + k}. \quad (B.16)$$

Для трехслойной задачи решение краевой задачи (В.14) имеет вид

$$u(x) = (1 + R_0) \frac{e^{ik(L-x)} + R_1 e^{-ik(L-x) + 2ik(L-L_0)}}{1 + R_0 R_1 e^{2ik(L-L_0)}}, \quad (B.17)$$

где

$$R_1 = \frac{k - k_1}{k + k_1}. \quad (B.18)$$

Следовательно в этом случае поле на границе слоя и коэффициент прохождения описываются выражениями

$$u(L) = 1 + R_L = (1 + R_0) \frac{1 + R_1 e^{2ik(L-L_0)}}{1 + R_0 R_1 e^{2ik(L-L_0)}}, \quad (B.19)$$

$$T_L = (1 + R_0)(1 + R_1) \frac{e^{ik(L-L_0)}}{1 + R_0 R_1 e^{2ik(L-L_0)}}. \quad \blacklozenge$$

Перепишем теперь краевую задачу (B.15) для функций $u(x) = u(x; L)$, $v(x; L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x; L)$ в виде краевой системы уравнений

$$\frac{d}{dx} u(x; L) = v(x; L), \quad \frac{d}{dx} v(x; L) = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] u(x; L), \quad (B.20)$$

$$v(L_0; L) + ik_1 u(L_0; L) = 0, \quad v(L; L) - ik_0 u(L; L) = -2ik_0,$$

где мы включили параметр L в качестве новой переменной, следуя идеологии метода погружения.

Для большей наглядности кратко повторим вывод уравнений метода погружения для задачи (B.20). Рассматривая решение этой задачи как функцию параметра L , для производных по этому параметру получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial u(x; L)}{\partial L} = \frac{\partial v(x; L)}{\partial L}, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial v(x; L)}{\partial L} = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \frac{\partial u(x; L)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial v(L_0; L)}{\partial L} + ik_1 \frac{\partial u(L_0; L)}{\partial L} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial v(x; L)}{\partial L} \right|_{x=L} - ik_0 \left. \frac{\partial u(x; L)}{\partial L} \right|_{x=L} = - \left. \frac{\partial v(x; L)}{\partial x} \right|_{x=L} + ik_0 \left. \frac{\partial u(x; L)}{\partial x} \right|_{x=L} =$$

$$= 2k_0^2 + k_0^2 \varepsilon(L) u(L; L). \quad (B.21)$$

Сопоставляя теперь краевую задачу (B.21) с краевой задачей (B.20), получаем уравнения погружения в виде

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L; L) \right\} u(x; L), \quad u(x; L)|_{L=x} = u(x; x),$$

$$\frac{\partial}{\partial L} v(x; L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L; L) \right\} v(x; L), \quad (B.22)$$

$$v(x; L)_{L=x} = -ik_0 [2 - u(x; x)],$$

и, следовательно,

$$v(x; L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x; L) = -ik_0 \frac{2 - u(x; x)}{u(x; x)} u(x; L). \quad (B.23)$$

Для функция $u(L; L)$ имеем равенство

$$\frac{d}{dL} u(L; L) = \left. \frac{\partial u(x; L)}{\partial x} \right|_{x=L} + \left. \frac{\partial u(x; L)}{\partial L} \right|_{x=L}$$

и, с учетом уравнений (В.20) и (В.23), получаем уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u(L; L) &= 2ik_0 [u(L; L) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u^2(L; L), \\ u(L; L)|_{L=L_0} &= \frac{2k_0}{k_0 + k_1}. \end{aligned} \quad (\text{В.24})$$

Вводя теперь коэффициент отражения $R_L = u(L; L) - 1$, уравнения (В.23), (В.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right\} u(x; L), \quad u(x; L)|_{L=x} = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} R_L &= 2ik_0 R_L + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1}, \end{aligned} \quad (\text{В.25})$$

а равенство (В.23) переходит в формулу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik_0 \frac{1 - R_x}{1 + R_x} \right) u(x; L) = 0,$$

обобщающую краевые условия в (В.15) на произвольную точку x внутри слоя.

Отметим, что начальное условие в (В.25) для коэффициента отражения соответствует решению двухслойной задачи (см. замечание В.1).

Волновой параметр k_1 в краевой задаче (В.15) и, следовательно, в уравнениях (В.25) описывает отражающие свойства полупространства $x < L_0$. Если $k_1 = k_0$, то начальное условие к уравнению Риккати (В.24) будет $R_{L_0} = 0$ и границу $x = L_0$ будем называть свободно пропускающей границей. Предельные переходы по k_1 позволяют описывать случай отражающих границ. Так, случаю $k_1 \rightarrow 0$ соответствует отражающая граница $x = L_0$, на которой $\left. \frac{d}{dx} u(x) \right|_{x=L_0} = 0$, и в этом случае $R_{L_0} = 1$. В другом предельном случае $k_1 \rightarrow \infty$, соответствующем отражающей границе $x = L_0$, на которой $u(x)|_{x=L_0} = 0$, $R_{L_0} = -1$.

Отметим, что, зная функциональную зависимость коэффициента отражения R_L от функции $\varepsilon(x)$, можно определить и саму структуру волнового поля. Действительно, вариационная производная $\frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)}$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{d}{dL} \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} = 2ik_0 \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} + ik_0 \varepsilon(L) (1 + R_L) \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)}, \quad \left. \frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{L=x} = i \frac{k_0}{2} (1 + R_x)^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta R_L}{\delta \varepsilon(x)} = i \frac{k_0}{2} u^2(x; L).$$

Рассмотрим теперь задачу о поле точечного источника, находящегося внутри слоя среды в точке x_0 . Эта задача также является краевой и описывается уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) G(x; x_0) = 2ik_0 \delta(x - x_0), \quad (B.26)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1 \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_0 \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Коэффициент $2ik_0$ при дельта-функции в правой части (B.26) написан из соображений, чтобы при положении источника на границе $x_0 = L$ решение задачи (B.26) переходило бы в решение задачи (B.15), т. е. $G(x; L) = u(x; L)$. В самом деле, функция $G(x; x_0)$ непрерывна в каждой точке x , а ее производная по x имеет скачок в точке расположения источника:

$$\frac{d}{dx} G(x; x_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{d}{dx} G(x; x_0) \Big|_{x=x_0-0} = 2ik_0.$$

Полагая теперь в (B.26) $x_0 = L$ и используя условие скачка производной, мы приходим к краевой задаче (B.15).

Перепишем краевую задачу (B.26) в виде системы уравнений, аналогичной системе (B.20):

$$\frac{d}{dx} G(x; x_0; L) = V(x; x_0; L),$$

$$\frac{d}{dx} V(x; x_0; L) = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] G(x; x_0; L) + 2ik_0 \delta(x - x_0), \quad (B.27)$$

$$V(L_0; x_0; L) + ik_1 G(L_0; x_0; L) = 0, \quad V(L; x_0; L) - ik_0 G(L; x_0; L) = 0.$$

В (B.28) мы включили зависимость решения краевой задачи (B.26) от параметра L .

Продифференцируем систему (B.28) по L . В результате для производных получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial G(x; x_0; L)}{\partial L} = \frac{\partial V(x; x_0; L)}{\partial L},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial V(x; x_0; L)}{\partial L} = -k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \frac{\partial G(x; x_0; L)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial V(L_0; x_0; L)}{\partial L} + ik_1 \frac{\partial G(L_0; x_0; L)}{\partial L} = 0,$$

$$\frac{\partial V(x; x_0; L)}{\partial L} \Big|_{x=L} - ik_0 \frac{\partial G(x; x_0; L)}{\partial L} \Big|_{x=L} =$$

$$= - \frac{\partial V(x; x_0; L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + ik_0 \frac{\partial G(x; x_0; L)}{\partial x} \Big|_{x=L} = k_0^2 \varepsilon(L) G(L; x_0; L),$$

сопоставление которой с краевой с задачей (В.20), дает равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) = i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) G(L; x_0; L) u(x; L), \quad (\text{В.28})$$

которое можно рассматривать как уравнение погружения по переменной L , если дополнить его начальным условием непрерывности

$$G(x; x_0; L)|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} G(x; x_0; x), & x \geq x_0, \\ G(x; x_0; x_0), & x \leq x_0. \end{cases} \quad (\text{В.29})$$

В уравнение (В.28) и начальное условие (В.29) входит новая неизвестная функция $G(L; x_0; L)$. Для нее имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} G(L; x_0; L) = \frac{\partial}{\partial x} G(x; x_0; L) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) \Big|_{x=L},$$

которое, с учетом (В.28) и (В.28), приводит к уравнению погружения

$$\frac{\partial}{\partial L} G(L; x_0; L) = i k_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L; L) \right\} G(L; x_0; L), \quad (\text{В.30})$$

начальным условием для которого, очевидно, будет условие

$$G(L; x_0; L)|_{L=x_0} = G(x_0; x_0; x_0) = u(x_0; x_0).$$

Сопоставляя теперь уравнение (В.30) с первым уравнением из (В.24), видим, что

$$G(L; x_0; L) = G(x_0; L; L) = u(x_0; L). \quad (\text{В.31})$$

Равенство (В.31) выражает *теорему взаимности* для нашей задачи.

Таким образом, для поля точечного источника $G_\alpha(x; x_0)$, расположенного в слое неоднородной среды и описываемого краевой задачей (В.26)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) G_\alpha(x; x_0) = 2i k_0 \delta(x - x_0), \quad (\text{В.32})$$

$$\left(\frac{d}{dx} + i \alpha k_0 \right) G_\alpha(x; x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - i k_0 \right) G_\alpha(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0,$$

где $\alpha = k_1/k_0$, получаем систему уравнений погружения

$$\frac{\partial}{\partial L} G_\alpha(x; x_0; L) = i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u_\alpha(x_0; L) u_\alpha(x; L),$$

$$G_\alpha(x; x_0; L)|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} u_\alpha(x_0; x), & x \geq x_0, \\ G(x; x_0), & x \leq x_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial L} u_\alpha(x; L) = i k_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u_\alpha(L; L) \right\} u_\alpha(x; L), \quad u_\alpha(x; L)|_{L=x} = u_\alpha(x; x),$$

$$\frac{d}{dL} u_\alpha(L; L) = 2i k_0 [u_\alpha(L; L) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u_\alpha^2(L; L), \quad u_\alpha(L; L)|_{L=L_0} = \frac{2}{1 + \alpha}. \quad (\text{В.33})$$

Здесь мы через индекс α обозначили зависимость волнового поля от краевого условия на границе $x = L_0$.

Замечание В.2. Учет различных краевых условий на границе $x = L$.

Зная решение краевой задачи (В.32) (или уравнений метода погружения (В.33)), легко написать решение и для других краевых волновых задач, отличающихся от задачи (В.32) значением волнового параметра в свободном полупространстве $x > L$. Рассмотрим краевую задачу

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right) G(x; x_0) = 2ik_0 \delta(x - x_0), \quad (B.34)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + i\alpha k_0 \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik_2 \right) G(x; x_0) \Big|_{x=L} = 0.$$

Представим решение задачи (В.34) в виде

$$G(x; x_0) = G_\alpha(x; x_0) + A(x_0; L)u_\alpha(x; L), \quad (B.35)$$

где $G_\alpha(x; x_0)$ и $u_\alpha(x; x_0)$ — решения краевых задач (В.32), (В.14) соответственно, которые описываются уравнениями погружения (В.33), а величина $A(x_0; L)$ не зависит от переменной x . Очевидно, что функция (В.35) удовлетворяет дифференциальному уравнению и краевому условию на границе $x = L_0$ (В.34). Функция (В.35), очевидно, будет также удовлетворять краевому условию на границе $x = L$, если величину $A(x_0; L)$ записать в виде

$$A(x_0; L) = \frac{1}{G - u_\alpha(L; L)} u_\alpha(x_0; L),$$

где постоянная

$$G = \frac{2}{1 - k_2/k_0} \quad \text{или} \quad k_2 = \frac{G - 2}{G} k_0. \quad (B.36)$$

Таким образом, решение краевой задачи (В.34) описывается выражением

$$G(x; x_0) = G_\alpha(x; x_0) + \tilde{G}(x; x_0), \quad (B.37)$$

где функция

$$\tilde{G}(x; x_0) = \frac{1}{G - u_\alpha(L; L)} u_\alpha(x_0; L) u_\alpha(x; L). \quad (B.38)$$

Отметим, что решение методом погружения задачи с несогласованной границей $x = L$ (В.34) соответствует значению волнового числа k_2 в области $x > L$ для любого положения границы L (см. рис. 5.2, а).

Если источник волн находится на границе $x = L$, т. е. $x_0 = L$, то из (В.37), (В.38) получаем, что

$$G(x; L) = \frac{G}{G - u_\alpha(L; L)} u_\alpha(x; L) \quad \text{и} \quad G(L; L) = \frac{G u_\alpha(L; L)}{G - u_\alpha(L; L)}.$$

Отметим, что функция $G(x; L)$ описывает падение волны $u(x) = \frac{k_0}{k_2} e^{-ik_2(x-L)}$ из полупространства $x > L$ с волновым числом k_2 на слой среды. Следовательно, коэффициент отражения для этой задачи

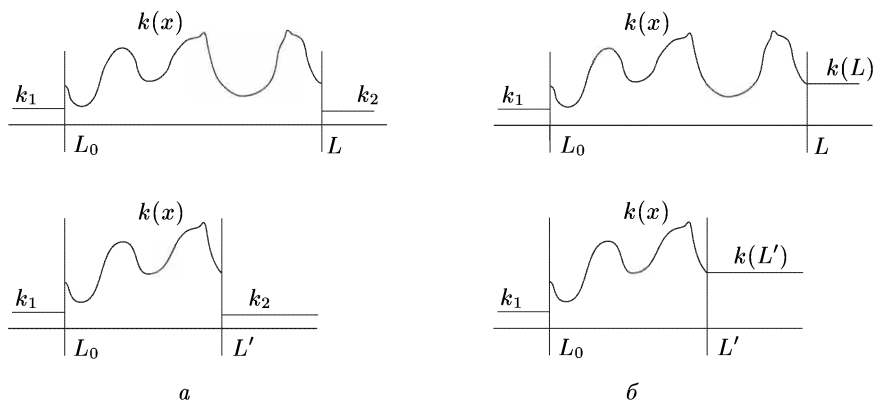


Рис. 5.2. Краевые стационарные волновые задачи о падении волны на слой среды.
 а — несогласованная граница $x = L$; б — согласованная граница $x = L$

определяется равенством

$$\tilde{R}_L = \frac{k_2}{k_0} G(L; L) - 1 = \frac{(k_2 - k_0) + (k_2 + k_0)R_L}{(k_2 + k_0) + (k_2 - k_0)R_L},$$

где R_L — коэффициент отражения в задаче (В.14). Для задачи (В.34) влияние границ $x = L_0$ и $x = L$ проявляются различным способом. Влияние границы $x = L_0$ существенно для начального условия к уравнению для функции $u_\alpha(L; L)$. Влияние же границы $x = L$ непосредственно сказывается на структуре функции $\tilde{G}(x; x_0)$.

Предельные переходы по k_2 позволяют рассматривать краевые волновые задачи с конкретными отражательными свойствами границы $x = L$. Так, для свободно пропускающей границы $x = L$ величина $k_2 = k_0$ и постоянная $G = \infty$, а функция $\tilde{G}(x; x_0) = 0$. Случай $k_2 \rightarrow 0$ соответствует отражательной границе $x = L$ с краевым условием равенства нулю производной поля на этой границе, $\left. \frac{\partial}{\partial x} G(x; x_0) \right|_{x=L} = 0$. В этом случае постоянная $G = 2$ и формула (В.37) принимает вид

$$G(x; x_0) = G_\alpha(x; x_0) + \frac{1}{2 - u_\alpha(L; L)} u_\alpha(x_0; L) u_\alpha(x; L).$$

Если источник волн находится на этой границе, т. е. $x_0 = L$, то

$$G(x; L) = \frac{2}{2 - u_\alpha(L; L)} u_\alpha(x; L) = \frac{2}{1 - R_L} u_\alpha(x; L). \quad (\text{В.39})$$

Случай $k_2 \rightarrow \infty$ также соответствует отражательной границе $x = L$, но с краевым условием равенства нулю самого поля на этой границе $G(L; x_0) = 0$. В этом случае постоянная $G = 0$ и формула (В.37) принимает вид

$$G(x; x_0) = G_\alpha(x; x_0) - \frac{1}{u_\alpha(L; L)} u_\alpha(x_0; L) u_\alpha(x; L).$$

В физических задачах распространения, например, акустических (электромагнитных) волн в неоднородных средах большое внимание уделяется вопросу о влиянии импеданса границы на акустическое (электромагнитное) поле в среде. Полученное выше представление является очень удобным и «экономически» выгодным именно для анализа таких вопросов. В самом деле, как отмечалось выше, решение каждой отдельно взятой краевой задачи требует решения уравнения Риккати и вычисления двух квадратур от, вообще говоря, сильно осциллирующих функций. Одновременное же рассмотрение двух таких задач позволяет обойтись решением двух уравнений Риккати и вычислением одной квадратуры. Все остальные волновые характеристики для обеих задач получаются алгебраическим путем с помощью найденных решений. Если мы имеем в дополнение к рассмотренным двум задачам еще и третью задачу, то ее решение сразу выписывается с помощью формулы Грина

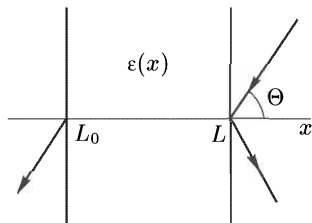
$$G_\gamma(x; x_0) = G_\alpha(x; x_0) - \frac{(\alpha - \gamma)}{1 + (\alpha - \gamma)G_\alpha(L_0; L_0)} G_\alpha(L_0; x_0) G_\alpha(x; L_0). \quad \blacklozenge$$

Замечание В.3. *Наклонное падение волны.*

Выше мы рассмотрели случай нормального падения волны на слой слоисто-неоднородной среды. Аналогичным образом можно рассмотреть и случай наклонного падения волн на границу $x = L$. В этом случае задача описывается трехмерным уравнением Гельмгольца, которое запишем в виде

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x)] \right\} U(x, \mathbf{R}) = 0, \quad (\text{В.40})$$

где через $\mathbf{R} = \{y, z\}$ обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси x . Считаем, что неоднородности среды, как и ранее, занимают часть пространства $L_0 < x < L$. Для простоты также будем считать, что вне слоя среды функция $\varepsilon(x) = 0$, т. е. волновые числа в свободных полупространствах $x > L$ и $x < L_0$ равны k_0 . Пусть теперь на слой неоднородной среды из однородного полупространства $x > L$ падает плоская волна с единичной амплитудой под углом θ (рис. 5.3):



$$U_0(x, \mathbf{R}) = e^{i\sqrt{k_0^2 - q^2}(L-x) + iq\mathbf{R}} = e^{ip(L-x) + iq\mathbf{R}},$$

Рис. 5.3. Наклонное падение плоской волны под углом θ

где $q = k_0 \sin \theta$, а $p = \sqrt{k_0^2 - q^2} = k_0 \cos \theta$. Случай нормального падения волны на границу соответствует значению $\theta = 0$.

Из-за наличия неоднородностей среды в полупространстве возникает отраженная волна, т. е. при $x > L$ волновое поле имеет структуру

$$U(x, \mathbf{R}) = e^{ip(L-x) + iq\mathbf{R}} + R_L e^{ip(x-L) + iq\mathbf{R}}.$$

В полупространстве же $x < L_0$ возникает проходящая волна вида

$$U(x, \mathbf{R}) = T_L e^{-ip(x-L_0) + iq\mathbf{R}}.$$

Краевыми условиями для уравнения (В.40) являются условия непрерывности поля и его нормальной производной (в данном случае по x) на границах слоя. Внутри слоя волновое поле имеет структуру $U(x, \mathbf{R}) = u(x)e^{iq\mathbf{R}}$, где функция $u(x)$ описывается краевой задачей для одномерного уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + P^2(x) \right) u(x) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} + ip \right) u(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ip \right) u(x) \Big|_{x=L} = -2ip. \end{aligned} \quad (\text{В.41})$$

Здесь функция

$$P^2(x) = p^2 \left[1 + \frac{k^2}{p^2} \varepsilon(x) \right] = p^2 \left[1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \varepsilon(x) \right].$$

Краевая задача (В.41) с точностью до обозначений совпадает с краевой задачей (В.14). Следовательно, рассматривая теперь ее решение как функцию параметра L , получаем уравнения погружения вида (В.34), которые в нашем случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= ik \left\{ \cos \theta + \frac{1}{2 \cos \theta} \varepsilon(L) (1 + R_L) \right\} u(x; L), \\ u(x; L) \Big|_{L=x} &= 1 + R_x; \end{aligned} \quad (\text{В.42})$$

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik(\cos \theta) R_L + \frac{ik}{2 \cos \theta} \varepsilon(L) (1 + R_L)^2, \quad R_{L_0} = 0. \quad \blacklozenge$$

Замечание В.4. Метод интегрального уравнения.

При выводе уравнений погружения мы использовали запись краевых задач в виде краевых дифференциальных уравнений. Однако в ряде случаев существенно проще получить эти уравнения из записи исходной задачи в виде соответствующего интегрального уравнения. В этом случае не приходится дифференцировать краевые условия по параметру погружения. Так, например, краевой задаче (В.30) при $\alpha = 1$ соответствует интегральное уравнение

$$G(x; x_0) = e^{ik_0|x-x_0|} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) G(\xi; x_0), \quad (\text{В.43})$$

а краевой задаче (В.14) при $k_1 = k_0$ соответствует интегральное уравнение

$$u(x; L) = e^{ik_0(L-x)} + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) u(\xi; L), \quad (\text{В.44})$$

совпадающее с уравнением (В.43) при $x_0 = L$ (т.е. $u(x; L) = G(x; L)$).

Уравнение (В.43) можно переписать также в виде

$$G(x; x_0) = e^{ik_0|x-x_0|} + i\frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi G(x; \xi) \varepsilon(\xi) e^{ik_0|\xi-x_0|}. \quad (\text{В.45})$$

Поменяем местами точки x и x_0 в (В.45). Получаем уравнение

$$G(x_0; x) = e^{ik_0|x-x_0|} + i\frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) G(x_0; \xi),$$

сопоставление которого с уравнением (В.43) приводит к теореме взаимности

$$G(x; x_0) = G(x_0; x). \quad (\text{В.46})$$

Продифференцируем уравнение (В.43) по параметру L . С учетом зависимости функции $G(x; x_0) \equiv G(x; x_0; L)$ от параметра L получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) = & i\frac{k}{2} e^{ik_0(L-x)} \varepsilon(L) G(L; x_0; L) + \\ & + i\frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) \frac{\partial}{\partial L} G(\xi; x_0; L), \end{aligned}$$

решение которого, очевидно, связано с функцией $u(x; L)$ с помощью равенства

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) = i\frac{k_0}{2} \varepsilon(L) G(L; x_0; L) u(x; L),$$

которое, с учетом теоремы взаимности, можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L) = i\frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u(x_0; L) u(x; L),$$

совпадающем с первым уравнением метода погружения (В.31).

Продифференцируем теперь уравнение (В.44) по параметру L . Для производной $\frac{\partial}{\partial L} u(x; L)$ получаем интегральное уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = a(L) e^{ik_0(L-x)} + i\frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0|x-\xi|} \varepsilon(\xi) \frac{\partial}{\partial L} u(\xi; L),$$

где $a(L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L; L) \right\}$, что эквивалентно равенству

$$\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) = ik_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L; L) \right\} u(x; L),$$

естественно, совпадающему со вторым уравнением метода погружения (В.31). Для функции $u(L; L)$ имеем

$$u(L; L) = 1 + i \frac{k_0}{2} \int_{L_0}^L d\xi e^{ik_0(L-\xi)} \varepsilon(\xi) u(\xi; L),$$

и, следовательно, для производной $\frac{d}{dL} u(L; L)$ получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u(L; L) - i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u(L; L) &= \\ &= i k_0 \left\{ 2 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) u(L; L) \right\} [u(L; L) - 1] = \\ &= -i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u(L; L) + 2i k_0 [u(L; L) - 1] + i \frac{k_0}{2} \varepsilon(L) u^2(L; L), \end{aligned}$$

приводящую к третьему уравнению — уравнению Риккати в (В.31). ♦

Замечание В.5. Матричное уравнение Гельмгольца.

При анализе различных физических волновых задач в ряде случаев возникают краевые задачи, описываемые как линейными уравнениями второго порядка, так и, вообще говоря, системой уравнений второго порядка с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) U(x) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} + B \right) U(x) \Big|_{x=L} &= D, \quad \left(\frac{d}{dx} + C \right) U(x) \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (\text{В.47})$$

где $\gamma(x)$, $K(x)$ и $U(x)$ — переменные матрицы, а B , C и D — постоянные матрицы. Используя вывод уравнений погружения, аналогичный приведенному выше, краевую задачу (В.47) можно переформулировать в виде задачи с начальными условиями и непосредственно, не приводя при этом задачу (В.47) к системе уравнений первого порядка [21, 22, 45, 164]. В самом деле, решение краевой задачи (В.47) зависит от параметра L , т. е. $U(x) = U(x; L)$ и, следовательно, вместо (В.47) можно написать краевую задачу

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) U(x; L) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} + B \right) U(x; L) \Big|_{x=L} &= D, \quad \left(\frac{d}{dx} + C \right) U(x; L) \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{В.48})$$

Дифференцируя уравнение (В.48) для матрицы $U(x; L)$ по параметру L , получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \gamma(x) \frac{d}{dx} + K(x) \right) \frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = 0. \quad (\text{В.49})$$

Уравнение (В.49) совпадает с исходным уравнением (В.48) и, следовательно, можно написать равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = U(x; L) \Lambda(L). \quad (\text{В.50})$$

Это равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение по параметру L , если дополнить его начальным условием

$$U(x; L)|_{L=x} = U(x; x).$$

Матрица $\Lambda(L)$ определяется из условия выполнения краевых условий при $x = L$. Действуя на (В.50) оператором $\left(\frac{d}{dx} + B\right)$, получаем равенство

$$\left(\frac{d}{dx} + B\right) \frac{\partial}{\partial L} U(x; L) = \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{d}{dx} + B\right) U(x; L) = \left(\frac{d}{dx} + B\right) U(x; L) \Lambda(L). \quad (\text{В.51})$$

Положим теперь $x = L$. В результате правая часть (В.51), в силу краевого условия (В.48), превращается в $D\Lambda(L)$, а для левой части (В.51) имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{d}{dx} + B\right) U(x; L) \right]_{x=L} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial L} \left[\left(\frac{d}{dx} + B\right) U(x; L) \right]_{x=L} - \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} + B\right) U(x; L) \Big|_{x=L} = \\ &= [\gamma(L) - B] D + [K(L) + B^2 - \gamma(L) B] U(L; L). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Lambda(L) = D^{-1} [\gamma(L) - B] D + D^{-1} [K(L) + B^2 - \gamma(L) B] U(L; L). \quad (\text{В.52})$$

Для матрицы $U(L; L)$ имеем равенство

$$\frac{dU(L; L)}{dL} = \frac{\partial U(x; L)}{\partial x} \Big|_{x=L} + \frac{\partial U(x; L)}{\partial L} \Big|_{x=L} = D - BU(L; L) + U(L; L)\Lambda(L),$$

которое может рассматриваться как матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} U(L; L) &= D - \{BU(L; L) + U(L; L)D^{-1}BD\} + \\ &+ U(L; L)D^{-1}\gamma(L)D + U(L; L)D^{-1}\{K(L) - \gamma(L)B + B^2\}U(L; L) \quad (\text{В.53}) \end{aligned}$$

с начальным условием, вытекающим из краевого условия (В.48) при $L = 0$:

$$U(0; 0) = (B - C)^{-1} D.$$

Рассмотренная ранее краевая задача (В.14) соответствует задаче (В.47) с параметрами $\gamma = 0$, $B = -ik_0$, $C = ik_1$, $D = -2ik_0$. ♦

Уравнение Гельмгольца со согласованной границей. Аналогичные уравнения можно получить и в случае, когда краевые условия сами зависят от

параметра L . Рассмотрим в качестве примера краевую задачу

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x)\right)u(x; L) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ik_1\right)u(x; L)\Big|_{x=L_0} = 0, \quad \left(\frac{d}{dx} - ik(L)\right)u(x; L)\Big|_{x=L} = -2ik(L),$$

описывающую падение плоской волны $u(x) = e^{-ik(L)(x-L)}$ из однородного полупространства $x > L$ с волновым параметром $k = k(L)$ на слой неоднородной среды $L_0 < x < L$. В этом случае нет скачка функции $k(x)$ на границе слоя $x = L$ для любого положения границы (рис. 5.2, б), и такую задачу будем называть задачей с *согласованной границей*.

Перепишем краевую задачу (В.54) в виде краевой системы уравнений

$$\frac{d}{dx}u(x; L) = v(x; L), \quad \frac{d}{dx}v(x; L) = -k^2(x)u(x; L), \quad (B.55)$$

$$v(L_0; L) + ik_1u(L_0; L) = 0, \quad v(L; L) - ik(L)u(L; L) = -2ik(L).$$

Рассматривая решение этой задачи как функцию параметра L , для производных по параметру L получаем краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial u(x; L)}{\partial L} = \frac{\partial v(x; L)}{\partial L}, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial v(x; L)}{\partial L} = -k^2(x)\frac{\partial u(x; L)}{\partial L},$$

$$\frac{\partial v(L_0; L)}{\partial L} + ik_1\frac{\partial u(L_0; L)}{\partial L} = 0,$$

$$\frac{\partial v(x; L)}{\partial L}\Big|_{x=L} - ik(L)\frac{\partial u(x; L)}{\partial L}\Big|_{x=L} =$$

$$= -\frac{\partial v(x; L)}{\partial x}\Big|_{x=L} + ik(L)\frac{\partial u(x; L)}{\partial x}\Big|_{x=L} + ik'(L)u(L; L) - 2ik'(L) =$$

$$= 2k^2(L) + ik'(L)[u(L; L) - 2], \quad (B.56)$$

где $k'(L) = \frac{dk(L)}{dL}$. Сопоставляя теперь краевую задачу (В.56) с краевой задачей (В.55), получаем уравнения погружения в виде

$$\frac{\partial}{\partial L}u(x; L) = \left\{ ik(L) + \frac{1}{2}\frac{k'(L)}{k(L)}[2 - u(L; L)] \right\} u(x; L),$$

$$u(x; L)|_{L=x} = u(x; x), \quad (B.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial L}v(x; L) = \left\{ ik(L) + \frac{1}{2}\frac{k'(L)}{k(L)}[2 - u(L; L)] \right\} v(x; L),$$

$$v(x; L)|_{L=x} = v(x; x) = -ik(L)[2 - u(x; x)],$$

содержащем, в отличие от (В.17), производную функции $k(L)$. Следовательно, в этом случае

$$v(x; L) = \frac{\partial}{\partial x} u(x; L) = -ik(L) \frac{2-u(x; x)}{u(x; x)} u(x; L). \quad (\text{В.58})$$

Для функция $u(L; L)$ имеем равенство

$$\frac{d}{dL} u(L; L) = \left. \frac{\partial u(x; L)}{\partial x} \right|_{x=L} + \left. \frac{\partial u(x; L)}{\partial L} \right|_{x=L}$$

и, следовательно, с учетом уравнений (В.56) и (В.57), получаем уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} u(L; L) &= 2ik(L) [u(L; L) - 1] + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} [2 - u(L; L)] u(L; L), \\ u(L; L)|_{L=L_0} &= \frac{2k(L_0)}{k(L_0) + k_1}. \end{aligned} \quad (\text{В.59})$$

Уравнения (В.57), (В.59) в терминах коэффициента отражения для данной задачи $R_L = u(L; L) - 1$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= \left\{ ik(L) + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} (1 - R_L) \right\} u(x; L), \quad u(x; L)|_{L=x} = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(L) R_L + \frac{1}{2} \frac{k'(L)}{k(L)} (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = \frac{k(L_0) - k_1}{k(L_0) + k_1}. \end{aligned} \quad (\text{В.60})$$

Если теперь ввести функцию $\varepsilon(x)$ с помощью равенства $k^2(x) = k^2[1 + \varepsilon(x)]$, то при условии $|\varepsilon(x)| \ll 1$ уравнения (В.60) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= \left\{ ik(L) + \frac{1}{4} \varepsilon'(L) (1 - R_L) \right\} u(x; L), \quad u(x; L)|_{L=x} = 1 + R_x, \\ \frac{d}{dL} R_L &= 2ik(L) R_L + \frac{1}{4} \varepsilon'(L) (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = \frac{k(L_0) - k_1}{k(L_0) + k_1}, \end{aligned} \quad (\text{В.61})$$

где $k(L) = k \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon(L) \right]$.

Для наклонного падения волны волновое поле, как и в замечании В.3, представимо в виде $U(x, \mathbf{R}) = u(x) e^{iq\mathbf{R}}$, где функция $u(x)$ описывается краевой задачей для одномерного уравнения Гельмгольца (для простоты считаем, что и граница $x = L_0$ также согласована, т. е. $k_1 = k(L_0)$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2(x) - q^2 \right) u(x; L) &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} + i\sqrt{k^2(L_0) - q^2} \right) u(x) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{d}{dx} - i\sqrt{k^2(L) - q^2} \right) u(x) \Big|_{x=L} &= -2i\sqrt{k^2(L) - q^2} \end{aligned} \quad (\text{В.62})$$

Следовательно, уравнения погружения по параметру L будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= \left\{ i \sqrt{k^2(L) - q^2} + \frac{1}{2} \frac{k(L)k'(L)}{k^2(L) - q^2} [2 - u(L; L)] \right\} u(x; L), \\ u(x; L)|_{L=x} &= u(x; x), \\ \frac{d}{dL} u(L; L) &= 2ik \sqrt{k^2(L) - q^2} [u(L; L) - 1] + \frac{1}{2} \frac{k(L)k'(L)}{k^2(L) - q^2} [2 - u(L; L)] u(L; L), \\ u(L; L)|_{L=L_0} &= 1,\end{aligned}\tag{B.63}$$

содержащий, в отличие от (B.42), производную функции $k(L)$.

Если теперь ввести функцию $\varepsilon(x)$ с помощью равенства

$$k^2(L) - q^2 = k_0^2 \cos^2 \theta + k_0^2 \varepsilon(L),$$

где θ — угол падения волны (рис. 5.3), то при условии $|\varepsilon(L)| \ll 1$ и отсутствии затухания получаем уравнения погружения в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial L} u(x; L) &= \left\{ ik_0 \cos \theta + \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \varepsilon'(L) (1 - R_L) \right\} u(x; L), \\ u(x; L)|_{L=x} &= 1 + R_x,\end{aligned}\tag{B.64}$$

$$\frac{d}{dL} R_L = 2ik_0 (\cos \theta) R_L + \frac{1}{4 \cos^2 \theta} \varepsilon'(L) (1 - R_L^2), \quad R_{L_0} = 0.$$

Эти уравнения неприменимы в узкой окрестности углов падения $\pi/2 - \theta \sim |\varepsilon(L)|$.

В.4.2. Стационарная многомерная краевая задача. Пусть слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и в точке с координатами $(x_0, \mathbf{R}_0)$, где через $\mathbf{R}$ обозначены координаты в плоскости, перпендикулярной оси x , находится точечный источник. Тогда волновое поле внутри слоя $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$ описывается краевой задачей для функции Грина уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) &= \delta(x - x_0) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} &= 0,\end{aligned}\tag{B.65}$$

где k_0 — волновое число, а $\varepsilon(x, \mathbf{R})$ — отклонение показателя преломления (или диэлектрической проницаемости от единицы). Считаем, что вне слоя $\varepsilon(x, \mathbf{R}) = 0$. Оператор $i \sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}$, фигурирующий в (B.65), можно рассматривать как линейный интегральный оператор, ядро которого определяется функцией Грина для свободного пространства (см. приложение Б). Его

действие на произвольную функцию $F(\mathbf{R})$ можно представить в виде интегрального оператора

$$\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} F(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}' K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') F(\mathbf{R}'), \quad (\text{B.66})$$

ядро которого определяется равенством

$$K(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \sqrt{k^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2i(k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}) g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}'), \quad (\text{B.67})$$

где $g_0(x, \mathbf{R})$ — функция Грина в свободном пространстве. В трехмерном случае, например,

$$g_0(x, \mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi r} e^{ik_0 r} \quad (\mathbf{r} = \{x, \mathbf{R}\})$$

и описывается интегральным представлением

$$g_0(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} g_0(\mathbf{q}) e^{i\sqrt{k_0^2 - q^2}|x| + i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad g_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{8i\pi^2 \sqrt{k_0^2 - q^2}}. \quad (\text{B.68})$$

Соответствующее ядро обратного оператора определяется равенством

$$L(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = (k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}})^{-1/2} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = 2ig_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (\text{B.69})$$

Краевая задача (B.65) эквивалентна интегральному уравнению

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) G(x_1, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0). \quad (\text{B.70})$$

Отметим, что уравнение (B.70) можно переписать также в виде уравнения

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) g_0(x_1 - x_0, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0). \quad (\text{B.71})$$

Внутри слоя среды функция $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$ непрерывна во всех точках, а что касается величины $\frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0)$, то она испытывает скачок в точке расположения источника $x = x_0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=x_0-0} = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}').$$

Если точечный источник находится на границе слоя $x_0 = L$, то волновое поле внутри слоя при $L_0 < x < L$ описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} &= -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}'). \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Краевой задаче (B.72) теперь эквивалентно интегральное уравнение

$$\begin{aligned} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) G(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0), \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

соответствующее точке $x_0 = L$ в уравнении (B.70). Полагая в (B.71) $x = L$ и сравнивая получившееся уравнение с уравнением (B.73), видим, что имеет место равенство

$$G(L, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) = G(x_0, \mathbf{R}_0; L, \mathbf{R}), \quad (\text{B.74})$$

выражающее теорему взаимности.

Замечание В.6. *Падение волны на слой среды.*

Отметим, что краевая задача (B.72) описывает падение волны из полупространства $x > L$ на слой неоднородной среды. В самом деле, если из области $x > L$ на слой среды падает волна $u_0(x - L, \mathbf{R})$ (в отрицательном направлении оси x), то она создает на границе $x = L$ распределение источников $f(\mathbf{R}_0)$, такое, что

$$f(\mathbf{R}_0) = 2i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} u_0(0, \mathbf{R}_0). \quad (\text{B.75})$$

В этом случае волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ внутри слоя связано с решением уравнения (B.72) с помощью равенства

$$U(x, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{R}_0 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) f(\mathbf{R}_0) \quad (\text{B.76})$$

и описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_{\mathbf{R}} + k_0^2 [1 + \varepsilon(x, \mathbf{R})] \right\} U(x, \mathbf{R}) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L_0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) \Big|_{x=L} &= -2i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} u_0(0, \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

которой эквивалентно интегральное уравнение

$$U(x, \mathbf{R}) = u_0(x, \mathbf{R}) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) U(x_1, \mathbf{R}_1). \quad \blacklozenge \quad (\text{B.78})$$

Получим уравнения погружения для краевой задачи (B.72). Продифференцируем уравнение (B.73) по параметру L . Получаем интегральное уравнение для $\frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= \frac{\partial}{\partial L} g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0). \quad (\text{B.79}) \end{aligned}$$

В уравнении (B.79) через функцию $H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0)$ обозначена функция

$$H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = G(L, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0), \quad (\text{B.80})$$

описывающая волновое поле в плоскости источника $x_0 = L$.

В силу факторизации функции Грина в свободном пространстве (см. приложение Б), она удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial L} g_0(x - L, \mathbf{R}) = i \sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} g_0(x - L, \mathbf{R}),$$

и, следовательно, интегральное уравнение (B.79) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) &= \hat{A}(L, \mathbf{R}_0) g(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - \\ &- k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0), \quad (\text{B.81}) \end{aligned}$$

где действие оператора $\hat{A}(L, \mathbf{R}_0)$ по переменной $\mathbf{R}_0$ на произвольную функцию $f(\mathbf{R}_0)$ описывается формулой

$$\hat{A}(L, \mathbf{R}_0) f(\mathbf{R}_0) = i \sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}} f(\mathbf{R}_0) - k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0) f(\mathbf{R}_1).$$

Оператор $\hat{A}(L, \mathbf{R}_0)$ обобщает функцию $a(L)$ в соответствующей одномерной задаче на многомерный случай.

Сопоставляя теперь интегральные уравнения (B.81) и (B.73), видим, что они имеют одинаковую структуру, и, следовательно, их решения связаны

интегральным равенством

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}} \right] G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = -k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0), \quad (\text{B.82})$$

которое и является уравнением метода погружения, если его дополнить «начальным» условием (условием непрерывности перехода по L)

$$G(x, \mathbf{R}; x, \mathbf{R}_0) = H_x(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0).$$

Уравнение (B.82) можно переписать в виде интегрального уравнения

$$G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_x^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) g(x_1, \mathbf{R}_1; L, \mathbf{R}_0), \quad (\text{B.83})$$

где функция

$$g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) = e^{i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}}(L-x)} H_x(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0). \quad (\text{B.84})$$

Если же на слой среды падает волна $u_0(x, \mathbf{R})$ (в отрицательном направлении оси x), то она создает на границе $x = L$ распределение источников $f(\mathbf{R}_0)$ (B.75), и в этом случае волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ (B.76) будет описываться интегральным уравнением

$$U(x, \mathbf{R}) = u_0(x, \mathbf{R}) - k_0^2 \int_x^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g(x, \mathbf{R}; x_1, \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) U(x_1, \mathbf{R}_1). \quad (\text{B.85})$$

Существенное отличие уравнения (B.85) при заданной функции $g(x, \mathbf{R}; x_1, \mathbf{R}_1)$ от уравнения (B.78) состоит в том, что волновое поле $U(x, \mathbf{R})$ в точке $(x, \mathbf{R})$ определяется полем $\varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)$ в области $x \leq x_1 \leq L$, т. е. оно является квазипричинным. Функциональная же зависимость поля $U(x, \mathbf{R})$ от $\varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1)$ при $L_0 \leq x_1 \leq x$ осуществляется неявным образом через функцию $g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$.

Для функции $H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial L} H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial x} G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \Big|_{x=L}. \quad (\text{B.86})$$

Первое слагаемое в правой части (B.86) определяется из (B.82) при $x = L$, а второе слагаемое из краевого условия в (B.72). В результате получаем замкнутое интегро-дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} - i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}_0}} \right] H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = -\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) H_L(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_0) \quad (\text{B.87})$$

с начальным условием, вытекающим из (В.72),

$$H_{L_0}(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0). \quad (\text{В.88})$$

Таким образом, исходная краевая задача (В.72) полностью описывается уравнениями (В.82) и (В.87). Эти уравнения и являются уравнениями метода погружения для данной задачи. Существенное отличие их от (В.72) в том, что для них ставится задача с начальными условиями по параметру L .

Обратим внимание на то обстоятельство, что функция $H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0)$, описывающая волновое поле в плоскости источника и представляющая сумму падающего и отраженного назад полей, удовлетворяет замкнутому нелинейному уравнению (В.87). Уравнение же (В.82) является линейным уравнением.

Зная решение уравнений (В.87) и (В.82) не представляет труда написать решение задачи в областях $x > L$ (отраженная волна) и $x < L_0$ (проходящая волна). При этом функция $G(L_0, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$ также описывается уравнением (В.82) с начальным условием

$$G(L_0, \mathbf{R}; L_0, \mathbf{R}_0) = g(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0).$$

Обратно рассеянное поле в статистических задачах в общей постановке практически не изучено. Исключение составляют работы [84]–[90] и [103]. Количественные и качественные результаты эффектов обратного рассеяния, основанные на различных приближенных методах, обсуждаются в обзорных работах [59, 104] и [177].

Замечание В.7. *Переход к параболическому уравнению квазиоптики.*

Проследим теперь за переходом к приближению параболического уравнения. Уравнение (В.87) описывает отраженное назад поле. Эффект отражения назад является существенно нелинейным и описывается последним членом в (В.87). Если пренебречь этим членом, то решение оставшегося уравнения имеет вид

$$H_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_0) = g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0),$$

что соответствует присутствию в плоскости $x = L$ только падающей волны. В этом случае функция $g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0)$ (В.84) переходит в обычную функцию Грина в свободном пространстве, т. е.

$$g(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_0) \equiv g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0),$$

и уравнение (В.85) принимает вид причинного интегрального уравнения:

$$U(x, \mathbf{R}) = u_0(x, \mathbf{R}) - k_0^2 \int_x^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \epsilon(x_1, \mathbf{R}_1) U(x_1, \mathbf{R}_1), \quad (\text{В.89})$$

описывающего распространение волны в приближении, допускающем рассеяние волны, вообще говоря, на не малые углы (не превышающие, однако, $\pi/2$).

Уравнение (В.89) можно переписать в виде операторного уравнения. Дифференцируя его по x , используя равенство (В.69), которое можно

переписать в виде

$$g_0(0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = \frac{1}{2i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0),$$

и свойство факторизации падающего поля $u_0(x, \mathbf{R})$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_0(x, \mathbf{R}) = -i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} u_0(x, \mathbf{R}),$$

получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}} \right) U(x, \mathbf{R}) = -i \frac{k_0^2}{2\sqrt{k_0^2 + \Delta_{\mathbf{R}}}} \{ \varepsilon(x, \mathbf{R}) U(x, \mathbf{R}) \},$$

$$U(L, \mathbf{R}) = u_0(\mathbf{R}).$$

Малоугловому приближению (параболическому уравнению) соответствует френелевское разложение в функции Грина $g_0(x, \mathbf{R})$, соответствующее условию $\Delta_{\mathbf{R}} \ll k_0^2$. ♦

Аналогично можно рассмотреть и задачу о поле точечного источника, находящегося внутри неоднородной среды. В самом деле, пусть слой среды занимает, как и ранее, часть пространства $L_0 < x < L$. Тогда поле точечного источника (функция Грина) удовлетворяет интегральному уравнению (В.70) (координаты источника $x_0, \mathbf{R}_0$):

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) = g_0(x - x_0, \mathbf{R} - \mathbf{R}_0) - k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) G(x_1, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0; L), \quad (\text{В.90})$$

где мы включили параметр погружения L в качестве аргумента функции G , т. е.

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) \equiv G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L).$$

Продифференцируем уравнение (В.90) по параметру L . Получаем интегральное уравнение для функции $\frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) &= \\ &= -k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - L, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1) G(L, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0; L) - \\ &- k_0^2 \int_{L_0}^L dx_1 \int d\mathbf{R}_1 g_0(x - x_1, \mathbf{R} - \mathbf{R}_1) \varepsilon(x_1, \mathbf{R}_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, \mathbf{R}_1; x_0, \mathbf{R}_0; L), \end{aligned}$$

сопоставление которого с уравнением (В.90), дает равенство

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L) = -k_0^2 \int d\mathbf{R}_1 G(x, \mathbf{R}; L, \mathbf{R}_1) G(x_0, \mathbf{R}_0; L, \mathbf{R}_1) \varepsilon(L, \mathbf{R}_1), \quad (\text{В.91})$$

которое можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение для функции $G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L)$, если дополнить его начальным условием

$$G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0; L)|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} G(x, \mathbf{R}; x_0, \mathbf{R}_0) & (x_0 \geq x), \\ G(x_0, \mathbf{R}; x, \mathbf{R}_0) & (x \geq x_0), \end{cases} \quad (\text{В.92})$$

отражающим условие непрерывности решения по параметру L . При выводе (В.91) мы воспользовались также равенством (В.74) (теорема взаимности).

Таким образом, уравнения (В.92), (В.82) и (В.87) образуют замкнутую систему уравнений погружения для данной задачи. Предельный переход $L_0 \rightarrow -\infty$, $L \rightarrow \infty$ соответствует решению задачи для точечного источника внутри неоднородной среды, занимающей все пространство.

Уравнение (В.91) с условием (В.92) интегрируется и мы видим, что поле точечного источника, находящегося в слое среды, простым образом (через квадратуру) связано с полем в задаче о падении волны на слой (т.е. в случае, когда источник лежит на границе среды).

Замечание В.8. *Случай слоистой среды.*

Рассмотрим подробнее случай слоистой среды, когда $\varepsilon(L, R) \equiv \varepsilon(L)$. Тогда все функции G являются функциями от разности $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$ и, используя преобразование Фурье

$$G(x, x_0, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{q} G(x; x_0; \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}, \quad G(x; x_0; \mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{R} G(x, x_0, \mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

можно перейти от системы интегро-дифференциальных уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L, \mathbf{q}) &= -(2\pi k_0)^2 \varepsilon(L) G(x; L, \mathbf{q}) G(x_0; L, \mathbf{q}), \\ G(x; x_0; L, \mathbf{q})|_{L=\max\{x, x_0\}} &= \begin{cases} G(x; x_0, \mathbf{q}) & (x_0 \geq x), \\ G(x_0; x, \mathbf{q}) & (x \geq x_0), \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{В.93})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - i\sqrt{k_0^2 - q^2} \right] G(x; L, \mathbf{q}) = -(2\pi k_0)^2 \varepsilon(L) G(x; L, \mathbf{q}) H_L(\mathbf{q}),$$

$$G(x; x, \mathbf{q}) = H_x(\mathbf{q}), \quad (\text{В.94})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - 2i\sqrt{k_0^2 - q^2} \right] = H_L(\mathbf{q}) - \frac{1}{4\pi^2} - (2\pi k_0)^2 \varepsilon(L) H_L^2(\mathbf{q}),$$

$$H_{L_0}(\mathbf{q}) = g_0(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{k_0^2 - q^2}}. \quad (\text{В.95})$$

Уравнения (В.94), (В.95) описывают распространение плоской волны, падающей наклонно к границе $x = L$, с амплитудой $g_0(q)$. После соответствующей нормировки к единичной амплитуде эти уравнения, естественно, переходят в уравнения для падающей плоской волны $u_0(x, R) = e^{i\{k_0(L-x)+qR\}}$:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x; x_0; L, \mathbf{q}) = \frac{ik_0^2}{2\sqrt{k_0^2 - q^2}} \varepsilon(L) G(x; L, \mathbf{q}) G(x_0; L, \mathbf{q}),$$

$$G(x; x_0; L, \mathbf{q})|_{L=\max\{x, x_0\}} = \begin{cases} G(x; x_0, \mathbf{q}) & (x_0 \geq x), \\ G(x_0; x, \mathbf{q}) & (x \geq x_0), \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - i\sqrt{k_0^2 - q^2} \right] G(x; L, \mathbf{q}) = \frac{ik_0^2}{2\sqrt{k_0^2 - q^2}} \varepsilon(L) G(x; L, \mathbf{q}) H_L(\mathbf{q}),$$

$$G(x; x, \mathbf{q}) = H_x(\mathbf{q}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} - 2i\sqrt{k_0^2 - q^2} \right] H_L(\mathbf{q}) = -2i\sqrt{k_0^2 - q^2} + \frac{ik_0^2}{2\sqrt{k_0^2 - q^2}} \varepsilon(L) H_L^2(\mathbf{q}),$$

$$H_{L_0}(\mathbf{q}) = 1,$$

подробно рассмотренные в предыдущем разделе данного приложения. Случай нормального падения волны соответствует условию $q = 0$. ♦

Таким образом, трехмерная краевая задача распространения волн сводится к причинным уравнениям по параметру L .

В.5. Одномерная нестационарная краевая волновая задача

В предыдущих разделах мы подробно рассмотрели линейные стационарные краевые волновые задачи. Ниже мы рассмотрим переход от краевой задачи к задаче с начальными условиями для скалярного волнового уравнения. Такие задачи возникают при анализе распространения временных импульсов в стационарных и нестационарных средах, а также при рассеянии волн одного типа на волнах другого типа (например, рассеяние света на ультразвуке или рассеяние звука на внутренних волнах). Рассмотрим простейшую одномерную задачу с несогласованной границей.

В.5.1. Случай нестационарной среды. Пусть, как и ранее, слой неоднородной среды занимает часть пространства $L_0 < x < L$ и в пространственно-временной точке (x_0, t_0) располагается точечный источник. Определим функцию Грина для волнового уравнения (волновое поле точечного источника) с помощью уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{c^2(x, t)} \right) G(x, t; x_0, t_0) = -\frac{2}{c_0} \delta(x - x_0) \delta(t - t_0), \quad (\text{В.96})$$

где функция $c(x, t)$ описывает пространственно-временные неоднородности скорости распространения волны в среде. В этом случае функция $G(x, t; x_0, t_0)$ будет безразмерной функцией. Вне слоя среды пространство считаем однородным, скорость распространения волны в нем — равной c_0 . Если $c(L, t) \neq c_0$, то существует разрыв скорости распространения волны на границе $x = L$. Такую границу, как и для стационарных задач, будем называть *несогласованной границей*. Если же $c(L, t) = c_0$, то разрыва скорости распространения волны нет и границу будем называть *согласованной*. Рассмотрим случай несогласованной границы. Уравнения метода погружения для согласованной границы смотри в работе [160].

Введем функцию

$$\varepsilon(x, t) = \frac{c_0^2}{c^2(x, t)} - 1. \quad (\text{В.97})$$

Тогда волновое уравнение (В.96) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) G(x, t; x_0, t_0) - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t) G(x, t; x_0, t_0)] = \\ = -\frac{2}{c_0} \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \end{aligned} \quad (\text{В.98})$$

Вне слоя среды решение имеет вид уходящих волн:

$$\begin{aligned} G(x, t; x_0, t_0) &= T_1(x - L - c_0 t) \quad (x \geq L), \\ G(x, t; x_0, t_0) &= T_2(x - L_0 + c_0 t) \quad (x \leq L_0), \end{aligned} \quad (\text{В.99})$$

и краевыми условиями для этой задачи, как и ранее, являются условия непрерывности поля $u(x, t)$ и производной $\partial u(x, t)/\partial x$ на границах слоя, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t; x_0, t_0) \Big|_{x=L} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t; x_0, t_0) \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{В.100})$$

Функция $G(x, t; x_0, t_0)$ непрерывна во всех точках пространства, а ее пространственная производная по x испытывает скачок в точке расположения источника:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, t; x_0, t_0) \Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial}{\partial x} G(x, t; x_0, t_0) \Big|_{x=x_0-0} = -\frac{2}{c_0} \delta(t - t_0). \quad (\text{В.101})$$

При отсутствии неоднородностей скорости распространения волны, т. е. при $\varepsilon(x, t) = 0$, функция Грина свободного пространства

$$g_0(x, t; x_0, t_0) = g_0(x - x_0; t - t_0)$$

определяется выражением

$$g_0(x; t) = \theta(c_0 t - |x|) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i0} e^{-i\omega(c_0 t - |x|)}, \quad (\text{B.102})$$

и при фиксированном расположении точек наблюдения и источника (например, при $x < x_0$) для нее имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} g(x - x_0; t - t_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} g(x - x_0; t - t_0) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} g(x - x_0; t - t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} g(x - x_0; t - t_0), \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

выражающие свойство факторизации волнового уравнения (см. приложение Б).

Краевой задачи (B.98), (B.100) эквивалентно интегральное уравнение

$$\begin{aligned} G(x, t; x_0, t_0; L) &= g_0(x - x_0; t - t_0) - \\ &- \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1; t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1) G(x_1, t_1; x_0, t_0; L)]. \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

Пусть теперь источник волн находится на границе слоя $x_0 = L$. Тогда краевая задача (B.98), (B.100) запишется в виде (с учетом равенства (B.101))

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) G(x, t; L, t_0) &= \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t) G(x, t; L, t_0)], \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t; L, t_0) \Big|_{x=L} &= \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) G(x, t; L, t_0) \Big|_{x=L_0} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.105})$$

который эквивалентен интегральному уравнению

$$\begin{aligned} G(x, t; L, t_0) &= g_0(x - L; t - t_0) - \\ &- \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1; t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(x_1, t_1) G(x_1, t_1; L, t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

Замечание В.9. *Падение волны на слой среды.*

Отметим, что интегральное уравнение (B.106) (или соответствующая краевая задача (B.105)) описывает задачу о падении волны на слой неоднородной среды. Пусть справа из области $x > L$ на него падает волна

$u_0(x - L + c_0 t)$, где c_0 — скорость распространения волны в свободном пространстве. Тогда в области $x > L$ волновое поле определяется равенством

$$u(x, t) = u_0(x - L + c_0 t) + R(x - L - c_0 t) \quad (x \geq L),$$

где $R(x - L - c_0 t)$ — отраженная волна. В области $x < L_0$ имеем проходящую волну

$$u(x, t) = T(x - L_0 + c_0 t) \quad (x \leq L_0),$$

а в области $L_0 < x < L$ волновое поле удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) u(x, t) = \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} [\varepsilon(x, t) u(x, t)] \quad (\text{B.107})$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L} &= 2 \frac{\partial}{c_0 \partial t} u_0(c_0 t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) u(x, t) \Big|_{x=L_0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

При этом падающее поле $u_0(x - L + c_0 t)$ на границе слоя $x = L$ создает распределение источников $f(t_0)$, такое, что

$$u_0(c_0 t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \theta(t - t_0) f(t_0), \quad f(t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0} u_0(c_0 t_0)$$

и волновое поле внутри слоя $u(x, t)$ описывается выражением

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 G(x, t; L, t_0) f(t_0).$$

Отметим, что падающая волна вида «ступеньки», соответствующая функции (B.102)

$$g_0(x - L, t) = \theta(x - L + c_0 t),$$

создает распределение источников

$$f(t_0) = \delta(t_0),$$

и, следовательно, в этом случае волновое поле внутри среды

$$u(x, t) = G(x, t; L, 0). \quad \blacklozenge$$

Получим теперь уравнения метода погружения для краевой задачи (B.105). Продифференцируем уравнение (B.106) по параметру L . Получаем, с учетом (B.103), интегральное уравнение для величины

$\partial G(x, t; L, t_0)/\partial L$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} G(x, t; L, t_0) = & \hat{A}(L, t_0) g_0(x - L; t - t_0) - \\ & - \frac{1}{2c_0} \int_{L_0}^L dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 g_0(x - x_1; t - t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left[\epsilon(x_1, t_1) \frac{\partial}{\partial L} G(x_1, t_1; L, t_0) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.109})$$

где оператор $\hat{A}(L, t_0)$ действует по переменной t_0 на произвольную функцию $F(t_0)$ согласно формуле

$$\hat{A}(L, t_0) F(t_0) = \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} F(t_0) - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 F(t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\epsilon(L, t_1) G_L(t_1; t_0)], \quad (\text{B.110})$$

а функция $G_L(t; t_0) = G(L, t; L, t_0)$ описывает волновое поле в плоскости источника $x = L$.

Решение интегрального уравнения (B.109) можно связать с самим волновым полем $G(x, t; L, t_0)$ в операторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, t; L, t_0) = \hat{A}(L, t_0) G(x, t; L, t_0),$$

или в виде соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial L} - \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} \right) G(x, t; L, t_0) = \\ = - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G(x, t; L, t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\epsilon(L, t_1) G_L(t_1; t_0)], \end{aligned} \quad (\text{B.111})$$

которое можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение, если дополнить его начальным условием

$$G(x, t; x, t_0) = G_x(t; t_0). \quad (\text{B.112})$$

Для функции $G_L(t; t_0) = G(L, t; L, t_0)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial L} G_L(t; t_0) = \frac{\partial}{\partial L} G(x, t; L, t_0) \Big|_{x=L} + \frac{\partial}{\partial x} G(x, t; L, t_0) \Big|_{x=L}. \quad (\text{B.113})$$

Первое слагаемое в (B.113) определяется соотношением (B.111) при $x = L$, а второе — из краевого условия (B.105). В результате получаем замкнутое интегро-дифференциальное уравнение с начальным условием, вытекающим из (B.105):

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} - \frac{\partial}{c_0 \partial t_0} + \frac{\partial}{c_0 \partial t}\right) G_L(t; t_0) = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0) - \frac{1}{2c_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 G_L(t; t_1) \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} [\varepsilon(L, t_1) G_L(t_1; t_0)], \quad (\text{B.114})$$

$$G_{L_0}(t; t_0) = g_0(0, t - t_0) = \theta(t - t_0).$$

Уравнения (B.111), (B.112), (B.114) и являются уравнениями метода погружения для данной задачи с несогласованной границей [6, 41].

Замечание В.10. Учет краевого условия на границе $x = L_0$.

Выше рассматривалось свободное полупространство $x < L_0$, в котором скорость распространения волны равнялась c_0 . Если же скорость распространения волны отлична от скорости распространения волны в полупространстве $x > L$ и равняется c_1 , то очевидно, что все полученные уравнения остаются в силе. В этом случае меняется лишь краевое условие в (B.105) на границе $x = L_0$ на условие

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{c_0 \partial t}\right) G(x, t; L, t_0) \Big|_{x=L} = \frac{2}{c_0} \delta(t - t_0),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{c_1 \partial t}\right) G(x, t; L, t_0) \Big|_{x=L_0} = 0,$$

и, следовательно, начальное условие для функции $G_L(t; t_0)$ меняется на условие

$$G_L(t; t_0) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t - t_0). \quad \blacklozenge$$

В.5.2. Стационарная среда. В случае стационарной среды, когда скорость распространения волны не зависит от времени, функция $\varepsilon(x, t) \equiv \varepsilon(x)$ и все полученные уравнения упрощаются, так как их решения зависят лишь от разности времен $(t - t_0)$. В этом случае можно положить $t_0 = 0$ и переписать, например, уравнения (B.111) и (B.114) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t}\right) G(x, t; L) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial G(x, t - t_1; L)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (\text{B.115})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) G_L(t) = \frac{2}{c_0} \delta(t) - \frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial G_L(t - t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1},$$

$$G_{L_0}(t) = g_0(0, t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t), \quad (\text{B.116})$$

если скорость распространения волны в свободном полупространстве $x < L_0 - c_1$.

Полагая в (B.115) $x = L_0$, получаем для выходящей из слоя волны $T_L(t) = G(L_0, t; L)$ уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{\partial}{c_0 \partial t} \right) T_L(t) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial T_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial G_L(t_1)}{\partial t_1},$$

$$T_{L_0}(t) = g_0(0, t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1} \theta(t). \quad (\text{B.117})$$

Замечание В.11. *Переход к стационарной волновой задаче.*

Представим решение в виде

$$G_L(t) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i0} G_L(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Тогда, например, уравнение (B.116) переписется в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dL} G_L(\omega) = 2i \frac{\omega}{c_0} [G_L(\omega) - 1] + i \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon(L) G_L^2(\omega).$$

Отсюда для коэффициента отражения на частоте ω

$$R_L(\omega) = G_L(\omega) - 1$$

получаем уравнение Риккати

$$\frac{d}{dL} R_L(\omega) = 2i \frac{\omega}{c_0} R_L(\omega) + i \frac{\omega}{2c_0} \varepsilon(L) [1 + R_L(\omega)]^2, \quad R_{L_0}(\omega) = \frac{c_1 - c_0}{c_1 + c_0},$$

соответствующее стационарной задаче. ♦

Как указывалось выше, функция $G(x, t; L)$ при $t > 0$ описывает волновое поле в среде при падении на нее волны вида

$$g_0(x - L, t) = \theta(x - L + c_0 t).$$

При этом функция $G_L(t)$, описывающая волновое поле в плоскости $x = L$, т. е. обратно рассеянное поле, имеет структуру

$$G_L(t) = H_L(t) \theta(t). \quad (\text{B.118})$$

Подставляя выражение (B.118) в уравнение (B.116) и разделяя сингулярную $\delta(t)$ и регулярную $\theta(t)$ части, что соответствует методу распространения сингулярностей (см., например, [110]), получаем равенство

$$H_L(+0) = \frac{2c(L)}{c(L) + c_0}. \quad (\text{B.119})$$

Данное равенство очевидно, и выражает ту особенность, что в момент прихода волны к границе $x = L$ отражение осуществляется только за счет скачка величины $c(x)$ на границе слоя $x = L$. Его можно было бы взять за основу с самого начала. Уравнение же для функции $H_L(t)$ при $t > 0$

принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \frac{2}{c(L)} \frac{\partial}{\partial t}\right) H_L(t) = -\frac{1}{2c_0} \varepsilon(L) \int_0^t dt_1 \frac{\partial H_L(t-t_1)}{\partial t} \frac{\partial H_L(t_1)}{\partial t_1}, \quad (\text{B.120})$$

$$H_{L_0}(t) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1}.$$

Асимптотическое поведение функции $H_L(t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно найти из этого уравнения, если учесть, что его решение при $t \rightarrow \infty$ не должно зависеть от начального (по времени) условия $H_L(0)$. Выполняя преобразование Лапласа по времени и пренебрегая начальным условием, получаем уравнение

$$\frac{d}{dL} H_L(p) = -\frac{2p}{c(L)} H_L(p) - \frac{p}{2c_0} \varepsilon(L) H_L^2(p), \quad H_{L_0}(p) = \frac{2c_1}{c_0 + c_1},$$

решение которого имеет вид

$$H_L(p) = H_{L_0}(p) \frac{\exp[-2p\tau_{L_0}(L)]}{1 + \frac{p}{2c_0} H_{L_0}(p) \int_{L_0}^L d\xi \varepsilon(\xi) \exp[-2p\tau_{L_0}(\xi)]}, \quad \tau_{L_0}(L) = \int_{L_0}^L \frac{d\eta}{c(\eta)}.$$

Следовательно,

$$H_L(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} dp \exp\{p[t - 2p\tau_{L_0}(L)]\} \frac{H_{L_0}(p)}{1 + \frac{p}{2c_0} H_{L_0}(p) \int_{L_0}^L d\xi \varepsilon(\xi) \exp[-2p\tau_{L_0}(\xi)]}, \quad (\text{B.121})$$

и решение при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарное значение $H_L(t) = 1$.

Обобщение рассмотренной задачи на многомерный линейный и нелинейный случаи см. в книге [41]. Отметим, что уравнение (B.120) удобно для решения обратной задачи [10].

Список литературы

1. *Абрамович Б. С., Дятлов А. И.* К теории распространения волн в одномерной случайно-неоднородной поглощающей среде в диффузионном приближении // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1975. Т. 18, № 8. С. 1222–1224.
2. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям / Пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. — М.: Наука, 1979.
3. *Амбарцумян В. А.* О принципе инвариантности и его некоторых применениях / В кн.: Принцип инвариантности и его приложения, 9–18, ред. М. А. Мнацаканян, О. В. Пикичян. — Ереван: АН Армянской ССР, 1989.
4. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7–38.
5. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.* Метод инвариантного погружения и волны в статистически неоднородных средах // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 5. С. 1112–1115.
6. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.* Краевые задачи для волнового уравнения // Акуст. журн. 1982. Т. 28, № 1. С. 1–7.
7. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Шевцов Б. М.* Геометрическое приближение в статистической теории волн // Акуст. журн. 1980. Т. 26, № 4. С. 488–493.
8. *Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Козлов В. Ф., Ярошук Е. В.* Флуктуации интенсивности в одномерной случайно-неоднородной среде. V. Численное интегрирование уравнений переноса излучения // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1981. Т. 24, № 8. С. 952–959.
9. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
10. *Бугров А. Г., Кляцкин В. И.* Метод погружения и решение обратных задач в слоистой среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1989. Т. 32, № 3. С. 321–330.
11. *Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С.* Выбросы случайного скалярного поля // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1968. Т. 11, № 12. С. 1864–1870.
12. *Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С.* Случайные пространственные выбросы интенсивности при распространении волны через турбулентную атмосферу // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1969. Т. 12, № 6. С. 875–881.
13. *Вировлянский А. Л., Саичев А. И., Славинский М. М.* Моментные функции при распространении волн в волноводах с протяженными случайными неоднородностями показателя преломления // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 9. С. 1149–1159.
14. *Газарян Ю. Л.* Об одномерной задаче о распространении волны в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 1856–1871.

15. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
16. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции, Т. 1. М.: Гос. изво физ.-мат. лит., 1959.
17. *Гледзер Е. В., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применения. — М.: Наука, 1981.
18. *Гочелашвили К. С., Шишов В. И.* Волны в случайно-неоднородной среде. — М.: ВИНТИ, 1981.
19. *Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д.* Волноводные свойства случайно стратифицированной среды // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1988. Т. 31, № 10. С. 1210–1217.
20. *Гредескул С. А., Фрейлихер В. Д.* Локализация и распространение волн в случайной слоистой среде // УФН. 1990. Т. 160, № 2. С. 239–262.
21. *Гряник Н. В., Кляцкин В. И.* К статистической теории локализации волн в двухслойной среде // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 6. С. 2030–2043.
22. *Гряник Н. В., Кляцкин В. И.* Локализация волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии (двухслойная модель) // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 33, № 6. С. 723–732.
23. *Гузев М. А., Попов Г. В.* Статистические характеристики поля точечного источника в случайно стратифицированной среде при отсутствии регулярной рефракции // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1995. Т. 38, № 10. С. 1023–1032.
24. *Гурбатов С. А., Малахов А. Н., Саичев А. И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990.
25. *Гурвич А. С., Калмыратова М. А., Мартель Ф. Е.* Исследование сильных флуктуаций интенсивности света в турбулентной среде при малых волновых параметрах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 7. С. 1020–1031.
26. *Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л.* и др. Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
27. *Диткин В. А., Прудников А. Р.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Наука, 1974.
28. *Должанский Ф. В., Курганский М. В., Черноусько Ю. Л.* Лабораторное и теоретическое изучение баротропных волн Россби во вращающихся каналах // Изв. АН, Физ. атм. и океана. 1979. Т. 15, № 6. С. 597–608.
29. *Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А.* Нелинейные системы гидродинамического типа. — М.: Наука, 1974.
30. *Заворотный В. У., Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно неоднородных средах // ЖЭТФ. 1977. Т. 73, № 2. С. 481–497.
31. *Займан Дж.* Модели беспорядка. Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. — М.: Мир, 1982.

32. *Ишимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайной среде, Т. 1, 2. — М.: Мир, 1980.
33. *Кастри Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. — М.: Мир, 1973.
34. *Климонтович Ю. Л.* Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 39–47.
35. *Кляцкин В. И.* Излучение звука вихревыми системами // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1966. № 6. С. 87–92.
36. *Кляцкин В. И.* К статистической теории двумерной турбулентности // ПММ. 1969. Т. 33, № 5. С. 889–891.
37. *Кляцкин В. И.* Пространственно-временное описание стационарной и однородной турбулентности // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1971. № 4. С. 120–127.
38. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
39. *Кляцкин В. И.* Динамические системы с флуктуациями параметров типа телеграфных процессов // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 4. С. 562–575.
40. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
41. *Кляцкин В. И.* Метод погружения в теории распространения волн. — М.: Наука, 1986.
42. *Кляцкин В. И.* Статистическая теория переноса излучения в слоистых случайных средах // Изв. АН СССР, Физ. атмосф. и океана. 1991. Т. 27, № 1. С. 45–66.
43. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // УФН. 1994. Т. 164, № 5. С. 531–544.
44. *Кляцкин В. И.* Равновесные распределения для квазигеострофических потоков со случайной топографией // Изв. АН, физ. атм. и океана. 1995. Т. 31, № 6. С. 749–754.
45. *Кляцкин В. И.* Локализация волн Россби под влиянием случайной цилиндрической топографии дна // Изв. АН, Физ. атм. и океана. 1996. Т. 32, № 6. С. 824–833.
46. *Кляцкин В. И., 2000.* Стохастический перенос пассивной примеси в случайных потоках // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. Т. 36, № 2. С. 177–201.
47. *Кляцкин В. И., Гуарий Д.* Когерентные явления в стохастических динамических системах // УФН. 1999. Т. 169, № 2. С. 171–207.
48. *Кляцкин В. И., Кошель К. В.* Поле точечного источника в слоистой среде // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 6. С. 1478–1481.
49. *Кляцкин В. И., Кошель К. В.* Простейший пример возникновения кластерной структуры поля пассивной примеси в случайных потоках // УФН. 2000. Т. 170, № 7. С. 771–778.

50. *Кляцкин В. И., Налбандян О. Г.* Диффузия пассивной оседающей примеси в изотропном случайном поле скоростей // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 1997. Т. 32, № 3. С. 291–297.
51. *Кляцкин В. И., Саичев А. И.* Статистическая и динамическая локализация плоских волн в случайных слоистых средах // УФН. 1992. Т. 162, № 3. С. 161–194.
52. *Кляцкин В. И., Саичев А. И.* Статистическая теория диффузии плавающих пассивной примеси в случайном поле скоростей // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 4. С. 1297–1313.
53. *Кляцкин В. И., Татарский В. И.* Приближение параболического уравнения для распространения волн в среде со случайными неоднородностями // ЖЭТФ. 1970. Т. 58, № 2. С. 624–634.
54. *Кляцкин В. И., Якушкин И. Г.* К статистической теории распространения оптического излучения в турбулентной среде // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, № 6. С. 2044–2059.
55. *Кляцкин В. И., Якушкин И. Г.*, 2000, Стохастический перенос в случайных волновых полях // ЖЭТФ. Т. 118, № 4. С. 849–862.
56. *Кляцкин В. И., Ярошук И. О.* Флуктуации интенсивности в одномерной случайно неоднородной среде. VI. Влияние границ // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1983. Т. 26, № 9. С. 1092–1099.
57. *Кляцкин В. И., Ярошук И. О.* Флуктуации интенсивности в одномерной случайно неоднородной среде. VII. Численное моделирование распространения волн в случайных средах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1983. Т. 26, № 10. С. 1241–1250.
58. *Кошель К. В., Александрова О. В.* Некоторые результаты численного моделирования диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // Изв. АН, Физ. атмосф. и океана. 1999. Т. 35, № 5. С. 638–648.
59. *Кравцов Ю. А., Саичев А. И.* Эффекты двойного прохождения волн в случайно неоднородной среде // УФН. 1982. Т. 137, № 7. С. 501–527.
60. *Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н.* Операторные методы анализа стохастических не гауссовых процессов и систем // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 10. С. 1505–1515.
61. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
62. *Лифшиц И. М., Гредескул С. А., Пастур Л. А.* Введение в теорию неупорядоченных систем. — М.: Наука, 1982.
63. *Лютовинов В. С., Четкин В. Р.* Спектр Колмогорова–Обухова в корреляционной функции пассивной примеси в турбулентной жидкости // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1989. Т. 25, № 3. С. 195–198.
64. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
65. *Малахов А. Н., Саичев А. И.* Представление отраженной волны от случайно неоднородного слоя в виде ряда, удовлетворяющему условию причинности // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1979. Т. 22, № 11. С. 1324–1333.

66. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Мир, 1965.
67. *Мирабель А. П., Монин А. С.* О статистических свойствах примеси, перемешиваемой двумерной турбулентностью // Изв. АН ССР, Физ. атмосфер. и океана. 1983. Т. 19, № 9. С. 902–912.
68. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидродинамика, Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1965, 1967.
69. *Налбандян О. Г.* Возможные аппроксимации гауссового случайного процесса в некоторых нелинейных стохастических задачах // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1977. Т. 20, № 5. С. 721–725.
70. *Новиков Е. А.* Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. № 5. С. 1919–1926.
71. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. — М.: Мир, 1984.
72. *Попов Г. В., Ярошук И. О.* О пологом падении плоской волны на страфифицированную случайную среду // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1988. Т. 31, № 10. С. 1266–1267.
73. *Попов Г. В., Ярошук И. О.,* 1990, Спектральные компоненты поля точечного источника в случайно неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. Т. 33, № 11. С. 1232–1240.
74. *Резник Г. М., Тцубанеева Т. Б.,* 1994, Влияние топографии и стратификации на планетарные волны в океане (двухслойная модель) // Изв. АН, Океанология. Т. 34, № 1. С. 5–14.
75. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1977–1978.
76. *Саччев А. И., Славинский М. М.* Уравнения для моментных функций волн, распространяющихся в случайно неоднородной среде с протяженными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 1. С. 75–83.
77. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
78. *Татарский В. И.* Распространение света в среде со случайным показателем преломления в приближении марковского процесса // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 6. С. 2106–2117.
79. *Уизем Дж..* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
80. *Уленбек Г. Е.* Фундаментальные проблемы статистической механики // УФН. 1971. Т. 103, № 2. С. 275–318.
81. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1, 2. — М.: Мир, 1964, 1967.
82. *Чернов Л. А.* Волны в случайных средах. — М.: Наука, 1975.
83. *Шапиро В. Е., Логинов В. М.* Динамические системы под воздействием случайных влияний. — Новосибирск: Наука, 1983.
84. *Шевцов Б. М.* Статистическая теория обратного рассеяния в случайно-неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1981. Т. 24, № 11. С. 1351–1355.

85. *Шевцов Б. М.* Трехмерная задача обратного рассеяния в стратифицированной случайно-неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1982. Т. 25, № 9. С. 1032–1040.
86. *Шевцов Б. М.* Задача обратного рассеяния в трехмерной случайно-неоднородной среде // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1983. Т. 26, № 4. С. 434–439.
87. *Шевцов Б. М.* Статистические характеристики обратно-рассеянного поля // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1985. Т. 28, № 6. С. 717–724.
88. *Шевцов Б. М.* Статистические характеристики волновых пакетов, рассеянных в слоистых случайных средах с отражающей поверхностью // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1987. Т. 30, № 8. С. 1007–1012.
89. *Шевцов Б. М.* Обратное рассеяние волн в слоистой случайной среде с регулярными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1989. Т. 32, № 9. С. 1079–1083.
90. *Шевцов Б. М.* Статистические характеристики волн в слоистой случайной среде с регулярными неоднородностями // Изв. ВУЗов, Радиофиз. 1990. Т. 33, № 2. С. 191–195.
91. *Ярошук И. О.* О численном моделировании одномерных стохастических волновых задач // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1748–1751.
92. *Ярошук И. О.*, 1986, Численное моделирование распространения плоских волн в случайных слоистых линейных и нелинейных средах / Дис. канд. физ.-мат. наук. Владивосток: ТОИ ДВО РАН.
93. *Adler R. J.* The Geometry of Random Fields. — N.Y.: Wiley, 1991.
94. *Ambartsumian V. A.* Diffuse reflection of light by a foggy medium // Comptes Rendus (Doklady) de l'USSR. 1943. V. 38, № 8. P. 229–232.
95. *Ambartsumian V. A.* On the problem of diffuse reflection of light // Journal of Physics USSR. 1944. V. 8, № 1. P. 65.
96. *Anderson P. W.* Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev. 1958. V. 109. P. 1492–1505.
97. *Asch M., Papanicolaou G., Postel M., Sheng P., White B.* Frequency content of randomly scattered signals // Part I, Wave Motion, 1990. V. 12, № 4. P. 429–450.
98. *Asch M., Kohler W., Papanicolaou G., Postel M., White B.* Frequency content of randomly scattered signals // SIAM Review. 1990. V. 33, № 4. P. 519–625.
99. *Asch M., Kohler W., Papanicolaou G., Postel M., White B.* Statistical inversion from reflections of spherical waves by a randomly layered medium // Waves in Random Media. 1996. V. 6, № 4. P. 293–334.
100. *Avellaneda M., Majda A. J.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 381–429.
101. *Babkin G. I., Klyatskin V. I.*, 1982a, Invariant imbedding method for wave problems // Wave Motion. V. 4, № 2. P. 195–207.

102. *Babkin G. I., Klyatskin V. I.*, 1982b, Statistical theory of radiative transfer in layered media // *Wave Motion*. V. 4, № 3. P. 327–339.
103. *Barabanenkov Yu. N., Kryukov D. I.* Functional Fokker-Planck formalism for wave propagation in random media under delocalized and weak localized regimes // *Waves in Random Media*. 1992. V. 2, № 1. P. 1–6.
104. *Barabanenkov Yu. N., Kravtsov Yu. A., Ozrin V. D., Saichev A. I.*, 1991, Enhanced backscattering in optics / *Progress in Optics XXIX*, ed. E. Wolf, 67–197, North-Holland, Amsterdam.
105. *Batchelor G. K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. 1. General discussion and the case of small conductivity // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 5, № 1. P. 113–133.
106. *Batchelor G. K., Howells I. D., Townsend A. A.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. 2. The case of large conductivity // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 5, № 1. P. 134–139.
107. *Bellman R., Wing G. M.* An Introduction to Invariant Imbedding / *Classics in Applied Mathematics*. V. 8. Philadelphia: SIAM, 1992.
108. *Beran M. J., Oz-Vogt J.* Imaging through turbulence in the atmosphere / *Progress in Optics*. 1994. V. XXXIII. P. 321–388, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
109. *Bourret R. C., Frish U., Pouquet A.*, 1973, Brownian motion of harmonical oscillator with stochastic frequency // *Physica A*. V. 65, № 2. P. 303–320.
110. *Bruckstein A. M., Levy B. C., Kailath T.* Differential methods in inverse scattering, // *SIAM. J. Appl. Math.* 1985. V. 45, № 2. P. 312–335.
111. *Burridge R., Papanicolaou G., White B.* One-dimensional wave propagation in a highly discontinues medium // *Wave Motion*. 1988. V. 10, № 1. P. 19–44.
112. *Burridge R., Papanicolaou G., Sheng P., White B.* Probing a random medium with a pulse // *SIAM. J. Appl. Math.* 1989. V. 49. P. 582–607.
113. *Charnotskii M. I., Gozani J., Tatarskii V. I., Zavorotny V. U.* Wave propagation theories in random media based on the path-integral approach / *Progress in Optics*. 1993. V. XXXII, P. 203–266. ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
114. *Chen H., Chen S., Kraichnan R. H.* Probability distribution of a stochastically advected scalar field // *Phys. Rev. Letters*. 1989. V. 63, № 24. P. 2657–2660.
115. *Churnside J. H., Clifford S. F.* Log-normal Rician probability-density function of optical scintillations in the turbulent atmosphere // *JOSA*. 1987. V. A4, № 10. P. 1923–1930.
116. *Cramer H., Leadbetter M. R.* Stationary and Related Stochastic Processes. — N.Y.: Wiley, 1967.
117. *Cristiani A., Vulpiani A.* On the effect of noise and drift on diffusion in fluids // *J. Stat. Phys.* 1993. V. 70. P. 197–211.
118. *Csanady G. T.*, 1980, *Turbulent Diffusion in the Environment*. — Dordrecht: Reidel Publ. Co.

119. *Dagan G.* Theory of solute transport by groundwater // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1987. V. 19. P. 183–215.
120. *Dahm W. J. A., Buch K. A.* Lognormality of the scalar dissipation pdf in turbulent flows // *Phys. Fluids.* 1989. V. A1, № 7. P. 1290.
121. *Dashen R.* Path integrals for waves in random media // *J. Math. Phys.* 1979. V. 20. P. 894–920.
122. *Dashen R.* Distribution of intensity in a multiply scattering medium // *Opt. Lett.* 1984. V. 9. P. 110–112.
123. *Donsker M. D.* On functional space integrals / In: *Proc. Conf. Theory and Appl. of Analysis in Funct. Space*, 1964. V. 17, The M.I.I. Press.
124. *Er-El J., Peskin R. L.* Relative diffusion of constant-level balloons in the Southern Hemisphere // *J. Atmos. Sci.* 1981. V. 38, № 10. P. 2264–2274.
125. *Fannjiang A., Ryzhin L., Papanicolaou G.* Evolution of trajectory correlations in steady random flows / *Proc. Symposia in Appl. Math.* 1998. V. 54. P. 105–130.
126. *Flatté S. M., Wang G. Y., Martin J.* Irradiance variance of optical waves through atmospheric turbulence by numerical simulation and comparison with experiment // *JOSA.* 1993. V. A10. P. 2363–2370.
127. *Flatté S. M., Bracher C., Wang G. Y.* Probability-density functions of irradiance for waves in atmospheric turbulence calculated by numerical simulation // *JOSA.* 1994. V. A11. P. 2080–2092.
128. *Fofonoff N.* Steady flow in a frictionless homogeneous ocean // *J. Mar. Res.* 1954. V. 13. P. 254–262.
129. *Freilikher V. D., Gredescul S. A.* Randomly layered media: fluctuating waveguide // *J. Opt. Soc. Am.* 1990. V. A7, № 5. P. 868–874.
130. *Freilikher V. D., Gredescul S. A.* Localization of waves in media with one-dimensional disorder / *Progress in Optics*. 1992. V. XXX. P. 137–203, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
131. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // *J. Res. NBS*, 1963. V. D67. P. 303.
132. *Furutsu K.* Random Media and Boundaries. Unified Theory, Two-Scale Method, and Applications. — N.Y.: Springer-Verlag, 1993.
133. *Gao F.* An analytical solution for the scalar probability density function in homogeneous turbulence // *Phys. Fluids.* 1991. V. A3, № 4. P. 511–513.
134. *Golberg M. A.* Invariant imbedding and Riccati transformations // *Appl. Math. and Com.* 1975. V. 1. № 1. P. 1–24.
135. *Gollub J., Crarke J., Gharib M., Lane B., Mesquita O.* Fluctuations and transport in a stirred fluid with a mean gradient // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 67, № 25. P. 3507–3510.
136. *Griffa A.* Applications of stochastic particle models to oceanographic problems / In: *Stochastic Modeling in Oceanography, Progress in Probability*. 1996. V. 39. P. 114–140, eds. R. J. Adler, P. Müller, B. L. Razovsky. — Boston: Birkhäuser.

137. *Gurvich A. S., Yaglom A. M.* Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence // *Phys. Fluids Suppl.* 1967. V. 10, № 9. P. 559.
138. *Guzev M. A., Klyatskin V. I.* Plane waves in a layered weakly dissipative randomly inhomogeneous medium // *Waves in Random Media.* 1991. V. 1, № 1. P. 7–19.
139. *Guzev M. A., Klyatskin V. I.* Approximation of the parabolic equation and the wavefield of a point source in a layered random medium // *Waves in Random Media.* 1991. V. 1, № 4. P. 275–286.
140. *Guzev M. A., Klyatskin V. I.* Influence of boundary conditions on statistical characteristics of wavefield in layered randomly inhomogeneous medium // *Waves in Random Media.* 1993. V. 3, № 4. P. 307–315.
141. *Guzev M. A., Popov G. V.* Investigation of statistical characteristics of waves in layered media with regular and random inhomogeneities based on the invariant imbedding method // *Waves in Random Media.* 1998. V. 8, № 2. P. 193–201.
142. *Guzev M. A., Klyatskin V. I., Popov G. V.* Phase fluctuations and localization length in layered randomly inhomogeneous media // *Waves in Random Media.* 1992. V. 2, № 2. P. 117–123.
143. *Holton Y. R.* An experimental study of forced barotropic Rossby waves // *Geophys. Fluid Dyn.* 1971. V. 2, № 4. P. 323–342.
144. *Holzer M., Pumir A.* Simple models on non-Gaussian statistics for a turbulently advected passive scalar // *Phys. Rev.* 1993. V. E47, № 1. P. 202–219.
145. *Holzer M., Siggia E.* Turbulent mixing of a passive scalar // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6, № 5. P. 1820–1837.
146. *Hopf E.* Statistical hydromechanics and functional calculus // *J. Ration. Mech. Anal.* 1952. V. 1. P. 87–123.
147. *Hopf E.* On the application of functional calculus to the statistical theory of turbulence / In: *Proc. Symp. Appl. Math.* 1957. V. 7. P. 41–50. Am. Math. Society.
148. *Hopf E.* Remarks on the functional-analytic approach to turbulence / In: *Proc. Symp. Appl. Math.* 1962. V. 13. P. 157–163. Am. Math. Society.
149. *Hopf E., Titt E. W.* On certain special solution of the equation of statistical hydrodynamics // *J. Rat. Mech. Anal.* 1953. V. 2. P. 587.
150. *Isichenko M. B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // *Rev. Mod. Phys.* 1992. V. 64, № 4. P. 961–1043.
151. *Kagiwada H. H., Kalaba R.* Integral Equations Via Imbedding Methods. — Addison-Wesley, Reading, MA., 1974.
152. *Keller J. B., Veronis G.* Rossby waves in presence of random currents // *J. Geoph. Res.* 1969. V. 74, № 8. P. 1941–1951.
153. *Kerstein A. R., McMurtry P. A.* Mean-field theories of random advection // *Phys. Rev.* 1994. V. E49, № 1. P. 474–482.
154. *Kimura Y., Kraichnan R. H.* Statistics of an advected passive scalar // *Phys. of Fluids.* 1993. V. A5, № 9. P. 2264–2277.

155. *Klyatskin V.I.* Ondes et Équations Stochastiques dans les milieux Aléatoirement non Homogènes. — Besançon-Cedex: Leséditions de Physique, 1985. (in French).
156. *Klyatskin V.I.* Plane waves in layered random media. The role of boundary conditions / In: Applied and Industrial Math., ed. R. Spigler, Math. and Its Appl. 1991. V. 56. P. 291–299. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
157. *Klyatskin V.I.* A statistical theory of radiative transfer in layered random media, in: Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, eds. G. Cohen, L. Halpern, P. Joly, P. 595–608. Philadelphia: SIAM, 1991.
158. *Klyatskin V.I.* Approximations by delta-correlated random processes and diffusive approximation in stochastic problem / In : Mathematics of Random Media, eds. W. Kohler, B. S. White, Lectures in Appl. Math. 1991. V. 27. P. 447–476, AMS, Providence RI.
159. *Klyatskin V.I.* Caustics in random media // Waves in random media. 1993. V. 3, № 2. P. 93–100.
160. *Klyatskin V.I.* The imbedding method in statistical boundary-value wave problems / Progress in Optics. 1994. V. XXXIII. P. 1–128, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
161. *Klyatskin V.I., Gurarie D.* Random topography in geophysical models / In: Stochastic Models in Geosystems, eds. *Molchanov S.A.* and *W.A. Woyczynski*, IMA Volumes in Math. and its Appl. 1996. V. 85. P. 149–170. — N.Y.: Springer-Verlag.
162. *Klyatskin V.I., Gurarie D.* Equilibrium states for quasigeostrophic flows with random topography // Physica D. 1996. V. 98. P. 466–480.
163. *Klyatskin V.I., Woyczynski W.A.* Fluctuations of passive scalar with nonzero mean concentration gradient in random velocity fields // ЖЭТФ. 1995. V. 108, № 10. P. 1403–1410.
164. *Klyatskin V.I., Gryanik N. V., Gurarie D.* Localization of Rossby waves under the influence of random topography (two-layer model) // Wave Motion. 1998. V. 28, № 4. P. 333–352.
165. *Klyatskin V.I., Woyczynski W.A., Gurarie D.* Short-time correlation approximation for diffusing tracers in random velocity fields: a functional approach / In: Stochastic Modeling in Oceanography, Progress in Probability, 1996. V. 39. P. 221–269, eds. R.J. Adler, P. Müller, B.L. Razovsky. — Boston: Birkhäuser.
166. *Klyatskin V.I., Woyczynski W.A., Gurarie D.* Diffusing passive tracers in random incompressible velocity flows: Statistical topography aspects // J. Stat. Phys. 1996. V. 84, № 3/4. P. 797–836.
167. *Kohler W., Papanicolaou G.* Power statistics for wave propagation in one dimension and comparison with radiative transport theory. II // J.Math. Phys. 1974. V. 15, № 12. P. 2186–2197.

168. *Kohler W., Papanicolaou G.* Power reflection from a lossy one-dimensional random medium // *SIAM. J. Appl. Math.* 1976. V. 30, № 2. P. 263–267.
169. *Kohler W., Papanicolaou G., White B.* Reflection of waves generated by a point source over a randomly layered medium // *Wave Motion*. 1991. V. 13, № 1. P. 53–87.
170. *Kohler W., Papanicolaou G., White B.* Localization and mode conversion for elastic waves in randomly layered media I // *Wave Motion*. 1996. V. 18, № 1. P. 1–22.
171. *Kohler W., Papanicolaou G., White B.* Localization and mode conversion for elastic waves in randomly layered media II // *Wave Motion*. 1996. V. 18. P. 181–201.
172. *Kohler W., Papanicolaou G., Postel M., White B.* Reflection of pulsed electromagnetic waves from a randomly stratified half space // *J. Optical Soc. of Amer.* 1991. V. A8, № 7. P. 1109–1125.
173. *Kraichnan R. H.* Inertial waves in two-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 1967. V. 10. P. 1417–1423.
174. *Kraichnan R. H.* Statistical dynamics of two-dimensional flows // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 67. P. 155–175.
175. *Kraichnan R. H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // *Rep. Prog. Phys.* 1980. V. 43. P. 547–619.
176. *Kravtsov Yu. A.* Propagation of electromagnetic waves through a turbulent atmosphere // *Rep. Prog. Phys.* 1992. V. 55. P. 39–112.
177. *Kravtsov Yu. A., Saichev A. I.* Properties of coherent waves reflected in a turbulent medium // *J. Opt. Soc. Am.* 1985. V. A2, № 12. P. 2100–2105.
178. *Kulkarny V. A., White B. S.* Focusing of rays in a turbulent inhomogeneous medium // *Phys. Fluids*. 1982. V. 25, № 10. P. 1770–1784.
179. *Lighthill J.* On sound generated aerodynamically. 1. General theory // *Proc. Roy. Soc.* 1952. V. A211. № 1107. P. 564–587.
180. *Lighthill J.* On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound // *Proc. Roy. Soc.* 1954. V. A222, № 1148. P. 1–32.
181. *Lighthill J.* Sound generated aerodynamically // *Proc. Roy. Soc.* 1962. V. A267, № 1329. P. 147–182.
182. *Lesieur M.* *Turbulence in Fluids*. — Boston: Kluwer, 1990.
183. *Longuet-Higgins M. S.* Statistical properties of a moving wave-form // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1956. V. 52. P. 234–245.
184. *Longuet-Higgins M. S.* On the velocity of the maxima in a moving wave-form // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1957. V. 53. P. 230–233.
185. *Longuet-Higgins M. S.* The statistical analysis of a random, moving surface // *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser.* 1957. V. A249, № 966. P. 321–387.
186. *Longuet-Higgins M. S.* Statistical properties of an isotropic random surface // *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser.* 1957. V. A250, № 975. P. 157–174.

187. *Longuet-Higgins M. S.*, 1962, The statistical geometry of random surfaces / In: Hydrodynamic Stability, Proc. 13th Symp. Appl. Math., Am. Math. Soc. P. 105–142.
188. *Majda A. J.* The random uniform shear layer: An explicit example of turbulent diffusion with broad tail probability distribution // *Phys. Fluids*. 1993. V. A5, № 8. P. 1963–1970.
189. *Majda A. J.* Random shearing direction models for isotropic turbulent diffusion // *J. Stat. Phys.* 1994. V. 75, № 5/6. P. 1153–1165.
190. *Manning R. M.* Stochastic Electromagnetic Image Propagation And Adaptive Compensation. — N.Y.: McGraw-Hill, Inc., 1993.
191. *Martin J. M., Flatté S. M.* Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media // *Appl. Opt.* 1988. V. 27, № 11. P. 2111–2126.
192. *Martin J. M., Flatté S. M.* Simulation of point-source scintillation through three-dimensional random media // *J. Opt. Soc. Am.* 1990. V. A7. P. 838–847.
193. *McComb W.* The Physics of Fluid Turbulence. — Oxford: Clarendon Press, 1990.
194. *Mesinger F.* Behavior of a very large number of constant-volume trajectories // *J. Atmos. Sci.* 1965. V. 22, № 5. P. 479–492.
195. *Mesinger F.* Numerical integration of the primitive equations with a floating set of computation points: experiments with a barotropic global model // *Monthly Weather Review*. 1971. V. 99, № 1. P. 15–29.
196. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the 1970–1971 Eole experiment, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 4. — Los Angeles: Dep. Meteorology. Univ. of California, 1970.
197. *Mesinger F., Mintz Y.* Numerical simulation of the clustering of the constant-volume balloons in the global domain, Numerical simulation of weather and climate, Technical Report № 5. — Los Angeles: Dep. Meteorology. Univ. of California, 1970.
198. *Miller J., Weichman P., Cross M.* Statistical mechanics, Euler's equation and Jupiter's red spot // *Phys. Review*. 1992. V. A45, № 4. P. 2328–2359.
199. *Moffatt H. K.* The interection of turbulence with strong wind shear / In: Atmospheric Turbulence and Radio wave Propagation, eds. *Yaglom A. M., Tatarskii V. I.*, P. 721–725. — M.: Nauka, 1967.
200. *Nair B., White B. S.* High frequency wave propagation in random media — a unified approach // *SIAM. J. Appl. Math.* 1991. V. 51, № 2. P. 374–411.
201. *Nicolis G., Prigogin I.* Exploring Complexity, an Introduction. — N.Y.: W. H. Freeman and Company, 1989.
202. *Okubo A.* Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. — N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
203. *Papanicolaou G., Postel M., Sheng P., White B.* Frequency content of randomly scattered signals. Part II: Inversion // *Wave Motion*. 1990. V. 12, № 4. P. 527–549.

204. *Piterbarg L.* Short-correlation approximation in models of turbulent diffusion in: *Stochastic Models in Geosystems // IMA Volumes in Math. and its Appl.* V. 85. P. 313. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
205. *Pumir A.* A numerical study of the mixing of a passive scalar in three dimensions in the presence of a mean gradient // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6, № 6. P. 2118–2132.
206. *Pumir A., Shraiman B., Siggia E.* Exponential tails and random advection // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 66, № 23. P. 2984–2987.
207. *Rhines P., Bretherton F.* Topographic Rossby waves in a rough-bottom ocean // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 61, № 3. P. 583–608.
208. *Saichev A.I., Woyczynski W.A.* Probability distributions of passive tracers in randomly moving media / In: *Stochastic Models in Geosystems*, eds. *Molchanov S.A. and Woyczynski W.A.*, IMA Volumes in Math. and its Appl. 1996. V. 85. P. 359–400, N.Y.: Springer-Verlag.
209. *Segupta D., Piterbarg L., Reznik G.* Localization of topographic Rossby waves over random relief // *Dynamics of Atm. and Oceans.* 1992. V. 17, № 1. P. 1–21.
210. *Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B.* Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium: the large scale structure of the Universe // *Rev. Modern Phys.* 1989. V. 61. P. 185–220.
211. *Shapiro V.E., Loginov V.M.* «Formulae of differentiation» and their use for solving stochastic equations // *Physica.* 1978. V. 91A. P. 563–574.
212. *Sheng P.* (ed.) *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media.* — Singapore: World Scien., 1990.
213. *Sheng P., White B., Zhang Z., Papanicolaou G.* Multiple scattering noise in one dimension: universality through localization length scales // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57, № 8. P. 1000–1003.
214. *Sheng P., White B., Zhang Z., Papanicolaou G.* Wave localization and multiple scattering in randomly-layered media / In: *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*, ed. P. Sheng, P. 563–619. — Singapore: World Scien., 1990.
215. *Shraiman B.I., Siggia E.D.* Lagrangian path integrals and fluctuations in random flow // *Phys. Rev.* 1994. V. E49, № 4. P. 2912–2927.
216. *Sinai Ya.G., Yakhot V.* Limiting probability distributions of a passive scalar in a random velocity field // *Phys. Rev. Lett.* 1989. V. 63, № 18. P. 1962–1964.
217. *Swerling P.* Statistical properties of the contours of random surfaces // *I.R.E. Trans. Inf. Theory.* 1962. V. IT-8. P. 315–321.
218. *Tatarskii V.I., Zavorotny V.U.* Strong fluctuations in light propagation in a randomly inhomogeneous medium / *Progress in Optics.* 1980. V. XVIII. P. 204–256, ed. E. Wolf, North-Holland, Amsterdam.
219. *Tatarskii V.I., Ishimaru A., Zavorotny V.U.* eds, *Wave propagation in random media (scintillation).* — SPIE, Bellingham, Wa. 1993.
220. *Tatarskii V.I., Charnotskii M.I., Gozani J., Zavorotny V.U.* Path integral approach to wave propagation in random media. Parts I–III / In:

- Wave propagation in random media (scintillation). P. 383–441. — SPIE, Bellingham, Wa. 1993.
221. *Taylor G. I.* Diffusions by continuous movements // Proc. London Math. Society, Ser.2, 1923. V. 20. P. 196–211.
222. *Taylor G. I.* The spectrum of turbulence // Proc. Royal Society. 1938. V. A164, № 919. P. 476–490.
223. *Thomson R. E.* The propagation of planetary waves over a random topography // J. Fluid Mech. 1982. V. 70, № 2. P. 267–285.
224. *White B. S.* The stochastic caustic // SIAM. J. Appl. Math. 1983. V. 44, № 1. P. 127–149.
225. *Zambianchi E., Griffa A.* Effects of finite scales of turbulence on dispersion estimates // J. Mar. Res. 1994. V. 52. P. 129–148.
226. *Zirbel C. L., Çinlar E.* Mass transport by Brownian motion / In: Stochastic Models in Geosystems, eds. S. A. Molchanov and W. A. Woyczynski, IMA Volumes in Math. and its Appl., 1996. V. 85. P. 459–492. — N.Y.: Springer-Verlag.
227. *Zwillinger D., White B. S.* Propagation of initially plane waves in the region of random caustics // Wave Motion. 1985. V. 7, № 2. P. 207–227.

Научное издание

КЛЯЦКИН Валерий Исаакович

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГЛАЗАМИ ФИЗИКА
(ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ)**

Редактор *Н. Б. Бартошевич-Жагель*

Оригинал-макет: *В. В. Худяков*

ЛР № 071930 от 06.07.99.

Подписано в печать 16.10.01. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 33. Уч.-изд. л. 39. Тираж 300 экз.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117864 Москва, Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ППП «Типография «Наука»

121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0186-2



9 785922 101868