Введение

Традиционно считается, что дифференциальная геометрия изучает гладкие многообразия в присутствии дополнительных структур — тензорных полей, римановых метрик, расслоений, связностей, и т.п., что она является универсальным языком, при помощи которого исследование взаимодействия этих структур сводится к алгебраическим манипуляциям над функциями и их производными. Признавая справедливость такого мнения, отметим, что в современной математике все сильнее ощущается как раз обратное влияние геометрии на алгебру. Принципиальное значение геометрии состоит в ее использовании как наглядной модели, мотивировки при манипулировании абстрактными дифференциальными алгебраическими объектами. Поясним это на примере понятия касательного вектора $\xi \in T_xM^n$. Имеются три эквивалентные его определения:

1) набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, привязанных к определенной системе координат и меняющихся при заменах по известным правилам;

2) класс касающихся кривых, выходящих из точки x;

3) дифференцирование, т.е. линейное отображение $\xi\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g)$.

Первое есть бюрократическая подмена существа дела инструкцией. Вообще, столь популярные в классической физике и механике неинвариантные определения, как то «набор функций $T^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_q}$, причем(?!) при замене координат они преобразуются...» способны полностью скрыть геометрическую природу явления. Они приводят только к путанице и громоздким обозначениям, совершенствование которых помогает лишь в ограниченных пределах. Конечно, без координатных представлений полностью обойтись нельзя, однако координаты должны играть только вспомогательную роль в конкретных вычислениях.

Второе определение уже инвариантно, однако оно слишком ограниченно геометрическими рамками и плохо приспособлено для нужд алгебры. Например, неясно, как складывать векторы. Определение такого типа необходимо для создания в мышлении прочного геометрического образа, связанного с понятием вектора. В этом смысле определение вектора как «стрелочки», выходящей из точки x, ничуть не уступает.

Наконец, последнее определение, хотя и наименее наглядно, концептуально является наиболее правильным. Оно легко приспосабливается к кольцам и модулям, очень далеким от колец гладких функций. Последовательное использование геометрических образов в современной алгебре (например, при исследовании диофантовых уравнений) является одним из наиболее продуктивных методов.

Целью настоящего курса служит не только ознакомление с основными понятиями дифференциальной геометрии, но и обучение владению каждым из трех языков — инвариантно-алгебраическим, интуитивно-геометрическим и координатно-бюрократическим. В идеале все результаты (и доказательства!) дифференциальной геометрии могут быть переформулированы на каждом из этих языков. Предполагается знакомство слушателей с основами математического анализа на многообразиях, включая алгебру дифференциальных форм и формулу Стокса.

1. Кривые на плоскости и в пространстве

Интуитивное представление о форме гладкой кривой $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ связано с ее характеристиками, инвариантными относительно движений пространства $\mathbb{R}^n$, наделенного стандартной евклидовой структурой, $|x|^2 = \sum x_i^2$. *Длина* дуги $r(t)$, $a < t < b$, определяется формулой

$$l(a,b) = \int_a^b |r'|\,dt = \int_a^b (\sum x_i'^2)^{1/2}\,dt\,.$$

Элемент длины $dl = |r'|\,dt$ не зависит от параметризации кривой. Это «почти» 1-форма. Чтобы получить «настоящую» 1-форму, нужно зафиксировать ориентацию кривой и менять знак у dl, если параметризация не согласована с ориентацией. В качестве параметра кривой в точке $r(b)$ можно взять величину $l(a,b)$. Такая параметризация называется *натуральной*. Если τ — натуральный параметр, то $dl = d\tau$, $|\dot r| = 1$ (точкой обозначается производная по натуральному параметру). Дифференцируя, получаем $(\dot r, \ddot r) = 0$, т.е. $\dot r \perp \ddot r$. Скорость вращения касательной $k = |\ddot r|$ называется *кривизной*, $R = k^{-1}$ — *радиус кривизны*.

Задача 1.1. Вычислите радиус кривизны окружности радиуса R.

Задача 1.2. Найдите выражение для кривизны в произвольной параметризации.

Центр касающейся окружности радиуса кривизны плоской кривой называется *центром кривизны*. Множество центров кривизны образует *эволюту*. В геометрической оптике оно называется также *каустикой* или *фокальным множеством*.

Задача 1.3. Найдите точки экстремума кривизны а) параболы; б) эллипса. Определите радиусы кривизны в этих точках.

Задача 1.4. Рассмотрим на плоской кривой функцию $S(t) = |r(t) - q|^2$ квадрата расстояния до фиксированной точки $q \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что

а) q лежит на нормали к кривой $\Leftrightarrow$ $S'(t) = 0$ (т.е. окружность с центром в q, проходящая через $r(t)$, касается кривой);

б) q является центром кривизны $\Leftrightarrow S' = S'' = 0$ (т.е. окружность кривизны имеет более высокий порядок касания с кривой);

в) r(t) к тому же является точкой экстремума кривизны $\Leftrightarrow S' = S'' = S''' = 0$ (т.е. в точках экстремума кривизны окружность кривизны имеет еще более высокий порядок касания).

Задача 1.5. Нарисуйте эволюту а) параболы; б) эллипса.

Задача 1.6. Покажите, что

а) особенности эволюты соответствуют точкам экстремума кривизны.

б) в гладких точках эволюта касается нормалей кривой. Таким образом, эволюта — огибающая семейства нормалей.

Примером глобального результата по геометрии плоских кривых является классическая теорема о четырех вершинах.

Теорема. *Выпуклая плоская кривая имеет не менее четырех точек экстремума кривизны.*

Доказательство. Докажем, что функция $k' = -R'/R^2$ на кривой $r(t) = (x(t), y(t))$ имеет более двух точек перемены знака, а значит, не менее четырех (поскольку четно).

Пусть $n(t)$ — вектор внешней нормали. Тогда $n' = kr'$ (почему?) и

$$(kr - n)' = k'r + kr' - n' = k'r = (k'x, k'y) ,$$

поэтому на кривой 1-формы $k'dt = dk$, $k'x\,dt = dX$, $k'y\,dt = dY$ точны, где X, Y — координаты вектора $kr - n$, то есть

$$\int k'(\alpha + \beta x(t) + \gamma y(t))\,dt = 0 \qquad \text{для любых чисел } \alpha, \beta, \gamma .$$

Предположим, что функция k' имеет на кривой не более двух точек перемен знака (значит, ровно две). Подберем на плоскости линейную (неоднородную) функцию $\alpha+\beta x+\gamma y$ у которой прямая нулевых значений проходит через эти две точки кривой. Тогда $k'(t)(\alpha+\beta x(t)+\gamma y(t))$ — знакопостоянная функция на кривой, и $\int k'(\alpha+\beta x+\gamma y)\,dt \neq 0$. Противоречие. □

Точка на кривой $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ называется *неуплощающейся*, если в ней вектора $r', r'', \ldots, r^{(n)}$ линейно независимы. Для общей кривой почти все точки неуплощающиеся, а точки уплощения расположены дискретно. В неуплощающихся точках определен *сопровождающий флаг*, состоящий из *соприкасающихся плоскостей*. i-я соприкасающаяся плоскость порождена векторами $r', r'', \ldots, r^{(i)}$.

Задача 1.7. Проверьте, что понятия уплощения и соприкасающихся плоскостей не зависят от параметризации. Почему они так называются?

Семейство ортонормированных *реперов Френе* $\{e_i\}$ получается ортогонализацией реперов $r', r'', \ldots, r^{(n)}$. Первые i векторов репера Френе порождают соприкасающуюся k-плоскость. Разложим производные векторов e_i вновь по тому же базису, $e_i' = \sum a_{ij}e_j$. Наддиагональные ненулевые элементы матрицы $\{a_{ij}\}$ расположены только на диагонали, соседней с главной (поскольку e_i' лежит в $(i+1)$-й соприкасающейся плоскости). С другой стороны, эта матрица кососимметрическая, как производная ортогональной. Отсюда вытекают следующие *формулы Френе*:

$$e_i' = -k_{i-1}e_{i-1} + k_i e_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad (k_0 = k_{n+1} = 0,\ e_0 = e_{n+1} = 0).$$

Функции k_i, вычисленные в натуральной параметризации, называются *высшими кривизнами*. При $n = 3$ имеем

$$\dot e_1 = ke_2, \quad \dot e_2 = -ke_1 + \varkappa e_3, \quad \dot e_3 = -\varkappa e_2.$$

Эти формулы показывают, что соприкасающаяся 2-плоскость кривой (имеющая нормаль e_3) в первом приближении вращается вокруг касательной прямой, с угловой скоростью $k_2 = \varkappa$, называемой *кручением*.

Из теоремы единственности обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что произвольный набор функций $k_1(\tau), \ldots, k_n(\tau)$, $k_1(\tau) > 0$, $k_i(t) \neq 0$, задает кривую, кривизнами которой эти функции являются, однозначно с точностью до движения (задаваемого начальным положением репера Френе). Иными словами, высшие кривизны образуют *полную систему инвариантов*.

Задача 1.8. Найдите кривизну и кручение кривых

а) $(a\cos t, a\sin t, bt)$;

б) $e^t(\cos t, \sin t, 1)$;

в) $(t^3+t, t^3-t, \sqrt{3}t^2)$;

г) $3x^2+15y^2=1$, $z=xy$.

Задача 1.9. Опишите кривые с постоянными кривизной и кручением.

Задача 1.10. Для каких кривых $k\equiv 0$? $\varkappa\equiv 0$?

Задача 1.11. Кривая лежит на сфере и имеет постоянную кривизну. Докажите, что кривая — окружность.

2. Поверхности

Риманова структура, или *метрика* на многообразии M — семейство положительно определенных квадратичных форм в его касательных пространствах, гладко зависящих от точки многообразия. В локальных координатах $u^1,\dots,u^n$ на многообразии метрика задается симметричной матрицей $g=\|g_{ij}\|$, коэффициенты которой гладко зависят от точки. Значение g на касательном векторе $\xi=\xi^1\partial_{u^1}+\dots+\xi^n\partial_{u^n}$ задается равенством $g(\xi)=g_{ij}\xi^i\xi^j$ (знак суммирования по повторяющимся индексам опущен). Риманову структуру удобно записывать в виде $g_{ij}du^idu^j$. В таком виде не нужно запоминать правила перехода к новым координатам. Достаточно подставить в дифференциалы du^i их выражение в новых координатах:

$$g_{kl}(u)du^kdu^l=g_{kl}(u(v))\frac{\partial u^k}{\partial v^i}dv^i\frac{\partial u^l}{\partial v^j}dv^j=g'_{ij}(v)dv^idv^j\ ,\quad \text{т.е. } g'_{ij}(v)=g_{kl}(u(v))\frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\ .$$

Задача 2.1. Найдите выражение для евклидовой метрики dx^2+dy^2 на плоскости в полярных координатах.

Подмногообразия римановых многообразий наследуют риманову структуру. Простейший содержательный пример — поверхности в $\mathbb{R}^3$, где риманова структура в $\mathbb{R}^3$ — стандартная евклидова. Наследуемая риманова структура на поверхности $M\subset\mathbb{R}^3$ называется также ее *первой квадратичной формой*. Если поверхность задана параметрически, $(u^1,u^2)\mapsto r(u^1,u^2)$, то коэффициенты первой квадратичной формы задаются равенствами

$$g_{ij}=(r_i,r_j),$$

где $r_i=\frac{\partial r}{\partial u^i}$, и $(\cdot,\cdot)$ — обычное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

После того, как первая квадратичная форма (риманова структура) на поверхности определена, можно забыть о ее вложении в $\mathbb{R}^3$. Свойства поверхности, описываемые посредством первой квадратичной формы, относят к *внутренней геометрии поверхности*. Интуитивно ясно, например, что при изгибании листка бумаги его метрические свойства не меняются. К внутренней геометрии относится измерение длин, углов, площадей. Элемент площади $d\sigma$ определяется условием, что площадь касательного квадрата с ортогональными единичными сторонами равна 1. Поскольку определитель ортогонального преобразования из $O(2)$ равен ± 1, это определение инвариантно, с точностью до знака. В координатах $d\sigma = \pm\sqrt{|g|}\,du^1 \wedge du^2$, где $|g| = \det\|g_{ij}\|$. Знак фиксируется выбором *ориентации* поверхности. Итак, длина кривой γ и площадь области D вычисляются по формулам

$$L = \int_\gamma |\dot r|\,dt = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot u^i \dot u^j}\,dt\,, \qquad S = \int_D \sqrt{|g|}\,du^1 \wedge du^2\,.$$

К внешней геометрии поверхности относят ее *вторую квадратичную форму* h, измеряющую квадратичное отклонение поверхности от своей касательной плоскости. Зафиксируем вектор единичной нормали n_0 в точке $r(u_0) \in M$ и рассмотрим ортогональную проекцию на нормаль как гладкую функцию на M, $f(u) = (r(u), n_0)$. В точке u_0 первый дифференциал этой проекции равен нулю. Положим $h(u_0) = d^2 f(u_0)$, второй дифференциал этой проекции. Значение квадратичной формы h на касательных векторах ξ, η равно смешанной производной $h(\xi, \eta) = \xi\eta f(u_0) = (\xi\eta r, n_0)$ в рассматриваемой точке u_0. Если выбрать *евклидовы* координаты $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy была касательной к M в точке O, то в таких координатах поверхность является графиком функции $z = f(x, y)$. Тогда x, y являются локальными координатами на M, и в рассматриваемой точке

$$h = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2, \qquad \text{где} \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{и т.д.}$$

Итак, на векторном пространстве $T_{u_0}M$ имеется евклидова структура g, и квадратичная форма h. Из линейной алгебры известно, что собственные числа квадратичной формы вещественны, а собственные направления — ортогональны.

Определение. Собственные числа k_1, k_2 называются *главными кривизнами*, а собственные направления — *главными направлениями*. При этом $K = k_1 k_2 = \det\|h_{ij}\|/\det\|g_{ij}\|$ — *гауссова кривизна*, $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ — *средняя кривизна*.

Поверхность является *эллиптической* (локально выпуклой), если $K > 0$ (главные кривизны имеют один знак), и *гиперболической*, если $K < 0$. На поверхности общего положения области эллиптичности и гиперболичности разделены *параболической линией*, где одна из кривизн обращается в ноль. Знаменитая «*theorema egregium*» («блистатетельная теорема») Гаусса утверждает, что, в отличие от средней кривизны, *гауссова кривизна определяется внутренней геометрией поверхности и выражается через первую квадратичную форму*. Это будет показано позже.

Задача 2.2. Для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

а) определите первую квадратичную форму. Перепишите ее в сферических координатах; в полярных координатах на плоскости Oxy при стереографической проекции из точки $(0, 0, 1)$; в декартовых координатах на той же плоскости;

б) найдите длину окружности и площадь круга радиуса ρ;

в) определите вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны.

Псевдосферой, или *плоскостью Лобочевского*, называется одна из компонент (скажем. $z > 0$) двуполостного гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. Метрика на псевдосфере задается ограничением на нее *псевдоевклидовой* метрики $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Центральная проекция из точки $(0, 0, -1)$ переводит псевдосферу в круг $x^2 + y^2 < 1$ (модель Пуанкаре). Дробно-линейное преобразование $w = i(1-z)/(1+z)$, переводит круг $|z|^2 < 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (модель Клейна).

Задача 2.3. Убедитесь, что квадратичная форма на псевдосфере, заданная таким образом, положительно определена и является, тем самым, метрикой. Вычислите метрику на плоскости Лобачевского во всех трех моделях и найдите ее кривизну.

Задача 2.4. (Формула Эйлера.) В окрестности точки p поверхности M рассмотрим касательную прямую l, образующую угол α с одним из главных направлений. Определите кривизну в точке p кривой, высекаемой на поверхности плоскостью λ, проходящей через прямую l, если

а) λ проходит через нормаль;

б) λ образует угол β с нормалью.

Гауссово отображение $G\colon M \to S^2$ сопоставляет точке x поверхности вектор единичной нормали n_x, перенесенный в начало координат. Касательные плоскости T_xM и $T_{n_x}S^2$ параллельны, и их можно отождествить между собой параллельным переносом. Поэтому можно считать, что производная G_* гауссова отображения действует в касательной плоскости T_xM.

Задача 2.5. Докажите соотношение $h_x(\xi, \xi) = (G_*\xi, xi)$.

В частности, собственными числами отображения G_* служат $-k_1$, $-k_2$, и гауссова кривизна K совпадает с якобианом $\det G_*$ гауссова отображения.

Для исследования поверхности можно использовать также функцию на ней $S_q(x) = \|x - q\|^2$ квадрата расстояния до фиксированной точки q.

Задача 2.6. а) Докажите, что точка q принадлежит нормали поверхности в точке x тогда и только тогда, когда x является критической точкой функции S_q;

б) эта критическая точка вырождена (гессиан обращается в ноль) тогда и только тогда, когда точка q расположена на расстоянии $1/k$ от x (с надлежащей стороны), где k — одна из двух главных кривизн поверхности.

Геометрическое место точек q, для которых функция S_q имеет вырожденную критическую точку, называется ***фокальным множеством*** поверхности, или *каустикой*. На каждой нормали к поверхности имеется по две точки каустики (на расстоянии $1/k_1$, $1/k_2$ от поверхности). Каустика имеет особенности, причем довольно сложные.

Задача 2.7. Изобразите каустику в окрестности точки $(0, 0, 1/2)$ для следующих поверхностей:

а) $z = x^2 - y^2 + x^3$;

б) $z = x^2 - y^2$;

в) $z = x^2 + x^3 + 2x^2y$;

г) $z = x^2 + y^2 + x^3 \pm xy^2$.

Можно показать, что *особенности каустик перечисленных выше примеров исчерпывают все возможные особенности каустик поверхностей общего положения.* Это означает, что в окрестности каждой из своих точек каустика диффеоморфна одной из каустик приведенного списка.

На поверхности имеется поле крестиков главных направлений (ортогональных в смысле евклидовой структуры в объемлющем $\mathbb{R}^3$!). Это поле имеет особенности в точках, где $k_1 = k_2$. Такие точки называются *омбилическими.*

Задача 2.8. а) Нарисуйте поле крестиков главных направлений в окрестности начала координат на поверхности $z = x^2 + y^2 + x^3 + axy^2$ при различных значениях параметра a. Сколько оборотов делает поле крестиков при обходе вокруг омбилической точки?

Согласно *теореме о ежике* сумма индексов особых точек векторного поля на сфере равна ее эйлеровой характеристике, то есть двум. По предыдущей задаче индекс поля крестиков в омбилической точке равен $\pm 1/2$. Поэтому (хоть поле крестиков и не векторное поле) *на замкнутой выпуклой поверхности общего положения всегда имеется не менее четырех омбилических точек.* Число 4 в этом утверждении и в теореме о 4 вершинах плоской кривой имеет, по-видимому, различную природу. Если омбилические точки вырождены, то их может быть меньше четырех. Существуют поверхности с двумя омбилическими точками. Однако до настоящего времени неизвестно, *существует ли поверхность с ровно одной омбилической точкой.* (Это так называемая задача Каратеодори.)

Задача 2.9. Сколько омбилических точек на эллипсоиде с различными полуосями?

Задача 2.10. Нарисуйте фокальное множество эллипсоида.

3. Связность в топологическом и в S^1-расслоении

В курсе анализа неоднократно упоминался тезис о том, что касательные пространства T_xM, T_yM в различных точках, хотя и изоморфны, не имеют естественного изоморфизма. Оказывается, на *римановом* многообразии каждому гладкому пути γ на M из x в y можно сопоставить такой изоморфизм, называемый *параллельным переносом* вдоль пути γ. Например, для евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ параллельный перенос не зависит от пути и совпадает с обычным параллельным переносом. Этот факт остается справедливым, если плоскость изгибать в $\mathbb{R}^3$, не меняя ее метрики, например, свернуть в кулек. Для локально евклидовой римановой структуры результат параллельного переноса зависит лишь от гомотопического класса пути, в общем случае обнос даже по маленькой петле нетривиален. Чтобы понять смысл этой операции, рассмотрим более общее понятие связности в локально тривиальном расслоении.

Определение. *Гладким расслоением* многообразия W над базой M со слоем F называется гладкое отображение $\pi\colon W \to M$, такое, что у каждой точки базы M

существует окрестность U и диффеоморфизм $\psi_U\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$, при котором слои $\pi^{-1}(x)$ диффеоморфно переходят в слои $\{x\} \times F$.

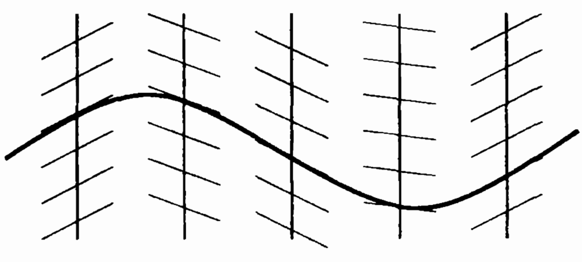
Задача 3.1. Докажите, что лента Мёбиуса нетривиально расслоена над окружностью со слоем отрезок. (Тривиальное — это расслоение вида $M \times F \to M$, где отображение — проекция на первый множитель.)

Диффеоморфизм ψ_U называется *тривиализацией* над U расслоения π. Тривиализаций бывает много, например, разные тривиализации возникают над пересечениями окрестностей U. Если φ_U — другая тривиализация, то переход к ней $\varphi\psi^{-1}\colon U \times F \to U \times F$, $(x, y) \mapsto (x, g_x(y))$ задается семейством диффеоморфизмов $g_x\colon F \to F$, $x \in U$, называемых ***функциями перехода***. Расслоения можно задавать, покрыв базу окрестностями U_α и указав явно функции перехода $g_x^{\alpha\beta}\colon F \to F$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ на пересечении окрестностей.

Сечение s расслоения сопоставляет точке x на многообразии точку $s(x) \in \pi^{-1}(x)$ в слое. Формально, сечение — это гладкое отображение $s\colon M \to W$, такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Локально при выбранной тривиализации $\pi^{-1}(U) \simeq U \times F$ сечение $s\colon x \mapsto (x, \widetilde{s}(x))$ задается отображением базы в слой $\widetilde{s}\colon U \to F$. Как правило, для существования глобально заданного на всем многообразии M сечения существуют топологические препятствия, и для общих топологических расслоений существование глобального сечения является необходимым, но не достаточным условием тривиальности расслоения.

Определение. (Топологической) *связностью* на расслоении называется произвольное поле n-мерных касательных плоскостей $C_y \subset T_yW$ в пространстве W расслоения, $n = \dim M$, трансверсальных слоям расслоения в каждой точке.

По определению, касательное пространство T_yW в каждой точке пространства расслоения разлагается в прямую сумму касательного пространства к слою («вертикального») и пространства C_y («горизонтального»). Ограничение проекции $\pi_*\colon T_yW \to T_{\pi(y)}M$ на первое слагаемое тривиально, а на второе — является изоморфизмом. Поэтому всякое векторное поле ξ на базе M расслоения однозначно поднимается до векторного поля $\hat{\xi}$ на W, касательного к плоскостям C_y и такого, что $\pi_*\hat{\xi} = \xi$. Таким образом, связность «связывает» соседние слои, она показывает, в каком направлении точка должна двигаться в пространстве расслоения, когда проекция этой точки перемещается по базе (см. рисунок).



Сечение s над кривой $\gamma_t \subset M$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *ковариантно постоянным* (*параллельным*) вдоль γ, если оно (точнее, его образ) касается плоскостей связности в каждой точке. Сечение, заданное в начальной точке кривой, однозначно продолжается до ковариантно постоянного сечения над γ: если γ — интегральная кривая поля ξ на M, то ковариантно постоянное сечение над γ — интегральная кривая поля $\hat{\gamma}$. Ковариантно постоянное продолжение задает диффеоморфизм слоев $\pi^{-1}(\gamma_a) \to \pi^{-1}(\gamma_b)$, называемый *параллельным переносом*.

Часто бывает, что слои расслоения несут дополнительную структуру (векторного пространства, однородного пространства действия некоторой группы и т.п.). В этом случае на связность накладывается дополнительное требование того, чтобы параллельный перенос сохранял эту структуру. Рассмотрим это на примере понятия S^1-расслоения.

Определение. *S^1-расслоение* на многообразии M задается покрытием $M = \bigcup U_\alpha$ и набором функций перехода $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to S^1$, удовлетворяющих соотношениям

$$g_{\alpha\alpha} = 0 \bmod 2\pi, \qquad g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha} = 0 \bmod 2\pi.$$

Пространство S^1-расслоения W склеивается из тривиализаций вида $U_\alpha \times S^1$ (с координатой φ_α на S^1) при помощи отождествлений

$$(x, \varphi_\alpha) \sim (x, \varphi_\beta), \qquad \text{если } x \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ и } \varphi_\alpha = \varphi_\beta + g_{\alpha\beta}.$$

Естественная проекция в $\pi : W \to M$ является локально тривиальным расслоением со слоем S^1. На слоях расслоения π имеется естественный угловой параметр, определенный с точностью до сдвига (выбора начала отсчета). Одновременный поворот всех слоев на заданный угол задает в пространстве W расслоения действие окружности $S^1 = U(1) = SO(2)$.

Пример. Пусть M — риманова поверхность, W — пространство ее касательных векторов длины 1. Тогда естественная проекция $W \to M$, сопоставляющая касательному вектору точку его приложения, является S^1-расслоением.

Тривиализация этого расслоения задается выбором поля ортонормированных касательных реперов e_1, e_2. Вектор e_1 соответствует значению угловой координаты $\varphi = 0$, e_2 соответствует $\varphi = \pi/2$, произвольному φ соответствует вектор $\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$.

Определение. *Связностью в S^1-расслоении* называется топологическая связность, плоскости которой инвариантны относительно действия группы S^1.

Пример. Пусть задана поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$. Тогда многообразие ее единичных касательных векторов W вложено в $\mathbb{R}^6 = T\mathbb{R}^3$. *Риманова связность* в S^1-расслоении $W \to M$ задается полем плоскостей, ортогональных слоям расслоения π (в смысле евклидовой метрики в $\mathbb{R}^6$).

В заданной тривиализации над областью $U_\alpha \subset M$ уравнение плоскости связности имеет вид $d\varphi_\alpha + \theta_\alpha = 0$, где θ_α — некоторая дифференциальная 1-форма. Из S^1-инвариантности вытекает, что форма θ_α не зависит от точки слоя и задана на базе

U_α (более строго, нужно писать $d\varphi_\alpha + \pi^*\theta_\alpha = 0$). Если выбрана другая тривиализация с угловой координатой $\varphi_\beta = \varphi_\alpha - g_{\alpha\beta}$, то

$$d\varphi_\beta + \theta_\beta = d\varphi_\alpha - dg_{\alpha\beta} + \theta_\beta = d\varphi_\alpha + \theta_\alpha.$$

Откуда $\theta_\beta = \theta_\alpha + dg_{\alpha\beta}$. Таким образом, *связность в S^1-расслоении задается набором дифференциальных 1-форм θ_α, заданных в областях U_α и связанных соотношением $\theta_\beta = \theta_\alpha + dg_{\alpha\beta}$ на пересечении областей $U_\alpha \cap U_\beta$.*

Определение. Глобально определенная дифференциальная 2-форма $\omega = d\theta$, где θ — форма связности, называется *формой кривизны* данной связности.

Это определение не зависит от тривиализации, поскольку при ее замене форма θ меняется на замкнутую.

Условие ковариантной постоянности сечения $s = \varphi(t)$ вдоль кривой γ в заданной тривиализации записывается в виде $\frac{d\varphi}{dt} + \theta(\dot\gamma) = 0$. Поэтому параллельный перенос вдоль кривой в пределах одной тривиализации является поворотом на угол

$$\Delta\varphi = \int_\gamma d\varphi = -\int_\gamma \theta\,.$$

Если путь γ замкнут и ограничивает диск D, $\gamma = \partial D$, то по формуле Стокса

$$\Delta\varphi = -\int_{\partial D} \theta = -\int_D \omega\,.$$

В приведенных рассуждениях не предполагалось, что база расслоения двумерна, она может иметь произвольную размерность. Таким образом, геометрический смысл формы кривизны состоит в том, что *ее значение на паре касательных векторов $\omega(\xi_1, \xi_2)$ измеряет поворот слоя при обходе вдоль маленькой петли в плоскости этих векторов.*

Связность существует на любом S^1-расслоении. Для ее построения достаточно взять произвольные связности на различных тривиализациях расслоения π (например, можно взять *плоские связности* $\theta_\alpha \equiv 0$), а затем склеить их при помощи разбиения единицы.

Если $d\varphi + \theta_1$ и $d\varphi + \theta_2$ — две связности, то их разность $\theta_1 - \theta_2$ является корректно определенной глобальной 1-формой на M (не зависящей от тривиализации). И обратно, если θ_α — семейство 1-форм, задающее связность, то семейство 1-форм $\theta_\alpha + \eta$ также задает связность для произвольной 1-формы $\eta \in \Omega^1(M)$. Таким образом, *пространство связностей в S^1-расслоении над M изоморфно пространству 1-форм на M, однако этот изоморфизм не канонический.* Говорят, что связности образуют аффинное пространство над $\Omega^1(M)$.

Задача 3.2. Расслоение Хопфа $\pi\colon S^3 \to S^2$ точке $(z_1, z_2) \in S^3$ на единичной сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ с метрикой $\|(z_1, z_2)\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ сопоставляет точку $[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ на комплексной проективной прямой.

а) Докажите, что π является S^1-расслоением. Опишите тривиализации расслоения, функции перехода.

б) *Стандартная связность* задается касательными плоскостями на сфере S^3, ортогональными слоям (в смысле эрмитовой структуры на $\mathbb{C}^2$). Найдите выражение 1-форм θ этой связности в построенных тривиализациях.

в) Вычислите форму кривизны ω стандартной связности.

4. Связность на римановой поверхности

Пусть M — риманова поверхность, $\pi : W \to M$ — расслоение ее касательных векторов длины 1.

Теорема. 1. *В S^1-расслоении π имеется естественная связность (называемая* римановой). *В тривиализации, задаваемой полем ортонормированных реперов e_1, e_2, ее 1-форма θ определяется из соотношения*

$$[e_1, e_2] = -\theta(e_1)\, e_1 - \theta(e_2)\, e_2.$$

2. *Если поверхность M вложена в $\mathbb{R}^3$, то построенная связность совпадает со связностью, рассмотренной в примере выше.*

3. *Форма кривизны римановой связности имеет вид*

$$w = -K\sigma,$$

где σ — форма площади на поверхности, K — ее гауссова кривизна.

Замечание. Коэффициенты разложения

$$\theta = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$$

формы θ по базису u_1, u_2 1-форм, двойственному базису e_1, e_2, определяются также условием

$$du_1 = \alpha_1 \sigma, \qquad du_2 = \alpha_2 \sigma, \qquad \sigma = u_1 \wedge u_2$$

или

$$\theta \wedge u_1 = -du_2, \qquad \theta \wedge u_2 = du_1.$$

Действительно, $\alpha_1 = du_1(e_1, e_2) = e_1 u_1(e_2) - e_2 u_1(e_1) - u_1([e_1, e_2]) = \theta(e_1)$, и, аналогично, $\alpha_2 = \theta(e_2)$.

Пример. Найдем гауссову кривизну метрики $g = dx^2 + 2\cos w\, dx\, dy + dy^2$, где $w = w(x, y)$ — некоторая функция.

Приведем метрику к сумме квадратов, $g = (dx + \cos w\, dy)^2 + (\sin w\, dy)^2$. Следовательно, формы $u_1 = dx + \cos w\, dy$ и $u_2 = \sin w\, dy$ образуют ортонормированный базис и $\sigma = u_1 \wedge u_2 = \sin w\, dx \wedge dy$. Продифференцируем эти формы:

$$du_1 = -\sin w\, w_x\, dx \wedge dy = -w_x\, \sigma, \qquad du_2 = \cos w\, w_x\, dx \wedge dy = \operatorname{ctg} w\, w_x\, \sigma.$$

Следовательно,

$$\theta = -w_x u_1 + \operatorname{ctg} w\, w_x u_2 = -w_x (dx + \cos w\, dy) + \operatorname{ctg} w\, w_x \sin w\, dy = -w_x\, dx\,.$$

Отсюда находим кривизну связности:

$$\omega = d\theta = w_{xy}\,dx \wedge dy = \frac{w_{xy}}{\sin w}\,\sigma, \qquad K = -\frac{w_{xy}}{\sin w}. \qquad \square$$

Эта метрика имеет постоянную отрицательную кривизну $K = -1$, если функция w удовлетворяет «sin-gordon» уравнению $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sin w$. Его решения вида $w(x, y) = \varphi(x + y)$, убывающие при $x + y \to +\infty$, соответствуют «псевдосфере Бельтрами», поверхности вращения $Z = -\sqrt{1 - r^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}$, $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Задача 4.1. Найдите кривизну следующих метрик:
а) $dx^2 + \sin^2 x\,dy^2$.
б) $\frac{4}{(1+k(x^2+y^2))^2}(dx^2 + dy^2)$.
в) $g(x, y)\,(dx^2 + dy^2)$, $g > 0$;
г) $A(x, y)^2 dx^2 + B(x, y)^2 dy^2$, $A > 0$. $B > 0$.

Доказательство теоремы. 1. Пусть задан другой репер e_1', e_2', который получается из исходного поворотом на угол g, гладко зависящий от точки поверхности. Нам нужно показать, что формы связности θ' и θ в новом и старом базисах связаны равенством $\theta' = \theta + dg$. Действительно, двойственные базисы 1-форм связаны соотношением

$$u_1' = \cos g\,u_1 + \sin g\,u_2, \quad u_2' = -\sin g\,u_1 + \cos g\,u_2.$$

дифференцируя, мы находим

$$\begin{aligned} du_1' &= -\sin g\,dg \wedge u_1 + \cos g\,\theta \wedge u_2 + \cos g\,dg \wedge u_2 - \sin g\,\theta \wedge u_1 \\ &= (dg + \theta) \wedge (-\sin g\,u_1 + \cos g\,u_2) = (\theta + dg) \wedge u_2', \end{aligned}$$

и, аналогично, $du_2' = -(\theta + dg) \wedge u_1'$. Отсюда $\theta' = \theta + dg$, что и требовалось. $\square$

Для доказательства утверждений 2 и 3 теоремы, мы используем следующий результат, представляющий самостоятельный интерес. Пусть ξ — касательное векторное поле на поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ — произвольное поле, определенное вдоль поверхности (не обязательно касательное). Обозначим через $\partial_\xi \eta$ покомпонентную производную поля η вдоль ξ. Пусть e_1, e_2 — ортонормированный касательный репер на поверхности, $n = e_3$ — поле единичных нормалей.

Теорема (деривационная лемма). *Производная ∂_ξ полностью определяется первой и второй квадратичными формами поверхности,*

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_\xi e_1 &= & &\theta(\xi)\,e_2 + h(\xi, e_1)\,n \\ \partial_\xi e_2 &= &-\theta(\xi)\,e_1 & \qquad\qquad + h(\xi, e_2)\,n \\ \partial_\xi n &= &-h(\xi, e_1)\,e_1 - h(\xi, e_2)\,e_2 & \end{aligned} \right.$$

где θ — 1-форма римановой связности, определяемая по метрике утверждением 1 теоремы, а h — вторая квадратичная форма.

Доказательство. Обозначим через $\theta_{ij}(\xi)$ коэффициенты разложения производной $\partial_\xi e_i$ по базису e_1, e_2, e_3. $\partial_\xi e_i = \theta_{ij}(\xi) e_j$. Матрица $\theta_{ij}(\xi)$ кососимметрична для любого касательного поля ξ:

$$0 = \partial_\xi (e_i, e_j) = (\partial_\xi e_i, e_j) + (e_i, \partial_\xi e_j) = \theta_{ij}(\xi) + \theta_{ji}(\xi).$$

Коэффициенты $\theta_{13}(\xi)$. $\theta_{23}(\xi)$ имеют вид

$$\theta_{i3}(\xi) = (\partial_\xi e_i, n) = (\partial_\xi \partial_{e_i} r, n), \qquad i = 1, 2.$$

что совпадает с $h(\xi, e_i)$ по определению второй квадратичной формы. Наконец, из определения коммутатора векторных полей вытекает равенство $[e_1, e_2] = \partial_{e_1} e_2 - \partial_{e_2} e_1$, откуда

$$\theta(e_1) = -([e_1, e_2], e_1) = (-\partial_{e_1} e_2 + \partial_{e_2} e_1, e_1) = -\theta_{2,1}(e_1) + \theta_{1,1}(e_2) = \theta_{1,2}(e_1),$$

и, аналогично, $\theta(e_2) = \theta_{1,2}(e_2)$, то есть $\theta_{1,2}(\xi) = \theta(\xi)$, что завершает вычисление коэффициентов $\theta_{ij}(\xi)$. □

Доказательство утверждения 2 теоремы. Условие ортогональности сечения $s = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2$, где φ — функция на поверхности, вектору $\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2) = -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2$, касательному к слою, имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_\xi(\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2), -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2) \\ &= \|-\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2\|^2\, \partial_\xi\varphi + (\cos\varphi\, \partial_\xi e_1 + \sin\varphi\, \partial_\xi e_2, -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2) \\ &= \partial_\xi\varphi + \theta(\xi) \end{aligned}$$

для произвольного касательного вектора ξ, что совпадает с условием ковариантной постоянности относительно связности, заданной 1-формой θ. □

Задача 4.2. Выведите самостоятельно из деривационной леммы утверждение 3 теоремы, приравняв коэффициенты при e_2 в равенстве $\partial_{[e_1,e_2]} e_1 = (\partial_{e_1}\partial_{e_2} - \partial_{e_2}\partial_{e_1}) e_1$.

5. Формула Гаусса—Бонне

Пусть задано S^1-расслоение π над некоторой замкнутой ориентированной поверхностью M рода g. Выберем на этом расслоении произвольную связность и обозначим через ω ее форму кривизны. Если ω' — форма кривизны другой связности, то $\omega - \omega' = \delta\eta$, где η — глобально определенная 1-форма (лекцию 3). Отсюда следует, что интеграл от формы ω по всей поверхности не зависит от выбора связности и является топологическим инвариантом расслоения.

Определение. Интеграл

$$e(\pi) = \frac{-1}{2\pi}\int_M \omega$$

называется *числом Эйлера* S^1-расслоения.

Теорема. *Число Эйлера принимает целые значения. Если $\omega = -K\sigma$ — форма кривизны произвольной римановой метрики на M, то есть π — расслоение единичных касательных векторов, то $e(\pi) = \chi(M) = 2 - 2g$ — эйлерова характеристика поверхности.*

Доказательство. Нетрудно понять, что у расслоения π существует непрерывное сечение s, определенное над дополнением к конечному множеству точек $\{x_1,\ldots,x_k\} \subset M$. Например, можно разбить поверхность M на многоугольники, задать сечение произвольным образом на ребрах этих многоугольников, а затем продолжить по непрерывности внутрь многоугольников в дополнение к их центрам. Если π — расслоение касательных единичных окружностей, то можно выбрать произвольное векторное поле на поверхности и взять в качестве сечения отнормированное поле. Полученное сечение будет определено в дополнении к множеству особых точек (нулей) исходного поля.

Пусть s — такое сечение. Рассмотрим связность, в которой сечение s ковариантно постоянно (т.е. связность, у которой 1-форма равна нулю в тривиализации, задаваемой сечением s). Эта связность плоская (т.е. ее кривизна равна нулю), однако она не определена в точках x_i.

Чтобы связность продолжилась на все M, ее нужно слегка подправить вблизи точек x_i. Рассмотрим U_i — маленький диск на M с центром в x_i и зафиксируем тривиализацию расслоения π над U_i. В указанной тривиализации сечение s задается отображением $s_i : U_i \setminus \{x_i\} \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, и 1-форма $\widetilde{\theta}_i$ исходной связности задается условием $ds_i + \widetilde{\theta}_i = 0$, т.е. $\widetilde{\theta}_i = -ds_i$. Рассмотрим произвольную гладкую 1-форму θ_i, определенную на всей области U_i и совпадающую с $\widetilde{\theta}_i$ вблизи ее границы. Полученный набор 1-форм склеивается в глобальную связность нашего расслоения.

У построенной связности кривизна уже ненулевая, однако, по построению, ее носитель содержится в объединении дисков U_i, поэтому

$$2\pi\, e(\pi) = \int_M \omega = \sum_i \int_{U_i} d\theta_i = \sum_i \int_{\partial U_i} \theta_i = \sum_i \int_{\partial U_i} \widetilde{\theta}_i = -\sum_i \int_{\partial U_i} ds_i = -2\pi \sum_i \operatorname{ind}_{x_i}(s),$$

где $\operatorname{ind}_{x_i}(s)$ — целое число, равное «количеству оборотов» в слое, которое делает сечение s при обходе вокруг особой точки x_i в положительном направлении вдоль маленькой окружности.

Это доказывает первое утверждение теоремы. Для доказательства второго заметим, что из приведенных вычислений вытекает, что для расслоения касательных окружностей $e(\pi)$ равно сумме индексов особых точек векторного поля на M, что служит одним из определений эйлеровой характеристики $\chi(M)$. □

Задача 5.1. Определите число Эйлера расслоения Хопфа. (Ответ: -1.)

Топологическое отступление. Классификация S^1-расслоений над двумерными поверхностями. Из приведенных рассуждений вытекает теорема о классификации S^1-расслоений над произвольной замкнутой ориентируемой двумерной поверхностью M.

Теорема. *Число Эйлера устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных S^1-расслоений на M и множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел.*

Известно, что поверхность можно получить из одного диска некоторой склейкой вдоль границы. Поэтому у всякого расслоения существует непрерывное сечение, определенное в дополнении к одной точке. Число вращения сечения в этой точке равно числу Эйлера расслоения. Из этой конструкции вытекает, что расслоения с равными числами Эйлера изоморфны. С другой стороны, ясно, что существуют расслоения с произвольным числом

Эйлера $e \in \mathbb{Z}$: достаточно в тривиальном расслоении удалить один слой, а затем вклеить обратно, «перекрутив» сперва расслоение необходимое число раз. □

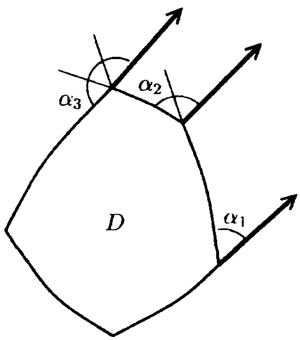
Равенство $\chi(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M K\sigma$ для поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ и называется *формулой Гаусса—Бонне*. Его можно увидеть и непосредственно, заметив, что $K\sigma = G^*\Sigma$, где G — гауссово отображение, а Σ — форма площади на сфере (напомним, что гауссова кривизна K равна якобиану отображения Гаусса). Поэтому

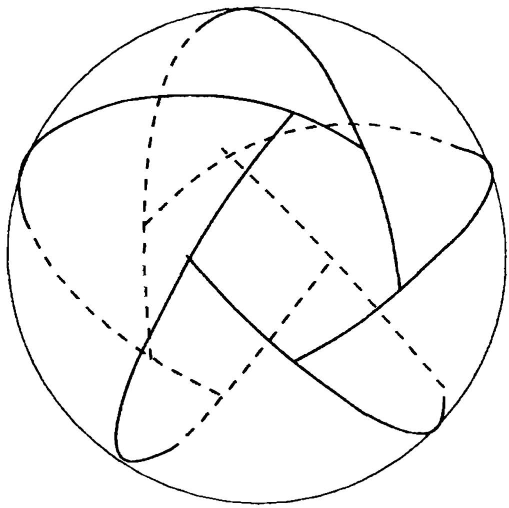
$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\sigma = d\,4\pi,$$

где 4π — площадь сферы, а d — степень гауссова отображения, равная, как нетрудно показать, $\chi(M)/2 = 1 - g$.

Локальный вариант формулы Гаусса—Бонне заключается в том, что при параллельном обносе вдоль границы диска $U \subset M$ касательная плоскость поворачивается на угол

$$\varphi(U) = \int_U K\,\sigma.$$





В случае, когда M — единичная сфера, эту формулу можно получить следующими элементарными рассуждениями. Рассмотрим многоугольник D на сфере, стороны которого — дуги большого радиуса. Из рисунка видно, что угол, на который поворачивается касательная плоскость при обходе вдоль его границы, равен $\varphi(\partial D) = 2\pi - \sum \alpha_i$. Продолжим стороны D, как на рисунке. Тогда сфера представится как объединение многоугольника D, антиподального к нему D' и n двуугольников с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поэтому $4\pi =$ (площадь сферы) $= 2$ (площадь D)$+2\sum \alpha_i$. Отсюда

$$\varphi(\partial D) = \int_D K\,d\sigma\,,$$

поскольку на единичной сфере $K = 1$.

Задача 5.2. Докажите, что *поле ξ на поверхности M параллельно вдоль кривой $\gamma \subset M$ тогда и только тогда, когда это же поле (являющееся, очевидно, касательным) на сфере S^2 параллельно вдоль кривой $G(\gamma) \subset S^2$.*

Поскольку $K\,s = G^*\Sigma$, последняя задача сводит доказательство локальной формулы Гаусса—Бонне в общем случае к случаю сферы.

Геометрически параллельный перенос можно представлять следующим образом. Возьмем плоский лист бумаги и «приклеим» его к M вдоль кривой γ. Лист бумаги изогнется, и линия склейки на нем задаст плоскую кривую $\widetilde{\gamma}$, называемую *разверткой* исходной кривой γ. Можно показать, что на развертке параллельный перенос соответствует обычному параллельному переносу векторов на плоскости.

Задача 5.3. На какой угол поворачивается касательная плоскость к сфере при обходе вдоль параллели с широтой α? Убедитесь в справедливости локальной формулы Гаусса—Бонне в этом случае.

6. Общее понятие кривизны. Плоская связность.

Пусть задана (топологическая) связность в локально тривиальном гладком расслоении $\pi : W \to M$.

Определение. Связность называется *плоской*, если параллельный перенос вдоль всякой замкнутой стягиваемой петли на базе тривиален. В этом случае для произвольных двух различных точек базы параллельный перенос слоев не меняется при непрерывном изменении кривой, соединяющей эти две точки.

Задача 6.1. Докажите, что связность является плоской тогда и только тогда, когда через любую точку y пространства расслоения проходит ковариантно постоянное сечение, заданное в некоторой окрестности ее образа $x = \pi(y)$.

Задача 6.2. Докажите, что связность является плоской тогда и только тогда, когда для каждой точки базы существует тривиализация над некоторой ее окрестностью $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$, в которой плоскости связности горизонтальны, то есть являются плоскостями, касательными к слоям вида $U \times \{y\}$.

Задача 6.3. Докажите, что при $\dim M = 1$ всякая связность является плоской.

Задача 6.4. Рассмотрим расслоение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, и связность на нем, плоскости которой задаются уравнением $dz - y\,dx = 0$. Вычислите параллельный перенос, задаваемый этой связностью при обходе вдоль сторон квадрата в плоскости Oxy, натянутого на базисные векторы.

Последняя задача показывает, что при $\dim M > 1$ связность в общем случае не является плоской. Кривизна топологической связности измеряет степень ее отличия от плоской. Для полей ξ, η на M обозначим через $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ их поднятия в W, касательные к плоскостям связности. Легко проверить равенство $\pi_*[\hat{\xi}, \hat{\eta}] = [\xi, \eta]$, откуда следует, что поле $\widehat{[\xi, \eta]} - [\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ «вертикально», то есть касается слоев расслоения π.

Определение. *Кривизной* связности в точке $x \in M$ базы расслоения называется соответствие, которое всякой паре векторов $\xi, \eta \in T_xM$ сопоставляет векторное поле $R(\xi, \eta) = \widehat{[\xi, \eta]} - [\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ на слое $\pi^{-1}(x)$ расслоения.

Задача 6.5. Докажите, что поле $\widehat{[\xi, \eta]} - [\hat{\xi}, \hat{\eta}]$ линейно зависит от полей ξ, η (относительно умножений на функции), и, следовательно, его ограничение на слой $\pi^{-1}(x)$ зависит лишь от значений полей ξ, η в точке x.

Задача 6.6. Докажите, что диффеоморфизм слоя $\pi^{-1}(x)$, задаваемый параллельным переносом вдоль периметра параллелограмма на M со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$ совпадает (с точностью до $o(\varepsilon^2)$) с потоком поля $R(\xi, \eta)$ за время $-\varepsilon^2$.

Теорема 1. *Связность плоская тогда и только тогда, когда ее кривизна равна нулю.*

Доказательство. Если связность плоская, то поля $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ являются касательными к многообразиям, задаваемым ковариантно постоянными сечениями. Но тогда и поле $R(\xi, \eta)$ касается этих многообразий, а поскольку оно вертикально, то равно нулю.

Обратно, предположим, что $R(\xi, \eta) \equiv 0$. Выберем на базе базис e_i из попарно коммутирующих полей (координатных полей некоторой системы координат). Тогда поля $\widehat{e_i}$ также коммутируют, и коммутируют задаваемые ими фазовые потоки. Действуя этими потоками на некоторую начальную точку, мы получаем для каждой точки пространства расслоения проходящее через эту точку ковариантно постоянное сечение, то есть связность плоская. □

В случае связности на S^1-расслоении векторное поле $R(\xi, \eta)$ имеет вид $\omega(\xi, \eta)\frac{\partial}{\partial \varphi}$, где φ — угловая координата в слое. В частности, равенство $R \equiv 0$ равносильно равенству $\omega = 0$. В случае, когда данная связность — риманова связность, ассоциированная с некоторой метрикой, можно сказать больше.

Теорема 2. *Метрика на римановой поверхности локально евклидова, то есть имеет вид $dx^2 + dy^2$ в подходящих координатах тогда и только тогда, когда ее кривизна равна нулю.*

Доказательство. Существование ковариантно постоянного ортонормированного репера e_1, e_2 касательных векторов вытекает из равенства нулю кривизны. В тривиализации, задаваемой этим репером, 1-форма римановой связности обращается в ноль, и по определению этой формы, поля e_1, e_2 коммутируют, то есть являются координатными для некоторой системы координат. Эта система координат и есть искомая. □

Пример. Для плоской метрики $g = dx^2 + 2\cos(x+y)\,dx\,dy + dy^2$ найдем евклидовы координаты.

Действуя как в примере на стр. 11, мы получаем, что ковариантно постоянные 1-формы имеют вид

$$u = \cos\varphi\, u_1 + \sin\varphi\, u_2,$$

где $u_1 = dx + \cos(x+y)\,dy$, $u_2 = \sin(x+y)\,dy$, и функция φ является первообразной замкнутой формы $d\varphi = -\theta = dx$ (замкнутость формы θ обеспечивается равенством

$K = 0$). Таким образом, $\varphi = x + c$,

$$u = \cos(x+c)\,(dx + \cos(x+y)\,dy) + \sin(x+c)\,\sin(x+y)\,dy = \cos(x + c)\,dx + \cos(c - y)\,dy,$$

и выбирая значения $0, \frac{\pi}{2}$ константы c, мы получаем ортонормированный базис ковариантно постоянных форм

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos x\,dx + \cos y\,dy = d(\sin x + \sin y). \\ u_2 &= -\sin x\,dx + \sin y\,dy = d(\cos x - \cos y). \end{aligned}$$

Искомые евклидовы координаты имеют вид $X = \sin x + \sin y$, $Y = \cos x - \cos y$.□

Задача 6.7. Найдите евклидовы координаты для плоской метрики $g = dx^2 + x^2 dy^2$.

Задача 6.8. Пусть $r \subset \mathbb{R}^3$ — пространственная кривая, S — объединение ее касательных.

а) Введите координаты на S и определите первую квадратичную форму в этих координатах.

б) Докажите, что гауссова кривизна поверхности S в точках ее гладкости равна нулю.

в) Найдите на S евклидовы координаты для случая, когда r — винтовая кривая $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Условие того, что связность является плоской, имеет полезную переформулировку на языке распределений.

Определение. *n-мерным распределением* на гладком многообразии называется произвольное n-мерное подрасслоение его касательного расслоения, то есть поле n-мерных касательных плоскостей, заданных в каждой точке многообразия.

Связность на этом языке — это произвольное распределение, плоскости которого трансверсальны слоям и имеют размерность базы расслоения. Подмногообразие $V \subset W$ называется *интегральным*, если его касательные пространства содержатся в плоскостях распределения.

Определение. n-мерное распределение на многообразии называется *интегрируемым*, если через каждую его точку проходит интегральное подмногообразие, размерность которого равна размерности распределения n.

Таким образом, на языке связностей интегральные многообразия — это ковариантно постоянные сечения, а условие интегрируемости совпадает с условием плоскости связности.

Заметим, что глобально интегральные многообразия могут не являться подмногообразиями. Пример — иррациональная обмотка тора.

Теорема 3 (критерии интегрируемости Фробениуса—Ли). *Заданное распределение на многообразии интегрируемо тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих равносильных условий.*

А (Фробениус). *Для всякой дифференциальной формы ω, обращающейся тождественно в нуль на плоскостях распределения, ее внешний дифференциал $d\omega$ также обращается в нуль на плоскостях распределения.*

Б (Ли). *Для всякой пары векторных полей ξ, η, касательных к распределению, их коммутатор $[\xi, \eta]$ также касается распределения.*

Замечание. Из линейной алгебры вытекает, что всякая внешняя k-форма ω, обращающаяся в ноль на плоскости, заданной линейными уравнениями $\omega_1 = \dots = \omega_l = 0$, имеет вид $\omega = \sum \lambda_i \wedge \omega_i$, где λ_i — некоторые $(k-1)$-формы. Поэтому условие А теоремы достаточно проверять только для 1-форм, и более того, только для фиксированного набора 1-форм ω_i, задающих распределение. Например, в случае, когда многообразие трехмерно, а распределение двумерно и задается 1-формой ω, условие интегрируемости А равносильно равенству

$$\omega \wedge d\omega \equiv 0.$$

Аналогично, условие Б достаточно проверять только для фиксированного набора векторных полей ξ_j, порождающих распределение.

Задача 6.9. Докажите утверждения, приведенные в замечании.

Задача 6.10. Докажите эквивалентность условий А и Б. (Указание: вспомните определение дифференциала 1-формы: $d\omega(\xi, \eta) = \xi\omega(\eta) - \eta\omega(\xi) - \omega([\xi, \eta])$.)

Задача 6.11. Выведите теорему 3 из теоремы 1.

7. Векторные расслоения. Тензоры

Цель данной лекции — упорядочить те знания слушателей о тензорах, которые у них наверняка имеются.

Векторным расслоением $\pi\colon E \to M$ называется расслоение, у которого слоем является векторное пространство, а функциями перехода — линейные преобразования.

Задача 7.1. Опишите тривиализации и функции перехода на *касательном* $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$ и *кокасательном* $\bigcup_{x\in M} T_x^*M$ расслоениях.

Пространство расслоения E — многообразие размерности $n + N$, где $n = \dim M$, $N = \dim E_x$. Часто (не вполне корректно) под *размерностью* векторного расслоения понимают N, размерность слоя. Слои $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, имеют структуру линейного пространства, что позволяет складывать сечения и умножать их на функции на M.

Если есть два расслоения $E = \bigcup E_x$ и $E' = \bigcup E'_x$, то можно образовать их *сумму* $E \oplus E' = \bigcup E_x \oplus E'_x$ (опишите тривиализации и функции перехода). Вообще, все естественные операции над векторными пространствами — сумма и тензорное произведение[1], переход к сопряженному пространству, подпространству, фак-

[1] Напомним, что тензорное произведение $U \otimes V$ векторных пространств U и V — это пространство размерности mn, $m = \dim U$, $n = \dim V$, имеющее три эквивалентных определения:

1) Пространство с базисом $e_i \otimes f_j$, где $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ — базисы в пространствах U и V.

2) Пространство билинейных функций от пары сопряженных элементов $a \in U^*$, $b \in V^*$.

3) Факторпространство необъятного бесконечномерного пространства с базисом, состоящим из символов вида $u \otimes v$, $u \in U$, $v \in V$, по подпространству, порожденному элементами вида $(c_1 u_1 + c_2 u_2) \otimes v - c_1\, u_1 \otimes v - c_2\, u_2 \otimes v$ и $u \otimes (c_1 v_1 + c_2 v_2) - c_1\, u \otimes v_1 - c_2\, u \otimes v_2$.

Именно последнее определение, к которому труднее всего привыкнуть, наиболее инвариантно и переносится на произвольные кольца и модули.

торпространству, — переносятся на расслоения, и мы получаем понятия суммы и тензорного произведения расслоений, сопряженного расслоения, подрасслоения, факторраслоения и т.п.

Чтобы задать векторное расслоение, нужно определить прежде всего пространство E расслоения. Имеется другой подход, согласно которому расслоение на M — это дополнительная алгебраическая структура на многообразии. Оно полностью определяется $C^\infty(M)$-модулем $\Gamma(E)$ своих сечений, равно как само многообразие определяется кольцом $C^\infty(M)$ функций на нем. Опишем это соответствие.

Многообразие M	Кольцо $C^\infty(M)$
Подмногообразие $X \subset M$	Идеал функций, обращающихся в ноль на X
Векторное поле	Дифференцирование $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$
Векторное расслоение E	$C^\infty(M)$-модуль его сечений $\Gamma(E)$
Тривиальное расслоение	Свободный $C^\infty(M)$-модуль
Подрасслоение, факторрасслоение, прямая сумма и тензорное произведение расслоений	Подрасслоение, факторрасслоение, сумма и тензорное произведение $C^\infty(M)$-модулей

Это соответствие очень полезно. Например, пусть задано отображение пространств сечений $\Gamma(E) \to \Gamma(E')$. Тогда если это отображение $C^\infty(M)$-линейно, то оно соответствует отображению самих расслоений, то есть сечению расслоения $\mathrm{Hom}(E, E') = E^* \otimes E'$.

Другой пример. Элементы $C^\infty(M)$-модуля $\Omega^k(M) \otimes \Gamma(E)$ называются k-формами со значениями в расслоении E. Они соответствуют сечениям расслоения $T^{\wedge k} M \otimes E$. В заданной тривиализации расслоения E они имеют вид $\sum \omega_i \otimes e_i$, где ω_i — k-формы, а сечения e_i расслоения E образуют базис его слоев в каждой точке. Это удобно: не нужно вводить координаты на M.

Расслоение $\overbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}^{p \text{ раз}} \otimes \overbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}^{q \text{ раз}}$ (сокращенно $T^{\otimes p} M \otimes T^{*\otimes q} M$) размерности n^{p+q} называется *тензорным расслоением* типа (p, q), а его сечения — *тензорами*, или *тензорными полями*. Выбор локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ на M определяет в пространстве тензоров $T_x^{\otimes p} M \otimes T_x^{*\otimes q} M$ базис $\partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}$, где $\partial_{x^i} = \partial / \partial x^i$. В этом базисе тензор $T = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \partial_{x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}$ задается набором n^{p+q} функций $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$. Это дает координатный подход к понятиям тензора и операций над ними, см. приложение D.

Примеры. Векторное поле — тензор типа $(1, 0)$, дифференциальная 1-форма — тензор типа $(0, 1)$. Риманова структура и дифференциальные 2-формы — примеры сечений расслоения $T^{*\otimes 2} M$, то есть тензоров типа $(0, 2)$. Отметим, что риманова структура g задает отождествление $T_x M \to T_x^* M \colon \xi \mapsto g_x(\xi, \cdot)$, что позволяет отождествить все пространства тензоров типа (p, q) с равными $p + q$.

Приведем важные примеры расслоений, не являющихся тензорными. Если $E \to M$ — векторное расслоение, и $f \colon X \to M$ — гладкое отображение, то на X возникает *индуцированное* расслоение $f^* E = \bigcup_{x \in X} E_{f(x)}$. (Строгое определение дайте самостоятельно.)

Касательное расслоение подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^N$ является подрасслоением тривиального N-мерного. Соответствующее факторрасслоение называется *нормальным* расслоением многообразия M. Если на $\mathbb{R}^N$ фиксирована евклидова структура, то нормальное расслоение состоит из векторов, ортогональных M.

Задача 7.2. Дайте определение нормального расслоения подмногообразия $X \subset M$ многообразия M.

Проективное пространство P^n образовано прямыми в $\mathbb{R}^{n+1}$. На P^n имеются *тавтологические* одномерное расслоение τ и n-мерное ν. Слоем τ над точкой $l \in P^n$ является сама прямая l; слоем расслоения ν служит факторпространство $\mathbb{R}^{n+1}/l$. Аналогично определяются тавтологические k-мерное и $(n-k)$-мерное расслоения на *многообразии Грассмана* $G_{k,n}$ k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства.

Задача 7.3. Постройте канонический изоморфизм $TG_{k,n} \cong \mathrm{Hom}(\tau, \nu) = \tau^* \otimes \nu$.

8. Связность как ковариантное дифференцирование

Понятия связности, параллельного переноса, кривизны дословно переносятся на векторные расслоения. Однако все эти понятия для векторных расслоений можно вводить при помощи языка ковариантных производных, у которого нет аналога для произвольных расслоений. Согласно этому подходу связность в векторном расслоении $E \to M$ — это возможность дифференцировать его сечения вдоль векторных полей на базе M.

Определение. *Аффинной связностью* (или *ковариантным дифференцированием*) называется отображение, сопоставляющее каждому сечению $s \in \Gamma(E)$ и векторному полю ξ на M новое сечение $\nabla_\xi s$, причем это отображение линейно по ξ относительно умножения на функции, а по s оно $\mathbb{R}$-линейно и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_\xi f s = \xi f\, s + f \nabla_\xi s\ .$$

Пример: $E = T\mathbb{R}^n$, ∇ — покоординатное дифференцирование векторных полей, рассматриваемых как вектор-функции.

Задача 8.1. Пусть ∇ — как в примере, $n = 2$. Найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_r + u^2\partial_\varphi$, $v = v^1\partial_r + v^2\partial_\varphi$ в полярных координатах на плоскости.

Другой пример: $M \subset \mathbb{R}^n$, $E = TM$. Ковариантная производная поля v вдоль поля ξ определяется так: нужно сперва продифференцировать v вдоль ξ покомпонентно, а затем ортогонально спроектировать на TM.

Задача 8.2. Пусть, как в примере, $M = S^2$ — единичная сфера, $E = TM$. Найдите производную $\nabla_u v$ для $u = u^1\partial_\psi + u^2\partial_\varphi$, $v = v^1\partial_\psi + v^2\partial_\varphi$ в сферических координатах.

Задача 8.3. Пусть E — какое-нибудь тензорное расслоение, например, TM или T^*M. Производная Ли L_ξ удовлетворяет правилу Лейбница. Является ли она связностью?

Линейность по ξ позволяет «собрать вместе» производные по разным направлениям и определить отображение пространств сечений $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M)\otimes\Gamma(E)$. Производная сечения s вдоль конкретного поля задается его сверткой с первым сомножителем в выражении для ∇s. Поэтому эквивалентным образом можно определить связность как отображение пространств сечений $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M)\otimes\Gamma(E)$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla fs = df\otimes s + f\nabla_\xi \,.$$

Задача 8.4. Как, зная производные $\nabla_{\partial_{x^i}} s$ вдоль базисных полей, определить полную производную ∇s, и обратно?

Задача 8.5. Пусть $E = T^*M$, тогда $\Gamma(E) = \Omega^1(M)$. Правило Лейбница также стоит в основе определения внешнего дифференцирования $d\colon \Omega^1(M) \to \Omega^2(M) \subset \Omega^1(M)\otimes\Omega^1(M)$. Является ли оно связностью?

Выберем тривиализацию расслоения E в некоторой области $U \subset M$, то есть набор $\{e_i\}$ его сечений, образующих базис в каждом слое. Продифференцируем каждое e_i и разложим его по тому же базису, $\nabla e_j = \theta^i_j\otimes e_i$. Матрица $\theta = \theta^i_j$, состоящая из 1-форм (i — номер строки, j — номер столбца), называется *матрицей связности*. Она полностью определяет ∇ в данной области: по определению $\nabla s^i e_i = ds^i\otimes e_i + s^i\theta^j_i\otimes e_j = (ds^i + \theta^i_j s^j)\otimes e_i$, или

$$\nabla s = ds + \theta s$$

в матричной форме, если s представлять как вектор-столбец. Наоборот, более подробно в координатах на M можно записать

$$\nabla_k s^i = \nabla_{\partial_{x^k}} s^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} s^j \,,$$

где $\theta^i_j = \Gamma^i_{jk}\,dx^k$. Функции Γ^i_{jk} называются *символами Кристоффеля*. Таким образом, локально связность задается произвольным набором из $n N^2$ функций, где n — размерность базы расслоения, а N — размерность слоя (т.е. ранг расслоения). Глобально пространство связностей является аффинным пространством над пространством сечений расслоения $\mathrm{Hom}(E, T^*M\otimes E) = E^*\otimes T^*M\otimes E$: разница любых двух связностей $\nabla_\xi s - \nabla'_\xi s$ линейна уже как по ξ, так и по s.

Задача 8.6. Для связностей задач 1,2 определите матрицы связности, символы Кристоффеля.

Сопряженная связность ∇^* на расслоении E^* определяется следующим условием: если сечения $u \in \Gamma(E^*)$ и $s \in \Gamma(E)$ ковариантно постоянны вдоль кривой γ, то величина (u, s) не меняется вдоль этой кривой. Это условие равносильно равенству

$$d(u,s) = (\nabla^* u, s) + (u, \nabla s)\,, \quad \text{или, иначе,} \quad (\nabla^*_\xi u)(s) = \xi u(s) - u(\nabla_\xi s)$$

для произвольных сечений $u \in \Gamma(E^*)$, $s \in \Gamma(E)$ и поля ξ. В двойственном базисе $\{f^i\}$ матрица сопряженной связности θ^* имеет вид $0 = d(f^i, e_j) = \theta^j_i + \theta^{*i}_j$, т.е. $\theta^* = -\theta^\top$.

Из аналогичных соображений определяется связность $\nabla^{E\otimes F}$ на тензорном произведении расслоений E и F со связностями ∇^E и ∇^F:

$$\nabla^{E\otimes F} u\otimes v = (\nabla^E u)\otimes v + u\otimes(\nabla^F v), \qquad \nabla_\xi^{E\otimes F} u\otimes v = (\nabla_\xi^F u)\otimes v + u\otimes(\nabla_\xi^F v)\ .$$

В дальнейшем мы, как правило, будем использовать обозначение ∇ как для сопряженной связности, так и для связностей на всех тензорных степенях E.

9. Кривизна аффинной связности

Сечение s называется *ковариантно постоянным* вдоль кривой $\gamma \subset M$, если $\nabla_{\dot\gamma} s = 0$. Условие ковариантной постоянности задает систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на компоненты сечения s, и следовательно, задает линейное отображение $E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ слоев, называемое *параллельным переносом* вдоль кривой γ. Таким образом, линейная связность в векторном расслоении - это топологическая связность, для которой параллельные переносы являются линейными преобразованиями. В фиксированной тривиализации плоскости топологической связности задаются обращением в ноль 1-форм $\omega^i = ds^i + \theta^i_j \sigma^j$.

Связность называется *плоской*, если в окрестности каждой точки найдется репер, состоящий из сечений, ковариантно постоянных во всей окрестности, то есть существует тривиализация, в которой $\theta \equiv 0$. Эквивалентно, связность плоская тогда и только тогда, когда параллельный перенос слоев не меняется при непрерывном изменении кривой, соединяющей две заданные точки базы. Согласно общей теории топологических связностей, чтобы выяснить, является ли связность плоской, необходимо вычислить ее кривизну. Напомним, что для касательных векторов $\xi, \eta \in T_x M$ кривизна $R(\xi,\eta)$ — векторное поле, задающее инфинитезимальное преобразование слоя E_x.

Лемма. *Если связность в векторном расслоении линейна, то $R(\xi,\eta)$ — линейный эндоморфизм слоя, линейно и кососимметрично зависящий от ξ, η. Во всякой тривиализации это линейное преобразование задается матрицей*

$$R = d\theta + \theta \wedge \theta,$$

составленной из 2-форм на M.

Приведенная формула называется *структурным уравнением Картана*. Таким образом, кривизна задается глобальным сечением расслоения $T^{*\wedge 2}M\otimes E^*\otimes E$, называемым *тензором кривизны*. Ниже приведены другие его интерпретации. В качестве следствия общей теории связностей получаем следующий критерий плоскости.

Теорема. *Линейная связность является плоской тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.* □

Доказательство леммы. Выберем тривиализацию $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{R}^n$ с координатами $s^1, \ldots, s^n$ на втором сомножителе. Условие ковариантной постоянности сечения состоит в том, что его график касается плоскостей $C(y) \in T_yU \times \mathbb{R}^n$, заданных 1-формами $\omega^i = ds^i + \theta^i_j s^j$. Таким образом, поднятие поля ξ на M до поля $\hat{\xi}$ на $U \times \mathbb{R}^n$, касающегося плоскостей $C(y)$, имеет вид

$$\hat{\xi} = \xi - \theta^i_j(\xi) s^j \frac{\partial}{\partial s^i}.$$

Отсюда находим,

$$\begin{aligned} R(\xi,\eta) &= \widehat{[\xi,\eta]} - [\hat{\xi},\hat{\eta}] = [\xi,\eta] - \theta^i_j([\xi,\eta]) s^j \frac{\partial}{\partial s^i} - \left[\xi - \theta^i_j(\xi) s^j \frac{\partial}{\partial s^i}, \eta - \theta^i_j(\eta) s^j \frac{\partial}{\partial s^i}\right] \\ &= \Big(\xi\theta^i_j(\eta) - \eta\theta^i_j(\xi) - \theta^i_j([\xi,\eta])\Big) s^j \frac{\partial}{\partial s^i} + \Big(\theta^i_p(\xi)\theta^p_j(\eta) - \theta^i_p(\eta)\theta^p_j(\xi)\Big) s^j \frac{\partial}{\partial s^i}, \end{aligned}$$

то есть мы получаем линейное векторное поле на слое $\mathbb{R}^n$, матрица которого равна

$$R(\xi,\eta) = \xi\theta(\eta) - \eta\theta(\xi) - \theta([\xi,\eta]) + \theta(\xi)\theta(\eta) - \theta(\eta)\theta(\xi) = (d\theta + \theta\wedge\theta)(\xi,\eta). \qquad \square$$

Ниже приведены различные интерпретации тензора кривизны.

Задача 9.1. Докажите, что при изменении тривиализации $e'_j = a^i_j e_i$ матрица кривизны заменяется на $R' = a^{-1}Ra$, как и положено для сечений расслоения $T^{*\wedge 2}M \otimes E^* \otimes E$.

Задача 9.2. Докажите, что отображение пространств сечений

$$R(\xi,\eta) = \nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]} \colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$C^\infty(M)$-линейно, то есть соответствует глобальному отображению $R(\xi,\eta)\colon E \to E$ самого расслоения. Покажите, что матрица этого отображения в произвольной тривиализации совпадает с матрицей кривизны.

Задача 9.3. Докажите, что линейное преобразование слоя E_x, задаваемое параллельным обносом по периметру параллелограмма со сторонами $\varepsilon\xi, \varepsilon\eta$, имеет вид $\mathrm{id} - \varepsilon^2 R(\xi,\eta) + o(\varepsilon^2)$.

Задача 9.4. Продолжим отображение $\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M)\otimes\Gamma(E)$ до отображения $\nabla^{(k)}\colon \Omega^k(M)\otimes\Gamma(E) \to \Omega^{k+1}(M)\otimes\Gamma(E)$ по правилу

$$\nabla^{(k)}(\omega\otimes s) = d\omega\otimes s + (-1)^k\omega\wedge\nabla s\,.$$

Докажите, что отображение $\nabla^{(1)}\circ\nabla\colon \Gamma(E) \to \Omega^2(M)\otimes\Gamma(E)$ является $C^\infty(M)$-линейным и локально задается умножением на матрицу кривизны R.

Задача 9.5. Докажите, что в координатах коэффициенты тензора кривизны $R = R^i_{jkl}\, dx^k\otimes dx^l\otimes e_i\otimes e^{*j}$ имеют вид

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}\,.$$

В каких пределах меняются индексы в этом равенстве?

10. Риманова связность. Симметрии тензора кривизны

Пусть $E = TM$ — касательное расслоение. Связность ∇ на касательном расслоении называется *симметричной*, если выполнено любое из следующих равносильных условий:

1) символ Кристоффеля симметричен по нижним индексам $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$;

2) $\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi = [\xi, \eta]$ для произвольных векторных полей на M.

3) Альтернирование сопряженной связности $\nabla\colon \Omega^1(M) \to \Omega^1(M) \otimes \Omega^1(M) = \Gamma(T^{*\otimes 2}M)$ совпадает (с точностью до множителя) с внешним дифференциалом. $d\omega - 2(\nabla\omega)_{\mathrm{alt}} = d\omega - \nabla\omega + \sigma\nabla\omega = 0$ для всякой 1-формы ω, где $\sigma\colon T^{*\otimes 2}M \to T^{*\otimes 2}M$ — операция перестановки множителей.

Задача 10.1. Выберите любое свойство, по вкусу, и выведите из него остальные.

Задача 10.2. Докажите, что симметричная связность существует на любом многообразии. От скольких произвольных функций она зависит локально?

Из последнего свойства вытекает, в частности, что для симметричной связности *всякая ковариантно постоянная 1-форма замкнута* (если существует).

Задача 10.3. Докажите, что для всякой связности операция $T : \omega \mapsto d\omega - \nabla\omega + \sigma\nabla\omega$ линейна по ω, т.е. является тензором.

Построенный тензор $T \in \mathrm{Hom}(\Omega^1(M), \Omega^1(M) \otimes \Omega^1(M)) = \Gamma(TM \otimes T^{*\otimes 2}M) = \mathrm{Hom}(T^{\otimes 2}M, TM)$ называется *тензором кручения*. В последнем представлении он сопоставляет паре полей ξ, η поле $T(\xi, \eta) = \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta]$. Координаты тензора кручения имеют вид $T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$. У симметричной связности тензор кручения равен нулю.

Теорема. *Симметричная связность на TM является локально евклидовой, т.е. имеет символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ в некоторой карте на M тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.*

Доказательство. По теореме из предыдущей лекции, в окрестности каждой точки существует репер $\{e_i(x)\}$, состоящий из ковариантно постоянных векторных полей. Двойственный репер $\{e^{*i}\}$ в расслоении T^*M также ковариантно постоянный. Если связность симметрична, то 1-формы e^{*i} замкнуты, то есть локально $e^{*i} = dx^i$. Построенные функции x^i можно принять за локальные координаты. В этих координатах $e_i = \partial_{x^i}$ — ковариантно постоянные векторные поля, то есть символы Кристоффеля обращаются в ноль, что и требовалось. □

В отличие от симметричной связности, определенной для TM, понятие связности, согласованной с римановой структурой, имеет смысл для произвольного расслоения $E \to M$.

Риманова структура на расслоении E — семейство положительно определенных квадратичных форм g_x на слоях E_x. Например, риманова структура на многообразии — это, по определению, риманова структура на его касательном расслоении. Риманова структура задает отождествление $E \to E^*\colon v \mapsto g_x(v, \cdot)$. Имея в виду это отождествление. мы будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ как спаривание векторов и ковекторов. так и скалярное произведение.

Связность ∇ называется *согласованной с римановой структурой*. если ∇ совпадает с сопряженной связностью ∇^* при этом отождествлении.

Задача 10.4. Докажите, что связность согласована с римановой структурой тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих равносильных условий:

1) для произвольных сечений $u, v \in \Gamma(E)$ выполняется равенство $d(u,v) = (\nabla u. v)+ (u, \nabla v)$, т.е. $\xi(u,v) = (\nabla_\xi u, v) + (u, \nabla_\xi v)$;

2) метрика g, рассматриваемая как сечение расслоения $E^*\otimes E^*$, ковариантно постоянна, $\nabla g = 0$;

3) в тривиализации, заданной ортонормированным базисом сечений, матрица связности θ кососимметрична, $\theta^\top = -\theta$.

Задача 10.5. Докажите, что связность, согласованная с римановой структурой, существует на любом расслоении. От скольких произвольных функций она зависит локально?

Теорема. *В касательном расслоении риманова многообразия существует единственная симметричная связность, согласованная с римановой структурой.*

Такая связность называется *связностью Леви-Чивита*.

Пример. На двумерной поверхности выберем (локально) ортонормированный базис векторных полей e_1, e_2. В этом базисе согласованность связности с римановой структурой равносильна кососимметричности ее матрицы. Таким образом, матрица связности и ковариантные производные имеют вид

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_{S^1} \\ \theta_{S^1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \nabla_\xi e_1 = \theta_{S^1}(\xi)\, e_2, \qquad \nabla_\xi e_2 = -\theta_{S^1}(\xi)\, e_1$$

для некоторой 1-формы θ_{S^1}. По условию симметричности $[e_1, e_2] = \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 = -\theta_{S^1}(e_1)\, e_1 - \theta_{S^1}(e_2)\, e_2$, то есть θ_{S^1} — 1-форма римановой связности ассоциированного S^1-расслоения.

Доказательство теоремы. Чтобы определить производную $\nabla_{\xi_1}\xi_2$ одного поля вдоль другого, достаточно знать его скалярное произведение $(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3)$ с любым наперед заданным полем ξ_3. Зафиксируем тройку полей ξ_1, ξ_2, ξ_3, и рассмотрим 6 функций $(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i)$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Условие согласованности с римановой структурой накладывает на них три уравнения

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i) + (\nabla_{\xi_k}\xi_i, \xi_j) = \xi_k(\xi_i, \xi_j)\,.$$

Условие симметричности $\nabla_{\xi_k}\xi_j - \nabla_{\xi_j}\xi_k = [\xi_k, \xi_j]$ дает еще три

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i) - (\nabla_{\xi_j}\xi_k, \xi_i) = ([\xi_k, \xi_j], \xi_i)\,.$$

Разрешая полученную систему шести линейных уравнений от шести неизвестных, определяем ее решения, в частности,

$$(\nabla_{\xi_k}\xi_j, \xi_i) = \frac{1}{2}\Big(\xi_k(\xi_i, \xi_j) - \xi_i(\xi_j, \xi_k) + \xi_j(\xi_i, \xi_k) - ([\xi_j, \xi_k], \xi_i) + ([\xi_i, \xi_k], \xi_j) + ([\xi_i, \xi_j], \xi_k)\Big)\,.$$

Остается лишь проверить, что полученное выражение линейно по ξ_i, ξ_k и удовлетворяет правилу Лейбница по ξ_j. □

Приведенная формула, примененные к базисным векторам, позволяют получить явный вид коэффициентов связности. Он упрощается в двух частных случаях.

Задача 10.6. Покажите, что в базисе *коммутирующих* полей ∂_{x^i} коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk} = 1/2 g^{il}(\partial_{x^k} g_{lj} - \partial_{x^l} g_{jk} + \partial_{x^j} g_{lk}) ,$$

или, в матричной форме, $\theta = \frac{1}{2} g^{-1} \|dg_{ij} - \partial_i u_j + \partial_j u_i\|_{ij}$, где $u_i = g_{ij} dx^i$ — базис двойственных 1-форм, а $\partial_i = \partial_{x^i}$ — покомпонентные частные производные.

Задача 10.7. Покажите, что в *ортонормированном* базисе полей $\{\xi_i\}$ коэффициенты связности имеют вид

$$\Gamma^i_{jk} = 1/2(c^i_{kj} + c^j_{ik} + c^k_{ij}) , \qquad \text{где } [\xi_i, \xi_j] = c^k_{ij}\xi_k .$$

Вот другое непосредственное следствие приведенной формулы.

Теорема. *Пусть $N \subset M$ — подмногообразие риманова многообразия M. Рассмотрим связность на N, которая задается дифференцированием полей в связности Леви-Чивита на M с последующим ортогональным проектированием на TN. Полученная связность совпадает со связностью Леви-Чивита на N.*

Действительно, если поля ξ_1, ξ_2, ξ_3 касаются подмногообразия N, то ограничения на это подмногообразие коммутаторов полей, производных функций вдоль них, и т.д. зависят лишь от ограничения полей ξ_1, ξ_2, ξ_3 на это подмногообразие. □

Мы лишний раз убеждаемся, что операция параллельного переноса касательных векторов на поверхности в $\mathbb{R}^3$, как она была определена в одной из первых лекций, относится к внутренней геометрии поверхности.

Теорема. *Риманова структура на M является локально евклидовой, т.е. приводится к виду $\sum (dx^i)^2$ локальной заменой координат тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности Леви-Чивита тождественно равен нулю.*

Доказательство. Поскольку связность Леви-Чивита симметрична, существует система координат, в которой ее символы Кристоффеля обращаются в ноль. В этих координатах условие согласованности связности с римановой метрикой g_{ij} имеет вид $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0$, т.е. квадратичная форма $g_{ij} dx^i dx^j$ имеет постоянные коэффициенты, и аффинной заменой она приводится к сумме квадратов. □

Теорема (симметрии тензора кривизны). *Пусть R — тензор кривизны связности Леви-Чивита на римановом многообразии. Тогда для произвольных векторных полей $X, \ldots, U$ справедливы равенства:*

1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$;
2) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y$;
3) $(R(X,Y)Z, U) + (Z, R(X,Y)U) = 0$;
4) $(R(X,Y)Z, U) = (R(Z,U)X, Y)$.

В другой формулировке, рассмотрим тензор, получаемый опусканием верхнего индекса в тензоре кривизны $R_{ijkl} = (R(\partial_{x^k}, \partial_{x^l})\partial_{x^j}, \partial_{x^i}) = g_{ip}R^p_{jkl}$. Тогда этот тензор кососимметричен по первой и последней паре индексов, не меняется при замене этих пар индексов между собой, и сумма его компонент при циклической перестановке трех индексов равна нулю,

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}\ , \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0\ .$$

Доказательство несколько упрощается следующим замечанием: в силу полилинейности теорему достаточно доказать только для случая коммутирующих полей.

Равенство 1) входит в определение; оно справедливо для тензора кривизны любой связности на любом расслоении.

Равенство 2) вытекает из формулы задачи 9.2 предыдущей лекции и соотношения $\nabla_\xi \eta = \nabla_\eta \xi$, верного для симметричной связности и коммутирующих полей (для выполнения этого равенства согласованность с римановой структурой не нужна).

Далее, равенство 3) отражает тот факт, что параллельный перенос по маленькому замкнутому контуру в плоскости векторов X, Y сохраняет риманову структуру. Формально, согласованность связности с римановой структурой даст

$$\begin{aligned} XY(Z,U) &= X(\nabla_Y Z, U) + X(Z, \nabla_Y U) = \\ &(\nabla_X\nabla_Y Z, U) + (\nabla_Y Z, \nabla_X U) + (\nabla_X Z, \nabla_Y U) + (Z, \nabla_X \nabla_Y U)\ . \end{aligned}$$

Вычисляя аналогично $YX(Z,U)$ и приравнивая полученные выражения, получаем равенство 3) (для его справедливости симметричность связности не требуется, более того, это равенство справедливо для связности, согласованной с римановой структурой на произвольном расслоении).

Наконец, равенство 4) является алгебраическим следствием равенств 2) и 3) (докажите самостоятельно). □

Пространство 4-линейных форм на n-мерном векторном пространстве, удовлетворяющих соотношениям 1)–4), называется *пространством тензоров кривизны*.

Задача 10.8. Найдите размерность пространства тензоров кривизны при $n = 2; 3; 4$; произвольном n.

Тензором Риччи называется свертка тензора кривизны, т.е. билинейная форма, равная следу оператора $\mathrm{Ric}(X, Z) = \mathrm{tr}\,(Y \mapsto R(Y,Z)X)$. В координатах, $R_{ql} = R^i_{qil}$. *Скалярной кривизной* называется след оператора Риччи, $R = g^{ql}R_{ql} = g^{ql}R^i_{qil}$.

Задача 10.9. Что дает свертка тензора кривизны по другой паре индексов?

Теорема. *Пусть M — поверхность в $\mathbb{R}^3$. Тогда $R = 2K$, где K — гауссова кривизна.*

Доказательство. При $n = 2$ в ортонормированном базисе матрица связности имеет вид $\theta = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\theta_{S^1} \\ \theta_{S^1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где θ_{S^1} — 1-форма римановой связности ассоциированного S^1-расслоения. Таким образом, матрица кривизны равна

$$R = d\theta + \theta\wedge\theta = \begin{pmatrix} 0 & -d\theta_{S^1} \\ d\theta_{S^1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K\sigma \\ -K\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно. тензор кривизны полностью определяется компонентой $R^1_{212} = K$. и, сворачивая его, находим $R = R^1_{212} + R^2_{121} = 2K$. □

Задача 10.10. Докажите, что при $n = 2$ в произвольном базисе $K = R/2 = \frac{R_{1212}}{\det |g|}$.

Пример. Вычислим гауссову кривизну метрики $g = dx^2 + 2\cos w(x,y)\,dx\,dy + dy^2$ и найдем евклидовы координаты при $w = x + y$.

1) Определяем матрицу $g = \|g_{ij}\|$, обратную матрицу g^{-1} и формы $u_i = g_{ij}dx^j$ (коэффициенты этих форм — строки матрицы g):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cos w \\ \cos w & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \frac{1}{\sin^2 w}\begin{pmatrix} 1 & -\cos w \\ -\cos w & 1 + \varphi^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u_1 = dx + \cos w\,dy \\ u_2 = \cos w\,dx + dy \end{matrix}.$$

2) Находим матрицу

$$\begin{aligned} g\theta &= \frac{1}{2}\|dg_{ij} - \partial_i u_j + \partial_j u_i\| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} dg_{11} & dg_{12} - \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \\ dg_{21} + \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 & dg_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin w\, w_y\, dy \\ -\sin w\, w_x\, dx & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(здесь ∂_i — покомпонентные частные производные). Домножая слева на g^{-1}, находим матрицу связности

$$\theta = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{1k}dx^k & \Gamma^1_{2k}dx^k \\ \Gamma^2_{1k}dx^k & \Gamma^2_{2k}dx^k \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin w}\begin{pmatrix} \cos w\, w_x\, dx & -w_y\, dy \\ -w_x\, dx & \cos w\, w_y\, dy \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\Gamma^1_{11} = \operatorname{ctg} w\, w_x$, $\Gamma^2_{22} = \operatorname{ctg} w\, w_y$, $\Gamma^2_{11} = -w_x/\sin w$, $\Gamma^1_{22} = -w_y/\sin w$, остальные 4 символа Кристоффеля равны нулю.

3) Находим матрицу кривизны

$$R = d\theta + \theta \wedge \theta = \begin{pmatrix} -\cos w & -1 \\ 1 & \cos w \end{pmatrix} \frac{w_{xy}}{\sin w}\, dx \wedge dy.$$

При правильных вычислениях матрица $gR = R_{ijkl}\, dx_k \wedge dx_l$ должна получиться кососимметричной. И действительно, перемножая матрицы, получаем

$$gR = \begin{pmatrix} 0 & -\sin w\, w_{xy}\, dx \wedge dy \\ \sin w\, w_{xy}\, dx \wedge dy & 0 \end{pmatrix},$$

то есть $R_{1212} = -\sin w\, w_{xy}$, $K = \frac{R_{1212}}{\det g} = -\frac{w_{xy}}{\sin w}$.

4) Ковариантно постоянные 1-формы имеют вид $u\,dx + v\,dy$, где функции u, v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \theta^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ctg} w\, w_x\, u - \frac{w_x}{\sin w} v \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{w_y}{\sin w} u + \operatorname{ctg} w\, w_y\, v \end{cases}.$$

При $w = x + y$ кривизна обращается в ноль, и у этой системы уравнений имеется совместное решение

$$u = c_1 \cos x - c_2 \sin x, \quad v = c_1 \cos y + c_2 \sin y.$$

где c_1, c_2 — константы. Таким образом, ковариантно постоянные 1-формы имеют вид

$$\begin{aligned} u\,dx + v\,dy &= c_1\,(\cos x\,dx + \cos y\,dy) + c_2\,(-\sin x\,dx + \sin y\,dy) \\ &= c_1\,d(\sin x + \sin y) + c_2\,d(\cos x - \cos y), \end{aligned}$$

и в качестве искомых евклидовых координат можно взять $X = \sin x + \sin y$, $Y = \cos x - \cos y$.

Задача 10.11. Для приведенных ниже метрик определите связность θ, гауссову кривизну K. В случае, когда $K \equiv 0$, найдите координаты, в которых метрика евклидова.

а) $g = (1+\varphi^2)\,dx^2 + 2\varphi\,dx\,dy + dy^2$, $\varphi = \varphi(x)$.

б) $g = dx^2 + \cos^2 x\,dy^2$;

в) $g = dx^2 + x^2\,dy^2$.

Задача 10.12. Докажите, что при $n = 3$ тензор кривизны полностью определяется тензором Риччи.

11. Геодезические

Кривая $\gamma(t)$ на римановом многообразии M называется *геодезической*, если ее касательный вектор параллелен вдоль самой кривой, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. В координатах уравнение геодезической имеет вид

$$\ddot\gamma = -\theta(\dot\gamma)\dot\gamma \qquad \text{или} \qquad \ddot x^i = -\Gamma^i_{jk}\dot x^j \dot x^k\ .$$

Эти соотношения задают обыкновенное дифференциальное уравнение (то есть векторное поле) на $2n$-мерном пространстве TM касательного расслоения. Задание начального вектора (вместе с точкой приложения) однозначно задает всю геодезическую. Приведем стандартные интерпретации уравнения геодезических. Рассмотрим метрику g как функцию $T(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 = \frac{1}{2}g(\xi,\xi)$, заданную на пространстве касательного расслоения и квадратичную на слоях (в механике T называется кинетической энергией).

Задача 11.1. Докажите, что геодезические являются траекториями движения частицы с кинетической энергией T, а именно, справедливы следующие эквивалентные утверждения (эквивалентность этих утверждений обычно доказывается на одной из первых лекций стандартного курса механики).

а) Геодезическая, соединяющая точки $a, b \in M$, является экстремалью функционалов длины и действия

$$l(\gamma) = \int \gamma\,dl = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}(x)\dot x^i \dot x^j}\,dt\,, \qquad S(\gamma) = \int_\gamma T(\dot\gamma)\,dt = \frac{1}{2}\int_\gamma g_{ij}(x)\dot x^i \dot x^j\,dt$$

на пространстве гладких кривых, соединяющих точки a и b.

б) Уравнение геодезических имеет вид уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0 .$$

в) При отождествлении $TM = T^*M$, задаваемом римановой структурой, уравнение геодезических принимает вид уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = \frac{\partial T}{\partial x^i}; \quad \dot{x}^i = -\frac{\partial T}{\partial p_i}, \qquad p_i = g_{ij}\dot{x}^j = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j}.$$

Часто и обратно, механическую задачу можно свести к исследованию геодезического потока на некотором римановом многообразии. В другой интерпретации, можно рассматривать возмущение (например, световую волну), распространяющееся в неоднородной среде, свойства которой описываются метрикой g. Согласно принципу Гюйгенса, возмущение распространяется, минимизируя длину, то есть вдоль геодезических.

При изометриях геодезические переходят в геодезические, поэтому при помощи них легко строить инварианты (как локальные, так и глобальные) римановых многообразий. Например, они «почти» определяют систему координат в окрестности каждой точки $x \in M$. *Экспоненциальное отображение* сопоставляет вектору $\xi \in T_xM$ точку $\gamma(1)$ на геодезической, заданной начальным условием $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Экспоненциальное отображение задает карту в окрестности точки x, называемую *нормальными координатами*. Нормальные координаты определены с точностью до вращения, то есть элемента группы $O(n)$.

Задача 11.2. а) Найдите производную (т.е. матрицу Якоби) экспоненциального отображения. Докажите, что экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом некоторой области касательного пространства T_xM на окрестность точки x. Докажите, что любые две достаточно близкие точки можно соединить единственной геодезической, не выходящей из окрестности этих точек.

б) Докажите, что в нормальных координатах символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}(0)$ обращаются в ноль, и, более того,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l + o(|x|^2), \qquad \Gamma^i_{jk}(x) = \frac{1}{3}(R^i_{jlk} + R^i_{klj})x^l + o(|x|).$$

Геодезическая локально минимизирует расстояние между данными точками до тех пор, пока на этой геодезической не появляются пары сопряженных точек. Точка B на геодезической называется *сопряженной* точке A на той же геодезической, если бесконечно близкая геодезическая, выходящая из A, также проходит через B. Например, южный полюс на сфере сопряжен северному (вдоль любой геодезической). При прохождении сопряженной точки у квадратичной формы второй вариации функционала действия (или длины) индекс возрастает на один (добавляется один отрицательный квадрат). Более формальное определение заключается в том, что сопряженные точки — критические значения экспоненциального отображения. Сопряженные точки можно найти, варьируя уравнение для геодезических. Пусть $\gamma(t)$ — заданная геодезическая, отнесенная к натуральному параметру, $V(t)$ — поле ее единичных касательных. Поле $J(t)$ вдоль γ называется *якобиевым*, если оно – начальное поле некоторого семейства геодезических $\gamma_\lambda(t)$, $J = \frac{\partial\gamma}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}$. Всякое якобиево поле удовлетворяет уравнению

$$\ddot{J} - R(V, J)V = 0\,,$$

где точка — (ковариантная) производная по натуральному параметру. Действительно, поля $J = \partial_\lambda$ и $V = \partial_t$ коммутируют на плоскости переменных λ, t, поэтому

$$R(V, J)V = \nabla_V\nabla_J V - \nabla_J\nabla_V V = \nabla_V\nabla_V J \qquad \square$$

(мы воспользовались тождеством $\nabla_V V \equiv 0$ и свойством $\nabla_J V = \nabla_V J$ симметричности связности). Далее, разложим J на касательную и ортогональную составляющие. Обе они являются якобиевыми полями. Касательная составляющая отвечает перепараметризации геодезической, поэтому можно считать, что она равна нулю, и $J(t) = y(t)N$, где N — вектор единичной нормали. Отметим, что $N(t)$, как и $V(t)$, ковариантно постоянны вдоль γ, и кроме того, $R(V, N)V = -kN$, где k — гауссова кривизна. Отсюда $\ddot{J} - R(V, J)V = (\ddot{y} + k(t)y)N$, т.е. функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{y} + k(t)y = 0$.

Задача 11.3. Докажите, что решения уравнения $\ddot{y} + k(t)y = 0$, $k(t) \leqslant k_0 < 0$, имеют не более одного нуля.

Задача 11.4. Докажите, что соседние нули всякого решения уравнения $\ddot{y} + k(t)y = 0$, $k(t) \geqslant k_0 > 0$, отстоят не далее, чем в случае аналогичного уравнения с $k \equiv k_0$, т.е. на $\pi/\sqrt{k_0}$.

Вот примеры глобальных утверждений, полученных рассмотрением геодезических. Пусть риманово многообразие *полно*, т.е. всякая геодезическая может быть неограниченно продолжена. На полном многообразии любые две точки соединяются геодезической минимальной длины.

а) если $k \leqslant 0$, то на M нет пар сопряженных точек, откуда следует, что универсальная накрывающая M диффеоморфна $\mathbb{R}^2$, и M есть фактор евклидова пространства по дискретной группе диффеоморфизмов.

б) если $k \geqslant k_0 > 0$, то длина геодезической между любыми двумя точками ограничена, откуда следует, что M компактно.

Рассмотрим экспоненциальное отображение на выпуклой поверхности общего положения в $\mathbb{R}^3$. На каждой геодезической, выходящей из точки x, имеется первая сопряженная точка, вторая, и т.д. Кривая, образованная n-ми сопряженными точками, называется n-м фокальным множеством точки x. *Последняя гипотеза Якоби* утверждает, что *на каждом n-м фокальном множестве имеется не менее четырех точек возврата.*

Если M —стандартная сфера, а x — северный полюс, то первое фокальное множество — южный полюс, второе — северный полюс и т.д. Эта ситуация сильно вырожденная, и после маленького шевеления сферы (или метрики на ней) каждое фокальное множество превращается в кривую, имеющую точки возврата. Локальной моделью этой ситуации служит эволюта кривой, близкой к окружности (то есть фокальное множество геодезических евклидовой метрики, ортогональных данной кривой, см. лекцию 1).

В настоящее время доказано, что n-е фокальное множество имеет не менее четырех точек возврата для всякой метрики, достаточно близкой к сферической. Это утверждение является одним из вариантов обобщения теоремы о четырех вершинах. В общем случае гипотеза остается недоказанной, даже для эллипсоидов (несмотря на то, что уравнение геодезических для эллипсоида явно интегрируется в эллиптических функциях).

Задача 11.5. Докажите, что всякая изометрия связного риманова многообразия, неподвижно действующая на некоторой касательной плоскости, является тождественным преобразованием.

Задача 11.6. Вычислите группу изометрий а) сферы б) одной из пол конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Напомним (см. задачу 2.3), что *плоскостью Лобачевского* L называется компонента $z > 0$ гиперболоида $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, снабженная римановой структурой, индуцированной из псевдоримановой метрики $dx^2 + dy^2 - dz^2$.

Задача 11.7. а) Определите кривизну плоскости Лобочевского.

б) Найдите геодезические во всех трех моделях (однополостный гиперболоид, единичный круг, верхняя полуплоскость).

в) Определите группу изометрий.

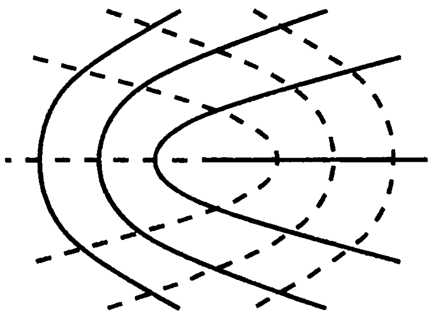
Приложение А. Решения некоторых задач и комментарии

Формула Эйлера (кривизна гиперплоского сечения). Рассмотрим кривую γ, полученную сечением гладкой поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ плоскостью λ, которая образует угол β с нормалью, и пусть касательная этой кривой $T_p\gamma = \lambda \cap T_pM$ образует угол α с одним из главных направлений. Тогда кривизна кривой γ в точке p дается формулой

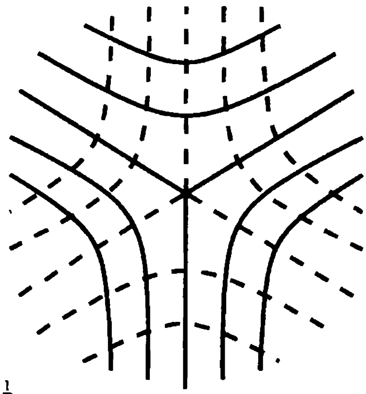
$$k \cos \beta = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

где k_1, k_2 — главные кривизны.

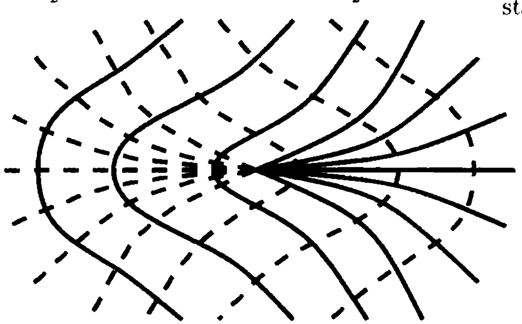
Типичные особенности поля крестиков главных направлений в окрестности омбилической точки поверхности изображены на рисунке (сплошными и пунктирными линиями изображены интегральные траектории двух полей главных направлений). Все они реализуются на поверхностях вида $z = x^2 + y^2 + x^2y + ay^3$ для различных значений параметра a. Первые две картинки называются, соответствен-



lemon, ind $= \frac{1}{2}$



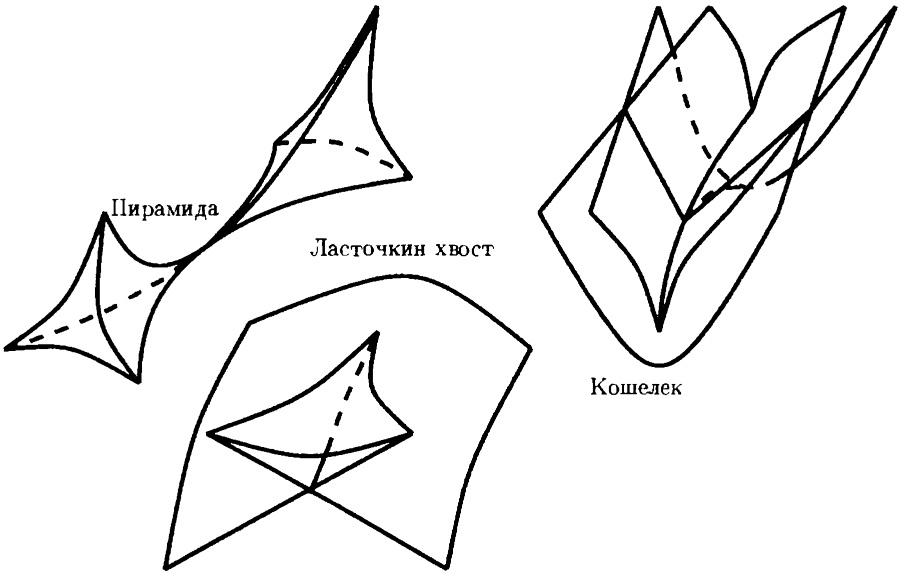
star, ind $= -\frac{1}{2}$



(le) monstar, ind $= \frac{1}{2}$

но, *lemon* («лимон») и *star* («звезда») ввиду соответствующего визуального сходства. Последняя, как нечто промежуточное, получила название (*le*) *monstar* («монстр»).

Каустика в фокусе омбилической точки поверхности имеет одну из двух возможных особенностей — «кошелек» или «пирамиду». Интересно отметить, что кошельку может соответствовать любая из описанных выше особенностей поля главных направлений (с индексом $\pm 1/2$), а пирамиде соответствует обязательно звезда (с индексом $-1/2$). Помимо кошелька, пирамиды, ребер возврата и трансверсальных пересечений, фокальное множество типичной поверхности может иметь особенности еще одного типа, имеющего название «ласточкин хвост».



Вычисление связности Леви-Чивита и кривизны римановой метрики можно проводить двумя способами, действуя либо в ортонормированном базисе (как в примере на стр. 11), либо в базисе коммутирующих векторных полей $\partial/\partial x^i$ (как в примере на стр. 17). Первый способ, по-существу, — теория связностей в S^1-расслоении.

Кривизна метрики $g = A^2dx^2 + B^2dy^2$ равна $K = -\frac{1}{AB}\left(\partial_x\left(\frac{\partial_x B}{A}\right) + \partial_y\left(\frac{\partial_y A}{B}\right)\right)$. Отсутствие члена с $dx\,dy$ означает, что координатные линии ортогональны. В частности, кривизна метрики, имеющей **конформный вид** $g(x,y)(dx^2+dy^2) = h^2(dx^2+dy^2)$, равна

$$K = -\frac{\Delta \ln h}{h^2} = -\frac{\Delta \ln g}{2g}, \quad \text{где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Сфера $x^2+y^2+z^2 = R^2$ в евклидовом пространстве с метрикой $dx^2+dy^2+dz^2$ имеет постоянную положительную кривизну $K = R^2$. Ее метрика

$$g = R^2(d\psi^2 + \sin^2\psi d\varphi^2) = \frac{4R^2}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2d\varphi^2) = \frac{4R^2}{(R^2+X^2+Y^2)^2}(dX^2+dY^2).$$

Здесь ψ, φ — сферические координаты: $x = R\sin\psi\cos\varphi$, $y = R\sin\psi\sin\varphi$, $z = R\cos\psi$; r, φ — полярные координаты при стереографической проекции на плоскость Oxy: $r = R\sin\psi/(1-\cos\psi)$. X, Y — евклидовы координаты на той же плоскости.

Псевдосфера $-x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ в псевдоевклидовом пространстве с метрикой $dx^2 + dy^2 - dz^2$ имеет постоянную отрицательную кривизну $K = -R^2$. Ее метрика

$$g = R^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi d\varphi^2) = \frac{4R^2}{(R^2 - r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = \frac{4R^2}{(R^2 - X^2 - Y^2)^2}(dX^2 + dY^2).$$

Здесь χ, φ — псевдосферические координаты: $x = R\operatorname{sh}\chi\cos\varphi$, $y = R\operatorname{sh}\chi\sin\varphi$, $z = \operatorname{ch}\chi$; r, φ — полярные координаты при стереографической проекции на плоскость Oxy: $r = R\operatorname{sh}\chi/(1+\operatorname{ch}\chi)$, X, Y — евклидовы координаты на той же плоскости.

Кривизна метрики $g = dx^2 + 2\cos\omega\, dx\, dy + dy^2$ равна $K = -\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}/\sin\omega$. Эта метрика имеет постоянную отрицательную кривизну $K = -1$, если функция ω удовлетворяет «sin-gordon» уравнению $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} = \sin\omega$. Его решения вида $\omega(x,y) = \varphi(x+y)$, убывающие при $x+y \to +\infty$, соответствуют «псевдосфере Бельтрами», поверхности вращения $Z = -\sqrt{1-r^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}$, $r = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Приложение B. Некоторые формулы из анализа

1. *Векторные поля.* В координатах векторное поле $v = \sum v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ задается набором из n функций v_i, где n — размерность многообразия. Производная по направлению поля v, $f \mapsto vf = \sum v_i\, \partial f/\partial x_i$, является дифференцированием кольца функций на многообразии, то есть эта операция $\mathbb{R}$-линейна и удовлетворяет правилу Лейбница, $v(fg) = f\,vg + g\,vf$. Более того, это соответствие является взаимно однозначным соответствием между пространствами векторных полей и дифференцирований.

2. *Производная Ли* L_v вдоль векторного поля v действует на различные объекты тензорной природы на многообразии следующим образом: поток g^t векторного поля переносит данное тензорное поле w, и получается семейство тензорных полей w_t. По определению, $L_v w = \frac{d}{dt} w_t \Big|_{t=0}$.

3. *Коммутатор* $[u, v]$ векторных полей $u = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $v = \sum v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ определяется как дифференцирование $f \mapsto uvf - vuf$. Эквивалентно, коммутатор можно задать как производную Ли, $[u, v] = L_u v = \frac{d}{dt} v_t \Big|_{t=0}$, где $v_t(x) = \left(g^t\right)_*^{-1} v(g^t x)$, а семейство диффеоморфизмов g^t — поток поля u. В координатах коммутатор имеет вид

$$[u, v] = \sum (uv_j)\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum (vu_i)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum \left(u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Операция взятия коммутатора не линейна по отношению к умножению полей на функции, однако выполняются следующие тождества:

$$[u, gv] = g[u, v] + ug\, v, \qquad [fu, v] = f[u, v] - vf\, u.$$

4. *Дифференциальные формы* степени k — это билинейные кососимметрические функции от набора из k векторных полей. Простейший пример — это 1-форма df, где f — функция. По определению, $df(\xi) = \xi f$.

5. *Операция внешнего умножения*[2] сопоставляет k-форме α и l-форме β $(k+l)$-форму $\alpha \wedge \beta$ по правилу

$$\alpha^k \wedge \beta^l(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\substack{\sigma_1 < \dots < \sigma_k \\ \sigma_{k+1} < \dots < \sigma_{k+l}}} (-1)^\sigma \alpha^k(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k})\, \beta^l(\xi_{\sigma_{k+1}}, \dots, \xi_{\sigma_{k+l}}),$$

где $(-1)^\sigma$ — знак подстановки $(1, \dots, k+l) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_{k+l})$. Эта операция ассоциативна и (супер)коммутативна, $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$. Пользуясь внешним умножением, локально всякую k-форму можно однозначно представить в виде

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

[2] В некоторых учебниках внешнее умножение определяется как альтернирование тензорного, что приводит к дополнительным коэффициентам в некоторых формулах. Такие соглашения приводят к равенству $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = 1/n!$. Мы придерживаемся мнения, что последнее число должно равняться объему единичного куба, то есть 1.

где x_i — координатные функции выбранной системы координат.

6. ***Производная Ли*** $L_v\alpha$ удовлетворяет тождеству

$$v\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_k) = (L_v\alpha)(\xi_1,\ldots,\xi_k) + \alpha([v,\xi_1],\xi_2,\ldots\xi_k) + \ldots + \alpha(\xi_1,\ldots\xi_{k-1},[v,\xi_k]).$$

7. Производная Ли однозначно задается следующими свойствами

1) эта операция $\mathbb{R}$-линейна;
2) для 0-формы f, то есть функции, $L_vf = vf$;
3) для 1-форм вида df выполняется $L_vdf = d(vf)$;
4) $L_v(\alpha^k \wedge \beta^l) = (L_v\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(L_v\beta)$.

8. ***Внешний дифференциал*** k-формы — это $(k+1)$-форма, заданная соотношением

$$\begin{aligned} d\omega(v_0,\ldots,v_k) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i v_i\omega(v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_k) \\ &\quad + \sum_{0\leqslant i<j\leqslant k}(-1)^{i+j}\omega([v_i,v_j],v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_k\ .) \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} k=1: &\quad d\alpha(\xi,\eta) = \xi\alpha(\eta) - \eta\alpha(\xi) - \alpha([\xi,\eta]) \\ k=2: &\quad d\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1\alpha(\xi_2,\xi_3) - \alpha([\xi_1,\xi_2],\xi_3) + \circlearrowleft, \end{aligned}$$

где слагаемые $\circlearrowleft$ получаются циклическими перестановками индексов $1,2,3$.

9. Эквивалентно, дифференциал можно задавать при помощи следующих аксиом:

1) он $\mathbb{R}$-линеен;
2) для 0-формы f, то есть функции, $df(\xi) = \xi f$;
3) $d(\alpha^k\wedge\beta^l) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge d\beta$;
4) $d^2 = 0$.

Корректность и первого, и второго определения нуждается в проверке.

10. Из второго определения вытекает координатное представление дифференциала,

$$d\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\Big) = \sum_{i_1<\cdots<i_k,j}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_j}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

11. ***Тождество*** $L = id + di$ ***Картана.*** Обозначим через i_v операцию подстановки поля v на первое место (она понижает на один степень формы). Тогда справедливо тождество

$$L_v\alpha = i_vd\alpha + di_v\alpha.$$

Его можно доказать либо непосредственно из определения L и d, либо по индукции, раскладывая α на формы меньших степеней.

12. ***Интеграл*** k-формы по k-мерной области $U \subset \mathbb{R}^n$ определяется как кратный интеграл

$$\int_U a(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k = \iint_U a(x)\, dx_1 \ldots dx_k.$$

Этот интеграл не меняется при замене координат, при условии, что эта замена *сохраняет ориентацию.* Интеграл от k-формы по компактному *ориентированному* k-мерному многообразию задается либо разрезанием многообразия на куски, либо при помощи разбиения единицы.

13. ***Формула Стокса.*** Если ориентированное многообразие M имеет границу ∂M, то для всякой формы ω степени $k-1$ выполняется равенство

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Граница ∂M при этом ориентируется согласно правилу: **внешнюю нормаль — в начало**, а именно, касательный репер $\xi_2, \ldots, \xi_k$ положительно ориентирует границу ∂M, если репер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ положительно ориентирует само многообразие M, где ξ_1 — касательный вектор, трансверсальный границе и направленный наружу.

Приложение C. Соответствие между инвариантными и координатными обозначениями

Тензор $T = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{x^{i_1}}\otimes\dots\otimes dx^{j_q}$	Набор n^{p+q} функций $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x)$
Его представление в новом базисе $T = \overline{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\partial_{y^{i_1}}\otimes\dots\otimes dy^{j_q}$	Правила замены координат $\overline{T}^{k_1\dots k_p}_{l_1\dots l_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}$
Изоморфизм перестановки $T^{\otimes 2}M \to T^{\otimes 2}M$: $u\otimes v \mapsto v\otimes u$	Операция перестановки индексов $T^{ij} \mapsto T^{ji}$
Риманова структура $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$	Симметрическая положительно определенная матрица g_{ij}. Матрица g^{ij} — ей обратная: $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$
Изоморфизм $T_xM \to T^*_xM$: $v \mapsto g_x(v,\cdot)$ и его продолжение на тензоры более высоких рангов	Операции (взаимно обратные) поднятия и опускания индексов $T^{iI}_J \mapsto \overline{T}^I_{jJ} = g_{ij}T^{iI}_J$ и $T^I_{jJ} \mapsto \overline{T}^{iI}_J = g^{ij}T^I_{jJ}$
След оператора $f \in \mathrm{Hom}(TM,TM) \cong T^*M\otimes TM$, $u\otimes a \mapsto u(a)$	Операция свертки $T^i_j \mapsto T^i_i$
и его обобщение $T^*M\otimes TM\otimes E \to E$: $u\otimes a\otimes w \mapsto u(a)\,w$	$T^{iI}_{jJ} \mapsto \overline{T}^I_J = T^{iI}_{iJ}$
Связность в расслоении, ее матрица $\theta = \theta^i_j = \Gamma^i_{jk}\,dx^k$	Символы Кристоффеля Γ^i_{jk}
Ковариантная производная $\nabla s^i e_i = (ds^i + \theta^i_j s^j)\otimes e_i$, или $\nabla_\xi s = \xi s + \theta(\xi)s$ $d(u,v) = (\nabla u, v) + (u, \nabla v)$, $\nabla u\otimes v = (\nabla u)\otimes v + u\otimes(\nabla v)$	$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}T^j$, $\nabla_k T_j = \frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \Gamma^i_{jk}T_i$, $\nabla_k T^I_J = \frac{\partial T^I_J}{\partial x^k} - T^I_{jj_2\dots j_q}\Gamma^j_{j_1k} - \dots - T^I_{j_1\dots j_{q-1}j}\Gamma^j_{j_qk} +$ $T^{ii_2\dots i_p}_J\Gamma^{i_1}_{ik} + \dots + T^{i_1\dots i_{p-1}i}_J\Gamma^{i_p}_{ik}$
Замена тривиализации $e'_i = a^j_i e_j$, $\theta' = a^{-1}da + a^{-1}\theta a$	Замена координат $x^i \rightsquigarrow y^{i'}$, $\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial y^{k'}} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^{j'}\partial y^{k'}})$
Связность Леви-Чивиты на TM $g\theta = \frac{1}{2}\|\|dg_{ij} - \partial_i u_j + \partial_j u_i\|\|$ ($u_i = g_{ik}dx^k$)	$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j})$
Тензор кручения $T(\xi,\eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\eta]$	$T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$
Тензор кривизны $R = d\theta + \theta\wedge\theta = R^i_{jkl}dx^k\otimes dx^l$ $R(\xi,\eta) = \nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]}$	$R^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{jk}$ $R(\xi,\eta) = R^i_{jkl}\xi^k\eta^l$