

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Редакционный совет:

А. В. Болсинов
А. В. Борисов
И. С. Мамаев
И. А. Тайманов
Д. В. Трещев

Вышли в свет:

П. И. Голод, А. У. Климык. Математические основы теории симметрии
М. Громов. Гиперболические группы
М. Громов. Знак и геометрический смысл кривизны
Дж. Д. Мур. Лекции об инвариантах Зайберга – Виттена
Дж. Милнор. Голоморфная динамика
И. Р. Шафаревич. Основные понятия алгебры
И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам
Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. Вейвлеты в компьютерной графике
К. Кассель, М. Россо, В. Тураев. Квантовые группы и инварианты узлов

Готовятся к печати:

О. В. Богопольский. Введение в теорию групп
А. Д. Морозов. Введение в теорию фракталов
С. П. Новиков. Топология
Я. Песин. Теория размерности
Ж. П. Рамис. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория
А. И. Шафаревич. Введение в теорию квазиклассического квантования
изотропных многообразий

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 5

QUANTUM GROUPS AND KNOT INVARIANTS

**Christian Kassel, Marc Rosso,
Vladimir Turaev**

Société Mathématique de France 1997

КРИСТИАН КАССЕЛ, МАРК РОССО,
ВЛАДИМИР ТУРАЕВ

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ И ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ

Перевод с английского П. Н. Мнёва
под редакцией Н. Е. Мнёва



Москва

2002

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - техника
-

Кассел К., Россо М., Тураев В.

Квантовые группы и инварианты узлов. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 140 стр.

В книге даётся сжатое введение в теорию квантовых групп, косовых категорий и квантовых инвариантов узлов и трёхмерных многообразий. Особое внимание уделяется недавно открытым глубоким взаимосвязям между этими областями.

Для студентов и аспирантов математических факультетов университетов, специалистов.

ISBN 5-93972-161-3

© Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

Оглавление

Введение	7
ГЛАВА I. Уравнение Янга – Бакстера и представления группы кос	10
1. Уравнение Янга – Бакстера	10
2. Группы кос	12
3. Альтернативное описание B_n	14
ГЛАВА II. Алгебры Хопфа и моноидальные категории	16
1. Алгебры Хопфа	16
2. Моноидальные категории	21
3. Сплетения	24
4. Косовые биалгебры	26
ГЛАВА III. Квантовый дубль Дринфельда	31
1. Двойственная конструкция дубля	31
2. Квантовый дубль и его свойства	35
3. Хопфовы спаривания и обобщенный дубль	39
ГЛАВА IV. Квантовая обертывающая алгебра $U_qsl(N+1)$	44
1. Алгебра Ли $sl(N+1)$	44
2. Конструкция $U_qsl(N+1)$	45
3. Базис типа Пуанкаре – Биркгофа – Витта в U_+	48
4. Специализации и универсальная R -матрица	53
ГЛАВА V. Многочлен Джонса и скейн-категории	55
1. Узлы, зацепления и диаграммы зацеплений	55
2. Многочлен Джонса зацеплений	60
3. Скейн-модули связок	65
4. Категории связок	68
ГЛАВА VI. От ленточных категорий к топологическим инвариантам зацеплений и трехмерных многообразий	72
1. Ленточные категории	72
2. Фулктор F	76
3. Модулярные категории	79
4. Инварианты трехмерных многообразий	82

Глава VII. Теория представлений $U_q\mathfrak{sl}(N+1)$	87
1. Модули старшего веса	87
2. Квантовая теория инвариантов	90
3. Случай корней из единицы	93
4. Квантовые группы с формальным параметром	98
Глава VIII. Инварианты Васильева	100
1. Определение и примеры	100
2. Хордовые диаграммы и теорема Концевича	103
3. Проунипотентное пополнение косовой категории	105
4. Другое описание $\widehat{\mathcal{T}}_0(R)$	108
Глава IX. Дополнительные сюжеты	112
1. Инфинитезимальные симметричные категории	112
2. Квантование инфинитезимальной симметричной категории	117
3. Универсальный инвариант Концевича	123
4. Действие $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$	126
Путеводитель по литературе	130
Литература	132
Предметный указатель	138

Введение

Эта книга посвящена обзору недавних замечательных достижений в теории алгебр Ли и топологии малых размерностей. С точки зрения алгебры, речь тут идет о квантовых группах и косовых категориях. С точки зрения топологии — появляются новые инварианты узлов, зацеплений и трехмерных многообразий. В значительной степени эта новая теория навеяна идеями, возникшими в теоретической физике. Тем самым, снова подчеркивается родство математической физики, теории алгебр Ли и топологии малых размерностей. Квантовые группы ввели В. Дринфельд и М. Джимбо в 1983–1985 годах. Эти группы могут быть неформально описаны как однопараметрические деформации обертывающих алгебр полупростых алгебр Ли. Квантовые группы появились в ходе переформулировки на языке алгебры результатов физиков, и особенности — результатов теорий уравнения Янга–Бакстера, полученных ленинградской школой Л. Д. Фаддеева. Важное свойство квантовых групп состоит в том, что категория их представлений оспашепа так называемым сплетением. Понятие косовой моноидальной категории, введенное А. Жоялем и Р. Стритом, играет фундаментальную роль в этой теории.

Одновременно и независимо прорыв в теории узлов был осуществлен В. Джонсом. Джонс использовал алгебры фон Неймана для определения нового полиномиального инварианта зацеплений. Изучение многочлена Джонса вскоре вовлекло конструкции статистической механики и, в том числе, уравнение Янга–Бакстера. Н. Решетихин и В. Тураев показали, что косовые категории, полученные из квантовых групп, являются правильными алгебранческими объектами для описания представлений групп кос и инвариантов зацеплений. Эта точка зрения приводит к семейству полиномиальных инвариантов зацеплений, чьи компоненты раскрашены конечномерными представлениями комплексной полупростой алгебры Ли. Таким образом, получается обобщение многочлена Джонса, который оказывается частным случаем, когда все компоненты зацепления раскрашены фундаментальным двумерным представлением $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Дальнейшее развитие происходило по нескольким различным, хотя и связанным, направлениям. В 1988 году Э. Виттен ввел понятие топологической квантовой теории поля и наметил замечательную программу этой теории в трехмерном случае. Программа включала определение чис-

ленных инвариантов трехмерных многообразий и зацеплений на трехмерных многообразиях через континуальный интеграл как обобщение значений многочлена Джонса в корнях из единицы. Строгое математическое определение таких инвариантов трехмерных многообразий было дано Н. Решетнхиным и В. Тураевым в 1988 году на основании теории квантовых групп в корнях из единицы.

Примерно тогда же (1989–90), в контексте теории особенностей, В. Васильев ввел понятие инварианта узла конечной степени. Инварианты степеней 0, 1, 2, ... образуют возрастающую фильтрацию векторного пространства всех инвариантов узлов. Соответствующее градуированное векторное пространство возможно описать в терминах хордовых диаграмм, которые, в свою очередь, можно рассматривать как вариант диаграмм Фейнмана. В 1992 году М. Концевич построил инвариант узлов Васильевского типа со значениями в алгебре хордовых диаграмм. Инвариант Концевича оказался сильнее всех инвариантов конечной степени. Полномные инварианты узлов, полученные из квантовых групп, могут также быть вычислены из инварианта Концевича (эти полиномиальные инварианты представляются формальными рядами с коэффициентами — инвариантами конечной степени).

Цель этого обзора — ввести читателя в мир квантовых групп, косовых категорий, узлов, трехмерных многообразий и их инвариантов. Мы не пытались представить полную картину существующей теории, мы пытались лишь высветить ее основные черты. К сожалению, в книгу не вошло много важных аспектов, таких как подход Вороновича к квантовым группам в контексте операторных алгебр, двойственная конструкция Фаддеева, Решетнхина и Тахтаджяна, связи с моделями статистической механики, квантование структур Пуассона и теория групп Пуассона — Ли.

Книга организована следующим образом. В главе I мы начинаем с уравнения Янга — Бакстера. Мы показываем, как решения этого уравнения приводят к представлениям групп кос. В главе II мы вводим понятие косовой биналгебры и показываем, что категория представлений такой биналгебры является косовой моноидальной категорией. Примеры косовых биналгебр доставляют квантовые группы, определенные и рассмотренные в главах III и IV.

В главе III мы представляем конструкцию Дринфелда квантового дубля, которая дает универсальный способ получения косовых биналгебр. Квантовые группы появляются в главе IV вместе с квантованием $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(N+1)$. Мы даем обзор основных свойств квантовых групп.

В главе V мы попадаем в мир топологии малых размерностей. Мы начинаем с определения многочлена Джонса с помощью скобки Кауфф-

мана. Мы показываем, что изучение узлов, зацеплений и более общих объектов, называемых связками, естественным образом приводит к геометрической конструкции косовых моноидальных категорий.

В главе VI мы вводим важный класс косовых моноидальных категорий, а именно ленточные категории. Моноидальные категории, полученные из представлений квантовых групп или из связок являются ленточными категориями. Мы объясняем, как конструировать изотопические инварианты узлов, зацеплений и связок, чьи компоненты раскрашены объектами ленточной категории. Затем мы вводим более ограниченный класс модулярных категорий и показываем, как из каждой модулярной категории вывести соответствующий инвариант Решетихина – Тураева трехмерных многообразий и зацеплений в трехмерных многообразиях.

В главе VII мы даем обзор теории представлений $U_q\mathfrak{sl}(N+1)$ и показываем, что она приводит к ленточным и модулярным категориям и, далее, к конструкции «квантовых инвариантов» зацеплений и трехмерных многообразий.

Глава VIII посвящена теории Васильева инвариантов зацеплений. Примеры инвариантов Васильева доставляют квантовые инварианты из предыдущей главы. Мы формулируем важную теорему, доказанную Концевичем.

В главе IX мы говорим о технически более сложных вещах, основываясь на работе Дринфельда. В частности, мы описываем конструкцию универсального инварианта Концевича для зацеплений и показываем, как из него восстановить квантовые инварианты. В самом последнем пункте мы объясняем, как группа Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на пространстве инвариантов Васильева.

Мы заканчиваем списком литературы для читателя, желающего узнать больше об этом предмете.

Эта книга выросла из заметок, написанных для конференций «Journées Quantiques», которая проходила в Математическом отделении университета Лун Пастера в Страсбурге 2–4 апреля 1993 года. Это была первая из встреч «État de la Recherche», учрежденных Французским математическим обществом (SMF) и финансируемых SMF, Министерством исследования и технологий, Министерством национального образования (DRED) и Научно-исследовательским институтом высшей математики (Страсбург).

ГЛАВА I

Уравнение Янга–Бакстера и представления группы кос

В этой главе мы вводим уравнение Янга–Бакстера и показываем, как всякое решение этого уравнения порождает представление группы кос.

1. Уравнение Янга–Бакстера

1.1. *R*-матрицы

Рассмотрим векторное пространство V над полем k . Уравнение Янга–Бакстера — это следующее уравнение для линейного автоморфизма s пространства $V \otimes V$:

$$(s \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes s)(s \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes s)(s \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes s). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) записано как равенство элементов группы автоморфизмов $V \otimes V \otimes V$. Его решение называется *R-матрицей*. Пусть $(v_i)_i$ — базис векторного пространства V . Автоморфизм s пространства $V \otimes V$ задается семейством скаляров $(c_{ij}^{kl})_{i,j,k,l}$, определяемых соотношением

$$s(v_i \otimes v_j) = \sum_{k,l} c_{ij}^{kl} v_k \otimes v_l.$$

Оператор s является решением уравнения Янга–Бакстера тогда и только тогда, когда для любых i, j, k, l, m, n

$$\sum_{p,q,r} c_{ij}^{pq} c_{qk}^{rn} c_{pr}^{lm} = \sum_{y,q,r} c_{jk}^{qr} c_{iq}^{lv} c_{yr}^{mn}. \quad (1.2)$$

Отыскание решений нелинейных уравнений (1.2) — это глубоко нетривиальная задача. Тем не менее, в 1980-х годах было найдено много решений уравнения Янга–Бакстера. Мы перечислим несколько самых простых.

1.2. Пример

Для всякого векторного пространства V мы обозначим через $\tau_{V,V} \in \text{Aut}(V \otimes V)$ оператор перестановки сомножителей, переставляющий две копии V . Он определяется соотношением

$$\tau_{V,V}(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1 \text{ для любых } v_1, v_2 \in V.$$

Оператор перестановки удовлетворяет уравнению Янга – Бакстера, поскольку в симметрической группе выполнено соотношение Кокстера

$$(12)(23)(12) = (23)(12)(23),$$

где (ij) обозначает транспозицию, меняющую i и j .

1.3. Пример

Пусть V — конечномерное векторное пространство с базисом $(e_1, \dots, e_N)$. Для всякого обратимого скаляра q мы определяем автоморфизм e пространства $V \otimes V$ следующим образом:

$$e(e_i \otimes e_j) = \begin{cases} qe_i \otimes e_i & \text{при } i = j, \\ e_j \otimes e_i & \text{при } i < j, \\ e_j \otimes e_i + (q - q^{-1})e_i \otimes e_j & \text{при } i > j. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.4. Предложение

Аutomорфизм e является решением уравнения Янга – Бакстера. Кроме того, выполняется соотношение

$$(c - q \text{id}_{V \otimes V})(c + q^{-1} \text{id}_{V \otimes V}) = 0.$$

Доказательство мы оставляем в качестве упражнения.

Заметим, что пример 1.3 является однопараметрической деформацией автоморфизма $\tau_{V,V}$ из примера 1.2. Чтобы восстановить последний, достаточно положить в (1.3) $q = 1$. Заметим также, что при $N = 2$ матрица автоморфизма e в базисе $(v_1 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1)$ есть

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & q - q^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

1.5. Упражнения

(а) Вернемся к предположениям и обозначениям примера 1.3. Мы обобщим его, используя два обратимых скаляра p, q и семейство скаляров $\{r_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$, такое что $r_{ii} = q$ и $r_{ij}r_{ji} = p$ при $i \neq j$. Определим автоморфизм c пространства $V \otimes V$ следующим образом:

$$c(e_i \otimes e_j) = \begin{cases} qe_i \otimes e_i & \text{при } i = j, \\ r_{ji}e_j \otimes e_i & \text{при } i < j, \\ r_{ji}e_j \otimes e_i + (q - pq^{-1})c_i \otimes c_j & \text{при } i > j. \end{cases}$$

Проверьте, что автоморфизм c является R -матрицей, причем

$$(c - q \operatorname{id}_{V \otimes V})(c + pq^{-1} \operatorname{id}_{V \otimes V}) = 0.$$

(б) Рассмотрим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Докажите, что это — R -матрица тогда и только тогда, когда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} adb &= adc = ad(a - d) = 0, \\ p^2a &= pa^2 + abc, \quad q^2a = qa^2 + abc, \\ p^2d &= pd^2 + dbc, \quad q^2d = qd^2 + dbc. \end{aligned}$$

2. Группы кос

2.1. Определение

Пусть n — целое число, $n \geq 3$. Мы определяем *группу кос* с n нитями как группу B_n , порожденную $n - 1$ образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношениями

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| > 1, \quad (2.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ при } 1 \leq i, j \leq n - 1. \quad (2.2)$$

При $n = 2$ мы определяем B_2 как свободную группу с единственной образующей σ_1 . Удобно считать также, что $B_0 = B_1 = \{1\}$.

Существует естественное отображение группы B_n на симметрическую группу S_n , то есть группу всех перестановок множества $\{1, \dots, n\}$. Действительно, рассмотрим $n - 1$ транспозиций

$$s_i = (i, i + 1) \quad (i = 1, \dots, n - 1).$$

Они, очевидно, удовлетворяют соотношениям (2.1), (2.2). Следовательно, существует единственный гомоморфизм групп $\pi : B_n \rightarrow S_n$, такой что $\pi(\sigma_i) = s_i$ для всех i . Этот гомоморфизм сюръективен, поскольку транспозиции s_i порождают S_n . В действительности, чтобы перейти от копредставления группы B_n к копредставлению S_n , достаточно лишь добавить новые соотношения

$$\sigma_i^2 = 1 \quad (i = 1, \dots, n - 1).$$

Существенное отличие симметрических групп от групп кос состоит в том, что симметрические группы конечны, а группы кос бесконечны. Более того, группа B_n не имеет кручения, то есть все элементы $\neq 1$ имеют бесконечный порядок.

2.2. От уравнения Янга – Бакстера к представлениям групп кос

Пусть V — векторное пространство и c — автоморфизм $V \otimes V$, являющийся R -матрицей, определенной в пункте 1. Для $1 \leq i \leq n - 1$ построим линейный автоморфизм c_i n -кратного тензорного произведения $V^{\otimes n}$ следующим образом:

$$c_i = \begin{cases} c \otimes \text{id}_{V^{\otimes (n-2)}} & \text{при } i = 1, \\ \text{id}_{V^{\otimes (i-1)}} \otimes c \otimes \text{id}_{V^{\otimes (n-i-1)}} & \text{при } 1 < i < n - 1, \\ \text{id}_{V^{\otimes (n-2)}} \otimes c & \text{при } i = n - 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Мы утверждаем, что соотношения (2.1), (2.2) выполняются для автоморфизмов $c_1, \dots, c_{n-1}$. Это сразу видно в случае (2.1). В случае (2.2) достаточно проверить, что равенство $c_1 c_2 c_1 = c_2 c_1 c_2$ выполнено в $\text{Aut}(V \otimes V \otimes V)$, но это лишь другой способ записи уравнения Янга – Бакстера.

Тем самым доказано следующее

2.3. Предложение

Пусть $c \in \text{Aut}(V \otimes V)$ — решение уравнения Янга – Бакстера. Тогда для любого $n > 0$ существует единственный гомоморфизм $\rho_n^c : B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n})$, такой что $\rho_n^c(\sigma_i) = c_i$ при $i = 1, \dots, n - 1$.

3. Альтернативное описание B_n

В параграфе 2 мы привели алгебраическое определение группы кос. Теперь мы приведем первоначальное геометрическое определение Артина и объясним происхождение термина «коса».

Рассмотрим произведение n экземпляров комплексной прямой $\mathbb{C}^n$. В этом произведении мы выделяем подмножество Y_n , состоящее из всех упорядоченных наборов $(z_1, \dots, z_n)$ точек из $\mathbb{C}$, таких что $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. Отметим точку $p = (1, \dots, n)$ в Y_n . Симметрическая группа S_n действует на Y_n перестановками координат.

Фактор-пространство $X_n = Y_n/S_n$ называется *конфигурационным пространством n точек в $\mathbb{C}$* .

3.1. Теорема

Фундаментальная группа $\pi_1(X_n, p)$ конфигурационного пространства X_n изоморфна группе кос B_n .

Эта теорема восходит к Э. Артину. Мы ограничимся тем, что предъядим гомоморфизм из B_n в $\pi_1(X_n, p)$. Образующей σ_i в B_n мы сопоставим непрерывное отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$, определенное для $s \in [0, 1]$ и для всех j следующим образом:

$$f_i(s) = \frac{1}{2}(2i + 1 - \exp(\sqrt{-1}\pi s)),$$

$$f_{i+1}(s) = \frac{1}{2}(2i + 1 + \exp(\sqrt{-1}\pi s)),$$

$$f_j(s) = j \text{ при } j \neq i, i + 1.$$

Нетрудно проверить, что f является петлей с базовой точкой p в конфигурационном пространстве X_n . Обозначим класс этой петли в $\pi_1(X_n, p)$ через $\hat{\sigma}_i$. Элементы фундаментальной группы $\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_{n-1}$ удовлетворяют соотношениям (2.1) и (2.2). Следовательно, по определению B_n , существует единственный гомоморфизм $B_n \rightarrow \pi_1(X_n, p)$, посылающий σ_i в $\hat{\sigma}_i$ при всех $i = 1, \dots, n - 1$. Этот гомоморфизм является, на самом деле, изоморфизмом. Более подробно см. в [Bir74] или [BZ85]. Теперь мы хотим привести более привычное описание группы кос. Пусть

$$f = (f_1, \dots, f_n) : [0, 1] \rightarrow Y_n \subset \mathbb{C}^n$$

— непрерывное отображение, представляющее элемент $\pi_1(X_n, p)$, а значит, и B_n . Рассмотрим подмножество L_f в $\mathbb{C} \times [0, 1]$

$$L_f = \bigcup_{i=1}^n \{(f_i(s), s) | s \in [0, 1]\}.$$

Подмножество L_f есть дизъюнктивное объединение n штук интервалов, непрерывно вложенных в $\mathbb{C} \times [0, 1]$. Мы называем его *косой с n нитями*. Заметьте, что

- (i) граница L_f — это множество $\{1, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ и
- (ii) при всех $s \in [0, 1]$ пересечение L_f с $\mathbb{C} \times \{s\}$ состоит ровно из n точек.

Наоборот, всякое дизъюнктивное объединение n интервалов, непрерывно вложенных в $\mathbb{C} \times [0, 1]$, и такое что условия (i), (ii) выполняются, является подмножеством L_f для некоторой петли f в X_n .

Отсюда следует, что на косах с n нитями есть отношение эквивалентности, такое что элементы $B_n \cong \pi_1(X_n, p)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности кос с n нитями. Это отношение эквивалентности называется *изотопией*. Мы вновь встречаемся с изотопией в параграф 1 главы V, когда введем понятие связки, обобщающее одновременно и косы и узлы.

3.2. Упражнение

Опишите групповую структуру, индуцированную из B_n на множестве всех изотопических классов кос с n нитями.

ГЛАВА II

Алгебры Хопфа и моноидальные категории

В этой главе мы хотим определить класс алгебр, модули над которыми несут решения уравнения Янга – Бакстера. Для этого необходимо ввести понятия алгебр Хопфа и моноидальных категорий.

1. Алгебры Хопфа

Пусть k — поле. Напомним, что алгеброй называется тройка (A, μ, η) , где A — векторное пространство над k , $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ и $\eta : k \rightarrow A$ суть k -линейные отображения, удовлетворяющие следующим свойствам:

(i) (Ассоциативность) $\mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu)$ и

(ii) (Свойство единицы) $\mu(\eta \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \eta) = \text{id}_A$.

Здесь мы отождествляем $k \otimes A$ и $A \otimes k$ с A . Первое условие выражает ассоциативность умножения μ , а из второго следует, что элемент $\eta(1) \in A$ является правой и левой единицей для умножения μ . Алгебра A коммутативна, если, кроме того, $\mu = \mu^{\text{op}}$, где $\mu^{\text{op}} = \mu \tau_{A,A}$ и $\tau_{A,A}$ переставляет сомножители: $\tau_{A,A}(a \otimes a') = a' \otimes a$.

1.1. Определение

Биалгеброй называется алгебра A , снабженная двумя гомоморфизмами алгебр $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ и $\varepsilon : A \rightarrow k$, удовлетворяющими следующим условиям:

(i) (Коассоциативность)

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \Delta)\Delta, \quad (1.1)$$

(ii) (Аксиома коединицы)

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}_A. \quad (1.2)$$

Если, кроме этого, $\Delta^{\text{op}} = \Delta$, где $\Delta^{\text{op}} = \tau_{A,A}\Delta$, то говорят, что биналгебра A кокоммутативна.

Отображение Δ называется *коумножением* или копроизведением биналгебры A . Отображение ε называется *коединицей*. Пусть A, A' — биналгебры. Гомоморфизм алгебр $f: A \rightarrow A'$ является *морфизмом биналгебр*, если

$$\Delta' f = (f \otimes f) \Delta \text{ и } \varepsilon' f = \varepsilon. \quad (1.3)$$

1.2. Пример (двойственная биналгебра)

Пусть $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ — биналгебра. Рассмотрим двойственное векторное пространство $A^* = \text{Hom}(A, k)$. Благодаря двойственности, отображения Δ и ε порождают новые линейные отображения

$$\mu': A^* \otimes A^* \xrightarrow{\lambda} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\Delta^*} A^*$$

и $\eta' = \varepsilon^*: k = k^* \rightarrow A^*$, где λ есть отображение, определяемое следующим образом:

$$\langle \lambda(\alpha \otimes \beta), a \otimes b \rangle = \langle \alpha, a \rangle \langle \beta, b \rangle,$$

при $\alpha, \beta \in A^*$ и $a, b \in A$. Из условий (1.1), (1.2) следует, что μ' является ассоциативным умножением в двойственном векторном пространстве A^* с единицей, равной η' .

Если A^* конечномерно, то отображение $\lambda: A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$ является изоморфизмом. Это дает возможность определить отображение $\Delta' = \lambda^{-1} \mu^*$ из A^* в $A^* \otimes A^*$. Нетрудно проверить, что $(A^*, \mu', \eta', \Delta', \varepsilon' = \eta^*)$ — биналгебра.

1.3. Пример (противоположные биналгебры)

Для всякой биналгебры $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ можно определить три других биналгебры, а именно

$$A^{\text{op}} = (A, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon), A^{\text{cop}} = (A, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon) \text{ и } A^{\text{op, cop}} = (A, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon).$$

1.4. Пример (биналгебра группы)

Пусть G — группа с единицей e и пусть $A = k[G]$ — групповая алгебра группы G . Мы вводим на A структуру биналгебры, полагая

$$\Delta(x) = x \otimes x \text{ и } \varepsilon(x) = 1 \quad (1.4)$$

для всех $x \in G$. Двойственная алгебра A^* является алгеброй функций на G , принимающих значения в k , причем единица — это постоянная

функция ε . Если, более того, G конечна, мы можем ввести на A^* структуру биналгебры, как объяснено выше. отождествляя $A^* \otimes A^*$ с пространством функций на произведении $G \times G$, мы видим, что коумножение и коединица в A^* задаются следующим образом:

$$\Delta(f)(g \otimes h) = f(gh) \text{ и } \varepsilon(f) = f(e)$$

для всякой функции f на G .

Элементы биналгебры, удовлетворяющие уравнению (1.4), называются *групповыми* элементами. Такие элементы образуют моноид по умножению.

1.5. Пример

Рассмотрим тензорную алгебру $T(V)$ и симметрическую алгебру $S(V)$ векторного пространства V . Существует единственная структура биналгебры на $T(V)$ и на $S(V)$, такая что

$$\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1 \text{ и } \varepsilon(v) = 0 \quad (1.5)$$

для всякого элемента v из V . Эта биналгебра кокоммутативна и для любых $v_1, \dots, v_n \in V$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta(v_1 \dots v_n) = 1 \otimes v_1 \dots v_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \dots v_{\sigma(n)} + \\ + v_1 \dots v_n \otimes 1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где σ пробегает все $(p, n-p)$ -перетасовки симметрической группы S_n , то есть все перестановки σ , такие что $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(n)$.

Элементы биналгебры, удовлетворяющие уравнению (1.5) называются *примитивными* элементами. Подпространство $\text{Prim}(A)$ примитивных элементов A является подалгеброй Ли в A . Скобка Ли в A задается коммутатором $[a, a'] = aa' - a'a$ (для всех $a, a' \in A$).

1.6. Пример

Обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет структуру биналгебры, определенную тем требованием, что каноническая проекция тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ на $U(\mathfrak{g})$ должна быть морфизмом биналгебр. Эквивалентным образом, коумножение Δ , заданное (1.6), может быть определено как композиция морфизма из $U(\mathfrak{g})$ в $U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$, индуцированного

диагональным отображением $x \mapsto (x, x)$ на $\mathfrak{g}$, и канонического изоморфизма $U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$.

1.7. Упражнения

- (а) Покажите, что если поле k имеет нулевую характеристику, то подпространство групповых элементов обертывающей биналгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{g}$.
- (б) Пусть $M(n) = k[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ — алгебра многочленов от n^2 переменных x_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$. Для всех i, j положим

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^n x_{ik} \otimes x_{kj} \text{ и } \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Проверьте, что эти формулы определяют морфизмы алгебр $\Delta : M(n) \rightarrow M(n) \otimes M(n)$ и $\varepsilon : M(n) \rightarrow k$, задающие в $M(n)$ структуру биналгебры.

1.8. Сигма-обозначения Свиндлера

Пусть $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ — биналгебра. Для всякого $x \in A$ элемент $\Delta(x) \in A \otimes A$ имеет вид $\Delta(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i$. Мы формально можем условиться писать эту сумму в виде

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}. \quad (1.7)$$

То обстоятельство, что Δ является морфизмом алгебр, переписывается так:

$$\sum_{(xy)} (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)} = \sum_{(x)(y)} x_{(1)} y_{(1)} \otimes x_{(2)} y_{(2)}. \quad (1.8)$$

В этих обозначениях аксиома коассоциативности (1.1) превращается в

$$\sum_{(x)} \left(\sum_{(x_{(1)})} (x_{(1)})_{(1)} \otimes (x_{(1)})_{(2)} \right) \otimes x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes \left(\sum_{(x_{(2)})} (x_{(2)})_{(1)} \otimes (x_{(2)})_{(2)} \right), \quad (1.9)$$

что мы обозначим просто через $\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$. Свойство коединицы (1.2) может быть переписано как

$$\sum_{(x)} \varepsilon(x_{(1)}) x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(1)} \varepsilon(x_{(2)}) = x \quad (1.10)$$

для всех $x \in A$. Наконец, биалгебра A кокоммутативна тогда и только тогда, когда

$$\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \sum_{(x)} x_{(2)} \otimes x_{(1)} \quad (1.11)$$

для всех $x \in A$.

1.9. Свертка

На векторном пространстве эндоморфизмов $\text{End}(A)$ биалгебры $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ существует естественная операция, так называемая *свертка*. По определению, если f и g — эндоморфизмы, то свертка $f * g$ есть композиция следующих отображений:

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A. \quad (1.12)$$

Используя сигма-обозначения Свидлера, получаем:

$$(f * g)(x) = \sum_{(x)} f(x_{(1)})g(x_{(2)}) \quad (1.13)$$

для всякого $x \in A$. Свертка, очевидно, билинейна, и, как видно из (1.10), эндоморфизм $\eta \varepsilon$ является левой и правой единицей для свертки.

1.10. Определение

Алгеброй Хопфа называется биалгебра, в которой тождественный эндоморфизм A имеет правый и левый обратный S по отношению к свертке. Такой эндоморфизм S называется антиподом.

Являясь двусторонним обратным элементом, антипод (если таковой есть) должен быть единственным. По определению он удовлетворяет соотношению

$$S * \text{id}_A = \text{id}_A * S = \eta \varepsilon. \quad (1.14)$$

В обозначениях Свидлера это соотношение может быть переписано следующим образом:

$$\sum_{(x)} x_{(1)} S(x_{(2)}) = \varepsilon(x) 1 = \sum_{(x)} S(x_{(1)}) x_{(2)} \quad (1.15)$$

для всех $x \in A$.

Морфизмом алгебр Хопфа называется коммутирующий с антиподами морфизм соответствующих биалгебр.

Антипод S алгебры Хопфа A обладает следующими свойствами: это морфизм биалгебры A в $A^{\text{op, cor}}$, то есть $S(1) = 1$ и

$$S(xy) = S(y)S(x), \quad (1.16)$$

$\varepsilon(S(x)) = \varepsilon(x)$, и

$$\sum_{(S(x))} S(x)_{(1)} \otimes S(x)_{(2)} = \sum_{(x)} S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}) \quad (1.17)$$

при всех $x, y \in A$. Если A еще и *кокоммутативна*, то антипод является ниволлюцией:

$$S^2 = \text{id}_A. \quad (1.18)$$

Доказательства и подробности см. в [Abe80] и [Swe69].

1.11. Примеры

- (а) Пусть A — конечномерная алгебра Хопфа с антиподом S . Тогда двойственная биалгебра A^* является алгеброй Хопфа с антиподом S^* .
- (б) Групповая биалгебра $k[G]$ группы G является алгеброй Хопфа с антиподом, определяемым как $S(x) = x^{-1}$ для $x \in G$.
- (в) Тензорная биалгебра $T(V)$ является алгеброй Хопфа с антиподом, определяемым следующим образом: $S(1) = 1$ и для любых $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$$S(v_1 v_2 \cdots v_n) = (-1)^n v_n \cdots v_2 v_1. \quad (1.19)$$

Формула (1.19) определяют также антипод для симметрической биалгебры $S(V)$ и для обертывающей биалгебры $U(\mathfrak{g})$.

2. Моноидальные категории

2.1. Модули над биалгеброй

Одно из важных свойств биалгебры состоит в том, что ее категория модулей образует моноидальную категорию. Цель этого параграфа — объяснить это понятие. Пусть $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ — биалгебра. Тензорное произведение двух A -модулей $U \otimes V$ является $A \otimes A$ -модулем:

$$(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v, \quad (2.1)$$

где $a, a' \in A$, $u \in U$ и $v \in V$. Коумножение Δ позволяет ввести на $U \otimes V$ структуру A -модуля следующим образом:

$$a(u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v) = \sum_{(a)} a_{(1)}u \otimes a_{(2)}v. \quad (2.2)$$

Коединича ε дает возможность ввести на основном поле k структуру тривиального A -модуля:

$$ax = \varepsilon(a)x, \quad (2.3)$$

где $a \in A$ и $x \in k$. Пусть U, V, W — три A -модуля. Рассмотрим канонические изоморфизмы

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W), \quad (2.4)$$

$$k \otimes V \cong V \cong V \otimes k. \quad (2.5)$$

Для элементов $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ они задаются следующим образом:

$$(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w),$$

$$1 \otimes v \mapsto v \mapsto v \otimes 1.$$

Читатель может легко проверить, что из условий (1.1), (1.2), определяющих биналгебру, вытекает, что изоморфизмы (2.4), (2.5) A -линейны, а значит лежат в категории $A\text{-Mod}$ левых A -модулей. Заметьте, что канонический изоморфизм $V \otimes W \cong W \otimes V$, задаваемый отображением перестановки сомножителей $\tau_{V,W}$, вообще говоря, не A -линеен; тем не менее, если A кокоммутативна, то он все же A -линеен.

2.2. Строго моноидальные категории

Теперь мы обсудим моноидальные категории. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория и $\otimes$ — некоторый функтор из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ в $\mathcal{C}$. Это расшифровывается как то, что

- (а) у нас зафиксирован объект $V \otimes W$ для каждой пары (V, W) объектов категории,
- (б) у нас зафиксирован морфизм $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ для каждой пары $(f : V \rightarrow V', g : W \rightarrow W')$ морфизмов $\mathcal{C}$,
- (с) данные (а), (б) согласованы так, что мы имеем равенство

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g) \quad (2.6)$$

всякий раз, когда композиция определена,

- (д) и

$$\text{id}_{V \otimes W} = \text{id}_V \otimes \text{id}_W. \quad (2.7)$$

Строго моноидальной категорией называется категория, оснащенная функтором $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ и отмеченным объектом 1 , называемым *единичным объектом*, так что выполнены следующие соотношения:

$$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W), \quad (2.8)$$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h), \quad (2.9)$$

$$V \otimes 1 = V = 1 \otimes V, \quad (2.10)$$

$$f \otimes \text{id}_1 = f = \text{id}_1 \otimes f \quad (2.11)$$

для всех объектов U, V, W и всех морфизмов f, g, h из $\mathcal{C}$.

2.3. Пример

Пусть $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — семейство групп, пронумерованных натуральными числами, так что $G_0 = \{1\}$. Рассмотрим категорию $\mathcal{G}$, объекты которой — неотрицательные целые числа, а морфизмы задаются следующим образом:

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}}(m, n) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } m \neq n, \\ G_n & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Композиция в $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(n, n)$ задается групповым умножением на G_n . Тожественным морфизмом объекта n является единица группы G_n .

Предположим, что, вдобавок, для каждой пары (m, n) зафиксирован гомоморфизм $\rho_{m,n} : G_m \times G_n \rightarrow G_{m+n}$, такой что

$$\rho_{m+n,p} \circ (\rho_{m,n} \times \text{id}_{G_p}) = \rho_{m,n+p} \circ (\text{id}_{G_m} \times \rho_{n,p}) \quad (2.12)$$

для всех $m, n, p \in \mathbb{N}$. Тогда мы можем определить функтор $\otimes : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ на объектах как $m \otimes n = m + n$, и на морфизмах как

$$f \otimes g = \rho_{m,n}((f, g)) \in G_{m+n},$$

где $f \in G_m$ и $g \in G_n$. Соотношения (2.6), (2.7) выполняются, так как $\rho_{m,n}$ — гомоморфизм. Соотношения (2.8) и (2.10), очевидно, выполнены при $1 = 0$. Из соотношения (2.12) следуют (2.9) и (2.11). Этим доказывается, что $\mathcal{G}$ является строго моноидальной категорией.

2.4. Категории $\mathcal{B}$ и $\mathcal{S}$

Применим конструкцию примера 2.3 к семейству групп кос $(B_n)_n$ и к семейству симметрических групп $(S_n)_n$. Мы считаем, что B_0 и S_0 — тривиальные группы. Мы определяем гомоморфизм $\rho_{m,n} : B_m \times B_n \rightarrow B_{m+n}$ на образующих σ_i параграфа 2 следующим образом:

$$\rho_{m,n}((\sigma_i, \sigma_j)) = \sigma_i \sigma_{m+j} \quad (2.13)$$

при $1 \leq i \leq m-1$ и $1 \leq j \leq n-1$. Эта операция на косах хорошо определена. Заметьте, что $\rho_{m,n}((f,g))$ — это коса, полученная приставлением косы g справа к косе f , таким образом, что друг с другом косы не пересекаются и не переплетаются. Из этого наблюдения понятно, что (2.12) выполнено. Нетрудно проверить, что $\rho_{m,n}$ порождает гомоморфизм $S_m \times S_n \rightarrow S_{m+n}$ с такими же свойствами. Применяя конструкцию из 2.3, мы получаем две строго моноидальные категории, которые мы соответственно обозначаем B и S .

2.5. Категории векторных пространств

Категории, нмевшиеся в виду в начале параграфа 2, — это не только категории из 2.3–2.4, а, скорее, те, которые возникают в линейной алгебре, такие как категория $Vect(k)$ векторных пространств над полем k с обычным тензорным произведением векторных пространств и линейных отображений $\otimes : Vect(k) \times Vect(k) \rightarrow Vect(k)$. Категория $Vect(k)$ не является строго моноидальной категорией, так как в ней изоморфизмы (2.4)–(2.5) не являются тождественными морфизмами. Это препятствие можно обойти. Для этого нужно в (2.8)–(2.11) поменять знаки равенства на изоморфизмы, удовлетворяющие определенным условиям. Эти условия будут подробно описаны в пункте 2.1 главы IX, где мы определим моноидальные категории в самом общем виде. В этом общем смысле категория $Vect(k)$ является моноидальной категорией. Пока что мы сделаем вид, как это обычно и делается, что изоморфизмы (2.4)–(2.5) являются тождественными морфизмами. На самом деле, имеет место теорема Маклейна, утверждающая, что всякая моноидальная категория эквивалентна строго моноидальной. Этот факт позволяет не обращать внимания на общее понятие моноидальной категории, пока мы не дойдем до последних параграфов этой книги.

Как следствие наблюдений, сделанных в начале этого параграфа, категория $A\text{-}Mod$ левых A -модулей является моноидальной категорией с тем же тензорным произведением и теми же морфизмами, что и $Vect(k)$. Единичным объектом является тривиальный A -модуль k .

3. Сплетения

3.1. Структура коммутирования

Теперь мы переходим к категорному аппарату, который доставляет решения уравнения Янга–Бакстера. Структурой коммутирования s на моноидальной категории C называется семейство изоморфизмов

$$c_{v,w} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V, \quad (3.1)$$

определенных для всех пар (V, W) объектов $\mathcal{C}$, такое что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V \\ f \otimes g \downarrow & & \downarrow g \otimes f \\ V' \otimes W' & \xrightarrow{c_{V',W'}} & W' \otimes V' \end{array} \quad (3.2)$$

для любых морфизмов f, g .

3.2. Определение

Пусть $\mathcal{C}$ — строго моноидальная категория. Сплетением в $\mathcal{C}$ называется структура коммутирования на $\mathcal{C}$, удовлетворяющая следующим двум соотношениям:

$$c_{U \otimes V, W} = (c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}), \quad (3.3)$$

$$c_{U, V \otimes W} = (\text{id}_U \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W) \quad (3.4)$$

для всех объектов U, V, W .

Заметьте, что если c — сплетение в $\mathcal{C}$, то и c^{-1} также является сплетением в $\mathcal{C}$. Понятие сплетения может быть введено и в пестрого моноидальной категории (точное определение будет дано в параграфе 2.1 главы IX). Косовой моноидальной категорией называется моноидальная категория, оснащенная сплетением.

Теперь мы установим важное свойство косовой моноидальной категории, а именно, выполненность в ней категорию варианта уравнения Янга – Бакстера.

3.3. Теорема

Пусть U, V, W — объекты косовой строго моноидальной категории. Тогда выполнено равенство

$$\begin{aligned} (c_{V,W} \otimes \text{id}_U)(\text{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W) = \\ = (\text{id}_W \otimes c_{U,V})(c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что автоморфизм $c_{V,V}$ объекта $V \otimes V$ является решением уравнения Янга – Бакстера для любого объекта V косовой моноидальной категории. В результате, по предложению 2.3 главы 1, мы получаем представление группы кос B_n в группе автоморфизмов объекта $V^{\otimes n}$ для всякого объекта V и положительного целого n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы имеем равенства:

$$\begin{aligned} (c_{V,W} \otimes \text{id}_U)(\text{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W) &= (c_{V,W} \otimes \text{id}_U)c_{U,V \otimes W} = \\ &= c_{U,W \otimes V}(\text{id}_U \otimes c_{V,W}) = (\text{id}_W \otimes c_{U,V})(c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}). \end{aligned}$$

Первое и последнее следуют из (3.4), второе — из (3.2) для $f = \text{id}_U$ и $g = c_{V,W}$. ■

3.4. Пример

Оператор перестановки сомножителей τ из примера 1.2 главы I является сплетением в моноидальной категории $\text{Vect}(k)$. Он также является сплетением в категории $k[G]\text{-Mod}$ представлений группы G , и вообще в моноидальной категории $A\text{-Mod}$ модулей над любой кокоммутативной биналгеброй A .

3.5. Упражнения

(а) Покажите, что в любой строго моноидальной категории с единицей 1 для всех объектов V выполняется равенство

$$c_{V,1} = \text{id}_V = c_{1,V}.$$

(б) Докажите, что строго моноидальная категория B параграфа 2.4 имеет сплетение c , однозначно определенное условием $c_{1,1} = \sigma_1 : 1 \otimes 1 \rightarrow 1 \otimes 1$, где σ_1 — образующая группы $\text{Kos } B_2$. Выразите $c_{m,n}$ через образующие B_{m+n} .

4. Косовые биналгебры

Теперь мы опишем биналгебры, категории модулей над которыми естественно оснащены сплетением. По теореме 3.3, мы тем самым сможем получать решения уравнения Янга – Бакстера систематическим образом. Пусть $A = (A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ есть биналгебра, и пусть $A\text{-Mod}$ — соответствующая моноидальная категория (определенная в параграфе 2).

4.1. Теорема

Моноидальная категория $A\text{-Mod}$ является косовой в том и только том случае, когда существует обратимый элемент $R \in A \otimes A$, такой что

$$\Delta^{\text{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \text{ для всех } x \in A, \quad (4.1)$$

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)(R) = R_{13}R_{23}, \quad (4.2)$$

$$(\text{id}_A \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}, \quad (4.3)$$

где $R_{12} = R \otimes 1$, $R_{23} = 1 \otimes R$ и $R_{13} = (\tau_{A,A} \otimes \text{id}_A)(1 \otimes R)$.

Условие (4.1) — это более слабый вариант условия некоммутативности биеалгебры A . Элемент R , удовлетворяющий соотношениям (4.1)–(4.3), называется *универсальной R -матрицей* для A . Биеалгебра A с универсальной R -матрицей называется *косовой биеалгеброй*. Дринфельд использовал вместо этого термин «*квазитреугольная биеалгебра*».

Заметьте, что всякая *кокоммутативная* биеалгебра является косовой с универсальной R -матрицей $R = 1 \otimes 1$.

Доказательство.

(а) Пусть A есть косовая биеалгебра с универсальной R -матрицей R . Для всех пар (V, W) левых A -модулей мы определим естественный изоморфизм A -модулей $c_{V,W}^R: V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ следующим образом:

$$c_{V,W}^R(v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w)) = \sum_i t_i w \otimes s_i v \quad (4.4)$$

для всех $v \in V$ и $w \in W$, где $R = \sum_i s_i \otimes t_i$. Мы утверждаем, что семейство $(c_{V,W})_{V,W}$ является сплетением в моноидальной категории $A\text{-Mod}$, согласно определению из параграфа 3.

Сначала нужно доказать, что отображение $c_{V,W}^R$ принадлежит категории $A\text{-Mod}$, то есть является A -линейным. Это является следствием (4.1), как показывает следующее вычисление:

$$\begin{aligned} c_{V,W}^R(x(v \otimes w)) &= \tau_{V,W}(R\Delta(x)(v \otimes w)) = \tau_{V,W}(\Delta^{\text{op}}(x)R(v \otimes w)) = \\ &= \Delta(x)\tau_{V,W}(R(v \otimes w)) = x(c_{V,W}^R(v \otimes w)) \end{aligned}$$

при всех $x \in A$.

Заметим, далее, что $c_{V,W}^R$ является изоморфизмом, обращение которого задается следующим образом:

$$(c_{V,W}^R)^{-1}(w \otimes v) = R^{-1}(v \otimes w). \quad (4.5)$$

Наконец, несложное вычисление показывает что из условий (4.2) и (4.3) вытекают соотношения (3.3) и (3.4) соответственно.

(б) Пусть теперь, наоборот, дано сплетение c в моноидальной категории $A\text{-Mod}$. Определим элемент $R \in A \otimes A$ следующим образом:

$$R = \tau_{A,A}(c_{A,A}(1 \otimes 1)). \quad (4.6)$$

Покажем, что R является универсальной R -матрицей для A . Если v, w — элементы A -модулей V, W , то из условия (3.2) следует, что

$$c_{V,W}(\bar{v} \otimes \bar{w}) = (\bar{w} \otimes \bar{v})c_{A,A},$$

где $\bar{v} : A \rightarrow V$ и $\bar{w} : A \rightarrow W$ суть A -линейные отображения, однозначно определенные уравнениями $\bar{v}(1) = v$ и $\bar{w}(1) = w$. Следовательно,

$$\begin{aligned} c_{V,W}(v \otimes w) &= (\bar{w} \otimes \bar{v})(c_{A,A}(1 \otimes 1)) = \tau_{V,W}((\bar{v} \otimes \bar{w})(R)) = \\ &= \tau_{V,W}(R(v \otimes w)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Так как $c_{A,A}$ A -линейно, имеем

$$xc_{A,A}(1 \otimes 1) = c_{A,A}(x(1 \otimes 1))$$

для всех $x \in A$. Из (4.7) получаем $\Delta(x)\tau_{A,A}(R) = \tau_{A,A}(R\Delta(x))$, что равносильно (4.1). Наконец, из соотношений (3.3) и (3.4) следуют (4.2) и (4.3). ■

Из теоремы 3.3 мы заключаем, что для всякого A -модуля V автоморфизм $c_{V,V}^R$ объекта $V \otimes V$ есть решение уравнения Янга – Бакстера. Этот эффективный способ получения R -матриц на всех A -модулях объясняет, почему элемент R называется универсальной R -матрицей бивалгебры A . Заметим, что если $R = 1 \otimes 1$, то $c_{V,W}^R = \tau_{V,W}$ — оператор перестановки сомножителей из примера 1.2.

Теперь мы расскажем о некоторых свойствах универсальных R -матриц.

4.2. Предложение

Пусть A — косовая бивалгебра с универсальной R -матрицей R . Тогда имеют место равенства

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \quad (4.8)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_A)(R) = 1 = (\text{id}_A \otimes \varepsilon)(R). \quad (4.9)$$

Если, помимо того, у бивалгебры A есть антипод S , то

$$R^{-1} = (S \otimes \text{id}_A)(R). \quad (4.10)$$

Доказательство.

(а) Из соотношений (4.1)–(4.2) следует:

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} &= R_{12}(\Delta \otimes \text{id})(R) = (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})(R)R_{12} = \\ &= (\tau_{A,A} \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R)R_{12} = (\tau_{A,A} \otimes \text{id})(R_{13}R_{23})R_{12} = \\ &= R_{23}R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

Из того что $(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = \text{id}$ и из (4.2) получаем

$$R = (\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R) = (\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(R_{12}R_{23}) = (\varepsilon \otimes \text{id})(R)\varepsilon(1)R.$$

Так как $\varepsilon 1 = 1$ и R обратима, мы получаем что $(\varepsilon \otimes \text{id})(R) = 1$. Таким же образом мы можем использовать соотношение $(\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}$ и (4.3), чтобы вывести, что $(\text{id} \otimes \varepsilon)(R) = 1$.

(b) По (1.15) антипод S удовлетворяет соотношению $\mu(S \otimes \text{id})\Delta(x) = \varepsilon(x)1$ для всех $x \in A$. Отсюда следует, что

$$(\mu \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R) = (\varepsilon \otimes \text{id})(R) = 1,$$

с учетом (4.9). Отсюда и из (4.2) получаем

$$1 = (\mu \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(R_{12}R_{23}) = (S \otimes \text{id})(R)S(1)R.$$

Так как $S(1) = 1$, имеем $(S \otimes \text{id})(R) = R^{-1}$. ■

4.3. Квадрат антипода

Как было отмечено в параграфе 1, антипод S кокоммутативной алгебры Хопфа является инволюцией. Однако в случае алгебры Хопфа, оснащенной сплетением, квадрат S^2 , вообще говоря, не равен тождественному отображению. Тем не менее, это внутренний автоморфизм.

Пусть $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$ — косоан алгебра Хопфа с обратимым антиподом S и универсальной R -матрицей R . Рассмотрим элемент $u \in A$, задаваемый как

$$u = \sum_i S(t_i)s_i, \quad (4.11)$$

где $R = \sum_i s_i \otimes t_i$. Тогда u обратим в A с обратным элементом

$$u^{-1} = \sum_i S^{-1}(t_i)S(s_i), \quad (4.12)$$

и квадратом антипода

$$S^2(x) = uxu^{-1} \quad (4.13)$$

для всех $x \in A$. Более того, справедливо

$$\Delta(u) = (R_{21}R)^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(R_{21}R)^{-1} \quad (4.14)$$

и

$$uS(u) = S(u)u. \quad (4.15)$$

Элемент $uS(u)$ лежит в центре A . Доказательство этих свойств можно найти в [Dri89a] (см. также [Kas95, VIII.4]).

4.4. Упражнения

(а) Пусть A есть косовая биалгебра с универсальной R -матрицей R . Покажите, что сплетение c^R , задаваемое формулой (4.4), удовлетворяет соотношению $c_{W,V}^R c_{V,W}^R = \text{id}_{V \otimes W}$ для всех модулей V, W в том и только том случае, если $R^{-1} = \tau_{A,A}(R)$.

(б) Пусть G — конечная абелева группа и A — биалгебра, двойственная групповой биалгебре $k[G]$. Пусть $(\delta_g)_{g \in G}$ есть базис в A , такой что $\delta_g(g) = 1$ и $\delta_g(h) = 0$, если h — элемент G , отличный от g . Для всякой функции $\gamma: G \times G \rightarrow k \setminus \{0\}$ положим

$$R = \sum_{a,b \in G} \gamma(a,b) \delta_a \otimes \delta_b.$$

Проверьте, что R есть универсальная R -матрица для A тогда и только тогда, когда γ бимультимпликативна, то есть $\gamma(aa', b) = \gamma(a, b)\gamma(a', b)$ и $\gamma(a, bb') = \gamma(a, b)\gamma(a, b')$ для всех $a, a', b, b' \in G$.

(с) Пусть A — алгебра, порожденная двумя элементами x, y , подчиняющимися соотношениям $x^2 = 1, y^2 = 0$ и $yx + xy = 0$. Покажите, что на A существует единственная структура алгебры Хопфа, такая что

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= x \otimes x, & \varepsilon(x) &= 1, & S(x) &= x, \\ \Delta(y) &= 1 \otimes y + y \otimes x, & \varepsilon(y) &= 0, & S(y) &= xy. \end{aligned}$$

Положим

$$R_\lambda = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes x + x \otimes 1 - x \otimes x) + \frac{1}{2}\lambda(y \otimes y + y \otimes xy + xy \otimes y - xy \otimes xy),$$

где λ — некоторый скаляр. Покажите, что R_λ есть универсальная R -матрица для A . Докажите, что соответствующее сплетение инволютивно.

ГЛАВА III

Квантовый дубль Дринфельда

В этой главе мы описываем общий способ получения косовых алгебр Хопфа. Этот способ, восходящий к В. Дринфельду [Dri87], сопоставляет каждой (копечпомерпой) алгебре Хопфа A косовую алгебру Хопфа $\mathcal{D}(A)$, называемую квантовым дублем A . Мы начинаем с двойственной конструкции, которая несколько проще.

1. Двойственная конструкция дубля

Пусть $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ — алгебра Хопфа с обратным антиподом S над полем k . Нетрудно увидеть (ср. пример 1.2 главы II), что $(A, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S^{-1})$ также является алгеброй Хопфа. Можно спросить, допускает ли алгебра (A, μ, η) другие коумножения? Используя понятие косовой алгебры Хопфа, мы можем пытаться конструировать коумножения в (A, μ, η) следующим образом. Выберем обратимый элемент F в $A \otimes A$ и положим $\Delta_F(a) = F\Delta(a)F^{-1} \in A \otimes A$ для всех $a \in A$. Очевидно, что Δ_F есть гомоморфизм алгебр; мы хотим подобрать F , при котором Δ_F коассоциативно и аугментация ε является коединицей. Если эти условия выполнены, мы говорим, что Δ_F есть скрученное коумножение.

1.1. Лемма

- (i) Для того чтобы Δ_F было коассоциативно, достаточно выполнения равенства

$$F_{12} \cdot (\Delta \otimes \text{id})(F) = F_{23} \cdot (\text{id} \otimes \Delta)(F).$$

- (ii) Чтобы ε было коединицей по отношению к Δ_F , достаточно

$$(\text{id} \otimes \varepsilon)(F) = (\varepsilon \otimes \text{id})(F) = 1.$$

Доказательство.

- (i) Мы хотим, чтобы выполнялось

$$((\Delta_F \otimes \text{id})\Delta_F)(a) = ((\text{id} \otimes \Delta_F)\Delta_F)(a)$$

для всех $a \in A$, то есть

$$(\Delta_F \otimes \text{id})(F\Delta(a)F^{-1}) = (\text{id} \otimes \Delta_F)(F\Delta(a)F^{-1}).$$

Это эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} (\Delta_F \otimes \text{id})(F) \cdot F_{12} \cdot (\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a)) \cdot F_{12}^{-1} \cdot (\Delta_F \otimes \text{id})(F^{-1}) = \\ = (\text{id} \otimes \Delta_F)(F) \cdot F_{23} \cdot (\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) \cdot F_{23}^{-1} \cdot (\text{id} \otimes \Delta_F)(F^{-1}). \end{aligned}$$

Поэтому, ввиду коассоциативности Δ , достаточное условие дается равенством

$$(\Delta_F \otimes \text{id})(F)F_{12} = (\text{id} \otimes \Delta_F)(F)F_{23},$$

или, что равносильно,

$$F_{12}(\Delta \otimes \text{id})(F) = F_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(F).$$

(ii) Несложно, оставляется читателю. ■

1.2. Замечание

Если мы потребуем, чтобы вдобавок выполнялись равенства

$$(\Delta \otimes \text{id})(F) = F_{13}F_{23} \text{ и } (\text{id} \otimes \Delta)(F) = F_{13}F_{12},$$

то условие (i) есть нечто иное, как уравнение Янга – Бакстера для F .

1.3. Мы укажем простой способ построить элемент F , удовлетворяющий условиям леммы 1.1. Начнем с конечномерной алгебры Хопфа A с обратимым антиподом. Рассмотрим двойственную алгебру Хопфа A^* и противоположную алгебру Хопфа $A^{\text{op}} = (A, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$ (ср. пример 1.2 главы II). Определим $\tilde{A} = A^* \otimes A^{\text{op}}$ как тензорное произведение алгебр Хопфа A^* и A^{op} .

Пусть (e_i) — базис в A , а (e_i^*) — двойственный базис в A^* . Следующий элемент $\tilde{A} \otimes \tilde{A}$ является каноническим, то есть не зависит от выбора базиса (e_i) :

$$\tilde{F} = \sum (1_{A^*} \otimes e_i) \otimes (e_i^* \otimes 1_A).$$

Следующая лемма позволяет использовать элемент $\tilde{F}^{-1} \in \tilde{A} \otimes \tilde{A}$, чтобы деформировать структуру коалгебры на $\tilde{A}$.

1.4. Лемма

Элемент $\tilde{F}$ обратим, и $\tilde{F}^{-1}$ удовлетворяет условиям леммы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим, что при каноническом отождествлении $A^{\text{op}} \otimes A^*$ с $\text{End}(A^{\text{op}})$ тензорное произведение структур алгебр на $A^{\text{op}} \otimes A^*$ становится умножением свертки на $\text{End}(A^{\text{op}})$. При этом элемент $\sum e_i \otimes e_i^*$ отождествляется с $1 \in \text{End}(A^{\text{op}})$ и то обстоятельство, что он обратим в $A^{\text{op}} \otimes A^*$, означает просто, что A^{op} имеет обратный антипод S^{-1} . Используя это обстоятельство применительно к средним членам в формуле для $\tilde{F}$, мы получаем, что $\tilde{F}$ обратим и обратный элемент имеет вид

$$\tilde{F}^{-1} = \sum (1_{A^*} \otimes S^{-1}e_i) \otimes (e_i^* \otimes 1_A).$$

Так как умножение (коумножение) в A^* есть трансопозиции коумножения (соответственно, умножения) в A , мы имеем тождества

$$(\Delta \otimes \text{id})(\tilde{F}) = \tilde{F}_{13}\tilde{F}_{23} \text{ и } (\text{id} \otimes \Delta)(\tilde{F}) = \tilde{F}_{13}\tilde{F}_{12}.$$

Понятно, что $\tilde{F}_{12}$ и $\tilde{F}_{23}$ коммутируют. Поэтому имеет место

$$\tilde{F}_{13}\tilde{F}_{23}\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{13}\tilde{F}_{12}\tilde{F}_{23},$$

то есть $(\Delta \otimes \text{id})(\tilde{F}) \cdot \tilde{F}_{12} = (\text{id} \otimes \Delta)(\tilde{F}) \cdot \tilde{F}_{23}$. Взяв обратное, получаем условие (i) леммы 1.1.

Условие (ii) леммы 1.1 проверяется легко, если мы выберем 1_A одним из базисных элементов, а все остальные возьмем из $\text{Ker } \varepsilon$. ■

1.5. Теорема (см. [RS88])

Пусть A — конечномерная алгебра Хопфа с обратимым антиподом. Введем на $H = A^* \otimes A^{\text{op}}$ следующую структуру:

- (i) Как алгебра, H есть тензорное произведение алгебр A^* и A^{op} .
- (ii) Коумножение $\Delta_F : H \rightarrow H \otimes H$ задается как $\Delta_F(x) = F\Delta(x)F^{-1}$, где $x \in H$, отображение Δ есть тензорное произведение коумножений в A^* и A^{op} , и

$$F = \sum (1_{A^*} \otimes S^{-1}e_i) \otimes (e_i^* \otimes 1_A),$$

где (e_i) — базис A .

(iii) Аугментация H есть тензорное произведение аугментаций в A^* и A^{op} .

Тогда H является алгеброй Хопфа с обратимым антиподом, задаваемым как

$$S_H(l \otimes a) = f(S_{A^*}(l) \otimes S_{A^{\text{op}}}^{-1}(a))f^{-1},$$

где $f = \sum_i e_i^* \otimes e_i$, $l \in A^*$ и $a \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Единственное утверждение, которое не вытекает немедленно из лемм 1.1 и 1.4 — это то, что S_H — действительно антипод, то есть, что при любых $l \in A^*$ и $a \in A$ мы имеем

$$(\mu \circ (S_H \otimes \text{id}))\Delta_F(l \otimes a) = (\mu \circ (\text{id} \otimes S_H))\Delta_F(l \otimes a) = \varepsilon(l)\varepsilon(a).$$

Заметим, что

$$\Delta_F(l \otimes a) = F \left(\sum (l_{(1)} \otimes a_{(1)}) \otimes (l_{(2)} \otimes a_{(2)}) \right) F^{-1},$$

где мы используем обозначения Свидлера, введенные в параграфе 1.8 главы II. Имеем

$$\Delta_F(l \otimes a) = \sum (l_{(1)} \otimes S^{-1}e_i a_{(1)} e_j) \otimes (e_i^* l_{(2)} e_j^* \otimes a_{(2)}),$$

$$\begin{aligned} (S_H \otimes \text{id})\Delta_F(l \otimes a) &= \\ &= \sum (e_k^* S l_{(1)} e_r^* \otimes e_k S^{-1} e_j S^{-1} a_{(1)} S^{-2} e_i S^{-1} e_r) \otimes (e_i^* l_{(2)} e_j^* \otimes a_{(2)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu(S_H \otimes \text{id}))\Delta_F(l \otimes a) &= \\ &= \sum e_k^* S l_{(1)} e_r^* e_i^* l_{(2)} e_j^* \otimes e_k S^{-1} e_j S^{-1} a_{(1)} S^{-2} e_i S^{-1} e_r a_{(2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum e_r^* e_i^* \otimes S^{-2} e_i S^{-1} e_r &= (\text{id} \otimes S^{-1}) \left(\sum e_r^* e_i^* \otimes e_r S^{-1} e_i \right) = \\ &= (\text{id} \otimes S^{-1})(1_{A^*} \otimes 1_A) = 1_{A^*} \otimes 1_A = 1_H. \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} (\mu(S_H \otimes \text{id}))\Delta_F(l \otimes a) &= \sum e_k^* S l_{(1)} l_{(2)} e_j^* \otimes e_k S^{-1} e_j S^{-1} a_{(1)} a_{(2)} = \\ &= \varepsilon(l)\varepsilon(a) \sum e_k^* e_j^* \otimes e_k S^{-1} e_j = \varepsilon(l)\varepsilon(a) 1_H. \end{aligned}$$

Соотношение $(\mu \circ (\text{id} \otimes S_H))\Delta_F(l \otimes a) = \varepsilon(l)\varepsilon(a)$ доказывается так же. ■

2. Квантовый дубль и его свойства

Двойственная алгебра Хопфа к алгебре Хопфа H , построенной в теореме 1.5, и есть в точности квантовый дубль Дринфельда, как о том говорит следующий теорема.

2.1. Теорема

Структура алгебры Хопфа на двойственной алгебре Хопфа $H^ = A \otimes A^{*,\text{cop}}$ может быть описана следующим образом:*

(i) *Как коалгебра, она является тензорным произведением коалгебр A и $A^{*,\text{cop}}$.*

(ii) *По отношению к естественным вложениям $A \rightarrow H^*$ и $A^{*,\text{cop}} \rightarrow H^*$, задаваемым как $a \mapsto a \otimes 1$ и $l \mapsto 1 \otimes l$, соответственно, A и $A^{*,\text{cop}}$ являются подалгебрами Хопфа в H^* .*

(iii) *Для всех $l \in A^*$ и $a \in A$ имеем*

$$(a \otimes 1)(1 \otimes l) = a \otimes l$$

и

$$(1 \otimes l)(a \otimes 1) = \sum \langle l_{(1)}, S^{-1}a_{(1)} \rangle \langle l_{(3)}, a_{(3)} \rangle a_{(2)} \otimes l_{(2)},$$

где $\langle, \rangle$ означает естественное действие A^* на A .

Алгебра Хопфа H^* называется *квантовым дублем A* и обозначается $\mathcal{D}(A)$. Как мы увидим в теореме 2.2, алгебра Хопфа $\mathcal{D}(A)$ канонически оснащена сплетением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(i) Эта часть понятна.

(ii) Пусть $a, a' \in A$. Имеем равенства

$$\begin{aligned} \langle (a \otimes 1) \cdot (a' \otimes 1), l \otimes b \rangle &= \langle (a \otimes 1) \otimes (a' \otimes 1), \Delta_F(l \otimes b) \rangle = \\ &= \langle (a \otimes 1) \otimes (a' \otimes 1), \sum (l_{(1)} \otimes S^{-1}e_i b_{(1)} e_j) \otimes (e_i^* l_{(2)} e_j^* \otimes b_{(2)}) \rangle = \\ &= \langle a, l_{(1)} \rangle \varepsilon(e_i) \varepsilon(b_{(1)}) \varepsilon(e_j) \langle a', e_i^* l_{(2)} e_j^* \rangle \varepsilon(b_{(2)}). \end{aligned}$$

Выберем базис (e_k) в A так, чтобы $\varepsilon(e_k) = 0$ при $k \neq 0$, и $\varepsilon(e_0) = 1$. Тогда получаем

$$\varepsilon(b) \langle a, l_{(1)} \rangle \langle a', l_{(2)} \rangle = \langle aa' \otimes 1, l \otimes b \rangle.$$

Следовательно, A является подалгеброй в H^* . Аналогично доказывается, что $A^{*,\text{cop}}$ — тоже подалгебра.

(iii) Пусть $a, b \in A$ и $l, k \in A^*$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle (a \otimes 1)(1 \otimes l), k \otimes b \rangle &= \langle (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes l), \Delta_F(k \otimes b) \rangle = \\ &= \langle (a \otimes 1) \otimes (1 \otimes l), \sum (k_{(1)} \otimes S^{-1}e_i b_{(1)} e_j) \otimes (e_i^* k_{(2)} e_j^* \otimes b_{(2)}) \rangle = \\ &= \langle a, k_{(1)} \rangle \varepsilon(e_i) \varepsilon(b_{(1)}) \varepsilon(e_j) \varepsilon(e_i^*) \varepsilon(k_{(2)}) \varepsilon(e_j^*) \langle l, b_{(2)} \rangle = \langle a \otimes l, k \otimes b \rangle. \end{aligned}$$

Этим доказано первое соотношение. Для второго получаем

$$\begin{aligned} \langle (1 \otimes l)(a \otimes 1), k \otimes b \rangle &= \\ &= \langle (1 \otimes l) \otimes (a \otimes 1), \sum (k_{(1)} \otimes S^{-1}e_i b_{(1)} e_j) \otimes (e_i^* k_{(2)} e_j^* \otimes b_{(2)}) \rangle = \\ &= \sum \varepsilon(k_{(1)}) \langle l, S^{-1}e_i b_{(1)} e_j \rangle \langle a, e_i^* k_{(2)} e_j^* \rangle \varepsilon(b_{(2)}) = \\ &= \sum \langle l, S^{-1}e_i b e_j \rangle \langle a, e_i^* k e_j^* \rangle = \\ &= \sum \langle l_{(1)}, S^{-1}e_i \rangle \langle l_{(2)}, b \rangle \langle l_{(3)}, e_j \rangle \langle a_{(1)}, e_i^* \rangle \langle a_{(2)}, k \rangle \langle a_{(3)}, e_j^* \rangle = \\ &= \sum \langle S^{-1}l_{(1)} \otimes a_{(1)}, e_i \otimes e_i^* \rangle \langle l_{(3)} \otimes a_{(3)}, e_i \otimes e_i^* \rangle \langle l_{(2)}, b \rangle \langle a_{(2)}, k \rangle. \end{aligned}$$

Но при всех $m \in A^*$ и $c \in A$ справедливо

$$\sum_i \langle m \otimes e, e_i \otimes e_i^* \rangle = \langle m, c \rangle$$

(чтобы увидеть это, достаточно записать e в виде $\sum \langle e, e_i^* \rangle e_i$). Таким образом, выражение принимает вид

$$\langle \sum \langle S^{-1}l_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle l_{(3)}, a_{(3)} \rangle l_{(2)} \otimes a_{(2)}, b \otimes k \rangle.$$

Отсюда и вытекает то, что требовалось. ■

2.2. Теорема

Пусть $R = \sum_i (e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i^*) \in \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A)$. Тогда R обратим и

$$R^{-1} = \sum_i (S e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i^*),$$

и удовлетворяет соотношениям (4.1) – (4.3) главы II. Следовательно, R является универсальной R -матрицей для $\mathcal{D}(A)$.

Доказательство.

Обратимость R и формула для R^{-1} доказываются как в лемме 1.4. Соотношения (4.2) – (4.3) главы II вытекают из того, что коумножение в A (соответственно, в $A^{*,\text{cop}}$) есть транспозиции (соответственно, обратное к транспозиции) умножения в $A^{*,\text{cop}}$ (соотв. в A).

Проверим соотношение (4.1) главы II. Понятно, что подпространство

$$\{x \in \mathcal{D}(A) | R\Delta(x) = \Delta^{\text{op}}(x)R\}$$

является подалгеброй $\mathcal{D}(A)$. Поэтому достаточно лишь проверить соотношение (4.1) при $x = a \otimes 1$, где $a \in A$, и при $x = 1 \otimes l$, где $l \in A^*$.

Мы используем следующую лемму, принадлежащую Рэдфорду [Rad93].

2.3. Лемма

Пусть H есть алгебра Хопфа, и $R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i \in H \otimes H$ — обратимый элемент. Тожество $R\Delta(a) = \Delta^{\text{op}}(a)R$ при всех $a \in H$ эквивалентно любому из следующих условий, выполненных при всех $a \in H$:

- (i) $R(a \otimes 1) = \sum a_{(2)}\alpha_i \otimes a_{(1)}\beta_i S a_{(3)}$,
- (ii) $(a \otimes 1)R = \sum \alpha_i a_{(2)} \otimes S a_{(1)}\beta_i a_{(3)}$,
- (iii) $R(1 \otimes a) = \sum a_{(3)}\alpha_i S^{-1}a_{(1)} \otimes a_{(2)}\beta_i$,
- (iv) $(1 \otimes a)R = \sum S^{-1}a_{(3)}\alpha_i a_{(1)} \otimes \beta_i a_{(2)}$.

Доказательство.

Мы докажем, что тождество $R\Delta(a) = \Delta^{\text{op}}(a)R$ эквивалентно (i). Эквивалентность остальных условий доказывается таким же образом. Если (i) выполнено, то

$$\begin{aligned} R\Delta(a) &= R\left(\sum (a_{(1)} \otimes 1) \cdot (1 \otimes a_{(2)})\right) = \\ &= \sum (a_{(2)}\alpha_i \otimes a_{(1)}\beta_i S a_{(3)}) \cdot (1 \otimes a_{(4)}) = \sum a_{(2)}\alpha_i \otimes a_{(1)}\beta_i = \Delta^{\text{op}}(a)R. \end{aligned}$$

Пусть теперь, наоборот, выполнено $R\Delta(a) = \Delta^{\text{op}}(a)R$. Используя тот факт, что $a \otimes 1 = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta(a)$, получаем

$$\begin{aligned} (R \otimes 1)((\Delta \otimes \text{id})\Delta(a)) &= \sum R\Delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = \\ &= \left(\sum \Delta^{\text{op}}(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}\right) (R \otimes 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum R(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \otimes a_{(3)} = \sum a_{(2)} \alpha_i \otimes a_{(1)} \beta_i \otimes a_{(3)}.$$

Поддействуем теперь на обе части равенства оператором $\text{id} \otimes \text{id} \otimes S$ и перемножим два последних члена справа и слева. Получаем $R(a \otimes 1) = \sum a_{(1)} \alpha_i \otimes a_{(1)} \beta_i S a_{(3)}$, то есть (i), что и требовалось. ■

Теперь мы закончим доказательство теоремы 2.2. Достаточно проверить условие (iii) леммы 2.3 для элементов вида $a \otimes 1$, где $a \in A$ и условие (ii) той же леммы для элементов вида $1 \otimes l$, где $l \in A^*$.

Левая часть условия (iii) равна

$$\begin{aligned} R((1 \otimes 1) \otimes (a \otimes 1)) &= \sum (e_i \otimes 1) \otimes ((1 \otimes e_i^*)(a \otimes 1)) = \\ &= \sum (e_i \otimes 1) \otimes (a_{(2)} \otimes e_{i(2)}^*) \langle e_{i(1)}^*, S^{-1} a_{(1)} \rangle \langle e_{i(3)}^*, a_{(3)} \rangle. \end{aligned}$$

Правая часть преобразуется к следующему виду:

$$\sum ((a_{(3)} e_i S^{-1} a_{(1)}) \otimes 1) \otimes (a_{(2)} \otimes e_i^*).$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_{(3)} e_i S^{-1} a_{(1)} &= \sum \langle e_j^*, a_{(3)} e_i S^{-1} a_{(1)} \rangle e_j = \\ &= \langle e_{j(3)}^*, a_{(3)} \rangle \langle e_{j(1)}^*, S^{-1} a_{(1)} \rangle \langle e_{j(2)}^*, e_i \rangle e_j. \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть приобретает вид

$$\sum \langle e_j \otimes 1 \rangle \otimes (a_{(2)} \otimes e_i^*) \langle e_{j(3)}^*, a_{(3)} \rangle \langle e_{j(1)}^*, S^{-1} a_{(1)} \rangle \langle e_{j(2)}^*, e_i \rangle.$$

Остается лишь заметить, что $\sum_i \langle e_{j(2)}^*, e_i \rangle e_i^* = e_{j(2)}^*$ и, тем самым, выполнение условия (iii) доказано.

Аналогично, левая часть условия (ii) леммы 2.3 есть

$$\begin{aligned} ((1 \otimes l) \otimes (1 \otimes 1)) R &= \sum ((1 \otimes l)(e_i \otimes 1)) \otimes (1 \otimes e_i^*) = \\ &= \sum \langle l_{(1)}, S^{-1} e_{i(1)} \rangle \langle l_{(3)}, e_{i(3)} \rangle (e_{i(2)} \otimes l_{(2)}) \otimes (1 \otimes e_i^*), \end{aligned}$$

в то время как правая часть (ii) есть

$$\sum (e_i \otimes l_{(2)}) \otimes (1 \otimes S^{-1} l_{(1)} e_i^* l_{(3)}).$$

Далее находим

$$\begin{aligned} S^{-1}l_{(1)}e_i^*l_{(3)} &= \sum \langle S^{-1}l_{(1)}e_i^*l_{(3)}, e_j \rangle e_j^* = \\ &= \sum \langle S^{-1}l_{(1)}, e_{j(1)} \rangle \langle e_i^*, e_{j(2)} \rangle \langle l_{(3)}, e_{j(3)} \rangle e_j^*. \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть переписывается в виде

$$\sum (e_i \otimes l_{(2)}) \otimes (1 \otimes e_j^*) \langle S^{-1}l_{(1)}, e_{j(1)} \rangle \langle e_i^*, e_{j(2)} \rangle \langle l_{(3)}, e_{j(3)} \rangle.$$

С учетом $\sum_i e_i \langle e_i^*, e_{j(2)} \rangle = e_{j(2)}$, выполнение условия (ii) доказано. ■

2.4. Примечание

Можно доказать, что структура алгебры на $D(A)$ является единственной структурой Хопфа на коалгебре $A \otimes A^{*,\text{cop}}$, такой что A и $A^{*,\text{cop}}$ — подалгебры Хопфа и $R = \sum_i (e_i \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i^*)$ — универсальная R -матрица.

2.5. Пример

Пусть G — конечная группа и $A = \mathcal{F}(G)$ — алгебра комплекснозначных функций на G . Тогда $A^{*,\text{cop}}$ есть групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$. Можно проверить, что дубль $D(\mathcal{F}(G))$ изоморфен, как алгебра, скрещенному произведению алгебры $\mathcal{F}(G)$ на G , где G действует на $\mathcal{F}(G)$ с помощью присоединенного действия.

3. Хопфовы спаривания и обобщенный дубль

Нетрудно заметить, что конструкция $D(A)$ использует лишь тот факт, что между A и $A^{*,\text{cop}}$ имеется спаривание, удовлетворяющее некоторым условиям. Поэтому естественно дать следующее определение.

3.1. Определение

Пусть A и B — алгебры Хопфа с обратимыми антиподами над полем k . Хопфово спаривание между A и B есть билинейная форма $\varphi: A \times B \rightarrow k$, такая что

(i) для всех $a \in A$ и $b, b' \in B$

$$\varphi(a, bb') = \sum \varphi(a_{(1)}, b) \varphi(a_{(2)}, b'),$$

(ii) для всех $a, a' \in A$ и $b \in B$

$$\varphi(aa', b) = \sum \varphi(a, b_{(2)})\varphi(a', b_{(1)}),$$

(iii) для всех $a \in A$ и $b \in B$

$$\varphi(a, 1_B) = \varepsilon(a) \text{ и } \varphi(1_A, b) = \varepsilon(b),$$

(iv) для всех $a \in A$ и $b \in B$

$$\varphi(Sa, b) = \varphi(a, S^{-1}b).$$

Мы не требуем, чтобы форма φ была невырожденной. Если φ вырождена, мы можем получить из нее невырожденное хопфово спаривание, факторизуя по аннулирующим идеалам. Более точно, положим

$$I_A = \{a \in A \mid \varphi(a, b) = 0 \text{ при всех } b \in B\},$$

$$I_B = \{b \in B \mid \varphi(a, b) = 0 \text{ при всех } a \in A\}.$$

Нетрудно проверить, что I_A и I_B являются хопфовыми идеалами в A и B , соответственно, и что хопфово спаривание $\bar{\varphi} : A/I_A \times B/I_B \rightarrow k$, полученное факторизацией, невырожденное.

Следующая теорема обобщает теорему 2.1

3.2. Теорема

Пусть A и B — алгебры Хопфа над полем k и $\varphi : A \times B \rightarrow k$ — хопфово спаривание между ними. Тогда существует единственная структура алгебры Хопфа на $A \otimes B$, удовлетворяющая условиям (i), (ii) и (iii) теоремы 2.1, где $A^{,\text{cop}}$ нужно заменить на B , а естественное спаривание между A и $A^{*,\text{cop}}$ — на φ .*

Алгебра Хопфа, которая доставляется теоремой 3.2, называется *обобщенным дублем* A по отношению к B и φ . Она обозначается $\mathcal{D}_\varphi(A, B)$ или $\mathcal{D}(A, B)$ в случае, когда ясно, какое φ имеется в виду.

Вообще говоря, алгебра Хопфа $\mathcal{D}_\varphi(A, B)$ может и не быть косовой. Однако, если A и B конечномерны и φ невырождено, то та же конструкция, что и в теореме 2.2, превращает $\mathcal{D}_\varphi(A, B)$ в косовую алгебру Хопфа. Более общий случай: пусть A и B — градуированные алгебры Хопфа с конечномерными однородными компонентами и пусть φ совместимо с градуировками. Тогда хопфовы факторалгебры A/I_A и B/I_B также градуированы и могут быть отождествлены, с помощью φ с двойственными друг к другу. В этом случае алгебра Хопфа $\mathcal{D}_{\bar{\varphi}}(A/I_A, B/I_B)$ является косовой по той же самой конструкции теоремы 2.2.

3.3. В основном, алгебры Хопфа, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, будут определяться образующими и соотношениями. Следующая лемма предлагает способ конструировать копфовы спаривания в такой ситуации (см. [Dae93]).

3.4. Лемма

Пусть $\tilde{A}$ (соответственно, $\tilde{B}$) — свободная алгебра над полем k , порожденная элементами $a_1, \dots, a_p$ (соответственно, $b_1, \dots, b_q$). Предположим также, что на $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ заданы структуры алгебры Хопфа, такие что каждое $\Delta(a_i)$ при $1 \leq i \leq p$ (соответственно, $\Delta(b_i)$ при $1 \leq i \leq q$) есть линейная комбинация тензоров $a_r \otimes a_s$ (соответственно, тензоров $b_r \otimes b_s$). Пусть, помимо того, задано pq скаляров λ_{ij} , $i \in k$, где $1 \leq i \leq p$ и $1 \leq j \leq q$. Тогда существует единственное хопфово спаривание $\varphi: \tilde{A} \times \tilde{B} \rightarrow k$, такое что $\varphi(a_i, b_j) = \lambda_{ij}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Нам нужно определить $\varphi(a_{i_1} \dots a_{i_r}, b_{j_1} \dots b_{j_s})$ для всех $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, p\}$ и $j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, q\}$. Заметим, что аксиомы (i) и (ii) определения 3.1, а также предположения о $\Delta(a_i)$ и $\Delta(b_i)$ дают возможность определить

$$\varphi(a_{i_1} \dots a_{i_r}, b) = \sum \varphi(a_{i_1}, b_{(r)}) \dots \varphi(a_{i_r}, b_{(1)}),$$

где $\Delta^{(r)}(b) = \sum b_{(1)} \otimes \dots \otimes b_{(r)}$ — итерированное копроизведение, и

$$\varphi(a, b_{j_1} \dots b_{j_s}) = \sum \varphi(a_{(1)}, b_{j_1}) \dots \varphi(a_{(s)}, b_{j_s}),$$

где $\Delta^{(s)}(a) = \sum a_{(1)} \otimes \dots \otimes a_{(s)}$. Теперь можно определить

$$\varphi(a_{i_1} \dots a_{i_r}, b_{j_1} \dots b_{j_s}) = \sum \varphi(a_{i_1}, b_{j_1(r)} \dots b_{j_s(r)}) \dots \varphi(a_{i_r}, b_{j_1(1)} \dots b_{j_s(1)}),$$

где правая часть раскладывается согласно предыдущим определениям. Нетрудно проверить, что полученное хопфово спаривание между $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ корректно определено. ■

Предположим теперь, что A (соответственно, B) есть алгебра, полученная факторизацией $\tilde{A}$ (соответственно, $\tilde{B}$) по идеалу, порожденному элементами $r_1, \dots, r_n \in \tilde{A}$ (соответственно, $s_1, \dots, s_m \in \tilde{B}$). Предположим далее, что структура алгебры Хопфа на $\tilde{A}$ (соответственно, $\tilde{B}$) индуцирует структуру алгебры Хопфа на A (соответственно, B). Тогда

хопфово спаривание $\varphi: \tilde{A} \times \tilde{B} \rightarrow k$ индуцирует хопфово спаривание $A \times B \rightarrow k$ в том и только том случае, если $\varphi(r_i, b_j) = 0$ при всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, q$, и $\varphi(a_i, s_j) = 0$ при всех $i = 1, \dots, p$ и $j = 1, \dots, m$.

3.5. Алгебра Хопфа, получаемая из конструкции двойного дубля, имеет каноническую билинейную форму, инвариантную относительно *присоединенного действия*. Чтобы описать эту форму, напомним сначала определение присоединенного действия алгебры Хопфа H . Присоединенное представление (левое) ad алгебры Хопфа H в самой себе определяется следующим образом:

$$\text{ad}(x)(y) = \sum x_{(1)}yS(x_{(2)}),$$

при $x, y \in H$. Этим обобщаются обычные понятия действия группы на самой себе сопряжением и присоединенного действия алгебры Ли. Другое действие может быть получено, если заменить S на S^{-1} . Можно также получить два правых присоединенных действия.

С помощью коумножения в H мы можем продолжить присоединенное действие на $H \otimes H$. По двойственности получаем присоединенное действие H на билинейных формах в H .

Пусть ρ — представление алгебры Хопфа H над векторным пространством V . Говорят, что элемент $v \in V$ ρ -инвариантен, если $\rho(h)v = \varepsilon(h)v$ при всех $h \in H$. В частности, можно говорить о билинейных формах на H , инвариантных относительно присоединенного действия, или, более коротко, об *ад-инвариантных билинейных формах*. Нетрудно проверить, что билинейная форма K на H ад-инвариантна в том и только том случае, если она удовлетворяет одному из следующих двух эквивалентных условий при всех $h, h', h'' \in H$:

- (i) $\sum K(\text{ad}(h_{(1)})h', \text{ad}(h_{(2)})h'') = \varepsilon(h)K(h', h''),$
- (ii) $K(\text{ad}(h)h', h'') = K(h', \text{ad}(S(h))h'').$

3.6. Пример

Пусть H — косовая алгебра Хопфа и пусть $u \in H$ такое, что

$$S^2(x) = u x u^{-1} \text{ при всех } x \in H.$$

Если $\rho: H \rightarrow \text{End}(V)$ — конечномерное представление, то следующая формула определяет ад-инвариантную билинейную форму на H :

$$K(x, y) = \text{Tr}(\rho(u)\rho(x)\rho(y)),$$

где Tr — обычный след.

В контексте алгебр Хопфа ад-инвариантные билинейные формы являются естественным обобщением формы Киллинга на алгебре Лн. Поэтому важно знать, существует ли такая форма, и если да, то невырожденная ли она. Для обобщенных дублей мы можем дать следующий простой ответ.

3.7. Теорема

Пусть A и B — алгебры Хопфа над полем k и $\varphi : A \times B \rightarrow k$ — хопфово спаривание. Пусть $\mathcal{D}_\varphi(A, B)$ есть соответствующий обобщенный дубль. Тогда следующая формула определяет ад-инвариантную билинейную форму K на $\mathcal{D}_\varphi(A, B)$:

$$K(a \otimes b, a' \otimes b') = \varphi(a, b')\varphi(S^{-2}(a'), b),$$

где $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$. Более того, форма K невырожденная в том и только том случае, когда φ невырождено.

Эта теорема будет использована в следующей главе, чтобы строить ад-инвариантные билинейные формы на квантовых обертывающих алгебрах.

ГЛАВА IV

Квантовая обертывающая алгебра $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$

В этой главе мы строим квантовые группы, ассоциированные с алгебрами Ли $\mathfrak{sl}(N+1)$, используя конструкцию обобщенного дубля параграфа 3 главы III.

1. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(N+1)$

1.1. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{sl}(N+1)$ комплексных матриц $(N+1) \times (N+1)$ со следом 0. Пусть E_{ij} — элементарные матрицы, у которых элемент на позиции (i, j) равен 1, а все остальные равны 0. Как известно, элементы E_{ij} при $i \neq j$ и $E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ образуют базис $\mathfrak{sl}(N+1)$. При $1 \leq i \leq N$ положим

$$E_i = E_{i, i+1}, \quad F_i = E_{i+1, i}, \quad H_i = E_{ii} - E_{i+1, i+1}.$$

Рассмотрим коммутативную подалгебру Ли $\mathfrak{h}$, порожденную элементами $H_1, \dots, H_N$.

Зафиксируем линейные формы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N+1}$, заданные на пространстве матриц $(N+1) \times (N+1)$ следующим образом:

$$\varepsilon_i(E_{kl}) = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Тогда линейные формы

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \dots, \quad \alpha_N = \varepsilon_N - \varepsilon_{N+1}$$

образуют базис $\mathfrak{h}^*$, и при всех $H \in \mathfrak{h}$ и всех $1 \leq i < j \leq N+1$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} [H, E_{ij}] &= (\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1})(H) E_{ij}, \\ [H, E_{ji}] &= -(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1})(H) E_{ji}. \end{aligned}$$

Линейные формы $\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$ при $1 \leq i < j \leq N$ называются *положительными корнями* $\mathfrak{sl}(N+1)$, и их множество обозначается через Δ^+ . Множество всех корней $\mathfrak{sl}(N+1)$ есть $\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+)$.

Можно заметить, что Δ^+ (соотв., $-\Delta^+$) параметризует в точности базисные элементы E_{ij} (соотв., E_{ji}), где $1 \leq i < j \leq N+1$. В случае, когда $\alpha = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}$, матрица E_{ij} (соотв., E_{ji}) будет обозначаться как E_α (соотв., $E_{-\alpha}$ или, что то же самое, F_α).

1.2. Хорошо известно [Ser87], что $\mathfrak{sl}(N+1)$ порождается образующими E_i, F_i, H_i , где $1 \leq i \leq N$, и соотношениями

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 && \text{при } i, j = 1, \dots, N; \\ [H_i, F_j] &= -\alpha_j(H_i)F_j && \text{при } 1 \leq i, j \leq N; \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij}H_i && \text{при } 1 \leq i, j \leq N; \\ [E_i, E_j] &= 0, [F_i, F_j] = 0 && \text{при } |i-j| \geq 2; \\ [E_i, [E_i, E_j]] &= 0, [F_i, [F_i, F_j]] = 0 && \text{при } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

Те же самые образующие и соотношения определяют обертывающую алгебру $U\mathfrak{sl}(N+1)$.

Заметим, что присоединенное действие $\mathfrak{h}$ на $U\mathfrak{sl}(N+1)$ превращает ее в Q -градуированную алгебру, где Q — свободная абелева группа с базисом $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Степень E_i равна α_i , степень F_i равна $-\alpha_i$, а степень H_i равна 0.

В дальнейшем группа Q будет часто записываться мультипликативно, в частности, при рассмотрении групповой алгебры $U_0 = \mathbb{C}[Q]$.

1.3. По теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта, подалгебры $U\mathfrak{b}_+$ и $U\mathfrak{b}_-$ обертывающей алгебры $U\mathfrak{sl}(N+1)$, порожденные, соответственно, элементами E_i, H_i и F_i, H_i , $1 \leq i \leq N$, двойственны друг другу как Q -градуированные пространства. Однако эта двойственность не является хопфовым спариванием, поскольку обе алгебры кокоммутативны, но не коммутативны. Конструкции, предлагаемые в следующем параграфе, можно рассматривать как способ обойти это обстоятельство.

2. Конструкция $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$

В дальнейшем q — переменная, а основное поле есть поле дробей $\mathbb{C}(q)$.

2.1. Хопфово спаривание $\tilde{U}_+ \times \tilde{U}_- \rightarrow \mathbb{C}(q)$

- Обозначим через $\tilde{U}_\pm$ $\mathbb{C}(q)$ -алгебру, порожденную образующими $E_i, K_i^{\pm 1}$, при $1 \leq i \leq N$, и соотношениями

$$K_i K_j = K_j K_i, K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1, K_i E_j = q^{\alpha_j(H_i)} E_j K_i,$$

при $1 \leq i, j \leq N$.

- Обозначим через $\tilde{U}_-$ $\mathbb{C}(q)$ -алгебру, порожденную образующими F_i , $K_i^{\pm 1}$, при $1 \leq i \leq N$, и соотношениями

$$K_i' K_j' = K_j' K_i', \quad K_i' K_i'^{-1} = K_i'^{-1} K_i' = 1, \quad K_i' F_j = q^{-\alpha_j(H_i)} F_j K_i',$$

при $1 \leq i, j \leq N$.

На алгебрах $\tilde{U}_+$ и $\tilde{U}_-$ есть структура алгебры Хопфа, задаваемая на образующих соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta K_i &= K_i \otimes K_i, & \Delta E_i &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ \Delta K_i' &= K_i' \otimes K_i', & \Delta F_i &= F_i \otimes K_i'^{-1} + 1 \otimes F_i. \end{aligned}$$

Эти алгебры являются Q -градуированными, причем E_i имеет степень α_i , F_i — степень $-\alpha_i$, а K_i и K_i' — степень 0.

2.2. Теорема

Существует единственное хопфово спаривание $\varphi: \tilde{U}_+ \times \tilde{U}_- \rightarrow \mathbb{C}(q)$, такое что при $1 \leq i, j \leq N$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varphi(E_i, F_j) &= -\frac{\delta_{ij}}{q - q^{-1}}, \\ \text{(ii)} \quad \varphi(E_i, K_j') &= \varphi(K_i, F_j) = 0, \\ \text{(iii)} \quad \varphi(K_i, K_j') &= q^{-\alpha_i(H_j)} = q^{-\alpha_j(H_i)}. \end{aligned}$$

Доказательство.

Это следует из результатов параграфа 3 главы III. ■

2.3. Примечания

(а) Выбор скалира $-1/(q - q^{-1})$ в соотношении (i) теоремы 2.2 дает правильную нормализацию коммутационных соотношений, встречающуюся в литературе. При этом правильное соотношение получается и при $q = 1$.

(б) Спаривание φ Q -градуировано.

По теореме 3.2 главы III спаривание φ нидуцирует на $\tilde{U}_+ \otimes \tilde{U}_-$ структуру алгебры Хопфа, обозначаемую $\mathcal{D}(\tilde{U}_+)$. Следующий факт мы выводим из теоремы 2.1, (iii) главы III.

2.4. Предложение

При $1 \leq i, j \leq N$ в $\mathcal{D}(\tilde{U}^+)$ имеют место соотношения

$$K_i F_j = q^{-\alpha_j(H_i)} F_j K_i, \quad K'_i E_j = q^{\alpha_j(H_i)} E_j K'_i,$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Как показывает следующая лемма, хопфово спаривание φ — вырождено.

2.5. Лемма

(а) Следующие элементы лежат в аннулирующем идеале $I_{\tilde{U}^+}$:

$$E_i E_j - E_j E_i \quad \text{при } |i - j| \geq 2 \text{ и}$$

$$E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 \quad \text{при } |i - j| = 1.$$

Двусторонний идеал I_+ в $\tilde{U}_+$, порожденный этими элементами, является хопфовым подидеалом в $I_{\tilde{U}^+}$.

(б) Аналогичное утверждение справедливо, если заменить E_i и $\tilde{U}_+$ на F_i и $\tilde{U}_-$ соответственно.

В действительности, как мы увидим в следствии 3.10, $I_+ = I_{\tilde{U}^+}$ и $I_- = I_{\tilde{U}^-}$.

Доказательство.

(а) Нетрудно показать, что если $x = E_i E_j - E_j E_i$ и $|i - j| \geq 2$, то

$$\Delta x = x \otimes 1 + K_i K_j \otimes x,$$

и что если $y = E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2$ и $|i - j| = 1$, то

$$\Delta y = y \otimes 1 + K_i^2 K_j \otimes y.$$

Следовательно, эти элементы ортогональны всем разложимым элементам $\tilde{U}_-$. Далее, заметим, что спаривание градуировано, и все элементы $\tilde{U}_-$ степени $-(\alpha_i + \alpha_j)$ в первом случае и $-(2\alpha_i + \alpha_j)$ во втором случае — разложимы. Отсюда следует, что определенные выше элементы x и y лежат в $I_{\tilde{U}^+}$. Формулы для Δx и Δy показывают, к тому же, что I_+ — хопфов идеал. ■

Положим

$$U_+ = \tilde{U}_+ / I_+ \quad \text{и} \quad U_- = \tilde{U}_- / I_-.$$

Алгебры U_+ , U_- являются алгебрами Хопфа и φ индуцирует хопфово спаривание между ними, обозначаемое также φ .

По теореме 3.2 главы III на $U_+ \otimes U_-$ есть структура алгебры Хопфа, доставляемая конструкцией обобщенного дубля. Эту алгебру Хопфа мы обозначим через $\mathcal{D}(U_+)$.

2.6. Определение

Определим алгебру Хопфа $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ как фактор $\mathcal{D}(U_+)$ по двустороннему идеалу, порожденному элементами $K_i - K'_i$, $1 \leq i \leq N$.

Копредставление $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ образующими и соотношениями получается следующим образом. Образующие $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ суть E_i , F_i , $K_i^{\pm 1}$ при $1 \leq i \leq N$. Соотношения — это соотношения, определяющие $\tilde{U}_+$ и $\tilde{U}_-$ (где K'_i нужно заменить на K_i), соотношения из предложения 2.4 (после замены K'_i на K_i), а также следующие дополнительные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} E_i E_j - E_j E_i &= 0, \\ F_i F_j - F_j F_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } |i - j| \geq 2,$$

$$\left. \begin{aligned} E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 &= 0, \\ F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } |i - j| = 1.$$

Мы будем обозначать также через U_+ и U_- подалгебры Хопфа в $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, порожденные образующими E_i , $K_i^{\pm 1}$ при $1 \leq i \leq N$ и F_i , $K_i^{\pm 1}$ при $1 \leq i \leq N$ соответственно.

Обозначим через U_0 подалгебру Хопфа в $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, порожденную $K_i^{\pm 1}$, где $1 \leq i \leq N$, и через V_+ и V_- обозначим подалгебры, порожденные элементами $E_1, \dots, E_N$ и $F_1, \dots, F_N$ соответственно. (V_+ и V_- не являются подалгебрами Хопфа!)

2.7. Лемма

- (а) Подалгебра Хопфа U_0 изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}(q)[\mathbb{Z}^N]$.
 (б) Существуют линейные изоморфизмы

$$U_+ \cong V_+ \otimes U_0, \quad U_- \cong V_- \otimes U_0, \quad U_q \mathfrak{sl}(N+1) \cong V_- \otimes U_0 \otimes V_+.$$

3. Базис типа Пуанкаре – Биркгофа – Витта в U_+

С учетом леммы 2.7 и того факта, что алгебры V_+ и V_- изоморфны, для того чтобы получить базис в $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, нам достаточно построить базис в V_+ .

Напомним, что классическая теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта использует базис в $\mathfrak{sl}(N+1)$, как, например, базис, состоящий из векторов H_i при $1 \leq i \leq N$ и E_α , где $\alpha \in \Delta$. Заметим, что если $\alpha \in \Delta^+$ задается как $\alpha = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$, то, полагая $\beta = \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$, имеем $E_\alpha = [E_i, E_\beta]$.

Аналог корневых векторов E_α ($\alpha \in \Delta^+$) в V_+ можно построить с помощью присоединенного действия, введенного в параграфе 3.4 главы III.

3.1. Определение

Пусть $\alpha = \alpha_i + \dots + \alpha_j \in \Delta^+$, где $i \leq j$. Элемент $E_\alpha \in V_+$ определяется индукцией по длине α следующим образом: $E_{\alpha_i} = E_i$ при $1 \leq i \leq N$ и $E_\alpha = \text{ad } E_i(E_\beta)$, где $\beta = \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$.

Можно вычислить коммутационные соотношения между этими элементами.

3.2. Предложение

При $\alpha = \alpha_i + \dots + \alpha_j$ и $\beta = \alpha_k + \dots + \alpha_l$, где $1 \leq i \leq j \leq N$ и $1 \leq k \leq l \leq N$, справедливы следующие соотношения:

- (i) $E_\alpha E_\beta = E_\beta E_\alpha$, если $k > j+1$,
- (ii) $E_\alpha E_\beta - q^{-1} E_\beta E_\alpha = E_{\alpha+\beta}$, если $k = j+1$,
- (iii) $E_\alpha E_\beta - q^{-1} E_\beta E_\alpha = 0$, если $i = k$,
- (iv) $E_\alpha E_\beta - q E_\beta E_\alpha = 0$, если $j = l$,
- (v) $E_\alpha E_\beta = E_\beta E_\alpha$, если $i < k < l < j$,
- (vi) $E_\alpha E_\beta - E_\beta E_\alpha = (q - q^{-1}) E_\gamma E_{\gamma'}$, если $i < k < j < l$,

где $\gamma = \alpha_i + \dots + \alpha_l$ и $\gamma' = \alpha_k + \dots + \alpha_j$.

Рассмотрим следующее лексикографическое линейное упорядочение на Δ^+ :

$$\alpha_1 > \alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \dots > \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N >$$

$$> \alpha_2 > \alpha_2 + \alpha_3 > \dots > \alpha_2 + \dots + \alpha_N >$$

$$> \alpha_3 > \dots > \alpha_3 + \dots + \alpha_N > \dots > \alpha_{N-1} > \alpha_{N-1} + \alpha_N > \alpha_N.$$

Заметим, что если записывать корни, как разности $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$, то это не что иное, как лексикографическое упорядочение. Чтобы упростить обозначения, положим

$$\beta_1 = \alpha_N < \beta_2 = \alpha_{N-1} + \alpha_N < \dots < \beta_s = \alpha_1,$$

где $s = \text{card}(\Delta^+)$.

Из коммутационных соотношений предложения 3.2 мы выводим нижеследующее.

3.3. Предложение

Линейная оболочка множества упорядоченных мономов вида

$$E_{\beta_1}^{m_1} E_{\beta_2}^{m_2} \dots E_{\beta_s}^{m_s},$$

где $(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s$, совпадает со всем пространством V_+ .

Для того чтобы доказать, что эти упорядоченные мономы образуют, на самом деле, базис V_+ , а также чтобы исследовать хопфово спаривание, нам понадобится следующая q -мультиномиальная формула.

3.4. Лемма

Пусть $u_1, \dots, u_r$ — такие элементы в алгебре, что $u_k u_l = q^2 u_l u_k$ при всех $k > l$. Тогда при $n \geq 1$ имеет место

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_r)^n = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ n_i \geq 0}} \frac{(n)!}{(n_1)! \dots (n_r)!} u_1^{n_1} \dots u_r^{n_r},$$

где $(0)! = 1$, а при $n \geq 1$

$$(n) = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad (n)! = (n)(n-1) \dots (2)(1).$$

Следующее утверждение доказывается индукцией по длине корней.

3.5. Предложение

(а) При $\alpha = \alpha_i + \dots + \alpha_j$, где $1 \leq i < j \leq N$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \Delta E_\alpha = E_\alpha \otimes 1 + (1 - q^{-2}) \sum_{1 \leq k \leq j-1} E_{\alpha_i + \dots + \alpha_k} K_{k+1} \dots K_j \otimes E_{\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_j} + \\ + K_i K_{i+1} \dots K_j \otimes E_\alpha. \end{aligned}$$

(б) При том же α и $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta E_\alpha^n = \sum_{n_1 + \dots + n_{j-i+2} = n} \frac{(n)!}{(n_1)! \dots (n_{j-i+2})!} \times \\ \times (1 - q^{-2})^{n_2 + \dots + n_{j-i+1}} u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_{j-i+2}^{n_{j-i+2}}, \end{aligned}$$

где $u_1 = E_\alpha \otimes 1$, $u_{j-i+2} = K_1 \cdots K_j \otimes E_\alpha$, и при $1 < k < j - i + 2$

$$u_k = E_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{j-k+1}} K_{j-k+2} \cdots K_j \otimes E_{\alpha_{j-k+2} + \cdots + \alpha_j}.$$

Из соотношений предложения 3.2 вытекает следующее.

3.6. Предложение

Пусть $(V_+)_j$ — линейное подпространство в V_+ , являющееся линейной оболочкой множества мономов $E_{\beta_1}^{m_1} E_{\beta_2}^{m_2} \cdots E_{\beta_j}^{m_j}$, где $(m_1, \dots, m_j) \in \mathbb{N}^j$. Тогда

- (i) $(V_+)_j$ является подалгеброй V_+ , и
- (ii) $(V_+)_j$ есть левый U_+ -подмодуль V_+ по отношению к левому действию, индуцированному коумножением на U_+ , то есть $\Delta(V_+)_j \subset U_+ \otimes (V_+)_j$.

3.7. Сужение хопфова спаривания на $V_+ \times V_-$

Мы определяем корневые векторы F_α в V_- при $\alpha \in \Delta^+$ таким же образом, как и в случае с V_+ , но используя присоединенное действие ad' , ассоциированное с обратным коумножением на U_- и задаваемое как

$$\text{ad}'(x)(y) = \sum x_{(2)} y S^{-1}(x_{(1)}) \text{ при всех } x, y \in U_-.$$

При $\alpha = \alpha_i + \cdots + \alpha_j \in \Delta^+$ мы определяем F_α индукцией: $F_{\alpha_i} = F_i$ и

$$F_\alpha = \text{ad}' F_i(F_\beta), \text{ где } \beta = \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j.$$

Используя предложение 3.6 и вычисляя $\varphi(E_{\beta_i}, F_{\beta_j})$, приходим к следующему утверждению.

3.8. Предложение

Пусть $K, K' \in U_0$, $(m_1, \dots, m_s)$ и $(m'_1, \dots, m'_s) \in \mathbb{N}^s$. Тогда

$$\varphi(K E_{\beta_1}^{m_1} \cdots E_{\beta_s}^{m_s}, K' F_{\beta_1}^{m'_1} \cdots F_{\beta_s}^{m'_s}) = \frac{1}{(q^{-1} - q)^M} \varphi(K, K') \left[\prod_{k=1}^s \delta_{m_1, m'_1}(m_s) \right],$$

где $M = \sum_{k=1}^s m_k l(\beta_k)$ и $l(\beta) = j - i + 1$ при $\beta = \alpha_i + \cdots + \alpha_j$.

3.9. Следствие

Упорядоченные мономы $E_{\beta_1}^{m_1} \dots E_{\beta_s}^{m_s}$ (соответственно, $F_{\beta_1}^{m_1} \dots F_{\beta_s}^{m_s}$), где $(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s$, образуют базис в V_+ (соответственно, в V_-).

Доказательство.

Линейная оболочка множества упорядоченных мономов $F_{\beta_1}^{m_1} \dots F_{\beta_s}^{m_s}$ есть V_- . Это доказывается с помощью варианта предложения 3.2 для корневых векторов F_α . Предложение 3.8 показывает, что множество $(E_{\beta_1}^{m_1} \dots E_{\beta_s}^{m_s})_{\beta \in \mathbb{N}^s}$ двойственно множеству образующих, откуда следует, что оно является линейно независимым. Обращая это рассуждение, видим, что множество $(F_{\beta_1}^{m_1} \dots F_{\beta_s}^{m_s})_{\beta \in \mathbb{N}^s}$ также линейно независимо. ■

3.10. Следствие

Хопфово спаривание $\varphi : U_+ \times U_- \rightarrow \mathbb{C}(q)$ является невырожденным. В частности, $I_{\bar{U}_\pm} = I_\pm$.

Поскольку $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ является фактором обобщенного дубля, мы можем использовать теорему 3.7 главы III. Для этого удобно расширить основное поле $\mathbb{C}(q)$ до $\mathbb{C}(q^{1/2})$. Мы приходим к следующему утверждению.

3.11. Теорема

На $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ существует единственная ад-инвариантная билинейная форма B , такая что

(i) при всех $E, E' \in V_+$, всех $F, F' \in V_-$, и всех $K, K' \in U_0$,

$$B(EKF, E'K'F') = B(E, F')B(K, K')B(S^{-2}(E'), F);$$

(ii) при всех $E \in V_+$ и $F \in V_-$,

$$B(E, F) = \varphi(E, F),$$

где φ — хопфово спаривание между V_+ и V_- ;

(iii) при $\alpha = \sum_i n_i \alpha_i$ и $\beta = \sum_j m_j \alpha_j$ на решетке корней,

$$B(K_\alpha, K_\beta) = q^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j} n_i m_j \alpha_i(H_j)},$$

где $K_\alpha = \prod_i K_i^{n_i}$ и $K_\beta = \prod_j K_j^{m_j}$. Более того, форма B невырождена.

Форма B была впервые построена в [Ros90] другим способом. Об интерпретации в терминах хопфовых спариваний, см. [Ros92].

4. Специализации и универсальная R-матрица

Пусть A есть подкольцо $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ в $\mathbb{C}(q)$. Для $1 \leq i \leq N$, положим

$$[K_i; 0] = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \in U_q \mathfrak{sl}(N+1).$$

Обозначим через U_A A -подалгебру в $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, порожденную элементами $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}, [K_i; 0]$, где $1 \leq i \leq N$. Нетрудно заметить, что U_A является A -подалгеброй Хопфа в $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$.

Пусть $\epsilon \in \mathbb{C}^*$. Рассмотрим «специализацию» $U_\epsilon = U_A / (q - \epsilon)U_A$, являющуюся алгеброй Хопфа над $\mathbb{C}$. При $\epsilon \neq \pm 1$ конпредставление U_ϵ образующими и соотношениями получается из конпредставления $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, если положить во всех соотношениях $q = \epsilon$.

Следующий результат показывает, что алгебра Хопфа U_1 тесно связана с обертывающей алгеброй $U \mathfrak{sl}(N+1)$.

4.1. Предложение

Алгебра U_1 порождена E_i, F_i, K_i и H_i ($1 \leq i \leq N$), причем все элементы K_i центральны, и выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [H_i, E_j] &= \alpha_j(H_i) K_i E_j, \quad [H_i, F_j] = -\alpha_j(H_i) K_i F_j, \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} H_i, \quad K_i^2 = 1, \\ \underbrace{[E_i, \dots [E_i, E_j]]}_{1-\alpha_i(H_j)} &= \underbrace{[F_i, \dots [F_i, F_j]]}_{1-\alpha_i(H_j)} = 0 \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

В частности, алгебра $U_1 / \sum_{i=1}^N (K_i - 1)$ изоморфна $U \mathfrak{sl}(N+1)$.

Пусть $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, причем $\epsilon \neq \pm 1$. Можно построить элементы $E_\alpha, F_\alpha \in U_\epsilon$, являющиеся специализациями соответствующих элементов $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$. Ясно, что для хопфова спаривания справедлива формула из предложения 3.8. Отсюда следует, что если ϵ не корень из единицы, то упорядоченные мономы образуют базис, а хопфово спаривание невырождено.

В том случае, когда ϵ является нервообразным корнем из единицы, скажем, порядка l , то, как сразу видно, элементы $E_\alpha^l, F_\alpha^l, K_i^l - 1$ лежат в ядре хопфова спаривания. На самом деле, они находятся в центре U_ϵ , и двусторонний идеал, натянутый на них, является хопфовым коидеалом. Пусть u_ϵ — фактор U_ϵ по этому идеалу. Это — конечномерная алгебра

Хопфа, в которой очевидным образом выделяются хопфовы подалгебры u_ϵ^+ , u_ϵ^- , u_ϵ^0 .

Согласно сделанным выше замечаниям, хопфово спаривание можно перенести на $u_\epsilon^+ \times u_\epsilon^-$. Из предложения 3.8 выводится следующий результат (см. [Ros92]).

4.2. Предложение

Пусть ϵ — первообразный корень из единицы степени l , причем l взаимно просто с $N + 1$. Тогда хопфово спаривание между u_ϵ^+ и u_ϵ^- невырождено.

4.3. Универсальная R -матрица

Конструкция квантового дубля, данная в параграфе 2 главы III, позволяет написать формулу для универсальной R -матрицы. В случае $U_q \mathfrak{sl}(N + 1)$ или U_ϵ , где ϵ не корень из единицы, нужно ввести пополнение, включающее бесконечные суммы, ср. [Ros89], [LS90], [KR90], и параграф 4 главы VII. В следующей теореме рассматривается случай, когда ϵ — корень из единицы.

4.4. Теорема (см. [Ros93])

Пусть ϵ — первообразный корень из единицы степени l , причем l нечетно и взаимно просто с $N + 1$. Тогда конечномерная алгебра Хопфа u_ϵ является косовой с универсальной R -матрицей

$$R = \frac{1}{l^N} \left[\prod_{\alpha \in \Delta^+} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{(1 - \epsilon_\alpha^2)^k}{[k]!} \epsilon^{-k(k-1)/2} E_\alpha^k \otimes F_\alpha^k \right) \right] \left[\sum_{\beta, \gamma \in Q_+} \epsilon^{(\beta, \gamma)} K_\beta \otimes K_\gamma \right],$$

где порядок в произведении такой, как было определено после предложения 3.2,

$$Q_l = \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \alpha_i; 0 \leq m_i < l \right\},$$

$K_\beta = K_1^{m_1} \dots K_N^{m_N}$ при $\beta = \sum_{i=1}^N m_i \alpha_i$, и где

$$[k] = \frac{\epsilon^k - \epsilon^{-k}}{\epsilon - \epsilon^{-1}}, \quad [k]! = [k][k-1] \dots [2][1].$$

ГЛАВА V

Многочлен Джонса и скейн-категории

В этой главе мы попадаем в мир топологии малых размерностей. Наша цель здесь двояка. Во-первых, мы определяем замечательный изотопический инвариант зацеплений в трехмерном евклидовом пространстве, — многочлен Джонса. Открытие этого многочлена в 1984 году дало начальный толчок теории, представленной в этой и последующих главах. Во-вторых, мы объясняем, как топологические объекты в трехмерном евклидовом пространстве, подобные узлам, так называемые связки, порождают косовые моноидальные категории. Исторически это была одна из первых конструкций косовых категорий. В более сложной форме, это дает геометрическую конструкцию категорий представлений квантовых групп.

Эта глава устроена следующим образом. В параграфе 1 мы определяем узлы и зацепления в трехмерном евклидовом пространстве, а также диаграммы зацеплений и перестройки Райдемайстера. В параграфе 2 мы используем технику диаграмм зацеплений, чтобы определить естественный многочлен для оснащенных зацеплений и многочлен Джонса для ориентированных зацеплений. В параграфе 3 мы вводим связки и определяем скейн-модули связок. В параграфе 4 мы определяем категории связок и вводим сплетение на них.

1. Узлы, зацепления и диаграммы зацеплений

1.1. Оснащенные зацепления

Зацеплением в трехмерном евклидовом пространстве называется конечный дизъюнктивный набор окружностей, гладко вложенных в $\mathbb{R}^3$. Эти окружности называются компонентами зацепления. Если не оговорено противное, предполагается, что компоненты зацепления не являются параметризованными или ориентированными. Зацепление $L \subset \mathbb{R}^3$, имеющее лишь одну компоненту, называется *узлом*. Несколько примеров узлов и зацеплений приведено на рисунке 1.1.

Изотопия зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$ — это гладкая деформация L в классе зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Такая деформация плавно перемещает компоненты L в $\mathbb{R}^3$ без образования пересечений или самопересечений.



Рис. 1.1

Два зацепления $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ называются *изотопными*, если существует изотопия, переводящая L_1 в L_2 . Ясно, что изотопия является отношением эквивалентности в классе зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Классы изотопии зацеплений также называются зацеплениями. Основная задача теории узлов — классифицировать узлы и зацепления с точностью до изотопии. Для этого топологи строят различные изотопические инварианты узлов и зацеплений. В следующем параграфе мы определим один такой инвариант, многочлен Джонса для зацеплений.

Нам потребуется рассматривать нормальные векторные поля на зацеплениях в $\mathbb{R}^3$. Зацепление $L \subset \mathbb{R}^3$, на котором фиксировано неособое нормальное векторное поле, называется *оснащенным*. Два векторных поля на L , гомотопные в классе неособых нормальных векторных полей, определяют одно и то же *оснащение* на L . Другими словами, оснащение на L есть гомотопический класс неособых нормальных векторных полей на L . Заметьте, что гомотопический класс неособых нормальных векторных полей на узле $K \subset \mathbb{R}^3$ полностью определяется целым числом, называемым *индексом вращения* или *индексом оснащения*. Это число определяется следующим образом: ориентируем окружность K произвольным образом. Рассмотрим ориентированную окружность K' , полученную перемещением K вдоль заданного векторного поля в $\mathbb{R}^3 \setminus K$, и найдем коэффициент зацепления K и K' . (Мы напоминаем определение коэффициента зацепления в параграфе 1.4.) Поэтому, чтобы ввести на зацеплении оснащение, достаточно приписать каждой компоненте целое число.

Под *изотопией оснащенных зацеплений* мы понимаем изотопию самих зацеплений вместе с гомотопией нормальных векторных полей. (Такая изотопия сохраняет коэффициент зацепления.) Изотопические классы оснащенных зацеплений также называются оснащенными зацеплениями.

1.2. Диаграммы зацеплений

Чтобы описывать узлы и зацепления в $\mathbb{R}^3$, обычно пользуются картинками вроде тех, что на рисунке 1.1. Такие картинки называются диаграммами зацеплений. Здесь мы даем формальное определение диаграмм зацеплений.

Рассмотрим проекцию зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$ на горизонтальную плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times 0$. Немного деформируя L в $\mathbb{R}^3$, мы можем считать, что проекция находится в общем положении, то есть состоит из иммерсированных петель, причем все перекрестки двойные и трансверсальные. Над каждой точкой пересечения петель в проекции лежат ровно две точки L . Одна из этих двух точек лежит выше, чем другая, поэтому мы снабжаем перекресток дополнительной информацией: одна из двух пересекающихся ветвей лежит «выше», а другая — «ниже», ср. рисунок 1.1. Эти ветви называются *переход* и *проход* соответственно. Система петель общего положения в $\mathbb{R}^2$, снабженная информацией о переходах/проходах на каждом перекрестке, называется *диаграммой зацепления*. Описанная конструкция превращает всякую проекцию общего положения зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$ в диаграмму зацепления. Глядя на эту диаграмму, мы можем восстановить L , по крайней мере с точностью до изотопии.

Понятно, что диаграмму зацепления L можно рассматривать просто как изображение L . Например, диаграммы на рисунке 1.1 представляют соответственно трилистник, «восьмерку», зацепление Хонфа и кольца Борромео. Зацепление, представленное диаграммой, состоящей из m непересекающихся вложенных окружностей, называется тривиальным m -компонентным зацеплением.

Более внимательный анализ определений показывает, что всякая диаграмма зацепления в $\mathbb{R}^2$ представляет, на самом деле, оснащенное зацепление. Мы можем рассматривать диаграмму как изображение зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$, лежащего очень близко к $\mathbb{R}^2$, и снабдить L вертикальным векторным полем, ортогональным к $\mathbb{R}^2$ и направленным «вверх», то есть к читателю. Соответствующие индексы оснащений компонент могут быть сосчитаны следующим образом. Ориентируем все компоненты и припишем ± 1 каждому перекрестку так, как показано на рисунке 1.2. Для каждой компоненты сложим все знаки, ассоциированные с ее самопересечениями. Так мы получим требуемый индекс оснащения.

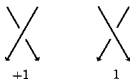


Рис. 1.2

Техника диаграмм зацеплений является довольно общей: всякое оснащенное зацепление L изотопно оснащённому зацеплению, представленному диаграммой зацепления. Чтобы это увидеть, деформируем сла-

чала L так, чтобы его проекция на $\mathbb{R}^2$ была в общем положении. Снабжая проекцию информацией о переходах/проходах, как описано выше, мы получаем диаграмму L , хотя оснащение L , определяемое этой диаграммой, возможно, отличается от данного оснащения L . Такой ситуации можно избежать, если поменять диаграмму, нриисовывая на каждой компоненте определенное количество маленьких завитков, как показано на рисунке 1.3. Эта операция не меняет изотопический тип зацепления, но меняет оснащение. Несложно посчитать, что первое (соотв., второе) преобразование на рисунке 1.3 увеличивает (соотв., уменьшает) индекс оснащения соответствующей компоненты на 1. Поэтому, применяя такие преобразования, мы получим диаграмму зацепления, представляющую L с заданным оснащением.

Удобно рассматривать пустое подпространство в $\mathbb{R}^3$ как оснащенное зацепление, имеющее 0 компонент. Это зацепление представляется пустой диаграммой.

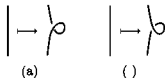


Рис. 1.3

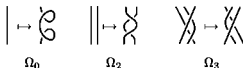


Рис. 1.4

1.3. Перестройки Райдемайстера

Естественно спросить, когда две диаграммы зацеплений представляют изотопные оснащенные зацепления. Понятно, что если две диаграммы связаны объемлющей изотопией в плоскости $\mathbb{R}^2$, то соответствующие оснащенные зацепления изотопны в $\mathbb{R}^3$. (Объемлющая изотопия диаграммы зацепления индуцируется изотопией плоскости.)

На рисунке 1.4 изображены три локальных преобразования диаграмм, сохраняющие изотопический тип соответствующего оснащенного зацепления. Эти преобразования обозначаются Ω_0 , Ω_2 , Ω_3 . Они вместе с

обратными преобразованиями Ω_0^{-1} , Ω_2^{-1} , Ω_3^{-1} называются *перестройками Райдемайстера*. По определению, каждая перестройка Райдемайстера изменяет диаграмму зацепления внутри маленького диска и оставляет без изменения остальную часть диаграммы.

1.4. Теорема

Две диаграммы зацеплений в $\mathbb{R}^2$ представляют изотопные оснащенные зацепления в том и лишь том случае, если они могут быть связаны объемлющей изотопией, а также конечной последовательностью перестроек $\Omega_0^{\pm 1}$, $\Omega_2^{\pm 1}$, $\Omega_3^{\pm 1}$.

Эта теорема показывает, что для того, чтобы определить инварианты оснащенных зацеплений, достаточно определить инварианты диаграмм зацеплений, сохраняемые при объемлющей изотопии и перестройках $\Omega_0^{\pm 1}$, $\Omega_2^{\pm 1}$, $\Omega_3^{\pm 1}$. Мы используем этот подход в параграфе 2, чтобы определить многочлен Джонса.

Чтобы подобным образом иметь дело с неоснащенными зацеплениями, нам нужна другая перестройка диаграмм зацеплений, а именно первое преобразование на рисунке 1.3. Оно обозначается Ω_1 . Теорема, доказанная К. Райдемайстером, утверждает, что две диаграммы зацеплений в $\mathbb{R}^2$ представляют изотопные зацепления в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда они могут быть связаны объемлющей изотопией и конечной последовательностью перестроек $\Omega_1^{\pm 1}$, $\Omega_2^{\pm 1}$, $\Omega_3^{\pm 1}$ (см. [BZ85, глава 1]). Теорема 1.4 легко выводится из этого классического утверждения.

В завершение этого параграфа мы напомним определение коэффициента зацепления ориентированных (непересекающихся) узлов $K, K' \subset \mathbb{R}^3$. Представим зацепление $K \cup K'$ диаграммой и сложим числа ± 1 , ассоциированные с теми перекрестками, где петля, представляющая K , перекрещивается с петлей, представляющей K' , как описано выше (ср. рисунок 1.2). Нетрудно увидеть, что получающееся целое число сохраняется при перестройках Райдемайстера, а потому дает изотопический инвариант зацепления $K \cup K'$. Это число и называется *коэффициентом зацепления K и K'* и обозначается $\text{lk}(K, K')$.

1.5. Примеры

(i) Сосчитайте индексы оснащений для оснащенных зацеплений, представленных диаграммами на рисунке 1.1. Ориентируйте компоненты зацепления Хопфа и сосчитайте их коэффициент зацепления. Прodelайте то же самое для колец Борромео.

(ii) Проверьте, что $\text{lk}(K, K') = \text{lk}(K', K)$.

2. Многочлен Джонса зацеплений

2.1. Скейн-классы диаграмм

Зафиксируем ненулевое комплексное число a . Пусть $E(a)$ — комплексное векторное пространство, порожденное асеми диаграммами зацеплений, профакторизованное по

- (i) объемлющей изотопии в плоскости;
- (ii) соотношению $D \cup O = -(a^2 + a^{-2})D$, где D — произвольная диаграмма зацепления, а O — простая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$, ограничивающая диск в дополнении к D ;
- (iii) по тождеству на рисунке 2.1.

Формула на рисунке 2.1 есть *скейн-соотношение Кауффмана*. Это соотношение связывает три диаграммы зацеплений, совпадающие всюду кроме внутренности маленького 2-диска, где они устроены так, как нарисовано.

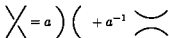


Рис. 2.1

Две диаграммы справа получаются сглаживанием перекрестка на диаграмме слева. Эти две сглаженные диаграммы входят с коэффициентами a и a^{-1} . Чтобы определить, какой коэффициент какой диаграмме соответствует, мы используем следующее правило. Будем двигаться по направлению к перекрестку вдоль верхней ветви (ветви-перехода). Перед перекрестком повернем влево (против часовой стрелки) и будем двигаться, пока не встретим нижнюю ветвь, затем удалимся вдоль нее от перекрестка. Таким образом мы получаем одно из двух сглаживаний. При нем стоит коэффициент a , второе возможное сглаживание получает коэффициент a^{-1} .

Мы называем $E(a)$ *скейн-модулем*, соответствующим a . Каждая диаграмма зацепления D представляет элемент $E(a)$, обозначаемый $\langle D \rangle(a)$, или просто $\langle D \rangle$, и называемый *скейн-классом* D . Например, если D состоит из m непересекающихся вложенных окружностей, то, по (ii),

$$\langle D \rangle(a) = (-1)^m (a^2 + a^{-2})^m \langle \emptyset \rangle, \quad (2.1)$$

где $\emptyset$ — диаграмма пустого зацепления. Следующая теорема показывает, что $E(a)$ есть одномерное векторное пространство, порожденное $\langle \emptyset \rangle$.

2.2. Теорема

При всяком $a \in \mathbb{C}$ имеет место $\dim E(a) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть D — диаграмма зацепления. Применяя скейн-соотношение ко всем перекресткам в D , мы можем представить D как линейную комбинацию диаграмм без перекрестков. Это разложение не зависит от того, в каком порядке мы применяем скейн-соотношение к перекресткам D . Воспользовавшись формулой 2.1 для диаграмм в разложении, получаем $\langle D \rangle = c(\emptyset)$, где $c = c(D, a) \in \mathbb{C}$. Число $c = c(D, a)$ определяется по D и a единственным образом, а значит, $E(a)$ — одномерное векторное пространство, порожденное элементом $\langle \emptyset \rangle$. ■

2.3. Теорема

Скейн-класс всякой диаграммы зацепления инвариантен относительно перестроек $\Omega_0^{\pm 1}$, $\Omega_2^{\pm 1}$, $\Omega_3^{\pm 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть D' — диаграмма зацепления, получаемая из диаграммы D вставлением маленького положительного витка, как на рисунке 1.3а. Вычисления на рисунке 2.2 показывают, что $\langle D' \rangle = -a^3 \langle D \rangle$. Знак $\doteq$ на рисунках означает равенство соответствующих скейн-классов.

$$\text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2} \quad \text{рис. 2.2}$$

Рис. 2.2

Аналогично, если D' — диаграмма, получаемая из D вставлением маленького отрицательного витка, как на рисунке 1.3b, то $\langle D' \rangle = -a^{-3} \langle D \rangle$. Отсюда вытекает инвариантность $\langle D \rangle$ относительно Ω_0 .

Инвариантность $\langle D \rangle$ относительно перестройки Ω_2 проверяется на рисунке 2.3. Здесь мы дважды применяем соотношение Кауффмана: сначала к нижнему перекрестку, а затем к верхнему. Мы также используем только что доказанный результат о положительных витках.

$$\text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3} \quad \text{рис. 2.3}$$

Рис. 2.3

На рисунке 2.4 мы проверяем инвариантность $\langle D \rangle$ относительно перестройки Ω_3 . Второе и третье равенства на рисунке 2.4 следуют из инвариантности $\langle D \rangle$ относительно Ω_2 . ■

$$\begin{aligned}
 \text{X} &= a \text{X} + a^{-1} \text{X} \\
 &= a \text{X} + a^{-1} \text{X} \\
 &= a \text{X} + a^{-1} \text{X} = \text{X}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.4

2.4. Скобочный многочлен

Мы можем использовать теорему 2.3, чтобы определить многочлен Лорана $\langle L \rangle(a)$ от одной переменной a для всякого ненулевого оснащенного зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$. Этот многочлен Лорана имеет целые коэффициенты и зависит только лишь от изотопического класса L . Он называется *скобочным многочленом* зацепления L .

Многочлен $\langle L \rangle(a)$ определяется следующим образом. Представим L диаграммой D и выберем отличное от нуля комплексное число a , такое что $a^2 + a^{-2} \neq 0$. Из теорем 1.4 и 2.3 следует, что скейн-класс $\langle D \rangle(a) \in E(a)$ является изотопическим инвариантом L , независимым от выбора D . Мы отождествляем $E(a) = \mathbb{C}(\emptyset)$ с $\mathbb{C}$, полагая $\langle \emptyset \rangle = 1 \in \mathbb{C}$. Из рекуррентной формулы Кауффмана следует, что функция $\langle D \rangle(a) \in E(a) = \mathbb{C}$ есть лоранов полином от a , делящийся на $a^2 + a^{-2}$. Положим $\langle L \rangle(a) = -(a^2 + a^{-2})^{-1} \langle D \rangle(a) \in \mathbb{C}$.

Скобка $\langle L \rangle$ нормирована таким образом, чтобы ее значение на тривиальном узле с индексом оснащения 0 равнялось 1. Вообще, значение скобки на m -компонентном зацеплении с индексом оснащения компонент, равным нулю, есть $(-a^2 - a^{-2})^{m-1}$.

На рисунках 2.5 и 2.6 мы вычисляем скобку от зацепления Холфа (с нулевыми индексами оснащения) и от трилистника с индексом оснащения +3. Эти вычисления показывают, в частности, что трилистник не изотопен тривиальному узлу.

$$\begin{aligned}
 \text{H} &= a \text{H} + a^{-1} \text{H} \\
 &= a(-a^3) + a^{-1}(-a^{-3}) \\
 &= -a^4 - a^{-4}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.5

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= a \text{Diagram}_1 + a^{-1} \text{Diagram}_2 \\
 &= a(-a^4 - a^{-4}) + a^{-1}(-a^{-3})^2 \\
 &= -a - a^{-3} + a^{-1}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.6

Скобочный многочлен оснащенного зацепления зависит от выбора оснащения. Закручивание оснащения вокруг компоненты n раз приводит к домножению скобки на $(-a^3)^n$.

2.5. Многочлен Джонса

Многочлен Джонса — это вариант скобочного многочлена для ориентированных (неоснащенных) зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Зацепление называется *ориентированным*, если все его компоненты ориентированы. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ есть ориентированное зацепление с компонентами $L_1, \dots, L_m$, где $m \geq 1$. Введем на каждой компоненте L_i оснащение

$$-\sum_{j \neq i} \text{lk}(L_i, L_j),$$

где lk — коэффициент зацепления. Обозначим полученное оснащенное зацепление L^f . (Например, если L является узлом, то L^f — это L с зацеплением 0.) Нетрудно заметить, что $\langle L^f \rangle(a)$ есть лоранов многочлен от a^2 . Чтобы определить многочлен Джонса $V_L(q)$ от L , мы делаем подстановку $a = q^{-1/2}$ в $\langle L^f \rangle(a)$. Таким образом,

$$V_L(q) = \langle L^f \rangle(q^{-1/2}).$$

Это лоранов многочлен от q .

Многочлен $V_L(q)$ может быть вычислен по произвольной диаграмме D зацепления L следующим образом. Ориентация L определяет знаки ± 1 перекрестков D , как показано на рисунке 1.2. Пусть $w(D) \in \mathbb{Z}$ — сумма этих знаков по всем перекресткам D . Пусть $|D|$ есть число перекрестков в D . Тогда

$$V_L(q) = (-1)^{|D|+1} q^{3w(D)/2} \frac{\langle D \rangle(q^{-1/2})}{q + q^{-1}}. \quad (2.2)$$

Многочлен Джонса $V_L(q)$ можно описать следующим полезным образом. Мы говорим, что три ориентированных зацепления L_+ , L_- , L_0 образуют *тройку Конвея*, если они одинаковы повсюду кроме внутренней части шара, где они выглядят так, как изображено на рисунке 2.7.

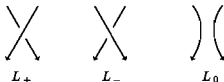


Рис. 2.7

2.6. Теорема

Существует единственное отображение

$$V : \{\text{непустые ориентированные зацепления в } \mathbb{R}^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}],$$

такое что

- (i) *если L изотопно L' , то $V(L) = V(L')$,*
- (ii) *$V(\text{тривиальный узел}) = 1$,*
- (iii) *для всякой конвеевской тройки L_+ , L_- , L_0 имеет место*

$$q^{-2}V(L_+) - q^2V(L_-) = (q - q^{-1})V(L_0).$$

Набросок доказательства. Существование доказывается легко: многочлен Джонса, очевидно, удовлетворяет условиям (i) и (ii); вывести (iii) из скейн-соотношения Кауффмана для диаграмм зацеплений и формулы 2.2 — приятное упражнение для читателя. Единственности V также доказывается несложно: нужно использовать индукцию по числу перекрестков диаграммы и то обстоятельство, что всякая диаграмма может быть преобразована в диаграмму тривиального зацепления с помощью замены определенных переходов на проходы.

2.7. Упражнения

- (i) Если L' — зеркальное отражение ориентированного зацепления $L \subset \mathbb{R}^3$, то $V_{L'}(q) = V_L(q^{-1})$. Выведите отсюда, что трилистник не изотопен своему зеркальному отражению.

(ii) Если ориентированное зацепление $L \subset \mathbb{R}^3$ есть дизъюнктное объединение ориентированных зацеплений L_1 и L_2 , то

$$V_L(q) = (-q - q^{-1})V_{L_1}(q)V_{L_2}(q).$$

(iii) Проверьте, что многочлен Джонса для узла «восьмерка» есть

$$q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4}.$$

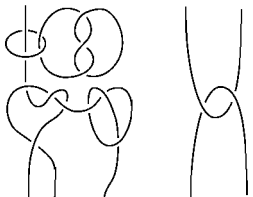
3. Скейн-модули связок

3.1. Связки

Теория, о которой шла речь в параграфах 1 и 2, может быть обобщена на связки. Связки похожи на зацепления, но могут помно окружностей содержать дуги с закрепленными концами. Как мы увидим в параграфе 4, изучение связок быстро приводит к косовым моноидальным категориям.

Пусть k, l — неотрицательные целые числа. *Связкой* с k входами и l выходами (или, короче, (k, l) -связкой) называется система непересекающихся дуг и окружностей, гладко вложенных в полосу $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, такая что концы дуг суть точки $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (k, 0, 0)$ и $(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (l, 0, 1)$; окружности лежат в $\mathbb{R}^2 \times (0, 1)$. Эти дуги и окружности в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ называются компонентами связки. Примеры $(3, 1)$ -связки и $(2, 2)$ -связки приведены на рисунке 3.1.

Связка $L \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ называется *оснащенной*, если на ней задано неособое нормальное векторное поле, равное на концах дуг вектору $(0, -1, 0)$. Нормальные векторные поля на L , гомотопные в классе



(3,1)-связка

(2,2)-связка

Рис. 3.1

неособых нормальных векторных полей (фиксированных на концах дуг), определяют *оснащение* L .

Говорят, что две (оснащенных) (k, l) -связки L_1, L_2 *изотопны*, если L_1 может быть гладко продеформировано в L_2 в классе (оснащенных) (k, l) -связок. Разумеется, в ходе деформации не должно возникать пересечений или самопересечений компонент связки. Понятно, что изотопия есть отношение эквивалентности на классе связок. Основная задача теории связок — классифицировать их с точностью до изотопии.

Изучение связок обобщает изучение зацеплений, каковые являются просто $(0, 0)$ -связками. То обстоятельство, что $(0, 0)$ -связки лежат в $\mathbb{R}^2 \times (0, 1)$, а не в $\mathbb{R}^3$, нисколько не умаляет общности, поскольку всякое зацепление в $\mathbb{R}^3$ можно так деформировать, чтобы оно поместилось в $\mathbb{R}^2 \times (0, 1)$.

3.2. Диаграммы связок

Определение диаграмм зацеплений, данное в параграфе 1, легко обобщается на связки. А именно, (k, l) -диаграмма связки состоит из конечного числа дуг и петель в $\mathbb{R} \times [0, 1]$, причем концы дуг суть точки $(1, 0), (2, 0), \dots, (k, 0)$ и $(1, 1), (2, 1), \dots, (l, 1)$. В каждой точке самопересечения диаграммы одна из двух пересекающихся ветвей должна быть выделена как нижняя, а другая — как верхняя. Мы всегда считаем, что дуги и петли диаграммы связки лежат в общем положении. Если обратное не оговорено, мы предполагаем, что они не ориентированы. Так же, как в параграфе 1, всякая (k, l) -диаграмма связки в $\mathbb{R} \times [0, 1]$ представляет оснащенную (k, l) -связку в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$.

Перестройки Райдемайстера диаграмм зацеплений Ω_0 – Ω_3 , определенные в параграфе 1, работают и для диаграмм связок. Ясно, что эти перестройки должны происходить вдали от концов дуг и не должны двигать эти концы.

3.3. Теорема

Две диаграммы связок представляют изотопные оснащенные связки тогда и только тогда, когда они могут быть связаны объемлющей изотопией в $\mathbb{R} \times [0, 1]$, а также конечной последовательностью перестроек $\Omega_0^{\pm 1}, \Omega_2^{\pm 1}, \Omega_3^{\pm 1}$.

Это прямое обобщение теоремы 1.4 на связки.

3.4. Скейн-модуль $E_{k,l}$

Фиксируем ненулевое комплексное число a . Пусть k, l — неотрицательные целые числа. Пусть $E_{k,l} = E_{k,l}(a)$ — комплексное векторное

пространство, порожденное всеми (k, l) -диаграммами связок, профакторизованное по

(i) объемлющей изотопии в $\mathbb{R} \times [0, 1]$, постоянной на границе $\mathbb{R} \times [0, 1]$;

(ii) по соотношению $D \cup O = -(a^2 + a^{-2})D$, где D есть произвольная (k, l) -диаграмма связки, а O — простая замкнутая кривая в $\mathbb{R} \times (0, 1)$, ограничивающая диск в дополнении к D ;

(iii) наконец, по тождеству на рисунке 2.1, которое включает три диаграммы (k, l) -связок, одинаковые всюду, за исключением внутренности маленького диска, где они выглядят, как изображено на рисунке.

Векторное пространство $E_{k,l}$ называется (k, l) -скейн-модулем, соответствующим a . Всякая (k, l) -диаграмма связки D представляет элемент $E_{k,l}$, обозначаемый $\langle D \rangle$ и называемый скейн-классом D . Заметьте, что если $k + l$ нечетно, то (k, l) -диаграмм связок не существует и $E_{k,l} = 0$.

Применяя тождество на рисунке 2.1 ко всем перекресткам (k, l) -диаграммы связки D , мы можем представить D как формальную линейную комбинацию (с комплексными коэффициентами) классов диаграмм без перекрестков. Далее, используя соотношение (ii), мы можем избавиться от петель. Это дает каноническое разложение D в виде линейной комбинации диаграмм связок, состоящих из $\frac{1}{2}(k + l)$ непересекающихся простых дуг. Мы называем такие (k, l) -диаграммы простыми. Тем самым показано, что в $E_{k,l}$ есть базис, представленный простыми (k, l) -диаграммами. Число простых (k, l) -диаграмм равно числу Каталана $\binom{2n}{n} / (n + 1)$, где $n = \frac{1}{2}(k + l)$.

3.5. Теорема

Скейн-класс (k, l) -диаграммы связки инвариантен относительно перестроек $\Omega_0^{\pm 1}$, $\Omega_2^{\pm 1}$, $\Omega_3^{\pm 1}$.

Эта теорема есть прямое обобщение теоремы 2.3 на связки.

Из теорем 3.3 и 3.5 следует, что скейн-класс $\langle D \rangle \in E_{k,l}$ (k, l) -диаграммы связки D является изотопическим инвариантом оснащенной (k, l) -связки, представленной диаграммой D . Он называется скейн-классом связки. Это достаточно сильный инвариант связок, удобный для рекуррентных вычислений. Более того, коэффициенты скейн-класса связки в описанном выше базисе в $E_{k,l}(a)$ суть многочлены Лорана от a . Таким образом, мы получаем $\binom{2n}{n} / (n + 1)$ полиномиальных инварианта связок.

В случае $k = l = 0$, мы получаем скобочный многочлен оснащенных зацеплений (с точностью до множителя $-a^2 - a^{-2}$).

4. Категории связок

4.1. Категория оснащенных связок

Мы можем организовать моноидальную категорию из оснащенных связок. Она обозначается $\mathcal{T}$. Как мы увидим, эта категория обладает естественным сплетением.

Объекты $\mathcal{T}$ суть неотрицательные целые числа $0, 1, 2, \dots$. Морфизм $k \rightarrow l$ в $\mathcal{T}$ — это изотопический класс оснащенной (k, l) -связки. Композиция fg морфизмов $g : k \rightarrow l$ и $f : l \rightarrow m$ представляется связкой, которая получается, если приставить f сверху к g и сжать получившееся в $\mathbb{R} \times [0, 1]$,¹ ср. рисунок 4.1.

$$\boxed{f} \circ \boxed{g} = \boxed{\begin{array}{c} f \\ g \end{array}} \qquad \boxed{L} \otimes \boxed{L'} = \boxed{\begin{array}{cc} L & L' \end{array}}$$

Рис. 4.1

Связка, состоящая из k непересекающихся вертикальных дуг с постоянным оснащением представляет тождественный морфизм $\text{id}_k : k \rightarrow k$. Тождественный морфизм $\text{id}_0 : 0 \rightarrow 0$ представляется пустой связкой.

Мы вводим на категории $\mathcal{T}$ тензорное произведение. Тензорное произведение объектов $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ есть объект $k + l$. Тензорное произведение двух морфизмов, представленных связками L, L' , представляется связкой, которая получается, если L' приставить справа к L без какого-либо их взаимного переплетения, ср. рисунок 4.1. Понятно, что $\mathcal{T}$ есть строго моноидальная категория с единичным объектом 0. Заметьте, что $\mathcal{T}$ содержит категорию кос $\mathcal{B}$ (определенную в главе II) в качестве подкатегории.

Пусть $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Чтобы определить морфизм сплетения $c_{k,l} : k \otimes l \rightarrow l \otimes k$, возьмем семейство k вертикальных дуг, представляющее id_k , и положим его сверху поперек семейства l вертикальных дуг, представляющего id_l . В результате получается $(k + l, k + l)$ -диаграмма связки с kl перекрестками, см. рисунок 4.2, где $k = 3, l = 2$.

Мы определяем $c_{k,l} : k \otimes l \rightarrow l \otimes k$ как связку, представленную этой диаграммой. Обратимость $c_{k,l}$ очевидна: обратный морфизм представляется диаграммой связки, получаемой из $c_{l,k}$ после зеркального отражения от плоскости рисунка.

4.2. Теорема

$\mathcal{T}$ — косовая моноидальная категория.

¹Следует также сгладить оснащение. — Прим. перев.

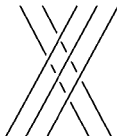


Рис. 4.2

Доказательство.

Обе части тождества сплетения

$$c_{k,l \otimes m} = (\text{id}_l \otimes c_{k,m})(c_{k,l} \otimes \text{id}_m), \quad (4.1)$$

где $k, l, m = 0, 1, \dots$, суть оснащенные связки. Достаточно нарисовать их диаграммы, чтобы увидеть, что эти связки изотопны. Это дает тождество (4.1). Тождество

$$c_{k \otimes l, m} = (c_{k,m} \otimes \text{id}_l)(\text{id}_k \otimes c_{l,m})$$

проверяется так же.

Чтобы доказать естественность сплетения, мы должны проверить, чтобы для всех пар морфизмов $f: l \rightarrow l'$ и $g: m \rightarrow m'$ в $\mathcal{T}$ выполнялось

$$(g \otimes f)c_{l,m} = c_{l',m'}(f \otimes g). \quad (4.2)$$

Так же, как выше, диаграммы связок, стоящие справа и слева, представляют изотопные оснащенные связки. Так мы получаем формулу (4.2). ■

4.3. Отступление о функторах

В следующем пункте нам потребуется понятие функтора. *Функтор* P из категории $\mathcal{X}$ в категорию $\mathcal{Y}$ сопоставляет всякому объекту V из $\mathcal{X}$ объект $P(V)$ из $\mathcal{Y}$ и всякому морфизму $f: V \rightarrow W$ в $\mathcal{X}$ морфизм $P(f): P(V) \rightarrow P(W)$ в $\mathcal{Y}$, причем $P(\text{id}_V) = \text{id}_{P(V)}$ для всякого объекта V из $\mathcal{X}$ и $P(fg) = P(f)P(g)$ для всяких двух морфизмов f, g из $\mathcal{X}$, композиция которых определена. Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — строго моноидальные категории, то говорят, что функтор $P: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ *сохраняет тензорное произведение*, если для всяких объектов V, W из $\mathcal{X}$ выполняется $P(V \otimes W) = P(V) \otimes P(W)$, для всяких морфизмов f, g в $\mathcal{X}$ справедливо $P(f \otimes g) = P(f) \otimes P(g)$ и $P(1_{\mathcal{X}}) = 1_{\mathcal{Y}}$.

4.4. Скейн-категория и скейн-функтор

Для всякого ненулевого комплексного числа a мы определяем моноидальную категорию $S = S(a)$, образованную скейн-модулями. Определение S такое же, как определение категории оснащенных связок T , только изотонические классы связок следует везде заменить на скейн-классы.

Онишем конструкцию подробнее. Объекты S суть неотрицательные целые числа $0, 1, 2, 3, \dots$. Морфизм $k \rightarrow l$ в S — элемент $E_{k,l}(a)$. Поэтому $\text{Hom}_S(k, l) = E_{k,l}$. Композиция fg морфизмов $g : k \rightarrow l$, $f : l \rightarrow m$, представленными диаграммами связок, определяется приложением диаграммы f сверху к диаграмме g и сжатием результата в $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Композиция распространяется на произвольные морфизмы по линейности. Диаграмма, состоящая из k непересекающихся вертикальных дуг представляет единичный морфизм $\text{id}_k : k \rightarrow k$. Тензорное произведение объектов $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ из S есть объект $k + l$. Тензорное произведение двух морфизмов, представленных диаграммами связок D, D' получается приложением D' справа к D . Тензорное произведение распространяется на произвольные морфизмы по линейности. Понятно, что S является строго моноидальной категорией с единичным объектом 0.

Как следует из теорем 3.3 и 3.5, есть функтор $P : T \rightarrow S(a)$, который тождественен на объектах и преобразует изотонический класс оснащенной (k, l) -связки в ее скейн-класс в $E_{k,l}(a)$. Очевидно, что P сохраняет тензорное произведение. Мы называем P скейн-функтором. Для оснащенных зацеплений в $\mathbb{R}^3$, рассматриваемых как морфизмы $0 \rightarrow 0$ в T , этот функтор, по сути, дает значение скобочного многочлена a . Поэтому, P можно рассматривать как категорное обобщение скобочного многочлена.

Мы вводим на S сплетение $\{P(c_{k,l}) : k \otimes l \rightarrow l \otimes k\}_{k,l}$, где $c_{k,l} : k \otimes l \rightarrow l \otimes k$ — сплетение на T , определенное выше. Следовательно, $P(c_{k,l})$ есть скейн-класс оснащенной $(k + l, k + l)$ -связки, представленной диаграммой, которая была определена в параграфе 4.1. То, что морфизмы $\{P(c_{k,l})\}_{k,l}$ обратимы и удовлетворяют тождествам сплетения, следует непосредственно из соответствующих свойств $\{c_{k,l}\}_{k,l}$. Естественность $\{P(c_{k,l})\}_{k,l}$ вытекает из естественности $\{c_{k,l}\}_{k,l}$ и того факта, что скейн-модули линейно порождены скейн-классами оснащенных связок. Отсюда вытекает следующая теорема.

4.5. Теорема

Категория S является строго моноидальной категорией.

Категория S проще и понятнее категории оснащенных связок T . То обстоятельство, что морфизмы $k \rightarrow l$ в S образуют конечномерное векторное пространство для всяких k, l , значительно облегчает изучение S .

Комбинируя конструкцию S с теорией идемпотентов Джонса – Венцля в алгебрах Темперли – Либа, можно определить более замысловатые косовые категории и, в частности, восстановить категорию представлений квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ (см. [Tur94, глава XII]).

ГЛАВА VI

От ленточных категорий к топологическим инвариантам зацеплений и трехмерных многообразий

В этой главе мы вводим важный класс косовых моноидальных категорий, а именно ленточные категории (параграф 1). Категории связей и категории представлений квантовых групп, рассматриваемые в главах V и VII, являются ленточными категориями. Для произвольной категории C мы вводим категорию $\mathcal{T}_C$, образованную изотопическими классами C -раскрашенных связок, то есть, связок, компоненты которых оснащены объектами C . Основным инструментом, связывающим топологию связок и алгебру категорий, является канонический функтор $F_C : \mathcal{T}_C \rightarrow C$, определенный, когда C — ленточная категория (параграф 2). Этот функтор — далекое обобщение скейн-функтора, который рассматривался в главе V. В параграфе 3 мы вводим более узкий класс модулярных категорий. Они являются ленточными категориями, содержащими конечный набор простых объектов, которые в определенном смысле порождают всю категорию. Наконец, в параграфе 4 мы показываем, как из всякой модулярной категории вывести соответствующий инвариант Решетихина–Тураева трехмерных многообразий и зацеплений на трехмерных многообразиях.

1. Ленточные категории

Ленточные категории — это косовые моноидальные категории, на которых есть две дополнительные структуры: двойственность и скручивание. Мы вначале обсуждаем двойственность и скручивание, а затем даем точное определение ленточных категорий.

1.1. Двойственность в моноидальных категориях

Двойственность в моноидальных категориях должна обобщать двойственность модулей, которая обычно формулируется в терминах

невыврожденных билинейных форм. Разумеется, определение двойственности в рамках категорий не должно прибегать к понятию линейности.

Пусть $\mathcal{C}$ — моноидальная категория. Будем считать, что каждому объекту V из $\mathcal{C}$ сопоставлены объект V^* из $\mathcal{C}$ и два морфизма

$$b_V : 1 \rightarrow V \otimes V^*, \quad d_V : V^* \otimes V \rightarrow 1.$$

Правило $V \mapsto (V^*, b_V, d_V)$ называется *двойственностью* в $\mathcal{C}$, при условии, что следующие тождества имеют место:

$$(\text{id}_V \otimes d_V)(b_V \otimes \text{id}_V) = \text{id}_V, \quad (1.1)$$

$$(d_V \otimes \text{id}_{V^*})(\text{id}_V \otimes b_V) = \text{id}_{V^*}. \quad (1.2)$$

В формуле (1.1) мы подразумеваем, что $(V \otimes V^*) \otimes V = V \otimes (V^* \otimes V)$. Это равенство выполнено, если $\mathcal{C}$ строго моноидальна. В противном случае нужно использовать изоморфизм ассоциативности $(V \otimes V^*) \otimes V \rightarrow V \otimes (V^* \otimes V)$, ср. пункт 2.1 главы IX. Мы оставляем сформулировать точно (1.1) и (1.2) в нестрогом случае читателю. В качестве упражнения, читатель может также проверить, что стандартное действие и кодействие в теориях модулей удовлетворяют (1.1) и (1.2).

1.2. Скручивание в косовых моноидальных категориях

Пусть $\mathcal{C}$ — моноидальная категория, оснащенная сплетением $c = \{c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V\}$, где V, W пробегает все объекты $\mathcal{C}$. Требование, чтобы композиция $c_{W,V}c_{V,W}$ всегда была равна $\text{id}_{V \otimes W}$, было бы слишком сильным. Для наших целей больше подошло бы требование, чтобы эта композиция была чем-то вроде тождества. Точное определение такое: *скручиванием* в $\mathcal{C}$ называется естественное семейство изоморфизмов

$$\theta = \{\theta_V : V \rightarrow V\},$$

где V пробегает все объекты $\mathcal{C}$, такое что для всяких двух объектов V, W из $\mathcal{C}$ имеет место

$$\theta_{V \otimes W} = c_{W,V}c_{V,W}(\theta_V \otimes \theta_W). \quad (1.3)$$

Естественность θ означает, что для всякого морфизма $f : U \rightarrow V$ в $\mathcal{C}$ справедливо $\theta_V f = f \theta_U$. Пользуясь естественностью сплетения, мы можем переписать 1.3 следующим образом:

$$\theta_{V \otimes W} = c_{V,W}(\theta_W \otimes \theta_V)c_{V,W} = (\theta_V \otimes \theta_W)c_{W,V}c_{V,W}.$$

Заметьте, что $\theta_1 = \text{id}_1$. Это обстоятельство вытекает из обратимости θ_1 и формулы

$$(\theta_1)^2 = (\theta_1 \otimes \text{id}_1)(\text{id}_1 \otimes \theta_1) = \theta_1 \otimes \theta_1 = \theta_1.$$

1.3. Определение ленточных категорий

Ленточной категорией называется моноидальная категория $\mathcal{C}$, оснащенная сילетением, скручиванием θ и двойственностью $(*, b, d)$, совместимыми в следующем смысле: для всякого объекта V из $\mathcal{C}$

$$(\theta_V \otimes \text{id}_{V^*})b_V = (\text{id}_V \otimes \theta_{V^*})b_V.$$

Заметьте, что в этом условии не участвует сплетение; единственная аксиома, связывающая силетение со скручиванием и двойственностью, — это 1.3.

Из аксиом ленточной категории следует, что двойственность инволютивна: объект $V^{**} = (V^*)^*$ канонически изоморфен V для всякого объекта V из $\mathcal{C}$.

Ленточная категория называется строгой, если она строга как моноидальная категория. Теорема МакЛейна о согласованности, утверждающая, что всякая моноидальная категория эквивалентна некоторой строго моноидальной категории, справедлива также и в случае ленточных категорий. (Те же замечания касаются и модулярных категорий, которые мы вводим в параграфе 3.)

Примеры ленточных категорий см. в параграфах 3–4 главы VII и в упражнении 1.5.

1.4. Следы и размерности

Ленточные категории допускают полиоценную теорию следов морфизмов и размерностей объектов. Это одно из важнейших свойств ленточных категорий, резко отличающее их от произвольных моноидальных категорий.

Пусть $\mathcal{C}$ — ленточная категория. Обозначим через $K = K_{\mathcal{C}}$ полуруппу $\text{End}(1)$ с умножением, индуцированным композицией морфизмов, и с единичным элементом id_1 . Полуруппа K коммутативна, поскольку при любых морфизмах $k, k' : 1 \rightarrow 1$ справедливо

$$kk' = (k \otimes \text{id}_1)(\text{id}_1 \otimes k') = k \otimes k' = (\text{id}_1 \otimes k')(k \otimes \text{id}_1) = k'k.$$

Следы морфизмов и размерности объектов, определенные ниже, принимают значения в K .

Для эндоморфизма $f : V \rightarrow V$ объекта V мы определяем его *след* $\text{tr}(f) \in K$ как следующую композицию:

$$\text{tr}(f) = d_V c_{V,V} \cdot ((\theta_V f) \otimes \text{id}_{V^*})b_V : 1 \rightarrow 1.$$

Основные свойства следа содержатся в следующей лемме (доказательство см. в [Tur94, глава I] или [Kas95, глава XIV]).

1.4.1. Лемма

(i) Для любых морфизмов $f : V \rightarrow W$, $g : W \rightarrow V$ имеет место $\text{tr}(fg) = \text{tr}(gf)$.

(ii) Для любых эндоморфизмов f, g объектов C имеет место $\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f) \text{tr}(g)$.

(iii) Для любого морфизма $k : 1 \rightarrow 1$ имеет место $\text{tr}(k) = k$.

Для всякого объекта V из C мы определяем его размерность $\dim(V)$ формулой

$$\dim(V) = \text{tr}(\text{id}_V) = d_V c_{V, V^*} (\theta_V \otimes \text{id}_{V^*}) b_V \in K.$$

Из леммы 1.4.1 следуют основные свойства размерности:

(i') размерности изоморфных объектов одинаковы,

(ii') для любых объектов V, W справедливо $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$, а также

(iii') $\dim(1) = 1$.

Можно показать, что для всякого объекта V из C $\dim(V^*) = \dim(V)$ (ср. утверждение 2, 3 (iii) ниже).

1.5. Упражнение

Проверьте, что построенные в параграфе 4 главы V косовые категории $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ являются ленточными категориями с двойственностью и скручиванием, изображенными на рисунке 1.1.

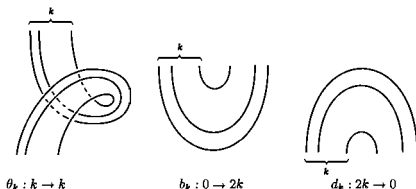


Рис. 1.1

2. Функтор F

2.1. Раскрашенные оснащенные связки

Зафиксируем категорию C . Оснащенная связка называется *C -раскрашенной* (или просто *раскрашенной*), если понятно, какая категория C имеется в виду), если каждая из ее компонент ориентирована и снабжена объектом из C . Под изотопией раскрашенных оснащенных связок мы понимаем изотопию, сохраняющую ориентации и цвета компонент. Техника диаграмм связок легко обобщается на случай раскрашенных оснащенных связок, достаточно указывать ориентации и цвета компонент.

Таким же образом, как мы строили категорию оснащенных связок в параграфе 4 главы V, мы можем организовать C -раскрашенные оснащенные связки в моноидальную категорию, обозначаемую $\mathcal{T}_C$. Объектами $\mathcal{T}_C$ являются конечные последовательности вида $((V_1, \varepsilon_1), \dots, (V_m, \varepsilon_m))$, где $V_1, \dots, V_m$ — объекты C и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{+, -\}$. Пустая последовательность также рассматривается как объект $\mathcal{T}_C$. Морфизмом $\eta \rightarrow \eta'$ в $\mathcal{T}_C$ является изотопический класс C -раскрашенной оснащенной связки, такой что η (соотв., η') есть последовательность цветов и направлений тех компонент связки, которые имеют концы на нижней (соотв., верхней) границе. Мы будем считать, что $\varepsilon = +$ соответствует направлению вниз у соответствующей вершины, а $\varepsilon = -$ соответствует направлению вверх. Следует подчеркнуть, что изотопные C -раскрашенные оснащенные связки представляют один и тот же морфизм в $\mathcal{T}_C$.

Композиция двух морфизмов $f : \eta \rightarrow \eta'$ и $g : \eta' \rightarrow \eta''$ получается приложением раскрашенной оснащенной связки, представляющей g сверху к раскрашенной оснащенной связке, представляющей f , склеиванием соответствующих вершин и сжатием результата в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$. Тожественные морфизмы представляются оснащенными связками, состоящими из непересекающихся вертикальных дуг с постоянным оснащением. Тожественный морфизм пустой последовательности представляется пустой связкой.

Тензорное произведение объектов η и η' из $\mathcal{T}_C$ — это их коплантация $\eta\eta'$. Тензорное произведение морфизмов f и g получается приложением раскрашенной оснащенной связки, представляющей f , слева к раскрашенной оснащенной связке, представляющей g , без какого-либо их взаимного переплетения. Таким образом, $\mathcal{T}_C$ оказывается строго моноидальной категорией.

Нам потребуются некоторые конкретные морфизмы в $\mathcal{T}_C$, представляющиеся диаграммами связок на рисунке 2.1, где мы также указываем обозначения для этих морфизмов. Здесь V, W пробегают все объекты C .

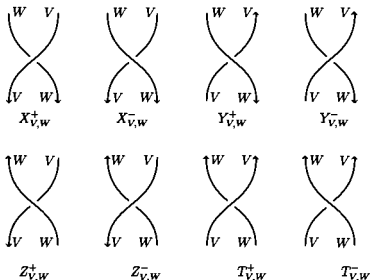


Рис. 2.1

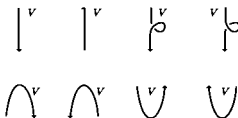


Рис. 2.2

Морфизмы в $\mathcal{T}_C$, представленные диаграммами на рисунке 2.2, будут обозначаться, соответственно, $\downarrow_V$, $\uparrow_V$, φ_V , φ'_V , $\cap_V$, $\cap'_V$, $\cup_V$, $\cup'_V$.

Как читатель, возможно, уже догадался, категория $\mathcal{T}_C$ допускает естественное сплетение, скручивание и двойственность и становится, таким образом, ленточной категорией (ср. упражнение 1.5). Мы не будем использовать эти структуры в $\mathcal{T}_C$.

2.2. Теорема

Пусть $\mathcal{C}$ — строгая ленточная категория со сплетением s , скручиванием θ и двойственностью $(*, b, d)$. Существует единственный

функтор $F = F_C : \mathcal{T}_C \rightarrow \mathcal{C}$, сохраняющий тензорное произведение (ср. пункт 4.3 главы V) и удовлетворяющий следующим условиям:

(i) F преобразует всякий объект $(V, +)$ в V , а всякий объект $(V, -)$ в V^* ;

(ii) для любых объектов V, W из $\mathcal{C}$ имеют место равенства

$$F(X_{V,W}^+) = c_{V,W}, \quad F(\varphi_V) = \theta_V, \quad F(\cup_V) = b_V, \quad F(\cap_V) = d_V.$$

Функтор F обладает следующими свойствами:

$$F(X_{V,W}^-) = (c_{W,V})^{-1}, \quad F(Y_{V,W}^+) = (c_{W,V^*})^{-1}, \quad F(Y_{V,W}^-) = c_{V^*,W},$$

$$F(Z_{V,W}^+) = (c_{W^*,V})^{-1}, \quad F(Z_{V,W}^-) = c_{V,W^*},$$

$$F(T_{V,W}^+) = c_{V^*,W^*}, \quad F(T_{V,W}^-) = (c_{W^*,V^*})^{-1}, \quad F(\varphi'_V) = (\theta_V)^{-1}.$$

Отметим следующие очевидные свойства F . Если L и L' — изотопные раскрашенные оснащенные связки, то L и L' представляют один и тот же морфизм в $\mathcal{T}_C$ и, следовательно, $F(L) = F(L')$. Так как F — функтор,

$$F(\downarrow_V) = \text{id}_V, \quad F(\uparrow_V) = \text{id}_{V^*}, \quad \text{и} \quad F(LL') = F(L)F(L'),$$

где L и L' суть две произвольные раскрашенные оснащенные связки, композиция которых определена. Так как F сохраняет тензорное произведение,

$$F(L \otimes L') = F(L) \otimes F(L')$$

для любых двух раскрашенных оснащенных связок L и L' . Заметим также, что для всякого раскрашенного оснащенного зацепления L имеем $F(L) \in \text{End}(1)$.

Значения F на $\cup_V^-$ и $\cap_V^-$ могут быть вычислены из формул

$$\cup_V^- = (\uparrow_V \otimes \varphi'_V) \circ Z_{V,V}^+ \circ \cup_V,$$

$$\cap_V^- = \cap_V \circ Z_{V,V}^- \circ (\varphi_V \otimes \uparrow_V).$$

Теорема 2.2 доставляет изотопические инварианты раскрашенных оснащенных связок и, в частности, инварианты раскрашенных оснащенных зацеплений. Эта теорема играет фундаментальную роль в теории квантовых инвариантов зацеплений и трехмерных многообразий.

Доказательство теоремы 2.2 см. в [Тиг94, глава I]. Идея доказательства состоит в следующем. Можно использовать тензорное произведение и композицию в $\mathcal{T}_C$, чтобы выразить произвольную раскрашенную оснащенную связку через связки, о которых идет речь в пункте (ii) теоремы.

Таким образом, мы можем определить F для всех связок. Хотя всякая связка допускает различные представления такого рода, они могут быть получены друг из друга перестройками Райдемайстера и несколькими другими локальными преобразованиями. Чтобы показать, что функтор F определен корректно, нужно проверить его инвариантность относительно этих перестроек.

2.3. Упражнения

(i) Пусть L — днзъюнктное объединение двух C -раскрашенных оснащенных зацеплений L_1 и L_2 . Покажите, что $F(L) = F(L_1) \otimes F(L_2)$.

(ii) Пусть L — тривиальный узел с оснащением 0, раскрашенный объектом V из C . Покажите, что $F(L) = \dim(V)$.

(iii) Пусть L — C -раскрашенное оснащенное зацепление и пусть l — его компонента. Пусть L' — C -раскрашенное оснащенное зацепление, полученное из L изменением ориентации l на обратную и заменой цвета l двойственным объектом. Покажите, что $F(L') = F(L)$. Выведите отсюда, что $\dim(V^*) = \dim(V)$ для всякого объекта V из C .

3. Модулярные категории

Ленточные категории — слишком общие объекты, чтобы приводить к содержательным инвариантам трехмерных многообразий. Поэтому мы вводим здесь понятие модулярной категории. Примеры модулярных категорий доставляют квантовые группы в корнях из единицы, см. параграф 3 главы VII. В параграфе 4 мы увидим, что модулярные категории порождают инварианты замкнутых ориентированных трехмерных многообразий и зацеплений в таких многообразиях.

3.1. Аддитивные категории и простые объекты

Пусть K — коммутативное кольцо. Мы говорим, что моноидальная категория C является *аддитивной с основным кольцом K* , если множества морфизмов между любыми двумя объектами суть K -модули, композиция и тензорное произведение морфизмов K -билинейны и формула $k \mapsto k \operatorname{id}_1$ определяет изоморфизм K -модулей $K \rightarrow \operatorname{End}(1)$. Нетрудно проверить, что при этом изоморфизме умножение в K соответствует композиции морфизмов. В дальнейшем мы будем отождествлять $\operatorname{End}(1)$ с K с помощью этого изоморфизма.

Объект V аддитивной моноидальной категории C с основным кольцом K называется *простым*, если формула $k \mapsto k \operatorname{id}_V$ определяет изоморфизм K -модулей $K \rightarrow \operatorname{End}(V)$. Например, объект 1 является про-

стым. Простые объекты играют такую же роль, как неприводимые модули в теории модулей. Нетрудно заметить, что объект изоморфный или двойственный простому также является простым. Тензорное произведение простых объектов может и не быть простым; обычно это так в категориях представлений квантовых групп.

По аналогии с теорией модулей, можно пытаться раскладывать объекты аддитивной моноидальной категории $\mathcal{C}$ в прямые суммы простых объектов. Однако, в общем случае $\mathcal{C}$ может не допускать такого разложения. Зато всегда можно разложить эндоморфизмы объектов в суммы морфизмов, проходящих через простые объекты. Так мы приходим к понятию доминирования. Пусть $\{V_i\}_{i \in I}$ — семейство простых объектов $\mathcal{C}$. Объект V из $\mathcal{C}$ доминируется объектами $\{V_i\}_{i \in I}$, если образы спариваний

$$\{(g, f) \mapsto fg : \text{Hom}(V, V_i) \otimes \text{Hom}(V_i, V) \rightarrow \text{End}(V)\}_{i \in I}$$

аддитивно порождают $\text{End}(V)$. Например, если $\mathcal{C}$ допускает прямые суммы и V раскладывается в сумму конечного числа простых объектов $\{V_i\}_{i \in I}$, то V доминируется объектами $\{V_i\}_{i \in I}$.

3.2. Модулярные категории

Модулярной категорией называется пара $(\mathcal{C}, \{V_i\}_{i \in I})$, состоящая из аддитивной ленточной моноидальной категории $\mathcal{C}$ и конечного семейства ее простых объектов $\{V_i\}_{i \in I}$, причем должны выполняться следующие четыре аксиомы.

3.2.1. (Аксиома нормировки)

Существует $0 \in I$, такой что $V_0 = 1$.

3.2.2. (Аксиома двойственности)

Для всякого $i \in I$ существует $i^* \in I$, такой что объект V_{i^*} изоморфен $(V_i)^*$.

3.2.3. (Аксиома доминирования)

Все объекты $\mathcal{C}$ доминируются семейством $\{V_i\}_{i \in I}$.

Чтобы сформулировать последнюю аксиому, нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. При $i, j \in I$ положим

$$S_{i,j} = \text{tr}(cv_{j,v_i} \circ cv_i, v_j) \in \text{End}(1) = K.$$

По лемме 1.4.1 имеем $S_{i,j} = S_{j,i}$. Поэтому $S = (S_{i,j})_{i,j \in I}$ — симметричная квадратная матрица над K . Заметим, что

$$S_{0,i} = S_{i,0} = \text{tr}(\text{id}_{V_i}) = \dim(V_i).$$

У $S_{i,j}$ имеется геометрическая интерпретация: это инвариант F_C раскрашенного оснащенного зацепления (зацепления Холфа), представленного диаграммой на рисунке 3.1.

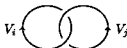


Рис.3.1

3.2.4. (Аксиома невырожденности)

Квадратная матрица $S = (S_{i,j})_{i,j \in I}$ обратима над K .

Поскольку кольцо K коммутативно, аксиома невырожденности означает, что $\det(S)$ обратим над K .

Список аксиом модулярных категорий завершен. Заметьте, что если бы объекты V_i и V_j были изоморфны, то i -я и j -я строки S совпадали бы. По аксиоме невырожденности объекты V_i , V_j с разными i, j не изоморфны. Поэтому для всякого $i \in I$ существует ровно одно $i^* \in I$, такое что V_{i^*} изоморфно $(V_i)^*$. Формула $i \mapsto i^*$ определяет инволюцию в I . Существует ровно один элемент $0 \in I$, такой что $V_0 = 1$ и $0^* = 0$.

Чтобы определить инварианты трехмерных многообразий, ассоциированные с модулярной категорией $(C, \{V_i\}_{i \in I})$ с основным кольцом K , мы предположим, что существует элемент $\mathcal{D} \in K$, такой что

$$\mathcal{D}^2 = \sum_{i \in I} (\dim(V_i))^2.$$

Всякое такое $\mathcal{D} \in K$ называется *рангом* C . Существование ранга — всего лишь техническое условие, которое всегда может быть удовлетворено добавляющим расширением K .

Помимо ранга, нам потребуется другой элемент $\Delta = \Delta_C \in K$, определенный следующим образом. Так как V_i — простой объект, скручивание действует в V_i как $v_i \operatorname{id}_{V_i}$ при некотором $v_i \in K$. Так как скручивание — изоморфизм, v_i обратимо в K . На геометрическом языке роль v_i может быть описана так: когда мы вводим правый виток в оснащение оснащенной связки в $\mathbb{R}^3$, раскрашенной объектом V_i , инвариант F_C этой связки домножается на v_i . Положим

$$\Delta = \sum_{i \in I} v_i^{-1} (\dim(V_i))^2 \in K.$$

Можно показать, что $\mathcal{D}$ и Δ_C обратимы в K .

4. Инварианты трехмерных многообразий

Фиксируем строгую модулярную категорию $(\mathcal{C}, \{V_i\}_{i \in I})$ с основным кольцом K и рангом $\mathcal{D} \in K$. Для всякого замкнутого связного ориентированного трехмерного многообразия M мы определим *топологический инвариант*

$$\tau(M) = \tau_{(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(M) \in K.$$

4.1. Хирургия зацеплений на трехмерной сфере

Конструкция τ основана на редукции к оснащенным зацеплениям в трехмерном евклидовом пространстве. Для этого мы используем хорошо известную в топологии технику хирургии.

Пусть L — оснащенное зацепление на S^3 с m компонентами $L_1, \dots, L_m$ (ср. параграф 1 главы V); зацепление L не предполагается ориентированным или раскрашенным. Пусть U — замкнутая регулярная окрестность L в S^3 . Она состоит из m дизъюнктивных полноторий $U_1, \dots, U_m$, осевые окружности которых суть компоненты L . (Полноторие гомеоморфно $S^1 \times B^2$, где B^2 — замкнутый 2-диск.) Для каждого $n = 1, \dots, m$ мы отождествляем U_n с $S^1 \times B^2$, так что осевая окружность L_n полнотория U_n отождествляется с $S^1 \times 0$, где 0 есть центр B^2 , а заданное оснащение L_n отождествляется с постоянным нормальным векторным полем на $S^1 \times 0$ в $S^1 \times B^2$.

Пусть B^4 — замкнутый 4-шар, ограниченный S^3 . Приклеим к B^4 m копий 2-ручки $B^2 \times B^2$ вдоль полноторий $U_1, \dots, U_m \subset S^3 = \partial B^4$, используя отождествления $U_n = S^1 \times B^2 = \partial B^2 \times B^2$, где $n = 1, \dots, m$. В результате такого приклеивания мы получаем компактное связное ориентируемое четырехмерное многообразие, обозначаемое W_L . Схематическое изображение W_L дано на рисунке 4.1.

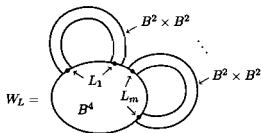


Рис. 4.1

Трехмерное многообразие ∂W_L состоит из $S^3 \setminus \text{Int}(U)$ и m копий полинотория $B^2 \times \partial B^2$, приклеенных к $S^3 \setminus \text{Int}(U)$ по границе. Мы вводим ориентацию на ∂W_L , продолжая правую ориентацию на U . Мы говорим, что (замкнутое связное) ориентированное трехмерное многообразие ∂W_L получено хирургией S^3 вдоль L .

Классическая теорема, доказанная Ликоришем и Уолласом, утверждает, что всякое замкнутое связное ориентированное трехмерное многообразие (рассматриваемое с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) может быть получено с помощью хирургии S^3 вдоль определенного оснащенного зацепления. В сущности, это следует из элементарной теории ручья и теоремы В. А. Рохлина, которая утверждает, что всякое замкнутое ориентированное трехмерное многообразие ограничивает компактное ориентированное гладкое четырехмерное многообразие.

Нам потребуется инвариант $\sigma(L) \in \mathbb{Z}$ оснащенного зацепления $L \subset S^3$, определенный как сигнатура W_L , то есть как сигнатура гомологической формы пересечения

$$H_2(W_L; \mathbb{R}) \times H_2(W_L; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Эта форма соответствует ориентации W_L , определенной в каждой точке ∂W_L касательным вектором, направленным наружу и положительным базисом в касательном пространстве к ∂W_L . Если $L = \emptyset$, то $W_L = B^4$ и $\sigma(L) = 0$.

4.2. Инварианты трехмерных многообразий

Чтобы использовать хирургию вместе с техникой ленточных категорий, мы должны перейти от зацеплений в $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ к зацеплениям в $\mathbb{R}^3$. К счастью, всякое зацепление в S^3 можно продеформировать в $\mathbb{R}^3$, а изотопные зацепления в S^3 порождают изотопные зацепления в $\mathbb{R}^3$. Поэтому мы можем применить инвариант $F = F_C$ к раскрашенным оснащенным зацеплениям в S^3 .

Теперь мы уже можем определить инвариант $\tau(M) = \tau_{(C,D)}(M) \in K$ — инвариант замкнутого связного ориентированного трехмерного многообразия M . Мы представляем M как результат хирургии S^3 вдоль оснащенного зацепления $L \subset S^3$. Инвариант M мы строим из инвариантов L , соответствующих различным раскраскам L объектами $\{V_i\}_{i \in I}$. Пусть $L_1, \dots, L_m$ — компоненты L . Фиксируем произвольную ориентацию L . Обозначим через $\text{col}(L)$ множество всех отображений $\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow I$. В этом множестве $(\text{card}(I))^m$ элементов. Для всякого $\lambda \in \text{col}(L)$ пара (L, λ) есть раскрашенное оснащенное зацепление, в котором цвет i -й

компоненты есть $V_{\lambda(i)}$. По теореме 2.2 мы имеем инвариант $F(L, \lambda) \in K$. Положим

$$\tau(M) = \Delta^{\sigma(L)} \mathcal{D}^{-\sigma(L)-m-1} \sum_{\lambda \in \text{col}(L)} \left(\prod_{n=1}^m \dim V_{\lambda(n)} \right) F(L, \lambda) \in K. \quad (4.1)$$

4.3. Теорема

Элемент $\tau(M)$ является топологическим инвариантом M .

Доказательство этой теоремы см. в [Tur94, глава III]. Идея доказательства следующая. Сначала показывается, что $\tau(M)$ не зависит от выбора ориентации на L , это делается с помощью результата упражнения 2.3 (iii) и аксиомы 3.2.2. Далее нужно показать, что правая часть (4.1) не зависит от выбора L . Известно, что одно и то же трехмерное многообразие может быть получено из 3-сферы хирургией вдоль разных оснащенных зацеплений. Такие зацепления связаны так называемыми перестройками Кирби. Таким образом, нужно проверить инвариантность правой части (4.1) относительно этих перестроек.

Теорема 4.3 отбрасывает глубокую связь между модулярными категориями и топологией трехмерных многообразий. Основная особенность этой связи в том, что чисто алгебраический объект (модулярная категория) порождает топологический инвариант трехмерных многообразий. К моменту написания этой книги не известно способа получения этого инварианта из гомологических или гомотопических конструкций. Инварианты τ , полученные из модулярных категорий, образованных представлениями квантовых групп в хорнах из единицы, называются *квантовыми инвариантами трехмерных многообразий*.

Определение инварианта τ годится для явных вычислений. В частности,

$$\tau(S^1 \times S^2) = 1 \text{ и } \tau(S^3) = \mathcal{D}^{-1}.$$

Эти формулы следуют непосредственно из определений, достаточно заметить, что $S^1 \times S^2$ получается хирургией S^3 вдоль тривиального узла с оснащением 0, а S^3 получается хирургией S^3 вдоль пустого зацепления. Другой пример дают линзовые пространства типа $(n, 1)$ с целым $n \geq 2$. Линзовое пространство $L(n, 1)$ может быть получено из S^3 хирургией вдоль тривиального узла с оснащением n . Из определений следует, что

$$\tau(L(n, 1)) = \Delta \mathcal{D}^{-3} \sum_{i \in I} v_i^n (\dim(V_i))^2.$$

То же самое многообразие с обратной ориентацией $-L(n, 1)$ может быть получено из S^3 хирургией вдоль тривиального узла с оснащением $-n$.

Поэтому

$$\tau(-L(n, 1)) = \Delta^{-1} \mathcal{D}^{-1} \sum_{i \in I} v_i^{-n} (\dim(V_i))^2.$$

4.4. Инварианты зацеплений в трехмерных многообразиях

Зацеплением в трехмерном многообразии M называется конечный набор дизъюнктивных окружностей, гладко вложенных в M . Определения изотопии, оснащения и $\mathcal{C}$ -раскраски для зацеплений в $\mathbb{R}^3$ прямо переносятся на зацепления в M .

Определенный выше инвариант трехмерных многообразий обобщается на замкнутые ориентированные трехмерные многообразия с находящимися внутри $\mathcal{C}$ -раскрашенными оснащенными (ориентированными) зацеплениями. Пусть M — замкнутое связное ориентированное трехмерное многообразие. Пусть $\Omega \subset M$ — $\mathcal{C}$ -раскрашенное оснащенное зацепление. Представим M как результат хирургии S^3 вдоль оснащенного зацепления L с компонентами $L_1, \dots, L_m$. Фиксируем ориентацию L . Применяя к Ω изотопию, мы можем деформировать его в $S^3 \setminus U \subset M$, где U есть замкнутая регулярная окрестность L в S^3 . Поэтому мы можем считать, что $\Omega \subset S^3 \setminus U$. Для всякого $\lambda \in \text{col}(L)$ мы строим $\mathcal{C}$ -раскрашенное зацепление $(L, \lambda) \cup \Omega$ в S^3 . Положим

$$\tau(M, \Omega) = \Delta^{\sigma(L)} \mathcal{D}^{-\sigma(L)-m-1} \sum_{\lambda \in \text{col}(L)} \left(\prod_{n=1}^m \dim V_{\lambda(n)} \right) F((L, \lambda) \cup \Omega) \in K.$$

4.5. Теорема

Элемент $\tau(M, \Omega)$ является топологическим инвариантом пары (M, Ω) .

Из этой теоремы в частности следует, что $\tau(M, \Omega)$ является изотопическим инвариантом Ω . Она содержит теорему 4.3 как частный случай $\Omega = \emptyset$.

Инвариант $\tau(M, \Omega)$ удовлетворяет следующему мультипликативному закону:

$$\tau(M_1 \# M_2, \Omega_1 \amalg \Omega_2) = \mathcal{D} \tau(M_1, \Omega_1) \tau(M_2, \Omega_2),$$

где Ω_1, Ω_2 — $\mathcal{C}$ -раскрашенные оснащенные зацепления на замкнутых связных ориентируемых трехмерных многообразиях M_1, M_2 , соответственно. Заметим, что инвариант $M \mapsto \mathcal{D} \tau(M)$ мультипликативен по отношению к связной сумме.

Если $M = S^3$, то

$$\tau(S^3, \Omega) = \mathcal{D}^{-1}F(\Omega)$$

(мы можем взять $L = \emptyset$, чтобы вычислить $\tau(S^3, \Omega)$). Поэтому инвариант $\tau_{(C, \mathcal{D})}$ обобщает инвариант F_C раскрашенных оснащенных зацеплений в евклидовом пространстве, определенный в параграфе 2. Читатель должен быть предупрежден, что это обобщение имеет место лишь тогда, когда C — модулярная категория.

Инвариант $\tau_{(C, \mathcal{D})}$ допускает расширение на трехмерные кобордизмы (возможно, с раскрашенными оснащенными связками внутри). Соответствующий инвариант 3-кобордизма есть не элемент K , а K -гомоморфизм между проективными K -модулями, ассоциированными с основаниями кобордизма. Эти модули и гомоморфизмы образуют так называемую топологическую квантовую теорию поля (TQFT) в размерности 3, см. [Tur94].

ГЛАВА VII

Теория представлений $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$

В этой главе мы возвращаемся к алгебре Хопфа $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, рассмотренной ранее в главе IV, и показываем, каким образом, в случае, когда q есть корень из единицы, модули над подходящей реализацией $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ порождают модулярную категорию в смысле параграфа 3 главы VI.

В начале мы описываем представления $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ при общем q .

Мы снова обозначаем через $\mathfrak{h}$ подалгебру Ли алгебры $\mathfrak{sl}(N+1)$, порожденную $H_1, \dots, H_N$. Пусть, кроме того, $X \subset \mathfrak{h}^*$ — решетка линейных форм, принимающих целые значения на $H_1, \dots, H_N$.

1. Модули старшего веса

Как и в параграфах 2, 3 главы IV, мы считаем, что q — переменная и основное поле есть $\mathbb{C}(q)$. Пусть M — конечномерный $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ -модуль. Для $\lambda \in X$ и $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \in (\mathbb{Z}/2)^N$ положим

$$M_{\lambda, \epsilon} = \{v \in M \mid K_i v = (-1)^{\epsilon_i} q^{\lambda(H_i)} v \text{ для всех } i = 1, \dots, N\}.$$

Пары (λ, ϵ) , для которых $M_{\lambda, \epsilon} \neq \{0\}$, называются *весами*. Нетрудно видеть, что M есть прямая сумма ненулевых весовых подпространств $M_{\lambda, \epsilon}$ и что элементы E_i, F_i действуют на M нильпотентно.

Ненулевой элемент v из M называется *вектором старшего веса*, если он принадлежит одному из подпространств $M_{\lambda, \epsilon}$ и если $E_i v = 0$ для всех $i = 1, \dots, N$.

Модуль M называется *модулем старшего веса*, если он порожден вектором старшего веса.

Для $\lambda \in X$ и $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \in (\mathbb{Z}/2)^N$ существует универсальный модуль старшего веса $M(\lambda, \epsilon)$ со старшим весом (λ, ϵ) , который называется *модулем Верма*, и строится следующим образом. Возьмем подалгебру U_+ в $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$, порожденную элементами E_i и $K_i^{\pm 1}$ ($i = 1, \dots, N$), — она была построена в параграфе 2 главы IV. Обозначим

через $1_{\lambda, \epsilon}$ одномерный U_+ -модуль с базисом v_+ , таким что

$$E_i v_+ = 0 \text{ и } K_i v_+ = (-1)^{\epsilon_i} q^{\lambda(H_i)} v_+ \text{ для всех } i = 1, \dots, N.$$

Модуль Верма — это индуцированный модуль

$$M(\lambda, \epsilon) = U_q \mathfrak{sl}(N+1) \otimes_{U_+} 1_{\lambda, \epsilon},$$

являющийся прямой суммой конечномерных весовых подпространств $M(\lambda, \epsilon)_{\mu, \epsilon}$.

Модуль $M(\lambda, \epsilon)$ имеет единственный простой фактор $L(\lambda, \epsilon)$, являющийся модулем старшего веса со старшим весом (λ, ϵ) . Модуль $L(\lambda, \epsilon)$ конечномерен тогда и только тогда, когда λ — доминантный вес, то есть $\lambda(H_i) \in \mathbb{N}$ для всех $i = 1, \dots, N$.

При $\lambda = 0$ модуль $L(0, \epsilon)$ также обозначается L_ϵ . Этот модуль одномерен (E_i и F_i действуют как 0, а K_i — как $(-1)^{\epsilon_i}$). Для всякого $\lambda \in X$ имеется изоморфизм $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ -модулей $L(\lambda, \epsilon) \cong L(\lambda, 0) \otimes L_\epsilon$. Это обстоятельство дает нам возможность свести изучение $L(\lambda, \epsilon)$ к изучению модуля $L(\lambda, 0)$, обозначаемого также $L(\lambda)$.

Пусть $M = \bigoplus_{\lambda \in X} M_{\lambda, 0}$ — конечномерный $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ -модуль, веса которого имеют вид $(\lambda, 0)$. Характер M есть элемент групповой алгебры X , определяющийся как

$$\text{Ch}(M) = \sum (\dim M_{\lambda, 0}) e^\lambda \in \mathbb{Z}[X].$$

Через e^λ мы обозначаем образующую $\mathbb{Z}[X]$, соответствующую $\lambda \in X$; в $\mathbb{Z}[X]$ имеем $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$.

1.1. Теорема

(i) Всякий конечномерный простой $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ -модуль имеет вид $L(\lambda, \epsilon)$, где λ — доминантный вес и $\epsilon \in (\mathbb{Z}/2)^N$.

(ii) Все конечномерные $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ -модули — полупростые.

(iii) Формула характера $\text{Ch}(L(\lambda))$ совпадает с формулой характера простого $\mathfrak{sl}(N+1)$ -модуля, параметризованного тем же старшим весом (формула Г. Вейля).

(iv) Кратность простого модуля $L(\nu)$ в разложении тензорного произведения двух простых модулей $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ такая же, как и для разложения соответствующих $\mathfrak{sl}(N+1)$ -модулей.

Эта теорема была доказана Люстигом (см. [Lus88] и [Lus90]) и Россо (см. [Ros88], [Ros90]). Мы сделаем некоторые комментарии по поводу

доказательства. Сначала, для доказательства полной приводимости, подобно доказательству в классической ситуации $\mathfrak{sl}(2)$, рассматривается случай $U_q\mathfrak{sl}(2)$ с использованием центрального элемента

$$\frac{Kq + K^{-1}q^{-1}}{(q - q^{-1})^2} + FE.$$

Интересно отметить, что пункты (ii) и (iii) связаны между собой: рассматривая короткие точные последовательности вида

$$0 \rightarrow L(\lambda) \rightarrow M \rightarrow L(\mu) \rightarrow 0$$

с неразложимым M , а также двойственные точные последовательности, можно доказать, что (ii) выполняется тогда и только тогда, когда все конечномерные $U_q\mathfrak{sl}(N+1)$ -модули старшего веса являются простыми (см. [Ros90]). Идея состоит в том, чтобы вычислить характер конечномерного модуля старшего веса: можно вывести явную формулу (формулу Вейля) и этим показать, что этот модуль должен быть единственным простым модулем старшего веса с таким старшим весом.

Есть несколько способов вывести формулу характера модуля M со старшим весом λ . Например, можно использовать ряды Жордана–Гельдера, чтобы показать, что $\text{Ch}(M)$ есть линейная комбинация с целыми коэффициентами характеров вида $\text{Ch}(M(\mu))$. Из аналога теоремы Хариш–Чандры для инфинитезимальных характеров можно вывести, что возможные веса μ должны удовлетворять двум условиям:

(i) $\mu \leq \lambda$,

(ii) $\mu + \rho$ лежит в орбите $\lambda + \rho$ действия группы Вейля W .

(Как обычно, тут ρ — полусумма положительных корней.) Далее вычисляется $\text{Ch}(M(\mu))$ с помощью, например, теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта (см. параграф 3 главы IV). Затем, используя действие W на множестве весов модуля M , выводится искомая формула для $\text{Ch}(M)$. Это — классическая последовательность вывода, см. обзор Хамфри в [Hum78]. Вышеупомянутый аналог теоремы Хариш–Чандры может быть доказан, используя ад-инвариантную билинейную форму на $U_q\mathfrak{sl}(N+1)$ (3 главы IV), чтобы сравнить центр $U_q\mathfrak{sl}(N+1)$ с ад-инвариантными линейными формами, полученными из «марковских следов» (или квантовых следов) неприводимых конечномерных представлений $x \mapsto \text{tr}_M(K_{2\rho}x)$, где $x \in U_q\mathfrak{sl}(N+1)$. Другой путь — использовать обобщенный элемент Казимира, построенный по R -матрице (см. [Lus93]).

В параграфе 3 главы IV определялась подалгебра V_- в $U_q\mathfrak{sl}(N+1)$, порожденная элементами $F_1, \dots, F_N$. Пусть

$$\beta = \sum_{i=1}^N m_i \alpha_i, \text{ где } m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N};$$

обозначим через V_{β}^{-} подпространство однородных элементов степени $-\beta$ в V_{-} .

Пусть $\lambda \in X$. Так как $L(\lambda)$ порожден вектором старшего веса v_{+} , имеется сюръективное линейное отображение $V_{-} \rightarrow L(\lambda)$, задаваемое как $x \mapsto xv_{+}$. Из формулы характера получаем следующее предложение.

1.2. Предложение

Пусть $\beta = \sum_i m_i \alpha_i$, где $m_i \in \mathbb{N}$. Пусть λ — доминантный вес, такой что $\lambda(H_i) \geq m_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Тогда линейное отображение $V_{\beta}^{-} \rightarrow L(\lambda)$, задаваемое как $x \mapsto xv_{+}$, инъективно.

1.3. Замечание

Из предложения 1.2 можно вывести другое доказательство невырожденности хопфова спаривания $\varphi : U_{+} \times U_{-} \rightarrow \mathbb{C}(q)$ из параграфа 3.7 главы IV. Достаточно показать, что сужение φ на $V_{+} \times V_{-}$ невырождено. Пусть $f \in V_{-}$ такое, что $\varphi(x, f) = 0$ для всех $x \in V_{+}$. Так как φ градуировано, можно считать, что f однородно и его степень $-\beta$ максимальна по отношению к стандартному частичному упорядочению на решетке $\bigoplus \mathbb{Z}\alpha_i$. Из максимальной $-\beta$ выводится

$$\Delta f = f \otimes K_{-\beta} + 1 \otimes f,$$

где $K_{-\beta} = K_1^{-m_1} \dots K_N^{-m_N}$ при $\beta = \sum_i m_i \alpha_i$. Используя вторую формулу теоремы 2.1 (iii) главы III, можно сделать вывод, что f коммутирует со всеми элементами V_{+} . Следовательно, для всякого простого модуля $L(\lambda)$ вектор fv_{+} — либо ноль, либо вектор старшего веса. Вторая возможность исключается тем фактом, что fv_{+} тогда порождал бы нетривиальный собственный подмодуль в $L(\lambda)$. Поэтому fv_{+} — всегда ноль. Взяв λ как в предложении 1.2, получаем противоречие.

2. Квантовая теория инвариантов

Пусть (H, R) — косовая алгебра Хопфа. Как было объяснено в параграфе 4 главы II, универсальная R -матрица R позволяет определить сплетение на любом H -модуле. Вспомним, что если $\rho : H \rightarrow \text{End}(V)$ — некоторое представление, то $c_V = \tau_{V,V}(\rho \otimes \rho(R))$ — соответствующее сплетение. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\rho^{(n)}$ индуцированное представление H на $V^{\otimes n}$. Оно определяется как

$$\rho^{(n)} = \rho^{\otimes n} \circ \Delta^{(n)},$$

где

$$\Delta^{(2)} = \Delta, \Delta^{(3)} = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta \text{ и т. д.}$$

Для $1 \leq i \leq n-1$ определим автоморфизм

$$c_i = \text{id}^{\otimes(i-1)} \otimes c_V \otimes \text{id}^{\otimes(n-i-1)}.$$

Тогда набор $c_1, \dots, c_{n-1}$ определяет представление группы $\text{kos } B_n$ на $V^{\otimes n}$. Для всех $x \in H$ и всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$ имеем

$$c_i \rho^{(n)}(x) = \rho^{(n)}(x) c_i.$$

Это значит, что образ B_n в $\text{End}(V^{\otimes n})$ содержится в яоммутанте образа H .

Теперь мы вернемся к $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$. Мы знаем, что эта алгебра Хопфа является почти косовой, в том смысле, что ее универсальная R -матрица R лежит в подходящем пополнении $U_q \mathfrak{sl}(N+1) \otimes U_q \mathfrak{sl}(N+1)$. Тем не менее, образ этой R -матрицы в любом конечномерном представлении хорошо определен. Явная формула для R может быть получена введением подходящих логарифмов, образующих K_i . Действительно, поскольку E_i и F_i действуют нильпотентно, для данного конечномерного представления достаточно взять формулу, полученную в случае корня из единицы при достаточно большом порядке корня, и подставить туда общее q .

Пусть ω_1 — доминантный вес, такой что $\omega_1(H_1) = 1$ и $\omega_1(H_i) = 0$ при $i > 2$. Неприводимое представление $L(\omega_1)$ $(N+1)$ -мерно и является «деформацией» фундаментального представления $\mathfrak{sl}(N+1)$. В действительности, можно выбрать такой базис в $L(\omega_1)$, что образующие E_i и F_i будут представлены элементарными матрицами $E_{i,i+1}$ и $E_{i+1,i}$. Действие R -матрицы в $L(\omega_1)$ легко вычисляется. Оно описывается следующей формулой:

$$c_{L(\omega_1)} = q \sum_{i=1}^{N+1} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N+1 \\ i \neq j}} E_{ij} \otimes E_{ji} + (q - q^{-1}) \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} E_{jj} \otimes E_{ii}.$$

Отсюда получают операторы $c_1, \dots, c_{n-1}$, действующие на $L(\omega_1)^{\otimes n}$.

2.1. Определение

Алгеброй Гекке $H_n(q^2)$ называется $\mathbb{C}(q)$ -алгебра, порожденная $(n-1)$ элементами $g_1, \dots, g_{n-1}$, удовлетворяющими соотношениям для kos (2.1)–(2.2) главы 1 и дополнительным соотношениям $g_i^2 = (q^2 - 1)g_i + q^2$ при всех i .

Следующий результат принадлежит Джимбо [Jim85].

2.2. Теорема

(i) Положим $g_i = qc_i$ для $i = 1, \dots, n-1$. Тогда $g_1, \dots, g_{n-1}$ задают представление алгебры Гекке $H_n(q^2)$ в $L(\omega_1)^{\otimes n}$.

(ii) Образы $H_n(q^2)$ и $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ в $\text{End}(L(\omega_1)^{\otimes n})$ являются коммутантами друг друга.

Мы напомним идею доказательства. Пункт (i) получается прямым вычислением. Чтобы доказать (ii), надо заметить, что алгебра $H_n(q^2)$ является полупростой $\mathbb{C}(q)$ -алгеброй размерности $n!$. Хороший способ понять ее структуру — воспользоваться изоморфизмом

$$H_{n-1}(q^2) \otimes_{H_{n-2}(q^2)} H_{n-1}(q^2) \oplus H_{n-1}(q^2) \longrightarrow H_n(q^2),$$

определяемым как $(x \otimes y, z) \mapsto xg_{n-1}y + z$. Этот изоморфизм позволяет нам записать всякий элемент как линейную комбинацию «канонических форм», в которой последняя образующая появляется максимум один раз.

Мы будем рассматривать только случай $N > n$. Мы уже знаем, что $L(\omega_1)^{\otimes n}$ есть полупростой $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ -модуль. Он раскладывается следующим образом:

$$L(\omega_1)^{\otimes n} = \bigoplus L(\lambda) \otimes P_\lambda,$$

где P_λ можно рассматривать как подпространство $L(\omega_1)^{\otimes n}$, состоящее из векторов старшего веса со старшим весом λ . Более того, веса λ , появляющиеся в этом разложении и кратности $\dim P_\lambda$, — такие же, как и в классическом случае, т. е. такие же, как для $U \mathfrak{sl}(N+1)$, действующего на $(\mathbb{C}^{N+1})^{\otimes n}$.

Классическая теория инвариантов утверждает, что образ групповой алгебры симметрической группы S_n , переставляющий сомножители, есть в точности коммутант $U \mathfrak{sl}(N+1)$ в $\text{End}((\mathbb{C}^{N+1})^{\otimes n})$. Из предположения, что $N > n$, следует, что этот образ изоморфен групповой алгебре, а также, что пространства P_λ являются простыми S_n -модулями и их множество в точности совпадает с множеством всех простых модулей S_n . Отсюда следует, что $\sum_\lambda (\dim P_\lambda)^2 = n!$.

Возвращаясь к квантовому случаю, заметим, что алгебра Гекке действует на каждом подпространстве P_λ автоморфизмами c_i . По теореме о двойном коммутанте, каждое P_λ является неприводимым представлением коммутанта $U_q \mathfrak{sl}(N+1)$ в $L(\omega_1)^{\otimes n}$. Если бы образ $H_n(q^2)$ был строго меньше, некоторые из представлений P_λ разлагались бы на меньшие неприводимые компоненты и размерность образа $H_n(q^2)$, которая является суммой квадратов размерностей этих неприводимых компонент, была бы строго меньше $n!$.

Тем самым, осталось только доказать, что $c_1, \dots, c_{n-1}$ порождают $n!$ -мерную подалгебру в $\text{End}(L(\omega_1)^{\otimes n})$. Это сводится к тому, чтобы показать, что «явонические формы», построенные по автоморфизмам g_i , линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$. Это, конечно, справедливо, поскольку их специализации при $q = 1$ линейно независимы.

3. Случай корней из единицы

Есть несколько точек зрения на определение квантовых групп в корне из единицы, ведущих к очень разным теориям представлений. Хотя в основном мы будем использовать в применении к трехмерным многообразиям последнюю точку зрения из описанных ниже, мы кратко упомянем и другие, представляющие самостоятельный интерес.

Во-первых, можно просто рассмотреть алгебру Хопфа U_ε из параграфа 4 главы IV, где ε — корень из единицы. Это бесконечномерная алгебра Хопфа с большим центром. (Как правило, если l — порядок ε , l -е степени аналогов корневых векторов и K_i^2 лежат в центре.) Размерности ее неприводимых конечномерных представлений ограничены размерностью $l^{N(N+1)/2}$. Эту алгебру активно изучали Кончини, Кац и Прочези (см. [СК90], [СКР92]), которые нашли очень интересные связи с теорией групп Пуассона — Ли.

Вторая точка зрения состоит в том, чтобы работать сначала над основным кольцом $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ вместо $\mathbb{C}(q)$ и добавить новые образующие $[K_i; 0]$, такие что

$$K_i - K_i^{-1} = (q - q^{-1})[K_i; 0],$$

и q -аналоги разделенных степеней, то есть элементы $E_i^{(n)}, F_i^{(n)}$ (где $1 \leq i \leq N$), играющие роль $\frac{E_i^n}{[n]!}$ и $\frac{F_i^n}{[n]!}$. (Этот подход аналогичен $\mathbb{Z}$ -форме $Usl(N+1)$ Костанта). Неприводимые модули $L(\lambda)$ тоже имеют такую $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -форму. После этого нужно положить q равным ε — примитивному корню из единицы степени, скажем, l . Назовем получившуюся алгебру Хопфа $U_\varepsilon^{\text{res}}$. В этой ситуации мы получаем, что $E_i^l = 0$, $F_i^l = 0$, но $E_i^{(l)}$ и $F_i^{(l)}$ выживают. Этот подход был предложен Люстигом (см. [Lus88], [Lus90], [Lus93]), который построил «отображение Фробениуса характеристики 0» со значениями в обычной обертывающей алгебре $Usl(N+1)$ и обнаружил, в том случае, когда l — простое число, наличие фундаментальных связей с теорией алгебраических групп характеристики l . Заметим, что модули $L(\lambda)$ также могут быть специ-

ализированы, но, вообще говоря, их специализации уже не являются простыми модулями.

Третья точка зрения — та, которую мы в основном здесь и будем использовать. А именно, мы берем конечномерную алгебру Хопфа u_ε из параграфа 4 главы IV. Это не что иное, как подалгебра $U_\varepsilon^{\text{res}}$, порожденная E_i, F_i, K_i при $1 \leq i \leq N$. Теория представлений этой алгебры намного сложнее, чем теория представлений в общем случае. Она оказывается важным ингредиентом для построения инвариантов трехмерных многообразий. Вот два важных факта, касающихся теорий представлений u_ε .

(i) Конечномерные u_ε -модули уже не являются полупростыми. Простой способ увидеть это — заметить, что квадрат антипода является нетривиальным автоморфизмом u_ε ; по теореме Ларсона и Рэдфорда [LR88] утверждает, что антипод полупростой конечномерной алгебры Хопфа инволютивен.

(ii) Существует лишь конечное число конечномерных простых u_ε -модулей. Они параметризованы доминантными весами λ , удовлетворяющими

$$0 \leq \lambda(H_i) \leq l \text{ для всех } i = 1, \dots, N,$$

где l — порядок ε . Соответствующий простой модуль $\bar{L}(\lambda)$ является модулем старшего веса со старшим весом λ , однако он меньше, чем простой модуль с тем же старшим весом в общем случае (в том смысле, что кратности весов меньше). Эти модули являются, на самом деле, модулями над алгеброй разделенных степеней $U_\varepsilon^{\text{res}}$, причем $E_i^{(l)}$ и $F_i^{(l)}$ действуют как 0. Как уже упоминалось выше, есть красивый, придуманный Люстигом [Lus90] способ получения $\bar{L}(\lambda)$ из $L(\lambda)$ с помощью специализации и факторизации.

Информация о характере $\bar{L}(\lambda)$ в терминах многочленов Кашива — Люстига была получена лишь совсем недавно Кашива и Люстигом [KL93] при доказательстве некоторых гипотез Люстига.

Ввиду приложений к инвариантам трехмерных многообразий важно обсудить категорные аспекты представлений u_ε и $U_\varepsilon^{\text{res}}$ и, в особенности, описать модулярную категорию в смысле параграфа 3 главы VI.

В дальнейшем мы будем предполагать, что l взаимно просто с $N+1$ (этого ограничения можно избежать, если лениво модифицировать определение u_ε , но мы не хотим углубляться в технические детали).

3.1. Предложение

Категория $\mathcal{C}$ конечномерных представлений u_ε является ленточной категорией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из параграфа 4 главы IV мы уже знаем, что u_ϵ является косовой алгеброй Хопфа. Поэтому $\mathcal{C}$ — косовая моноидальная категория.

Общая теория косовых алгебр Хопфа (см. параграф 4 главы II) дает нам элемент $u \in u_\epsilon$, такой что $S^2(x) = uxu^{-1}$ для всех $x \in u_\epsilon$ и

$$\Delta u = (R_{21}R)^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(R_{21}R)^{-1}.$$

Элемент u задается как $u = \sum_i S(t_i)s_i$, если универсальная R -матрица имеет вид $R = \sum_i s_i \otimes t_i$.

Далее, если $\varphi: u_\epsilon \rightarrow \text{End}(V)$ — конечномерное представление, то

$$\rho(u^{-1}): V \rightarrow V$$

удовлетворяет формуле для скручивания (1.3) из главы VI. К сожалению, этот гомоморфизм не является морфизмом в категории $\mathcal{C}$, так как u^{-1} не лежит в центре u_ϵ . Заметим, однако, что для всех $x \in u_\epsilon$ имеет место

$$S^2(x) = K^{-1}xK \text{ и } \Delta K = K \otimes K,$$

где K определяется следующим образом: запишем сумму положительных корней, как $\sum_{i=1}^N m_i \alpha_i$; тогда

$$K = K_1^{m_1} \dots K_N^{m_N}. \quad (3.1)$$

Положим $v = Ku^{-1} = u^{-1}K$. Ясно, что v лежит в центре u_ϵ и удовлетворяет соотношению $\Delta v = (R_{21}R)(v \otimes v) = (v \otimes v)(R_{21}R)$. Отсюда вытекает, что для всякого представления (V, φ) автоморфизм $\theta_V = \varphi(v)$ определяет скручивание в $\mathcal{C}$.

Совместимость скручивания и двойственности, которая потребована в определении ленточной категории, следует из равенства $S(v) = v$, откуда вытекает, что θ_V является обычным транспонированием θ_V . Чтобы доказать, что $S(v) = v$, достаточно проверить, что $uS(u^{-1}) = K^2$. Прямым вычислением показывается, что элемент $uS(u^{-1})$ является групповым (т.е. удовлетворяет формуле (1.4) главы II), и что $uS(u^{-1})K^{-2}$ лежит в центре. Поэтому достаточно проверить, что единственный групповой центральный элемент есть 1. Если записать такой элемент в базисе Пуанкаре–Биркгофа–Витта для u_ϵ , полученном из треугольного разложения, становится видно, что такой элемент лежит в подалгебре u_ϵ^0 , порожденной элементами $K_1, \dots, K_N$. Так как u_ϵ^0 изоморфна групповой алгебре для $(\mathbb{Z}/l)^N$, все групповые элементы являются произведениями элементов K_i , и единственное центральное произведение есть 1. ■

Теперь мы можем рассмотреть следы и размерности в $\mathcal{C}$, как они определены в параграфе I главы VI. Имеет место следующая формула.

3.2. Предложение

Пусть (V, φ) — конечномерное представление u_ε и $f : V \rightarrow V$ — морфизм в $\mathcal{C}$, т. е. u_ε -линейное отображение. Тогда

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{Tr}(\varphi(K)f),$$

где K задается формулой (3.1) и $\mathrm{Tr} : \mathrm{End} V \rightarrow \mathbb{C}$ обозначает стандартное отображение следа (нормированное условием $\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = \dim_{\mathbb{C}} V$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По определению следа в $\mathcal{C}$, имеем

$$\mathrm{tr}(f) = d_V e_{V, V^*}((\theta_V f) \otimes \mathrm{id}_{V^*}) b_V.$$

Фиксируем базис $(e_1, \dots, e_r)$ в V с двойственным базисом $(e_1^*, \dots, e_r^*)$. Тогда $b_V(1) = \sum_i e_i \otimes e_i^*$ к $d_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$ есть каноническое спаривание. Стандартный след эндоморфизма g задается формулой $\mathrm{Tr}(g) = \sum_i \langle e_i^*, g e_i \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(f) &= \sum_i \langle {}^t \varphi(S(t_j)) e_i^*, \varphi(s_j) \varphi(v) f e_i \rangle = \\ &= \sum_{i,j} \langle e_j^*, \varphi(S(t_j) s_j v) f e_i \rangle. \end{aligned}$$

Но $(\sum_j S(t_j) s_j) v = uv = K$, поэтому предложение доказано. ■

Теперь мы выделим простые подмодули $\bar{I}(\lambda)$ в $\mathcal{C}$, для которых выполнено $\sum_{i=1}^N \lambda(H_i) < l$. Обозначим это (конечное) множество доминантных весов через I . Для всякого $\lambda \in I$ положим

$$I(\lambda) = \bar{I}(\lambda).$$

Модули $(I(\lambda))_{\lambda \in I}$ обладают тем свойством, что их характер все еще задается формулой Вейля. С учетом предложения 3.2 отсюда получается явная формула для их размерностей, а именно

$$\dim I(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\varepsilon^{(\lambda + \rho, \alpha)} - \varepsilon^{(-\lambda + \rho, \alpha)}}{\varepsilon^{(\rho, \alpha)} - \varepsilon^{-(\rho, \alpha)}},$$

где ρ — полусумма положительных корней.

Немедленно проверяется, что $\bar{L}(0)$ есть тривиальное представление и что двойственное к $\bar{L}(\lambda)$ изоморфно $\bar{L}(-w_0(\lambda))$, где w_0 — перестановка, посылающая простой корень α_i в α_{N+1-i} (где $1 \leq i \leq N$).

Для того, чтобы получить модулярную категорию в смысле параграфа 3 главы VI, необходимо сделать кое-что еще. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть моноидальную подкатегорию в $\mathcal{C}$, порожденную $(I(\lambda))_{\lambda \in I}$, и взять подходящий фактор (переход к такому фактору необходим, так как тензорные произведения $I(\lambda)$ не являются прямыми суммами $I(\mu)$: пужно выкинуть «плохую часть» в тензорных произведениях). Подходящий способ это сделать — работать в определенной категории модулей над $U_\varepsilon^{\text{res}}, C'$ (а именно, таких модулей V , что V и его двойственный имеют фильтрации, последовательные факторы которых являются специализациями $L(\lambda)$), и использовать следующий замечательный результат, принадлежащий Андерсену [And92]. (Для $N = 1$ он был установлен Решетихиным и Тураевым [RT91].)

3.3. Теорема

Для всех $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in I$ тензорное произведение $I(\lambda_1) \otimes \dots \otimes I(\lambda_r)$ разбивается в прямую сумму модулей $I(\lambda)$, где $\lambda \in I$ и модуля Z , такого что $\text{tr}(f) = 0$ для всех $f \in \text{End}_{C'}(Z)$.

Пусть теперь $\tilde{\mathcal{M}}$ — моноидальная подкатегория в C' , порожденная объектами $I(\lambda)$, где $\lambda \in I$. Объекты в $\tilde{\mathcal{M}}$ — подмодули тензорных произведений $I(\lambda)$, морфизмы — морфизмы в C' .

Чтобы обойти отсутствие полупростоты, мы образуем фактор-категорию категории $\tilde{\mathcal{M}}$, которую обозначим через $\mathcal{M}$. Для этого положим, что морфизм $f : A \rightarrow B$ между двумя объектами A, B из $\tilde{\mathcal{M}}$ является нулевым в $\mathcal{M}$, если $\text{tr}(gf) = 0$ для всех морфизмов $g : B \rightarrow A$. В частности, если A — такой объект в $\tilde{\mathcal{M}}$, что $f = 0$ в $\mathcal{M}$ для всякого объекта B и всякого морфизма $f \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{M}}}(A, B)$, то A изоморфен нулевому объекту в $\mathcal{M}$. Это ровно так для объектов Z , появляющихся в формулировке теоремы 3.3.

Получившаяся категория $\mathcal{M}$ есть модулярная категория по отношению к семейству объектов $(I(\lambda))_{\lambda \in I}$. Аксиома доминирования 3.2.3 главы VI выполнена, поскольку объекты в $\mathcal{M}$ — прямые суммы $(I(\lambda))_{\lambda \in I}$; аксиома невырожденности (обратимость матрицы S параграфа 3.2 главы VI) следует из вычислений характеров, проделанных Кацем и Петерсоном (ср. [TW93]). Применяя к категории $\mathcal{M}$ конструкции из параграфа 4 главы VI, мы получаем числовые инварианты трехмерных многообразий и зацеплений на трехмерных многообразиях.

4. Квантовые группы с формальным параметром

Почти все содержание глав IV и VII справедливо для произвольной комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Такие алгебры Ли были проквантованы Дринфельдом над алгеброй комплексных формальных рядов $\mathbb{C}[[\hbar]]$ (см. [Dri85], [Dri87]). В последующих конструкциях все $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -модули имеют вид:

$$\tilde{V} = V[[\hbar]] = \left\{ \sum_{m \geq 0} v_m \hbar^m \mid v_0, v_1, v_2, \dots \in V \right\},$$

где V — комплексное векторное пространство. Мы определяем топологическое тензорное произведение на таких $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -модулях, как

$$\tilde{V} \hat{\otimes} \tilde{W} = \widetilde{V \otimes W}.$$

Из полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ Дринфельд сконструировал $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -алгебру $U_{\hbar}\mathfrak{g}$ со следующими свойствами.

- (i) Как $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -модуль, $U_{\hbar}\mathfrak{g} = U_{\mathfrak{g}}[[\hbar]]$.
- (ii) Есть отображения $\Delta : U_{\hbar}\mathfrak{g} \rightarrow U_{\hbar}\mathfrak{g} \hat{\otimes} U_{\hbar}\mathfrak{g}$, $\epsilon : U_{\hbar}\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}[[\hbar]]$ и $S : U_{\hbar}\mathfrak{g} \rightarrow U_{\hbar}\mathfrak{g}$, превращающие $U_{\hbar}\mathfrak{g}$ в алгебру Хопфа.
- (iii) Как алгебры Хопфа, $U_{\hbar}\mathfrak{g}/\hbar U_{\hbar}\mathfrak{g} = U_{\mathfrak{g}}$.
- (iv) Есть универсальная R -матрица $R_{\hbar} \in U_{\hbar}\mathfrak{g} \hat{\otimes} U_{\hbar}\mathfrak{g}$, такая что $R_{\hbar} \equiv 1 \otimes 1$ по модулю $\hbar$.
- (v) Всякий конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль V продолжается единственным образом до $U_{\hbar}\mathfrak{g}$ -модуля $\tilde{V}$ вида $V[[\hbar]]$, такого что $\tilde{V}/\hbar\tilde{V} = V$ в смысле $\mathfrak{g}$ -модулей.

Топологическая алгебра Хопфа $U_{\hbar}\mathfrak{g}$ тесно связана с квантовыми группами, построенными в главе IV, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N+1)$. Полагая $q = \exp(\frac{1}{2}\hbar)$, мы можем рассматривать $U_{\hbar}\mathfrak{sl}(N+1)$ как A -модуль, где $A = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$. В параграфе 4 главы IV мы ввели A -подалгебру Хопфа U_A в $U_{\hbar}\mathfrak{sl}(N+1)$, чтобы получить возможность специализировать параметр q . Нетрудно проверить, что U_A есть A -подалгебра Хопфа в $U_{\hbar}\mathfrak{sl}(N+1)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — снова произвольная полупростая алгебра Ли. Категория $\mathcal{C}_{\hbar}$, объекты которой — $U_{\hbar}\mathfrak{g}$ -модули $\tilde{V}$, где V есть конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль, является косовой категорией с тензорным произведением, даваемым топологическим тензорным произведением $\hat{\otimes}$, определенным выше, и со сплетением, индуцированным универсальной R -матрицей $R_{\hbar}$. Единичный объект — это тривиальный $U_{\hbar}\mathfrak{g}$ -модуль $\mathbb{C}[[\hbar]]$. Оказывается,

что категория C_h имеет скручивание и что это ленточная категория в смысле параграфа 1 главы VI.

Последнее обстоятельство дает нам возможность построить «квантовый инвариант» оснащенных ориентированных зацеплений для всякой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и всякого конечномерного $\mathfrak{g}$ -модуля V следующим образом. Мы раскрашиваем компоненты оснащенной ориентированной связки объектом $\tilde{V}$ из C_h и продолжаем, как в параграфе 2 главы VI. Таким образом, мы получаем функтор $F_{\mathfrak{g},V} : T_0 \rightarrow C_h$, где T_0 — категория оснащенных ориентированных связок, ср. параграф 2.1 главы VI. Всякое оснащенное ориентированное зацепление K можно рассматривать как эндоморфизм единичного объекта в категории T_0 . Поэтому его образ $F_{\mathfrak{g},V}(K)$ принадлежит $\text{End}_{C_h}(\mathbb{C}[[h]])$. Последнее, очевидно, изоморфно $\mathbb{C}[[h]]$. Поэтому $F_{\mathfrak{g},V}(K)$ есть изотопический инвариант

$$F_{\mathfrak{g},V}(K) = \sum_{m \geq 0} F_{\mathfrak{g},V,m}(K) h^m$$

со значениями в $\mathbb{C}[[h]]$.

ГЛАВА VIII

Инварианты Васильева

Здесь мы определяем класс инвариантов зацеплений, называемых инвариантами Васильева конечной степени. Квантовые инварианты, построенные в параграфе 4 главы VII, являются инвариантами конечной степени. Принадлежащая М. Концевичу теорема выражает инварианты конечной степени в терминах линейных форм на некоторых диаграммах, называемых хордовыми диаграммами.

1. Определение и примеры

Инварианты Васильева — это некоторые инварианты зацеплений со значениями в абелевой группе, а в более общем случае, в модуле над коммутативным кольцом R . Зафиксируем коммутативное кольцо R и рассмотрим свободный R -модуль $L(R)$, порожденной изотопическими классами оснащенных ориентированных зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что любой инвариант P оснащенных ориентированных зацеплений в $\mathbb{R}^3$, принимающий значения в R -модуле M единственным образом продолжается до R -линейного отображения $P' : L(R) \rightarrow M$, так что для всякого оснащенного ориентированного узла K

$$P'([K]) = P(K),$$

где через $[K]$ обозначен класс K в $L(R)$. Следовательно, есть биекция между множеством всех инвариантов оснащенных зацеплений в $\mathbb{R}^3$ со значениями в M и R -модулем $\text{Hom}_R(L(R), M)$.

Мы определим для каждого неотрицательного целого числа m некоторый фактор-модуль $L_m(R)$ модуля $L(R)$, так что модуль $\text{Hom}_R(L_m(R), M)$ окажется в биективном соответствии с инвариантами Васильева степени $\leq m$.

Для того чтобы определить $L_m(R)$, нам нужно задание R -модуля $L(R)$ с помощью большего семейства образующих. Нам понадобятся следующие понятия. *Особое зацепление* — это некоторая иммерсия в $\mathbb{R}^3$

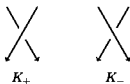
дизъюнктного объединения конечного числа ориентированных окружностей. Мы полагаем, что число особых точек иммерсии конечно и все они являются *двойными точками* с трансверсальными ветвями.

Если особое зацепление снабжено оснащением (соотв. ориентацией), то мы говорим, что это — *оснащенное* особое (соотв. *ориентированное* особое) зацепление. Мы всегда предполагаем, что в любой двойной точке ветви имеют одинаковое оснащение, т. е. общее нормальное векторное поле. Есть очевидное понятие изотопии (оснащенных) особых зацеплений, обобщающее понятие изотопии (оснащенных) зацеплений. Такая изотопия переводит двойные точки в двойные точки. В последующем мы будем представлять особые ориентированные зацепления диаграммами на плоскости с оснащением, заданным полем векторов, перпендикулярных плоскости и указывающих на читателя. Мы представляем двойную точку фрагментом диаграммы, как на рисунке 1.1.



Рис. 1.1. Двойная точка

Всякая двойная точка особого оснащенного ориентированного зацепления K может быть разрешена двумя способами, что порождает два новых особых оснащенных ориентированных зацепления K_- и K_+ с числом особых точек, уменьшенным на единицу. Зацепления K_- и K_+ получаются заменой окрестности двойной точки (рис. 1.1) картинками рис. 1.2.

Рис. 1.2. Зацепления K_- и K_+

Определим модуль $L'(R)$ как R -модуль порожденный классами изотопии особых оснащенных зацеплений в $\mathbb{R}^3$ по модулю соотношений вида

$$K = K_+ - K_-, \quad (1.1)$$

записанных для всех особых зацеплений K и их десингуляризаций в двойных точках K_+ , K_- . Повторю применяя (1.1), мы убеждаемся, что в $L'(R)$ класс любого особого зацепления является целочисленной линейной комбинацией классов неособых зацеплений. Тем самым, естественное отображение $L(R) \rightarrow L'(R)$ сюръективно. В действительности, это изоморфизм, позволяющий использовать определение $L'(R)$ в качестве копредставления модуля $L(R)$.

Теперь имеет смысл следующее определение. Для всякого целого числа $m \geq 0$ обозначим через $L_m(R)$ фактор-модуль модуля $L(R)$ по подмодулю, порожденному всеми особыми зацеплениями с числом двойных точек, большим m .

1.1. Определение

Пусть P — некоторый инвариант оснащенных ориентированных зацеплений со значениями в некотором R -модуле M . Инвариант P называется инвариантом Васильева степени $\leq m$, если индуцированное отображение R -модулей $L(R) \rightarrow M$ пропускается через $L_m(R)$.

Другими словами, это означает, что P имеет степень $\leq m$, если P оказывается равен нулю на всех особых узлах с более чем m двойными точками при продолжении на особые оснащенные зацепления по правилу (1.1), т. е.

$$P(K) = P(K_+) - P(K_-).$$

Класс зацепления K в $L_m(R)$ — это его универсальный инвариант Васильева степени $\leq m$ с коэффициентами в R -модуле. В следующей главе мы сформулируем теорему Концевича, дающую совершенно отличное описание $L_m(R)$. Эта теорема позволит нам в параграфе 1.7 главы IX привести систематическую конструкцию инвариантов Васильева.

Заметим, что инвариант степени $\leq m$ является инвариантом степени $\leq k$ при всех $k \geq m$. На уровне R -модулей мы получаем проективную систему

$$\cdots \rightarrow L_m(R) \rightarrow L_{m-1}(R) \rightarrow \cdots \rightarrow L_0(R).$$

Обозначим предел этой системы модулей через $\widehat{L}(R)$.

1.2. Пример

Многочлен Джонса V со значениями в кольце многочленов Лорана $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ следующим образом порождает некоторые инварианты Васильева. Напомним, что по теореме 2.6 главы V

$$q^{-2}V(K_+) - q^2V(K_-) = (q - q^{-1})V(K_0) \quad (1.2)$$

всегда, когда тройка зацеплений (K_+, K_-, K_0) является тройкой Конвея (см. параграф 2 главы V). Из соотношения (1.2) следует, что если K — особое зацепление, полученное из K_+ или K_- добавлением двойной точки, как на рис. 1.1, то

$$V(K) = V(K_+) - V(K_-) = (1 - q^{-4})V(K_+) + q^{-1}(1 - q^{-2})V(K_0). \quad (1.3)$$

Заменим переменную q формальным степенным рядом от переменной h со свободным членом 1 и коэффициентами в коммутативном кольце R . После такой замены переменных инвариант V уже принимает свои значения в кольце формальных степенных рядов $R[[h]]$. Тогда из (1.3) следует, что

$$V(K) = f(h)V(K_+) + g(h)V(K_0), \quad (1.4)$$

где $f(h)$ и $g(h)$ — кратные h формальные степенные ряды. Простой индукцией по числу двойных точек можно доказать, что значение V на особом зацеплении с $> m$ двойными точками кратно h^{m+1} . Следовательно, класс $V(K)$ со значениями в формальных степенных рядах по модулю h^{m+1} есть инвариант Васильева степени $\leq m$.

В частности, из предыдущих рассуждений при $q = 1 + h$ следует, что значение m -кратной производной многочлена Джонса при $q = 1$ есть инвариант степени $\leq m$.

В параграфе 4 главы VII мы построили квантовый инвариант оснащенных ориентированных зацеплений

$$F_{g,v}(K) = \sum_{m \geq 0} F_{g,v,m}(K) h^m$$

для любой комплексной полупростой алгебры Ли g и любого конечномерного g -модуля V . В параграфе 3.3 мы докажем следующее утверждение, дающее широкий класс инвариантов Васильева.

1.3. Предложение

При любом $m \geq 0$ инвариант зацеплений $F_{g,v,m}$ является инвариантом Васильева степени $\leq m$.

2. Хордовые диаграммы и теорема Концевича

В этой главе мы определяем модули $L_m(R)$ и $\widehat{L}(R)$ через элементарные диаграммы, нарисованные на окружностях.

2.1. Определение

Пусть $C_1, \dots, C_n$ — ориентированные окружности, причем каждая оснащена элементом из $\mathbb{Z}/2$, называемым вычетом соответствующей окружности. Хордовая диаграмма — это конечный (возможно, пустой) набор неупорядоченных пар точек на $C_1, \dots, C_n$, причем все точки различны. Под гомеоморфизмом хордовых диаграмм мы понимаем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм объединения окружностей, сохраняющий выделенные пары точек и вычеты.

На картинках мы будем рисовать пунктирную линию, называемую хордой, соединяющую точки выделенной пары.

Пусть D есть хордовая диаграмма и пусть a, b, c — три различные точки окружностей, не принадлежащие выделенным парам точек на D . Пусть a', b' — точки, полученные из a, b смещением на маленькое расстояние вдоль окружностей по направлениям, заданным ориентациями. Пусть D_1 и D_2 — хордовые диаграммы, полученные из D добавлением пар точек $\{a, b\}$, $\{a', c\}$ и $\{a, c\}$, $\{a', b\}$, соответственно. Пусть D_3 и D_4 — хордовые диаграммы, полученные из D добавлением пар точек $\{a, b\}$, $\{b', c\}$ и $\{a, b'\}$, $\{b, c\}$, соответственно. Диаграммы D_1, D_2, D_3, D_4 схематически представлены на рис. 2.1. Подразумевается, что они одинаковы везде кроме части, показанной на рисунке, причем левые отрезки имеют одинаковые вычеты, средние отрезки имеют одинаковые вычеты, а правые отрезки также имеют одинаковые вычеты.

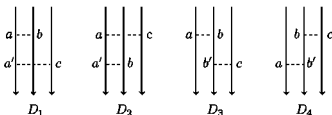


Рис. 2.1. Хордовые диаграммы D_1, D_2, D_3, D_4

Пусть R — коммутативное кольцо. Мы определяем R -модуль $A_m(r)$ или R -модуль, порожденный всеми хордовыми диаграммами, имеющими ровно m хорд, и всеми соотношениями вида

$$D_1 - D_2 + D_3 - D_4 = 0, \quad (2.1)$$

где D — диаграмма с $m - 2$ хордами и D_1, D_2, D_3, D_4 получаются из D , как описано выше. Соотношение (2.1) называется четырехчленным соотношением между хордовыми диаграммами.

Мы теперь можем сформулировать основную теорему об инвариантах Васильева. Она была доказана Концевичем, см. [Кон93], [Ваг95]. (На самом деле, мы приводим усовершенствованный вариант, учитывающий оснащения.)

2.2. Теорема

Если кольцо R содержит поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то при $m = 0, 1, 2, \dots$ имеет место изоморфизм R -модулей

$$L_m(R) \cong \bigoplus_{i=0}^m A_i(R),$$

такой что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_m(R) & \cong & \bigoplus_{i=0}^m A_i(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{m-1}(R) & \cong & \bigoplus_{i=0}^{m-1} A_i(R) \end{array}$$

коммутативны при всех $m = 0, 1, 2, \dots$

В этой диаграмме вертикальные отображения — очевидные проекции. Теорема 2.2 следует из более общего результата, представленного теоремой 4.3. Как следует из теоремы, инварианты Васильева степени $\leq m$ находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными отображениями на $A_0(R) \times \dots \times A_m(R)$.

2.3. Следствие

Если $R \supset \mathbb{Q}$, то имеет место изоморфизм R -модулей

$$\widehat{L}(R) \cong \prod_{m=0}^{\infty} A_m(R).$$

3. Проунипотентное пополнение косовой категории

В предыдущих главах мы видели, что язык моноидальных категорий очень удобен при построении инвариантов зацеплений. Задача данного

параграфа — во-первых, ввести понятие проунипотентного пополнения косовой категории, затем показать, как проунипотентное пополнение категории оснащенных связок $\mathcal{T}_0$ естественным образом приводит к модулям $L_m(R)$ и $\hat{L}(R)$, определенным в параграфе I. Для начала мы дадим несколько определений. Пусть R — коммутативное кольцо. Мы говорим, что моноидальная категория $\mathcal{C}$ *R-линейна*, если множества морфизмов между объектами $\mathcal{C}$ наделены структурой R -модулей и если композиция и тензорное произведение морфизмов R -билинейны.

Под *идеалом* в R -линейной моноидальной категории $\mathcal{C}$ мы понимаем класс морфизмов в $\mathcal{C}$, I , удовлетворяющий следующему условию: для любых морфизмов f, g в $\mathcal{C}$ если хотя бы один из них принадлежит I , то морфизм $f \circ g$ (если он определен) и морфизм $f \otimes g$ принадлежат I . Мы также предполагаем, что $I(V, W)$, множество морфизмов из V в W , принадлежащих I , является R -подмодулем в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$. Мы говорим, что идеал I в $\mathcal{C}$ порожден некоторым множеством морфизмов в $\mathcal{C}$, если I — наименьший идеал, содержащий это множество. Пусть есть целое число $m \geq 0$. Мы определяем I^{m+1} как идеал, порожденный морфизмами вида $f_1 \star \dots \star f_n$, где $\star$ — либо композиция, либо тензорное произведение морфизмов и по крайней мере $m+1$ морфизмов из $f_1, \dots, f_n$ принадлежат I .

Пусть I — идеал в $\mathcal{C}$. Мы определяем факторкатегорию $\mathcal{C}/I$ как категорию, объекты которой — те же, что и в $\mathcal{C}$, а морфизмы выглядят следующим образом:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/I}(V, W) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)/I(V, W)$$

для всех объектов V, W из $\mathcal{C}$. Ясно, что $\mathcal{C}/I$ есть R -линейная моноидальная категория.

Теперь мы подходим к главному понятию в этом параграфе.

3.1. Определение

Пусть $\mathcal{C}$ — R -линейная косовая категория. Идеал аугментации в $\mathcal{C}$ — это идеал I , порожденный морфизмами вида $s_W \gamma_V s_W - \text{id}_V \otimes w$ для всех объектов V, W . Мы называем проунипотентным пополнением $\mathcal{C}$ проективный предел проективной системы категорий

$$\dots \longrightarrow \mathcal{C}/I^{m+1} \longrightarrow \mathcal{C}/I^m \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{C}/I.$$

Рассмотрим категорию оснащенных ориентированных связок $\mathcal{T}_0$. Возьмем ее R -линеаризацию $\mathcal{T}_0(R)$, которая с теми же объектами, что

и $\mathcal{T}_0$ и морфизмы которой свободно порождены морфизмами $\mathcal{T}_0$, т. е.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_0(R)}(s, s') = R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_0}(s, s')]$$

для всех объектов s и s' . Это R -линейная косовая категория и мы можем рассмотреть ее идеал аугментации I , фактор-категорию $\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1}$ и проунипотентное пополение $\widehat{\mathcal{T}}_0(R)$.

Свяжем эти категории с универсальными модулями Васильева $L_m(R)$ из параграфа 1. Мы знаем, что нулевой объект $\emptyset$ является единичным объектом в моноидальных категориях $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_0(R)$, $\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1}$ и $\widehat{\mathcal{T}}_0(R)$. Мы также знаем, что множество эндоморфизмов объекта $\emptyset$ в категории $\mathcal{T}_0$ есть множество изотопических классов оснащенных ориентированных зацеплений в $\mathbb{R}^3$. После линейризации, как мы видим, множество эндоморфизмов того же объекта $\emptyset$ в линейризованной категории $\mathcal{T}_0(R)$ становится R -модулем $L(R)$ из параграфа 1. То же самое обобщается и на категории $\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1}$ и $\widehat{\mathcal{T}}_0(R)$, как это показывает следующий результат, который мы оставляем в качестве упражнения читателю.

3.2. Предложение

Множества эндоморфизмов единичного объекта $\emptyset$ в категориях $\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1}$ и $\widehat{\mathcal{T}}_0(R)$ есть R -модули $L_m(R)$ и $\widehat{L}(R)$. Соответственно:

$$\mathrm{End}_{\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1}}(\emptyset) = L_m(R) \quad \text{и} \quad \mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{T}}_0(R)}(\emptyset) = \widehat{L}(R).$$

3.3. Доказательство предложения 1.3

Напомним из параграфа 4 главы VII, что явантовый инвариант

$$F_{g,v}(K) = \sum_{m \geq 0} F_{g,v,m}(K) h^m$$

получается как сужение на множество эндоморфизмов единичного объекта $\emptyset$ функтора $F: \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathcal{C}_h$, такого что $F((+)) = V$. Покажем, что F пропускается через $\widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{C})$. Понятно, что он пропускается через $\mathbb{C}$ -линеаризацию $\mathcal{T}_0(\mathbb{C})$, так как категория $\mathcal{C}_h$ $\mathbb{C}$ -линейна.

Мы знаем, что сплетение c в $\mathcal{C}_h$ дается универсальной R -матрицей R_h , такой что $R_h \equiv 1 \otimes 1 \pmod{h}$, откуда следует, что $c - c^{-1} \equiv 0$

mod h . Другими словами, идеал аугментации I в $\mathcal{C}_h$ принадлежит идеалу (h) , порожденному теми морфизмами из C_h , которые делятся на h . После пополнения мы получаем функтор

$$\widehat{\mathcal{C}}_h = \varprojlim_{m \geq 0} \mathcal{C}_h / I^{m+1} \longrightarrow \varprojlim_{m \geq 0} \mathcal{C}_h / (h^{m+1}).$$

Так как каантовая обертывающая алгебра $U_h(\mathfrak{g})$ является h -адически полной, мы имеем

$$\varprojlim_{m \geq 0} \mathcal{C}_h / (h^{m+1}) \cong \mathcal{C}_h.$$

По функторности проунипотентного пополнения диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} T_0 & \longrightarrow & T_0(\mathbb{C}) & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}_h \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \widehat{T}_0(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{\mathcal{C}}_h \longrightarrow \varprojlim_{m \geq 0} \mathcal{C}_h / (h^{m+1}) \\ & & & & \parallel \\ & & & & \mathcal{C}_h \end{array}$$

коммутативна. Отсюда следует, что F пропускается через $\widehat{T}_0(\mathbb{C})$. Аналогично, класс F по модулю (h^{m+1}) пропускается через $T_0(\mathbb{C})/I^{m+1}$. Согласно предложению 3.2, отсюда вытекает, что усеченная сумма

$\sum_{k=0}^m F_{\mathfrak{g}, V, k}(K) h^k$ является инвариантом Васильева степени $\leq m$. По той

же причине $\sum_{k=0}^{m-1} F_{\mathfrak{g}, V, k}(K) h^k$ имеет степень $\leq m-1$. Отсюда следует, что m -й коэффициент $F_{\mathfrak{g}, V, m}$ имеет степень $\leq m$. ■

4. Другое описание $\widehat{T}_0(R)$

4.1. Хордовые диаграммы на кривых

Теорема 2.2 и следствие 2.3 имеют категорный аналог, который мы представляем в этом параграфе. Сначала мы опишем категорную версию хордовых диаграмм из параграфа 2.

Пусть k, ℓ — неотрицательные целые числа. Назовем (k, ℓ) -кривой Γ компактное ориентированное одномерное многообразие (т.е. дизъюнктное объединение конечного числа ориентированных отрезков и ориентированных окружностей), такое что каждая его связная компонента оснащена элементом группы $\mathbb{Z}/2$, называемым *вычетом* соответствующей компоненты, и такое, что граница $\partial\Gamma$ есть дизъюнктное объединение двух вполне упорядоченных множеств U и V с $\text{card}(U) = k$

и $\text{card}(V) = \ell$. Элементы U называются нижними свободными концами или входами Γ . Заданный порядок в U позволяет нам пронумеровать эти свободные концы числами $1, \dots, k$. Поэтому мы можем говорить о первом, втором и т.д. входах Γ . Аналогичные замечания относятся к элементам V , которые называются верхними свободными концами или выходами Γ .

Под гомеоморфизмом кривых мы понимаем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, который не меняет вычетов, разбиения границы на входы и выходы и порядка во множествах входов и выходов. *Начало* $s(\Gamma)$ (k, ℓ) -кривой Γ — это последовательность $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, где ε_i соответствует ориентации отрезка, отходящего от i -го входа, т.е. $\varepsilon_i = +$, если этот интервал ориентирован к i -му входу и $\varepsilon_i = -$ в противном случае. Если $k = 0$, то начало Γ — пустая последовательность.

Мы определяем *конец* $t(\Gamma)$ кривой Γ как последовательность $(\eta_1, \dots, \eta_\ell)$, где $\eta_j = -$, если отрезок, подходящий к j -му выходу, ориентирован к нему и $\eta_j = +$ в противном случае. Если $\ell = 0$, то конец Γ — пустая последовательность.

Хордовая диаграмма на кривой Γ — это конечное (возможно, пустое) множество неупорядоченных пар точек на $\Gamma \setminus \partial\Gamma$, причем все точки различны. Под гомеоморфизмом хордовых диаграмм мы понимаем гомеоморфизм подлежащих кривых, сохраняющий выделенные пары точек. Мы определяем начало и конец хордовой диаграммы как начало и конец подлежащей кривой соответственно.

На наших картинках (таких, как рис. 2.1) (k, ℓ) -кривые нарисованы внутри горизонтальной полосы, причем k входов лежат на нижней границе прямой полосы с порядком, возрастающим слева направо, а ℓ выходов лежат на верхней границе прямой полосы с порядком, также возрастающим слева направо. Мы рисуем пунктирную линию, называемую *хордой*, между точками выделенной пары.

4.2. Категория $\mathcal{A}(R)$

Фиксируем коммутативное кольцо R . Мы строим категорию $\mathcal{A}(R)$ из классов гомеоморфности хордовых диаграмм следующим образом. Объекты $\mathcal{A}(R)$ — те же самые, что и объекты категории оснащенных ориентированных связок $\widehat{T}_0$, а именно, конечные последовательности из знаков $+$ и $-$. Морфизм из s в s' в $\mathcal{A}(R)$ — это элемент R -модуля, порожденного классами гомеоморфности хордовых диаграмм с началом s и концом s' , по модулю четырехчленных соотношений (2.1), которые также имеют смысл в нашем контексте.

Тожественные морфизмы в $\mathcal{A}(R)$ представляются диаграммами без хорд, состоящими из отрезков с вычетом 0, таких что для каждого от-

резка одна граничная точка — вход, а другая — выход с тем же номером. Тожественный изоморфизм пустой последовательности представляется пустой кривой. Композиция двух хордовых диаграмм D и D' получается склеиванием D' с D вдоль (единственного) сохраняющего порядок гомеоморфизма множества входов D' на множество выходов D . (На картинках $D' \circ D$ получается приложением D' сверху к D и склеиванием соответствующих концов, как в случае категории связок.) Вычет $r \in \mathbb{Z}/2$ связной компоненты C композиции $D' \circ D$ определяется формулой

$$r = \sum_i r(\alpha_i) + \sum_j r(\beta_j) + \sum_{i < i'} r(\alpha_i, \alpha_{i'}) + \sum_{j < j'} r(\beta_j, \beta_{j'}), \quad (4.1)$$

где α_i (соотв., β_j) — компоненты D (соотв., D'), содержащиеся в C , а $r(\alpha_i)$ и $r(\beta_j)$ — их вычеты; имеем $r(\alpha_i, \alpha_{i'}) = 0$, если α_i и $\alpha_{i'}$ могут быть вложены без пересечений в горизонтальную полосу с сохранением порядка их верхних и нижних концов, и $r(\alpha_i, \alpha_{i'}) = 1$ в противном случае. Мы продолжаем композицию на все морфизмы по линейности. Читатель может проверить, что она ассоциативна.

Заметим, что композиция хордовой диаграммы с m хордами и хордовой диаграммы с n хордами есть хордовая диаграмма с $m+n$ хордами. Для всякого $m \geq 0$ мы рассматриваем категорию $\mathcal{A}_m(R)$, объекты которой — те же, что и в $\mathcal{A}(R)$, а морфизмы — морфизмы $\mathcal{A}(R)$, профакторизованные по морфизмам, представленных хордовыми диаграммами с $> m$ хордами. Есть функтор

$$p_m : \mathcal{A}_m(R) \longrightarrow \mathcal{A}_{m-1}(R),$$

который действует тождественно на объектах и как каноническая проекция на морфизмах. Тем самым, у нас есть проективная система категорий. Обозначим ее предел за $\hat{\mathcal{A}}(R)$.

Теперь мы можем сформулировать обещанное обобщение теоремы 2.2.

4.3. Теорема

Если $R \supset \mathbb{Q}$, то для $m = 0, 1, 2, \dots$ имеют место изоморфизм категорий $T_0(R)/I^{m+1} \cong \mathcal{A}_m(R)$, такой что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_0(R)/I^{m+1} & \cong & \mathcal{A}_m(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_0(R)/I^m & \cong & \mathcal{A}_{m-1}(R) \end{array}$$

коммутативна при всех $m = 0, 1, 2, \dots$

Сужая этот изоморфизм на эндоморфизмы объекта $\emptyset$ и используя предложение 3.2, получаем теорему 2.3.

4.4. Следствие

Если $R \supset \mathbb{Q}$, то имеет место изоморфизм категорий

$$\widehat{T}_0(R) \cong \widehat{\mathcal{A}}(R).$$

Доказательство теоремы 4.3 можно найти в [KT95, Section 6]. Основным ингредиент доказательства — функтор Z из категории T_0 в некоторую ленточную категорию $\mathcal{A}(R)[[h]]$, тесно связанную с категорией $\mathcal{A}(R)$. Конструкция $\mathcal{A}(R)[[h]]$ будет описана в главе IX; она основана на придуманной Дринфельдом процедуре квантования (см. параграф 2 главы IX). Сужение функтора Z (он строится в параграфе 3 главы IX) на множество эндоморфизмов единичного объекта $\emptyset$ — это универсальный инвариант Концевича для зацеплений.

4.5. Упражнение

Докажите непосредственно наличие изоморфизма $T_0(R)/I \cong \mathcal{A}_0(R)$.

ГЛАВА IX

Дополнительные сюжеты

В последней главе мы строим универсальный инвариант зацеплений Концевича, из которого могут быть получены все инварианты Васильева конечной степени. Эта конструкция использует понятие инфинитезимальной симметричной категории (параграф 1) и квантование Дринфельда–Карты таких категорий (параграф 2). Мы также предъявим явную формулу, выражающую квантовые инварианты узла в терминах инварианта Концевича. В последнем параграфе мы опишем весьма неожиданное действие группы Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на пространстве инвариантов Васильева.

1. Инфинитезимальные симметричные категории

Симметричная категория — это косовая категория, сплетение в которой σ является *симметрией*, т.е. для любых объектов V, W удовлетворяет условию

$$\sigma_{W,V} \sigma_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}. \quad (1.1)$$

1.1. Определение

Пусть R — коммутативное кольцо и S — строго симметричная R -линейная категория с симметрией $(\sigma_{V,W})_{V,W}$. Инфинитезимальное сплетение в S — это семейство $(t_{V,W})_{V,W}$ эндоморфизмов $V \otimes W$, определенное для всех объектов V, W из S и удовлетворяющее соотношениям

$$t_{V',W'}(f \otimes g) = (f \otimes g)t_{V,W}, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{V,W} t_{V,W} = t_{W,V} \sigma_{V,W}, \quad (1.3)$$

$$t_{U,V \otimes W} = t_{U,V} \otimes \text{id}_W + (\sigma_{U,V} \otimes \text{id}_W)^{-1}(\text{id}_U \otimes t_{U,W})(\sigma_{U,V} \otimes \text{id}_W) \quad (1.4)$$

для всех объектов U, V, W, V', W' и всех морфизмов $f: V \rightarrow V', g: W \rightarrow W'$ в S .

Это определение легко может быть распространено на нестрогий симметричный категорию. В дальнейшем мы будем называть *категорией* симметричную категорию вместе с инфинитезимальным сплетением. Инфинитезимальные сплетения появляются при формальном дифференцировании сплетений, возникающих в теории формальных квантовых групп, представленной в параграфе 4 главы VII. Также сплетения зависят от формального параметра $\hbar$ и имеют вид

$$c_{V,W} \equiv \sigma_{V,W}(\text{id}_V \otimes W + \hbar \tau_{V,W}) \pmod{\hbar^2}, \quad (1.5)$$

где $(\sigma_{V,W})_{V,W}$ — симметрия и $\tau_{V,W}$ — эндоморфизм $V \otimes W$. Из соотношений (3.2) и (3.4) главы II следуют (1.2) и (1.4) для

$$t_{V,W} = \tau_{V,W} + \sigma_{W,V} \tau_{W,V} \sigma_{V,W}.$$

Соотношения (1.2)–(1.4) впервые появились на стр. 852 английского перевода [Dri90]. Термин «инфинитезимальное сплетение» был введен Картье [Car93].

1.2. Упражнение

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли, пусть t — симметричный $\mathfrak{g}$ -инвариантный 2-тензор на $\mathfrak{g}$. Инвариантность t означает, что если $t = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, то мы имеем

$$\sum_{i \in I} ([z, x_i] \otimes y_i + x_i \otimes [z, y_i]) = 0$$

для всех $z \in \mathfrak{g}$. Проверьте, что действие t на тензорном произведении двух $\mathfrak{g}$ -модулей определяет инфинитезимальное сплетение на симметричной категории $\mathfrak{g}$ -модулей с симметрией σ , определяемой оператором перестановки сомножителей $v \otimes w \mapsto w \otimes v$.

1.3. Пример

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, т. е. конечномерная комплексная алгебра Ли, у которой форма Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определенная как $\langle x, y \rangle = \text{Tr}(\text{ad}(x) \text{ad}(y))$ является невырожденной симметричной билинейной формой. Определим

$$t = \sum_{i \in I} x_i \otimes x_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \quad (1.6)$$

где $\{x_i\}_{i \in I}$ — ортонормальный базис в $\mathfrak{g}$ по отношению к форме Киллинга (правая часть (1.6) независима от ортонормального базиса). Тензор t симметричен и $\mathfrak{g}$ -инвариантен. По упражнению 1.2, действие t определяет инфинитезимальное сплетение на симметричной категории $\mathfrak{g}$ -модулей.

1.4. Моноидальная структура на $\mathcal{A}(R)$

Покажем, что категория $\mathcal{A}(R)$, определенная в параграфе 4 главы VIII является строгой инфинитезимальной симметричной категорией. Сначала мы вводим на $\mathcal{A}(R)$ тензорное произведение. Тензорное произведение двух объектов z и z' есть их конкатенация zz' . Тензорное произведение двух хордовых диаграмм D, D' есть их дизъюнктивное объединение, где входы (соотв., выходы) D предшествуют входам (соотв., выходам) D' (в терминах картинок: $D \otimes D'$ получается приставлением D слева к D'). По R -линейности это продолжается до тензорного произведения для всех морфизмов. Таким образом, $\mathcal{A}(R)$ приобретает структуру строгой моноидальной категории, единичный объект которой — пустан последовательность $\emptyset$.

Далее мы определяем симметрию. Для непустых последовательностей z и z' рассмотрим морфизм

$$\sigma_{z,z'} : z \otimes z' \longrightarrow z' \otimes z,$$

представленный хордовой диаграммой без хорд с вычетами 0, показанной на рис. 1.1.

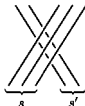
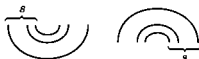


Рис. 1.1. Симметрия $\sigma_{z,z'}$

Мы также положим $\sigma_{z,\emptyset} = \sigma_{\emptyset,z} = \text{id}_z$. Хордовые диаграммы, представляющие левые части соотношений (3.2), (3.3) и (3.4) главы II и (1.1) гомеоморфны хордовым диаграммам, представляющим правые части. Поэтому $(\sigma_{z,z'})_{z,z'}$ является симметрией в $\mathcal{A}(R)$. Мы оснащаем $\mathcal{A}(R)$ двойственностью следующим образом. Для непустой последовательности $z = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, состоящей из $\pm$, двойственная последовательность z^* определяется как

$$z^* = (-\varepsilon_k, \dots, -\varepsilon_1).$$

Пустая последовательность двойственна сама себе по определению. Морфизмы $b_s : \emptyset \rightarrow s \otimes s^*$ и $d_s : s^* \otimes s \rightarrow \emptyset$ показаны картинками на рис. 1.2, которые мы рассматриваем как хордовые диаграммы без хорд с вычетами, равными 0.

Рис. 1.2. Морфизмы b_s и d_s

Далее мы определяем инфинитезимальное сплетение. Для непустой последовательности $s = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и всякой пары (i, j) разных целых чисел от 1 до n обозначим через $T_s^{i,j}$ хордовую диаграмму, полученную из id_s добавлением единственной хорды, связывающей i -й и j -й интервалы (см. рис. 1.3).

Рис. 1.3. Хордовая диаграмма $T_s^{i,j}$

Пусть $t_s^{i,j} : s \rightarrow s$ — морфизм в $\mathcal{A}(R)$, представленный $\varepsilon_i \varepsilon_j T_s^{i,j}$. Нетрудно проверить следующие соотношения в $\mathcal{A}(R)$: для разных целых чисел $i, j, k, l = 1, \dots, n$ имеем (используя обозначение $[f, g] = fg - gf$)

$$t_s^{i,j} = t_s^{j,i}, \quad (1.7)$$

$$[t_s^{i,j}, t_s^{k,l}] = 0, \quad (1.8)$$

$$[t_s^{i,j}, t_s^{i,k} + t_s^{j,k}] = 0. \quad (1.9)$$

Для непустых последовательностей s, s' , состоящих из $\pm$, мы определяем эндоморфизм $s \otimes' t_{s,s'}$ следующим образом:

$$t_{s,s'} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r'} t_{ss'}^{i,r'+j}, \quad (1.10)$$

где r и r' — длины s и s' . Положим $t_{s,\emptyset} = t_{\emptyset,s} = t_{\emptyset,\emptyset} = 0$.

1.5. Предложение

Семейство морфизмов $(t_{s,s'})_{s,s'}$ является инфинитезимальным сплетением в $\mathcal{A}(R)$.

Доказательство не сложно, см. [КТ95], параграф 5. Мы теперь сформулируем важное свойство $\mathcal{A}(R)$ (доказательство см. в [КТ95], параграф 8.9). Функтор G ниже является аналогом функтора F параграфа 2 главы VI.

1.6. Теорема

Для всякой строгой R -линейной инфинитезимальной симметричной категории $\mathcal{S}$ с двойственностью и для всякого объекта V в $\mathcal{S}$ существует единственный R -линейный функтор $G : \mathcal{A}(R) \rightarrow \mathcal{S}$, сохраняющий тензорное произведение и удовлетворяющий следующим условиям:

$$G((+)) = V, \quad G((-)) = V^*, \quad (1.11)$$

$$G(\sigma_{(+),(+)}) = \sigma_{V,V}, \quad G(t_{(+),(+)}) = t_{V,V}, \quad (1.12)$$

$$G(b_{(+)}) = b_V, \quad G(d_{(+)}) = d_V, \quad G(\text{id}'_{(+)}) = \text{id}_V, \quad (1.13)$$

где $\text{id}'_{(+)}$ есть хордовая диаграмма, полученная из $\text{id}_{(+)}$ заменой вычета 0 на 1.

1.7. Линейные формы на модулях $A_m(R)$

Из определения категорий $\mathcal{A}(R)$ следует, что множество эндоморфизмов единичного объекта $\emptyset$ совпадает с R -модулем $A(R)$, определенным, как прямая сумма модулей $A_m(R)$ из параграфа 2 главы VIII:

$$A(R) = \bigoplus_{m \geq 0} A_m(R).$$

Мы теперь используем теорему 1.6, чтобы построить линейные формы на модулях $A_m(R)$ в случае, когда $R = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Чтобы определить такую линейную форму, нам нужны те же данные, что и для построения квантовых инвариантов, представленных в параграфе 4 главы VII, а именно, комплексная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль V . Мы предполагаем здесь, что модуль V простой. Рассмотрим инфинитезимальную симметричную категорию $\mathfrak{g}$ -модулей $\mathcal{S}$ с инфинитезимальным сплетением, описанным в примере 1.3. По теореме 1.6 мы имеем функтор $G : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{S}$, такой что $G((+)) = V$

н $G((-)) = V^*$. Ограничивая функтор на множество всех эндоморфизмов единичного объекта в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, мы получаем линейное отображение

$$w_{g,V} : A(\mathbb{C}) = \text{End}_{\mathcal{A}(\mathbb{C})}(\emptyset) \longrightarrow \text{End}_{\mathcal{S}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C},$$

т.е. линейную форму на $A(\mathbb{C})$.

Линейная форма $w_{g,V}$ имеет простую интерпретацию для всякого элемента $A_m(\mathbb{C})$, представленного хордовой диаграммой D с m хордами на *одной* окружности. Будем смотреть на эту окружность как на вертикальную линию, ориентированную сверху вниз с отождествленными обоими концами. Тогда D становится хордовой диаграммой на этой линии. Возьмем ортонормальный по отношению к форме Киллинга базис $\{x_i\}$, в $\mathfrak{g}$. Пометим каждую выделенную точку D как x_{i_k} следующим образом: высшая из выделенных точек получает метку x_{i_1} ; ее же получает точка, связанная с ней хордой. Пометим следующую непометенную пару меткой x_{i_2} и т.д. Читай метки сверху вниз, мы получаем слово, которое рассматриваем как элемент обертывающей алгебры $\mathfrak{g} U_{\mathfrak{g}}$ и которое зависит от индексов $i_1, \dots, i_m$. Суммируя по всем возможным индексам, мы получаем элемент C_D из $U_{\mathfrak{g}}$. Далее проверяется, что элемент C_D зависит только от класса D в $A_m(\mathbb{C})$ и является центральным элементом в обертывающей алгебре. Так как модуль V простой, но лемме Шура, C_D действует как скаляр на V . Этот скаляр есть в точности значение линейной формы $w_{g,V}$ на классе хордовой диаграммы D в $A_m(\mathbb{C})$. Детали и доказательство см. в [Bar95], [Kas95, Prop. XX.8.2].

2. Квантование инфинитезимальной симметричной категории

Цель этого параграфа — построить косовую моноидальную категорию $\mathcal{S}[[\hbar]]$ для всякой инфинитезимальной симметричной категории $\mathcal{S}$. Как мы увидим в параграфе 3, эта конструкция имеет очень важные следствия. Перед тем как представить ее, нам требуются понятие нестрогой косовой моноидальной категории и понятие ассоциатора Дринфельда.

2.1. Общие косовые категории

Мы сначала определим моноидальные категории в общем случае. Так же, как мы делали, когда определяли строгие моноидальные категории (см. параграф 2.1 главы II), мы начинаем с категории $\mathcal{C}$ вместе с функтором $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Структура ассоциирования на $\mathcal{C}$ — это

семейство естественных изоморфизмов

$$a = a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W),$$

определенных для всех троек (U, V, W) объектов из $\mathcal{C}$, т. е. семейство изоморфизмов, таких что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) \\ (f \otimes g) \otimes h \downarrow & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (U' \otimes V') \otimes W' & \xrightarrow{a_{U',V',W'}} & U' \otimes (V' \otimes W') \end{array} \quad (2.1)$$

коммутативна для любых морфизмов f, g, h .

Пусть $V_1, \dots, V_n$ — объекты категории $\mathcal{C}$. Есть много способов определить тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ в зависимости от выбора скобок в этом выражении. Если фиксирована структура ассоциирования a , то разные выборы скобок в $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ приводят к изоморфным объектам. Например, есть пять способов расставления скобок в тензорном произведении четырех объектов U, V, W, X . Следующая диаграмма изображает все пять вариантов вместе со связывающими морфизмами, которые выражаются через тождественные морфизмы и структуру ассоциирования a .

$$\begin{array}{ccc} ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X & \xrightarrow{a_{U,V,W} \otimes \text{id}_X} & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \\ a_{U \otimes V, W, X} \downarrow & & \downarrow a_{U, V \otimes W, X} \\ (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) & & \\ a_{U, V, W \otimes X} \downarrow & & \downarrow \\ U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) & \xleftarrow{\text{id}_U \otimes a_{V,W,X}} & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \end{array} \quad (2.2)$$

В частности, мы видим, что есть два разных изоморфизма из

$$((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \quad \text{в} \quad U \otimes (V \otimes (W \otimes X)).$$

Естественно потребовать, чтобы эти два изоморфизма совпадали или, что то же самое, чтобы диаграмма (2.1) была коммутативной. Когда структура ассоциирования a удовлетворяет этому условию — мы говорим, что она удовлетворяет *аксиоме пятиугольника Маклейна*, — тогда между двумя способами расставить скобки в $U \otimes V \otimes W \otimes X$ есть единственный естественный изоморфизм, выражающийся через a . Маклейн

показал, что из аксиомы пятиугольника следует то же заключение, когда мы образуем тензорное произведение любого конечного набора объектов из $\mathcal{C}$ (см. [Mac71]).

Теперь фиксируем объект 1 в категории. Структура левых единиц (соотв. структура правых единиц) по отношению к 1 есть семейство естественных изоморфизмов

$$l_V : 1 \otimes V \rightarrow V \quad (\text{соотв. } r_V : V \otimes 1 \rightarrow V),$$

определенных для всех объектов V из $\mathcal{C}$, т.е. семейство изоморфизмов, таких что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes V & \xrightarrow{l_V} & V \\ \text{id}_1 \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ 1 \otimes V' & \xrightarrow{l_{V'}} & V' \end{array} \quad \text{соотв.} \quad \begin{array}{ccc} V \otimes 1 & \xrightarrow{r_V} & V \\ f \otimes \text{id}_1 \downarrow & & \downarrow f \\ V' \otimes 1 & \xrightarrow{r_{V'}} & V' \end{array} \quad (2.3)$$

коммутативны для всякого морфизма f . Мы говорим, что структура ассоциирования a и структуры единиц l, r удовлетворяют аксиоме треугольника, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes 1) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,1,W}} & V \otimes (1 \otimes W) \\ & \searrow r_V \otimes W & \swarrow \text{id}_V \otimes l_W \\ & V \otimes W & \end{array} \quad (2.4)$$

коммутирует для всех пар объектов (V, W) .

Мы определяем моноидальную категорию как категорию $\mathcal{C}$, оснащенную функтором

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

вместе со структурой ассоциирования a , структурой левых единиц l и структурой правых единиц r по отношению к некоторому объекту 1 , который называется *единицей* моноидальной категории, причем должны выполняться аксиома пятиугольника (2.2) и аксиома треугольника (2.4).

Ясно, что понятие строгой моноидальной категории параграфа 1 мы получим, если вдобавок потребуем, чтобы структуры a, l, r были единичными морфизмами.

Теперь мы расширим понятие сплетения, данное в параграфе 3 главы II, на нестрогие моноидальные категории. Пусть у нас есть структура коммутирования

$$c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W,$$

как в параграфе 3.1 главы II. Уравнения (3.3)–(3.4) главы II эквивалентны коммутативности двух треугольников, включающих тройки объектов (U, V, W) . С учетом структуры ассоциирования a эти треугольники превращаются в шестиугольники. Первый из них выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
 (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V, W}} & W \otimes (U \otimes V) \\
 a_{U, V, W} \downarrow & & \uparrow a_{W, U, V} \\
 U \otimes (V \otimes W) & & (W \otimes U) \otimes V \\
 \text{id}_U \otimes c_{V, W} \downarrow & & \uparrow c_{U, W} \otimes \text{id}_V \\
 U \otimes (W \otimes V) & \xrightarrow{a_{U, W, V}^{-1}} & (U \otimes W) \otimes V
 \end{array} \quad (2.5)$$

Второй шестиугольник получается из первого заменой изоморфизма s на обратный s^{-1} . Далее мы определяем *сплетение* в моноидальной категории как структуру коммутирования, удовлетворяющую *аксиоме шестиугольника*, т. е. такую, что два описанных шестиугольника коммутируют для любых объектов U, V, W . Так же, как в параграфе 3, *косовая моноидальная категория* — это моноидальная категория со сплетением.

2.2. Ассоциаторы Дринфельда

Формальный ряд $\Phi(A, B)$ по двум некоммутирующим переменным A и B называется *ассоциатором Дринфельда*, если он является решением следующей системы четырех уравнений:

$$\begin{aligned}
 &\Phi(0, 0) = 1, \\
 &\Phi(t_{12}, t_{23} + t_{24})\Phi(t_{13} + t_{23}, t_{34}) = \\
 &= \Phi(t_{23}, t_{34})\Phi(t_{12} + t_{13}, t_{24} + t_{34})\Phi(t_{12}, t_{23}), \exp\left(\frac{1}{2}(t_{13} + t_{23})\right) = \\
 &= \Phi(t_{13}, t_{12})\exp\left(\frac{1}{2}t_{13}\right)\Phi(t_{13}, t_{23})^{-1}\exp\left(\frac{1}{2}t_{23}\right)\Phi(t_{12}, t_{23}), \exp\left(\frac{1}{2}(t_{13} + t_{12})\right) = \\
 &= \Phi(t_{23}, t_{13})^{-1}\exp\left(\frac{1}{2}t_{13}\right)\Phi(t_{12}, t_{13})\exp\left(\frac{1}{2}t_{12}\right)\Phi(t_{12}, t_{23})^{-1},
 \end{aligned}$$

где $(t_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ — переменные, такие что

$$t_{ij} = t_{ji}, \quad [t_{ij}, t_{kl}] = 0, \quad [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0,$$

когда i, j, k, ℓ — различные целые числа и где $[f, g] = fg - gf$.

У этих нелинейных уравнений нет тривиального решения. Обратите внимание, что постоянный формальный ряд $\Phi(A, B) = 1$ не является

ассоциатором Дринфельда. В противном случае последнее уравнение давало бы

$$\exp\left(\frac{1}{2}(t_{13} + t_{12})\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t_{13}\right) \exp\left(\frac{1}{2}t_{12}\right),$$

что, как известно, не выполняется, когда t_{13} и t_{12} не коммутируют. В [Dri89b], [Dri90] Дринфельд доказал существование ассоциаторов Дринфельда предъявлением специального решения Φ_{KZ} , которое строится следующим образом. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dG(z)}{dz} = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} \right) G(z), \quad (2.1)$$

определенное для $z \in \mathbb{C}$ и некоммутирующих операторов A и B (как обычно, i обозначает квадратный корень из -1). Решение $G(z)$ уравнения (2.1) не определено в особых точках 0 и 1; однако оно имеет красивое асимптотическое поведение в окрестности этих точек. А именно, если мы напомним

$$G(z) = z^{\hbar A/2i\pi} (1-z)^{\hbar B/2i\pi} V(z),$$

то функции $V(z)$ может быть аналитически продолжена в окрестность замкнутого интервала $[0, 1]$ на комплексной плоскости. Здесь $z^{\hbar A/2i\pi}$ и $(1-z)^{\hbar B/2i\pi}$ определяются как

$$z^{\hbar A/2i\pi} = \exp\left(\frac{\hbar}{2i\pi} A \log(z)\right) \quad \text{и} \quad (1-z)^{\hbar B/2i\pi} = \exp\left(\frac{\hbar}{2i\pi} B \log(1-z)\right),$$

где $\log$ определен как стандартный вещественный логарифм, продолженный на $\mathbb{C}$ с разрезами вдоль $[-\infty, 0]$ и $[1, +\infty]$. Рассмотрим $V(1)V(0)^{-1}$. Эта константа может быть выражена формальным рядом с комплексными коэффициентами в переменных A и B . Мы обозначим ее через $\Phi_{KZ}(A, B)$. Дринфельд доказал, что $\Phi_{KZ}(A, B)$ является ассоциатором Дринфельда, рассматривая его в общем контексте монодромии определенной системы дифференциальных уравнений в частных производных, называемых *уравнениями Книжника – Замолодчикова* (детали см. в [Dri89b], [Dri90], [Kas95, Chap. XIX]).

Решая 2.1 с помощью метода аппроксимации Пикара, Ле и Мураками [LM96] дали следующую формулу для Φ_{KZ} :

$$\begin{aligned} \Phi_{KZ}(A, B) = 1 + \\ + \sum_{p, q, r, s} (-1)^{|r|+|q|} \eta(p+r; q+s) \binom{p+r}{r} \binom{q+s}{s} B^{|s|}(A, B)^{(p, q)} A^{|r|}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь мы используем следующие соглашения: суммирование ведется по всем неотрицательным мультииндексам p, q, r , а одинаковой длины. Для мультииндекса $p = (p_1, \dots, p_k)$ мы называем число k *длиной* p . Мультииндекс, состоящий из k индексов 1, обозначается 1_k . Пусть $|p| = \sum p_i$.

Для двух мультииндексов p, q одинаковой длины k мы определяем

$$(A, B)^{(p, q)} = A^{p_1} B^{q_1} A^{p_2} B^{q_2} \dots A^{p_k} B^{q_k},$$

$$\binom{p}{q} = \binom{p_1}{q_1} \binom{p_2}{q_2} \dots \binom{p_k}{q_k},$$

и $\eta(p; q) = 0$ если одно из p_i, q_i есть 0; в противном случае,

$$\eta(p; q) = \zeta(1_{p_1-1}, q_1 + 1, 1_{p_2-1}, q_2 + 1, \dots, 1_{p_k-1}, q_k + 1),$$

где $\zeta(i_1, i_2, \dots, i_k)$ определяется как

$$\zeta(i_1, i_2, \dots, i_k) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_k \in \mathbb{N}} \frac{1}{m_1^{i_1} m_2^{i_2} \dots m_k^{i_k}}.$$

Заметим, что $\zeta(i_1)$ есть значение дзета-функции Римана в целой точке i_1 . Можно показать, что логарифм Φ_{KZ} является рядом Лип по переменным A и B . Из 2.2 и формулы Эйлера $\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2$ мы выводим первые члены ряда для Φ_{KZ} :

$$\Phi_{KZ}(A, B) = 1 + \frac{1}{24} [A, B] + \frac{\zeta(3)}{(2i\pi)^3} ([[A, B], B] - [A, [A, B]]) + \dots \quad (2.3)$$

Отметим, что (2.2) — единственный известный в явном виде ассоциатор Дринфельда. Дринфельд [Dri90] также доказал существование ассоциаторов Дринфельда с *рациональными коэффициентами*.

2.3. Конструкция Дринфельда – Картье

Пусть R — коммутативное кольцо, содержащее $\mathbb{Q}$. Согласно последнему замечанию в параграфе 2.2, мы знаем, что существует ассоциатор Дринфельда Φ с коэффициентами в R . Зафиксируем такой ассоциатор Φ . Далее построим категорию $\mathcal{S}[[h]]$ из R -линейной инфинитезимальной симметричной категории $\mathcal{S}$ и из Φ . Мы следуем [Dri90] и [Car93].

Объекты в $\mathcal{S}[[h]]$ — те же, что и в $\mathcal{S}$. Морфизм из V в W в $\mathcal{S}[[h]]$ — это формальный ряд

$$\sum_{n \geq 0} f_n h^n,$$

где $f_n \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(V, W)$ для всех n . Композиция в $\mathcal{S}[[h]]$ определяется с помощью композиции в $\mathcal{S}$ и стандартного умножения формальных рядов. Тожественный морфизм объекта V в $\mathcal{S}[[h]]$ — постоянный формальный ряд $\sum_{n \geq 0} f_n h^n$, где $f_0 = \text{id}_V$ и $f_n = 0$ при $n > 0$. Категория $\mathcal{S}[[h]]$ имеет тензорное произведение, которое получается из тензорного произведения в $\mathcal{S}$ продолжением по R -линейности. Единичный объект — тот же, что и в $\mathcal{S}$.

Мы можем ввести в $\mathcal{S}[[h]]$ структуру косовой моноидальной категории в обобщенном смысле параграфа 2.1. Для этого мы определяем структуру ассоциирования a и структуру коммутирования c . Первая выражена через ассоциатор Дринфельда Φ и инфинитезимальное сплетение t на $\mathcal{S}$ следующим образом:

$$a_{U,V,W} = \Phi(h t_{U,V} \otimes \text{id}_W, h \text{id}_U \otimes t_{V,W}). \quad (2.4)$$

Формула для сплетения имеет следующий вид:

$$c_{V,W} = \sigma_{V,W} \exp\left(\frac{1}{2} h t_{V,W}\right), \quad (2.5)$$

где σ — симметрия в $\mathcal{S}$. Из определяющих уравнений для Φ следует, что структуры ассоциирования и коммутирования a и c удовлетворяют аксиомам пятиугольника и шестиугольника, тем самым превращая $\mathcal{S}[[h]]$ в косовую моноидальную категорию. Если в $\mathcal{S}$ есть двойственность, то $\mathcal{S}[[h]]$ становится ленточной категорией. Категория $\mathcal{S}[[h]]$ зависит от ассоциатора Дринфельда Φ . Тем не менее, это доказали Ле и Мураками, ленточные категории $\mathcal{S}[[h]]$, полученные из двух разных ассоциаторов Дринфельда, эквивалентны (см. [LM96], теорема 8).

3. Универсальный инвариант Концевича

Теперь мы выводим важные следствия из категориальных построений параграфов 1 и 2. Сначала мы строим инвариант Концевича Z для оснащенных ориентированных зацеплений и устанавливаем, что он универсален для инвариантов конечного типа. Так как квантовые инварианты являются инвариантами конечного типа, они могут быть выражены через Z . Соответствующая формула появляется в теореме 3.4.

3.1. Построение инварианта Концевича

Рассмотрим инфинитезимальную симметричную категорию с двойственностью $\mathcal{A}(R)$, определенную в параграфе 4 главы VIII. Возь-

мом $R = \mathbb{Q}$ и выберем ассоциатор Дринфельда Φ с рациональными коэффициентами. Далее, как в параграфе 2.3, мы строим ленточную категорию $\mathcal{A}(\mathbb{Q})[[\hbar]]$ из $\mathcal{A}(\mathbb{Q})$ и Φ .

Раскрашивая компоненты оснащенной ориентированной связки объектом $(+)$ из ленточной категории $\mathcal{A}(\mathbb{Q})[[\hbar]]$ и продолжая, как в параграфе 2 главы VI, мы получаем функтор $Z: T_0 \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{Q})[[\hbar]]$, сохраняющий тензорное произведение и нормированный условиями $Z((+)) = (+)$ и $Z((-)) = (-)$. Из последнего следует, что Z действует тождественно на объектах. Если T — оснащенная ориентированная связка, то $Z(T)$ есть формальный ряд

$$Z(T) = \sum_{m \geq 0} Z_m(T) \hbar^m,$$

где $Z_m(T)$ — рациональная линейная комбинация хордовых диаграмм, с m хордами, расположенными на подлежащем T одномерном особом подмногообразии. Например, если σ_1 — образующая группы кос B_2 , то

$$Z(\sigma_1) = \sigma_{(+), (+)} \exp\left(\frac{1}{2} \hbar t_{(+), (+)}\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{\hbar^k}{2^k k!} \sigma_{(+), (+)} t_{(+), (+)}^k.$$

Формальный ряд $Z(T)$ зависит от выбранного ассоциатора Дринфельда. (Здесь мы забываем о вычетах; детали см. в [KT95, Section 6].)

Теперь предположим, что T — оснащенное ориентированное зацепление K , т.е. эндоморфизм единичного объекта $\emptyset$. Тогда мы получаем формальный ряд $Z(K) = \sum_{m \geq 0} Z_m(K) \hbar^m$, где $Z_m(K)$ принад-

лежит $A_m(\mathbb{Q})$. Согласно Ле и Мураками [LM96], этот инвариант зацеплений независим от Φ . В случае узлов $Z(K)$ был впервые построен Концевичем [Кон93] с помощью кратных интегралов.

3.2. Предложение

Для всех $m \geq 0$ инвариант зацеплений Z_m является инвариантом Васильева степени $\leq m$.

Доказательство.

Функтор $Z: T_0 \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{Q})[[\hbar]]$ пропускается через $\mathbb{Q}$ -линеаризацию $T_0(\mathbb{Q})$. Нетрудно проверить, что Z посылает I , идеал аугментации $T_0(\mathbb{Q})$, в идеал $(\hbar)$ в $\mathcal{A}(\mathbb{Q})[[\hbar]]$ и, следовательно, индуцирует при всех m функтор

$$T_0(\mathbb{Q})/I^{m+1} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{Q})[[\hbar]]/(\hbar^{m+1}),$$

который мы можем записать как $Z_0 + hZ_1 + \dots + h^m Z_m$. По предложению 3.2 главы VIII, усеченный инвариант

$$K \mapsto Z_0(K) + hZ_1(K) + \dots + h^m Z_m(K),$$

пропущенный через $\mathcal{T}_0(\mathbb{Q})/I^{m+1}$, есть инвариант Васильева степени $\leq m$. Таким же образом,

$$K \mapsto Z_0(K) + hZ_1(K) + \dots + h^{m-1} Z_{m-1}(K)$$

имеет степень $\leq m-1$; поэтому у Z_m степень $\leq m$. ■

В доказательстве предыдущего предложения мы отметили, что функтор Z приводит к функтору

$$\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1} \longrightarrow \mathcal{A}(R)[[h]]/(h^{m+1}),$$

когда $R \supset \mathbb{Q}$. Далее проверяется, что его образ — категория $\mathcal{A}_m(R)$ из параграфа 4 главы VIII. Так как функтор биективен на объектах, достаточно показать, что он биективен на морфизмах, чтобы доказать теорему 4.3 главы VIII. Для этого нужно ввести подходящую фильтрацию множеств морфизмов и показать, что Z индуцирует изоморфизм на ассоциированных градуированных R -модулях (детали см. в [KT95, Section 6]). Из биекции между морфизмами $\mathcal{T}_0(R)/I^{m+1}$ и морфизмами $\mathcal{A}_m(R)$ мы выводим следующее универсальное свойство инвариантов Z_m .

3.3. Теорема

Пусть F_m — инвариант оснащенных ориентированных зацеплений со значениями в R -модуле E (где $R \supset \mathbb{Q}$). Предположим, что F_m есть инвариант Васильева степени $\leq m$. Тогда существует единственная линейная форма $w_m : \mathcal{A}_m(R) \rightarrow E$, такая что $F_m = w_m \circ Z_m$ есть инвариант степени $\leq m-1$.

Применяя это свойство несколько раз, видим, что F_m может быть записано как

$$F_m(K) = w_m(Z_m(K)) + w_{m-1}(Z_{m-1}(K)) + \dots + w_0(Z_0(K)),$$

где $w_m, w_{m-1}, \dots, w_0$ — определенные единственным образом линейные формы. Можно также использовать правую сторону предыдущего равенства, чтобы определить инварианты Васильева степени $\leq m$.

Применим теорему 3.3 к квантовым инвариантам. Напомним из параграфа 4 главы VII, что из любой комплексной полунростой алгебры

Ли $\mathfrak{g}$ и любого конечномерного простого $\mathfrak{g}$ -модуля V мы построили изотопический инвариант оснащенных ориентированных зацеплений $F_{\mathfrak{g},V}$. Инвариант $F_{\mathfrak{g},V}(K)$ оснащенного ориентированного узла K есть формальный ряд

$$F_{\mathfrak{g},V}(K) = \sum_{m \geq 0} F_{\mathfrak{g},V,m}(K) h^m$$

с комплексными коэффициентами и с постоянным членом равным $\dim V$. Мы заметили в предложении 1.3 главы VIII, что $F_{\mathfrak{g},V,m}$ есть инвариант Васильева степени $\leq m$. Следующая теорема была доказана в [Kas95], [LM96] (см. также [KT95, Сог. 7.3]).

3.4. Теорема

Для всякого оснащенного ориентированного узла K мы имеем

$$\frac{F_{\mathfrak{g},V}(K)}{F_{\mathfrak{g},V}(O)} = \frac{\sum_{m \geq 0} w_{\mathfrak{g},V}(Z_m(K)) h^m}{\sum_{m \geq 0} w_{\mathfrak{g},V}(Z_m(O)) h^m},$$

где $w_{\mathfrak{g},V}$ — линейная форма на $A(\mathbb{C})$, описанная в параграфе 1.7, и O — тривиальный узел с нулевым оснащением.

4. Действие $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

В этом параграфе мы покажем, как абсолютная группа Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ поля $\mathbb{Q}$ действует на инвариантах Васильева оснащенных ориентированных узлов.

4.1. Группа Гротендика — Тайхмюллера

Пусть R — поле характеристики 0. В [Dri90, Section 4] Дрипфельд определяет группу $\text{GT}(R)$, которую он называет группой Гротендика — Тайхмюллера. Группа $\text{GT}(R)$ состоит из определенных пар (λ, f) , где λ — ненулевой элемент R , а f — формальный ряд по двум некоммутирующим переменным A и B с коэффициентами в R вида $\exp F(\log A, \log B)$, где F — ряд Ли.

Далее, пусть $\mathcal{C}$ есть R -линейная косовая категория со структурой ассоциирования a и сплетением c . Для всякого $g = (\lambda, f) \in \text{GT}(R)$ Дрипфельд строит новую косовую категорию $\hat{\mathcal{C}}_g$, которая имеет ту же

подлежащую категорно и то же тензорное произведение, что и проуни-
потентное пополнение $\widehat{\mathcal{C}}$ (определенное в параграфе 3 главы VIII), но
имеет новую структуру ассоциирования:

$$a'_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

и новое сплетение:

$$c'_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V.$$

Они задаются следующим образом:

$$a'_{U,V,W} = a_{U,V,W} \circ f(\sigma_1^2, \sigma_2^2), \quad (4.1)$$

где

$$\sigma_1^2 = c_{V,U} c_{U,V} \otimes \text{id}_W \quad \text{и} \quad \sigma_2^2 = a_{U,V,W}^{-1} (\text{id}_U \otimes c_{W,V} c_{V,W}) a_{U,V,W}, \quad (4.2)$$

$$c'_{V,W} = c_{V,W} \circ \exp\left(\frac{1}{2}(\lambda - 1) \log(c_{W,V} c_{V,W})\right). \quad (4.3)$$

Действие $f(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ на $(U \otimes V) \otimes W$ хорошо определено в нополненной ка-
тегории $\widehat{\mathcal{C}}$, так как эндоморфизмы, индуцированные $\sigma_i^2 - 1$ для $i = 1, 2$,
принадлежат идеалу аугментации $\mathcal{C}$. Автоморфизм $\exp(\frac{1}{2}(\lambda -$
 $-1) \log(c_{W,V} c_{V,W}))$ объекта $V \otimes W$ хорошо определен в $\widehat{\mathcal{C}}$ по той же
причине.

Аксиомы пятиугольника и шестиугольника выполнены для новых
структур a' и c' из-за соотношений, определяющих группу Гротендика –
Тайхмюллера.

Если косован категории $\mathcal{C}$ является ленточной категорией, то то же
переносится и на $\widehat{\mathcal{C}}_g$. Определение морфизмов двойственности и опреде-
ление скручивания в $\widehat{\mathcal{C}}_g$ см. в [KT95, App. D].

4.2. Морфизм из группы Галуа в группу Гротендика – Тайхмюллера

Предположим теперь, что R есть поле $\mathbb{Q}_\ell$ ℓ -адических чисел для
данного простого числа ℓ . Используя работу Гротендика и Ихары, Дрин-
фельд [Dri90] построил групповой морфизм $\rho : \text{Gal}(\overline{bQ}/bQ) \rightarrow \text{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$,
где $\text{Gal}(\overline{bQ}/bQ)$ – абсолютная группа Галуа поля $\mathbb{Q}$. Скажем несколько
слов об определении ρ .

Хорошо известно, что $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на ℓ -проунипотентном пополнении $\widehat{\pi}_1$ фундаментальной группы проективной прямой с выколотыми тремя точками. Эта фундаментальная группа порождается двумя элементами x и y , которые мы можем представить следующим образом: x есть гомотонический класс маленькой петли вокруг 0, а y — класс петли, начинающейся в окрестности 0, пробегающей вдоль открытого интервала $]0, 1[$ к 1, обходящей один раз вокруг 1 и возвращающейся в исходную точку около 0. Пусть есть элемент $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Он действует на образующие x и y следующим образом:

$$x \mapsto x^{\chi(\sigma)} \quad \text{и} \quad y \mapsto f_{\sigma}(x, y)^{-1} y^{\chi(\sigma)} f_{\sigma}(x, y). \quad (4.4)$$

Здесь $\chi(\sigma)$ — циклотомический характер σ , определенный из $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$ для ℓ^n -го корня из единицы ζ . Как и для $f_{\sigma}(x, y)$, он принадлежит $\mathbb{Q}_{\ell}$ -проунипотентному пополнению свободной группы с двумя образующими, также он определен единственным образом. Дринфельд доказал, что на $\rho(\sigma) = (\chi(\sigma), f_{\sigma}(x, y))$ принадлежит $\text{GT}(\mathbb{Q}_{\ell})$ и что она определяет групповой гомоморфизм $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GT}(\mathbb{Q}_{\ell})$. Полные доказательства и детали см. в [Iha91], [Iha94].

4.3. Приложения к зацеплениям

Применим предыдущие рассмотрения к категории связок $\mathcal{T}_0$ оснащенных орнептированных связок. Рассмотрим ее проунипотентное пополнение $\widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})$ над полем $\mathbb{Q}_{\ell}$. Если σ — элемент $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, то, продолжая, как в параграфе 4.1, мы получаем новую ленточную категорию $\widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})_{\rho(\sigma)}$. Раскрашивая связки объектом $(+)$ из $\widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})_{\rho(\sigma)}$, как в параграфе 2 главы VI, мы получаем функтор

$$F_{\sigma} : \mathcal{T}_0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})_{\rho(\sigma)},$$

который действует тождественно на объектах. Ясно, что этот функтор пропускается через функтор

$$\widehat{F}_{\sigma} : \widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})_{\rho(\sigma)}.$$

Категории $\widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})$ и $\widehat{\mathcal{T}}_0(\mathbb{Q}_{\ell})_{\rho(\sigma)}$ имеют одну и ту же $\mathbb{Q}_{\ell}$ -алгебру эндоморфизмов единичного объекта $\widehat{L}(\mathbb{Q}_{\ell})$ (она была введена в параграфе 1 главы VIII). Поэтому функтор $\widehat{F}_{\sigma}$ действует на $\widehat{L}(\mathbb{Q}_{\ell})$ как алгебраический автоморфизм, тем самым индуцируя действие $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на $\widehat{L}(\mathbb{Q}_{\ell})$.

Таким же образом, рассматривая усеченную категорию связок $T_0(\mathbb{Q}_\ell)/I^{m+1}$, мы получаем действие $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на алгебре $L_m(\mathbb{Q}_\ell)$ эндоморфизмов единичного объекта в $T_0(\mathbb{Q}_\ell)/I^{m+1}$. По определению 1.1 главы VIII, двойственное пространство $\text{Hom}(L_m(\mathbb{Q}_\ell), \mathbb{Q}_\ell)$ есть пространство инвариантов Васильева степени $\leq m$ со значениями в $\mathbb{Q}_\ell$ для оснащенных ориентированных зацеплений. Отсюда следует, что $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на пространстве инвариантов Васильева.

Действие группы Галуа далеко не тривиально. Конечно, если эндоморфизм $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ принадлежит ядру циклотомического характера, то σ действует тривиально на $\hat{L}(\mathbb{Q}_\ell)$ и на $L_m(\mathbb{Q}_\ell)$. В этом случае действие группы Галуа пропускается через группу $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})/\ker(\chi)$, изоморфную $\mathbb{Z}_\ell^*$.

Действие $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ не тривиально: если σ — комплексное сопряжение, то $\rho(\sigma) = (-1, 1)$. Из (4.1) и (4.3) следует, что в данном случае структура ассоциирования в $\hat{T}_0(\mathbb{Q}_\ell)_{\rho(\sigma)}$ такая же, как $\hat{T}_0(\mathbb{Q}_\ell)$ и сплетение в $\hat{T}_0(\mathbb{Q}_\ell)_{\rho(\sigma)}$ обратно сплетению в $\hat{T}_0(\mathbb{Q}_\ell)$. Поэтому комплексное сопряжение посылает элемент $\hat{L}(\mathbb{Q}_\ell)$, представленный зацеплением L в класс зеркального отражения L . Так как многочлен Джонса отличает трилистник от его зеркального отражения, мы видим, что σ действует на $\hat{L}(\mathbb{Q}_\ell)$ нетривиально.

4.4. Действие группы Галуа на хордовых диаграммах

По следствию 2.3 главы VIII, мы можем отождествить $\hat{L}(\mathbb{Q}_\ell)$ с произведением $\prod_{m \geq 0} A_m(\mathbb{Q}_\ell)$. Группа Галуа действует на последнее через это отождествление. Бар-Натан (не опубликовано) доказал, что это действие имеет следующий простой вид:

$$\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_0, \chi(\sigma)x_1, \chi(\sigma)^2x_2, \chi(\sigma)^3x_3, \dots) \quad (4.5)$$

для всех $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ и $x_m \in A_m(\mathbb{Q}_\ell)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Отсюда вытекает, что $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует тривиально на произведении $\prod_{m \geq 0} A_m(\mathbb{Q}_\ell)$, а значит, и на изоморфном векторном пространстве $\hat{L}(\mathbb{Q}_\ell)$, тогда и только тогда, когда σ принадлежит ядру циклотомического характера.

Путеводитель по литературе

Есть довольно много специализированных книг о квантовых группах и об их связи с топологией малой размерности. Алгебраический подход к квантовым группам рассмотрен в [CP94], [Gui95], [Jos95], [Lus93], [Maj95], [SS94]. Связи с топологией обсуждаются в [Kas95], [Kau93], [Tur94]. Есть другие обзоры, касающиеся разных аспектов теории: [Bir93], [Car91], [Dri87], [JS91a], [Kas93], [Ros91], [Ros95], [Tur91], [Vog93].

Уравнение Янга–Бакстера впервые возникло в статье Янга [Yan67], как условие факторизации S -матрицы (матрицы рассеяния) в одномерной задаче многих тел, и в работе Бакстера о точно решаемых моделях в статистической механике (см. [Bax82]). Уравнение Янга–Бакстера также играет важную роль в квантовом методе обратной задачи рассеяния, созданном около 1978–1979 Фаддеевым, Склянинным и Тахтаджяном [Fad84] для конструирования интегрируемых квантовых систем. Попытки найти R -матрицы систематическим образом привели к теории квантовых групп, см. [Dri85], [Dri87], [Jim86a], [Jim86b]. Подход Вороновича см. в [Wor87a], [Wor87b], [Wor88], [Wor89].

Косовые моноидальные категории впервые ввели Жюлье и Стрит в [JS93], см. также [FY89] и [JS91b]. Читатель найдет классическое описание моноидальных категорий в книге МакЛейна [Mac71]. Понятие универсальной R -матрицы введено Дринфельдом [Dri87], [Dri89a].

Конструкция квантового дубля также принадлежит Дринфельду (см. [Dri87]). Описание, данное у нас, больше следует [RS88]. Квантовые деформации обертывающих алгебр полупростых алгебр Ли были введены независимо Дринфельдом [Dri85] и Джимбо [Jim85]. Базис Пуанкаре–Биркгофа–Витта найден Рocco [Ros89]. В той же статье дано построение универсальной R -матрицы для $U_{\hbar}sl(N+1)$. Универсальная R -матрица для полупростой алгебры Ли в общем случае найдена Кирилловым и Решетихиным [KR90], а также Левендорским и Сойбельманом [LS90]. Теория представлений квантовых групп была развита Лусцтигом [Lus88] и Рocco [Ros88].

Многочлен Джонса впервые появился в [Jon85] (см. также [Jon87]). Его элементарное определение и скейп-модули, о которых рассказывалось в главе V, введены Кауфманом [Kau87]. Категории связей ввели Тураев [Tur89] и Еттер [Yet88].

Содержание главы VI взято в основном из [Tur94]. Вывод инвариантов узлов из квантовых групп u , в более общем случае, из ленточных категорий впервые появился в [RT90] и [Tur92]. Инварианты трехмерных многообразий, выведенные из квантовых групп в корнях из единицы получены Решетикиным и Тураевым [RT91], см. также Тураев и Вендль [TW93]. Эта деятельность была вдохновлена теорией Виттена инвариантов трехмерных многообразий, получающихся из интегралов по путям (см. [Wit89]). Недавние достижения см. в [Law96], [Mur95], [Oht95].

Инварианты узлов конечной степени были определены Васильевым [Vas90], [Vas92] (см. также Гусаров [Gus91], [Gus94]). Немного спустя значительные вклады в теорию внесли Бар-Натаи [Bar95], Бирман и Лин [BL93], Картье [Car93], Концевич [Kon93], Ле и Мураками [LM96], [LM95], Пиунинкин [Piu95]. Мы в особенности советуем читать [Bar95]. Две последние главы у нас следуют [Kas95, Chapter XX] и [KT95]. Касательно действия $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, мы переформулировали результаты Дринфельда, которые появились в [Dri90] и были отчасти вдохновлены *Esquisse d'un programme* Гротендика.

Литература

- [Abe80] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press 1980.
- [And92] H.H. Andersen, *Tensor products of tilting modules*, Comm. Math. Phys. 149 (1992), 149–159.
- [Bar95] D. Bar Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, preprint, Harvard University, 1992, Topology 34 (1995), 423–472.
- [Bax82] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982.
- [Bir74] J. Birman, *Braids, links and mapping class groups*, Ann. of Math. Studies, vol. 82, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974.
- [Bir93] J. Birman, *New points of view in knot theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1993), 253–287.
- [BL93] J. Birman and X.S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. 111 (1993), 225–270.
- [BZ85] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, Studies in Math. 5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [Car91] P. Cartier, *Développements récents sur les groupes de tresses ; applications à la topologie et l'algèbre*, Séminaire Bourbaki, exposé 716 (nov. 1989), Astérisque, vol. 189–190, Soc. Math. France, Paris (1991), 17–67.
- [Car93] P. Cartier, *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev – Kontsevich des noeuds*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 316 (1993), 1205–1210.
- [CP94] V. Chari and A. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [CK90] C. de Concini and V. Kac, *Representations of quantum groups at a root of unity*, Progr. in Math., vol. 92, Birkhäuser, Boston 1990, 471–506.
- [CKP92] C. de Concini, V. Kac and C. Procesi, *Quantum coadjoint action*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), 151–190.
- [Dae93] A. van Daele, *Dual pairs of Hopf algebras*, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), 209–230.
- [Dri85] V.G. Drinfeld, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 283:5 (1985), 1060–1064 (= Soviet Math. Dokl. 32 (1985), 254–258).

- [Dri87] V.G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. I.C.M. Berkeley 1986, Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. 1 (1987), 798–820.
- [Dri89a] V.G. Drinfeld, *On almost commutative Hopf algebras*, Algebra i Analiz 1:2 (1989), 30–46 (= Leningrad Math. J. 1 (1990), 321–342).
- [Dri89b] V.G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Algebra i Analiz 1:6 (1989), 114–148 (= Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419–1457).
- [Dri90] V.G. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal*, Algebra i Analiz 2:4 (1990), 149–181 (= Leningrad Math. J. 2 (1991), 829–860).
- [Fad84] L.D. Faddeev, *Integrable models in (1 + 1)-dimensional quantum field theory*, Lectures at Les Houches 1982, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, New York, 1984.
- [FY89] P.J. Freyd and D. Yetter, *Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology*, Adv. Math. 77 (1989), 156–182.
- [Gui95] A. Guichardet, *Groupes quantiques. Introduction au point de vue formel*, InterÉditions and CNRS Éditions, Paris, 1995.
- [Gus91] M.N. Gusarov, *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 193 (1991), Geom. i Topol. 1, 4–9, 161; also in *Topology of manifolds and varieties*, (O. Viro, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994), 167–172.
- [Gus94] M.N. Gusarov, *On n-equivalence of knots and invariants of finite degree*, in *Topology of manifolds and varieties*, (O. Viro, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994), 173–192.
- [Hum78] J.E. Humphreys, *Finite and infinite dimensional modules for semisimple Lie algebras*, in *Lie Theories and their Applications*, Queen's Papers in Pure Appl. Math., vol. 48 (1978), Queen's University, Kingston, Ontario, 1–64.
- [Iha91] Y. Ihara, *Braids, Galois groups, and some arithmetic functions*, Proc. I.C.M. Kyoto 1990, The Mathematical Society of Japan (1991), 99–120.
- [Iha94] Y. Ihara, *On the embedding of Gal into $\widehat{GT}$* , Proc. Luminy Conf. 1993, in *The Grothendieck theory of dessins d'enfants*, (L. Schneps, editor), London Math. Soc. Lecture Note Series 200, Cambridge University Press, Cambridge (1994), 289–305.
- [Jim85] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63–69.
- [Jim86a] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. 11 (1986) 247–252.
- [Jim86b] M. Jimbo, *Quantum R-matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Phys. 102 (1986), 537–547.

- [Jon85] V.F.R. Jones, *Polynomial invariants of knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 103-111.
- [Jon87] V.F.R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. 126 (1987), 335-388.
- [Jos95] A. Joseph, *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Math., vol. 29, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.
- [JS91a] A. Joyal and R. Street, *An introduction to Tannakian duality*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1488, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991, 413-492.
- [JS91b] A. Joyal and R. Street, *The geometry of tensor calculus, I*, Adv. Math. 88 (1991), 55-112.
- [JS93] A. Joyal and R. Street, *Braided tensor categories*, Adv. Math. 102 (1993), 20-78.
- [Kas93] C. Kassel, *Invariants des noeuds, catégories tensorielles et groupes quantiques*, Gazette des Mathématiciens, 56 (1993), 63-80, Soc. Math. France, Paris.
- [Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Math., vol. 155, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1995.
- [KT95] C. Kassel and V. Turaev, *Chord diagram invariants of tangles and graphs*, preprint IRMA Strasbourg 1995 (<http://galois.u-strasbg.fr/preprint/sxb95/95037.ps.gz>), to appear in Duke Math. J.
- [Kau87] L. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology 26 (1987) 395-407.
- [Kau93] L. Kauffman, *Knots and physics*, 2nd edition, Series on knots and everything, vol. 1, World Scientific, Singapore, 1993.
- [KL93] D.A. Kazhdan and G. Lusztig, *Tensor structures arising from affine Lie algebras, I-IV*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 905-947, 949-1011; 7 (1994), 335-381, 383-453.
- [KR90] A.N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *q -Weyl group and a multiplicative formula for universal R -matrices*, Comm. Math. Phys. 184 (1990), 421-431.
- [Kon93] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, In I.M. Gelfand Seminar, Adv. Soviet Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, vol. 16, Part 2 (1993), 137-150.
- [LR88] R. Larson and D.E. Radford, *Semisimple cosemisimple Hopf algebras*, Amer. J. Math. 110 (1988), 187-195.
- [Law96] R.J. Lawrence, *Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of 3-manifolds as holomorphic functions*, in Proc. Conf. on Geometry and Physics, Århus (1995), Marcel Dekker, New York, 1996.

- [LM95] T.Q.T. Le and J. Murakami, *Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral*, Comm. Math. Phys. 168 (1995), 535–562.
- [LM96] T.Q.T. Le and J. Murakami, *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Comp. Math. 102 (1996), 41–64.
- [LS90] S.Z. Levendorsky and Ya.S. Soibelman, *Some applications of quantum Weyl groups*, J. Geom. Phys. 7 (1990), 241–254.
- [Lic62] W.B.R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. 76 (1962), 531–540.
- [Lus88] G. Lusztig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. 70 (1988), 237–249.
- [Lus90] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of 1*, Geom. Dedicata 35 (1990), 89–113.
- [Lus93] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progr. Math., vol. 110, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [Mac71] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1971.
- [Maj95] S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [Mur95] H. Murakami, *Quantum $SO(3)$ -invariants dominate the $SU(2)$ -invariant of Casson and Walker*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 117 (1995), 237–249.
- [Oht95] T. Ohtsuki, *Polynomial invariant of integral homology 3-spheres*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 117 (1995), 83–112.
- [Piu95] S. Piunikhin, *Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant*, Comm. Math. Phys. 168 (1995), 1–22.
- [Rad93] D.E. Radford, *Minimal quasitriangular Hopf Algebras*, J. Algebra 157 (1993), 285–315.
- [RS88] N.Yu. Reshetikhin and M. Semenov-Tian-Shansky, *Quantum R -matrices and factorization problems*, J. Geom. Phys. 5 (1988), 533–550.
- [RT90] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. 127 (1990), 1–26.
- [RT91] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. 103 (1991), 547–597.
- [Ros88] M. Rosso, *Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Comm. Math. Phys. 117 (1988), 581–593.
- [Ros89] M. Rosso, *An analogue of the P.B.W. theorem and the universal R -matrix for $U_{\hbar\epsilon l}(N+1)$* , Comm. Math. Phys. 124 (1989), 307–318.

- [Ros90] M. Rosso, *Analogues de la forme de Killing et du théorème d'Harish-Chandra pour les groupes quantiques*, Ann. Sc. École Normale Supérieure 23 (1990), 445-467.
- [Ros91] M. Rosso, *Représentations des groupes quantiques*, Séminaire Bourbaki, exposé 744 (juin 1991), Astérisque 201-203, S.M.F., Paris 1991, 443-483.
- [Ros92] M. Rosso, *Certaines formes bilinéaires sur les groupes quantiques et une conjecture de Schechtman et Varchenko*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 314 (1992), 5-8.
- [Ros93] M. Rosso, *Quantum groups at a root of 1 and tangle invariants*, Intern. J. Mod. Phys. B 7 (1993), 3715-3726.
- [Ros95] M. Rosso, *Groupes quantiques: origines et applications*, in Images des Mathématiques 1995, CNRS, Paris, 68-76.
- [Ser87] J.-P. Serre, *Complex semisimple Lie algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [SS94] S. Sternberg and S. Shnider, *Quantum groups — from coalgebras to Drinfeld algebras*, International Press, Cambridge, Mass., 1994.
- [Swe69] M.E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, 1969.
- [Tur88] V.G. Turaev, *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. 92 (1988), 527-553.
- [Tur89] V.G. Turaev, *Operator invariants of tangles and R-matrices*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 53:5 (1989), 1073-1107 (= Math. USSR-Izv. 35 (1990), 411-444.)
- [Tur91] V.G. Turaev, *State sum models in low-dimensional topology*, Proc. ICM, Kyoto, 1990, vol. 1 (1991), 689-698.
- [Tur92] V.G. Turaev, *Modular categories and 3-manifold invariants*, Int. J. Modern Phys. B, 6 (1992), 1807-1824.
- [Tur94] V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, Studies in Mathematics 18, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.
- [TW93] V. Turaev and H. Wenzl, *Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras*, Int. J. Modern Math. 4 (1993), 323-358.
- [Vas90] V.A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, in *Theory of singularities and applications*, Adv. Soviet Math., vol. 1 (1990), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 23-69.
- [Vas92] V.A. Vassiliev, *Complements of discriminants of smooth maps*, Transl. Math. Monographs, vol. 98 (1992), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [Vog93] P. Vogel, *Invariants de Vassiliev des noeuds (d'après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V.A. Vassiliev)*, Séminaire Bourbaki, Astérisque 216, Soc. Math. France, Paris 1993, 213-232.

- [Wal60] A.H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. 12 (1960), 503–528.
- [Wit89] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989), 351–399.
- [Wor87a] S.L. Woronowicz, *Twisted $\mathit{SU}(2)$ group, an example of noncommutative differential calculus*, Publ. RIMS 23 (1987), 117–181.
- [Wor87b] S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudo-groups*, Comm. Math. Phys. 111 (1987), 613–665.
- [Wor88] S.L. Woronowicz, *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudo-groups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math. 93 (1988), 35–76.
- [Wor89] S.L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Comm. Math. Phys. 122 (1989), 125–170.
- [Yan67] C.N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1312–1315.
- [Yet88] D.N. Yetter, *Markov algebras*, in Braids, Contemp. Math. 78, Amer. Math. Soc., Providence (1988), 705–730.

Предметный указатель

- R*-матрица, 9, 27
— универсальная, 27, 35, 53
ad-инвариантная билинейная форма, 41, 51
3-многообразий инварианты, 81
— квантовые инварианты, 83
- Аксиома пятиугольника, 117
— треугольника, 118
— шестиугольника, 119
Алгебра, 15
— Гекке, 90
— Ли полупростая, 97, 115
— Ли комплексная полупростая, 112
— Хопфа, 19
— — грунны, 20
— — конечномерная, 53, 93
— обертывающая, 17
— симметрическая, 17
— тензорная, 17, 20
Антипод, 19, 28
Ассоциатор Дринфельда, 119
- Базис типа Пуанкаре – Биркгофа – Витта, 47
Биналгебра, 15, 18
— грунновая, 20
— грунны, 16
— двойственная, 16
— квазитреугольная, 26
— кокоммутативная, 16, 19–21, 26
— косовая, 26, 27
— противоположная, 16
- Вектор старшего веса, 86
Вес, 86
— доминантный, 87
Вычет, 103, 107
- Группа Галуа, 125
— Гротендика – Тайхмюллера, 125
— кос, 11, 22
- Двойная точка, 100
Двойственная биналгебра, 16
— конструкция дубля, 30
Двойственность, 72
Диаграмма зацепления, 56, 58
— связи, 65
Дринфельда квантовый дубль, 34
Дубль обобщенный, 39, 47
- Единичный объект, 22
- Зацепление, 54, 84
— Хопфа, 56, 61, 80
— ориентированное, 62
— ориентированное особое, 100
— оснащенное особое, 100
— особое, 99
- Изотопия, 14
— зацеплений, 55
— оснащенных зацеплений, 55
Изотонные зацепления, 58
Инвариант Васильева, 101, 123, 128
Инвариант Концевича, 122
- Категория аддитивная, 78
— ленточная, 73
— ленточная (ribbon category), 93
— модулярная, 79, 96
— моноидальная, 21, 23, 118

- — косовая, 24, 67, 119, 122
- — строго, 22, 118
- связок, 105, 127
- симметричная, 111
- — инфинитезимальная, 115
- Кауффмана скейн-соотношение, 59
- Квантовая теория инвариантов, 89
- Квантовый дубль, 34
- инвариант, 98, 102
- Квантовый инвариант, 124
- Коассоциативность, 15
- Коединица, 16
- Коединицы аксиома, 15
- Кольца Борромео, 56
- Конец, 108
- Корень из единицы, 52, 92
- Корневые вектора, 48
- Коумножение, 16
- Коэффициент зацепления, 58
- Кратность, 87
- Кривая, 107
- Многочлен Джонса, 59, 62, 101
- скобочный, 61
- Модуль Верма, 86
- старшего веса, 86
- тензорное произведение, 20
- тривиальный, 21
- Морфизм алгебр Хопфа, 19
- биналгебр, 16
- сплетения, 67
- Начало, 108
- Оператор перестановки сомножителей, 10
- Оснащение, 55, 65
- индекс оснащения, 55
- Перестройки Райдемайстера, 58, 65
- Присоединенное действие, 41
- Пространство конфигурационное, 13
- Проунипотентное моноидное, 105, 126
- Размерность, 74, 95
- Ранг, 80
- Свертка, 19
- Связка, 64
- оснащенная, 64
- раскрашенная, 75
- Сигма-обозначения Свидлера, 18
- Симметрия, 111
- Скейн-класс, 59, 66
- Скейн-модуль, 59, 65, 69
- Скейн-функтор, 69
- Скручивание, 72, 94
- След, 73, 95
- Специализация, 52
- Силетение, 119, 122, 126
- инфинитезимальное, 111
- Силетение в категории, 24
- Структура ассоциирования, 117, 122, 126
- коммутирования, 23, 118, 122
- Тензорное произведение модулей, 20
- Трилистник, 56, 61
- Тройка Коивея, 63
- Узел, 54
- «восьмерка», 56
- Уравнение Книжника-Замолотчина, 120
- Янга-Бакстера, 9, 12, 31
- Характер, 87, 95
- Хирургия, 81
- Хопфово снашивание, 38, 45, 50
- Хорда, 103
- Хордовая диаграмма, 103, 108, 128
- Четырехчленное соотношение, 103
- Элемент групповой, 17
- примитивный, 17

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,
тел.: 332-48-92, (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Кристиан Кассел, Марк Россо, Владимир Тураев

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ И ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерная верстка С. В. Высоцкий

Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 29.05.02. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,14. Уч. изд. л. 8,26.

Гарнитура Антиква. Заказ №

Бумага офсетная №1.

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru
