УДК 219.217
К24
ББК 22.171

Карманов А.В. **Исследование управляемых конечных марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход).** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 176 с. — ISBN 5-9221-0260-5.

В настоящей книге проводится исследование управляемых конечных марковских цепей, задаваемых исходными данными, значения которых известны лишь приближенно, — управляемых конечные марковских цепей с неполной информацией. С использованием минимаксного подхода выявляются такие экстремальные свойства фундаментальных характеристик марковских цепей, на основе которых строятся итерационные процедуры нахождения оптимальных стратегий.

Книга рассчитана на специалистов по математике и кибернетике, интересующихся как алгоритмами нахождения оптимальных стратегий управления, так и развитием методов исследования управляемых конечных марковских цепей. Она может являться основой спецкурса «Управляемые марковские цепи» для студентов и аспирантов по специальностям «прикладная математика» и «математические методы в экономике», так как в ней последовательно излагаются основные сведения об управляемых конечных марковских цепях как с полной, так и с неполной информацией.

Основные результаты исследования рассмотрены и одобрены семинаром МГИЭМ «Управление и устойчивость» под руководством проф., д.т.н. В.М. Афанасьева.

Рецензенты: проф., д.т.н. В.М. Рудаков, проф., д.т.н. Ю.П. Спепин.

ISBN 5-9221-0260-5

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Управляемые конечные марковские цепи постоянно привлекают исследователей как содержательная и интересная, но вместе с тем трудная, область творчества, способная дать значительный экономический эффект при решении задач практики.

В настоящей книге проводится исследование управляемой конечной марковской цепи с неполной информацией, где под неполной информацией понимается неточное знание исходных данных, которыми задается рассматриваемая цепь. При этом считаются точно известными лишь некоторые области, которым принадлежат значения этих исходных данных.

В этих условиях автором выявляются такие экстремальные свойства некоторых фундаментальных характеристик управляемых конечных марковских цепей, которые позволяют:

1. Доказать существование оптимальных стационарных вырожденных стратегий, независящих от начального распределения, при традиционном функционале — средний доход в единицу времени — и, по сути дела, с минимаксным критерием оптимальности;
2. Разработать итерационные процедуры нахождения этих стратегий.

По предмету исследования монография близка к работам Р. Ховарда «Динамическое программирование и марковские процессы», Х. Майна, С. Осаки «Марковские процессы принятия решения». Фактически она обобщает полученные там результаты на случай оптимального управления конечными марковскими цепями с неполной информацией.

Исследования, проведенные автором, излагаются в монографии последовательно, строго, но весьма формально, что несколько усложняет понимание их содержательной стороны. Однако заинтересованный читатель, владеющий основами теории управляемых марковских цепей, без сомнения преодолеет эту трудность.

Монография рассчитана на специалистов по прикладной математике и кибернетике. Она может служить теоретической основой для разработки инженерных методов расчета оптимального управления марковскими объектами с неполной информацией, которые часто встречаются в разнообразных областях науки и техники.

Проф., д.ф.-м.н. В.А. Каштанов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Автор книги в течение длительного времени являлся участником Всесоюзного семинара «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», возглавляемого академиком Ю.Н. Руденко. На этом семинаре, наряду с изложением результатов, проводилось обсуждение различных научно-технических проблем, связанных с повышением технико-экономических показателей как проектируемых, так и эксплуатируемых энергетических систем, в частности проблемы эффективного управления сложной системой с учетом надежности составляющих ее элементов.

Эта система обладает, наряду с прочими, и следующей особенностью: ограниченной (неполной) информацией о надежностных характеристиках элементов. В процессе обсуждения был намечен подход к решению упомянутой проблемы, состоящий из двух этапов:

- разработка и исследование математических моделей, позволяющих найти процедуры расчета оптимального управления сложной системой;
- проведение прикладных научных работ по созданию баз данных и методик расчета оптимального управления конкретными системами.

В инициативном порядке автор взялся за реализацию первого этапа, и в конце девяностых годов были получены основные результаты [49], которые после переработки были оформлены и представлены читателям в виде настоящей монографии.

Эта книга едва ли была бы опубликована без учета критических замечаний, сделанных доктором физ.-мат. наук В.А. Каштановым и доцентом В.М. Жуковым. Эти замечания существенно изменили взгляд автора на природу объекта исследования. Пользуясь случаем, выражаю им свою глубокую признательность.

Автор выражает благодарность доценту С.М. Купцову и к.т.н. В.А. Носову, ассистенту Л.Е. Ефимовой за помощь в оформлении и корректировании большинства разделов книги.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. УКМЦ — управляемая конечная марковская цепь.

2. КМЦД — конечная марковская цепь с доходом и ресурсом.

3. R^1 — множество всех действительных чисел.

4. $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел.

5. $\{x \in \mathrm{A} : \mathrm{B}(x)\}$ — совокупность всех элементов x из множества A, для которых выполняется условие $\mathrm{B}(x)$.

6. $\mathcal{A}(\cdot)$ — множество всех подмножеств множества $(\cdot)$.

7. $[x, y]$ — замкнутый интервал, где $x \in \mathrm{R}^1$, $y \in \mathrm{R}^1$.

8. $\mathrm{J} = \{1, \ldots, n\}$ — конечное множество состояний. Любой элемент из множества J называется состоянием и обозначается через i, где $i = \overline{1, n}$, n — натуральное число.

9. $\mathcal{P}_{1,n} = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 + \ldots + a_n = 1,\ a_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n}\}$ — множество всех n-мерных стохастических векторов-строк.

10. a — начальное распределение, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$.

11. $\mathrm{H} = \mathcal{P}_{1,n} \times [-\beta_0, \beta_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, где $0 < \alpha_0 < \beta_0$.

12. $\mathrm{H}^n = \mathrm{H} \times \ldots \times \mathrm{H}$ — прямое произведение n экземпляров множества H.

13. $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — любой элемент из множества H^n, где $h_i = (h_{i,1}, \ldots, h_{i,n}, h_{i,n+1}, h_{i,n+2}) \in \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$. При этом $(h_{i,1}, \ldots, h_{i,n}) \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h_{i,n+1} \in [-\beta_0, \beta_0]$, $h_{i,n+2} \in [\alpha_0, \beta_0]$.

14. $\mathrm{P}(h) = (h_{i,j})$ — стохастическая матрица порядка n, соответствующая элементу h, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

15. $q_1(h) = [h_{1,n+1}, \ldots, h_{n,n+1}]^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец дохода, соответствующий элементу h, где T — знак транспонирования.

16. $q_2(h) = [h_{1,n+2}, \ldots, h_{n,n+2}]^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец ресурса, соответствующий элементу h.

17. $\xi_0(\mathrm{a}, h)$ — однородная конечная марковская цепь с доходом и ресурсом (однородная КМЦД), задаваемая начальным распределением a, матрицей переходных вероятностей $\mathrm{P}(h)$, векторами дохода и ресурса соответственно $q_1(h)$ и $q_2(h)$.

18. $\Xi_0 = \{\xi_0(\mathrm{a}, h) : a \in \mathcal{P}_{1,n},\ h \in \mathrm{H}^n\}$ — множество всех однородных КМЦД с числом состояний, равным n.

19. $\mathfrak{G} = \{(h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots) : h^{(k)} \in \mathrm{H}^n,\ k = \overline{1, \infty}\}$.

20. $\mathfrak{h} = (h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots)$ — любой элемент из множества $\mathfrak{G}$.

21. $\left\{\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$ — последовательность стохастических матриц, соответствующая элементу $\mathfrak{h}$, где $\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{P}(h^{(k)})$, $k = \overline{1, \infty}$.

22. $\left\{q_1^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$ — последовательность векторов дохода, соответствующая элементу $\mathfrak{h}$, где $q_1^{(k)}(\mathfrak{h}) = q_1(h^{(k)})$, $k = \overline{1, \infty}$.

23. $\left\{q_2^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$ — последовательность векторов ресурса, соответствующая элементу $\mathfrak{h}$, где $q_2^{(k)}(\mathfrak{h}) = q_2(h^{(k)})$, $k = \overline{1,\infty}$.

24. $\xi(\mathrm{a},\mathfrak{h})$ — конечная марковская цепь с доходом и ресурсом (КМЦД), задаваемая начальным распределением a, последовательностью матриц переходных вероятностей $\left\{\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$, последовательностями векторов дохода и ресурса соответственно $\left\{q_1^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$, $\left\{q_2^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$.

25. $\Xi = \{\xi(\mathrm{a},\mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}\}$ — множество всех КМЦД с числом состояний, равным n.

26. $\mathcal{U}_i = \{1,\ldots,m(i)\}$ — конечное множество управлений в состоянии i.

27. $[\mathcal{U}_i, \mathcal{B}(\mathcal{U}_i)]$ — пространство управлений, где $\mathcal{B}(\mathcal{U}_i)$ — множество событий, определенное на множестве $\mathcal{U}_i$.

28. $\mathcal{P}_i$ — множество всех вероятностных мер на пространстве $[\mathcal{U}_i, \mathcal{B}(\mathcal{U}_i)]$, где $i = \overline{1,n}$.

29. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \ldots \times \mathcal{P}_n$.

30. $\mathrm{S} = \{[\mathfrak{s}^{(1)},\ldots,\mathfrak{s}^{(k)},\ldots] : \mathfrak{s}^{(k)} \in \mathcal{P}, k = \overline{1,\infty}\}$ — множество (марковских) стратегий, где $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)},\ldots,\mathfrak{s}_n^{(k)}]$, $\mathfrak{s}_i^{(k)} \in \mathcal{P}_i$, $i = \overline{1,n}$.

31. $\mathrm{s} = [\mathfrak{s}^{(1)},\ldots,\mathfrak{s}^{(k)},\ldots]$ — любой элемент из множества S, именуемый стратегией и представляющий собой последовательность вероятностных мер на пространствах управлений $[\mathcal{U}_i, \mathcal{B}(\mathcal{U}_i)]$, $i = \overline{1,n}$.

32. $\psi_i : \mathcal{U}_i \to \mathrm{H}$ — борелевское отображение множества $\mathcal{U}_i$ в множество H, $i = \overline{1,n}$.

33. $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$ — элемент множества $\mathfrak{G}$, соответствующий стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{h}(\mathrm{s}) = [h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}),\ldots,h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}),\ldots]$, $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}) = [h_1^{(k)}(\mathfrak{s}_1^{(k)}),\ldots$ $\ldots,h_n^{(k)}(\mathfrak{s}_n^{(k)})] \in \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1,\infty}$, $h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) \in \mathrm{H}$, $h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \psi_i(1)\mathfrak{s}_{i,1}^{(k)} + \ldots$ $\ldots + \psi_i(m(i))\mathfrak{s}_{i,m(i)}^{(k)}$, $i = \overline{1,n}$.

34. $[\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$ — управляемая конечная марковская цепь (УКМЦ с полной информацией), где $\mathcal{F} : \mathrm{S} \to \Xi$ — отображение множества стратегий S в множество всех КМЦД Ξ, задаваемое соотношением $\mathcal{F}(\mathrm{s}) = \xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}))$, $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$.

35. $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению u_i, где $\mathcal{D}_i(u_i) \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, $u_i = 1,\ldots,m(i)$.

36. $\mathfrak{G}(\mathrm{s}) = \{[h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}),\ldots,h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}),\ldots] \in \mathfrak{G} : h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \sum\limits_{j=1}^{m(i)} h_i^{(k)}(j) \times$ $\times\, \mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}$, $h_i^{(k)}(j) \in \mathcal{D}_i(j)$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,\infty}\}$ — нестационарная характеристика неполной информации, соответствующая стратегии s, где $\mathrm{s} \in$ $\in \mathrm{S}$, $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)},\ldots,\mathfrak{s}_n^{(k)}]$ — соответствующая компонента стратегии s, $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}) = [h_1^{(k)}(\mathfrak{s}_1^{(k)}),\ldots,h_n^{(k)}(\mathfrak{s}_n^{(k)})] \in \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1,\infty}$.

37. $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}) = \{[h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}),\ldots,h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}),\ldots] \in \mathfrak{G}(\mathrm{s}) :$ [для любого $k =$ $= \overline{1,\infty}$ выполняется равенство $h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \sum\limits_{j=1}^{m(i)} h_i(j)\mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}$, $h_i(j) \in \mathcal{D}_i(j)$,

$i = \overline{1,n}]\}$ — стационарная характеристика неполной информации, соответствующая стратегии s.

38. $[\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_1]$ — УКМЦ с неполной информацией и стационарной характеристикой неполной информации, где S — множество стратегий, $\mathcal{A}(\Xi)$ — множество всех подмножеств множества Ξ, $\mathcal{F}_1 : \mathrm{S} \to \mathcal{A}(\Xi)$ — отображение, определяемое выражением: $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, \mathfrak{h} \in \in \mathfrak{G}_1(\mathrm{s})\}$.

39. $[\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_2]$ — УКМЦ с неполной информацией и нестационарной характеристикой неполной информации, где $\mathcal{F}_2 : \mathrm{S} \to \mathcal{A}(\Xi)$ — отображение, определяемое выражением: $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}(\mathrm{s})\}$.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время трудно переоценить значение теории управляемых конечных марковских цепей. Эта теория нашла широкое применение в различных областях науки и техники, таких, как исследование операций, экономическая кибернетика, теория надежности, теория оптимального управления сложными системами и т.д.

Хотя первые публикации по управляемым конечным марковским цепям (УКМЦ) появились в конце пятидесятых — начале шестидесятых годов [2–8], исследования в этой области интенсивно продолжаются и в настоящее время [12–16, 24–28, 32–68], что, с одной стороны, определяется плодотворностью теории УКМЦ, а с другой стороны, показывает, что не все запросы практики удовлетворяются ею полностью.

Действительно, в приложениях часто возникает ситуация, когда непосредственное использование полученных в теории УКМЦ результатов становится некорректным, что указывает на существование иных, хотя и близких к УКМЦ, но в должной мере не изученных математических объектов. Для описания одного из таких объектов, названного УКМЦ с неполной информацией, подробней остановимся на ситуации, в которой он возникает.

Прежде всего, укажем некоторые особенности определения и способа задания УКМЦ с конечным множеством управлений. Для наглядности эти особенности выявим на примере физического объекта, управляемого диспетчером и обладающего следующими свойствами :

1. Объект характеризуется наблюдаемыми и регистрируемыми в дискретные моменты времени t_k параметрами, где $k = \overline{1,\infty}$. Множество значений этих параметров является конечным множеством, независящим от k. Это множество представляется в виде $\mathrm{J} = \{1, \ldots, n\}$ и называется множеством состояний объекта, где $n \in \mathcal{N}$;

2. Если в момент времени t_{k-1} объект находится в состоянии i, то диспетчер должен с вероятностью $\mathfrak{s}_{i,\ell}^{(k)}$ выбрать одно управляющее воздействие ℓ из конечного множества $\mathcal{U}_i$ допустимых управляющих воздействий в состоянии i и применить его к объекту, где $k = \overline{1,\infty}$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1,n}$. Управляющее воздействие, примененное к объекту, влияет на его дальнейшее поведение следующим образом: состояние объекта в следующий момент времени t_k будет равно j с вероятностью $p_{i,j}(\ell)$, где $j = \overline{1,n}$. Для вероятностей $\mathfrak{s}_{i,\ell}^{(k)}$, $p_{i,j}(\ell)$ выполняются соотношения

$$\mathfrak{s}_{i,\ell}^{(k)} \geqslant 0, \quad \mathfrak{s}_{i,\ell}^{(k)} + \ldots + \mathfrak{s}_{i,m(i)}^{(k)} = 1, \tag{1}$$

$$p_{i,j}(\ell) \geqslant 0, \quad p_{i,1}(\ell) + \ldots + p_{i,n}(\ell) = 1, \tag{2}$$

где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $\ell \in \mathcal{U}_i$. При этом стохастический вектор $\mathfrak{s}_i^{(k)} = [\mathfrak{s}_{i,1}^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_{i,m(i)}^{(k)}]$ именуется рандомизированным управлением в состоянии i, а стохастический вектор $p_i(\ell) = [p_{i,1}(\ell), \ldots, p_{i,n}(\ell)]$ — вектором переходных вероятностей в состоянии i, соответствующим управляющему воздействию ℓ, где $\ell \in \mathcal{U}_i$.

В начальный момент времени t_0 объект находится в состоянии i с вероятностью a_i, где $a_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. Вектор $\mathrm{a} = [a_1, \ldots, a_n]$ называется начальным распределением;

3. Если в момент времени t_{k-1} объект находился в состоянии i и было применено управление ℓ, то на интервале времени $[t_{k-1}, t_k]$, именуемом по традиции [5] k-м шагом, объект приносит доход, равный $q_i(\ell)$, где $i = \overline{1,n}$, $\ell \in \mathcal{U}_i$, $k = \overline{1,\infty}$. При этом для дохода выполняется соотношение

$$-\beta_0 \leqslant q_i(\ell) \leqslant \beta_0, \tag{3}$$

где $\beta_0 > 0$.

Соотношения (3) указывают на то, что доход является ограниченной величиной.

Объект, обладающий свойствами 1–3, представляет собой управляемый марковский объект. Укажем следующие пять его основных особенностей:

1. Управление объектом осуществляется диспетчером в дискретные моменты времени t_{k-1}, где $k = \overline{1,\infty}$, в соответствии с правилом s, называемым (марковской) стратегией и имеющим вид

$$\mathrm{s} = [\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots], \tag{4}$$

где $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}]$, $\mathfrak{s}_i^{(k)}$ — рандомизированное управление в состоянии i, применяемое в момент времени t_{k-1} (или на k-м шаге), $k = \overline{1,\infty}$, $i = \overline{1,n}$. При этом множество S всех стратегий вида (4), называемое множеством (марковских) стратегий, имеет вид

$$\mathrm{S} = \{[\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots] : \mathfrak{s}^{(k)} \in \mathcal{P}, \quad k = \overline{1,\infty}\}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}] \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1,m(1)} x \ldots x \mathcal{P}_{1,m(n)}$, $\mathfrak{s}_i^{(k)} \in \mathcal{P}_{1,m(i)}$, $\mathcal{P}_{1,m(i)}$ — множество всех $m(i)$-мерных стохастических векторов, $i = \overline{1,n}$.

Отметим, что именно из множества S выбирается и передается диспетчеру некоторая стратегия s, в соответствии с которой он осуществляет управление марковским объектом. При этом считается, что любая стратегия s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, может быть использована для управления объектом;

2. Минимальным набором исходных данных, которым можно задать рассматриваемый марковский объект, является следующая совокупность:

$$[a, \mathrm{J}, \{\mathcal{U}_i : i \in \mathrm{J}\}, \ \{h_i(\ell) : \ell \in \mathcal{U}_i, \ i \in \mathrm{J}\}], \tag{6}$$

где $h_i(\ell) = [p_{i,1}(\ell), \ldots, p_{i,n}(\ell), q_i(\ell)]$;

3. При фиксированной стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, наблюдение за процессом смены состояний и управлений объекта в моменты времени t_k, $k = \overline{0,\infty}$ дает траекторию r, которая имеет вид

$$r = [(i_0, \ell_1), (i_1, \ell_2), \ldots, (i_k, \ell_{k+1}), \ldots], \tag{7}$$

где (i_k, ℓ_{k+1}) — пара, состоящая соответственно из состояния i_k, в котором пребывает объект в момент времени t_k, и управляющего воздействия ℓ_{k+1}, примененного диспетчером к объекту в этом состоянии. При этом для любого k, где $k = \overline{0, \infty}$, справедливо выражение: $i_k \in \mathrm{J}$, $\ell_{k+1} \in \mathcal{U}_{i_k}$. Вероятность траектории r определяется в соответствии с определением стратегии s и исходными данными, изложенными в свойстве 2 объекта, по формуле

$$\mathrm{P}_{a,\mathrm{s}}(r) = a_{i_0} \cdot \mathfrak{s}^{(1)}_{i_0,\ell_1} \cdot p^{(1)}_{i_0,i_1}(\ell_1) \times \ldots \times \mathfrak{s}^{(k)}_{i_k,\ell_{k+1}} \cdot p^{(k)}_{i_k,i_{k+1}}(\ell_{k+1}) \times \ldots \quad (8)$$

Таким образом, формируется вероятностное пространство траекторий

$$(\mathrm{R}, \mathcal{B}(\mathrm{R}), \mathrm{P}_{a,\mathrm{s}}), \quad (9)$$

R — множество всевозможных траекторий r, имеющих вид (7), $\mathcal{B}(\mathrm{R})$ — множество событий на множестве траекторий, $\mathrm{P}_{a,\mathrm{s}}$ — вероятностная мера, заданная на множестве $\mathcal{B}(\mathrm{R})$ и обладающая свойством (8);

4. При фиксированной стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, математической моделью процесса смены состояний объекта в дискретном времени t_k, где $k = \overline{0, \infty}$, является конечная марковская цепь $\eta(\mathrm{s})$. Эта цепь представляет собой последовательность случайных величин η_k, $k = \overline{0, \infty}$, определенных на вероятностном пространстве траекторий (9) выражением

$$\eta_k(r) = i_k, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (10)$$

где $r \in \mathrm{R}$. При этом следующая условная вероятность, называемая переходной вероятностью из состояния i в состояние j при стратегии s на $(k+1)$-м шаге, определяется в соответствии с выражением (8) по формуле

$$p_{i,j}(\mathfrak{s}^{(k+1)}_i) = \mathrm{P}_{a,\mathrm{s}}(\eta_{k+1} = j | \eta_k = i) = \\ = \mathfrak{s}^{(k+1)}_{i,1} p_{i,j}(1) + \ldots + \mathfrak{s}^{(k)}_{i,m(i)} p_{i,j}(m(i)), \quad (11)$$

где $\mathfrak{s}^{(k+1)}_i$ — рандомизированное управление, применяемое в состоянии i в момент времени t_k (на $(k+1)$-м шаге) и являющееся соответствующей компонентой стратегии s, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, \infty}$.

В момент времени t_0 марковская цепь $\eta(\mathrm{s})$ имеет начальное распределение a, т.е. $\mathrm{P}_{a,\mathrm{s}}(\eta_0 = i) = a_i$, где $i = \overline{1, n}$;

5. Пусть при фиксированной стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, управляемый марковский объект в момент t_k находится в состоянии i, тогда за $(k+1)$-й шаг он приносит доход, который в соответствии со свойством 3 определяется по формуле

$$q_i(\mathfrak{s}^{(k+1)}_i) = \mathfrak{s}^{(k+1)}_{i,1} q_i(1) + \ldots + \mathfrak{s}^{(k+1)}_{i,m(i)} q_i(m(i)), \quad (12)$$

где $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{0, \infty}$.

Теперь дадим определение УКМЦ с конечным множеством управлений и укажем особенности этой управляемой цепи.

Пусть $\xi(\mathrm{s}) = (\eta(\mathrm{s}), q(\mathrm{s}))$ — конечная марковская цепь с доходом (КМЦД), соответствующая стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, $\eta(\mathrm{s}) = \{\eta_k, k = \overline{0,\infty}\}$ — марковская цепь, определенная выражением (10), $q(\mathrm{s}) = \{q(\mathfrak{s}^{(k+1)}), k = \overline{0,\infty}\}$, $q(\mathfrak{s}^{(k+1)}) = [q_1(\mathfrak{s}_1^{(k+1)}), \ldots, q_n(\mathfrak{s}_n^{(k+1)})]^{\mathrm{T}}$ — вектор дохода за $(k+1)$-й шаг цепи $\eta(\mathrm{s})$, T — знак транспонирования, $q_i(\mathfrak{s}_i^{(k+1)})$ — величина, определяемая выражением (12), $i = \overline{1,n}$, и пусть Ξ — множество всевозможных КМЦД с числом состояний, равным n.

Тогда УКМЦ с конечным множеством управлений представляет собой совокупность, имеющую вид

$$[\mathrm{S}, \Xi, \xi], \tag{13}$$

где $\xi : \mathrm{S} \to \Xi$, т.е. ξ является отображением множества стратегий S в множество всех КМЦД Ξ; при этом $\xi(\mathrm{s}) = (\eta(\mathrm{s}), q(\mathrm{s}))$ и $\xi(\mathrm{s}) \in \Xi$.

Теперь укажем две основные особенности УКМЦ, являющиеся следствием ее определения:

а. Каждой фиксированной стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, ставится в соответствие одна конечная марковская цепь с доходом $\xi(\mathrm{s})$, которая задается следующей совокупностью исходных сведений:

$$[a, \{\mathrm{P}^{(k+1)}(\mathrm{s}), k = \overline{0,\infty}\}, \quad \{q^{(k+1)}(\mathrm{s}), k = \overline{0,\infty}\}], \tag{14}$$

где a — начальное распределение, $\mathrm{P}^{(k+1)}(\mathrm{s}) = (p_{i,j}(\mathfrak{s}_i^{(k+1)}))$ — матрица переходных вероятностей на k-м шаге, имеющая порядок n и элементы которой определяются выражением (11), $q^{(k+1)}(\mathrm{s}) = q(\mathfrak{s}^{(k+1)})$ — n-мерный вектор дохода за k-й шаг, i-я компонента которого определяется выражением (12), $i = \overline{1,n}$;

б. УКМЦ является математической моделью рассматриваемого управляемого марковского объекта и может быть задана совокупностью исходных данных, определяемой выражением (6). Здесь же отметим, что в подавляющем числе работ, например [4–6, 12–16], УКМЦ традиционно задается именно этой совокупностью.

Сформулируем теперь цель управления УКМЦ.

Если каждой фиксированной стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, поставить в соответствие значение среднего дохода, получаемого за один шаг марковской цепи $\xi(\mathrm{s})$ и определяемого выражением

$$\Phi(\mathrm{s}) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, k^{-1} \cdot \mathrm{Q}(a, \xi(\mathrm{s}), k), \tag{15}$$

где

$$\mathrm{Q}(a, \xi(\mathrm{s}), k) = a \cdot \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}^{(j-1)}(\mathrm{s}) \cdot q^{(m)}(\mathrm{s}), \tag{16}$$

то цель управления УКМЦ состоит в максимизации этого дохода, т.е. в определении такой оптимальной стратегии s^*, для которой выполняется соотношение

$$\Phi(s^*) = \sup\{\Phi(s) : s \in S\}. \tag{17}$$

Отметим, что:

1) $\Phi(s)$ является функционалом, заданным на множестве стратегий S, т.е. $\Phi : S \to R^1$, а выражение (17) определяет критерий оптимальности для УКМЦ;

2) $Q(a, \xi(s), k)$ является средним аддитивным доходом, получаемым на цепи $\xi(s)$ за интервал времени $[t_0, t_k]$ (или за k шагов) при стратегии s, где $s \in S$;

3) именно стратегию s^* необходимо иметь диспетчеру для осуществления эффективного управления, позволяющего получить максимальный средний доход в единицу дискретного времени (на один шаг) от длительной эксплуатации марковского объекта.

УКМЦ, задаваемая совокупностью (6), исследуется в работах [4, 5, 8], и основным результатом здесь является следующее утверждение: существует непустое множество оптимальных стратегий, независящих от начального распределения, и это множество содержит стационарную вырожденную в точке u стратегию s(u), где $s(u) = [\mathfrak{s}(u), \ldots, \mathfrak{s}(u), \ldots] \in S$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\mathfrak{s}(u) = [\mathfrak{s}_1(u_1), \ldots, \mathfrak{s}_n(u_n)] \in \mathcal{P}$, $\mathfrak{s}_i(u_i)$ — стохастический вектор, вырожденный в точке u_i, т.е. $\mathfrak{s}_{i,j}(u_i) = 1$, если $j = u_i$, $\mathfrak{s}_{i,j}(u_i) = 0$, если $j \neq u_i$, $j = 1, \ldots, m(i)$, $i = \overline{1, n}$. При этом процедура поиска указанной оптимальной стратегии представляет собой итерационный алгоритм Р. Ховарда, сходящийся за конечное число итераций. Этот результат имеет важное прикладное значение, так как позволяет осуществить поиск оптимальной стратегии s^* на конечном множестве стационарных вырожденных стратегий.

Однако использование указанного результата теории УКМЦ становится некорректным в следующей ситуации, часто встречающейся в приложениях при управлении марковским объектом: значение вектора

$$h_i(\ell) = [(p_{i,1}(\ell), \ldots, p_{i,n}(\ell), q_i(\ell)], \tag{18}$$

определяющего стохастические свойства управляемого марковского объекта и входящего в совокупность (6) точно не известно, а известна лишь некоторая область его значений $\mathcal{D}_i(\ell)$, где $\ell = 1, \ldots, m(i)$, $i = \overline{1, n}$.

Указанная ситуация возникает в прикладных задачах, например в следующем случае: вектор $h_i(\ell)$ определяется обработкой статистических данных, поэтому достаточно точно бывает известна лишь некоторая область его значений $\mathcal{D}_i(\ell)$, где $\ell = 1, \ldots, m(i)$, $i = \overline{1, n}$;

Область $\mathcal{D}_i(\ell)$ является характеристикой неполной информации в значении вектора $h_i(\ell)$, где $\ell \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$, и входит в совокупность исходных данных, которой задается новый объект — УКМЦ с неполной информацией. Эта совокупность записывается аналогично совокупности (6) и имеет вид

$$[a, \mathrm{J}, \{\mathcal{U}_i : i \in \mathrm{J}\}, \{\mathcal{D}_i(\ell) : \ell \in \mathcal{U}_i, i \in \mathrm{J}\}]. \tag{19}$$

Понятно, что в случае, если $\mathcal{D}_i(\ell)$, $\ell \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1,n}$, являются одноэлементными множествами, то совокупность (19) совпадает с совокупностью (6), т.е. УКМЦ с неполной информацией тождественна УКМЦ, которая теперь будет именоваться УКМЦ с полной информацией.

Замечание 1. Характеристики $\mathcal{D}_i(\ell)$, $\ell \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1,n}$, в УКМЦ с неполной информацией отличаются от «похожих» характеристик, используемых в **стохастических играх** на марковских цепях $\mathcal{B}_i(\ell)$, $\ell \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1,n}$, которые имеют вид: $\mathcal{B}_i(\ell) = \{h_i(\ell, \mathrm{v}) : \mathrm{v} \in \mathrm{V}_i\}$, где V_i — некоторая заданная числовая область значений параметра v, $i = \overline{1,n}$; элемент $h_i(\ell, \mathrm{v})$, в соответствии с выражением (18), определяет вектор переходных вероятностей $[p_{i,1}(\ell, \mathrm{v}), \ldots, p_{i,n}(\ell, \mathrm{v})]$ и доход $q_i(\ell, \mathrm{v})$ в состоянии i. Суть различий этих характеристик заключается в следующем: для различных управлений ℓ_1, ℓ_2 элементы множеств $\mathcal{D}_i(\ell_1)$, $\mathcal{D}_i(\ell_2)$ не зависят друг от друга, тогда как элементы множеств $\mathcal{B}_i(\ell_1)$, $\mathcal{B}_i(\ell_2)$ связаны через параметр v, т.е.

$$\begin{gathered}\{[h_i(\ell_1), h_i(\ell_2)] : h_i(\ell_1) \in \mathcal{D}_i(\ell_1), h_i(\ell_2) \in \mathcal{D}_i(\ell_2)\} = \mathcal{D}_i(\ell_1)\times\mathcal{D}_i(\ell_2),\\ \{[h_i(\ell_1, \mathrm{v}), h_i(\ell_2, \mathrm{v})] : \mathrm{v} \in \mathrm{V}_i\} \neq \mathcal{B}_i(\ell_1)\times\mathcal{B}_i(\ell_2)\end{gathered} \tag{20}$$

Именно выражением (20) обусловливается отличие УКМЦ с неполной информацией, как математического объекта, от **стохастической игры**, исследование которой, начатое в 60-е годы прошлого столетия L. Shepley, ведется в различных аспектах до настоящего времени [69, 72].

Существенное отличие УКМЦ с полной информацией, задаваемой совокупностью (6), от УКМЦ с неполной информацией, задаваемой совокупностью (19), заключается в следующем: если любой стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, в УКМЦ с полной информацией соответствует одна марковская цепь с доходом $\xi(\mathrm{s})$, задаваемая совокупностью (14), то в УКМЦ с неполной информацией каждой стратегии s будет соответствовать **множество** марковских цепей $\mathcal{F}(\mathrm{s})$, определяемое на основе данных совокупности (19).

Так как определение множества $\mathcal{F}(\mathrm{s})$, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, требует дополнительных формальных построений, которые целесообразно опустить при первом, во многом качественном, знакомстве с УКМЦ с неполной информацией, то сейчас — во введении в предмет исследования — это определение не приводится (оно подробно излагается в § 1.2). Однако чтобы оценить элементный состав множества $\mathcal{F}(\mathrm{s})$ отметим, что даже для наиболее простого случая, когда s является стационарной вырожденной стратегией, множество $\mathcal{F}(\mathrm{s})$ может содержать в качестве элементов как однородные, так и неоднородные марковские цепи с доходом, которые задаются совокупностями вида (14).

Теперь сформируем функционал для УКМЦ с неполной информацией.

Поскольку неизвестно, какая именно марковская цепь ξ с доходом из множества $\mathcal{F}(\mathrm{s})$, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, является процессом блуждания марковского объекта по своим состояниям, функционал $\Phi(\mathrm{s})$, определяемый выражением (15), трансформируется, ориентируясь на «наихудшую» цепь из множества $\mathcal{F}(\mathrm{s})$, и записывается в виде

$$\Phi_1(\mathrm{s}) = \inf\{\varlimsup_{k\to\infty} k^{-1}\cdot\mathrm{Q}(a, \xi, k) : \xi \in \mathcal{F}(\mathrm{s})\}, \tag{21}$$

где $Q(a, \xi, k)$ — средний аддитивный доход за k шагов марковской цепи ξ с доходом, определяемый в соответствии с выражением (16).

Таким образом, $\Phi_1(s)$ является гарантированным средним доходом в единицу дискретного времени, получаемым от длительной эксплуатации марковского объекта при управлении, осуществляемом диспетчером в соответствии со стратегией s, где $s \in S$.

Цель управления УКМЦ с неполной информацией сохраняется той же, что и в случае УКМЦ с полной информацией, и состоит в максимизации гарантированного среднего дохода $\Phi_1(s)$, т.е. в определении такой оптимальной стратегии s^*, если она существует, или такой ε-оптимальной стратегии s_ε, если s^* не существует, для которых выполняются соотношения

$$\Phi_1^* = \Phi_1(s^*) = \sup\{\Phi_1(s) : s \in S\}, \tag{22}$$

$$\Phi_1^* - \Phi_1(s_\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \tag{23}$$

где ε — некоторое положительное число.

Несмотря на простой способ задания совокупностью (19), УКМЦ с неполной информацией является достаточно сложным математическим объектом. На это, в частности, указывает следующее обстоятельство: даже при «хорошей» — стационарной вырожденной стратегии s, где $s \in S$, множество $\mathcal{F}(s)$ может содержать в качестве элементов неоднородные марковские цепи, требующие разработки специальных методов их частичного упорядочивания (сравнения).

До настоящего времени УКМЦ с неполной информацией, функционалом (21) и критерием оптимальности (22) в полном объеме не исследовалась, хотя ее частные случаи рассматривались в работах В.А. Каштанова, Е.Ю. Барзиловича, Н. Гирлиха, В. Фогеля и др. Открытыми оставались вопросы о существовании оптимальных стратегий, о существовании оптимальных стратегий, независящих от начального распределения, о существовании оптимальных стационарных вырожденных стратегий и т.д.

В настоящей монографии проводится полное описание и исследование УКМЦ с неполной информацией, выявляющее такие экстремальные свойства фундаментальных характеристик марковских цепей с доходами в множествах $\mathcal{F}(s)$, $s \in S$, которые позволяют как доказать существование оптимальных стационарных вырожденных стратегий, независящих от начального распределения, так и разработать итерационную процедуру их нахождения.

Для понимания материала читателю достаточно знать основы математического анализа, теории вероятностей и управляемых конечных марковских цепей.

Работа строится по принципу «от простого к сложному» и состоит из 8 глав и заключения.

В первой главе даются определения УКМЦ как с полной, так и с неполной информацией. При этом УКМЦ с полной информацией определяется совокупностью (13): $[S, \Xi, \xi]$, где S — множество (марковских) стратегий, Ξ — множество всех конечных марковских цепей с доходом (множество всех КМЦД) с числом состояний равным n, ξ: S $\to$ Ξ — отображение множества стратегий S в множество всех КМЦД Ξ, определенное выражением $\xi(\mathrm{s}) = (\eta(\mathrm{s}), q(\mathrm{s}))$. Такое определение УКМЦ с полной информацией не является традиционным [4, 5, 8, 12–16], однако оно в явном виде указывает на то, что при полной информации каждой стратегии s, где s $\in$ S, соответствует лишь одна КМЦД $\xi(\mathrm{s})$, где $\xi(\mathrm{s}) \in \Xi$.

Определяются две УКМЦ с неполной информацией, задаваемые совокупностью исходных данных (19) и отличающиеся характеристиками неполной информации. Эти УКМЦ представляют собой следующие совокупности: $\mathcal{K}_\nu = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_\nu]$, $\nu = 1, 2$, где $\mathcal{A}(\Xi)$ — множество всех подмножеств множества Ξ, $\mathcal{F}_\nu$: S $\to \mathcal{A}(\Xi)$ — известное отображение множества S в множество $\mathcal{A}(\Xi)$; при этом отображение $\mathcal{F}_1$ соответствует стационарной характеристике неполной информации, а $\mathcal{F}_2$ — нестационарной характеристике неполной информации. Такое определение УКМЦ с неполной информацией в явном виде указывает на то, что в этом случае каждой стратегии s, где s $\in$ S, соответствует некоторое множество КМЦД $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s})$, где $\nu = 1, 2$, $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s}) \in \mathcal{A}(\Xi)$.

Далее указываются цели и, в реферативном виде, основные результаты исследования УКМЦ как с полной, так и с неполной информацией.

Во второй главе рассматриваются основные свойства множества Ξ_0 всех однородных КМЦД с числом состояний, равным n, которое представляется в виде: $\Xi_0 = \{\xi_0(a, h) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, h \in \mathrm{H}^n\}$, где $\xi_0(a, h)$ — однородная КМЦД, задаваемая парой (a, h), a — начальное распределение, $\mathcal{P}_{1,n}$ — множество всех n-мерных стохастических векторов-строк, $\mathrm{H}^n = \mathrm{H}\times \ldots \times\mathrm{H}$ — прямое произведение n экземпляров множества H, $\mathrm{H} = \mathcal{P}_{1,n}\times[-\beta_0, \beta_0]$, $\beta_0 > 0$, $h = [h_1, \ldots, h_n] \in \mathrm{H}^n$, $h_i = [h_{i,1}, \ldots, h_{i,n+1}] \in \mathrm{H}$, элемент h определяет матрицу переходных вероятностей $\mathrm{P}(h)$ и вектор-столбец дохода $q_1(h)$, $\mathrm{P}(h) = (h_{i,j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $q_1(h) = [h_{1,n+1}, \ldots, h_{n,n+1}]^{\mathrm{T}}$, $h_{i,j}$ — соответствующая компонента элемента h.

Эта глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе определяются стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, которыми являются:

а. Вектор финитного дохода $\mathrm{r}_1(h) = \pi(h)\cdot q_1(h)$, где $\pi(h)$ — матрица финитных вероятностей и $\pi(h) = \lim\limits_{k\to\infty} k^{-1}[\mathrm{E} + \mathrm{P}(h) + \ldots + \mathrm{P}^{k-1}(h)]$, E — единичная матрица порядка n;

б. Векторы «весов» $w_k(h) = (-1)^{k+1}[\mathrm{B}_1^k(h)q_1(h) - \mathrm{r}_1(h)]$, $k = \overline{1, \infty}$, где $\mathrm{B}_1(h) = (\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h))^{-1}$ — матрица, обратная к фундаментальной матрице $(\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h))$ однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$.

Во втором параграфе вводятся классы эквивалентности в множестве Ξ_0, основанные на представлении множества состояний каждой однородной КМЦД $\xi_0(a, h) \in \Xi_0$ в виде суммы следующих множеств: множества невозвратных состояний, множеств возвратных сообщающихся состояний. Приводится алгоритм выделения указанных классов из этого множества.

В третьем параграфе излагаются методы расчета стационарных характеристик однородной КМЦД.

В четвертом параграфе определяются некоторые свойства стационарных характеристик однородной КМЦД, принадлежащих одному классу эквивалентности.

Отметим, что материал этого раздела не является оригинальным. В основном, он заимствуется из работ [4–9, 17, 18, 20, 24, 26], но здесь систематизируется и представляется в виде, удобном для дальнейшего использования.

В третьей главе вводится ℓ-частичная упорядоченность в множестве H^n, основанная на сравнении стационарных характеристик $\mathrm{r}_1(h), w_k(h)$, $k = \overline{1, \infty}$ однородных КМЦД $\xi_0(a, h)$, $h \in \mathrm{H}^n$, где $\ell = \overline{1, \infty}$, и устанавливаются ее основные свойства.

Пусть h и t являются некоторыми элементами из множества H^n, тогда ℓ-частичная упорядоченность, обозначаемая $\overset{\ell}{\preccurlyeq}$, где $\ell = \overline{1, \infty}$, определяется следующим образом:

1. $h \overset{1}{\preccurlyeq} \mathrm{t}$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство
$$\mathrm{r}_1(h) \leqslant \mathrm{r}_1(\mathrm{t}), \tag{24}$$
где неравенство векторов понимается как покомпонентное. При этом $h \overset{1}{\prec} \mathrm{t}$, когда $\mathrm{r}_1(h) < \mathrm{r}_1(\mathrm{t})$, где строгое неравенство векторов понимается как неравенство (24), в котором хотя бы для одной компоненты имеется строгое неравенство;

2. $h \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{t}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух соотношений:
$$h \overset{\ell-1}{\prec} \mathrm{t}, \tag{25}$$
$$\begin{gathered} \mathrm{r}_1(h) = \mathrm{r}_1(\mathrm{t}), \quad w_k(h) = w_k(\mathrm{t}), \quad k = 1, \ldots, \ell-2, \\ w_{\ell-1}(h) \leqslant w_{\ell-1}(\mathrm{t}), \end{gathered} \tag{26}$$
где $\ell = 2, 3, \ldots$ При этом $h \overset{\ell}{\prec} \mathrm{t}$, когда выполняется соотношение (25) или соотношение (26), в котором последнее неравенство является строгим.

Для дальнейшего изложения является важным следующее свойство введеных частичных упорядоченностей: в множестве H^n существует не более $(n+2)$ различных частичных упорядоченностей, при этом различными могут являться упорядочности, для которых $\ell = \overline{1, n+2}$.

В четвертой главе определяются ℓ-минимальный, ℓ-максимальный и (ℓ, ε)-минимальный, (ℓ, ε)-максимальный элементы в множестве $\mathcal{D}$, где $\ell \in \in \{1, \ldots, n+2\}$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n$, и выявляются свойства этих элементов.

Эта глава состоит из шести параграфов.

В первом параграфе даются определения ℓ-минимального, ℓ-максимального и (ℓ, ε)-минимального, (ℓ, ε)-максимального элементов в множестве $\mathcal{D}$. При этом:

1. Для любого ℓ-минимального элемента $h(\ell)$ из множества $\mathcal{D}$, где $\ell \in \in \{1, \ldots, n+2\}$, справедливо выражение
$$\mathrm{r}_1(h(\ell)) \leqslant \mathrm{r}_1(\mathrm{t}) \quad \forall\, \mathrm{t} \in \mathcal{D}, \tag{27}$$

где $\mathrm{r}_1(\cdot)$ — вектор финитного дохода однородной КМЦД $\xi_0(a,\cdot)$;

2. Для любого $(1,\varepsilon)$-минимального элемента h_ε из множества $\mathcal{D}$ выполняется соотношение

$$\mathrm{r}_1(h_\varepsilon) - r(1) \leqslant \varepsilon,$$

где $r_i(1) = \inf\{\mathrm{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}\}$ — i-я компонента вектора $r(1)$, $i = \overline{1,n}$, $\varepsilon > 0$.

Далее в этом параграфе выявляются условия существования ℓ-минимального, ℓ-максимального и (ℓ,ε)-минимального, (ℓ,ε)-максимального элементов в множестве $\mathcal{D}$ в случае, когда $\mathcal{D}$ имеет вид: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$.

Во втором параграфе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$ таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$, где $i = \overline{1,n}$, является конечным множеством. Показывается, что в этом случае существуют пошаговые процедуры нахождения ℓ-минимального и ℓ-максимального элементов в множестве $\mathcal{D}$, где $\ell = \overline{1,n+2}$.

В третьем параграфе рассматривается случай, когда три множества: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1\times\ldots\times Co\mathcal{D}_n$, где $Co\mathcal{D}_i$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1\times\ldots\times\mathrm{T}_n$, где $\mathrm{T}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, связаны соотношениями: $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{T}_i \subset Co\mathcal{D}_i$. Показывается, что в этом случае, если в одном из множеств $\mathcal{D}$, T, $Co\mathcal{D}$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент, то в каждом из этих множеств также существует ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1,n+2}$. При этом ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент в множестве $\mathcal{D}$ является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множествах T и $Co\mathcal{D}$, а ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент в множестве T является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $Co\mathcal{D}$.

В третьем параграфе показывается также, что если множество T таково, что каждое множество T_i является конечным множеством либо линейным многогранником, то существуют пошаговые процедуры нахождения $(n+2)$-минимального и $(n+2)$-максимального элементов в множестве T.

В четвертом параграфе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i\subset\mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, имеет некоторый специальный вид. Показывается, что в этом случае в множестве $\mathcal{D}$ существуют ℓ-минимальный и ℓ-максимальный элементы, где $\ell = \overline{1,n+2}$.

В пятом параграфе рассматривается случай, когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$ является замкнутым множеством, в котором существует элемент h, обладающий следующим свойством: множество J состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ образует один класс возвратных сообщающихся состояний. При этом показывается, что в множестве $\mathcal{D}$ имеется 1-минимальный (1-максимальный) элемент ζ, для которого выполняется соотношение: $\mathrm{r}_{1,1}(\zeta) = \ldots = \mathrm{r}_{1,n}(\zeta)$, где $\mathrm{r}_{1,i}(\zeta)$ — i-я компонента вектора $\mathrm{r}_1(\zeta)$, $i = \overline{1,n}$. Показывается также, что в том случае, когда в множестве $\mathcal{D}$ отсутствуют элементы, для которых соответствующие однородные КМЦД имеют невозвратные состояния, в этом множестве $\mathcal{D}$ имеется ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1,n+2}$.

В шестом параграфе рассматривается случай, когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, является замкнутым множеством. Показывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\mathrm{T}_\varepsilon = \mathrm{T}_{\varepsilon,1} \times \ldots \times \mathrm{T}_{\varepsilon,n}$, где $\mathrm{T}_{\varepsilon,i}$ — линейный многогранник, обладающий свойством: $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{T}_{\varepsilon,i} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, для которого выполняются следующие системы неравенств:

$$r_i(1) - \mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(1)}) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1, n},$$
$$\mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(2)}) - r_i(2) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1, n},$$

где $r_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}\}$, $r_i(2) = \sup\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}\}$, $i = \overline{1, n}$, $\mathfrak{r}_{1,i}(h)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(h)$ финитного дохода, $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ — соответственно 1-минимальный и 1-максимальный элемент в множестве T_ε.

В пятой главе вводится ℓ-частичная упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, согласованная с ℓ-частичной упорядоченностью в множестве H^n, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ — множество всевозможных подмножеств множества H^n, и устанавливаются ее некоторые свойства.

Эта глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе дается определение ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ и приводятся утверждения, устанавливающие ее основные свойства. Вводятся также понятия ℓ-максимального и ℓ-минимального элементов в подмножествах множества $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ и выявляются некоторые их свойства.

Пусть $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ являются элементами множества $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, т.е. $\mathcal{D}_k \subset \mathrm{H}^n$, $k = 1, 2$, и пусть в этих множествах соответственно $\zeta^{(1)}(\ell)$, $\zeta^{(2)}(\ell)$ являются ℓ-минимальными элементами (по отношению к ℓ-частичной упорядоченности в множестве H^n), тогда для этого случая ℓ-частичная упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ определяется следующим образом: $\mathcal{D}_1 \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}_2$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\zeta^{(1)}(\ell) \overset{\ell}{\preccurlyeq} \zeta^{(2)}(\ell)$, где $\overset{\ell}{\Leftarrow}$ — символ ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\overset{\ell}{\preccurlyeq}$ — символ ℓ-частичной упорядоченности в множестве H^n, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Здесь необходимо отметить следующее.

1. Из соотношения (27) непосредственно следует справедливость утверждения: соотношение $\mathcal{D}_1 \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}_2$ влечет выполнение системы неравенств

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}_1\} \leqslant \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}_2\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{28}$$

где $\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}_1\} = \mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(1)}(\ell)$, $\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}_2\} = \mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(2)}(\ell)$, $\mathfrak{r}_{1,i}(\cdot)$ — i-я компонента вектора финитного дохода $\mathfrak{r}_1(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$;

2. Одно из основных свойств ℓ-максимального элемента $\mathcal{D}(\text{æ})$ в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, где $\mathcal{D}(u) \in \mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\text{æ} \in \mathcal{U}$, состоит в том, что выполняется соотношение

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}(\text{æ})\} \geqslant \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}(u)\}, \quad \forall\, u \in \mathcal{U}, \tag{29}$$

где $\mathfrak{r}_{1,i}(\cdot)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(\cdot)$ финитного дохода, $i = \overline{1,n}$, $\ell = \overline{1,n+2}$.

Во втором параграфе приводится пошаговая процедура нахождения ℓ-максимального (ℓ-минимального) элемента $\mathcal{D}(æ)$ в множестве $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, где $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i) \subset \mathrm{H}$, u_i — i-я компонента элемента u, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1,n}$, $æ \in \mathcal{U}$.

При этом отметим одно важное обстоятельство, являющееся следствием выражения (29). Для любого начального распределения a, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, элемент $æ$ удовлетворяет соотношению (является решением соответствующей экстремальной задачи)

$$\varphi(æ) = \sup\{\varphi(u) : u \in \mathcal{U}\}, \tag{30}$$

где $\varphi(u) = \inf\{a \cdot \mathfrak{r}_1(h) : h \in \mathcal{D}(u)\}$, $\mathfrak{r}_1(h)$ — вектор финитного дохода однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$.

В третьем параграфе устанавливаются некоторые свойства ℓ-частичной упорядоченности, необходимые для дальнейшего изложения материала.

В шестой главе дается определение и указываются свойства 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{G}$, являющемся основной характеристикой множества Ξ всех конечных марковских цепей с доходом (всех КМЦД), где $\mathfrak{G} = \mathrm{H}^n \times \ldots \times \mathrm{H}^n \times \ldots$ Множество Ξ всех КМЦД с числом состояний, равным n, представляется в виде

$$\Xi = \{\xi(\mathrm{a}, \mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}\}, \tag{31}$$

где $\xi(\mathrm{a}, \mathfrak{h})$ — КМЦД, задаваемая парой $(\mathrm{a}, \mathfrak{h})$; a начальное распределение; $\mathfrak{h} = (h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots) \in \mathfrak{G}$, $h^{(k)} \subset \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1,\infty}$; элемент $\mathfrak{h}$ определяет как последовательность матриц переходных состояний этой цепи $\{\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{P}(h^{(k)}), k = \overline{1,\infty}\}$, так и последовательность доходов $\{q^{(k)}(\mathfrak{h}) = q_1(h^{(k)}), k = \overline{1,\infty}\}$, $\mathrm{P}(h^{(k)}) = (h^{(k)}_{i,j})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $q_1(h^{(k)}) = [h^{(k)}_{1,n+1}, \ldots, h^{(k)}_{1,n+1}]^{\mathrm{T}}$, $h^{(k)}_{i,j}$ — соответствующая компонента элемента $h^{(k)}$.

Устанавливаются основные свойства 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{G}$ и указывается ее соотношение с ℓ-частичной упорядоченностью в множестве H^n, где $\ell = \overline{1,n+2}$.

Эта глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе дается определение 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{G}$ и указывается соотношение этой упорядоченности с ℓ-частичной упорядоченностью в множестве H^n, где $\ell = \overline{1,n+2}$.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \varphi_i(k, \mathfrak{h}), \quad \varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) = \overline{\lim}_{k\to\infty} \varphi_i(k, \mathfrak{h}),$$

где $i = \overline{1,n}$, $\underline{\lim}(\cdot)$, $\overline{\lim}(\cdot)$ — соответственно нижний и верхний пределы последовательности $(\cdot)$, $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots] \subset \mathfrak{G}$, $h^{(k)} \subset \mathrm{H}^n$,

$k \in \mathcal{N}$, $\varphi_i(k, \mathfrak{h})$ — i-я компонента вектора $\varphi(k, \mathfrak{h}) = k^{-1} \cdot \varphi_k(\mathfrak{h})$, $\varphi_k(\mathfrak{h}) = = \sum\limits_{m=1}^{k} \prod\limits_{j=1}^{m} \mathrm{P}^{(j-1)}(\mathfrak{h}) \cdot q^{(m)}(\mathfrak{h})$ — вектор среднего дохода за k шагов, получаемого на марковской цепи $\xi(\mathrm{a}, \mathfrak{h})$, $\mathrm{P}^{(0)}(\mathfrak{h})$ — единичная матрица порядка n, $\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{P}(h^{(k)})$, $k = \overline{1, \infty}$, $\mathrm{P}(h^{(k)})$ — стохастическая матрица, соответствующая элементу $h^{(k)} \in \mathrm{H}^n$, $h^{(k)}$ — k-я компонента элемента $\mathfrak{h}$, $q^{(m)}(\mathfrak{h}) = q_1(h^{(m)})$ — вектор дохода, соответствующий элементу $h^{(m)} \in \mathrm{H}^n$.

Тогда 1-частичная упорядоченность в множестве $\mathfrak{G}$ определяется следующим образом: пусть $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — два произвольно выбранных элемента из множества $\mathfrak{G}$, тогда $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}_2$ в том и только в том случае, когда выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_2), \\ \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_2), \end{cases} \tag{32}$$

где $\mathfrak{h}_1 \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}_2 \in \mathfrak{G}$, $\varphi_{\text{н}}(\cdot) = [\varphi_{\text{н},1}(\cdot), \ldots, \varphi_{\text{н},n}(\cdot)]^{\mathrm{T}}$, $\varphi_{\text{в}}(\cdot) = [\varphi_{\text{в},1}(\cdot), \ldots \ldots \varphi_{\text{в},n}(\cdot)]^{\mathrm{T}}$. При этом $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\prec} \mathfrak{h}_2$ в том и только в том случае, когда в системе неравенств (32) хотя бы одно неравенство строгое; $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\asymp} \mathfrak{h}_2$, когда в системе (32) присутствуют только равенства.

Соотношение между 1-частичной упорядоченностью в множестве $\mathfrak{G}$ и ℓ-частичной упорядоченностью в множестве H^n устанавливается следующим утверждением: пусть $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — два стационарных элемента из множества $\mathfrak{G}$, порожденные соответственно элементами h и t из множества H^n, т.е. $\mathfrak{h}_1 = [h, \ldots, h, \ldots]$, $\mathfrak{h}_2 = [\mathrm{t}, \ldots, \mathrm{t}, \ldots]$; тогда соотношение $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}_2$:

1) выполняется тогда, когда выполняется соотношение $h \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{t}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$;

2) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $h \overset{1}{\preccurlyeq} \mathrm{t}$.

В этом параграфе также даются определения 1-минимального (1-максимального) и $(1, \varepsilon)$-минимального ($(1, \varepsilon)$-максимального) элементов в множестве $\mathcal{D} \subset \mathfrak{G}$, где $\varepsilon > 0$. При этом:

1. 1-минимальным называется такой элемент $\mathfrak{h}_1$ в множестве $\mathcal{D} \subset \mathfrak{G}$, для которого при любом $\mathfrak{h}_2 \in \mathcal{D}$ выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_2), \\ \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_2), \end{cases} \tag{33}$$

где $\varphi_{\text{н}}(\cdot)$, $\varphi_{\text{в}}(\cdot)$ — векторы, определенные в выражении (32);

2. $(1, \varepsilon)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$ называется такой элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon$, для которого выполняются неравенства

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}) \leqslant \varepsilon, \quad \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}) \leqslant \varepsilon,$$

где $\varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}) = [\varphi_{\text{н},1}(\mathcal{D}), \ldots, \varphi_{\text{н},n}(\mathcal{D})]^{\mathrm{T}}$, $\varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}) = [\varphi_{\text{в},1}(\mathcal{D}), \ldots, \varphi_{\text{в},n}(\mathcal{D})]$,

$\varphi_{\text{н},i}(\mathcal{D}) = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathcal{D}\}$, $\varphi_{\text{в},i}(\mathcal{D}) = \inf\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathcal{D}\}$, $i = \overline{1,n}$, $\varepsilon > 0$.

Во втором параграфе доказываются условия существования 1-минимального (1-максимального) и $(1,\varepsilon)$-минимального ($(1,\varepsilon)$-максимального) элементов в замкнутом множестве $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i$ — любое замкнутое подмножество множества H, $i = \overline{1,n}$. Указываются также основные свойства упомянутых элементов.

При этом одно из основных свойств $(1,\varepsilon)$-минимального элемента $\mathfrak{h}_\varepsilon$ в замкнутом множестве $\mathcal{D}$ утверждает, что в множестве $\mathcal{D}$ существует элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon = [h_\varepsilon, \ldots, h_\varepsilon, \ldots]$, для которого справедливо выражение

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon), \tag{34}$$

где h_ε — любой $(1,\varepsilon)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}$, $\mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)$ — финитный доход однородной КМЦД $\xi_0(a, h_\varepsilon)$.

В третьем параграфе приводятся теоремы существования $(1,\varepsilon)$-минимального и $(1,\varepsilon)$-максимального элементов в множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i$ — любое подмножество множества H, $i = \overline{1,n}$, и указываются основные свойства этих элементов.

Приведем одно из основных свойств $(1,\varepsilon)$-минимального элемента $\mathfrak{h}_\varepsilon$ в замкнутом множестве $\mathcal{D}$, утверждающее, что в множестве $\mathcal{D}$ существует элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon$, для которого справедливо выражение:

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon), \quad |\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon \tag{35}$$

где $\varepsilon > 0$, h_ε — любой $(1,\varepsilon)$-минимальный элемент в замыкании множества $\mathcal{D}$, $\mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)$ — вектор финитного дохода однородной КМЦД $\xi_0(a, h_\varepsilon)$.

В седьмой главе вводится 1-частичная упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, согласованная с 1-частичной упорядоченностью в множестве $\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G} = \mathrm{H}^n \times \ldots \times \mathrm{H}^n \times \ldots$, $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ — множество всевозможных подмножеств множества $\mathfrak{G}$, $\ell = \overline{1, n+2}$. Устанавливаются основные свойства введенной частичной упорядоченности.

Эта глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе дается определение 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ и приводится ее соотношение с ℓ-частичной упорядоченностью в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$. Даются также определения 1-максимального и 1-минимального элементов в подмножестве $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}(\mathfrak{G})$.

Пусть $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ некоторые произвольно выбранные элементы из множества $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, т.е. $\mathcal{D}_k \subset \mathfrak{G}$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда 1-частичная упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ определяется следующим образом: $\mathcal{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathcal{D}_2$ в том и только в том случае, если выполняются неравенства

$$\varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}_1) \leqslant \varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}_2), \quad \varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}_1) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}_2), \tag{36}$$

где $\overset{1}{\Leftarrow}$ — символ 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, $\varphi_{\text{н},i}(\mathcal{D}_k) = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathcal{D}_k\}$ — i-я компонента вектора $\varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}_k)$,

$\varphi_{\text{в},i}(\mathcal{D}_k) = \inf\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathcal{D}_k\}$ — i-я компонента вектора $\varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}_k)$, $i = \overline{1,n}$, $k = 1, 2$; при этом $\mathcal{D}_1 \overset{1}{=} \mathcal{D}_2$, если в (36) присутствуют только равенства.

Укажем на одно важное следствие определения 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$: пусть $\mathfrak{T} = \{\mathcal{D}(\text{v}) : \text{v} \in \text{V}\}$ некоторое подмножество множества $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, в котором существует максимальный элемент $\mathcal{D}(\text{v}^*)$, т.е. элемент, для которого справедливо выражение

$$\mathcal{D}(\text{v}) \overset{1}{\Leftarrow} \mathcal{D}(\text{v}^*) \quad \forall\, \text{v} \in \text{V},$$

тогда выполняется система неравенств:

$$[\varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}(\text{v})) \leqslant \varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}(\text{v}^*)), \varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}(\text{v})) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}(\text{v}^*))] \quad \forall\, \text{v} \in \text{V}, \tag{37}$$

где $\varphi_{\text{н},i}(\mathcal{D}(\cdot)) = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathcal{D}(\cdot)\}$ — i-я компонента вектора $\varphi_{\text{н}}(\mathcal{D}(\cdot))$, $\varphi_{\text{в},i}(\mathcal{D}(\cdot)) = \inf\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathcal{D}(\cdot)\}$ — i-я компонента вектора $\varphi_{\text{в}}(\mathcal{D}(\cdot))$, $i = \overline{1,n}$.

Во втором параграфе приводятся теоремы существования 1-максимального и 1-минимального элементов в множествах $\mathfrak{T}_1 = \{\mathfrak{G}_1(\text{s}) : \text{s} \in \text{S}\}$ и $\mathfrak{T}_{1,0} = \{\mathfrak{G}_1(\text{s}(u)) : u \in \mathcal{U}\}$, связанных непосредственно с УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_1 = [\text{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_1]$, где S — множество стратегий, $\mathfrak{G}_1(\text{s}) \subset \mathfrak{G}$, $\mathcal{F}_1(\text{s}) = \{\xi(\text{a}, \mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}_1(\text{s})\}$, $\xi(\text{a}, \mathfrak{h})$ — КМЦД, задаваемая парой $(\text{a}, \mathfrak{h})$ (см. выражение (31)), $\text{s}(u)$ — стационарная стратегия, вырожденная в точке u, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$ — множество управлений, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1,n}$.

Множество $\mathfrak{G}_1(\text{s})$ называется стационарной характеристикой неполной информации, определяется на основе совокупности исходных данных (19) и имеет следующий вид: $\mathfrak{G}_1(\text{s}) = \{[h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots] \in \mathfrak{G}$: [для любого $k = \overline{1,\infty}$ выполняется равенство $h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \sum\limits_{j=1}^{m(i)} h_i(j)\mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}$, $h_i(j) \in \mathcal{D}_i(j)$, $i = \overline{1,n}]\}$, где $h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)})$ — i-я компонента элемента $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)})$, $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}]$ — k-я компонента стратегии s, $\mathfrak{s}_i^{(k)}$ — i-я компонента $\mathfrak{s}^{(k)}$, $\mathcal{D}_i(j)$ — характеристика неполной информации в значении вектора $h_i(j)$, заданная в совокупности (19), $j \subset \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1,n}$.

В этом параграфе показывается, что 1-максимальный (1-минимальный) элемент $\mathfrak{G}_1(\text{s}(\text{æ}))$ в множестве $\mathfrak{T}_{1,0}$ является 1-максимальным (1-минимальным) элементом в множестве $\mathfrak{T}_1$. При этом æ является таким элементом из множества $\mathcal{U}$, для которого $\mathcal{D}(\text{æ})$ является ℓ-максимальным (ℓ- минимальным) элементом в множестве $\text{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в значении вектора $h_i(u_i)$, заданная в выражении (19), u_i — i-я компонента управления u, $u_i = 1, \ldots, m(i)$, $i = \overline{1,n}$.

Отметим, что в силу выражений (29), (30), (37) элементом æ определяется такая стратегия $\text{s}(\text{æ})$, которая для любого начального распределения

a, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, удовлетворяет соотношению (является решением соответствующей экстремальной задачи)

$$\Phi_1(\mathrm{s}(æ)) = \varphi(æ) = \sup\{\Phi_1(\mathrm{s}) : \mathrm{s} \in \mathrm{S}\},$$

где

$$\Phi_1(\mathrm{s}) = \inf\{\lim_{k\to\infty} k^{-1} \cdot \mathrm{Q}(\mathrm{a}, \xi, k) : \xi \in \mathcal{F}_1(\mathrm{s})\}, \tag{39}$$

$\varphi(æ)$ — величина, определяемая выражением (30), $\mathrm{Q}(\mathrm{a}, \xi, k)$ — средний аддитивный доход за k шагов марковской цепи ξ с доходом, определяемый в соответствии с выражением (16), lim в выражении (38) может являться как верхним, так и нижним пределом.

В третьем параграфе приводятся теоремы существования 1-максимального и 1-минимального элементов в множествах $\mathfrak{T}_2 = \{\mathfrak{G}(\mathrm{s}) : \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$ и $\mathfrak{T}_{2,0} = \{\mathfrak{G}(\mathrm{s}(u)) : u \in \mathcal{U}\}$, связанных непосредственно с УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_2 = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_2]$, где $\mathfrak{G}(\mathrm{s}) \subset \mathfrak{G}$, $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}) = \{\xi(\mathrm{a}, \mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}(\mathrm{s})\}$.

Множество $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ называется нестационарной характеристикой неполной информации, определяется на основе совокупности исходных данных (19) и имеет следующий вид: $\mathfrak{G}(\mathrm{s}) = \{[h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots] \in$ $\in \mathfrak{G} : h_i^{(k)}(\mathrm{s}_i^{(k)} i^k) = \sum\limits_{j=1}^{m(i)} h_i^{(k)}(j)\mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}, h_i^{(k)}(j) \in \mathcal{D}_i(j), i = \overline{1,n}, k = \overline{1,\infty}\}$, где $h_i^{(k)}(\mathrm{s}_i^{(k)})$ — i-я компонента элемента $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)})$, $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}]$ — k-я компонента стратегии s, $\mathfrak{s}_i^{(k)}$ — i-я компонента $\mathfrak{s}^{(k)}$, $\mathcal{D}_i(j)$ — характеристика неполной информации, заданная в совокупности (19), $j \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1,n}$.

В этом параграфе показывается, что 1-максимальный (1-минимальный) элемент $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ))$ в множестве $\mathfrak{T}_{2,0}$ является 1-максимальным (1-минимальным) элементом в множестве $\mathfrak{T}_2$. При этом $æ$ является таким элементом из множества $\mathcal{U}$, для которого $\overline{\mathcal{D}}(æ)$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\overline{\mathrm{A}}(\mathcal{U}) = \{\overline{\mathcal{D}}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, где $\ell =$ $= \overline{1, n+2}$, $\overline{\mathcal{D}}(u)$ — замыкание множества $\mathcal{D}(u)$.

Отметим, что в силу выражений (29), (30), (34), (37) элементом $æ$ определяется такая стратегия $\mathrm{s}(æ)$, которая для любого начального распределения a, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, удовлетворяет соотношению (является решением соответствующей экстремальной задачи)

$$\Phi_1(\mathrm{s}(æ)) = \varphi(æ) = \sup\{\Phi_1(\mathrm{s}) : \mathrm{s} \in \mathrm{S}\},$$

где

$$\Phi_1(\mathrm{s}) = \inf\{\lim_{k\to\infty} k^{-1} \cdot \mathrm{Q}(\mathrm{a}, \xi, k) : \xi \in \mathcal{F}_2(\mathrm{s})\}, \tag{40}$$

$\varphi(æ)$ — величина, определяемая выражением (30), $\mathrm{Q}(\mathrm{a}, \xi, k)$ — средний аддитивный доход за k шагов марковской цепи ξ с доходом, определяемый в соответствии с выражением (16), lim в выражении (38) может являться как верхним, так и нижним пределом.

В восьмой главе доказываются теоремы, устанавливающие основные свойства УКМЦ как с полной, так и с неполной информацией. Именно эти теоремы представляют собой результаты исследования указанных УКМЦ, которые в реферативном виде приводятся в гл. 1 настоящей работы.

В заключении автором делается попытка наметить один из путей решения проблемы эффективного управления сложной системой с учетом надежности составляющих ее элементов.

Материал, изложенный в данной работе, может представлять интерес как для математиков, интересующихся развитием методов исследования управляемых конечных марковских цепей, так и для математиков-прикладников, интересующихся численными методами поиска оптимальных стратегий управления УКМЦ с неполной информацией.

ГЛАВА 1

УПРАВЛЯЕМЫЕ КОНЕЧНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ С ПОЛНОЙ И НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

В этой главе даются определения управляемых конечных цепей (УКМЦ) как с полной так и с неполной информацией. Указываются цели и результаты исследования этих УКМЦ.

1.1. УКМЦ с полной информацией. Цель и основные результаты исследования

В этом параграфе дается определение УКМЦ с полной информацией. Формируется цель исследования и приводятся основные результаты, которые используются в дальнейшем при изучении свойств УКМЦ с неполной информацией.

1.1.1. Определение УКМЦ с полной информацией

В этом пункте дается определение УКМЦ с полной информацией, которое в явном виде указывает на то, что в случае полной информации одной стратегии соответствует только одна конечная марковская цепь.

УКМЦ с полной информацией представляет собой следующую совокупность, состоящую из трех математических объектов:

$$\mathcal{K} = [S, \Xi, \mathcal{F}], \tag{1}$$

где S — множество стратегий, Ξ — множество конечных марковских цепей с доходом и ресурсом, $\mathcal{F}$ — отображение множества стратегий S в множестве Ξ, т.е. $F : S \to \Xi$.

Отметим, что представление УКМЦ с полной информацией совокупностью (1) не является традиционным [4–12]. Однако это представление явно указывает на то, что при полной информации одной стратегии s соответствует одна конкретная конечная марковская цепь с доходом и ресурсом $\mathcal{F}(s)$, где $s \in S$, $\mathcal{F}(s) \in \Xi$.

Теперь перейдем к определению объектов, составляющих УКМЦ с полной информацией.

1.1.1.1. Определение множества Ξ

Прежде всего введем следующие обозначения и определения.

1. $\mathrm{J} = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество состояний.

2. J^k — прямое произведение k множеств J, где $k \in \mathcal{N}$.

3. $\mathcal{B}(\mathrm{J}^k)$ — алгебра всех подмножеств множества J^k.

4. $\mathrm{J}^\infty = \lim\limits_{k \to \infty} \mathrm{J}^k$ — множество траекторий. Произвольно выбранный

элемент из множества J^{∞} называется траекторией и имеет вид: $(i_0, i_1, \ldots$ $\ldots, i_k, \ldots)$, где $i_k \in J$, $k = \overline{1, \infty}$.

5. $[J^{\infty}, \mathcal{B}(J^{\infty})]$ — пространство траекторий, где $\mathcal{B}(J^{\infty}) = \lim\limits_{k \to \infty} \mathcal{B}(J^k)$.

6. $a = [a_1, \ldots, a_n]$ — начальное распределение, т.е. $a \in \forall_{1,n}$, где $\mathcal{P}_{1,n}$ — множество всех n-мерных стохастических векторов-строк.

7. $\{P^{(k)}\}_1^{\infty}$ — последовательность стохастических матриц, где $P^{(k)} \in$ $\in \mathcal{P}_{n,n}$, $k = \overline{1, \infty}$, $\mathcal{P}_{n,n}$ — множество всех стохастических матриц размерности $n \times n$. При этом матрицу $P^{(k)}$ через свои элементы будем записывать в виде: $P^{(k)} = (p_{i,j}^{(k)})$, где $p_{i,j}^{(k)}$ — переходная вероятность из состояния i в состояние j на k-м шаге, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

8. $[J^{\infty}, \mathcal{B}(J^{\infty}), P]$ — вероятностное пространство траекторий, где вероятностная мера P соответствует начальному распределению a, последовательности матриц $\{P^{(k)}\}_1^{\infty}$ и обладает свойством

$$P(B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_k \times J \times \ldots \times J \times \ldots) = \\ = \sum_{i_0 \in B_0} a_{i_0} \cdot \sum_{i_1 \in B_1} p_{i_0, i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot \sum_{i_k \in B_k} p_{i_{k-1}, i_k}^{(k)}, \quad (1)$$

где $[B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_k \times J \times \ldots \times J \times \ldots] \in \mathcal{B}(J^{\infty})$, $B_r \subset \mathcal{B}(J)$, $r = \overline{0, k}$.

9. Пусть имеется вероятностное пространство $[J^{\infty}, \mathcal{B}(J^{\infty}), P]$. Тогда последовательность случайных величин $\eta = \{\eta_k\}_0^{\infty}$, определенная выражением

$$\eta_k(i_0, \ldots, i_k, \ldots) = i_k, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (2)$$

где $(i_0, \ldots, i_k, \ldots) \in J$, является [20] конечной марковской цепью (по отношению к мере P).

Заметим, что исходными данными, достаточными для задания конечной марковской цепи η, является совокупность

$$\left[a, J, \{P^{(k)}\}_1^{\infty}\right]. \quad (3)$$

10. Каждому состоянию i и каждому значению k, где $i \in J$, $k \in \mathcal{N}$, поставим в соответствие две величины $q_{1,i}^{(k)}$, $q_{2,i}^{(k)}$, обладающие свойством

$$q_{1,i}^{(k)} \in [-\beta_0, \beta_0], \quad q_{2,i}^{(k)} \in [\alpha_0, \beta_0], \quad (4)$$

где $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \beta_0$. При этом величины $q_{1,i}^{(k)}$, $q_{2,i}^{(k)}$ называются соответственно доходом и ресурсом в i-м состоянии в k-й момент времени; доход является ограниченной величиной, а ресурс — ограниченной положительной величиной.

Определение 1. *Конечной марковской цепью с доходом и ресурсом* (КМЦД) ξ называется конечная марковская цепь η с двумя последовательностями векторов $\{q_1^{(k)}\}_1^{\infty}$, $\{q_2^{(k)}\}_1^{\infty}$, где $q_{\nu}^{(k)} = [q_{\nu,1}^{(k)}, \ldots, q_{\nu,n}^{(k)}]^{T}$, $\nu = 1, 2$, T — знак транспонирования.

Таким образом, КМЦД ξ представляет собой совокупность $[\eta, \{q_1^{(k)}\}_1^\infty, \{q_2^{(k)}\}_1^\infty]$.

Из определения КМЦД ξ, с учетом замечания п. 9, следует, что она задается совокупностью

$$\{[\mathrm{a}, \mathrm{J}, \{\mathrm{P}^{(k)}\}_1^\infty, \{q_1^{(k)}\}_1^\infty, \{q_2^{(k)}\}_1^\infty\}. \tag{5}$$

Совокупность (5) компактно будем представлять в виде: $[a, \mathfrak{h}]$, где $\mathfrak{h} = \{h^{(k)}\}_1^\infty$, $h^{(k)} = [h_1^{(k)}, \ldots, h_n^{(k)}]$, $h_i^{(k)} = [p_i^{(k)}, q_{1,i}^{(k)}, q_{2,i}^{(k)}]$, $i = \overline{1, n}$, $p_i^{(k)} = [p_{i,1}^{(k)}, \ldots, p_{i,n}^{(k)}]$ — i-я строка стохастической матрицы $\mathrm{P}^{(k)}$. При этом КМЦД ξ, задаваемую совокупностью $[a, \mathfrak{h}]$, будем обозначать $\xi(a, \mathfrak{h})$.

Для определения множества Ξ всех КМЦД введем следующие обозначения.

1. $\mathrm{H} = \mathcal{P}_{1,n} \times [-\beta_0, \beta_0] \times [\alpha_0, \beta_0]$, где $\mathcal{P}_{1,n}$ — множество всех n-мерных стохастических векторов-строк, $[-\beta_0, \beta_0]$, $[\alpha_0, \beta_0]$ — интервалы, определенные в выражении (4), $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \beta_0$.

2. $\mathrm{H}^n = \underbrace{\mathrm{H} \times \ldots \times \mathrm{H}}_{n}$ — множество, являющееся произведением n экземпляров множества H. Произвольно выбранный элемент из множества H обозначается h и имеет вид: $h = [h_1, \ldots, h_n]$, $h_i = [h_{i,1}, \ldots, h_{i,n+2}] \in \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, $(h_{i,1}, \ldots, h_{i,n}) \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h_{i,n+1} \in [-\beta_0, \beta_0]$, $h_{i,n+2} \subset [\alpha_0, \beta_0]$.

3. $\mathfrak{G} = \{[h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots] : h^{(k)} \in \mathrm{H}^n, k = \overline{1, \infty}\}$.

4. Произвольно выбранный элемент из множества $\mathfrak{G}$ обозначается $\mathfrak{h}$ и имеет вид: $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots] = \{h^{(k)}\}_1^\infty$.

Любой элемент $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}$ определяет следующие характеристики:

1) последовательность стохастических матриц $\{\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h})\}_1^\infty$;

2) последовательности векторов дохода и ресурса соответственно $\left\{q_1^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$, $\left\{q_2^{(k)}(\mathfrak{h})\right\}_1^\infty$, где

$$\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h}) = (h^{(k)}) = (h_{i,j}^{(k)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

$$q_\nu^{(k)}(\mathfrak{h}) = q_\nu(h^{(k)}) = (h_{1,n+\nu}^{(k)}, \ldots, h_{n,n+\nu}^{(k)}]^{\mathrm{T}}, \quad \nu = 1, 2, \tag{7}$$

$h^{(k)}$ — k-я компонента элемента $\mathfrak{h}$, $h_{i,j}^{(k)}$ — соответствующая компонента элемента $h^{(k)}$.

Определение 2. Множество Ξ, имеющее вид

$$\Xi = \{\xi(a, \mathfrak{h}) : \mathrm{a} \in \mathcal{P}_{1,n}, \ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}\}, \tag{8}$$

где $\xi(a, \mathfrak{h})$ — КМЦД, задаваемая совокупностью $(a, \mathfrak{h})$, называется *множеством всех* КМЦД *с числом состояний, равным n*.

Отметим, что КМЦД $\xi_0(a, h) = \xi(\mathrm{a}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h} = [h, \ldots, h, \ldots]$, $h \in \mathrm{H}^n$, называется однородной КМЦД, задаваемой совокупностью (a, h).

Множество Ξ_0, являющееся подмножеством Ξ и определяемое выражением

$$\Xi_0 = \{\xi_0(\mathrm{a}, h) : \mathrm{a} \in \mathcal{P}_{1,n},\ h \in \mathrm{H}^n\}, \tag{9}$$

называется множеством всех однородных КМЦД с числом состояний, равным n.

Замечание 1.

Так как параметры α_0, β_0 являются константами на протяжении всей работы, то из определения множества Ξ следует, что оно задается множеством состояний J.

1.1.1.2. Определение множества S

Для определения множества стратегий S введем следующие обозначения и определения.

1. $\mathcal{U}_i$ — множество управлений в состоянии i, где $i = \overline{1,n}, \mathcal{U}_i \subset \mathcal{B}(R^1)$, $\mathcal{B}(R^1)$ — борелевская σ-алгебра подмножества множества R^1. Произвольно выбранный элемент из множества $\mathcal{U}_i$ обозначим через u_i и будем называть управлением в состоянии i.

2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$ — множество управлений. Произвольно выбранный элемент из множества $\mathcal{U}$ обозначим через u, назовем управлением и будем представлять в виде: $u = [u_1, \ldots, u_n], u_i \subset \mathcal{U}_i, i = \overline{1,n}$.

3. $[\mathcal{U}_i, \mathcal{B}(\mathcal{U}_i)]$ — пространство управлений в состоянии i, где $\mathcal{B}(\mathcal{U}_i)$ — борелевская σ-алгебра подмножеств множества U_i, т.е. $\mathcal{B}(\mathcal{U}_i) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{R}^1) : A = \mathcal{U}_i \cap \mathrm{C},\ \mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathrm{R}^1)\}, i = \overline{1,n}$.

4. $\mathcal{P}_i$ — множество всевозможных вероятностных мер на пространстве $[\mathcal{U}_i, \mathcal{B}(\mathcal{U}_i)]$, где $i = \overline{1,n}$.

Отметим, что в случае, когда $\mathcal{U}_i$ является конечным множеством, т.е. $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, множество $\mathcal{P}_i$ эквивалентно множеству всевозможных $m(i)$-мерных стохастических векторов-строк, т.е. множеству

$$\mathcal{P}_{1,m(i)} = \Big\{(s_{i,1}, \ldots, s_{i,m(i)}) \in \mathrm{R}^{m(i)} : \sum_{j=1}^{m(i)} s_{i,j} = 1;$$
$$s_{i,j} \geqslant 0, \quad j = \overline{1, m(i)}\ \Big\}. \tag{1}$$

5. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \ldots \times \mathcal{P}_n$ — прямое произведение множеств $\mathcal{P}_i$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 3. Множество S, имеющее вид

$$S = \{[\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots] : \mathfrak{s}^{(k)} \in \mathcal{P}, \quad k = \overline{1,\infty}\}, \tag{2}$$

называется *множеством (марковских) стратегий*.

Произвольно выбранный элемент из множества S назовем стратегией, обозначим через s и будем представлять в виде: $\mathrm{s} = [\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots]$, $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}] \in \mathcal{P}$, $\mathfrak{s}_i^{(k)} \in \mathcal{P}_i$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,\infty}$.

Замечание 2.

Из определения множества стратегий S следует, что оно задается следующей совокупностью: $(\mathrm{J}, \mathcal{U})$.

Определим некоторые частные подмножества множества стратегий S.

Пусть $\Theta = \{[u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, \ldots] : u^{(k)} \in \mathcal{U},\ k = \overline{1,\infty}\}$ — множество всевозможных последовательностей управлений, $\theta = [u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}, \ldots]$ — произвольный элемент из множества Θ, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $u^{(k)} = [u_1^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)}]$, $u_i^{(k)} \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1,n}$, и пусть вероятностная мера $\mathfrak{s}_i$, где $\mathfrak{s}_i \in \mathcal{P}_i$, является вырожденной в точке u_i, т.е. $\mathfrak{s}_i(u_i) = 1$. Тогда стратегия $\mathrm{s}(\theta)$, принадлежащая множеству S и имеющая вид

$$\mathrm{s}(\theta) = [\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots], \tag{3}$$

где $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}]$, $\mathfrak{s}_i^{(k)}$ — вероятностная мера, вырожденная в точке $u_i^{(k)}$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,\infty}$, называется вырожденной стратегией, соответствующей последовательности управлений θ.

Множество S_1, определяемое выражением

$$\mathrm{S}_1 = \{\mathrm{s}(\theta) : \ \theta \in \Theta\}, \tag{4}$$

называется множеством вырожденных стратегий.

Множество S_2, определяемое выражением

$$\mathrm{S}_2 = \{\mathrm{s} \in \mathrm{S} : \ \mathfrak{s}^{(k)} = \mathfrak{s},\ k = \overline{1,\infty},\ \mathfrak{s} \in \mathcal{P}\}, \tag{5}$$

где $\mathfrak{s}^{(k)}$ — k-я компонента стратегий s, $k = \overline{1,\infty}$, называется множеством стационарных стратегий. При этом произвольный элемент множества S_2 называется стационарной стратегией и имеет вид: $\mathrm{s} = [\mathfrak{s}, \ldots, \mathfrak{s}, \ldots]$, где $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n]$, $\mathfrak{s}_i \in \mathcal{P}_{1,m(i)}$, $i = \overline{1,n}$.

Множество S_3, определяемое выражением

$$\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2 = \{\mathrm{s}(\theta) : \ \theta \in \Theta_c\}, \tag{6}$$

где $\Theta_c = \{[u, \ldots, u, \ldots] : u \in \mathcal{U}\}$ — множество стационарных последовательностей управлений, называется множеством стационарных вырожденных стратегий. При этом стационарная вырожденная стратегия $\mathrm{s}(\theta)$, для которой $\theta = [u, \ldots, u, \ldots]$, называется стационарной вырожденной стратегией, порожденной управлением u.

1.1.1.3. Определение отображения $\mathcal{F}$

Для определения отображения $\mathcal{F}$ введем следующие обозначения и определения.

1. $h_i : \ \mathcal{U}_i \to \mathrm{H} - [\mathcal{B}(\mathcal{U}_i)/\mathcal{B}(\mathrm{R}^{n+1})]$ — измеримое отображение, где $i \in \mathrm{J}$. При этом $\mathrm{h}_i(u_i)$, где $u_i \in \mathcal{U}_i$, $h_i(u_i) \in \mathrm{H}$, называется приведенным управлением, соответствующим управлению u_i.

Каждой стратегии s поставим в соответствие элемент $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$, принадлежащий множеству $\mathfrak{G}$ и имеющий вид

$$\mathfrak{h}(\mathrm{s}) = [\mathrm{h}^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, \mathrm{h}^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots], \tag{1}$$

где $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}) \in \mathrm{H}$, $k = \overline{1, \infty}$, $\mathfrak{s}^{(k)}$ — k-я компонента стратегии $\mathfrak{s}$, $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}) = [h_1^{(k)}(\mathfrak{s}_1^{(k)}), \ldots, h_n^{(k)}(\mathfrak{s}_n^{(k)})]$, $\mathfrak{s}_i^{(k)}$ — i-я компонента элемента $\mathfrak{s}^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$,

$$h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \int\limits_{\mathcal{U}_i} h_i(u_i) \cdot d\mathfrak{s}_i^{(k)}(u_i). \tag{2}$$

При этом интеграл в выражении (2) является интегралом Лебега.

Отметим, что в случае, когда $\mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$, являются конечными множествами, выражение (2), в соответствии с выражением (1) пп. 1.1.1.2, примет вид

$$h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^{m(i)} h_i(j) \cdot \mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}. \tag{3}$$

Определение 4. Отображение $\mathcal{F} : \mathrm{S} \to \Xi$ имеет вид

$$\mathcal{F}(\mathrm{s}) = \xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s})), \tag{4}$$

где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, $\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}))$ — КМЦД, задаваемая совокупностью $(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}))$.

Замечание 3.

Из определения отображения $\mathcal{F}$ следует, что оно задается следующей совокупностью: $(a, \mathrm{J}, \mathcal{U}, \{\mathrm{h}(u) : u \in \mathcal{U}\})$, где $a, \mathrm{J}, \mathcal{U}$ — определенные ранее математические объекты, $h(u) = [h_1(u_1), \ldots, h_n(u_n)]$, h_i — отображение, определенное в п. 1 настоящего подпункта, $i = \overline{1, n}$.

Итак, УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K} = [\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$ полностью определена. При этом из замечаний 1–3 следует, что $\mathcal{K}$ задается следующей совокупностью исходных сведений:

$$(a, \mathrm{J}, \mathcal{U}, \{h(u) : u \in \mathcal{U}\}). \tag{5}$$

1.1.2. Цель исследования

Для формулирования цели исследования УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K} = [\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$, задаваемой совокупностью $(a, \mathrm{J}, \mathcal{U}, \{h(u) : u \in \mathcal{U}\})$, введем следующие обозначения.

1. Для любых $k \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}$ определим вектор

$$\varphi(k, \mathfrak{h}) = [\varphi_1(k, \mathfrak{h}), \ldots, \varphi_n(k, \mathfrak{h})]^{\mathrm{T}},$$

следующим образом:

$$\varphi(k, \mathfrak{h}) = k^{-1} \cdot \varphi_k(\mathfrak{h}), \tag{1}$$

где

$$\varphi_k(\mathfrak{h}) = \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}^{(j-1)}(\mathfrak{h}) \cdot \rho^{(m)}(\mathfrak{h}), \tag{2}$$

$\mathrm{P}^{(0)}(\mathfrak{h})$ — единичная матрица порядка n, $\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h})$ — стохастическая матрица, определяемая выражением (6) пп. 1.1.1.1, $k = \overline{1, \infty}$,

$$\rho^{(m)}(\mathfrak{h}) = q_1^{(m)}(\mathfrak{h}) - c \cdot q_2^{(m)}(\mathfrak{h}), \tag{3}$$

$q_\nu^{(m)}(\mathfrak{h})$, $\nu = 1, 2$, — векторы дохода и ресурса, определяемые выражением (7) п.п. 1.1.1.1, $m = \overline{1, \infty}$, c — коэффициент приведения (стоимость единицы ресурса), где $c \in \mathrm{R}^1$, который в дальнейшем используется только в приложении для решения отдельных задач оптимального управления марковскими объектами (см. гл. 9 в [49]).

Отметим следующее:

1) $\rho^{(m)}(\mathfrak{h})$ является вектором приведенного дохода, соответствующим элементу $\mathfrak{h}$ и моменту дискретного времени m;

2) $\varphi_k(\mathfrak{h})$ является вектором среднего приведенного дохода на интервале времени $[0, k]$, соответствующим элементу $\mathfrak{h}$;

3) $\varphi(k, \mathfrak{h})$ является вектором среднего приведенного дохода в единицу времени, соответствующим элементу $\mathfrak{h}$ и интервалу времени $[0, k]$.

2. Введем следующие две векторные характеристики элемента $\mathfrak{h}$:

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) = \left(\varphi_{\text{н},1}(\mathfrak{h}), \ldots, \varphi_{\text{н},n}(\mathfrak{h})\right)^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) = \left(\varphi_{\text{в},1}(\mathfrak{h}), \ldots, \varphi_{\text{в},n}(\mathfrak{h})\right)^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

где

$$\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) = \varliminf_{k \to \infty} \varphi_i(k, \mathfrak{h}) \tag{6}$$

$$\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) = \varlimsup_{k \to \infty} \varphi_i(k, \mathfrak{h}), \tag{7}$$

где $i = \overline{1, n}$, $\varliminf(\cdot)$, $\varlimsup(\cdot)$ — соответственно нижний и верхний пределы последовательности $(\cdot)$, $\varphi_i(k, \mathfrak{h})$ — i-компонента вектора $\varphi(k, \mathfrak{h})$.

3. Определим частичную упорядоченность $\leqslant$ в множестве $\mathcal{E}^n$ всех n-мерных векторов-столбцов. Пусть $\mathfrak{r}_1 \in \mathcal{E}^n$ и $\mathfrak{r}_2 \in \mathcal{E}^n$. Тогда $\mathfrak{r}_1 \leqslant \mathfrak{r}_2$ в том и только в том случае, когда выполняется следующая система неравенств:

$$\mathfrak{r}_{1,i} \leqslant \mathfrak{r}_{2,i}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $\mathfrak{r}_{\nu,i}$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_\nu$, $\nu = 1, 2$. При этом соотношение $\mathfrak{r}_1 < \mathfrak{r}_2$ выполняется в том и только в том случае, когда хотя бы одно неравенство в (8) является строгим; $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2$ — когда в системе (8) присутствуют только равенства.

4. Определим 1-частичную упорядоченность $\overset{1}{\leqslant}$ в множестве $\Xi = \{\xi(a, \mathfrak{h})\colon a \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}\}$ всех КМЦД.

Пусть имеются две КМЦД: $\xi_1 = \xi(a_1, \mathfrak{h}_1)$ и $\xi_2 = \xi(a_2, \mathfrak{h}_2)$, где $a_\nu \in \mathcal{P}_{1,n}$,

$\mathfrak{h}_\nu \in \mathfrak{G}$, $\nu = 1, 2$. Тогда $\xi_1 \overset{1}{\leqslant} \xi_2$ в том и только в том случае, когда выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_2), \\ \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_2). \end{cases} \tag{9}$$

При этом $\xi_1 \overset{1}{<} \xi_2$ в том и только в том случае, когда в системе (9) хотя бы одно неравенство строгое; $\xi_1 \overset{1}{=} \xi_2$ — когда в системе (9) присутствуют только равенства.

5. Определим ℓ-частичную упорядоченность $\overset{\ell}{\leqslant}$ на множестве Ξ_0 всех однородных КМЦД, где $\ell = 2, 3, \ldots$, $\Xi_0 \subset \Xi$.

5.1. Введем следующие характеристики однородной КМЦД $\xi = \xi(a, \mathfrak{h}) = \xi_0(a, h)$, где $\mathfrak{h} = [h, \ldots, h, \ldots]$, $h \in \mathrm{H}^n$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $\xi \in \Xi_0$:

$$\mathfrak{r}_1(h) = \pi(h) \cdot \rho(h), \tag{10}$$

$$w_1(h) = \mathrm{B}_1(h) \cdot \rho(h) - \mathfrak{r}_1(h), \tag{11}$$

$$w_\ell(h) = -\mathrm{B}_1(h) \cdot w_{\ell-1}(h), \quad \ell = 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

где $\pi(h)$ — матрица финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, определяемая выражением

$$\pi(h) = \lim_{k \to \infty} k^{-1} \cdot [\mathrm{E} + \mathrm{P}(h) + \ldots + \mathrm{P}^k(h)], \tag{13}$$

$\mathrm{B}_1(h) = [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h)]^{-1}$ — фундаментальная матрица однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, $\rho(h) = \rho^{(m)}(\mathfrak{h})$, $\mathrm{P}(h) = P^{(m)}(\mathfrak{h})$, $m = \overline{1, \infty}$, E — единичная матрица порядка n.

Отметим, что в работах [8, 20] показано существование матриц $\pi(h)$, $\mathrm{B}_1(h)$ для любого $h \in \mathrm{H}^n$.

5.2. Пусть имеются две однородные КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h^{(1)})$, $\xi_2 = \xi_0(a, h^{(2)})$, где $h^{(\nu)} \in \mathrm{H}^n$, $\nu = 1, 2$.

Тогда $\xi_1 \overset{\ell}{\leqslant} \xi_2$ в том и только в том случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух соотношений:

$$\xi_1 \overset{\ell-1}{<} \xi_2, \tag{14}$$

$$\xi_1 \overset{\ell-1}{=} \xi_2, \quad w_{\ell-1}(h^{(1)}) \leqslant w_{\ell-1}(h^{(2)}). \tag{15}$$

При этом $\xi_1 \overset{\ell}{<} \xi_2$ в том и только в том случае, когда выполняется либо соотношение (14), либо соотношение (15), в котором неравенство является строгим; $\xi_1 \overset{\ell}{=} \xi_2$ — когда выполняется только соотношение (15), в котором нет неравенств.

Пусть Φ — любое подмножество из множества Ξ, т.е. $\Phi = \{\xi(a, \mathfrak{h})\colon\ a \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}$, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{G}$. Тогда КМЦД $\xi_1 = \xi(a, \mathfrak{h}_1)$ из множества Φ

называется 1-минимальной (1-максимальной) КМЦД в множестве Φ, если справедливо выражение:

$$\xi_1 \overset{1}{\leqslant} \xi_2 \quad \forall \xi_2 \in \Phi \tag{16}$$

$$(\xi \overset{1}{\geqslant} \xi_2 \quad \forall \xi_2 \in \Phi). \tag{17}$$

КМЦД $\xi_1 = \xi(a, \mathfrak{h}_1)$, где $\mathfrak{h}_1 \in \mathfrak{D}$, называется ε-минимальной (ε-максимальной) КМЦД в множестве Φ, если выполняется следующая система неравенств:

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) - a_1 \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \quad \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) - b_1 \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{1} \tag{18}$$

$$(a_2 - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \quad b_2 - \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{1}), \tag{19}$$

где $a_\nu = [a_{\nu,1}, \ldots, a_{\nu,n}]^{\mathrm{T}}$, $b_\nu = [b_{\nu,1}, \ldots, b_{\nu,n}]^{\mathrm{T}}$, $\nu = 1, 2$,

$$a_{1,i} = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \tag{20}$$

$$a_{2,i} = \sup\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \tag{21}$$

$$b_{1,i} = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \tag{22}$$

$$b_{2,i} = \sup\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \tag{23}$$

$\varepsilon > 0$, $\mathbf{1}$ — n-мерный вектор вида $[1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$, $i = \overline{1, n}$.

7. Пусть Φ_0 — любое подмножество из множества Ξ_0, т.е. $\Phi_0 = \{\xi_0(a, h) : h \in \mathcal{D}\}$, где $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n$. Тогда однородная КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h)$ из множества Φ_0 называется ℓ-минимальной (ℓ-максимальной) однородной КМЦД в множестве Φ_0, если справедливо выражение

$$\xi_1 \overset{\ell}{\leqslant} \xi_2, \quad \forall \xi_2 \in \Phi_0 \tag{24}$$

$$(\xi \overset{\ell}{\geqslant} \xi_2, \quad \forall \xi_2 \in \Phi_0), \tag{25}$$

где $\ell = 2, 3, \ldots$

8. Определим 1-частичную упорядоченность $\overset{l}{\preccurlyeq}$ на множестве стратегий S.

Пусть имеются две стратегии s_ν, $\nu = 1, 2$, где $\mathrm{s}_\nu \in \mathrm{S}$. Тогда $\mathrm{s}_1 \overset{l}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда КМЦД $\mathcal{F}(\mathrm{s}_\nu) = \xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu))$ удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{1}{\leqslant} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2), \tag{26}$$

где $\mathcal{F}$ — отображение множества S в Ξ, являющееся компонентой УКМЦ $\mathcal{K}$. При этом $\mathrm{s}_1 \overset{1}{\prec} \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{1}{<} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2)$; $\mathrm{s}_1 \overset{1}{\asymp} \mathrm{s}_2$ — когда $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{1}{=} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2)$.

Стратегия s_1 называется 1-минимальной (1-максимальной) стратегией в множестве S, если справедливо выражение

$$\mathrm{s}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2 \quad \forall \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S} \tag{27}$$

$$(\mathrm{s}_1 \overset{1}{\succcurlyeq} \mathrm{s}_2 \quad \forall \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}). \tag{28}$$

Стратегия s_1 называется ε-минимальной (ε-максимальной) стратегией в множестве S, если КМЦД $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1)$ является ε-минимальной (ε-максимальной) КМЦД в множестве $\mathcal{F}(\mathrm{S}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s})) : \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$.

Определим ℓ-частичные упорядоченности $\overset{\ell}{\preccurlyeq}$, $\ell = 2, 3, \ldots$ в множестве S_3 стационарных вырожденных стратегий.

Пусть имеются две стационарные вырожденные стратегии s_1, s_2. Тогда $\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда однородная КМЦД $\mathcal{F}(\mathrm{s}_\nu)$, $\nu = 1, 2$, удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{\ell}{\leqslant} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2). \tag{29}$$

При этом $\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\prec} \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{\ell}{\prec} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2)$; $\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\asymp} \mathrm{s}_2$ — когда $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{\ell}{=} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2)$.

Стратегия $\mathrm{s}_1 \in \mathrm{S}_3$ называется ℓ-минимальной (ℓ-максимальной) стратегией в множестве S_3, если справедливо выражение

$$\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2 \quad \forall \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}_3 \tag{30}$$

$$(\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\succcurlyeq} \mathrm{s}_2 \quad \forall \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}_3), \tag{31}$$

где $\ell = \overline{2, \infty}$.

Теперь сформируем цель исследования УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K}$.

Цель исследования УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K} = [\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$ состоит в следующем:

1) найти условия существования минимальной и максимальной стратегий в множестве S и выявить их основные свойства;

2) построить численные методы нахождения указанных стратегий.

1.1.3. Основные результаты исследований

В этом параграфе излагаются основные результаты исследований УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K} = [\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$, задаваемой совокупностью $(a, \mathrm{J}, \mathcal{U}, \{h(u) :\ u \in \mathcal{U}\})$.

Результатом исследования УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K}$ являются следующие доказанные утвержения.[1]

---

[1]Утверждения 1 и 2.1 являются непосредственным следствием из теорем, доказанных Е.А. Файнбергом и изложенных в работах [13–16].

1. Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве стратегий S существует ε-максимальная и ε-минимальная вырожденные стратегии, обозначенные соответственно s_1 и s_2. При этом ε-максимальная КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(s_1))$ и ε-минимальная КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(s_2))$ в множестве $\mathcal{F}(S)$ обладают свойством

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(s_\nu)) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(s_\nu)), \quad \nu = 1, 2. \tag{1}$$

2. Для случая, когда множества $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\mathcal{D}_i = \{h_i(u_i) : u_i \in \mathcal{U}_i\}$, h_i — отображение, определяемое в пп. 1.1.1.3, являются замкнутыми множествами, справедливы следующие утверждения.

2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве стратегий S существует ε-максимальная и ε-минимальная стационарные вырожденные стратегии, обозначенные соответственно s_1 и s_2, т.е. $s_\nu \in S_3$, $\nu = 1, 2$. При этом ε-максимальная однородная КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(s_1)) = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)})$ и ε-минимальная однородная КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(s_2)) = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)})$, где $\mathfrak{h}(s_\nu) = [h_\varepsilon^{(\nu)}, \ldots, h_\varepsilon^{(\nu)}, \ldots]$, $\nu = 1, 2$, обладают свойством

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(s_\nu)) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(s_\nu)) = \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon^\nu), \quad \nu = 1, 2, \tag{2}$$

где $\mathfrak{r}_1(\cdot)$ — вектор, определяемый в п. 1.1.2.

2.2. Если множества $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, являются конечными множествами или линейными многогранниками, то для любого $\ell = 1, 2, \ldots$ в множестве S существуют ℓ-максимальная и ℓ-минимальная стационарные вырожденные стратегии, обозначенные соответственно s_1 и s_2. При этом: 1) стратегии s_1 и s_2 являются соответственно ℓ-максимальной и ℓ-минимальной стратегиями в множестве S_3; 2) однородные КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(s_\nu)) = \xi_0(a, h^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, где $\mathfrak{h}(s_\nu) = [h^{(\nu)}, \ldots, h^{(\nu)}, \ldots]$, являются соответственно ℓ-максимальной и ℓ-минимальной однородной ОКМЦД в множестве $\Phi_0 = \{\xi_0(a, h) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, h \in \mathcal{D}\}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$; 3) разработан численный итерационный метод, позволяющий отыскать как стратегию s_ν, так и однородную КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$ за конечное число итераций, где $\nu = 1, 2$.

1.2. УКМЦ с неполной информацией. Цель и основные результаты исследования

В этом параграфе определяются две УКМЦ с неполной информацией, отличающиеся характеристиками неполной информации. Формулируется цель исследования и приводятся основные результаты.

1.2.1. Определение УКМЦ с неполной информацией

В этом пункте определяются две УКМЦ с неполной информацией, $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, отличающиеся характеристиками неполной информации.

УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_\nu$, где $\nu = 1, 2$, представляет собой следующую совокупность:

$$\mathcal{K}_\nu = [S, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_\nu], \tag{1}$$

где S — множество стратегий, $\mathcal{A}(\Xi)$ — множество всех подмножеств множества Ξ конечных марковских цепей с доходом и ресурсом, $\mathcal{F}_\nu$ — отображение множества стратегий S в множество $\mathcal{A}(\Xi)$, т.е. $\mathcal{F}_\nu : \mathrm{S} \to \mathcal{A}(\Xi)$. При этом отображения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответствуют различным характеристикам неполной информации: $\mathcal{F}_1$ — стационарной характеристике; $\mathcal{F}_2$ — нестационарной характеристике.

Отметим, что неполная информация проявляется в том, что в УКМЦ с неполной информацией одной стратегии s ставится в соответствие некоторое подмножество КМЦД $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s})$, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s}) \in \mathcal{A}(\Xi)$.

Перейдем к определению объектов, составляющих УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_\nu$, $\nu = 1, 2$.

1.2.1.1. Определение множеств S и $\mathcal{A}(\Xi)$

Множество стратегий S определяется выражением (2) п./п. 1.1.1.2 и задается совокупностью $(\mathrm{J}, \mathcal{U})$, где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$, — конечные множества. Таким образом, множество стратегий имеет вид

$$\mathrm{S} = \{[\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots] : \mathfrak{s}^{(k)} \in \mathcal{P}, \quad k = \overline{1, \infty}\}, \tag{1}$$

где $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1,m(1)} \times \ldots \times \mathcal{P}_{1,m(n)}$. При этом любая стратегия $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$ имеет вид: $\mathrm{s} = [\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots]$, где $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}]$, $\mathfrak{s}_i^{(k)} = [\mathfrak{s}_{i,1}^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_{i,m(i)}^{(k)}] \in \mathcal{P}_{1,m(i)}$, $i = \overline{1, n}$.

$\mathcal{A}(\Xi)$ является множеством всех подмножеств множества Ξ, которое определяется выражением (8) пп. 1.1.1.1. При этом множество $\mathcal{A}(\Xi)$ задается так же, как и множество Ξ, множеством состояний J.

Замечание 1.

Из определения множеств S и $\mathcal{A}(\Xi)$ следует, что они задаются совокупностью $(\mathrm{J}, \mathcal{U})$.

1.2.1.2. Определение отображений $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$

Для определения отображений $\mathcal{F}_\nu$, $\nu = 1, 2$, введем следующие обозначения и понятия.

1. Управлению u_i в состоянии i, где $u_i \in \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$, поставим в соответствие некоторое непустое множество $\mathcal{D}_i(u_i)$ элементов из множества H, где $i = \overline{1, n}$, $u_i = \overline{1, m(i)}$. При этом $\mathcal{D}_i(u_i)$ назовем множеством приведенных управлений в состоянии i, соответствующим управлению u_i, или характеристикой неполной информации в состоянии i, соответствующей управления u_i.

В общем случае, когда $\mathcal{D}_i(u_i) = \{h_i = [h_{i,1}, \ldots, h_{i,n+2}]\} \subset \mathrm{H}$ не является одноэлементным множеством, оно определяет:

а. некоторую область $\{[h_{i,1}, \ldots, h_{i,n}] : h_i \in \mathcal{D}_i(u_i)\} \subset \mathcal{P}_{1,n}$ возможных значений вектора переходных вероятностей из состояния i при управлении u_i;

б. некоторую область $\{h_{i,n+1} : h_i \in \mathcal{D}_i(u_i)\} \subset [-\beta_0, \beta_0]$ возможных значений величины дохода в состоянии i при управлении u_i;

в. некоторую область $\{h_{i,n+2} : h_i \in \mathcal{D}_i(u_i)\} \subset [\alpha_0, \beta_0]$ возможных значений величины ресурса в состоянии i при управлении u_i.

2. Каждой стратегии s, где s $\in$ S, поставим в соответствие множество $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$, где $\mathfrak{G}(\mathrm{s}) \subset \mathfrak{G}$, определяемое выражением

$$\mathfrak{G}(\mathrm{s}) = \{[h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots] \in \mathfrak{G} : h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m(i)} h_i^{(k)}(j)\mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}, \quad h_i^{(k)}(j) \in \mathcal{D}_i(j), \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,\infty}\}, \quad (1)$$

где $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathfrak{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_n^{(k)}]$ — соответствующая компонента стратегии s, $k = \overline{1,\infty}$, $\mathfrak{s}_i^{(k)} = [\mathfrak{s}_{i,1}^{(k)}, \ldots, \mathfrak{s}_{i,m(i)}^{(k)}]$, $i = \overline{1,n}$, $h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}) = [h_1^{(k)}(\mathfrak{s}_1^{(k)}), \ldots$ $\ldots, h_n^{(k)}(\mathfrak{s}_n^{(k)})] \in \mathrm{H}^n$, $\mathcal{D}_i(j)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению $u_i = j$.

Множество $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ назовем нестационарной характеристикой неполной информации, соответствующей стратегии s. Из выражения (1) следует, что множество $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ может быть представлено в виде

$$\mathfrak{G}(\mathrm{s}) = \mathcal{D}(\mathfrak{s}^1) \times \ldots \times \mathcal{D}(\mathfrak{s}^{(k)}) \times \ldots, \quad (2)$$

где $\mathcal{D}(\mathfrak{s}^{(k)}) = \mathcal{D}_1(\mathfrak{s}_1^{(k)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\mathfrak{s}_n^{(k)})$, $k = \overline{1,\infty}$, $\mathcal{D}_i(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \{h_i \in \mathrm{H} :$ $h_i = \sum\limits_{j=1}^{m(i)} h_i^{(k)}(j)\mathfrak{s}_{i,j}^{(k)},\ h_i^{(k)}(j) \in \mathcal{D}_i(j)\}$, $i = \overline{1,n}$.

3. Множество $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}) \subset \mathfrak{G}(\mathrm{s})$, определяемое выражением: $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}) = \{[h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots] \in \mathfrak{G}(\mathrm{s})$: [для любого $k = \overline{1,\infty}$ выполняется равенство

$$h_i^{(k)}(\mathfrak{s}_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^{m(i)} h_i(j)\mathfrak{s}_{i,j}^{(k)}, \quad h_i(j) \in \mathcal{D}_i(j), \quad i = \overline{1,n}\,]\}, \quad (3)$$

назовем стационарной характеристикой неполной информации, соответствующей стратегии s.

Определение 1. Отображение $\mathcal{F}_1$: S $\to \mathcal{A}(\Xi)$ определяется выражением

$$\mathcal{F}_1(\mathrm{s}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) \colon a \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}_1(\mathrm{s})\}, \quad (4)$$

где s $\in$ S, $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}) \in \mathcal{A}(\Xi)$. При этом множество $\mathcal{F}_1(\mathrm{s})$ называется *множеством* КМЦД, *соответствующим стратегии* s *и стационарной характеристике неполной информации* $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s})$.

Определение 2. Отображение $\mathcal{F}_2$: S $\to \mathcal{A}(\Xi)$ определяется выражением

$$\mathcal{F}_2(\mathrm{s}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) \colon a \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}(\mathrm{s})\}. \quad (5)$$

При этом $\mathcal{F}_2(\mathrm{s})$ называется *множеством* КМЦД, *соответствующим стратегии* s *и нестационарной характеристике неполной информации* $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$.

Понятно, что справедливо включение: $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}) \subset \mathcal{F}_2(\mathrm{s})$.

Замечание 2.

Из определений отображений $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ следует, что они задаются следующей совокупностью: $(a, \mathrm{J}, \mathcal{U}, \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\})$, где a, J, $\mathcal{U}$ — определенные ранее математические объекты, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$.

Теперь конкретизируем определения УКМЦ с неполной информацией, $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$.

Определение 3. УКМЦ с неполной информацией , имеющая вид

$$[\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_1], \tag{6}$$

называется УКМЦ *со стационарной характеристикой неполной информации.*

Определение 4. УКМЦ с неполной информацией, имеющая вид

$$[\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_2], \tag{7}$$

называется УКМЦ *с нестационарной характеристикой неполной информации.*

Из замечаний 1 и 2 следует, что УКМЦ $\mathcal{K}_1$ и УКМЦ $\mathcal{K}_2$ задаются следующей совокупностью сведений, достаточной для их построения:

$$(a, \mathrm{J}, \mathcal{U}, \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}). \tag{8}$$

Замечание 3.

Пусть каждое множество $\mathcal{D}_i(j)$, где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m(i)}$, является одноточечным множеством, т.е. $\mathcal{D}_i(j) = \{h_i(j)\}$. Тогда для любой стратегии s, где $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$, выполняется равенство $\mathfrak{S}(\mathrm{s}) = \mathfrak{S}_1(\mathrm{s})$, следовательно и $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. При этом, как следует из выражений (1), (3) настоящего подпункта и выражения (3) пп. 1.1.1.3, УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ эквивалентны УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K}$, в которой $\mathcal{U}$ — конечное множество управлений, т.е. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}, i = \overline{1, n}$.

1.2.2. Цель исследования

Для формулирования цели исследования УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ введем следующие обозначения и определения, базирующиеся на материале п. 1.1.2.

1. В множестве стратегий S каждой УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_\nu = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_\nu]$, где $\nu = 1, 2$, определим частичную упорядоченность $\preccurlyeq$.

Пусть $\mathrm{s}_m \in \mathrm{S}$, $m = 1, 2$. Тогда $\mathrm{s}_1 \preccurlyeq \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_1(s_1) \leqslant a_1(s_2), \\ b_1(s_1) \leqslant b_1(s_2), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1(\mathrm{s}_m) = [a_{1,1}(\mathrm{s}_m), \ldots, a_{1,n}(\mathrm{s}_m)]^{\mathrm{T}}$, $b_1(\mathrm{s}_m) = [b_{1,1}(\mathrm{s}_m), \ldots, b_{1,n}(\mathrm{s}_m)]^{\mathrm{T}}$, $a_{1,i}(\mathrm{s}_m)$, $b_{1,i}(\mathrm{s}_m)$ — величины, определяемые выражениями (20) и (22) п. 1.1.2, в которых множество $\mathfrak{D}$ заменено на множество $\mathfrak{S}_\nu(\mathrm{s}_m)$, где $\nu = 1, 2$, $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}_m)$ — множество, определенное выражением (3) пп. 1.2.1.2, $\mathfrak{S}_2(\mathrm{s}_m) = \mathfrak{S}(\mathrm{s}_m)$ — множество, определенное выражением (2) пп. 1.2.1.2.

2. Стратегия s_1, называется минимальной (максимальной) стратегией в множестве S УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_\nu$, где $\nu = 1, 2$, если справедливо следующее выражение:

$$\mathrm{s}_1 \preccurlyeq \mathrm{s}_2 \quad \forall\, \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S} \;\; (\mathrm{s}_2 \preccurlyeq \mathrm{s}_1 \quad \forall\, \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}). \tag{2}$$

Теперь сформируем цель исследования УКМЦ $\mathcal{K}_\nu$, $\nu = 1, 2$.

Цель исследования УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_\nu = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_\nu]$, где $\nu = 1, 2$, состоит в следующем:

1) найти условия существования минимальной и максимальной стратегии в множестве S;

2) в условиях существования максимальной и минимальной стратегий, обозначенных соответственно s_1 и s_2, найти условия существования максимальной (ε-максимальной) и минимальной (ε-минимальной) КМЦД в множествах $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s}_1)$ и $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s}_2)$, обозначенных соответсвенно ξ_1 и ξ_2;

3) построить численные методы нахождения указанных стратегий и КМЦД.

1.2.3. Основные результаты исследований

В этом пункте излагаются основные результаты исследований УКМЦ со стационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_1 = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_1]$ и УКМЦ с нестационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_2 = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_2]$.

В результате исследования УКМЦ с неполной информацией $\mathcal{K}_1$ установлена справедливость следующих утверждений.

1. В множестве стратегий S существует максимальная (s_1) и минимальная (s_2) стратегии, которые являются стационарными вырожденными стратегиями, порожденными управлениями соответственно $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, где $u^{(\nu)} \in \mathcal{U}$, $\nu = 1, 2$.

2. Для множества $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu) \subset \Xi$, где $\nu = 1, 2$, s_1, s_2 — соответственно максимальная и минимальная стратегии в множестве S, порожденные соответственно управлениями $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, справедливы следующие утверждения.

2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ε-максимальная однородная КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)})$ и ε-минимальная однородная КМЦД $\xi_2 = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)})$, где $h_\varepsilon^{(\nu)} \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\mathcal{D}(u^{(\nu)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, $i = \overline{1, n}$.

2.2. Если множества $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, являются конечными множествами или линейными многогранниками, то в множестве $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ℓ-максимальная однородная КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h^{(1)})$ и ℓ-минимальная однородная КМЦД, $\xi_2 = \xi_0(a, h^{(2)})$, где $h^{(\nu)} \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, $\ell = \overline{1, \infty}$. При этом разработан численный итерационный метод, позволяющий отыскать как стратегию s_ν, так и однородную КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$ за конечное число итераций, где $\nu = 1, 2$.

В результате проведенных исследований УКМЦ с неполной информации $\mathcal{K}_2$ установлена справедливость следующих утверждений.

1. В множестве стратегий S существуют максимальная (s_1) и минимальная (s_2) стратегии, которые являются стационарными вырожденными стратегиями, порожденными соответственно управлениями $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, где $u^{(\nu)} \in \mathcal{U}$, $\nu = 1, 2$.

2. Для множества $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}_\nu) \subset \Xi$, где $\nu = 1, 2$, s_1, s_2 — соответственно максимальная и минимальная стратегии в множестве S, порожденные соответственно управлениями $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, справедливы следующие утверждения.

2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ε-максимальная КМЦД $\xi_1 = \xi(a, \mathfrak{h}_\varepsilon^1)$ и ε-минимальная КМЦД $\xi_2 = \xi(a, \mathfrak{h}_\varepsilon^{(2)})$, для которых выполняются соотношения

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)}) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2, \tag{1}$$

где $\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)})$, $\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)})$ — векторы, определяемые выражениями (4) и (5) п. 1.1.2.

2.2. Для случая, когда множества $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, где $\nu = 1, 2$, $u_i^{(\nu)}$ — i-я компонента управления $u^{(\nu)}$, являются замкнутыми множествами, справедливы следующие утверждения.

2.2.1. Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ε-максимальная однородная КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)})$ и ε-минимальная однородная КМЦД $\xi_2 = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)})$, где $h_\varepsilon^{(\nu)} \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\mathcal{D}(u^{(\nu)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$.

2.2.2. Если множества $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, являются конечными множествами или линейными многогранниками, то в множестве $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ℓ-максимальная однородная КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h^{(1)})$ и ℓ-минимальная однородная КМЦД $\xi_2 = \xi_0(a, h^{(2)})$, где $h^{(\nu)} \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, $\ell = \overline{1, \infty}$. При этом разработан численный итерационный метод, позволяющий отыскать как стратегию s_ν, так и однородную КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$ за конечное число итераций, где $\nu = 1, 2$.

ГЛАВА 2

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ОДНОРОДНЫХ КОНЕЧНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С ДОХОДОМ И РЕСУРСОМ

В этой главе рассматриваются основные свойства множества $\Xi_0 = \{\xi_0(a,h)\colon a \in \mathcal{P}_{1,n},\ h \in \mathrm{H}^n\}$ всевозможных однородных конечных марковских цепей с доходом и ресурсом (множества однородных КМЦД).

Глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе определяются стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$.

Во втором параграфе вводятся классы эквивалентности в множестве Ξ_0, основанные на представлении множества состояний каждой однородной КМЦД $\xi_0(a,h) \in \Xi_0$ в виде суммы следующих множеств: множества невозвратных состояний, множеств возвратных сообщающихся состояний. Приводится алгоритм выделения указанных классов из этого множества.

В третьем параграфе излагаются методы расчета стационарных характеристик однородной КМЦД.

В четвертом параграфе определяются некоторые свойства стационарных характеристик однородной КМЦД, принадлежащих одному классу эквивалентности.

2.1. Стационарные характеристики однородной КМЦД

В этом параграфе вводятся стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $h \in \mathrm{H}^n$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$.

Введем следующие обозначения.

1. $\pi(h)$ — матрица финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$. Эта матрица имеет вид

$$\pi(h) = \lim_{k\to\infty} k^{-1} \cdot [\mathrm{E} + \mathrm{P}(h) + \ldots + \mathrm{P}^{k-1}(h)], \tag{1}$$

где $k \subset \mathcal{N}$, E — единичная матрица порядка n, $\mathrm{P}(h) = (h_{i,j})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ — матрица переходных вероятностей, соответствующая элементу h, $h_{i,j}$ — соответствующие компоненты элемента h, $\mathrm{P}^{k-1}(h)$ — $(k-1)$-я степень матрицы $\mathrm{P}(h)$, $\mathrm{P}^0(h) = \mathrm{E}$, $h \in \mathrm{H}^n$.

Доказательство существования матрицы $\pi(h)$, заимствованное из работы [8], приводится в конце этого параграфа.

2. $\mathrm{B}(h)$ — матрица, которая имеет вид

$$\mathrm{B}(h) = \mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h). \tag{2}$$

Приведем следующие утверждения, заимствованные без доказательства из работы [8] (см. лемму 2.3 на стр. 37) и сформулированные в виде леммы 1.

Лемма 1.

1. *Для каждой однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, *где* $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *выполняются равенства*

$$\mathrm{P}(h) \cdot \pi(h) = \pi(h) \cdot \mathrm{P}(h) = \pi(h) \cdot \pi(h) = \pi(h). \tag{3}$$

2. *Матрица* $\mathrm{B}(h)$, *где* $h \in \mathrm{H}^n$, *является невырожденной матрицей, т.е. существует матрица*

$$\mathrm{B}_1(h) = \mathrm{B}^{-1}(h) = [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h)]^{-1}. \tag{4}$$

3. *Для каждой однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, *где* $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *выполняются следующие равенства*:

$$\pi(h) \cdot \mathrm{B}_1(h) = \mathrm{B}_1(h) \cdot \pi(h) = \pi(h). \tag{5}$$

Лемма 2.

Для каждой однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, *где* $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняются равенства*

$$[\mathrm{E} - \pi(h)] \cdot \mathrm{B}(h) = \mathrm{E} - \mathrm{P}(h), \tag{6}$$

$$\mathrm{B}(h) \cdot [\mathrm{E} - \pi(h)] = \mathrm{E} - \mathrm{P}(h). \tag{7}$$

2. *Выполняются равенства*

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathrm{B}_1(h) = \mathrm{E} - \pi(h), \tag{8}$$

$$\mathrm{B}_1(h) \cdot [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] = \mathrm{E} - \pi(h). \tag{9}$$

Доказательство.

1. Используя лемму 1, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенств (6), (7).

2. С учетом того, что матрица $\mathrm{B}(h)$ имеет обратную матрицу $\mathrm{B}_1(h)$, из равенств (6), (7) следуют равенства (8), (9).

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения.

1. $\mathrm{r}_1 \colon \mathrm{H}^n \to \mathcal{E}^n$ — отображение, имеющее вид

$$\mathrm{r}_1(h) = \pi(h) \cdot \rho(h), \tag{10}$$

где $\rho(h) = q_1(h) - c \cdot q_2(h)$, $q_1(h) = [h_{1,n+1}, \ldots, h_{n,n+1}]^{\mathrm{T}}$ — вектор дохода, соответствующий элементу h, $q_2(h) = [h_{1,n+2}, \ldots, h_{n,n+2}]^{\mathrm{T}}$ — вектор ресурса, соответствующий элементу h, $c \in \mathrm{R}^1$,

$$\mathcal{E}^n = \{[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} \colon x_i \in \mathrm{R}^1, \ \ i = \overline{1,n}\}.$$

2. w_k: $\mathrm{H}^n \to \mathcal{E}^n$ — отображение, имеющее вид

$$w_k(h) = (-1)^{k+1} \cdot [\mathrm{B}_1^k(h) \cdot \rho(h) - \mathfrak{r}_1(h)], \tag{11}$$

где $k \in \mathcal{N}$, $h \in \mathrm{H}^n$, $\mathrm{B}_1^k(h)$ — k-я степень матрицы $\mathrm{B}_1(h)$.

Определение 1.

Стационарными характеристиками однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, называются следующие векторы-столбцы:

$$\mathfrak{r}_1(h) = \pi(h) \cdot \rho(h); \tag{12}$$

$$w_k(h) = (-1)^{k+1} \cdot [\mathrm{B}_1^k(h) \cdot \rho(h) - \mathfrak{r}_1(h)], \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{13}$$

где $h \in \mathrm{H}^n$.

Лемма 3.

Для каждой однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, *где* $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *справедливы следующие выражения.*

$$\pi(h) \cdot \mathfrak{r}_1(h) = \mathrm{P}(h) \cdot \mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(h); \tag{14}$$

$$\mathrm{B}_1(h) \cdot \mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(h); \tag{15}$$

$$w_{k+1}(h) = -\mathrm{B}_1(h) \cdot w_k(h), \quad k = \overline{1, \infty}. \tag{16}$$

Доказательство.

1. Используя лемму 1, из равенства (12) получим равенства (14), (15).
2. Равенство (16) непосредственно следует из выражений (13), (15).

Лемма доказана.

Теперь докажем теорему о существовании матрицы $\pi(h)$, где $h \in \mathrm{H}^n$.

Теорема 1.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ *выполняется соотношение*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \mathrm{A}_k(h) = \underline{\lim_{k\to\infty}} \mathrm{A}_k(h) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{A}_k(h) = \pi(h), \tag{17}$$

где $\mathrm{A}_k(h) = k^{-1} \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{k-1} \mathrm{P}^\nu(h)$, $\mathrm{P}^0(h) = \mathrm{E}$ — *единичная матрица.*

Доказательство.

Непосредственная проверка показывает, что матрицы $\mathrm{A}_k(h)$, $k = \overline{1, \infty}$, для любого $h \subset \mathrm{H}^n$ являются стохастическими матрицами, т.е. $\mathrm{L} = \{\mathrm{A}_k(h), k = \overline{1, \infty}\}$ является ограниченной последовательностью.

В силу леммы Больцано–Вейерштрасса из последовательности L можно выделить сходящуюся последовательность $\mathrm{L}_1 = \{\mathrm{A}_{k(m)}(h), m = \overline{1, \infty}\}$, и пусть $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{A}_{k(m)}(h) = \pi(h)$.

Покажем теперь, что последовательность L не имеет других предельных точек, кроме $\pi(h)$.

Предположим противное: пусть имеется подпоследовательность $\mathrm{L}_2 = \{\mathrm{A}_{\nu(m)}(h), m = \overline{1, \infty}\} \subset \mathrm{L}$, для которой выполняется равенство $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{A}_{\nu(m)}(h) = \pi_1(h)$ и $\pi_1(h) \neq \pi(h)$.

Далее, так как $\mathrm{P}(h)\cdot\mathrm{A}_{k(m)}(h) = \mathrm{A}_{k(m)}(h)\cdot\mathrm{P}(h) = \mathrm{A}_{k(m)}(h)+\dfrac{\mathrm{P}^{k(m)}-\mathrm{E}}{k(m)}$, то при $m \to \infty$ получаем соотношение

$$\mathrm{P}(h)\cdot\pi(h) = \pi(h)\cdot\mathrm{P}(h) = \pi(h). \tag{18}$$

Соотношение (18) влечет справедливость равенств $\mathrm{A}_{\nu(m)}(h) \times \pi(h) = \pi(h)\cdot\mathrm{A}_{\nu(m)}(h) = \pi(h)$, из которых при $m \to \infty$ следует соотношение

$$\pi_1(h)\cdot\pi(h) = \pi(h)\cdot\pi_1(h) = \pi(h). \tag{19}$$

Аналогичным образом получается соотношение

$$\pi(h)\cdot\pi_1(h) = \pi_1(h)\cdot\pi(h) = \pi_1(h). \tag{20}$$

Из соотношений (19) и (20) следует, что $\pi(h) = \pi_1(h)$. Последнее равенство противоречит сделанному ранее предположению. Указанное противоречие говорит о том, что $\pi(h)$ — единственная предельная точка последовательности L, т.е. выполняется соотношение (17). Теорема доказана.

2.2. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности

В этом параграфе вводится классификация однородных КМЦД $\xi_0(a,h)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, основанная на представлении множества их состояний в виде суммы следующих множеств (классов): множеств невозвратных состояний, множеств возвратных сообщающихся состояний. Приводится алгоритм выделения указанных классов из множества состояний $\mathrm{J} = \{1,\ldots,n\}$.

Для дальнейшего изложения материала необходимы следующие определения.

Определение 1.

Состояние $i \in \mathrm{J}$ однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ называется *связанным с состоянием* $j \subset \mathrm{J}$, если существует такой элемент $\mathfrak{r} \in \mathcal{N}$, для которого выполняется неравенство $p_{i,j}(h,\mathfrak{r}) > 0$, где $p_{i,j}(h,\mathfrak{r})$ — соответствующий элемент матрицы $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}(h)$.

Определение 2.

Состояние $i \in \mathrm{J}$ однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ называется *сообщающимся с состоянием* $j \in \mathrm{J}$, если состояние i связано с состоянием j, а состояние j связано с состоянием i.

Определение 3.

Состояние $i \in \mathrm{J}$ однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ называется *возвратным* (*невозвратным*), если выполняется соотношение

$$\sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{N}} \alpha_{i,i}(h,r) = 1 \quad \Big(\sum_{\mathfrak{r}\in\mathcal{N}} \alpha_{i,i}(h,\mathfrak{r}) < 1\Big), \tag{1}$$

где $\alpha_{i,i}(h,\mathfrak{r})$ — вероятность события, состоящего в том, что первое возвращение однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ в состояние i произойдет в момент времени $t \in \mathcal{N}$ при условии, что в момент времени, равный нулю, марковская цепь находилась в состоянии i.

В работах [17, 18, 20] показывается, что множество состояний J однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_0(h) + \mathrm{J}_1(h) + \ldots + \mathrm{J}_{n(h)}(h), \tag{2}$$

где $\mathrm{J}_0(h)$ — класс невозвратных состояний марковской цепи $\xi_0(a, h)$, $\mathrm{J}_\alpha(h)$ — α-й класс возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, при этом $\alpha \in \{1, \ldots, n(h)\}$, $n(h)$ — число классов возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$ и $1 \leqslant n(h) \leqslant n$.

Введем следующие обозначения.

1. $\mathcal{L}$ — конечное множество всевозможных элементов вида $[\mathrm{J}_0, \mathrm{J}_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{J}_k]$, обладающих следующими свойствами: $k \leqslant n$, $\mathrm{J}_\nu \subset \mathrm{J}$, $\nu = \overline{1, k}$; $\mathrm{J}_\nu \neq \varnothing$, $\nu = \overline{1, k}$; $\mathrm{J}_\nu \cap \mathrm{J}_j = \varnothing$, если $\nu \neq j$;

$$\mathrm{J}_0 + \mathrm{J}_1 + \ldots + \mathrm{J}_k = \mathrm{J}. \tag{3}$$

2. I: $\mathrm{H}^n \to \mathcal{L}$ — отображение, имеющее вид

$$\mathrm{I}(h) = [\mathrm{J}_0(h), \mathrm{J}_1(h), \ldots, \mathrm{J}_{n(h)}(h)], \tag{4}$$

где элементы $\mathrm{J}_\nu(h)$, $\nu = \overline{0, n(h)}$ определены в выражении (2).

Пусть имеется отображение I: $\mathrm{H}^n \to \mathcal{L}$. Тогда это отображение определяет в множестве H^n следующее бинарное отношение: элемент $h \in \mathrm{H}^n$ находится в отношении к элементу $t \in \mathrm{H}^n$, если выполняется равенство $\mathrm{I}(h) = \mathrm{I}(t)$. Непосредственно из этого определения следует, что введенное бинарное отношение является отношением эквивалентности [18]. Таким образом, множество H^n разбивается на классы и может быть представлено в виде

$$\mathrm{H}^n = \sum_{\mathrm{L} \in \mathcal{L}} \mathrm{H}^n_\mathrm{L}, \tag{5}$$

где $H^n_\mathrm{L} = \{h \in \mathrm{H}^n\colon \mathrm{I}(h) = \mathrm{L}\}$, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$.

Разбиение на классы множества H^n индуцирует разбиение на классы множества всех однородных КМЦД $\Xi_0 = \{\xi_0(a, h)\colon a \in \mathcal{P}_{1,n}, h \in \mathrm{H}^n\}$, т.е. множество Ξ_0 представляется в виде

$$\Xi_0 = \sum_{\mathrm{L} \in \mathcal{L}} \Xi_\mathrm{L}, \tag{6}$$

где $\Xi_\mathrm{L} = \{\xi_0(a, h)\colon a \in \mathcal{P}_{1,n},\ h \in \mathrm{H}^n_\mathrm{L}\}$ — L-й класс эквивалентности однородной КМЦД.

Ниже излагается метод, позволяющий построить отображение $\mathrm{I} : \mathrm{H}^n \to \mathcal{L}$.

2.2.1. Алгоритм выделения классов невозвратных и возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД

Для обоснования алгоритма выделения указанных классов состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ необходимы следующие утверждения, заимствованные без доказательства из работ [16] и сформулированные в виде леммы 1.

Лемма 1.

1. *Если в однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$ *состояние* $i \in \mathrm{J}$ *связано с состоянием* $j \subset \mathrm{J}$, *а состояние* j *связано с состоянием* $k \subset \mathrm{J}$, *то состояние* i *связано с состоянием* k.

2. *Если в однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$ *состояние* $i \in \mathrm{J}$ *сообщается с состоянием* $j \in \mathrm{J}$, *а состояние* j *сообщается с состоянием* $k \in \mathrm{J}$, *то состояние* i *сообщается с состоянием* k.

3. *Множество состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$ *содержит хотя бы один класс возвратных сообщающихся состояний.*

4. *Для того чтобы некоторое подмножество* J_1 *множества* J *состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$ *являлось классом возвратных сообщающихся состояний, необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий.*

Условие 1. Каждое состояние из множества J_1 сообщается с каждым состоянием из этого множества.

Условие 2. Каждое состояние из множества J_1 не связано ни с одним состоянием из множества $J\backslash\mathrm{J}_1$, т.е. для любых $i \in \mathrm{J}_1$, $j \in \mathrm{J}\backslash\mathrm{J}_1$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{N}$, выполняется равенство $p_{i,j}(h,\mathfrak{r}) = 0$, где $p_{i,j}(h,\mathfrak{r})$ — соответствующий элемент матрицы $\mathrm{P}^{\mathfrak{r}}(h)$.

Изложим основы построения алгоритма выделения из множества состояний J однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ классов возвратных сообщающихся состояний $\mathrm{J}_\alpha(h)$, где $\alpha \in \{1,\ldots,n(h)\}$, и класса $\mathrm{J}_0(h)$ невозвратных состояний.

Введем следующие обозначения.

1. $\mathrm{J}_1(h,i,\mathfrak{r})$ — подмножество состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, которое имеет вид

$$\mathrm{J}_1(h,i,\mathfrak{r}) = \{j \in \mathrm{J}\colon p_{i,j}(h,\mathfrak{r}) > 0\}, \tag{1}$$

где $i \in \mathrm{J}_1$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{N}$.

2. $\mathrm{J}_2(h,i,k)$ — подмножество состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, которое имеет вид

$$\mathrm{J}_2(h,i,k) = \bigcup_{\mathfrak{r}\in\{1,\ldots,k\}} \mathrm{J}_1(h,i,\mathfrak{r}), \tag{2}$$

где $i \in \mathrm{J}$, $k \in \mathcal{N}$

3. $\mathrm{J}_3(h,i)$ — подмножество состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, с которыми связано состояние $i \in \mathrm{J}$ и которое имеет вид

$$\mathrm{J}_3(h,i) = \bigcup_{\mathfrak{r}\in\mathcal{N}} \mathrm{J}_1(h,i,\mathfrak{r}). \tag{3}$$

Из выражений (1), (2) и соотношения

$$p_{i,m}(h, \mathfrak{r}+1) = \sum_{j \in \mathrm{J}} p_{i,j}(h, \mathfrak{r}) \cdot p_{i,m}(h, 1) \tag{4}$$

следуют следующие, непосредственно проверяемые, равенства:

$$\mathrm{J}_1(h, i, \mathfrak{r}+1) = \bigcup_{j \in \mathrm{J}_1(h,i,\mathfrak{r})} \mathrm{J}_1(h, j, 1), \tag{5}$$

$$\mathrm{J}_2(h, i, \mathfrak{r}+1) = \bigcup_{j \in \mathrm{J}_2(h,i,\mathfrak{r})} \mathrm{J}_1(h, j, 1), \tag{6}$$

где $i \in \mathrm{J}$, $k \in \mathcal{N}$.

Л е м м а 2.

Если для некоторых элементов $i \in \mathrm{J}$, $k \in \mathcal{N}$, *выполняется равенство* $\mathrm{J}_2(h, i, k+1) = \mathrm{J}_2(h, i, k)$, *где* $h \in \mathrm{H}^n$, *то для любого элемента* $\mathfrak{r} \in \mathcal{N}$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{J}_2(h, i, k+\mathfrak{r}) = \mathrm{J}_2(h, i, k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из выражения (6) и условия леммы следует, что справедливо равенство $\mathrm{J}_2(h, i, k+2) = \mathrm{J}_2(h, i, k)$. Применяя метод математической индукции и используя выражение (6), получим доказательство леммы 2. Лемма доказана.

Л е м м а 3.

Для любых элементов $i \in \mathrm{J}$, $\mathfrak{r} \in \mathcal{N}$, *справедливо равенство*

$$\mathrm{J}_2(h, i, n+\mathfrak{r}) = \mathrm{J}_2(h, i, n), \tag{7}$$

где n *— число состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a, h)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из выражения (2) следует, что справедливо выражение

$$\mathrm{J}_2(h, i, k) \subseteq \mathrm{J}_2(h, i, k+1), \tag{8}$$

где $k \in \mathcal{N}$. Пусть для любых элементов $m \in \{1, \ldots, k\}$, где $k \in \mathcal{N}$, $k \leqslant n-1$, справедливо выражение

$$\mathrm{J}_2(h, i, m) \neq \mathrm{J}_2(h, i, m+1). \tag{9}$$

Тогда, учитывая выражения (8), (9), получим соотношение

$$|\mathrm{J}_2(h, i, m)| + 1 \leqslant |\mathrm{J}_2(h, i, m+1)|, \tag{10}$$

где $|\mathrm{A}|$ — число элементов конечного множества A.

Учитывая неравенство $|\mathrm{J}_2(h, i, k)| \leqslant n$, где k — любой элемент множества $\mathcal{N}$, и выражение (10), получим равенство $\mathrm{J}_2(h, i, n+1) = \mathrm{J}_2(h, i, n)$. Последнее равенство и лемма 2 влекут справедливость леммы 3. Лемма 3 доказана.

Теорема 1.

Для каждой однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, *где* $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *справедлива система равенств*

$$\mathrm{J}_3(h, i) = \mathrm{J}_2(h, i, n), \quad i = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Справедливость теоремы непосредственно следует из выражений (1), (2) и леммы 3.

Лемма 4.

Пусть i *— такое состояние однородной* КМЦД $\xi_0(a, h)$, *что для любого элемента* $j \in \mathrm{J}_3(h, i)$ *справедливо выражение* $i \in \mathrm{J}_3(h, j)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждое состояние* j, *где* $j \subset \mathrm{J}_3(h, i)$, *сообщается с каждым состоянием* k *из этого множества.*

2. *Каждое состояние* j, *где* $j \in \mathrm{J}_3(h, i)$, *не связано ни с одним состоянием из множества* $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_3(h, i)$.

Доказательство.

1. Пусть k и m — некоторые произвольно выбранные состояния однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$, принадлежащие множеству $\mathrm{J}_3(h, i)$. Тогда, по условию данной леммы 4, справедливы следующие утверждения.

1.1. Состояние i связано с состояниями m и k.

1.2. Состояния m и k связаны с состоянием i.

Из этих утверждений, используя лемму 1 и определение 2 параграфа 3.2, получим, что состояния m и k являются сообщающимися. Пункт 1 леммы 4 доказан.

2. Доказательство пункта 2 данной леммы проведем от противного. Предположим, что некоторое состояние k, где $k \in \mathrm{J}_3(h, i)$, связано с некоторым состоянием m из множества $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_3(h, i)$. Тогда, учитывая, что состояние i связано с состоянием k, из леммы 1 получим, что состояние i связано с состоянием m, т.е. справедливо выражение $m \in \mathrm{J}_3(h, i)$, которое противоречит сделанному предположению о том, что $m \in \mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_3(h, i)$. Указанное противоречие доказывает справедливость пункта 2 данной леммы. Лемма доказана.

Теорема 2.

Пусть i, *где* $i \subset \mathrm{J}$, *— такое состояние однородной* КМЦД $\xi_0(a, h)$, *что для любого элемента* $j \in \mathrm{J}_3(h, i)$ *справедливо выражение* $i \in \mathrm{J}_3(h, j)$.

Тогда множество $\mathrm{J}_3(h, i)$ *является классом возвратных сообщающихся состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a, h)$.

Доказательство данной теоремы 2 непосредственно следует из леммы 4 и 1.

Замечание 1.

Из теоремы 1 и выражения (6) следует, что множество $\mathrm{J}_3(h, i)$, где $i \in \in \mathrm{J}$, состояний однородной КМЦД $\xi_o(a, h)$ можно построить на основании следующего рекуррентного соотношения:

$$\mathrm{J}_2(h, i, k+1) = \bigcup_{j \in \mathrm{J}_2(h, i, k)} \mathrm{J}_1(h, j, 1), \tag{12}$$

где $k \in \mathcal{N}$, $k \leqslant m-1$, $\mathrm{J}_3(h,i) = \mathrm{J}_2(h,i,n)$.

Замечание 1 и теорема 2 позволяют построить следующую процедуру 1 выделения классов состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$.

Процедура 1.

Процедура 1 состоит из трех этапов.

Этап 1. По рекуррентной формуле (12) формируем для каждого элемента $i \in \mathrm{J}$ множество $\mathrm{J}_3(h,i)$.

Этап 2. На этом этапе формируем множества $\mathrm{J}_\alpha(h)$, где $\alpha = \overline{1, n(h)}$, $n(h)$ — число возвратных сообщающихся состояний. Этот этап состоит из $\mathrm{r} \leqslant n$ циклов; на каждом k-м цикле, где $k \in \{1,\ldots,\mathrm{r}\}$, выполняем следующие действия, полагая на первом цикле $\alpha = 1$, $\mathrm{J}_{0,1} = \mathrm{J}$.

2.1. Находим элемент $i_k \in \mathrm{J}_{0,k}$, удовлетворяющий соотношению $i_k = \min\{i : i \in \mathrm{J}_{0,k}\}$.

2.2. Проверяем выполнение условия А: для каждого элемента $j \in \mathrm{J}_3(h,i_k)$ справедливо выражение $i_k \in \mathrm{J}_3(h,j)$.

2.2.1. Если условие А выполнено, то множество $\mathrm{J}_3(h,i_k)$ объявляем множеством возвратных сообщающихся состояний и полагаем $\mathrm{J}_\alpha(h) = \mathrm{J}_3(h,i_k)$. Далее полагаем $\alpha = \alpha + 1$ и формируем множество $\mathrm{J}_{0,k+1} = \mathrm{J}_{0,k} \backslash \mathrm{J}_3(h,i_k)$, после чего переходим к пункту 2.3.

2.2.2. Если условие А не выполнено, то формируем множество $\mathrm{J}_{0,k+1} = \mathrm{J}_{0,k} \backslash \{i_k\}$.

2.3. Проверяем выполнение условия В: $\mathrm{J}_{0,k+1} \neq \varnothing$.

2.3.1. Если условие В выполнено, то переходим к пункту 2.1 следующего $(k+1)$-го цикла этапа 2 процедуры 1.

2.3.2. Если условие В не выполнено, то полагаем $n(h) = \alpha - 1$ и переходим к этапу 3 процедуры 1.

Этап 3. Формируем множество $\mathrm{J}_0(h)$, являющееся классом невозвратных состояний:

$$\mathrm{J}_0(h) = \mathrm{J} \backslash \sum_{\alpha=1}^{n(h)} \mathrm{J}_\alpha(h). \tag{13}$$

На этом этапе процедуру 1 завершаем. Процедура 1 изложена.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что для выделения классов состояний любой однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, используется процедура 1.

Процедура 1 выделения классов состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ представляет собой отображение I: $\mathrm{H}^n \to \mathcal{L}$, свойства которого рассматриваются в последующих параграфах.

Т е о р е м а 3.

Пусть для однородных КМЦД $\xi_0(a,h)$ *и* $\xi_0(a,t)$, *где* $h \in \mathrm{H}^n$, $t \in \mathrm{H}^n$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, *выполняется система равенств*: $\mathrm{J}_1(h,i,1) = \mathrm{J}_1(t,i,1)$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется равенство* $n(h) = n(t)$, *где* $n(h)$, $n(t)$ — *число классов возвратных сообщающихся состояний однородных* КМЦД $\xi_0(a,h)$, $\xi_0(a,t)$.

2. *Выполняется равенство* $\mathrm{J}_0(h) = \mathrm{J}_0(t)$, *где* $\mathrm{J}_0(h), \mathrm{J}_0(t)$ *— множество невозвратных состояний однородных* КМЦД $\xi_0(a,h)$, $\xi_0(a,t)$.

3. *Возвратные сообщающиеся состояния* i *и* j *однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$ *являются возвратными сообщающимися состояниями однородной* КМЦД $\xi_0(a,t)$.

4. *Использование процедуры* 1 *для выделения классов состояний однородных* КМЦД $\xi_0(a,h)$ *и* $\xi_0(a,t)$ *приводит к выполнению системы равенств*: $\mathrm{J}_\alpha(h) = \mathrm{J}_\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

Доказательство.

Из условий данной теоремы и замечания 1 следует выполнение системы равенств
$$\mathrm{J}_3(h,i) = J_3(t,i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Из этой системы равенств и теоремы 2 следует, что если множество $J_3(h,i)$ образует класс возвратных сообщающихся состояний, то множество $\mathrm{J}_3(t,i)$ также образует класс возвратных сообщающихся состояний. Из этого факта и процедуры 1 непосредственно следует справедливость утверждений теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Следствие 1.

Пусть выполняются условия теоремы 3 и $\xi_0(a,h) \in \Xi_\mathrm{L}$, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, Ξ_L — L-й класс эквивалентности однородной КМЦД, определенный в выражении (6) § 2.2. Тогда справедливо выражение $\xi_0(a,t) \in \Xi_\mathrm{L}$.

Справедливость приведенного утверждения непосредственно следует из определения множества Ξ_L и теоремы 3.

Так как выделения классов состояний любой однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, проводится по процедуре 1, то выполнение условий теоремы 3 всегда будет приводить к выполнению системы равенств: $\mathrm{J}_\alpha(h) = \mathrm{J}_\alpha(t)$, $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

2.3. Методы расчета стационарных характеристик однородной КМЦД

Напомним, что каждая однородная КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, имеет стационарные характеристики $\mathrm{r}_1(h), w_k(h), k = \overline{1,\infty}$, которые определяются выражениями (12) и (16) § 2.1, т.е.

$$\mathrm{r}_1(h) = \pi(h) \cdot \rho(h), \tag{1}$$
$$w_{k+1}(h) = -\mathrm{B}_1(h) \cdot w_k(h), \tag{2}$$

где $\pi(h)$ — матрица финитных вероятностей, $\rho(h)$ — известный вектор приведенного дохода, $\mathrm{B}_1(h) = [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h)]^{-1}$.

В этом параграфе излагаются два метода расчета стационарных характеристик однородной КМЦД. Первый — так называемый прямой метод расчета стационарных характеристик — основан непосредственно на выражениях (1), (2). Второй — «косвенный» метод — основан на решении некоторой системы линейных уравнений, которая традиционно [5, 8] использовалась для расчета характеристик однородной КМЦД.

2.3.1. «Прямой» метод

При наличии матриц $\pi(h)$, $\mathrm{B}_1(h)$, где $h \in \mathrm{H}^n$, стационарные характеристики однородной КМЦД в «прямом» методе расчета определяются в соответствии с выражениями (1) и (2) § 2.3.

Остановимся на численном методе определения матриц $\pi(h)$, $\mathrm{B}_1(h)$.

Рассмотрим однородную КМЦД $\xi_0(a,h) \in \Xi_{\mathrm{L}}$, где $\mathrm{L} = (\mathrm{J}_0, \ldots, J_k) \in \mathcal{L}$, т.е. $h \in \mathrm{H}^n$. Из процедуры 1 выделения классов состояний следует, что матрица $\mathrm{P}(h)$ переходных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ (с точностью до перестановки строк) имеет вид

$$\mathrm{P}(h) = \begin{bmatrix} & & \mathrm{P}_0(h) & & \\ 0 & \mathrm{P}_{1,1}(h) & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \mathrm{P}_{k,k}(h) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $k = n(h)$, $\mathrm{P}_0(h)$ — стохастическая матрица размерности $|\mathrm{J}_0(h)| \times n$, $\mathrm{P}_{\alpha,\alpha}(h)$ — стохастическая матрица размерности $|\mathrm{J}_\alpha(h)|\times|\mathrm{J}_\alpha(h)|$, соответствующая α классу возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД, $\alpha = \overline{1, n(h)}$, $|\mathrm{J}_\alpha(h)|$ — число элементов в множестве $\mathrm{J}_\alpha(h)$. При этом матрица $\pi(h)$ финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, в соответствии с выражением (1) § 2.1, представляется в следующем виде:

$$\pi(h) = \begin{bmatrix} 0 & & \pi_0(h) & & \\ 0 & \pi_{1,1}(h) & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \pi_{k,k}(h) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\pi_0(h)$ — стохастическая матрица размерности $|\mathrm{J}_0(h)| \times (n - |\mathrm{J}_0(h)|)$, $\pi_{\alpha,\alpha}(h)$ — стохастическая матрица размерности $|\mathrm{J}_\alpha(h)| \times |\mathrm{J}_\alpha(h)|$, $\alpha = \overline{1, n(h)}$. Матрица $\pi_{\alpha,\alpha}(h)$ имеет одинаковые строки и имеет вид

$$\pi_{\alpha,\alpha}(h) = \begin{bmatrix} \pi_1^{(\alpha)}, & \ldots & \pi_m^{(\alpha)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \pi_1^{(\alpha)}, & \ldots & \pi_m^{(\alpha)} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $m = |\mathrm{J}_\alpha|$.

Для любого α, где $\alpha = \overline{1, n(h)}$, вектор $\pi^{(\alpha)}(h) = [\pi_1^{(\alpha)}, \ldots, \pi_m^{(\alpha)}]$, а следовательно и матрица $\pi_{\alpha,\alpha}(h)$, определяется как единственное решение системы линейных уравнений

$$\pi^{(\alpha)}(h) \cdot \mathrm{P}_{\alpha,\alpha}(h) = \pi^{(\alpha)}(h), \tag{4}$$

в которой любое одно уравнение заменено на уравнение

$$\pi_1^{(\alpha)} + \ldots + \pi_m^{(\alpha)} = 1 \tag{5}$$

При известных матрицах $\pi_{\alpha,\alpha}(h)$, $\alpha = \overline{1, n(h)}$, элементы матрицы $\pi_0(h)$ определяются как единственное решение системы линейных уравнений

$$\mathrm{P}(h) \cdot \pi(h) = \pi(h). \tag{6}$$

Вышеизложенное влечет справедливость следующих лемм.

Лемма 1.

Для любых $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}_{\mathrm{L}}^n$, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, элементы матрицы $\pi(h)$ финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ являются единственным решением систем линейных уравнений, определяемых в соответствии с выражениями (4), (5) и (6).

Лемма 2.

Пусть имеется элемент h, для которого множество J состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ является одним классом возвратных сообщающихся состояний, т.е. выполняются равенства: $\mathrm{J}_1(h) = \mathrm{J}$, $n(h) = 1$, где $h \in \mathrm{H}^n$.

Тогда вектор $r_1(h) = \pi(h) \cdot \rho(h)$ имеет равные компоненты, т.е. $\mathrm{r}_{1,i}(h) = \mathrm{r}_{1,j}(h)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Матрица $\mathrm{B}_1(h)$ для любого $h \in \mathrm{H}^n$ может быть получена любым численном методом [21] обращения матрицы $(\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h))$.

2.3.2. Косвенный метод

Каждой однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, поставим в соответствие следующую систему линейных уравнений:

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot y_1 = 0, \tag{1}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot y_2 + y_1 = \rho(h), \tag{2}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot y_{i+1} + y_i = 0, \quad i = \overline{2,k}, \tag{3}$$

где $k \in \{3, 4, \ldots\}$, $y_i \in \mathcal{E}^n$, $i = \overline{1, k+1}$, $\mathcal{E}^n$ — множество всевозможных векторов-столбцов.

Теорема 1.

Из системы линейных уравнений (1)–(3) неизвестные векторы $y_1, \ldots$ $\ldots, y_k$ определяются единственным образом и имеют вид

$$y_1 = \mathrm{r}_1(h) = \pi(h) \cdot \rho(h), \tag{4}$$

$$y_i = w_{i-1}(h) = (-1)^i [\mathrm{B}_1^{i-1}(h) \cdot \rho(h) - \mathrm{r}_1(h)], \quad i = \overline{2,k}, \tag{5}$$

где $\mathrm{r}_1(h)$, $w_i(h)$ — стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, $i = \overline{1, k-1}$.

Доказательство.

1. Используя равенства (3), (5), (8) параграфа 2.1, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что вектор y_i, где $i = \overline{1,k}$, определяемые выражениями (4), (5), и вектор $y_{k+1} = w_k(h)$ удовлетворяют системе линейных уравнений (1)–(3).

2. Умножим почленно каждое уравнение (2), (3) слева на матрицу $\pi(h)$ и, используя равенства (10), (3) параграфа 2.1, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\pi(h) \cdot \rho(h) = \pi(h) \cdot y_1, \tag{6}$$

$$\pi(h) \cdot y_i = 0, \quad i = 2, \ldots, k. \tag{7}$$

Из метода получения системы линейных уравнений (6), (7) следует, что каждое решение системы уравнений (1)–(3) является решением системы линейных уравнений (6), (7). Следовательно, система линейных уравнений, определяемая выражениями (1)–(3), (6), (7), равносильна системе (1)–(3). Из системы уравнений (1)–(3), (6), (7) получим следующую систему уравнений:

$$\mathrm{B}(h) \cdot y_1 = \pi(h) \cdot \rho(h), \tag{8}$$

$$\mathrm{B}(h) \cdot y_2 + y_1 = \rho(h), \tag{9}$$

$$\mathrm{B}(h) \cdot y_i + y_{i-1} = 0, \quad i = \overline{3,k}, \tag{10}$$

где $\mathrm{B}(h) = [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h)]$.

Каждое решение системы уравнений (1)–(3) является решением системы уравнений (8), (9). Так как лемма 1 § 2.1 утверждает, что матрица $\mathrm{B}(h)$ имеет обратную, то система уравнений (8)–(10) имеет единственное решение, определяемое выражениями (4), (5) для $i = \overline{1,k}$. Из пунктов 1, 2 приведенного доказательства следует доказательство теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие 1.

Пусть дана однородная КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, тогда справедлива следующая система равенств:

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathrm{r}_1(h) = 0, \tag{11}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot w_1(h) + \mathrm{r}_1(h) = \rho(h), \tag{12}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot w_i(h) + w_{i-1}(h) = 0, \quad i = \overline{2,k}, \tag{13}$$

где $k \in \{3, 4, \ldots\}$, $\mathrm{r}_1(h)$, $w_i(h)$ — стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, $i = \overline{1,k}$.

Справедливость следствия 1 непосредственно следует из теоремы 1 и выражения (1)–(3).

Теорема 2.

Пусть дана однородная КМЦД $\xi_0(a,h)$. *Тогда система линейных уравнений, определяемая выражениями* (1)–(3) *и выражением*

$$y_{k+1,i_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1,n(h)}, \tag{14}$$

где y_{k+1,i_α} — i_α*-я компонента вектора* y_{k+1}, $i_\alpha = \min\{i\colon i \in \mathrm{J}_\alpha(h)\}$, $\mathrm{J}_\alpha(h)$ — α*-й класс возвратных сообщающихся состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, $n(h)$ — *число классов возвратных сообщающихся состояний КМЦД* $\xi_0(a,h)$, *имеет единственное решение. При этом неизвестные векторы* y_i, *где* $i = \overline{1,k}$, *определяются выражениями* (4), (5).

Доказательство.

Из теоремы 1 следует, что система линейных уравнений (1)–(3) единственным образом определяет векторы y_i, где $i = \overline{1,k}$. Тогда систему уравнений (1)–(3) перепишем в следующем виде:

$$y_1 = \mathrm{r}_1(h), \tag{15}$$

$$y_i = w_{i-1}(h), \quad i = \overline{2,k}, \tag{16}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot y_{k+1} + w_{k-1}(h) = 0, \tag{17}$$

где $k \in \{3, 4, \ldots\}$.

Из работ [5, 8] известно, что система уравнений

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot y_{k+1} = b, \tag{18}$$

$$y_{k+1,i_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{19}$$

где $b \in \mathcal{E}^n$ и $\pi(h) \cdot b = 0$, $k \in \mathcal{N}$, имеет единственное решение. Учитывая равенство $\pi(h) \cdot w_{k-1}(h) = 0$, $k = 2, 3, \ldots$, являющееся следствием выражений (3) § 2.1 и (17) настоящего пункта, получим, что система линейных уравнений, определяемая выражениями (17), (14), имеет единственное решение. Теорема доказана.

Теорема 3.

Для определения стационарных характеристик $\mathrm{r}_1(h), w_i(h), i = \overline{1, k-1}$ *однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, *где* $k = \overline{2,\infty}$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *достаточно решить систему линейных уравнений, определяемую выражениями* (11)–(13) *и системой равенств* $w_{k,i_\alpha}(h) = 0$, $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

Справедливость теоремы 3 непосредственно следует из теорем 1 и 2.

Теорема 3 является сутью «косвенного» метода определения стационарных характеристик однородной КМЦД. При этом для решения системы линейных уравнений могут быть использованы стандартные алгоритмы, изложенные например, в работе [21], если в системе уравнений (13) при $i = k$ удалить уравнения с номерами i_α, $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

2.4. Свойства стационарных характеристик однородной КМЦД

Введем следующие отображения.

1. $\pi_{\mathrm{L}} : \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}} \to \mathcal{P}_{n,n}$ — отображение, которое имеет вид: $\pi_{\mathrm{L}}(h) = \pi(h)$, где $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$ — подмножество множества H^n, определенное в выражении (5) § 2.2, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, $\pi(h)$ — матрица финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$.

2. $\varphi_{L,1}: H_L^n \to \mathcal{E}^n$ — отображение, которое имеет вид: $\varphi_{\mathrm{L},1}(h) = \mathrm{r}_1(h)$, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, $h \in \mathrm{H}^n$, $\mathrm{r}_1(h)$ — стационарная характеристика однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$.

3. $\varphi_{L,k}: \mathrm{H}_\mathrm{L}^n \to \mathcal{E}^n$ — отображение, которое имеет вид: $\varphi_{\mathrm{L},k}(h) = w_{k-1}(h)$, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, $h \in \mathrm{H}^n$, $k \in \{2,3,\ldots\}$, $w_{k-1}(h)$ — стационарная характеристика однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$.

Свойства стационарных характеристик однородной КМЦД формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1.

Отображение π_L, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, является непрерывным (например, по евклидовой метрике) отображением на множестве H_L^n.

Доказательство.

Из леммы 1 п. 2.3.1 следует, что элементы матрицы $\pi(h)$ являются единственным решением системы линейных уравнений, вид которой определяется лишь элементом L, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$. При этом коэффициенты системы линейных уравнений являются элементами матрицы $\mathrm{P}(h)$. При фиксированном L из формул Крамера [21] следует, что элементы матрицы $\pi(h)$ являются непрерывными функциями от элементов матрицы $\mathrm{P}(h)$.

Учитывая, что $\mathrm{P}(h) = (h_{i,j})$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $h_{i,j}$ — соответствующая компонента элемента h, из вышеизложенного следует справедливость теоремы 1. Теорема доказана.

Теорема 2.

Отображение $\varphi_{\mathrm{L},k}$, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, $k \in \mathcal{N}$, является непрерывным отображением на множестве H_L^n.

Справедливость теоремы 2 следует из теоремы 1 и определения стационарных характеристик $\mathrm{r}_1(h)$, $w_k(h)$, $k = \overline{1,\infty}$.

ГЛАВА 3

ЧАСТИЧНЫЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ В МНОЖЕСТВЕ H^n

В этой главе вводится ℓ-частичная упорядоченность в множестве H^n, основанная на сравнении стационарных характеристик $\mathfrak{r}_1(h)$, $w_k(h)$, $k = \overline{1,\infty}$ однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $\ell = \overline{1,\infty}$, H^n — прямое произведение n экземпляров множества H, $\mathrm{H} = \{(x_1,\ldots,x_{n+2})\colon x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n};\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1;\ x_{n+1} \in [-\beta_0,\beta_0],\ x_{n+2} \in [\alpha_0,\beta_0]\}$, $0 < \alpha_0 \leqslant \beta_0$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$.

Устанавливаются основные свойства ℓ-частичной упорядоченности.

3.1. Определение ℓ-частичной упорядоченности

Введем следующие подмножества множества $\mathrm{H}^n\times\mathrm{H}^n$:

$$1.\ \mathrm{M}_{1,1} = \{(h,t) \in \mathrm{H}^n\times\mathrm{H}^n : \mathfrak{r}_1(h) < \mathfrak{r}_1(t)\}; \tag{1}$$

$$2.\ \mathrm{M}_{1,2} = \{(h,t) \in \mathrm{H}^n\times\mathrm{H}^n : \mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t), \quad w_1(h) < w_1(t)\}; \tag{2}$$

$$3.\ \mathrm{M}_{1,k+2} = \{(h,t) \in \mathrm{H}^n\times\mathrm{H}^n : \mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t); \quad w_\nu(h) = w_\nu(t),\\ \nu = \overline{1,k}; \quad w_{k+1}(h) < w_{k+1}(t)\}; \tag{3}$$

$$4.\ \mathrm{N}_1 = \{(h,t) \in \mathrm{H}^n\times\mathrm{H}^n : \mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t)\}; \tag{4}$$

$$5.\ \mathrm{N}_{k+1} = \{(h,t) \in \mathrm{H}^n\times\mathrm{H}^n : \mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t);\\ w_\nu(h) = w_\nu(t), \quad \nu = \overline{1,k}\}, \tag{5}$$

где $k \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{r}_1(h)$, $w_k(h)$ — стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$. Из определения введенных множеств следуют соотношения

$$\mathrm{M}_{1,k} \cap \mathrm{M}_{1,k+m} = \varnothing, \quad \mathrm{N}_{k+m} \subset \mathrm{N}_k, \tag{6}$$

где $k \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{N}$.

Определим следующие множества, на основе которых вводятся частичные упорядоченности множества H^n:

$$\mathrm{U}_\ell = \mathrm{M}_\ell + \mathrm{N}_\ell, \quad \ell = \overline{1,\infty}, \tag{7}$$

$$\mathrm{M}_\ell = \mathrm{M}_{1,1} + \mathrm{M}_{1,2} + \ldots + \mathrm{M}_{1,\ell}. \tag{8}$$

Множество U_ℓ, где $\ell \in \mathcal{N}$, задает в множестве H^n частичную упорядоченность.

Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующих свойств пар элементов (h,t) из U_ℓ.

1. Свойство рефлективности: для любого элемента h из множества H^n справедливо выражение $(h,h) \in \mathrm{U}_\ell$.

2. Свойство транзитивности: если для элементов h, t, ζ, где $h \in \mathrm{H}^n$, $t \in \mathrm{H}^n$, $\zeta \in \mathrm{H}^n$, справедливы выражения $(h,t) \in \mathrm{U}_\ell$ и $(t,\zeta) \in \mathrm{U}_\ell$, то справедливо выражение $(h,\zeta) \in \mathrm{U}_\ell$.

3. Свойство антисимметричности: если для элементов h и t из множества H^n справедливы выражения $(h,t) \in \mathrm{U}_\ell$, $(t,h) \in \mathrm{U}_\ell$, то $(h,t) \in \mathrm{N}_\ell$.

Из свойств 1–3 непосредственно следует [22], что множество U_ℓ задает в H^n частичную упорядоченность. Эту упорядоченность назовем ℓ-частичной упорядоченностью и обозначим символом $\overset{\ell}{\preccurlyeq}$. При этом будем использовать следующие обозначения: отношение $h \overset{\ell}{\preccurlyeq} t$ обозначает, что справедливо выражение $(h,t) \in \mathrm{U}_\ell$; отношение $h \overset{\ell}{\asymp} t$ обозначает, что $(h,t) \in \mathrm{N}_\ell$; отношение $h \overset{\ell}{\prec} t$ обозначает, что $(h,t) \in \mathrm{M}_\ell$, где $\ell \in \mathcal{N}$.

3.2. Свойства частичных упорядоченностей

В этом параграфе приводятся утверждения, устанавливающие основные свойства частичных упорядоченностей, введенных в § 3.1.

Лемма 1.

Для всех $\ell \in \mathcal{N}$ справедливы следующие утверждения.

1. *Из отношения $h \overset{\ell}{\preccurlyeq} t$ следует, что выполняется система неравенств: $\mathrm{r}_{1,i}(h) \leqslant \mathrm{r}_{1,i}(t)$, $i = \overline{1,n}$, где $\mathrm{r}_{1,i}(h)$ — i-я компонента вектора $\mathrm{r}_1(h)$, $h \in \mathrm{H}^n$, $t \in \mathrm{H}^n$.*

2. *Из отношения $h \overset{\ell}{\asymp} t$ следует, что выполняется система равенств:*

$$\mathrm{r}_{1,i}(h) = \mathrm{r}_{1,i}(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из выражения $(h,t) \in \mathrm{U}_\ell$ и определения множества U_ℓ.

Лемма 2.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Из отношения $h \overset{\ell}{\preccurlyeq} t$ следует справедливость выражения: $h \overset{m}{\preccurlyeq} t \; \forall m \in \{1, \ldots, \ell\}$, где $\ell \in \mathcal{N}$.*

2. *Из отношения $h \overset{\ell}{\asymp} t$ следует справедливость выражения: $h \overset{m}{\asymp} t \; \forall m \in \{1, \ldots, \ell\}$*

3. *Из отношения $h \overset{\ell}{\prec} t$ следует справедливость выражения: $h \overset{m}{\prec} t \; \forall m \in \{\ell, \ell+1, \ldots\}$*

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из включений $\mathrm{U}_\ell \subset \mathrm{U}_m$, $\mathrm{N}_\ell \subset \mathrm{N}_m$, $\mathrm{M}_\ell \subset \mathrm{M}_\nu$, выполняемых для любых $m \in \{1, \ldots, \ell\}$, $\nu \in \{\ell, \ell+1, \ldots\}$.

Лемма 3.

Если для некоторых элементов h и t, где $h \in \mathrm{H}^n$, $t \in \mathrm{H}^n$, выполняются равенства

$$w_k(h) = w_k(t), \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

где $w_k(\cdot)$ *— стационарная характеристика однородной* КМЦД $\xi_0(a,\cdot)$, $k \in \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, *то выполняются соотношения*:

$$w_{n+1+\ell}(h) = w_{n+1+\ell}(t), \quad \ell = \overline{1,\infty}. \tag{2}$$

Доказательство.

Из леммы 3 § 2.1 следует, что выполняются равенства

$$w_{k+1}(h) = (-1)^k \cdot \mathrm{B}_1^k(h) \cdot w_1(h); \quad w_{k+1}(t) = (-1)^k \cdot \mathrm{B}_1^k(t) \cdot w_1(t), \tag{3}$$

где $k \in \mathcal{N}$.

Из равенств (1), (3) и свойств инвариантности (см., например, [21], стр. 78) двух циклических пространств, порожденных, соответственно, векторами $w_1(h)$, $w_1(t)$ и матрицами $-\mathrm{B}_1(h)$, $-\mathrm{B}_1(t)$, непосредственно следуют равенства (2), т.е. лемма 3 доказана.

Теорема 1.

В множестве H^n *существуют не более* $(n+2)$ *различных частичных упорядоченностей. При этом различными могут являться частичные упорядоченности, для которых* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

Из леммы 3 и определений множеств $\mathrm{M}_{1,\ell}$, N_ℓ, $\ell = \overline{1,\infty}$, следует, что выполняются соотношения

$$\mathrm{M}_{1,n+2+m} = \varnothing, \quad m = \overline{1,\infty}, \tag{4}$$

$$\mathrm{N}_{n+2+m} = \mathrm{N}_{n+2}, \quad m = \overline{1,\infty}. \tag{5}$$

Указанные соотношения влекут выполнение равенств $\mathrm{U}_{n+2+m} = \mathrm{U}_{n+2}$, $m = \overline{1,\infty}$, из которых непосредственно следует справедливость теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Таким образом, из теоремы 1 следует, что при изучении свойств ℓ-частичных упорядоченностей достаточно ограничиться значениями ℓ из множества $\{1,\ldots,n+2\}$.

Ниже приводятся утверждения, выявляющие основные свойства ℓ-частичной упорядоченности, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Для любого элемента t из множества H^n и любого элемента $h_i = [h_{i,1},\ldots,h_{i,n+2}]$ из множества H, где $i \in \mathrm{J}$, определим следующие величины и множества:

$$1.\ x_{1,i}(h_i,t) = p_i(h_i)\cdot \mathfrak{r}_1(t) - \mathfrak{r}_{1,i}(t), \tag{6}$$

где $p_i(h_i) = [h_{i,1},\ldots,h_{i,n}]$, $\mathfrak{r}_1(t) = [\mathfrak{r}_{1,1}(t),\ldots,\mathfrak{r}_{1,n}(t)]^{\mathrm{T}}$ — стационарная характеристика ОКМЦД $\xi_0(a,t)$, $\mathfrak{r}_{1,i}(t)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(t)$;

$$2.\ x_{2,i}(h_i,t) = \rho_i(h_i) + p_i(h_i)\cdot w_1(t) - w_{1,i}(t) - \mathfrak{r}_{1,i}(t), \tag{7}$$

где $w_1(t)$ — стационарная характеристика однородной КМЦД $\xi_0(a,t)$, $w_1(t) = [w_{1,1}(t),\ldots,w_{1,n}(t)]^{\mathrm{T}}$, $w_{1,i}(t)$ — i-я компонента вектора $w_1(t)$,

$\rho_i(h_i) = h_{i,n+1} - c \cdot h_{i,n+2}$, т.е. $\rho_i(h_i)$ — i-я компонента вектора приведенного дохода $\rho(h)$, $c \in \mathrm{R}^1$;

$$3.\ x_{k+2,i}(h_i, t) = p_i(h_i) \cdot w_{k+1}(t) - w_{k+1,i}(t) - w_{k,i}(t), \tag{8}$$

где $k \in \mathcal{N}$, $w_k(t)$ — стационарная характеристика однородной КМЦД $\xi_0(a, t)$, $w_{k,i}(t)$ — i-я компонента вектора $w_k(t)$;

$$4.\ \mathrm{H}^-_{1,i}(t) = \{h_i \in \mathrm{H} \colon x_{1,i}(h_i, t) < 0\}; \tag{9}$$

$$5.\ \mathrm{H}^-_{k,i}(t) = \{h_i \in \mathrm{H} \colon x_{j,i}(h_i, t) = 0, \quad j = \overline{1, k-1},$$
$$x_{k,i}(h_i, t) < 0\}, \quad k = \overline{2, n+3}; \tag{10}$$

$$6.\ \mathrm{H}^-_i(\nu, t) = \mathrm{H}^-_{1,i}(t) + \ldots + \mathrm{H}^-_{\nu,i}(t),\ \text{где } \nu = \overline{1, n+3}; \tag{11}$$

$$7.\ \mathrm{H}^0_i(\nu, t) = \{h_i \in \mathrm{H} \colon x_{j,i}(h_i, t) = 0,\ j = \overline{1, n}\},$$
$$\text{где } \nu = \overline{1, n+3}; \tag{12}$$

$$8.\ \mathrm{H}^+_{1,i}(t) = \{h_i \in \mathrm{H} \colon x_{1,i}(h_i, t) > 0\}; \tag{13}$$

$$9.\ \mathrm{H}^+_{k,i}(t) = \{h_i \in \mathrm{H} \colon x_{j,i}(h_i, t) = 0,\ j = \overline{1, k-1},$$
$$x_{k,i}(h_i, t) > 0\}, \quad k = \overline{1, n+3}; \tag{14}$$

$$10.\ \mathrm{H}^+_i(\nu, t) = \mathrm{H}^+_{1,i}(t) + \ldots + \mathrm{H}^+_{\nu,i}(t),\ \text{где } \nu = \overline{1, n+3}. \tag{15}$$

Л е м м а 4.

Для любого $t \in \mathrm{H}^n$ выполняется система равенств:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}^-_i(\nu, t) + \mathrm{H}^0_i(\nu, t) + \mathrm{H}^+_i(\nu, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, n+3}.$$

Справедливость леммы 4 непосредственно следует из определения множеств $\mathrm{H}^-_i(\nu, t)$, $\mathrm{H}^0_i(\nu, t)$, $\mathrm{H}^+_i(\nu, t)$.

Л е м м а 5.

Для любого $t \in \mathrm{H}^n$ справедливо выражение: $t_i \in \mathrm{H}^0_i(\nu, t)$, $i = \overline{1, n}$, *где* t_i — *i-я компонента элемента t*, $\nu = \overline{1, n+3}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из следствия 1 п. 2.3.2 следует, что справедливы равенства: $x_{k,i}(t_i, t) = 0$, $k = \overline{1, n+3}$. Тогда из выражения (12) следует, что элемент t_i принадлежит множеству $\mathrm{H}^0_i(\nu, t)$, $i = \overline{1, n}$. Лемма доказана.

Ниже приводятся теоремы 2–6, на основании которых можно построить последовательность ℓ-частично упорядоченных элементов, где $\ell = \overline{1, n+2}$. Доказательство теорем 2, 4, 5, ввиду большого объема выкладок, вынесено в конец этого параграфа.

Т е о р е м а 2.

Пусть для некоторого элемента t из множества H^n существует такое непустое множество J_1, где $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, что для любого элемента $i \in \mathrm{J}_1$ справедливо неравенство $\mathrm{H}^-_i(\ell, t) \neq \varnothing$, где $\ell \in \{1, \ldots, n+3\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Для любого элемента $h = [h_1, \ldots, h_n]$, *i-я компонента которого* h_i *удовлетворяет условиям: а)* $h_i \in \mathrm{H}_i^-(\ell, t)$, *если* $i \in \mathrm{J}_1$; *б)* $h_i = t_i$, *если* $i \in$ $\in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$, *справедливо выражение* $h \overset{\ell}{\prec} t$, *где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Для любого элемента $h = [h_1, \ldots, h_n]$, *i-я компонента которого* h_i *удовлетворяет условиям: а)* $h_i \in \mathrm{H}_i^-(n+3, t)$, *если* $i \in \mathrm{J}_1$; *б)* $h_i \in \mathrm{H}_i^0(n{+}3, t)$, *если* $i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$, *справедливо выражение* $h \overset{n+2}{\prec} t$.

Теорема 3.

Пусть t — *некоторый элемент из множества* H^n, *тогда для любого элемента* h *из множества* H^n, *обладающего свойством:* $h_i \in [\mathrm{H}_i^-(\ell{+}1, t) +$ $+ \mathrm{H}_i^0(\ell+1, t)]$, $i = \overline{1, n}$, — *справедливо выражение:* $h \overset{\ell}{\preccurlyeq} t$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме доказательства теоремы 2 и поэтому в данной работе не приводится.

Теорема 4.

Пусть t — *некоторый элемент из множества* H^n, *тогда для любого элемента* h *из множества* H^n, *обладающего свойством:* $h_i \in \mathrm{H}_i^0(\ell+1, t)$, $i = \overline{1, n}$ — *справедливо выражение:* $h \overset{\ell}{\asymp} t$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Теорема 5.

Пусть для некоторого элемента t *из множества* H^n *существует такое непустое множество* J_1, *где* $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, *что для любого элемента* $i \in \mathrm{J}_1$ *справедливо неравенство* $\mathrm{H}_i^+(\ell, t) \neq \varnothing$, *где* $\ell \in \{1, \ldots, n+3\}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого элемента* $h = [h_1, \ldots, h_n]$, *i-я компонента которого* h_i *удовлетворяет условиям: а)* $h_i \in \mathrm{H}_i^+(\ell, t)$, *если* $i \in \mathrm{J}_1$; *б)* $h_i = t_i$, *если* $i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$, *справедливо выражение* $h \overset{\ell}{\succ} t$, *где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Для любого элемента $h = [h_1, \ldots, h_n]$, *i-я компонента которого* h_i *удовлетворяет условиям: а)* $h_i \in \mathrm{H}_i^+(n+3, t)$, *если* $i \in \mathrm{J}_1$; *б)* $h_i \in \mathrm{H}_i^0(n{+}3, t)$, *если* $i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$, *справедливо выражение* $h \overset{n+2}{\succ} t$.

Теорема 6.

Пусть t — *некоторый элемент из множества* H^n, *тогда для любого элемента* h *из множества* H^n, *обладающего свойством:* $h_i \in [\mathrm{H}_i^0(\ell{+}1, t) +$ $+ \mathrm{H}_i^+(\ell+1, t)]$, $i = \overline{1, n}$, — *справедливо выражение:* $h \overset{\ell}{\succcurlyeq} t$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство теоремы 6 проводится по схеме доказательства теоремы 5 и поэтому в данной работе не приводится.

Лемма 6.

Для любого элемента t *из множества* H^n *и любого элемента* $\mathcal{D}_i$, *где* $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i \in \mathrm{J}$, *справедливо выражение*

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^+(\nu, t) + \mathcal{D}_i^0(\nu, t) + \mathcal{D}_i^-(\nu, t),$$

где $\mathcal{D}_i^-(\nu, t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(\nu, t)$, $\mathcal{D}_i^0(\nu, t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^0(\nu, t)$, $\mathcal{D}_i^+(\nu, t) = \mathcal{D}_i \cap$ $\cap\, \mathrm{H}_i^+(\nu, t)$, $\nu = \overline{1, n+3}$.

Справедливость леммы 6 непосредственно следует из леммы 4.

Л е м м а 7.

Для любого элемента t из множества $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, справедливы выражения: $t_i \in \mathcal{D}_i^0(\nu, t)$, $i = \overline{1,n}$, где t_i — i-я компонента элемента t, $\mathcal{D}_i^0(\nu, t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^0(\nu, t)$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{1, n+3}$.

Справедливость леммы 7 непосредственно следует из леммы 5.

3.3. Доказательство основных теорем

В этом параграфе приводится доказательство теорем 2, 4 и 5 § 3.2.

3.3.1. Предварительные результаты

Используя результаты § 2.2 представим множество J состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, где $h \in \mathrm{H}^n$, в следующем виде: $\mathrm{J} = \mathrm{J}_0(h) + \ldots \ldots + \mathrm{J}_{n(h)}(h)$, где $n(h)$ — число классов возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, $\mathrm{J}_\alpha(h)$ — множество состояний, образующих α-й класс возвратных сообщающихся состояний, $\alpha = \overline{1, n(h)}$, $\mathrm{J}_0(h)$ — множество состояний, образующих класс невозвратных состояний.

Для элемента $h \in \mathrm{H}^n$ и каждого элемента α, где $\alpha \in \{0, \ldots, n(h)\}$, введем матрицу $\mathrm{E}_\alpha(h)$ размерности $n \times n$ с элементами $e_{i,j}^\alpha(h)$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, которые определяются следующим образом: $e_{i,i}^\alpha(h) = 1$, если $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$; $e_{i,j}^\alpha = 0$ — во всех остальных случаях.

Непосредственно из определения матрицы $\mathrm{E}_\alpha(h)$, где $h \in \mathrm{H}^n$, $\alpha \in \in \{1, \ldots, n(h)\}$, следует справедливость следующей леммы.

Л е м м а 1.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ справедливы следующие равенства:

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{E}_\beta(h) = \mathrm{O}_{n,n},\ \text{где } \alpha = \overline{0, n(h)}, \quad \beta = \overline{0, n(h)}, \quad \alpha \neq \beta;$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{E}_\alpha(h) = \mathrm{E}_\alpha(h), \quad \alpha = \overline{0, n(h)};$$

$$\mathrm{E}_0(h) + \mathrm{E}_1(h) + \ldots + \mathrm{E}_{n(h)}(h) = \mathrm{E},$$

$\mathrm{O}_{n,n}$ — *матрица размерности $n \times n$, все элементы которой равны нулю.*

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{P}_{\alpha,\beta}(h) = \mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{E}_\beta(h), \tag{1}$$

$$\pi_{\alpha,\beta}(h) = \mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \pi(h) \cdot \mathrm{E}_\beta(h), \tag{2}$$

где $\alpha \in \{0, \ldots, n(h)\}$, $\beta \in \{0, \ldots, n(h)\}$.

Л е м м а 2.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ справедливы следующие равенства:

$$P_{\alpha,\beta}(h) = \mathrm{O}_{n,n}, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \quad \beta = \overline{1, n(h)}, \quad \alpha \neq \beta; \tag{3}$$

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot \mathrm{P}(h) = \mathrm{P}_{0,0}(h) + \ldots + \mathrm{P}_{0,n(h)}(h); \tag{4}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{P}(h) = \mathrm{P}_{\alpha,\alpha}(h), \quad \alpha = \overline{1, n(h)}; \tag{5}$$

$$\mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{E}_0(h) = \mathrm{P}_{0,0}(h); \tag{6}$$

$$P(h) \cdot \mathrm{E}_\alpha(h) = \mathrm{P}_{0,\alpha}(h) + \mathrm{P}_{\alpha,\alpha}(h), \quad \alpha = \overline{1, n(h)}; \tag{7}$$

$$\mathrm{P}(h) = \mathrm{P}_{0,0}(h) + \mathrm{P}_{0,1}(h) + \ldots + \mathrm{P}_{0,n}(h) + \mathrm{P}_{1,1}(h) + \ldots + \mathrm{P}_{n(h),n(h)}(h). \tag{8}$$

Доказательство.

1. Из § 3.2 следует, что для любого элемента i и любого элемента j, где $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $j \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in \{1, \ldots, n(h)\}$, $\beta \in \{1, \ldots, n(h)\}$, выполняется равенство $p_{i,j}(h) = 0$, где $p_{i,j}(h)$ — соответствующий элемент матрицы $\mathrm{P}(h)$. Из этого равенства следуют равенства (3).

2. Из леммы 1 следуют равенства

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{P}(h) = \mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{P}(h) \cdot [\mathrm{E}_0(h) + \ldots + \mathrm{E}_{n(h)}(h)], \tag{9}$$

где $\alpha = \overline{0, n(h)}$. Из равенства (9), используя равенства (3), получим равенства (4), (5).

3. Из леммы 1 следуют равенства

$$\mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{E}_\beta(h) = [\mathrm{E}_0(h) + \ldots + \mathrm{E}_{n(h)}(h)] \cdot \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{E}_\beta(h), \tag{10}$$

где $\beta = \overline{0, n(h)}$. Из равенства (10), используя равенства (3), получим равенства (6), (7).

4. Из леммы 1 следует равенство

$$\mathrm{P}(h) = [\mathrm{E}_0(h) + \ldots + \mathrm{E}_{n(h)}(h)] \cdot \mathrm{P}(h) \cdot [\mathrm{E}_0(h) + \ldots + \mathrm{E}_{n(h)}(h)], \tag{11}$$

из которого, учитывая равенства (3), получим равенство (8). Лемма доказана.

Лемма 3.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ *справедливы следующие равенства*:

$$\pi_{0,0}(h) = \mathrm{O}_{n,n}; \tag{12}$$

$$\pi_{\alpha,\beta}(h) = \mathrm{O}_{n,n}, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \quad \beta = \overline{0, n(h)}, \quad \alpha \neq \beta; \tag{13}$$

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot \pi(h) = \pi_{0,1}(h) + \ldots + \pi_{0,n(h)}(h); \tag{14}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \pi(h) = \pi_{\alpha,\alpha}(h), \quad \alpha = \overline{1, n(h)}; \tag{15}$$

$$\pi(h) \cdot \mathrm{E}_0(h) = \mathrm{O}_{n,n}; \tag{16}$$

$$\pi(h) \cdot \mathrm{E}_\alpha(h) = \pi_{0,\alpha}(h) + \pi_{\alpha,\alpha}(h), \quad \alpha = \overline{1, n(h)}; \tag{17}$$

$$\pi(h) = \pi_{0,1}(h) + \ldots + \pi_{0,n(h)}(h) + \pi_{1,1}(h) + \ldots + \pi_{n(h),n(h)}(h). \tag{18}$$

Доказательство.

1. Из выражения (2) п. 2.3.1 следует, что для любых элементов i и j, где $i \in \mathrm{J}_0(h)$, $j \in \mathrm{J}_0(h)$, выполняется равенство $\pi_{i,j}(h) = 0$, где $\pi_{i,j}(h)$ — соответствующий элемент матрицы $\pi(h)$. Тогда, учитывая определение матриц $\mathrm{E}_\alpha(h)$, где $\alpha = \overline{0, n(h)}$, следует равенство (12).

2. Из выражения (2) п. 2.3.1 следует, что для любых элементов i, j, где $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $j \in \mathrm{J}_\beta(h)$, $\alpha \in \{1,\ldots,n(h)\}$, $\beta \in \{1,\ldots,n(h)\}$, $\alpha \neq \beta$ выполнятся равенство: $\pi_{i,j}(h) = 0$. Из этого равенства, учитывая определение матриц $\mathrm{E}_\alpha(h)$, где $\alpha \in \{0,\ldots,n(h)\}$, следуют равенства (13).

Справедливость равенств (14)–(18) доказывается по схеме, аналогичной схеме доказательства равенств (5)–(8), и поэтому в данной работе не приводится. Лемма доказана.

Л е м м а 4.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ справедливо равенство

$$\mathrm{E} + \sum_{k=1}^{\infty}[\mathrm{P}_{0,0}(h)]^k = [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1}, \tag{19}$$

где $[\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1}$ — матрица размерности $n \times n$, являющаяся обратной к матрице $\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)$.

Справедливость леммы 4 непосредственно следует из теоремы 2.2.1 работы [16].

Л е м м а 5.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ справедливы равенства

$$\mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{E}_0(h) = \mathrm{E}_0(h) \cdot [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1}, \tag{20}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{E}_0(h) = \mathrm{O}_{n,n}, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}. \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Равенство (9) § 2.1 запишем в виде

$$\mathrm{B}_1(h) = \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{P}(h) + \mathrm{E} - \pi(h) \tag{22}$$

Умножим левую и правую части равенства (22) справа на матрицу $\mathrm{E}_0(h)$ и, используя равенства (6), (16), получим равенство

$$\mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{E}_0(h) = \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{P}_{0,0}(h) + \mathrm{E}_0(h). \tag{23}$$

Используя равенство $\mathrm{E}_0(h) \cdot \mathrm{P}_{0,0}(h) = \mathrm{P}_{0,0}(h)$, запишем равенство (23) в следующем виде:

$$\mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{E}_0(h) \cdot [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)] = \mathrm{E}_0(h). \tag{24}$$

Из равенства (24), учитывая, что матрица $\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)$ имеет обратную, получим равенство (20).

Умножим почленно левую и правую части равенства (20) слева на каждую матрицу $\mathrm{E}_\alpha(h)$, где $\alpha = \overline{1. n(h)}$, и, учитывая равенства леммы 1, получим равенства (21). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1.

Из леммы 5 и выражений (1), (2) п. 2.3.1 следует, что матрица $\mathrm{B}_1(h) =$

$= [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h) + \pi(h)]^{-1}$ (с точностью до перестановки строк) имеет вид

$$\mathrm{B}_1(h) = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{0,0} & & \mathrm{A}_{0,1} & & \\ 0 & \mathrm{A}_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \mathrm{A}_{k,k} \end{bmatrix},$$

где $\mathrm{A}_{0,0} = [\mathrm{E}_0 - \mathrm{P}(h)]^{-1}$, $\mathrm{A}_{\alpha,\alpha} = [\mathrm{E}_\alpha - \mathrm{P}_{\alpha,\alpha}(h) + \pi_{\alpha,\alpha}(h)]^{-1}$, $\alpha = \overline{1,k}$, $k = n(h)$, E_α — единичная матрица размерности $|\mathrm{J}_\alpha(h)|\times|\mathrm{J}_\alpha(h)|$, $\pi_{\alpha,\alpha}(h)$ — матрица, определяемая выражением (3) п. 2.3.1, $\mathrm{A}_{0,1}$ — матрица размерности $|\mathrm{J}_\alpha(h)|\times|\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}_0(h)|$.

Л е м м а 6.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} = [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \cdot \mathrm{E}_0(h). \tag{25}$$

Справедливость леммы 6 проверяется непосредственно, с учетом того, что матрица $\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)$ имеет обратную.

Л е м м а 7.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n$ *справедливы следующие равенства*:

$$\pi_{0,\alpha}(h) = [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \cdot \mathrm{P}_{0,\alpha}(h) \cdot \pi_{\alpha,\alpha}(h), \tag{26}$$

где $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из выражения (3) § 2.1 следует, что справедливо равенство $\mathrm{P}(h) \times \times \pi(h) = \pi(h)$. Умножив левую и правую части этого равенства слева на матрицу $\mathrm{E}_0(\alpha)$, а справа — на матрицу $\mathrm{E}_\alpha(h)$, где $\alpha \in \{1, \ldots, n(h)\}$, получим равенства

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot \mathrm{P}(h) \cdot \pi(h) \cdot \mathrm{E}_\alpha(h) = \pi_{0,\alpha}(h), \quad \alpha = \overline{1, n(h)}. \tag{27}$$

Используя равенства (4), (17), равенства (27) запишем в следующем виде: $[\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)] \cdot \pi_{0,\alpha}(h) = \mathrm{P}_{0,\alpha}(h) \cdot \pi_{\alpha,\alpha}(h)$, $\alpha = \overline{1, n(h)}$. Учитывая, что матрица $[\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]$ имеет обратную, из последнего равенства получим равенство (26). Лемма доказана.

Л е м м а 8.

Если выполняется одно из неравенств

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathfrak{r} < 0, \quad [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathfrak{r} > 0, \tag{28}$$

где $\mathfrak{r}^{\mathrm{T}} = [\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n] \in \mathrm{R}^n$, $\mathrm{P}(h)$ — *матрица вероятностей переходов* ОКМЦД $\xi_0(a, h)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, *то для любых элементов* i, j, *где* $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $j \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $\alpha \in \{1, \ldots, n(h)\}$, *справедливо равенство*: $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j$, $\mathfrak{r}_i$ — i-*я компонента вектора* $\mathfrak{r}$.

Доказательство.

1. Пусть выполняется неравенство $\mathfrak{r} - \mathrm{P}(h) \cdot \mathfrak{r} < 0$. Умножим обе части этого неравенства на матрицу $\mathrm{E}_\alpha(h)$, где $\alpha \in \{1, \ldots, n(h)\}$, получим неравенство
$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathfrak{r} - \mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathrm{P}(h) \cdot \mathfrak{r} \leqslant 0.$$

Учитывая лемму 2 последнее неравенство перепишем в следующем виде:
$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot \mathfrak{r} - \mathrm{P}_{\alpha,\alpha}(h) \cdot \mathfrak{r} \leqslant 0. \tag{29}$$

Из неравенства (29) следует, что для любого элемента $k \in \mathrm{J}_\alpha(h)$ справедливо соотношение
$$\mathfrak{r}_k - \sum_{j \in \mathrm{J}_\alpha(h)} p_{k,j}(h) \cdot \mathfrak{r}_j \leqslant 0, \tag{30}$$

где $p_{k,j}(h)$ — соответствующий элемент матрицы $\mathrm{P}(h)$.

Далее доказательство леммы 8 проведем методом от противного. Предположим, что равенство $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j$, где $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $j \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, выполняется не для всех элементов $\mathrm{J}_\alpha(h)$.

Тогда множество $\mathrm{J}_\alpha^{(2)}(h) = \mathrm{J}_\alpha(h) \backslash \mathrm{J}_\alpha^{(1)}(h)$, где
$$\mathrm{J}_\alpha^{(1)}(h) = \{i \in \mathrm{J}_\alpha(h) \colon \mathfrak{r}_i = \max_{j \in \mathrm{J}_\alpha(h)} \mathfrak{r}_j\}, \tag{31}$$

является непустым множеством.

Так как состояния однородной конечной марковской цепи с приведенным доходом $\xi_0(a, h)$, принадлежащие множеству $\mathrm{J}_\alpha(h)$, являются возвратными сообщающимися состояниями, то состояния из множества $\mathrm{J}_\alpha^{(1)}(h)$ связаны с состояниями из множества $\mathrm{J}_\alpha^{(2)}(h)$ и наоборот.

Следовательно, существуют такие элементы $k \in \mathrm{J}_\alpha^{(1)}(h)$, $m \in \mathrm{J}_\alpha^{(2)}(h)$, для которых выполняется неравенство
$$p_{k,m}(h) > 0. \tag{32}$$

Учитывая соотношения
$$\mathfrak{r}_k > \mathfrak{r}_m; \qquad \sum_{j \in \mathrm{J}_\alpha(h)} p_{k,j}(h) = 1, \quad p_{k,j}(h) \geqslant 0, \quad j \in \mathrm{J}_\alpha(h),$$

и используя неравенство (32), получим неравенство
$$\mathfrak{r}_k - \sum_{j \in \mathrm{J}_\alpha(h)} p_{k,j}(h) \cdot \mathfrak{r}_j > 0, \tag{33}$$

которое противоречит неравенству (30). Полученное противоречие доказывает, что при выполнении неравенства $\mathfrak{r} - \mathrm{P}(h) \cdot \mathfrak{r} < 0$, выполняется система равенств: $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_j$, где $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $j \in \mathrm{J}_\alpha(h)$.

2. Аналогично доказывается справедливость леммы при выполнении неравенства $\mathrm{r} - \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{r} > 0$.

Лемма доказана.

Л е м м а 9.

Если для некоторого элемента h из множества H^n выполняется одно из неравенств $\mathrm{r} - \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{r} < 0$, $\mathrm{r} - \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{r} > 0$ (понимаемое как покомпонентное), где $\mathrm{r}^T = [\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n] \in \mathrm{R}^n$, то для любого элемента i, где $i \in \mathrm{J}_\alpha(h)$, $\alpha \in \{1, \ldots, n(h)\}$, справедливо равенство $\mathrm{r}_i - p_i(h) \cdot \mathrm{r} = 0$, где $p_i(h)$ — i-я строка матрицы $\mathrm{P}(h)$.

Справедливость леммы 9 непосредственно следует из леммы 8.

Л е м м а 10.

1. *Пусть для некоторого элемента h из множества H^n и некоторого вектора $\mathrm{r}^T \in \mathrm{R}^n$ справедливо выражение $-\mathrm{r} + \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{r} < 0$. Тогда справедливы соотношения*

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot x < 0, \tag{34}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{35}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \cdot x < 0, \tag{36}$$

$$\pi(h) \cdot x \leqslant 0, \tag{37}$$

где $x = -\mathrm{r} + \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{r}$.

2. *Пусть для некоторого элемента h из множества H^n и некоторого вектора $\mathrm{r}^T \in \mathrm{R}^n$ справедливо выражение $-\mathrm{r} + \mathrm{P}(h) \cdot \mathrm{r} > 0$. Тогда справедливы соотношения*

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot x > 0, \tag{38}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{39}$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \cdot x > 0, \quad \pi(h) \cdot x \geqslant 0. \tag{40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как доказательство пунктов 1 и 2 данной леммы проводится по аналогичным схемам, то приведем доказательство только пункта 1 леммы 10.

1. Справедливость неравенств (34), (35) непосредственно следует из леммы 9 и условия $x < 0$.

2. Учитывая, что справедливо неравенство (34) из леммы 4, получим, что справедливо неравенство (36).

3. Учитывая, что элементы стохастической матрицы $\pi(\mathrm{h})$ больше или равны 0, получим, что из неравенства $\mathrm{x} < 0$ следует неравенство (37).

Лемма 10 доказана.

Л е м м а 11.

1. *Пусть для некоторых элементов h и t из множества H^n существует такое непустое множество J_1, где $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, что для любого элемента i из этого множества выполняется неравенство*

$$x_{1,i}(h_i, t) < 0, \tag{41}$$

где $x_{k,i}(h_i, t)$ — *величина, определенная в § 3.2,* $k \in \mathcal{N}$, $i = \overline{1, n}$; h_i — *i-я компонента элемента h, а для любого элемента j из множества* $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1$ *выполняется система соотношений:*

$$x_{1,j}(h_j, t) = 0, \tag{42}$$

$$x_{2,j}(h_j, t) \leqslant 0. \tag{43}$$

Тогда выполняется система соотношений:

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot x_1(h, t) < 0, \tag{44}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_1(h, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{45}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_2(h, t) \leqslant 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{46}$$

где $x_k(h, t) = [x_{k,1}(h_1, t), \ldots, x_{k,n}(h_n, t)]^T$, $k = 1, 2$.

2. *Пусть для некоторых элементов h и t из множества* H^n *существует такое непустое множество* J_1, *где* $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, *что для любого элемента i из этого множества выполняется система соотношений:*

$$x_{k,i}(h_i, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{47}$$

$$x_{m+1,i}(h_i, t) < 0, \tag{48}$$

где $m \in \{1, \ldots, n + 2\}$, *а для любого элемента j из множества* $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1$ *выполняется система соотношений:*

$$x_{k,j}(h_j, t) = 0, \quad k = \overline{1, m + 1}, \tag{49}$$

$$x_{m+2,j}(h_j, t) \leqslant 0. \tag{50}$$

Тогда выполняется либо система соотношений:

$$x_k(h, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{51}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_{m+1}(h, t) < 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{52}$$

либо система соотношений:

$$x_k(h, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{53}$$

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot x_{m+1}(h, t) < 0, \tag{54}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_{m+1}(h, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{55}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_{m+2}(h, t) \leqslant 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}. \tag{56}$$

Доказательство.

1. Пусть выполняются условия пункта 1 данной леммы 11. Тогда выполняется неравенство $x_1(h, t) < 0$, где $x_1(h, t) = -[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathfrak{r}_1(t)$, $\mathfrak{r}_1(t)$ — стационарная характеристика ОКМЦД $\xi_0(a, t)$, $\mathfrak{r}_1^q(h) \in \mathrm{R}^n$, которое показывает, что выполняются условия пункта 1 леммы 10. Из пункта 1 леммы 10 следует, что выполняется система соотношений (44)–(46). Пункт 1 леммы 11 доказан.

2. Пусть выполняются условия пункта 2 данной леммы 11. Тогда непосредственно из условий пункта 2 данной леммы следует выполнение равенств (51), (53).

2.1. Предположим, что справедливо выражение

$$\mathrm{J}_1 \cap [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_0(h)] \neq \varnothing, \tag{57}$$

множество J_1 содержит элементы хотя бы из одного класса $\mathrm{J}_\alpha(h)$ возвратных сообщающихся состояний, где $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

Тогда из выражений (48), (49) следует, что выполняется неравенство (52).

2.2. Предположим, что справедливо выражение

$$\mathrm{J}_1 \cap [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_0(h)] = \varnothing, \tag{58}$$

т.е. множество J_1 не содержит ни одного элемента из классов $\mathrm{J}_\alpha(h)$, где $\alpha = \overline{1, n(h)}$.

Тогда из выражения (48) следует, что выполняется неравенство (54), а из выражения (49) следует, что выполняется система равенств (55). Из неравенства (50) следует, что выполняется система неравенств (56). Пункт 2 леммы 11 доказан. Лемма доказана.

Лемма 12.

1. *Пусть для некоторых элементов h и t из множества H^n существует такое непустое множество J_1, где $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, что для любого элемента i из этого множества выполняется неравенство*

$$x_{1,i}(h_i, t) > 0, \tag{59}$$

а для любого элемента j из множества $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1$ выполняется система соотношений:

$$x_{1,j}(h_j, t) = 0, \tag{60}$$

$$x_{2,j}(h_j, t) \geqslant 0. \tag{61}$$

Тогда выполняется система соотношений:

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot x_1(h, t) > 0, \tag{62}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_1(h, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{63}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_2(h, t) \geqslant 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}. \tag{64}$$

2. *Пусть для некоторых элементов h и t из множества H^n существует такое непустое множество J_1, где $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, что для любого элемента i из этого множества выполняется система соотношений*:

$$x_{k,i}(h_i, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{65}$$

$$x_{m+1,i}(h_i, t) > 0, \tag{66}$$

где $m \in \{1, \ldots, n+2\}$, *а для любого элемента* j *из множества* $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1$ *выполняется система соотношений:*

$$x_{k,j}(h_j, t) = 0, \quad k = \overline{1, m+1}, \tag{67}$$

$$x_{m+2,j}(h_j, t) \geqslant 0. \tag{68}$$

Тогда выполняется либо система соотношений:

$$x_k(h, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{69}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_{m+1}(h, t) > 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{70}$$

либо система соотношений:

$$x_k(h, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{71}$$

$$\mathrm{E}_0(h) \cdot x_{m+1}(h, t) > 0, \tag{72}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_{m+1}(h, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}, \tag{73}$$

$$\mathrm{E}_\alpha(h) \cdot x_{m+2}(h, t) \geqslant 0, \quad \alpha = \overline{1, n(h)}. \tag{74}$$

Доказательство леммы 12 проводится по схеме доказательства леммы 11 и поэтому в данной работе не приводится.

3.3.2. Доказательство теорем

Введем следующие обозначения:

$$x_1(h, t) = -[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathrm{r}_1(t), \tag{1}$$

$$x_2(h, t) = \rho(h) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot w_1(t) - \mathrm{r}_1(t), \tag{2}$$

$$x_{k+2}(h, t) = -[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot w_{k+1}(t) - w_k(t), \tag{3}$$

где $\mathrm{r}_1(t)$, $w_k(t)$ — стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a, t)$, $t \in \mathrm{H}^n$, $h \in \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1, n+2}$.

Отметим, что вектор $x_k(h, t)$, где $k = \overline{1, n+3}$, имеет вид: $x_k(h, t) = [x_{k,1}(h_i, t), \ldots, x_{k,n}(h_n, t)]^{\mathrm{T}}$, где величина $x_{k,i}(h_i, t)$ была определена в § 3.2, h_i — i-я компонента элемента h, $i = \overline{1, n}$.

Лемма 1.

Для любых элементов h *и* t *из множества* H^n *справедливы следующие соотношения:*

$$\mathrm{r}_1(h) = \mathrm{r}_1(t) + \mathrm{B}_1(h) \cdot x_1(h, t) + \pi(h) \cdot x_2(h, t), \tag{4}$$

$$w_1(h) = w_1(t) + \mathrm{B}_1(h) \cdot x_2(h, t) + \pi(h) \cdot x_3(h, t) + \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{r}_1(t) - \mathrm{r}_1(h), \tag{5}$$

$$- \mathrm{B}_1(h) \cdot w_k(t) = w_{k+1}(t) + \mathrm{B}_1(h) \cdot x_{k+2}(h, t) + \\ + \pi(h) \cdot x_{k+3}(h, t), \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{6}$$

где $\mathrm{r}_1(t)$, $w_k(t)$ *— стационарные характеристики однородной* КМЦД $\xi_0(a, t)$, $t \in \mathrm{H}^n$.

В справедливости соотношений (4)–(6) можно убедиться непосредственно, используя выражения (1)–(3) этого пункта и выражения (3), (9) § 2.1.

Используя леммы 1–3 и 5, 6 п. 3.3.1, выражения (4)–(6) представим в следующем виде

$$\mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t) + [\mathrm{E} + \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \cdot \mathrm{E}_0(h) \cdot x_1(h,t) + \\ + \sum_{k=1}^{n(h)} \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{E}_k(h) \cdot x_1(h,t) + \sum_{k=1}^{n(h)} \pi(h) \cdot \mathrm{E}_k(h) \cdot x_2(h,t), \quad (7)$$

$$w_1(h) = w_1(t) + [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \cdot \mathrm{E}_0(h) \cdot x_2(h,t) + \sum_{k=1}^{n(h)} \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathrm{E}_k(h) \cdot x_2(h,t) + \\ + \sum_{k=1}^{n(h)} \pi(h) \cdot \mathrm{E}_k(h) \cdot x_3(h,t) - \mathfrak{r}_1(h) + \mathrm{B}_1(h) \cdot \mathfrak{r}_1(t), \quad (8)$$

$$- \mathrm{B}_1(h) w_k(t) = w_{k+1}(t) + [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(h)]^{-1} \mathrm{E}_0(h) x_{k+2}(h,t) + \\ + \sum_{k=1}^{n(h)} \mathrm{B}_1(h) \mathrm{E}_k(h) x_{k+2}(h,t) + \sum_{k=1}^{n(h)} \pi(h) \cdot \mathrm{E}_k(h) \cdot x_{k-3}(h,t), \quad k = \overline{1,n}. \quad (9)$$

Ниже приводятся формулировки теорем 2, 4 и 5 § 3.2 и дается их доказательство.

Т е о р е м а 2.

Пусть для некоторого элемента t *из множества* H^n *существует такое непустое множество* J_1, *где* $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, *что для любого элемента* $i \in \mathrm{J}_1$ *справедливо неравенство* $\mathrm{H}_i^-(\ell,t) \neq \varnothing$, $\ell = \overline{1,n+3}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого элемента* $h = [h_1,\ldots,h_n]$, *i-я компонента которого* h_i *удовлетворяет условиям: а)* $h_i \in \mathrm{H}_i^-(\ell,t)$, *если* $i \in \mathrm{J}_1$; *б)* $h_i = t_i$, *если* $i \in [\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}_1]$, *справедливо выражение* $h \overset{\ell}{\prec} t$, *где* $\ell = \overline{1,n+2}$.

2. *Для любого элемента* $h = [h_1,\ldots,h_n]$, *i-я компонента которого* h_i *удовлетворяет условиям: а)* $h_i \in \mathrm{H}_i^-(n+3,t)$, *если* $i \in \mathrm{J}_1$; *б)* $h_i \in \mathrm{H}_i^0(n+3,t)$, *если* $i \in [\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}_1]$, *справедливо выражение* $h \overset{n+2}{\prec} t$.

Докажем утверждение пункта 1 теоремы 2.

Возможны следующие 2 альтернативных случая.

1. В множестве J_1 существует некоторое подмножество $\mathrm{J}_{1,1}$, для любого элемента i которого выполняется неравенство $x_{1,i}(h_i,t) < 0$, а для любого элемента j из множества $\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}_{1,1}$ выполняется, в силу условия теоремы и леммы 5 § 3.2, система соотношений:

$$x_{1,j}(h_j,t) = 0, \quad x_{2,j}(h_j,t) \leqslant 0.$$

В этом случае выполняются условия пункта 1 леммы 11 п. 3.3.1, из которого следует, что справедлива система соотношений (44)–(46) упомянутого пункта.

Из выражений (44)–(46) п. 3.3.1 и выражения (7) настоящего пункта следует, что выполняется неравенство $\mathfrak{r}_1(h) < \mathfrak{r}_1(t)$, т.е. справедливо выражение $h \overset{\ell}{\prec} t$.

2. В множестве J_1 существует такое подмножество $\mathrm{J}_{1,1}$, что для любого элемента i из этого подмножества выполняется система соотношений:

$$x_{k,i}(h_i, t) = 0, \quad k = \overline{1, m}; \quad x_{m+1,i}(h_i, t) < 0,$$

где $m \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$, $\ell = \overline{2, n+2}$. Для любого элемента j из множества $\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_{1,1}$ выполняется система соотношений:

$$x_{k,j}(h_j, t) = 0, \quad k = \overline{1, m+1}; \quad x_{m+2,j}(h_j, t) \leqslant 0.$$

Таким образом, для элементов h и t выполняются условия пункта 2 леммы 11 п. 3.3.1, из которого следует, что выполняется либо система соотношений (51), (52), либо система соотношений (53)–(56).

2.1. Пусть $m = 1$ и выполняется система соотношений (51), (52) п. 3.3.1. Тогда из выражения (7) следует, что $\mathfrak{r}_1(h) < \mathfrak{r}_1(t)$, т.е. справедливо выражение $h \overset{\ell}{\prec} t$.

2.2. Пусть $m = 1$ и выполняется система соотношений (53)–(56) п. 3.3.1. Тогда из выражения (7) настоящего пункта и соотношений (53), (55) получим равенство $\mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t)$, из которого, с учетом леммы 3 параграфа 2.1, следует, что $\mathrm{B}_1(h) \cdot \mathfrak{r}_1(t) - \mathfrak{r}_1(h) = 0$.

С учетом последнего равенства и соотношений (54)–(56) п. 3.3.1, из выражения (8) настоящего пункта получаем неравенство $w_1(h) < w_1(t)$, т.е. справедливо выражение $h \overset{\ell}{\prec} t$.

2.3. Аналогично пунктам 2.1 и 2.2 показывается, что при любом $m \in \{2, \ldots, \ell\}$ справедливо выражение $h \overset{\ell}{\prec} t$. Утверждение пункта 1 теоремы доказано.

Аналогично доказательству пункта 1 доказывается пункт 2 теоремы 2, если при этом учесть лемму 3 § 3.2.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 4.

Для любого элемента t *из множества* H^n *и любого элемента* $h = [h_1, \ldots, h_n]$, *i-я компонента которого* h_i, *где* $i \in \mathrm{J}$, *удовлетворяет условию:* $h_i \in \mathrm{H}_i^0(\ell + 1, t)$, — *справедливо выражение:* $h \overset{\ell}{\asymp} t$, *где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Из определения множества $\mathrm{H}_i^0(\ell + 1, t)$ (см. выражение (12) § 3.2), где $i = \overline{1, n}$, следует, что выполняется система равенств: $x_{k,i}(h_i, t) = 0$, $k = \overline{1, \ell + 1}$, $i = \overline{1, n}$, где h_i — i-я компонента элемента h. Тогда, используя лемму 3 § 2.1, из выражений (7)–(9) следует, что выполняется система равенств: $\mathrm{r}_1(h) = \mathrm{r}_1(t)$, $w_k(h) = w_k(t)$, $k = \overline{1,\ell}$, т.е. справедливо выражение $h \overset{\ell}{\succeq} t$. Теорема доказана.

Теорема 5.

Пусть для некоторого элемента t из множества H^n существует такое непустое множество J_1, где $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, что для любого элемента i из множества J_1 справедливо неравенство $\mathrm{H}_i^+(\ell, t) \neq \varnothing$, $\ell = \overline{1, n+3}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Для любого элемента $h = [h_1, \ldots, h_n]$, i-я компонента которого h_i удовлетворяет условиям: а) $h_i \in \mathrm{H}_i^+(\ell, t)$, если $i \in \mathrm{J}_1$; б) $h_i = t_i$, если $i \in \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$, справедливо выражение $h \overset{\ell}{\succ} t$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.*

2. *Для любого элемента $h = [h_1, \ldots, h_n]$, i-я компонента которого h_i удовлетворяет условиям: а) $h_i \in \mathrm{H}_i^+(n+3, t)$, если $i \in \mathrm{J}_1$; б) $h_i \in \mathrm{H}_i^0(n+3, t)$, если $i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$, справедливо выражение $h \overset{n+2}{\succ} t$.*

Доказательство теоремы 5 совпадает с доказательством теоремы 2, если в последнем множество $\mathrm{H}_i^-(\ell, t)$ заменить на множество $\mathrm{H}_i^+(\ell, t)$, где $i = \overline{1, n}$, а ссылки на соотношения леммы 11 заменить ссылками на соответствующие соотношения леммы 12.

ГЛАВА 4

МИНИМАЛЬНЫЕ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПОДМНОЖЕСТВАХ МНОЖЕСТВА H^n И ИХ СВОЙСТВА

В этой главе определяются ℓ-минимальный, ℓ-максимальный и $(\ell,\ \varepsilon)$-минимальный, $(\ell,\ \varepsilon)$-максимальный элементы в множестве $\mathcal{D}$, где $\ell \in \in \{1, \ldots, n+2\}$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n$, выявляются свойства этих элементов.

Глава состоит из шести параграфов.

В первом параграфе даются определения ℓ-минимального, ℓ-максимального и $(\ell,\ \varepsilon)$-минимального, $(\ell,\ \varepsilon)$-максимального элементов в множестве $\mathcal{D}$. Выявляются условия существования этих элементов в случае, когда $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n, \quad \mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Во втором параграфе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{D} = = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$, где $i = \overline{1, n}$, является конечным множеством. Показывается, что в этом случае в множестве $\mathcal{D}$ существует ℓ-минимальный и ℓ-максимальный элементы, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

В третьем параграфе рассматривается случай, когда три множества: $\mathcal{D} = = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n$, где $Co\mathcal{D}_i$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, где $T_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, связаны соотношениями: $\mathcal{D}_i \subset T_i \subset Co\mathcal{D}_i$. Показывается, что в этом случае, если в одном из множеств $\mathcal{D}$, T, $Co\mathcal{D}$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент, то в каждом из этих множеств также существует ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$. При этом ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент в множестве $\mathcal{D}$ является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множествах T и $Co\mathcal{D}$, а ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент в множестве T является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $Co\mathcal{D}$. В третьем параграфе показывается также, что если множество T таково, что каждое множество T_i является конечным множеством, либо линейным многогранником, то в множестве Т существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент.

В четвертом параграфе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{D} = = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$ имеет вид

$$\mathcal{D}_i = \bigcup_{b_i \in \mathrm{A}_i} \mathcal{D}_i(b_i), \;\; \mathcal{D}_i(b_i) \neq \varnothing, \;\; \mathcal{D}_i(b_i) = \overline{\mathcal{D}_i}(b_i), \;\; i = \overline{1, n},$$

где A_i — некоторое подмножество множества А, определенного в § 4.4, $\mathcal{D}_i(b_i)$ — множество, введенное в § 4.4, $\overline{\mathcal{D}_i}(b_i)$ — множество, являющееся замыканием множества $\mathcal{D}_i(b_i)$, $i = \overline{1,n}$. Показывается, что в этом случае в множестве $\mathcal{D}$ существует ℓ-минимальный и ℓ-максимальный элементы, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

В пятом параграфе рассматривается случай, когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ является замкнутым множеством, в котором существует элемент h, обладающий свойством: множество J состояний однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ образует один класс возвратных сообщающихся состояний. При этом показывается, что в множестве $\mathcal{D}$ имеется 1-минимальный (1-максимальный) элемент ζ, для которого выполняется соотношение: $\mathfrak{r}_{1,1}(\zeta) = \ldots = \mathfrak{r}_{1,n}(\zeta)$, где $\mathfrak{r}_{1,i}(\zeta)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(\zeta)$, $i = \overline{1,n}$. Показывается также, что в том случае, когда в множестве $\mathcal{D}$ отсутствуют элементы, для которых соответствующие однородные КМЦД имеют невозвратные состояния, в этом множестве $\mathcal{D}$ имеется ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

В шестом параграфе рассматривается случай, когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, является замкнутым множеством. Показывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,1} \times \ldots \times T_{\varepsilon,n}$, где $T_{\varepsilon,i}$ — линейный многогранник, обладающий свойством: $\mathcal{D}_i \subset T_{\varepsilon,i} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, для которого выполняются следующие системы неравенств:

$$\mathfrak{r}_i(1) - \mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(1)}) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(2)}) - \mathfrak{r}_i(2) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\mathfrak{r}_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$, $\mathfrak{r}_i(2) = \sup\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$, $i = \overline{1,n}$, $\mathfrak{r}_{1,i}(\cdot)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(\cdot)$, $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ — соответственно 1-минимальный и 1-максимальный элемент в множестве T_ε.

4.1. Определения минимальных и максимальных элементов. Условия их существования

В этом параграфе даются определения ℓ-минимального (ℓ-максимального) и (ℓ,ε)-минимального ((ℓ, ε)-максимального) элементов, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\varepsilon > 0$. Выявляются условия их существования.

4.1.1. Определения ℓ-минимального и ℓ-максимального элементов. Условия их существования

О п р е д е л е н и е. Элемент ζ из множества H^n называется *ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом по отношению к элементам множества* $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n$, если для любого элемента h из множества $\mathcal{D}$ справедливо выражение $\zeta \overset{\ell}{\preccurlyeq} h$ ($\zeta \overset{\ell}{\succcurlyeq} h$), где $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$. Если при этом справедливо выражение $\zeta \in \mathcal{D}$, то элемент ζ называется ℓ-минимальным элементом (ℓ-максимальным элементом) в множестве $\mathcal{D}$.

Т е о р е м а 1.

1. *Для того чтобы элемент t из множества* H^n *являлся ℓ-минимальным*

элементом по отношению к элементам множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, *где* $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, *достаточно выполнения следующей системы равенств*:

$$\mathcal{D}_i^-(\ell+1,t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(\ell+1,t) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где $\mathrm{H}_i^-(\ell+1,t)$ — *множество, определенное выражением* (11) § 3.2, $\ell \in \{1,\ldots,n+2\}$.

2. *Если* t *является* $(n+2)$-*минимальным элементом в множестве* $\mathcal{D}$, *то выполняется система равенств* (1), *где* $\ell = n+2$.

Доказательство.

1. Из леммы 6 § 3.2 и системы (1) следует, что справедлива система равенств: $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i^0(\ell+1,t) + \mathcal{D}_i^+(\ell+1,t)$, где $\mathcal{D}_i^+(\ell+1,t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^+(\ell+1,t)$, $\mathcal{D}_i^0(\ell+1,t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^0(\ell+1,t)$, $i = \overline{1,n}$.

Учитывая, что выполняется включение

$$[\mathcal{D}_i^0(\ell+1,t) + \mathcal{D}_i^+(\ell+1,t)] \subset [\mathrm{H}_i^0(\ell+1,t) + \mathrm{H}_i^+(\ell+1,t)], \tag{2}$$

где $i = \overline{1,n}$, из теоремы 6 § 3.2 следует, что для любого $h \in \mathcal{D}$ справедливо выражение $h \overset{\ell}{\succcurlyeq} t$, т.е. t является ℓ-минимальным элементом по отношению к элементам множества $\mathcal{D}$, где $\ell \in \{1,\ldots,n+2\}$.

2. Пусть t является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, докажем, что в этом случае выполняется система равенств (1), где $\ell = n+2$. Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что существует такое непустое множество J_1, где $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, что справедливо выражение: $D_i^-(n+3,t) \neq \varnothing \ \forall i \in \mathrm{J}_1$. Тогда сформируем элемент $\zeta = [\zeta_1,\ldots,\zeta_n]$ следующим образом: $\zeta_i \in \mathcal{D}_i^-(n+3,t)$, если $i \in \mathrm{J}_1$; $\zeta_i \in \mathcal{D}_i^0(n+3,t)$, если $i \in [\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}_1]$. Таким образом, для элемента ζ выполняются условия пункта 2 теоремы 2 § 3.2, из которого следует, что $\zeta \overset{n+2}{\prec} t$. Последнее выражение противоречит тому, что t является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$. Указанное противоречие доказывает, что если t $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}$, то выполняется система равенств (1), где $\ell = n+2$.

Содержание пунктов 1 и 2, с учетом леммы 2 § 3.2, влекут доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 непосредственно следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 1.

Если для некоторого элемента t *из множества* $\mathcal{D}$ *выполняется система равенств* (1), *то* t *является* ℓ-*минимальным элементом в множестве* $\mathcal{D}$.

Следствие 2.

Пусть t *является* $(n+2)$-*минимальным элементом в множестве* $\mathcal{D}$, *тогда для любого* $h \in \mathcal{D}$, *обладающего свойством* $h \overset{n+2}{\succ} t$, *существует такое непустое множество* $\mathrm{J}(0)$ *для которого выполняется условие*: $h_i \in \mathcal{D}_i^+(n+2,t)$, *если* $i \in \mathrm{J}(0)$; $h_i \in [\mathcal{D}_i^0(n+2,t) + \mathcal{D}_i^+(n+2,t)]$, *если* $i \in [\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}(0)]$, *где* $\mathrm{J}(0) \in \mathrm{J}$, h_i — i-*я компонента элемента* h.

Доказательство следствия 2 непосредственно следует из пункта 2 теоремы 1 и теоремы 5 § 3.2.

Теорема 2.

1. *Для того чтобы элемент t из множества H^n являлся ℓ-максимальным элементом по отношению к элементам множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, достаточно выполнения следующей системы равенств*:

$$\mathcal{D}_i^+(\ell + 1, t) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^+(\ell + 1, t) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\mathrm{H}_i^+(\ell + 1, t)$ — множество, определенное выражением (15) § 3.2, $\ell \in \in \{1, \ldots, n+2\}$.

2. *Если t является $(n+2)$-максимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, то выполняется система равенств* (3), *где $\ell = n + 2$.*

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1 и поэтому в данной работе не приводится.

Следствие 3.

Если для некоторого элемента t из множества $\mathcal{D}$ выполняется система равенств (3), *то t является ℓ-максимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, где $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.*

Лемма 1.

Пусть t является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Тогда для любого $m \in \{1, \ldots, \ell\}$ элемент t является m-минимальным (m-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из пункта 1 леммы 2 § 4.2 и определения ℓ-минимального элемента.

4.1.2. Определения (ℓ, ε)-минимального и (ℓ, ε)-максимального элементов. Условия их существования

В этом пункте определяются (ℓ, ε)-минимальные и (ℓ, ε)-максимальные элементы в множестве $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n$, $\ell = \overline{1, n+2}$, $\varepsilon > 0$. Приводятся теоремы, в которых формулируются условия их существования и некоторые свойства.

Введем следующие множества.

1. $\mathcal{D}(1,i) = \{t \in \mathcal{D}\colon \mathfrak{r}_{1,i}(t) = \mathfrak{r}_i(1)\}$, где $i = \overline{1,n}$, $\mathfrak{r}_{1,i}(h)$ — i-компонента вектора $\mathfrak{r}_1(h)$, $\mathfrak{r}_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$.

2. $\mathrm{J}(1,\mathcal{D}) = \{i \in \mathrm{J}\colon \mathcal{D}(1,i) \neq \varnothing\}$.

3. $T(1,i) = \{t \in \mathcal{D}\colon \mathfrak{r}_{1,i}(t) = r_i(2)\}$, где $i = \overline{1,n}$, $r_i(2) = \sup\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$.

4. $\mathrm{I}(1,\mathcal{D}) = \{i \in \mathrm{J}\colon T(1,i) \neq \varnothing\}$.

Определение 1.

Элемент t из множества $\mathcal{D}$ называется $(1,\varepsilon)$-*минимальным* ($(1,\varepsilon)$-*максимальным*) *элементом в множестве* $\mathcal{D}$, если выполняются соотношения

$$\mathfrak{r}_{1,i}(t) = r_i(1) \quad \forall\, i \in \mathrm{J}(1,\mathcal{D}),$$
$$\mathfrak{r}_{1,i}(t) - r_i(1) < \varepsilon \quad \forall\, i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}(1,\mathcal{D})]$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{r}_{1,i}(t) = r_i(2) & \forall\, i \in \mathrm{I}(1,\mathcal{D}) \\ r_i(2) - \mathrm{r}_{1,i}(t) < \varepsilon & \forall\, i \in [\mathrm{J}\backslash \mathrm{I}(1,\mathcal{D})] \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon > 0$.

Из определения 1 непосредственно следует, что 1-минимальный (1-максимальный) элемент в множестве $\mathcal{D}$ является для любого $\varepsilon > 0$ $(1, \varepsilon)$-минимальным ($(1, \varepsilon)$-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Теорема 1.

В множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $(1,\varepsilon)$-минимальный ($(1,\varepsilon)$-максимальный) элемент.

Доказательство теоремы 1 приведено в конце § 4.2.

Пусть $\mathcal{D}(1,\varepsilon)$ и $T(1,\varepsilon)$ — соответственно множества всех $(1,\varepsilon)$-минимальных и $(1, \varepsilon)$-максимальных элементов в множестве $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\varepsilon > 0$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 непосредственно следует справедливость следующей леммы.

Лемма 1.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Справедливы выражения*

$$\mathcal{D}(1,\varepsilon) \neq \varnothing, \quad T(1,\varepsilon) \neq \varnothing \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

$$r(1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{r}_1(t(1,\varepsilon)), \quad r(2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{r}_1(h(1,\varepsilon)), \tag{2}$$

где $\mathrm{r}(\nu) = [\mathrm{r}_1(\nu), \ldots, \mathrm{r}_n(\nu)]^T$, $\nu = 1, 2$, $t(1,\varepsilon)$, $h(1,\varepsilon)$ — *соответственно любой* $(1,\varepsilon)$-*минимальный и любой* $(1,\varepsilon)$-*максимальный элементы в множестве* $\mathcal{D}$.

2. *Если выполняется неравенство* $\mathcal{D}_0(1) \neq \varnothing$ $(T_0(1) \neq \varnothing)$, *где* $\mathcal{D}_0(1)$ — *множество всех* 1-*минимальных элементов в множестве* $\mathcal{D}$ ($T_0(1)$ — *множество всех* 1-*максимальных элементов в множестве* $\mathcal{D}$), *то справедливы выражения*

$$\mathcal{D}(1,\varepsilon) = \mathcal{D}_0(1) \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{r}_1(t) = r(1), \tag{3}$$

$$(T(1,\varepsilon) = T_0(1) \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \mathrm{r}_1(h) = r(2)), \tag{4}$$

где $t \in \mathcal{D}_0(1)$, $(T_0(1))$.

3. *Если выполняется равенство* $\mathcal{D}_0(1) = \varnothing$ $(T_0(1) = \varnothing)$, *то для любого* $h \in \mathcal{D}$ *можно указать такое число* $\varepsilon > 0$, *для которого справедливо выражение*:

$$h \overset{1}{\succ} t \quad \forall\, t \in \mathcal{D}(1,\varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{5}$$

$$(h \overset{1}{\prec} t \quad \forall\, t \in T(1,\varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]). \tag{6}$$

4. *Для любого* $\zeta \in \mathcal{D}$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *для которого справедливо выражение*

$$\zeta \overset{1}{\succcurlyeq} t \quad \forall\, t \in \mathcal{D}(1,\varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{7}$$

$$(\zeta \overset{1}{\preccurlyeq} h \quad \forall\, h \in T(1,\varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]). \tag{8}$$

Определим следующие множества:

1. $\mathcal{D}(\ell, i) = \{t \in \mathcal{D}_0(\ell-1)\colon w_{\ell-1,i}(t) = v_{\ell-1,i}(1)\}$, где $\ell = \overline{2, n+2}$, $i = \overline{1, n}$, $\mathcal{D}_0(\ell-1)$ — множество всех $(\ell-1)$-минимальных элементов в множестве $\mathcal{D}$, $w_{\ell-1,i}(l)$ — i-я компонента вектора $w_{\ell-1}(t)$, $v_{\ell-1,i}(1) = \inf\{w_{\ell-1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}_0(\ell-1)\}$;

2. $\mathrm{J}(\ell, \mathcal{D}) = \{i \in \mathrm{J}\colon \mathcal{D}(\ell, i) \neq \varnothing\}$;

3. $\mathrm{J}_1(\ell, \mathcal{D}) = \{i \in \mathrm{J}\colon v_{\ell-1,i}(1) = -\infty\}$;

4. $\mathrm{J}_2(\ell, \mathcal{D}) = \mathrm{J}\backslash[\mathrm{J}(\ell, \mathcal{D}) + \mathrm{J}_1(\ell, \mathcal{D})]$;

5. $T(\ell, i) = \{t \in T_0(\ell-1)\colon w_{\ell-1,i}(t) = v_{\ell-1,i}(2)\}$ где $\ell = \overline{2, n+2}$, $i = \overline{1, n}$, $T_0(\ell-1)$ — множество всех $(\ell-1)$-максимальных элементов в множестве $\mathcal{D}$, $v_{\ell-1,i}(2) = \sup\{w_{\ell-1,i}(h)\colon h \in T_0(\ell-1)\}$;

6. $\mathrm{I}(\ell, \mathcal{D}) = \{i \in \mathrm{J}\colon T(\ell, i) \neq \varnothing\}$;

7. $\mathrm{I}_1(\ell, \mathcal{D}) = \{i \in \mathrm{J}\colon v_{\ell-1,i}(2) = \infty\}$;

8. $\mathrm{I}_2(\ell, \mathcal{D}) = \mathrm{J}\backslash[\mathrm{I}(\ell, \mathcal{D}) + \mathrm{I}_1(\ell, \mathcal{D})]$.

О п р е д е л е н и е 2. Элемент t из множества $\mathcal{D}$ называется *(ℓ, ε)-минимальным ((ℓ, ε)-максимальным) элементом в множестве* $\mathcal{D}$, где $\varepsilon > 0$, $\ell \in \{2, \ldots, n+2\}$, если t является $(\ell-1)$-минимальным ($(\ell-1)$-максимальным) элементом и выполняются следующие соотношения:

$$w_{\ell-1,i}(t) = v_{\ell-1,i}(1) \quad \forall\, i \in \mathrm{J}(\ell, \mathcal{D}),$$

$$w_{\ell-1,i}(t) - v_{\ell-1,i}(1) < \varepsilon \quad \forall\, i \in \mathrm{J}_2(\ell, \mathcal{D}),$$

$$w_{\ell-1,i}(t) < -\varepsilon^{-1} \quad \forall\, i \in \mathrm{J}_1(\ell, \mathcal{D})$$

$$\left(\begin{array}{c} w_{\ell-1,i}(t) = v_{\ell-1,i}(2) \quad \forall\, i \in \mathrm{I}(\ell, \mathcal{D}), \\ v_{\ell-1,i}(2) - w_{\ell-1,i}(t) < \varepsilon \quad \forall\, i \in \mathrm{I}_2(\ell, \mathcal{D}), \\ w_{\ell-1,i}(t) > \varepsilon^{-1} \quad \forall\, i \in \mathrm{I}_1(\ell, \mathcal{D}) \end{array}\right).$$

Из определения 2 непосредственно следует, что ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент в множестве $\mathcal{D}$ является для любого $\varepsilon > 0$ (ℓ, ε)-минимальным ((ℓ, ε)-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$, где $\ell \in \{2, \ldots, n+2\}$.

Т е о р е м а 2.

Если в множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, имеется $(\ell-1)$-минимальный ($(\ell-1)$-максимальный) элемент, то для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{D}$ существует (ℓ, ε)-минимальный ((ℓ, ε)-максимальный) элемент.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы 1, и поэтому в данной работе не приводится.

Пусть в множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ имеются $(\ell-1)$-минимальный и $(\ell-1)$-максимальный элементы и пусть $\mathcal{D}(\ell, \varepsilon)$ — множество всех (ℓ, ε)-минимальных элементов в $\mathcal{D}$, $T(\ell, \varepsilon)$ — множество всех (ℓ, ε)-максимальных элементов в $\mathcal{D}$, где $\varepsilon > 0$, $\ell \in \{2, \ldots, n+2\}$, тогда из теоремы 2 непосредственно следует справедливость следующей леммы 2.

Л е м м а 2.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Справедливы выражения*

$$\mathcal{D}(\ell,\varepsilon) \neq \varnothing, \quad T(\ell,\varepsilon) \neq \varnothing \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{9}$$

$$\mathfrak{r}_1(t(\ell,\varepsilon)) = r(1), \quad \mathfrak{r}_1(h(\ell,\varepsilon)) = r(2), \tag{10}$$

$$w_k(t(\ell,\varepsilon)) = v_k(1), \quad w_k(h(\ell,\varepsilon)) = v_k(2), \quad k = \overline{1,\ell-2}, \tag{11}$$

$$v_{\ell-1}(1) = \lim_{\varepsilon\to 0} w_{\ell-1}(t(\ell,\varepsilon)), \quad v_{\ell-1}(2) = \lim_{\varepsilon\to 0} w_{\ell-1}(h(\ell,\varepsilon)), \tag{12}$$

где $t(\ell,\varepsilon)$, $h(\ell,\varepsilon)$ *— соответственно любой* (ℓ,ε)*-минимальный и любой* (ℓ,ε)*-максимальный элементы в множестве* $\mathcal{D}$, *при* $\ell = 2$ *равенства* (11) *в системе равенств* (10)–(12) *отсутствуют.*

2. *Если выполняется неравенство* $\mathcal{D}_0(\ell) \neq \varnothing$ $(T_0(\ell) \neq \varnothing)$, *то справедливы выражения*

$$\mathcal{D}(\ell,\varepsilon) = \mathcal{D}_0(\ell) \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{13}$$

$$\mathfrak{r}_1(t) = r(1), \;\; w_k(t) = v_k(1), \;\; k = \overline{1,\ell-1} \tag{14}$$

$$\left(\begin{array}{c} T(\ell,\varepsilon) = T_0(\ell) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \mathfrak{r}_1(h) = r(2), \quad w_k(h) = v_k(2), \quad k = \overline{1,\ell-1} \end{array} \right), \tag{15}$$

где $t \in \mathcal{D}_0(\ell)$, $h \in T_0(\ell)$.

3. *Если выполняются соотношения*

$$\mathcal{D}_0(1) \neq \varnothing, \ldots, \mathcal{D}_0(\ell-1) \neq \varnothing, \quad \mathcal{D}_0(\ell) = \varnothing, \tag{16}$$

$$(T_0(1) \neq \varnothing, \ldots, T_0(\ell-1) = \varnothing, \quad T_0(\ell) = \varnothing), \tag{17}$$

то для любого $h \in \mathcal{D}$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *для которого справедливо выражение*

$$h \overset{\ell}{\succ} t \quad \forall\, t \in \mathcal{D}(\ell,\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon 0] \tag{18}$$

$$(h \overset{\ell}{\prec} t \quad \forall\, t \in T(\ell,\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in]0,\varepsilon_0]). \tag{19}$$

4. *Для любого* $\zeta \in \mathcal{D}$ *можно указать такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *для которого справедливы выражения*

$$\zeta \overset{\ell}{\succcurlyeq} t \quad \forall\, t \in \mathcal{D}(\ell,\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0], \tag{20}$$

$$\zeta \overset{\ell}{\preccurlyeq} h \quad \forall\, h \in T(\ell,\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in]0,\varepsilon_0]. \tag{21}$$

Лемма 3.

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ *таково, что выполняется равенство:* $\mathcal{D}_0(n+2) = \varnothing$.

Тогда для множества $T \subset \mathcal{D}$, *имеющего вид:* $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, *где* $T_i = \{h_i(1), \ldots, h_i(m(i))\} \subset \mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, $h_i(j)$ *— произвольно выбранный* *элемент из множества $\mathcal{D}_i$, $j = \overline{1, m(i)}$, $m(i) \in \mathcal{N}$, существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, для которого справедливо выражение*

$$h_i(j) \in [\mathrm{H}_i^+(n+3, t(k,\varepsilon)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k,\varepsilon))] \quad \forall i \in \mathrm{J},\ \ j \in \{1, \ldots, m(i)\}\ \ \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \tag{22}$$

где $t(k,\varepsilon)$ — (k,ε)-минимальный элемент в $\mathcal{D}$, $k = \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell) = \varnothing,$ $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}$.

Доказательство этой леммы изложено в конце § 4.2.

4.2. Случай I

В этом параграфе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, является конечным множеством, т.е. $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, — также конечные множества. Показывается, что в этом случае в множестве $\mathcal{D}$ существуют ℓ-минимальный и ℓ-максимальный элементы, где $\ell = \overline{2, n+2}$.

Приведем процедуру 1a, позволяющую построить последовательность упорядоченных элементов из множества $\mathcal{D}$, которая обладает рядом замечательных свойств, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$.

Процедура 1a.

Процедура 1a, примененная к множеству $\mathcal{D}$, состоит из последовательности циклов. На k-м цикле, где $k \in \mathcal{N}$, выполняются следующие действия.

1. Строим систему множеств: $\mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)})$, $i = \overline{1,n}$, где $\mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)}) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(\ell+1, t^{(k)})$, $i = \overline{1,n}$, $\mathrm{H}_i^-(\ell+1, t^{(k)})$ — множество, определенное выражением (11) § 3.2, $t^{(1)}$ — любой элемент из множества $\mathcal{D}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

2. Проверяем выполнение условия A: $\mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)}) = \varnothing$, $i = \overline{1,n}$.

2.1. Если условие A выполнено, то полагаем $t^{(k)} = \zeta$ и процедуру завершаем.

2.2. Если условие A не выполнено, то формируем элемент $t^{(k+1)} = [t_1^{(k+1)}, \ldots, t_n^{(k+1)}]$ следующим образом: 1) $t_i^{(k+1)} \in \mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)})$, при $i \in \mathrm{J}_1$, $\mathrm{J}_1 = \{i\colon \mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)}) \neq \varnothing\}$; 2) $t_i^{(k+1)} = t_i^{(k)}$ при $i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1]$. Далее переходим к пункту 1 процедуры.

На этом изложение процедуры 1a заканчивается.

З а м е ч а н и е 1. Процедура 1a при $\ell = 1$ представляет собой итерационную процедуру Ховарда [5].

Т е о р е м а 1.

Пусть дано множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Последовательность $\{t^{(1)}, \ldots, t^{(k)}, \ldots\}$, построенная в результате применения процедуры 1a, обладает свойством*

$$t^{(k+1)} \overset{\ell+1}{\prec} t^{(k)}, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{5}$$

где $\ell = \overline{1, n+1}$.

2. *Элемент $\zeta \in \mathcal{D}$, построенный в процедуре* 1а, *является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, т.е. справедливо выражение: $\zeta \overset{\ell}{\preccurlyeq} h \,\forall\, h \in \in \mathcal{D}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.*

3. *Процедура* 1а, *примененная к конечному множеству $\mathcal{D}$, завершается за конечное число циклов.*

Доказательство.

1. Пусть на k-м цикле, где $k \in \mathcal{N}$, процедуры 1а был построен элемент $t^{(k+1)}$. Тогда для элемента $t^{(k+1)}$ выполняются условия теоремы 2 (п. 1) § 3.2, из которой следует справедливость выражения (5).

2. Пусть процедура 1а завершилась на k-м цикле, т.е. выполнено условие A: $\mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)}) = \varnothing$, $i = \overline{1, n}$. Тогда по теореме 1 п. 4.1.1 элемент $\zeta = t^{(k)}$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Пусть процедура 1а была применена к конечному множеству $\mathcal{D}$. Тогда, учитывая, что отношение $\overset{\ell+1}{\prec}$ транзитивно, но не рефлексивно, получим, что процедура 1а завершилась за конечное число циклов.

Теорема 1 доказана.

Определим процедуру 1б следующим образом: процедура 1б совпадает с процедурой 1а, если в последней множества $\mathcal{D}_i^-(\ell+1, t^{(k)})$, $\mathrm{H}_i^-(\ell+1, t^{(k)})$ заменить соответственно на $\mathcal{D}_i^+(\ell+1, t^{(k)})$, $\mathrm{H}_i^+(\ell+1, t^{(k)})$.

Теорема 2.

Пусть дано множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Последовательность $\{t^{(1)}, \ldots, t^{(k)}, \ldots\}$, построенная в результате применения процедуры* 1б, *обладает свойством*

$$t^{(k+1)} \overset{\ell+1}{\succ} t^{(k)}, \quad k = \overline{1, \infty}. \tag{6}$$

2. *Элемент $\zeta \in \mathcal{D}$, построенный в процедуре* 1б, *является ℓ-максимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, т.е. справедливо выражение: $\zeta \overset{\ell}{\succcurlyeq} h, \forall\, h \in \in \mathcal{D}$.*

3. *Процедура* 1б, *примененная к конечному множеству $\mathcal{D}$, завершается за конечное число циклов.*

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1 и поэтому в данной работе не приводится.

Теперь, напомнив содержание теоремы 1 и леммы 3 п. 4.1.2, проведем их доказательство.

Теорема 1.

В множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $(1, \varepsilon)$-минимальный ($(1, \varepsilon)$-максимальный) элемент.

Доказательство.

Для каждого i, где $i \in \mathrm{J}$, определим элемент $t(i)$ из множества $\mathcal{D}$ в соответствии со следующим правилом.

1. Если элемент i принадлежит множеству $\mathrm{J}(1, \mathcal{D})$, то $t(i)$ есть произвольно выбранный элемент из множества $\mathcal{D}(1, i)$.

2. Если элемент i принадлежит множеству $\mathrm{J}\backslash\mathrm{J}(1,\mathcal{D})$, то $t(i)$ есть элемент, для которого выполняется неравенство

$$\mathrm{r}_{1,i}(t(i)) - \inf\{\mathrm{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\} < \varepsilon, \tag{7}$$

где $\mathrm{r}_{1,i}(h)$ — i-я компонента вектора $\mathrm{r}_1(h)$, $i = \overline{1,n}$.

Образуем систему множеств:

$$T_j = \{t_j(i)\colon i \in \mathrm{J}\}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $t_j(i)$ — j-я компонента элемента $t(i)$.

Образуем множество $T = T_1 \times \ldots \times T_n$. По построению для этого множества выполняются включения

$$T_j \subset \mathcal{D}_j, \quad j = \overline{1,n}; \quad T \subset \mathcal{D}. \tag{9}$$

Так как T — конечное множество, то теореме 1 настоящего параграфа в T существует 1-минимальный элемент t, где $t \in T$.

Из определения 1-минимального элемента в множестве T следует, что выполняются неравенства

$$\mathrm{r}_1(t) \leqslant \mathrm{r}_1(t(i)), \quad i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Из неравенств (7), (10) следует, что элемент t является $(1,\,\varepsilon)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Аналогично показывается существование $(1,\varepsilon)$-максимального элемента в множестве $\mathcal{D}$.

Теорема 1 п. 4.1.2 доказана.

Л е м м а 3 (п. 4.1.2).

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ *таково, что выполняется равенство*: $\mathcal{D}_0(n+2) = \varnothing$.

Тогда для множества $T \subset \mathcal{D}$, *имеющего вид*: $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, *где* $T_i = \{h_i(1), \ldots, h_i((m_i))\} \subset \mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, $h_i(j)$ — *произвольно выбранный элемент из множества* $\mathcal{D}_i$, $j = \overline{1,m(i)}$, $m(i) \in \mathcal{N}$, *существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$, *для которого справедливо выражение*

$$\begin{gathered} h_i(j) \in [\mathrm{H}_i^+(n+3, t(k,\varepsilon)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k,\varepsilon))] \\ \forall\, [i \in \mathrm{J},\ \ j \in \{1, \ldots, m(i)\},\ \ \varepsilon \in]0, \varepsilon_0]], \end{gathered} \tag{11}$$

где $t(k,\varepsilon)$ — (k,ε)-*минимальный элемент в* $\mathcal{D}$, $k = \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell) = \varnothing,\ \ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из определения числа k следует, что выполняется система соотношений:

$$\mathcal{D}_0(\ell) \neq \varnothing, \quad \ell = \overline{1, k-1}, \tag{12}$$

$$\mathcal{D}_0(k) = \varnothing, \tag{13}$$

где при $k = 1$ соотношения (12) отсутствуют. Из соотношений (12), (13) и лемм 1, 2 (пункт 3) п. 4.1.2 следует, что для любого элемента $h \in T$, в силу включения $T \subset \mathcal{D}$, существуют такое число $\varepsilon_0(h) > 0$ и такой элемент $h(k,\varepsilon) \in \mathcal{D}$, для которых справедливо выражение

$$h \overset{k}{\succ} h(k,\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0(h)]. \tag{14}$$

Поскольку T является конечным множеством, то положив $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_0(h)\colon\ h \in T\}$ из выражения (14), с учетом выражения $h(k,\varepsilon_1) \overset{k}{\succcurlyeq} h(k,\varepsilon_2)\ \forall\ \varepsilon_2 \in]0, \varepsilon_1]$, следует справедливость выражения

$$h \overset{k}{\succ} h(k,\varepsilon) \quad \forall[\varepsilon \in]0, \varepsilon_0],\ \ h \in T]. \tag{15}$$

Сформируем множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \ldots \times \mathcal{K}_n$, где $\mathcal{K}_i = \{h_i(1), \ldots, h_i((m_i)),\ h_i(k,\varepsilon)\}$, где $h_i(j) \subset T$, $h_i(k,\varepsilon)$ — i-я компонента элемента $h(k,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, ε — произвольно выбранное число из интервала $]0, \varepsilon_0]$. Понятно, что выполняются включения

$$T_i \subset \mathcal{K}_i \subset \mathcal{D}_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Так как $\mathcal{K}$ является конечным множеством, то из теоремы 1 (п. 2) следует, что в множестве $\mathcal{K}$ имеется $(n+2)$-минимальный элемент $t(k,\varepsilon)$. Из определения $(n+2)$-минимального элемента, выражения $h(k,\varepsilon) \in \mathcal{K}$ и леммы 2 (пункт 1) § 3.2 следует, что выполняется соотношение $t(k,\varepsilon) \overset{k}{\preccurlyeq} h(k,\varepsilon)$, т.е. $t(k,\varepsilon)$ является также некоторым (k,ε)-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$. Далее, из теоремы 1 (пункт 2) § 4.1 и леммы 4 § 3.2 следует, что выполняются включения

$$\mathcal{K}_i \subset [\mathrm{H}_i^{+}(n+3, t(k,\varepsilon)) + \mathrm{H}_i^{0}(n+3, t(k,\varepsilon))], \quad i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Включения (16), (17) влекут справедливость выражения (11).

Лемма 3 п. 4.1.2 доказана.

4.3. Случай II

В этом параграфе рассматривается случай, когда три множества:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n,\ \ Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n,\ \ T = T_1 \times \ldots \times T_n,$$

связаны соотношениями: $\mathcal{D}_i \subset T_i \subset Co\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, $T_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, $Co\mathcal{D}_i$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{D}_i$. Показывается, что в этом случае, если в одном из множеств $\mathcal{D}$, T, $Co\mathcal{D}$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент, то в каждом из этих множеств существует ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$. В частности, показывается, что если множество T таково, что каждое множество T_i является конечным множеством, либо линейным многогранником (т.е. выпуклой оболочкой конечного множества), то в множестве T существует ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Л е м м а 1.

Пусть дана совокупность элементов $\{h_i(j),\quad j=\overline{1,\nu}\}$ *из множества* H. *Тогда элемент* $t_i = s_{i,1}\cdot h_i(1)+\ldots+s_{i,\nu}\cdot h_i(\nu)$, *где* $s_{i,j}\geqslant 0$, $j=\overline{1,\nu}$, $s_{i,1}+\ldots+s_{i,\nu}=1$, *являющийся выпуклой комбинацией элементов* $h_i(j)$, $j=\overline{1,\nu}$, *также является элементом множества* H.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что множество H является выпуклым множеством, следовательно, справедливо выражение $t_i\in$ $\in$ H. Лемма доказана.

Л е м м а 2.

Пусть элемент t_i *имеет вид*

$$t_i = s_{i,1}\cdot h_i(1)+\ldots+s_{i,\nu}\cdot h_i(\nu), \tag{1}$$

где $s_{i,j}\geqslant 0$, $j=\overline{1,\nu}$, $s_{i,1}+\ldots+s_{i,\nu}=1$, $h_i(j)\in$ H, $j=\overline{1,\nu}$, $i\in$ J.

Тогда для любых $k\in\mathcal{N}$, $\zeta\in$ H^n *справедливо выражение*

$$x_{k,i}(t_i,\zeta)=\sum_{j=1}^{\nu} s_{i,j}\cdot x_{k,i}(h_i(j),\zeta), \tag{2}$$

где $x_{k,i}(h_i(j),\zeta)$ — *величина, определяемая выражениями* (6)–(8) § 3.2.

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из выражений (6)–(8) § 3.2 и соотношения (1).

Л е м м а 3.

Пусть $\mathcal{D}_i$ — *некоторое подмножество множества* H, *а* t — *некоторый элемент из множества* H^n. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Из равенства* $\mathcal{D}_i\cap \mathrm{H}_i^-(\nu,t)=\varnothing$ *следует равенство* $Co\mathcal{D}_i\cap\mathrm{H}_i^-(\nu,t)=$ $=\varnothing$, *где* $Co\mathcal{D}_i$ — *выпуклая оболочка множества* $\mathcal{D}_i$, $\mathrm{H}_i^-(\nu,t)$ — *множество, определенное выражением* (11) § 3.2, $\nu=\overline{1,n+3}$.

2. *Из равенства* $\mathcal{D}_i\cap[\mathrm{H}_i^-(\nu,t)+\mathrm{H}_i^0(\nu,t)]=\varnothing$ *следует равенство* $Co\mathcal{D}_i\cap$ $\cap[\mathrm{H}_i^-(\nu,t)+\mathrm{H}_i^0(\nu,t)]=\varnothing$, *где* $\mathrm{H}_i^0(\nu,t)$ — *множество, определенное выражением* (12) § 3.2, $\nu=\overline{1,n+3}$.

3. *Из равенства* $\mathcal{D}_i\cap\mathrm{H}_i^+(\nu,t)=\varnothing$ *следует равенство* $Co\mathcal{D}_i\cap\mathrm{H}_i^+(\nu,t)=$ $=\varnothing$, *где* $\mathrm{H}_i^+(\nu,t)$ — *множество, определенное выражением* (15) § 3.2, $\nu=\overline{1,n+3}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Учитывая, что каждый элемент множества $Co\mathcal{D}_i$ является выпуклой комбинацией элементов из множества $\mathcal{D}_i$, из леммы 2 и определения множеств $\mathrm{H}_i^-(\nu,t)$, $\mathrm{H}_i^0(\nu,t)$, $\mathrm{H}_i^+(\nu,t)$ следует, что справедливы утверждения леммы 3. Лемма доказана.

Л е м м а 4.

Пусть в множестве $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$ *имеется элемент* t, *для которого выполняется система равенств*:

$$\mathcal{D}_i^-(\ell+1,t)=\varnothing,\quad i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$(\mathcal{D}_i^+(\ell+1,t)=\varnothing, \quad i=\overline{1,n}), \tag{4}$$

где $\mathcal{D}_i^-(\ell+1,t)=\mathcal{D}_i\cap \mathrm{H}_i^-(\ell+1,t)$, $\mathcal{D}_i^+(\ell+1,t)=\mathcal{D}_i\cap \mathrm{H}_i^+(\ell+1,t)$.

Тогда t является как ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$, так и ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $Co\mathcal{D}=Co\mathcal{D}_1\times\ldots\times Co\mathcal{D}_n$, где $\ell\in\{1,\ldots,n+2\}$.

Справедливость леммы 4 непосредственно следует из теоремы 1 п. 4.1.1 и леммы 3.

Теорема 1.

Пусть в множестве $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент t, тогда в множестве $Co\mathcal{D}=Co\mathcal{D}_1\times\ldots\times Co\mathcal{D}_n$ элемент t является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом, где $\ell=\overline{1,n+2}$.

Доказательство.

1. Пусть t является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, тогда из пункта 2 теоремы 1 п. 4.1.1 следует, что выполняется система равенств:

$$\mathcal{D}_i^-(n+3,t)=\varnothing, \quad i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Из системы равенств (5) и пункта 1 леммы 3 следует, что выполняется система соотношений:

$$Co\mathcal{D}_i\cap \mathrm{H}_i^-(n+3,t)=\varnothing, \quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Выражение (6), выражение $t\in Co\mathcal{D}$ и пункт 1 теоремы 1 п. 4.1.1 влекут справедливость утверждения: t — $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $Co\mathcal{D}$. Из последнего утверждения и леммы 1 п. 4.1.1 следует, что t является ℓ-минимальным элементом в множестве $Co\mathcal{D}$.

Таким образом, теорема 1 для случая, когда t является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$ доказана.

2. Пусть t является $(n+2)$-максимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, тогда, с учетом теоремы 2 п. 4.1.1 и пункта 3 леммы 3, доказательство теоремы 1 для этого случая проводится аналогично доказательству, изложенному в п. 1.

Теорема 1 доказана.

Лемма 5.

Для произвольно выбранного элемента h из множества $Co\mathcal{D}=Co\mathcal{D}_1\times\ldots\times Co\mathcal{D}_n$ существуют в множестве $\mathcal{D}=\mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$ такие элементы $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$, для которых справедливы выражения

$$t^{(1)} \overset{n+2}{\preccurlyeq} h, \quad t^{(2)} \overset{n+2}{\succcurlyeq} h. \tag{7}$$

Доказательство.

Пусть $h=[h_1,\ldots,h_n]$ — произвольно выбранный элемент из множества $Co\mathcal{D}$. Так как i-я компонента элемента h принадлежит множеству $Co\mathcal{D}_i$, то ее можно представить в виде

$$h_i=\mathfrak{s}_{i,1}\cdot h_i(1)+\ldots+\mathfrak{s}_{i,\nu}\cdot h_i(\nu), \tag{8}$$

где $\nu \in \mathcal{N}$, $h_i(j) \in \mathcal{D}_i$, $j = \overline{1,\nu}$, $i = \overline{1,n}$, $s_{i,j} \geqslant 0$, $j = \overline{1,\nu}$, $s_{i,1} + \ldots \ldots + s_{i,\nu} = 1$.

Образуем следующие множества:

$$T_i = \{h_i(j),\ \ j = \overline{1,\nu}\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad T = T_1 \times \ldots \times T_n. \tag{9}$$

По построению множеств T_i, $i = \overline{1,n}$, справедливы следующие выражения:

$$T_i \subset \mathcal{D}_i,\ \ i = \overline{1,n};\ \ T \subset \mathcal{D};\ \ CoT_i \subset Co\mathcal{D}_i,\ \ i = \overline{1,n};\ \ CoT \subset Co\mathcal{D};\ \ h \in CoT,$$

где CoT_i — выпуклая оболочка множества T_i, $i = \overline{1,n}$.

Из теорем 1 и 2 § 4.2 следует, что в конечном множестве T существуют $(n+2)$-минимальный элемент $t^{(1)}$ и $(n+2)$-максимальный элемент $t^{(2)}$. При этом, согласно теореме 1, $t^{(1)}$ и $t^{(2)}$ являются соответственно $(n+2)$-минимальным и $(n+2)$-максимальным элементами в множестве CoT.

Последнее утверждение, с учетом выражений $t^{(\nu)} \in \mathcal{D}$, $\nu = 1, 2$, $h \in \in CoT$, влекут справедливость выражения (7).

Лемма 5 доказана.

Теорема 2.

Пусть в множестве $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент t, тогда в множестве $\mathcal{D} = = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ существует ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент ζ, для которого выполняется соотношение $t \overset{\ell}{\asymp} \zeta$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Справедливость теоремы 2 непосредственно следует из леммы 5 и леммы 1 п. 4.1.1.

Теорема 3.

Пусть даны три множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n$, $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, которые связаны соотношениями $\mathcal{D}_i \subseteq T_i \subseteq Co\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда, если в множестве $\mathcal{D}$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент t, то он является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множествах T и $Co\mathcal{D}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

1. Пусть t является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$. Тогда из теоремы 1 следует, что этот элемент является ℓ-минимальным элементом в множестве $Co\mathcal{D}$. Учитывая равенство $CoT = Co\mathcal{D}$, где $CoT = = CoT_1 \times \ldots \times CoT_n$, и включение $\mathcal{D} \subset T$, из теоремы 2 получим, что t является ℓ-минимальным элементом в множестве T.

Таким образом, теорема 3 для случая, когда t является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, доказана.

2. Пусть t является $(n+2)$-максимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, тогда доказательство теоремы 1 для этого случая аналогично доказательству, вышеизложенному в п. 1.

Теорема 3 доказана.

Следствие 1.

Пусть даны три множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n$, $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, которые связаны соотношениями $\mathcal{D}_i \subseteq T_i \subseteq Co\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда, если в одном из множеств $\mathcal{D}$, T, $Co\mathcal{D}$ существует $(n+2)$-минимальный ($(n+2)$-максимальный) элемент, то в других множествах существует ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1,n+2}$. Причем, все ℓ-минимальные (ℓ-максимальные) элементы связаны соотношением «$\overset{\ell}{\preceq}$».

Справедливость следствия 1 непосредственно следует из теорем 1–3, если учесть, что справедливо выражение $CoT = Co\mathcal{D}$.

Следствие 2.

Пусть даны три множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n$, $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, которые связаны соотношениями $\mathcal{D}_i \subseteq T_i \subseteq Co\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, и $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$ — конечные множества.

Тогда в этих трех множествах имеется ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент ζ, где $\ell = \overline{1,n+2}$, который отыскивается процедурой 1а *(процедурой* 1б*) § 4.2, если в ней положить $\ell = n+2$.*

Справедливость следствия 2 непосредственно следует из теорем 1, 2 § 4.2 и следствия 1.

4.4. Случай III

В этом параграфе рассматривается случай, когда множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, имеет специальный вид. Показывается, что в этом случае в множестве $\mathcal{D}$ существует ℓ-минимальный элемент, где $\ell = \overline{1,n+2}$.

Введем следующие обозначения, понятия и соотношения.

1. Каждому состоянию i, где $i \in \mathrm{J}$, $\mathrm{J} = \{1,\ldots,n\}$, поставим в соответствие множество A всех двоичных векторов размерности n, за исключением нулевого вектора, т.е.

$$\mathrm{A} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{R}^n\colon x_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j > 0\}. \qquad (1)$$

Произвольный элемент множества A обозначим α_i и будем представлять в виде: $\alpha_i = [\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,n}]$, где $i = \overline{1,n}$.

2. A^n — прямое произведение n экземпляров множества A. Произвольно выбранный элемент из множества A обозначим через α и будем представлять в виде: $\alpha = [\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$, где $\alpha_i \in \mathrm{A}$, $i = \overline{1,n}$.

3. $\psi\colon \mathrm{H} \to \mathrm{A}$ — отображение, которое имеет вид: $\psi(h_i) = [\psi_1(h_i,1),\ldots,\psi_n(h_i,n)]$, где $h_i = [h_{i,1},\ldots,h_{i,n+2}]$, $h_i \in \mathrm{H}$, $h_{i,j}$ — j-я компонента элемента h_i, $j = \overline{1,n+2}$, $\psi_j(h_{i,j}) = 1$, если $h_{i,j} > 0$, $\psi_j(h_{i,j}) = 0$, если $h_{i,j} = 0$.

4. $\mathrm{H}_i(\alpha_i)$ — множество, имеющее вид

$$\mathrm{H}_i(\alpha_i) = \{h_i \in \mathrm{H}\colon \psi(h_i) = \alpha_i\}, \qquad (2)$$

где $i \in \mathrm{J}$, $\alpha_i \in \mathrm{A}$. Таким образом, множество $\mathrm{H}_i(\alpha_i)$ является множеством всех таких элементов $h_i = [h_{i,1}, \ldots, h_{i,n+2}]$ из множества H, для которых номера нулевых компонент из первых n совпадают с номерами нулевых компонент вектора $\alpha_i = [\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}]$, а номера ненулевых компонент — с номерами ненулевых компонент вектора α_i. При этом напомним, что все ненулевые компоненты элемента $h_i \in \mathrm{H}$ из первых его n компонент лежат в интервале $]0, 1]$.

Замечание 1.

Непосредственно из определения множества $\mathrm{H}_i(\alpha_i)$ следует, что оно является выпуклым множеством.

5. $$\mathrm{I}_{1,i}(\alpha_i) = \{j \in \mathrm{J}\colon \alpha_{i,j} = 1\}, \tag{3}$$

где $\alpha_{i,j}$ — j-я компонента двоичного вектора α_i, $\alpha_i \in \mathrm{A}$, $i = \overline{1, n}$.

6. $$\mathrm{I}_{2,i}(h_i) = \{j \in \mathrm{J}\colon h_{i,j} > 0\}, \tag{4}$$

где $h_{i,j}$ — j-я компонента элемента h_i, $h_i \in \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$.

7. $\mathrm{H}^n(\alpha)$ — множество, которое имеет вид: $\mathrm{H}^n(\alpha) = \mathrm{H}_1(\alpha_1) \times \ldots \ldots \times \mathrm{H}_n(\alpha_n)$, где $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $\alpha \in \mathrm{A}^n$.

Непосредственно из определений множеств A, $\mathrm{H}_i(\alpha_i)$, $\mathrm{I}_{1,i}$, $\mathrm{I}_{2,i}$, $\mathrm{H}^n(\alpha)$, где $i = \overline{1, n}$, следует справедливость следующих четырех лемм.

Лемма 1.

Для любого $i \in \mathrm{J}$ система множеств $\{\mathrm{H}_i(\alpha_i)\colon \alpha_i \in \mathrm{A}\}$ является конечным разбиением множества H, *т.е. справедливо равенство*:

$$\mathrm{H} = \sum_{\alpha_i \in \mathrm{A}} \mathrm{H}_i(\alpha_i). \tag{5}$$

Следствие 1 (очевидное).

Любое множество $\mathcal{D}_i$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, представляется в виде

$$\mathcal{D}_i = \sum_{\alpha_i \in \mathrm{A}} \mathcal{D}_i(\alpha_i) = \sum_{\alpha_i \in \mathrm{A}_i} \mathcal{D}_i(\alpha_i), \tag{6}$$

где

$$\mathrm{A}_i = \{\alpha_i \in \mathrm{A}\colon \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i(\alpha_i) \neq \varnothing\}, \quad \mathcal{D}_i(\alpha_i) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i(\alpha_i), \quad i \in \mathrm{J}. \tag{7}$$

Лемма 2.

Для любых $i \in \mathrm{J}$, $h_i \in \mathrm{H}_i(\alpha_i)$, где $\alpha_i \in \mathrm{A}$, выполняется равенство

$$\mathrm{I}_{2,i}(h_i) = \mathrm{I}_{1,i}(\alpha_i).$$

Лемма 3.

Система множеств $\{\mathrm{H}^n(\alpha)\colon \alpha \in \mathrm{A}^n\}$ является конечным разбиением множества H^n.

Л е м м а 4.

Для любого $h \in \mathrm{H}^n(\alpha)$, *где* $\alpha \in \mathrm{A}^n$, *выполняются равенства*: $\mathrm{J}_1(h, i, 1) = \mathrm{I}_{1,i}(\alpha_i)$, *где* $\mathrm{J}_1(h, i, 1)$, — *множество, определенное выражением* (1) *п. 2.2.1*, α_i — i*-я компонента элемента* α, $i = \overline{1, n}$.

Л е м м а 5.

Множество $\mathrm{H}^n(\alpha)$ *является подмножеством некоторого множества* $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$, *где* $\alpha \in \mathrm{A}^n$, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$ — *множество, определенное в выражении* (5) § 2.2.

Справедливость леммы 5 непосредственно следует из леммы 4 и теоремы 3 п. 2.2.1.

Из леммы 5 следует, что каждому элементу $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$ можно поставить в соответствие подмножество $\mathrm{A}_{\mathrm{L}} = \{\alpha \in \mathrm{A}^n\colon \mathrm{H}^n(\alpha) \subset \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}\}$, при этом справедливо следующее утверждение.

С л е д с т в и е 2.

Справедливо равенство: $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}} = \sum\limits_{\alpha \in \mathrm{A}_{\mathrm{L}}} \mathrm{H}^{(n)}(\alpha)$.

Л е м м а 6.

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, *где* $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, *таково, что справедливы выражения*

$$\mathcal{D}_i = \bigcup_{x_i \in \mathrm{X}_i} \mathcal{D}_i(x_i), \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}_i(x_i) \subset \mathrm{H} \quad \forall [i \in \mathrm{J}, \ \ x_i \in \mathrm{X}_i], \tag{9}$$

X_i — *некоторое конечное множество. Пусть, кроме того, в каждом множестве* $\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}_1(x_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(x_n)$, *где* $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $x_i \in \mathrm{X}_i$, $i = \overline{1, n}$, $x \in \mathrm{X}, \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n$, *существует* ℓ*-минимальный элемент* $t(x)$. *Тогда в множестве* $\mathcal{D}$ *также существует* ℓ*-минимальный элемент, где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образуем следующие множества:

$$T_i = \{t_i(x)\colon x \in \mathrm{X}\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

где $t_i(x)$ — i-я компонента элемента $t(x)$, $i = \overline{1, n}$, $T = T_1 \times \ldots \times T_n$.

По построению справедливы выражения

$$T_i \subset \mathcal{D}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad T \subset \mathcal{D}. \tag{11}$$

Так как множество T является конечным множеством, то из теоремы 1 § 4.2 следует, что в множестве T существует ℓ-минимальный элемент t, для которого справедливо выражение: $t \overset{\ell}{\preccurlyeq} t(x) \ \forall x \in \mathrm{X}$.

Учитывая, что из определения ℓ-минимального элемента следует справедливость выражения: $t(x) \overset{\ell}{\preccurlyeq} h \ \forall (h \in \mathcal{D}(x),\ x \in \mathrm{X})$. Из свойства транзитивности отношения «$\overset{\ell}{\preccurlyeq}$» следует, что t является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$. Лемма доказана.

Ниже излагается процедура II построения последовательности подмножеств множества $\mathcal{D}$, где $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n$.

Процедура II.

Процедура состоит из k этапов ($k \leqslant n+2$).

1. Этап 1. Строим множество $\mathcal{M}_1 = \bigcap\limits_{i \in \mathrm{J}} \mathcal{M}_1(i)$, где

$$\mathcal{M}_1(i) = \{t \in \mathcal{D}\colon \mathrm{r}_{1,i}(t) = \inf_{h \in \mathcal{D}} \mathrm{r}_{1,i}(h)\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

где $\mathrm{r}_{1,i}(h)$ — i-я компонента вектора $\mathrm{r}_1(h)$, $i = \overline{1,n}$, $\mathrm{r}_1(h)$ — стационарная характеристика однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$.

Если множество $\mathcal{M}_1$ является непустым множеством, то переходим к этапу 2; если множество $\mathcal{M}_1$ является пустым множеством, то процедуру II завершаем.

2. Этап k, $k \in \{2, \ldots, (n+2)\}$. Строим множество $\mathcal{M}_k = \bigcap\limits_{i \in \mathrm{J}} \mathcal{M}_k(i)$, где

$$\mathcal{M}_k(i) = \{t \in \mathcal{M}_{k-1}\colon w_{k-1,i}(t) = \inf_{h \in \mathcal{M}_{k-1}} w_{k-1,i}(h)\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Если множество $\mathcal{M}_k$ является непустым множеством, а $k < n+2$, то переходим к этапу $(k+1)$; если множество $\mathcal{M}_k$ является пустым множеством, либо $k = n+2$, то процедуру II завершаем.

На этом изложение процедуры II заканчиваем.

Лемма 7.

Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутое множество, для которого выполняется условие: $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$, где $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$ — множество, определенное в § 2.2, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$. Тогда, если процедуру II *применить к множеству $\mathcal{D}$, то множество $\mathcal{M}_1$, построенное на первом этапе процедуры* II, *является непустым множеством.*

Доказательство.

1. Докажем, что каждое множество $\mathcal{M}_1(i)$, определяемое выражением (12), является непустым множеством.

Из определения множества $\mathcal{D}$ следует, что справедливо выражение $\mathcal{D} \subset \subset \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$, тогда, с учетом обозначений, введенных в § 2.4, множество $\mathcal{M}_1(i)$, где $i = \overline{1,n}$, запишем в следующем виде:

$$\mathcal{M}_1(i) = \{t \in \mathcal{D}\colon \varphi_{\mathrm{L},1,i}(t) = \inf_{h \in \mathcal{D}} \varphi_{\mathrm{L},1,i}(h)\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

где $\varphi_{\mathrm{L},1,i}(h)$ — непрерывный функционал, отображающий множество $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$ в множество R^1, являющийся i-й компонентой непрерывного отображения: $\varphi_{\mathrm{L},1}(h)\colon \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}} \to \mathcal{E}^n$ (см. теорему 2 § 2.4), где $\varphi_{\mathrm{L},1}(h) = \mathrm{r}_1(h)$ для всех $h \in \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что функционал $\varphi_{\mathrm{L},1,i}(h)$, где $h \in \mathcal{D}$, достигает на замкнутом множестве $\mathcal{D}$ наименьшего значения. Следовательно, каждое множество $\mathcal{M}_1(i)$, где $i = \overline{1,n}$, является непустым замкнутым ограниченным подмножеством множества $\mathcal{D}$.

2. Докажем теперь, что множество $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(1) \cap \mathcal{M}_1(2) \cap \ldots \cap \mathcal{M}_1(n)$ является непустым замкнутым подмножеством множества $\mathcal{D}$. Выберем произвольным образом из каждого множества $\mathcal{M}_1(i)$, где $i = \overline{1,n}$, элемент $t(i)$ и образуем следующие множества

$$T_k = \{t_k(i)\colon i \in \mathrm{J}\}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{15}$$

где $t_k(i)$ — k-я компонента элемента $t(i)$, $k = \overline{1,n}$, $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, при этом справедливы выражения: $T \subset \mathcal{D}$; $T \subset \mathcal{M}_1$; $t(i) \in T, \forall\, i \in \mathrm{J}$.

Так как множество T является конечным множеством, то из теоремы 1 § 4.2 следует, что в множестве T существует $(n+2)$-элемент ζ. Из определения $(n+2)$-минимального элемента следуют отношения $\zeta \overset{n+2}{\preccurlyeq} t(i)$, $i = \overline{1,n}$, из которого следует, что справедливы равенства

$$\mathrm{r}_{1,i}(\zeta) = \min_{h \in \mathcal{D}} \mathrm{r}_{1,i}(h)\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Из системы равенств (16) и определения множества $\mathcal{M}_1$ следует, что $\mathcal{M}_1$ является непустым замкнутым подмножеством множества $\mathcal{D}$. Лемма доказана.

Лемма 8.

Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутое множество, для которого выполняется условие: $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$, где $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$ — множество, определенное в § 2.2, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$. Тогда, если процедуру II *применить к множеству $\mathcal{D}$, то множество $\mathcal{M}_k$, построенное на k-м этапе процедуры* II, *где $k \in \{2, \ldots, n+2\}$, является непустым замкнутым подмножеством множества $\mathcal{D}$.*

Доказательство.

Пусть $k = 2$. Тогда из леммы 7 следует, что множество $\mathcal{M}_1$ является непустым замкнутым подмножеством множества $\mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$. Из последнего утверждения следует, что доказательство леммы 8 для рассматриваемого случая аналогично доказательству леммы 7.

Применяя метод математической индукции, получим доказательство справедливости леммы 8 для любого элемента $k \in \{2, \ldots, n+2\}$. Лемма доказана.

Лемма 9.

Пусть $\mathcal{D}$ — замкнутое множество, для которого выполняется условие: $\mathcal{D} \subset \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$. Тогда в множестве $\mathcal{D}$ существует ℓ-минимальный элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

Из лемм 6 и 7 следует, что множество $\mathcal{M}_\ell$, построенное на ℓ-м этапе процедуры II, примененной к множеству $\mathcal{D}$, является непустым множеством, где $\ell = \overline{1, n+2}$. Пусть элемент $\zeta \in \mathcal{D}$ является элементом множества $\mathcal{M}_\ell$, тогда из определения ℓ-минимального элемента и определения множества $\mathcal{M}_\ell$ следует, что элемент ζ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$. Лемма доказана.

Теорема 1.

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i = \sum\limits_{\alpha_i \in \mathrm{A}_i} \mathcal{D}_i(\alpha_i)$, A_i, $\mathcal{D}_i(\alpha_i)$ — множества, определенные в выражениях (6) *и* (7), *таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i(\alpha_i)$, где $\alpha_i \in \mathrm{A}_i$, $i = \overline{1,n}$, является замкнутым множеством. Тогда в множестве $\mathcal{D}$ существует ℓ-минимальный элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.*

Доказательство.

Определим следующую систему множеств:

$$\mathcal{D}(\alpha) = \mathcal{D}_1(\alpha_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\alpha_n), \quad \alpha \in \mathrm{B}_1, \tag{17}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in \mathrm{A}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n$.

Так как из леммы 5 следует, что справедливо выражение $\mathcal{D}(\alpha) \subset \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}$, где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, то из леммы 9 следует, что в каждом множестве $\mathcal{D}(\alpha)$, где $\alpha \in \in \mathrm{B}_1$, существует ℓ-минимальный элемент. Тогда из леммы 6 следует, что в множестве $\mathcal{D}$ также существует ℓ-минимальный элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Теорема доказана.

Теорема 2.

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i = \sum\limits_{\alpha_i \in \mathrm{A}_i} \mathcal{D}_i(\alpha_i)$, таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i(\alpha_i)$, где $\alpha_i \in \mathrm{A}_i$, $i = \overline{1, n}$, является замкнутым множеством. Тогда в множестве $\mathcal{D}$ существует ℓ-максимальный элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 и поэтому в данной работе не приводится.

Теперь рассмотрим одно приложение теорем 1 и 2, используемое в дальнейших параграфах работы.

Введем следующие обозначения и определения.

1. $\mathrm{H}_i(\delta, \alpha_i)$ — множество, имеющее вид

$$\mathrm{H}_i(\delta, \alpha_i) = \{h_i \in \mathrm{H}_i(\alpha_i)\colon h_{i,j} \geqslant \delta \quad \forall\, j \in \mathrm{I}_{1,i}(\alpha_i)\}, \tag{18}$$

где $i \in \mathrm{J}$, $\alpha_i \in \mathrm{A}$, $\delta \in]0, 1]$, $h_{i,j}$ — j-я компонента элемента h_i, $j = \overline{1, n+2}$, называется δ-усечением множества $\mathrm{H}_i(\alpha_i)$. Таким образом, $\mathrm{H}_i(\delta, \alpha_i)$ представляет собой множество всех таких элементов $h_i \in \mathrm{H}$, для которых нулевые компоненты из первых n совпадают с соответствующими нулевыми компонентами вектора $\alpha_i = [\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}]$, а все остальные компоненты из первых n лежат в интервале $[\delta, 1]$, где $\delta \in]0, 1]$.

2. Пусть имеется множество $\mathcal{D}_i$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i \in \mathrm{J}$. Тогда множество $\mathcal{D}_i(\delta)$, имеющее вид

$$\mathcal{D}_i(\delta) = \sum_{\alpha_i \in \mathrm{A}} \mathcal{D}_i(\delta, \alpha_i), \tag{19}$$

где $\mathcal{D}_i(\delta, \alpha_i) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i(\delta, \alpha_i)$, называется δ-усечением множества $\mathcal{D}_i$.

3. Пусть имеется множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда множество $\mathcal{D}(\delta)$, имеющее вид

$$\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}_1(\delta) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\delta), \tag{20}$$

где $\mathcal{D}_i(\delta)$ — δ-усечение множества $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, называется δ-усечением множества $\mathcal{D}$.

Непосредственно из определений множеств $\mathrm{H}_i(\delta, \alpha_i)$, $\mathcal{D}_i(\delta)$, $\mathcal{D}(\delta)$ следует справедливость следующих трех лемм.

Л е м м а 10.

Для любых $\delta \in]0,1]$, $i \in \mathrm{J}$ *множества* $\mathrm{H}_i(\delta, \alpha_i)$, $\alpha_i \in \mathrm{A}$, *являются попарно непересекающимися замкнутыми множествами.*

Л е м м а 11.

Для любых $i \in \mathrm{J}$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любого* $\delta \in]0,1]$, *множества* $\mathcal{D}_i(\delta, \alpha_i)$, $\alpha_i \in \mathrm{A}$ *являются попарно непересекающимися множествами, а в случае, когда* $\mathcal{D}_i$ *— замкнутое множество, — непересекающимися замкнутыми множествами.*

2. *Если* $\mathcal{D}_i$ *— замкнутое множество, то для любого* $\delta \in]0,1]$ δ*-усечение множества* $\mathcal{D}_i$, *т.е. множество* $\mathcal{D}_i(\delta)$, *является замкнутым множеством.*

3. *Выполняются равенства*

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{D}_i(\delta, \alpha_i) = \mathcal{D}_i(\alpha_i), \quad \lim_{\delta \to 0} \mathcal{D}_i(\delta) = \mathcal{D}_i. \tag{21}$$

4. *Для любого* $h_i \in \mathcal{D}_i$ *существует такое* $\delta(h_i) > 0$, *что справедливо выражение*

$$h_i \in \mathcal{D}_i(\delta(h_i)).$$

Л е м м а 12.

Для любого $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, *где* $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняется равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}, \tag{22}$$

где $\mathcal{D}(\delta)$ *—* δ*-усечение множества* $\mathcal{D}$.

2. *Для любого* $h \in \mathcal{D}$ *существует такое* $\delta(h) > 0$, *что справедливо выражение:* $h \in \mathcal{D}(\delta(h))$.

3. *Пусть* $\mathcal{D}$ *— непустое множество. Тогда существует такое* $\delta_0 \in]0,1]$, *что для любого* $\delta \in]0, \delta_0]$ δ*-усечение множества* $\mathcal{D}$ *также является непустым множеством, т.е.* $\mathcal{D}(\delta) \neq \varnothing$.

Т е о р е м а 3.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ *— непустое замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *В любом непустом* δ*-усечении множества* $\mathcal{D}$, *т.е. в множестве* $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}_1(\delta) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\delta)$, *существует* ℓ*-минимальный элемент* $t(\delta)$, *где* $\delta \in]0,1]$, $\ell = \overline{1, n+2}$. *При этом выполняются соотношения*

$$\mathcal{D}_i(\delta) \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t(\delta)) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{23}$$

$$\lim_{\delta \to 0} [\mathcal{D}_i(\delta) \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t(\delta))] = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{24}$$

где $\mathrm{H}_i^-(n+3, \cdot)$ *— множество, определенное выражением* (11) § 3.2.

2. *Существуют такие последовательности* $p_1 = \{\delta_\nu, \nu = \overline{1,\infty}\}$ *и* $\eta_1 = \{t^{(\nu)}, \nu = \overline{1,\infty}\}$, *где* p_1 *— последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю,* $\eta_1 \subset \mathcal{D}$, $t^{(\nu)} = t(\delta_\nu)$ *—* ℓ*-минимальный элемент*

в множестве $\mathcal{D}(\delta_\nu)$, $\ell = \overline{1, n+2}$, $\nu = \overline{1, \infty}$, для которых выполняются соотношения:

$$\mathcal{D}_i(\delta_\nu) \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t^{(\nu)}) = \varnothing, \quad i = \overline{1, n}, \tag{25}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} [\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t^{(\nu)})] = \varnothing, \quad i = \overline{1, n}, \tag{26}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} t^{(\nu)} = \zeta, \tag{27}$$

где $\mathcal{D}_i(\delta_\nu)$ — i-я компонента множества $\mathcal{D}(\delta_\nu)$, $\zeta \in \mathcal{D}$.

Доказательство.

Из следствия 1 имеем: множество $\mathcal{D}_i(\delta)$ можно представить в виде, определяемом выражением (19), т.е.

$$\mathcal{D}_i(\delta) = \sum_{\alpha_i \in \mathrm{A}} \mathcal{D}_i(\delta, \alpha_i), \quad \text{где} \quad i \in \mathrm{J}.$$

Поэтому из условия настоящей леммы и из леммы 11 следует, что множества $\mathcal{D}_i(\delta, \alpha_i)$, $\mathcal{D}_i(\delta)$, где $\alpha_i \in \mathrm{A}$, $i \in \mathrm{J}$, являются замкнутыми множествами. Таким образом, выполняются условия теоремы 1, из которой следует, что в любом непустом множестве $\mathcal{D}(\delta)$ имеется ℓ-минимальный элемент $t(\delta)$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Полагая $\ell = n + 2$ и принимая во внимание теорему 1 § 4.1, получаем выполнение соотношений (23).

Представим множество $\mathcal{D}_i$ в виде суммы

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i(\delta) + \Delta_i(\delta), \tag{28}$$

где $\Delta_i(\delta) = \mathcal{D}_i \backslash \mathcal{D}_i(\delta), i = \overline{1, n}$, и рассмотрим множество $\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t(\delta))$, которое с учетом (28) и (23) имеет вид

$$\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t(\delta)) = \Delta_i(\delta) \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t(\delta)). \tag{29}$$

Из выражения (21) следует, что выполняются равенства

$$\lim_{\delta \to 0} \Delta_i(\delta) = \varnothing, \quad i = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Выражения (29) и (30) влекут справедливость соотношений (24).

Утверждение пункта 1 леммы 13 доказано.

2. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_m, m = \overline{1, \infty}\}$, где $\varepsilon_m = m^{-1}$. Из леммы 12 (пункт 3) следует, что существует такое целое положительное число $m_0 > \delta_0^{-1}$, для которого справедливо выражение

$$\mathcal{D}(\varepsilon_m) \neq \varnothing \quad \forall\, m \in \{m_0, m_0 + 1, \ldots\}, \tag{31}$$

где $\mathcal{D}(\varepsilon_m)$ — ε_m-усечение множества $\mathcal{D}$.

Если сформировать последовательности $p_1 = \{\delta_\nu, \nu = \overline{1, \infty}\}$ и $\eta_1 = \{t^{(\nu)}, \nu = \overline{1, \infty}\}$, где $\delta_\nu = \varepsilon_{m_0 + \nu}$, $t^{(\nu)} = t(\delta_\nu)$, то из утверждения пункта 1 настоящей теоремы следует справедливость выражений (25) и (26).

По определению, H^n — ограниченное множество, следовательно и последовательность $\eta_1 \subset \mathrm{H}^n$ — ограниченная последовательность. Поэтому, в силу леммы Больцано–Вейерштрассе, из последовательности η_1 можно выбрать сходящуюся подпоследовательность η_2 (чтобы не усложнять обозначений положим $\eta_1 = \eta_2$), т.е. $\lim\limits_{\nu\to\infty} t^{(\nu)} = \zeta$. Понятно, что в силу замкнутости множества $\mathcal{D}$ справедливо выражение $\zeta \in \mathcal{D}$.

Теорема 3 доказана.

Теорема 4.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ — непустое замкнутое множество. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *В любом непустом δ-усечении множества $\mathcal{D}$, т.е. в множестве $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{D}_1(\delta) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\delta)$, существует ℓ-максимальный элемент $t(\delta)$, где $\delta \in]0, 1]$, $\ell = \overline{1, n+2}$. При этом выполняются соотношения*

$$\mathcal{D}_i(\delta) \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, t(\delta)) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n} \tag{32}$$

$$\lim_{\delta\to 0}[\mathcal{D}_i(\delta) \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, t(\delta))] = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{33}$$

где $\mathrm{H}_i^+(n+3,\cdot)$ — множество, определенное выражением (15) § 3.2.

2. *Существуют такие последовательности $p_1 = \{\delta_\nu,\ \nu = \overline{1,\infty}\}$ и $\mathcal{P}_1 = \{t^{(\nu)},\ \nu = \overline{1,\infty}\}$, где p_1 — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{D}$, $t^{(\nu)} = t(\delta_\nu)$ — ℓ-максимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(\delta_\nu)$, $\ell = \overline{1, n+2}$, $\nu = \overline{1,\infty}$, для которых выполняются соотношения*

$$\mathcal{D}_i(\delta_\nu) \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, t^{(\nu)}) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{34}$$

$$\lim_{\nu\to\infty}[\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, t^{(\nu)})] = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{35}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} t^{(\nu)} = \zeta, \tag{36}$$

где $\zeta \in \mathcal{D}$.

Доказательства теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3 и поэтому в данной работе не приводится.

Замечание 2. Из теоремы 3 (теоремы 4) в общем случае не следуют равенства

$$\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, \zeta) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{37}$$

$$(\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, \zeta) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}), \tag{38}$$

которые влекут справедливость следующего утверждения: ζ является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Следующий пример показывает, что в замкнутом множестве $\mathcal{D}$ может не существовать даже 1-минимального элемента.

Пример.

Рассмотрим множества $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, 3$, имеющие вид

$$\mathcal{D}_1 = \{[h_{1,1}, \ldots, h_{1,5}]\colon h_{1,2} = \alpha,\ h_{1,3} = \alpha^2,\ \alpha \in [0, 0, 5];\ h_{1,4} - c \cdot h_{1,5} = 7\}, \tag{39}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{[h_{2,1}, \ldots, h_{2,5}]\colon h_{2,2} = 1,\ \ h_{2,4} - c \cdot h_{2,5} = 3\}, \tag{40}$$

$$\mathcal{D}_3 = \{[h_{3,1}, \ldots, h_{3,5}]\colon h_{3,3} = 1, h_{3,4} - c \cdot h_{3,5} = 5\}. \tag{41}$$

При этом множество $\mathcal{D}$ имеет вид: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$; произвольный элемент h из множества $\mathcal{D}$ представляется выражением: $h = [h_1, h_2, h_3]$, где $h_i = [h_{i,1}, \ldots, h_{i,5}]$, $i = \overline{1, 3}$. Матрица $\mathrm{P}(h)$ переходных вероятностей для любого $h \in \mathcal{D}$ записывается в виде

$$\mathrm{P}(h) = \mathrm{P}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha - \alpha^2, & \alpha, & \alpha^2 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Вектор приведенного дохода ρ(h)=ρ(h, c) записывается в виде

$$\rho(h) = [7, 3, 5]^{\mathrm{T}}. \tag{43}$$

Матрица $\pi(h)$ финитных вероятностей, построенная по матрице $\mathrm{P}(h)$ в соответствии с алгоритмом п. 3.3.1, имеет вид

$$\pi(h) = \begin{bmatrix} 0 & (1+\alpha)^{-1} & \alpha \cdot (1+\alpha)^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Таким образом, вектор $\tau_1(h) = \pi(h)\rho(h)$, с учетом выражений (43), (44) является функцией $\alpha \in [0, 0, 5]$ и записывается следующим образом:

$$\tau_1(h) = \tau(\alpha) = \left[\frac{3}{1+\alpha} + \frac{5\alpha}{1+\alpha}, 3, 5\right]^{\mathrm{T}}. \tag{45}$$

Из выражения (45) следует, что

$$\inf\{\tau_1(h)\colon h \in \mathcal{D}\} = \inf\{\tau(\alpha)\colon \alpha \in [0, 0, 5]\} = \lim_{\alpha \to 0} \tau(\alpha) = \tau(0) = [3, 3, 5]^{\mathrm{T}}. \tag{46}$$

Однако элемент h_0, соответствующий значению $\alpha = 0$, таков, что

$$\mathrm{P}(h_0) = \pi(h_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Из выражения (47) и того, что $\rho(h_0) = \rho(h) = [7, 3, 5]^{\mathrm{T}}$, следует, что вектор $\tau_1(h_0)$ имеет вид

$$\tau_1(h_0) = \pi(h_0)\rho(h_0) = [7, 3, 5]^{\mathrm{T}}. \tag{48}$$

Из выражений (46) и (48) следует, что выполняется неравенство

$$\mathfrak{r}_1(h_0) > r(0), \tag{49}$$

т.е. в рассматриваемом множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$ не существует 1-минимального элемента.

4.5. Случай IV

В этом параграфе рассматривается случай, когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ является замкнутым множеством, в котором существует элемент h, обладающий свойством B: множество J состояний однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$ образует один класс возвратных сообщающихся состояний. Показывается, что в этом случае в множестве $\mathcal{D}$ имеется 1-минимальный (1-максимальный) элемент ζ, для которого выполняется соотношение: $\mathfrak{r}_{1,1}(\zeta) = \ldots = \mathfrak{r}_{1,n}(\zeta)$, где $\mathfrak{r}_{1,i}(\zeta)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(\zeta)$, $i = \overline{1,n}$. Показывается также, что в том случае, когда в множестве $\mathcal{D}$ отсутствуют элементы, для которых соответствующие однородные КМЦД имеют непустые множества невозвратных состояний, в этом множестве $\mathcal{D}$ имеется ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Пусть имеется замкнутое множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, в котором существует элемент h, обладающий свойством B: множество J состояний однородной КМЦД $\xi_0(a, h)$ является одним классом возвратных сообщающихся состояний. Тогда по теореме 3 § 4.4 существуют последовательности $p_1 = \{\delta_\nu,\ \nu = \overline{1,\infty}\}$ и $\mathcal{P}_1 = \{t^{(\nu)},\ \nu = \overline{1,\infty}\}$, для которых выполняются соотношения

$$\mathcal{D}_i(\delta_\nu) \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t^{(\nu)}) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} [\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(n+3, t^{(\nu)})] = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} t^{(\nu)} = \zeta, \tag{3}$$

где $\delta_\nu > 0$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \delta_\nu = 0$, $t^{(\nu)}$ — ℓ-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(\delta_\nu)$, $\mathcal{D}(\delta_\nu) = \mathcal{D}_1(\delta_\nu) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\delta_n)$ — δ_ν-усечение множества $\mathcal{D}$, $\ell = \overline{1, n+2}$, $\zeta \in \mathcal{D}$, $\mathrm{H}_i^-(n+3, \cdot)$ — множество, определенное выражением (11) § 3.2.

Изложим процедуру I, которая позволяет построить последовательность $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)},\ \nu = \overline{1,\infty}\}$, где $h^{(\nu)} \in \mathcal{D}$, $\nu = \overline{1,\infty}$, обладающую рядом замечательных свойств.

Процедура I применяется к последовательности $\mathcal{P}_1$ и состоит из следующей последовательности действий.

1. Из последовательности $\mathcal{P}_1$ выбирается подпоследовательность $\mathcal{P}_2 = \{\zeta^{(\nu)},\ \nu = \overline{1,\infty}\}$, где $\zeta^{(\nu)} = t^{(\nu(1)+\nu)}$, $\nu = \overline{1,\infty}$, $\nu(1)$ — натуральное число, для которого справедливо выражение

$$\zeta \in \mathcal{D}(\delta_{\nu(1)}), \quad h \in \mathcal{D}(\delta_{\nu(1)}). \tag{4}$$

2. Последовательность $\mathcal{P}_2$ преобразуется в последовательность $\mathcal{P}_3 = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1,\infty}\}$ по следующему правилу:

а) $h_i^{(\nu)} = \zeta_i$, если $\zeta_i \in \mathcal{D}_i^0(n+3, \zeta^{(\nu)})$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{1,\infty}$;

б) $h_i^{(\nu)} = \zeta_i^{(\nu)}$, если $\zeta_i \notin \mathcal{D}_i^0(n+3, \zeta^{(\nu)})$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{1,\infty}$,

где ζ_i — i-я компонента элемента ζ, $\zeta_i^{(\nu)}$ — i-я компонента элемента $\zeta^{(\nu)}$, $\mathcal{D}_i^0(n+3, \zeta^{(\nu)}) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^0(n+3, \zeta^{(\nu)})$, $\mathrm{H}_i^0(n+3, \cdot)$ — множество, определенное в (12) § 3.2.

3. Из последовательности $\mathcal{P}_3$ выбирается последовательность $\mathcal{P}$, обладающая свойством

$$\mathcal{P} \subset \mathrm{H}^n(\alpha), \tag{5}$$

где $\alpha \in \mathrm{A}^n$, A^n, $\mathrm{H}^n(\alpha)$ — множества, определенные в § 4.4. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3$, т.е. $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1,\infty}\}$.

Построением последовательности $\mathcal{P}$ процедура I заканчивается.

Из лемм 3 и 12 § 4.4 следует, что процедура I корректна, т.е. в результате ее осуществления последовательность $\mathcal{P}_1$ всегда трансформируется в последовательность $\mathcal{P}$.

Следующая лемма устанавливает некоторые свойства последовательности $\mathcal{P}$.

Лемма 1.

Пусть имеется замкнутое множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, в котором существует элемент h, обладающий свойством B.

Тогда для последовательности $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1,\infty}\}$, полученной в результате осуществления процедуры I, *справедливы следующие утверждения.*

1. *Выполняются соотношения*

$$h^{(\nu)} \overset{\ell}{\precsim} \zeta^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{1,\infty}, \tag{6}$$

где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\zeta^{(\nu)} \in \mathcal{P}_2$, $\nu = \overline{1,\infty}$.

2. *Существует такая последовательность $p = \{\delta_\nu, \nu = \overline{1,\infty}\}$ положительных чисел, сходящаяся к нулю, для которой $h^{(\nu)} \in \mathcal{P}$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}(\delta_\nu)$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\mathcal{D}(\delta_\nu)$ — δ_ν-усечение множества $\mathcal{D}$.*

3. *Для любого ν, где $\nu = \overline{1,\infty}$, справедливы выражения*

$$h^{(\nu)} \in \mathrm{H}_{\mathrm{L}}^n, \tag{7}$$

$$n(h^{(\nu)}) = n(\alpha), \tag{8}$$

$$\mathrm{J}_k(h^{(\nu)}) = \mathrm{J}_k(\alpha), \quad k = \overline{0, n}(\alpha), \tag{9}$$

где $\mathrm{H}_{\mathrm{L}}^n$ — множество, определенное в выражении (5) § 2.2, $\alpha \in \mathrm{A}^n$, $n(h^{(\nu)})$ — число классов возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД *$\xi_0(a, h^{(\nu)})$, $\mathrm{J}_k(h^{(\nu)})$ — k-й класс возвратных сообщающихся* *состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$, $n = \overline{1, n(\alpha)}$, $\mathrm{J}_0(h^{(\nu)})$ — *класс невозвратных состояний однородной* КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$.

4. *Справедливы выражения*

$$\lim_{\nu\to\infty} h^{(\nu)} = \zeta, \tag{10}$$

$$\zeta \in \mathcal{D}(\delta_\nu), \quad h \in \mathcal{D}(\delta_\nu), \quad \nu = \overline{1, \infty}, \tag{11}$$

$$h^{(\nu+1)} \overset{n+2}{\preccurlyeq} h^{(\nu)}, \tag{12}$$

$$h^{(\nu)} \overset{n+2}{\preccurlyeq} \zeta, \quad h^{(\nu)} \overset{n+2}{\preccurlyeq} h, \tag{13}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_m(h^{(k)}, h^{(\nu)}) = x_m(\zeta, h^{(\nu)}), \quad m = \overline{1, n+3}, \tag{14}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{r}_1(h^{(\nu)}) = r(1), \tag{15}$$

$$\zeta_i \in [\mathcal{D}_i^0(n+3, h^{(\nu)}) + \mathcal{D}_i^+(n+3, h^{(\nu)})], \quad i = \overline{1, n}, \tag{16}$$

$$h_i \in [\mathcal{D}_i^0(n+3, h^{(\nu)}) + \mathcal{D}_i^+(n+3, h^{(\nu)})], \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где $\nu = \overline{1, \infty}$, $r(1) = [r_1(1), \ldots, r_n(1)]^T$, $r_i(1) = \inf\{r_{1,i}(t)\colon t \in \mathcal{D}\}$, $i = \overline{1, n}$, $x_m(\cdot)$, $m = \overline{1, n+3}$ — *векторы, определенные выражениями* (6)–(8) § 4.2, $\mathcal{D}_i^0(n+3, h^{(\nu)}) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^0(n+3, h^{(\nu)})$, $\mathcal{D}_i^+(n+3, h^{(\nu)}) = \mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, h^{(\nu)})$, $\mathrm{H}_i^0(n+3, h^{(\nu)})$, $\mathrm{H}_i^+(n+3, h^{(\nu)})$ — *множества, определенные выражениями* (12), (15) § 3.2, ζ_i, h_i — *соответствующие компоненты элементов* ζ *и* h.

5. *Справедливы выражения*:

$$\mathfrak{r}_{1,1}(h^{(\nu)}) = \mathfrak{r}_{1,2}(h^{(\nu)}) = \ldots = \mathfrak{r}_{1,n}(h^{(\nu)}), \tag{18}$$

$$x_1(t, h^{(\nu)}) = 0 \quad \forall\, t \in \mathcal{D}, \tag{19}$$

$$r_1(1) = r_2(1) = \ldots = r_n(1), \tag{20}$$

где $\nu = \overline{1, \infty}$, $\mathfrak{r}_{1,i}(h^{(\nu)})$ — *i-я компонента вектора* $\mathfrak{r}_1(h^{(\nu)})$.

6. *Если для некоторых i и ν выполняется система равенств*

$$x_{k,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{21}$$

где $i \in \mathrm{J}$, $\nu = \overline{1, \infty}$, $m \in \{1, \ldots, n+2\}$, ζ_i — *i-я компонента элемента* ζ, $x_{k,i}(\cdot)$ — *i-я компонента вектора* $x_k(\cdot)$, *то выполняется либо система равенств*

$$x_{k,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) = 0, \quad k = \overline{1, m+1}, \tag{22}$$

либо система соотношений

$$\begin{cases} x_{k,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) = 0, & k = \overline{1, m}, \\ x_{m+1,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) > 0. \end{cases} \tag{23}$$

7. *Если для любого ν, где $\nu = \overline{1,\infty}$ выполняется система равенств*

$$x_{m,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) = 0, \quad m = \overline{1, n+3}, \tag{24}$$

то справедливо выражение

$$h_i^{(\nu)} = \zeta_i \quad \text{где} \quad \nu = \overline{1,\infty}, \quad i \in \mathrm{J} \tag{25}$$

Доказательство.

1. Из определения последовательностей $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}$ и теоремы 4 § 3.2 следует, что выполняются равенства

$$h^{(\nu)} \overset{n+2}{\simeq} \zeta^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{1,\infty}, \tag{26}$$

где $h^{(\nu)} \in \mathcal{P}$, $\zeta^{(\nu)} \in \mathcal{P}_2$.

Равенства (26) и лемма 2 § 3.2 влекут справедливость соотношений (6).

2. Последовательность $p = \{\delta_\nu, \nu = \overline{1,\infty}\}$ является подпоследовательностью, выбранной из p_1. При этом номера членов последовательности p определяются выражением $\nu = \nu(1) + k$, где $k = \overline{1,\infty}$, $\nu(1)$ — число, определенное в пункте 1 процедуры I. Понятно, что по построению элемент $h^{(\nu)} \in \mathcal{P}$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}(\delta_\nu)$, где $\delta_\nu \in p_1$, $\delta_\nu \in p$, $\nu = \overline{1,\infty}$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

3. Выражение (7) является непосредственным следствием выражения (5).

Выражение (7) и лемма 5 § 4.4 влекут справедливость утверждения: существует такое множество H^n_L, для которого справедливо выражение

$$h^{(\nu)} \in \mathrm{H}^n_\mathrm{L}, \quad \nu = \overline{1,\infty}, \tag{27}$$

где H^n_L — множество, определенное в § 2.2.

Из выражения (27) и определения множества H^n_L следует справедливость выражений (8) и (9).

4. Выражения (10) и (11) являются прямым следствием правила формирования последовательности $\mathcal{P}$.

Выражение (12) непосредственно следует из включений

$$\mathcal{D}(\delta_\nu) \subset \mathcal{D}(\delta_{\nu+1}), \quad \nu = \overline{1,\infty}.$$

Выражение (13) следует из выражения (11) и содержания пункта 2 настоящей леммы.

Из определения векторов $x_m(\cdot,\cdot)$, $m = \overline{1, n+3}$ следует, что отображение $x_m(\cdot, h^{(\nu)})$: $\mathrm{H}^n \to \mathcal{E}^n$ является непрерывным отображением на множестве H^n, где $\nu = \overline{1,\infty}$. Последнее утверждение и выражение (10) влекут справедливость выражения (14).

Равенство (15) является следствием выражения (12) и леммы 12 (пункт 1) § 4.4.

Доказательство справедливости выражения (16) проведем от противного. Предположим, что существует такое состояние $i(0)$, для которого выполняется свойство

$$\zeta_{i(0)} \in \mathcal{D}^{-}_{i(0)}(n+3, h^{(\nu)}). \tag{28}$$

Тогда сформируем элемент t следующим образом:

$$\text{а)}\ t_{i(0)} = \zeta_{i(0)}; \qquad \text{б)}\ t_i = h_i^{(\nu)},\ \text{ если }\ i \in \mathrm{J}\backslash\{i(0)\}.$$

Из способа построения элемента t следует, что $t \in \mathcal{D}(\delta_\nu)$, а из теоремы 2 § 3.2 — $t \overset{n+2}{\prec} h^{(\nu)}$. Последнее соотношение противоречит тому, что $h^{(\nu)}$ является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}(\delta_\nu)$. Указанное противоречие доказывает справедливость выражения (16).

Справедливость выражения (17) доказывается по схеме, аналогичной схеме доказательства выражения (16).

5. Справедливость соотношения (18) докажем от противного. Предположим, что оно не выполняется. Тогда существует такое непустое множество $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}$, для которого справедливы выражения

$$\mathfrak{r}_{1,j}(h^{(\nu)}) < \mathfrak{r}_{1,i}(h^{(\nu)}) \quad \forall\, [j \in \mathrm{J}_1, \quad i \in \mathrm{J}\backslash \mathrm{J}_1], \tag{29}$$

где $\nu = \overline{1, \infty}$.

Поскольку множество состояний J однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$ образует один класс сообщающихся состояний, то в этом множестве существует такое состояние i, для которого выполняется, с учетом выражения (29), неравенство

$$p_i(h_i) \cdot \mathfrak{r}_1(h^{(\nu)}) - \mathfrak{r}_{1,i}(h^{(\nu)}) < 0, \tag{30}$$

где $p_i(h_i)$ — стохастический вектор, являющийся i-й строкой стохастической матрицы $\mathrm{P}(h)$.

Неравенство (30) влечет справедливость выражения $h_i \in \mathcal{D}^{-}_i(n+3, h^{(\nu)})$, которое противоречит выражению (17). Указанное противоречие доказывает соотношение (18).

Справедливость выражения (19) непосредственно следует из соотношения (18) и определения вектора $x_1(t, h^{(\nu)})$.

Равенства (20) являются следствием выражений (18) и (15).

6. Справедливость утверждения п. 6 настоящей леммы непосредственно следует из выражения (16) и определения множеств $\mathcal{D}^0_i(n+3, h^{(\nu)})$, $\mathcal{D}^+_i(n+ + 3, h^{(\nu)})$.

7. Система равенств (24) эквивалентна выражению $\zeta_i \in \mathcal{D}^0_i(n+3, h^{(\nu)})$. Так как из соотношения (26) следует выполнение равенства $\mathcal{D}^0_i(n+3, h^{(\nu)}) = = \mathcal{D}^0_i(n+3, \zeta^{(\nu)})$, то справедливость выражения (26) следует из пункта 2 процедуры I.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2.

Пусть выполняются условия леммы 1 *и последовательность* $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1,\infty}\}$, *построенная процедурой* I, *является стационарной последовательностью, т.е. выполняется система равенств*

$$h^{(\nu)} = \zeta, \quad \nu = \overline{1,\infty}, \ \text{где} \ \zeta \in \mathcal{D}. \tag{31}$$

Тогда ζ *является* $(n+2)$-*минимальным элементом в множестве* $\mathcal{D}$.

Доказательство леммы проведем от противного. Предположим, что ζ не является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$. Тогда в $\mathcal{D}$ существует элемент t, для которого справедливо утверждение A: соотношение $\zeta \overset{n+2}{\preccurlyeq} t$ не выполнястся. Однако по лемме 12 (пункт 2) § 5.4 существует такой номер ν, для которого справедливо выражение $t \in \mathcal{D}(\delta_\nu)$, где $\mathcal{D}(\delta_\nu)$ — δ_ν-усечение множества $\mathcal{D}$. Из этого выражения следует, что

$$h^{(\nu)} \overset{n+2}{\preccurlyeq} t, \tag{32}$$

где $h^{(\nu)} \in \mathcal{P}$. Выражение (32), с учетом (31), противоречит утверждению A. Указанное противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3.

Пусть выполняются условия леммы 1. *Тогда последовательность* $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1,\infty}\}$, *обладает свойством: для любых* $\mu \in \mathcal{N}$, $\nu \in \mathcal{N}$, $m \in \{2, \ldots, n+3\}$, $i \in \mathrm{J}(\alpha)$, *где* $\mathrm{J}(\alpha) = \mathrm{J}_1(\alpha) + \ldots + \mathrm{J}_{n(\alpha)}(\alpha)$, $\mathrm{J}_k(\alpha)$, $k = \overline{1, n}(\alpha)$, — *множества, определенные выражением* (9), $\mathcal{N}$ — *множество гатуральных чисел, выполняются следующие системы равенств*:

$$x_1(\zeta, h^{(\nu)}) = 0, \tag{33}$$

$$x_{k,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) = 0, \quad k = \overline{2,m}, \tag{34}$$

$$x_1(h^{(\mu)}, h^{(\nu)}) = 0, \tag{35}$$

$$x_{k,i}(h_i^{(\mu)}, h^{(\nu)}) = 0, \quad k = \overline{2,m}, \tag{36}$$

где ζ_i, $h_i^{(\mu)}$ — i-*е компоненты элементов соответственно* ζ, $h^{(\nu)}$, $x_{k,i}(\cdot)$ — i-*я компонента вектора* $x_k(\cdot)$, $x_k(\cdot)$, $k = \overline{1, n+3}$ — *векторы, определенные выражениями* (6)–(8) § 3.2, $m = \overline{2, n+3}$.

Доказательство.

1. Пусть $m = 2$. Тогда равенства (33), (35) являются следствием выражения (19).

Покажем теперь, что для любых $\mu \in \mathcal{N}$, $\nu \in \mathcal{N}$, $i \in \mathrm{J}(\alpha)$ выполняются равенства

$$x_{2,i}(h_i^{(\mu)}, h^{(\nu)}) = 0, \quad x_{2,i}(\zeta_i, h^{(\nu)}) = 0. \tag{37}$$

Из выражения (7) п. 3.3.2 с учетом равенства (35), следует соотношение

$$\mathfrak{r}_1(h^{(\mu)}) = \mathfrak{r}_1(h^{(\nu)}) + \sum_{k=1}^{n(\alpha)} E_k(\alpha) \cdot \pi(h^{(\mu)}) \cdot x_2(h^{(\mu)}, h^{(\nu)}), \tag{38}$$

где $E_k(\alpha) = E_k(h^{(\mu)})$ — матрица, определенная в п. 3.3.1, $\pi(h^{(\mu)})$ — стохастическая матрица финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a, h^{(\mu)})$, $\mu = \overline{1,\infty}$, $\nu = \overline{1,\infty}$. Возьмем предел при $\mu \to \infty$ от левой и правой частей равенства (38). При этом, учитывая соотношения (14), (15) и теорему 1 § 2.4, получаем равенство

$$r(1) = \mathrm{r}_1(h^{(\nu)}) + \sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi \cdot x_2(\zeta, h^{(\nu)}), \tag{39}$$

где π — стохастическая матрица. Из выражения (33) и содержания пункта 6 леммы 1, где $m = 1$, следует, что для вектора $x_2(\zeta, h^{(\nu)})$ выполняется неравенство $x_2(\zeta, h^{(\nu)}) \geqslant 0$. Из этого неравенства и равенства (39) следует, что $r(1) \geqslant \mathrm{r}_1(h^{(\nu)})$. Последнее соотношение и определение вектора $r(1)$ влекут справедливость системы равенств

$$\mathrm{r}_1(h^{(\nu)}) = r(1), \quad \nu = \overline{1,\infty}, \tag{40}$$

из которой, с учетом выражения (38), следует, что для любых $\mu \in \mathcal{N}$, $\nu \in \mathcal{N}$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi(h^{(\mu)}) \cdot x_2(h^{(\mu)}, h^{(\nu)}) = 0. \tag{41}$$

Равенство (41) эквивалентно следующему равенству:

$$\sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi(h^{(\mu)}) \cdot \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot x_2(h^{(\mu)}, h^{(\nu)}) = 0. \tag{42}$$

Предположим, что существуют такие номера μ, ν, k, для которых вектор $\mathrm{E}_k(\alpha) \cdot x_2(h^{(\mu)},\ h^{(\nu)}) \neq 0$. Тогда из выражения (42) следует, что в множестве $\mathrm{J}_k(\alpha)$, где $\mathrm{J}_k(\alpha)$ — k-й класс возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД $\xi_0(a, h^{(\mu)})$, существует непустое подмножество $\mathrm{J}(0)$, для которого выполняется система неравенств

$$x_{2,i}(h_i^{(\mu)}, h^{(\nu)}) < 0 \quad \forall\, i \in \mathrm{J}(0), \tag{43}$$

где $x_{2,i}(h_i^{(\mu)}, h^{(\nu)})$ — i-я компонента вектора $x_2(h^{(\mu)}, h^{(\nu)})$, $h_i^{(\mu)}$ — i-я компонента вектора $h^{(\mu)}$.

Теперь сформируем элемент t следующим образом: $t_i = h_i^{(\mu)}$, если $i \in \mathrm{J}\backslash\mathrm{J}(0)$; $t_i = h_i^{(\mu)}$, если $i \in \mathrm{J}(0)$. По построению элемент t обладает следующими свойствами: 1) $t \in \mathrm{H}^n(\alpha)$; 2) $x_1(t, h^{(\nu)}) = 0$; 3) $\mathrm{E}_k(\alpha) \times x_2(t, h^{(\nu)}) < 0$; 4) $t \in \mathcal{D}$.

Из выражения (7) п. 3.3.2, с учетом свойств элемента t, следует, что выполняется равенство

$$\mathrm{r}_1(t) = \mathrm{r}_1(h^{(\nu)}) + \sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi(t) \cdot \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot x_2(t, h^{(\nu)}), \tag{44}$$

из которого, учитывая неравенство

$$\sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi(t) \cdot \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot x_2(t, h^{(\nu)}) < 0, \tag{45}$$

следует, что $\mathrm{r}_1(t) < \mathrm{r}_1(h^{(\nu)})$. Последнее неравенство, ввиду соотношения $\mathrm{r}_1(h^{(\nu)}) = r(1)$, противоречит определению вектора $r(1)$. Указанное противоречие доказывает справедливость первого равенства в выражении (37).

Справедливость второго равенства в выражении (37) является следствием выражения (14).

Таким образом, справедливость леммы 3 для $m = 2$ является доказанной.

2. Пусть $m = \overline{3, n+3}$. Тогда, учитывая выражения (8), (9) п. 3.3.2 и проведя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, получим выполнение систем равенств (33)–(36) при $m = \overline{3, n+3}$.

Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4.

Пусть выполняются условия леммы 1, *Тогда последовательность* $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1, \infty}\}$ *обладает свойством: для любого* $\nu \in \mathcal{N}$, $i \in \mathrm{J}(\alpha)$ *выполняется равенство*

$$h_i^{(\nu)} = \zeta_i, \tag{46}$$

где $h_i^{(\nu)}$, ζ_i — i*-е компоненты соответственно элементов* $h^{(\nu)}$ *и* ζ.

Справедливость леммы 4 непосредственно следует из леммы 3 (см. выражения (33), (34) при $m = n + 3$) и пункта 2 процедуры I.

Т е о р е м а 1.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ — *замкнутое множество, в котором существует элемент* h, *обладающий свойством* A: *множество* J *состояний однородной КМЦД* $\xi_0(a, h)$ *образует один класс возвратных сообщающихся состояний.*

Тогда в множестве $\mathcal{D}$ *имеется* 1*-минимальный элемент.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим последовательность $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1, \infty}\}$, построенную в результате процедуры I. Выражение для вектора $\mathrm{r}_1(h^{(\mu)})$, где $h^{(\mu)} \in \mathcal{P}$, $\mu \in \mathcal{N}$, с учетом соотношений (7) п. 3.3.2 и (35), имеет вид

$$\mathrm{r}_1(h^{(\mu)}) = \mathrm{r}_1(h^{(\nu)}) + \sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi(h^{(\mu)}) \cdot x_2(h^{(\mu)}, h^{(\nu)}), \tag{47}$$

где $\mathrm{E}_k(\alpha) = \mathrm{E}_k(h^{(\mu)})$ — матрица, определенная в п. 3.3.1, $\pi(h^{(\mu)})$ — матрица финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a, h^{(\mu)})$, $h^{(\mu)} \in \mathcal{P}$, $\mu \in \mathcal{N}$.

Возьмем предел при $\mu \to \infty$ от левой и правой частей равенства (47). При этом, учитывая соотношения (14), (15) и теорему 1 § 2.4, получаем равенство

$$r(1) = \mathrm{r}_1(h^{(\nu)}) + \sum_{k=1}^{n(\alpha)} \mathrm{E}_k(\alpha) \cdot \pi \cdot x_2(\zeta, h^{(\nu)}), \tag{48}$$

где $\pi = \lim\limits_{\mu \to \infty} \pi(h^{(\mu)})$, $r(1)$ — вектор, определенный выражением (15).

Из выражения (48) и леммы 3 (см. выражение (34) при $k = 2$) следует, что выполняется равенство

$$r(1) = \mathrm{r}_1(h^{(\nu)}), \tag{49}$$

где $\nu = \overline{1, \infty}$. Выражение (49) и определение вектора $r(1)$ влечет справедливость следующего утверждения: для любого $\nu \in \mathcal{N}$ элемент $h^{(\nu)}$ является 1-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Теорема 1 доказана.

Лемма 5.

Пусть выполняется условие теоремы 1 *и последовательность* $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1, \infty}\}$ *обладает свойством*

$$\mathrm{J}_0(\alpha) = \varnothing, \tag{50}$$

где $\mathrm{J}_0(\alpha) = \mathrm{J}_0(h^{(\nu)})$ *— класс невозвратных состояний однородной КМЦД* $\xi_0(a, h^{(\mu)})$, $\nu = \overline{1, \infty}$.

Тогда в множестве $\mathcal{D}$ *имеется* ℓ*-минимальный элемент, где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

Из леммы 4, с учетом выражения (50), следует, что выполняются равенства $h^{(\nu)} = \zeta$, $\nu = \overline{1, \infty}$. Из этих равенств и леммы 2 следует, что ζ является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Так как из леммы 2 этого параграфа следует, что $(n+2)$-минимальный элемент является и ℓ-минимальным элементом, где $\ell = \overline{1, n+1}$, в множестве $\mathcal{D}$, то лемма 5 доказана.

Теорема 2.

Пусть выполняется условие теоремы 1 *и каждая однородная* КМЦД $\xi(a, h)$, *где* $h \in \mathcal{D}$, *не имеет невозвратных состояний.*

Тогда в множестве $\mathcal{D}$ *имеется* ℓ*-минимальный элемент, где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

Из условия теоремы 2 следует, что последовательность $\mathcal{P} = \{h^{(\nu)}, \nu = \overline{1, \infty}\}$, обладает свойством (50). Тогда по лемме 5 в множестве $\mathcal{D}$ имеется ℓ-минимальный элемент, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Аналогично теоремам 1 и 2 доказываются следующие теоремы 3 и 4.

Теорема 3.

Пусть выполняется условие теоремы 1. *Тогда в множестве* $\mathcal{D}$ *имеется* 1-*максимальный элемент.*

Теорема 4.

Пусть выполняется условие теоремы 2. *Тогда в множестве* $\mathcal{D}$ *имеется* ℓ-*максимальный элемент, где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

4.6. Случай V

В этом параграфе рассматривается случай, когда $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, является замкнутым множеством. Показывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,1} \times \ldots \times T_{\varepsilon,n}$, где $T_{\varepsilon,i}$ — линейный многогранник, обладающий свойством: $\mathcal{D}_i \subset T_{\varepsilon,i} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, для которого выполняются следующие системы неравенств:

$$r_i(1) - \mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(1)}) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(2)}) - r_i(2) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где

$$r_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) \colon h \in \mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$r_i(2) = \sup\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) \colon h \in \mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$\mathfrak{r}_{1,i}(\cdot)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(\cdot)$, $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ — соответственно 1-минимальный и 1-максимальный элемент в множестве T_ε.

Лемма 1.

Пусть имеется множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$. *Тогда для каждого элемента* h *из множества* $\mathcal{D}$ *выполняется система неравенств*

$$p_i(h_i) \cdot r(1) - r_i(1) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $p_i(h_i)$ — i-*я строка матрицы* $\mathrm{P}(h)$ *переходных вероятностей однородной КМЦД* $\xi_0(a,h)$, h_i — i-*я компонента элемента* h, $r(1) = [r_1(1), \ldots \ldots, r_n(1)]^T$.

Доказательство.

Произвольным образом выберем элемент h из множества $\mathcal{D}$. Тогда из леммы 1 (пункт 4) п. 4.1.2 следует, что можно указать такое число ε, где $\varepsilon > 0$, что справедливо выражение

$$\mathfrak{r}_{1,i}(h) \geqslant \mathfrak{r}_{1,i}(t) \quad \forall\, [i \in \mathrm{J},\ \ t \in \mathcal{D}(1,\varepsilon)], \tag{6}$$

где $\mathcal{D}(1,\varepsilon)$ — непустое множество $(1,\varepsilon)$-минимальных элементов в множестве $\mathcal{D}$, определенное в п. 4.1.2.

Произвольным образом выберем элемент t_ε из множества $\mathcal{D}(1,\varepsilon)$ и построим множество $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,1} \times \ldots \times T_{\varepsilon,n}$, где $T_{\varepsilon,i} = \{h_i, t_{\varepsilon,i}\}$, h_i — i-я компонента вектора h, $t_{\varepsilon,i}$ — i-я компонента элемента t_ε, $i = \overline{1,n}$. Так как каждое множество $T_{\varepsilon,i}$, где $i \in \mathrm{J}$, является конечным множеством, то из теоремы 1 § 4.2 следует, что в множестве T_ε существует $(n+2)$-минимальный элемент ζ_ε. По построению, элемент ζ_ε является $(1,\varepsilon)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$.

Так как элемент ζ_ε является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве T_ε, то из теоремы 1 п. 4.1.1 следует, что справедливо выражение

$$T_{\varepsilon,i} \cap \mathrm{H}_i^-(n+2,\zeta_\varepsilon) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

где $\mathrm{H}_i^-(n+2,\zeta_\varepsilon)$ — множество, определенное выражением (11) § 3.2, $T_{\varepsilon,i}$ — i-я компонента множества T_ε, $i = \overline{1,n}$.

Учитывая, что элемент h, по построению, принадлежит множеству T_ε, из определения множества $\mathrm{H}_i^-(n+2,\zeta_\varepsilon)$ получим, что выполняется следующая система неравенств:

$$p_i(h_i)\cdot \mathrm{r}_1(\zeta_\varepsilon) - \mathrm{r}_{1,i}(\zeta_\varepsilon) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Из определения $(1,\varepsilon)$-минимального элемента в множестве $\mathcal{D}$ следует выполнение системы соотношений

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{r}_{1,i}(\zeta_\varepsilon) = \inf_{h\in\mathcal{D}} \mathrm{r}_{1,i}(h) = r_i(1), \quad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Из выражений (8), (9) получим, что выполняется система неравенств (5). Лемма доказана.

Следствие 1.

Пусть дано множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда каждое множество

$$\mathrm{X}_i = \{h_i \in \mathrm{H}\colon p_i(h_i)\cdot r(1) - r_i(1) \geqslant 0\}, \tag{10}$$

где $i = \overline{1,n}$, является линейным (выпуклым) многогранником, для которого справедливо выражение

$$\mathcal{D}_i \subset \mathrm{X}_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Доказательство.

Так как из определения множества H (см. определение множества H, например, в п. 2.1.2) следует, что оно является линейным (выпуклым) многогранником, то из выражения (10) следует, что множество X_i, где $i = \overline{1,n}$, также является линейным (выпуклым) многогранником. Тогда непосредственно из леммы 1 следует, что справедливо выражение: $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{X}_i$, $i = \overline{1,n}$. Следствие доказано.

Лемма 2.

Пусть имеется множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i$ — замкнутое выпуклое множество, $i = \overline{1,n}$. Тогда справедливо следующее утверждение: существует последовательность множеств $\mathcal{J} = [T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}, \ldots]$, где $T^{(k)} \subset \mathrm{H}^n$, $T^{(k)} = T_1^{(k)} \times \ldots \times T_n^{(k)}$, $T_i^{(k)} \subset \mathrm{H}$, $k \in \mathcal{N}$, $i = \overline{1,n}$, обладающее следующими свойствами.

1. $T_i^{(k)}$ — *линейный (выпуклый) многогранник (т.е. выпуклая оболочка некоторого конечного множества), для которого справедливы выражения* $T_i^{(k)} \supset \mathcal{D}_i$, $T_i^{(k)} \supset T_i^{(k+1)}$,

$$T_i^{(k)} \subset \{h_i \in \mathrm{H}\colon p_i(h_i) \cdot r(1) - r_i(1) \geqslant 0\}, \tag{11}$$

где $r(1) = [r_1(1), \ldots, r_n(1)]^T$, $r_i(1)$ — *величина, определяемая выражением* (2), $i = \overline{1, n}$, $k \in \mathcal{N}$.

2. *Справедливо выражение*

$$\mathcal{D}_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_i^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{12}$$

3. *В каждом множестве* $T^{(k)}$ *существует* $(n+2)$-*минимальный элемент* $t^{(k)}$, *для которого справедливо выражение* $t^{(k)} \in \mathrm{H}_L^n$, *где* $k \in \mathcal{N}$, $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ *и* H_L^n — *множества определенные в выражении* (5) § 2.2.

4. *Справедливо выражение*

$$\lim_{k \to \infty} t^{(k)} = \zeta, \quad \text{где} \ \ \zeta \in \mathcal{D}. \tag{13}$$

5. *Справедливо выражение*

$$\lim_{k \to \infty} \pi(t^{(k)}) = \pi, \tag{14}$$

где $\pi(t^{(k)})$ — матрица финитных вероятностей, соответствующая матрице вероятных переходов $\mathrm{P}(t^{(k)})$, $k \in \mathcal{N}$, π — стохастическая матрица.

6. *Справедливо выражение*

$$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{r}_1(t^{(k)}) = \mathfrak{r}_1, \quad \text{где} \ \ \mathfrak{r}_1 \in \mathcal{E}^n. \tag{15}$$

7. *Для любого элемента* h *из множества* $\mathcal{D}$ *выполняется система неравенств*

$$\mathfrak{r}_{1,i}(t^{(k)}) \leqslant \mathfrak{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{16}$$

т.е. справедливо выражение

$$\mathfrak{r}_{1,i}(t^{(k)}) \leqslant \inf_{h \in \mathcal{D}} \mathfrak{r}_{1,i}(h) = r(1), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, \infty}. \tag{17}$$

8. *Справедливо следующее равенство*:

$$\mathfrak{r}_1(t^{(k)}) = r(1) + \mathrm{B}_1(t^{(k)}) \cdot y_1(t^{(k)}) + \pi(t^{(k)}) \cdot y_2(t^{(k)}, \zeta), \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{18}$$

где

$$y_1(t^{(k)}) = -[\mathrm{E} - \mathrm{P}(t^{(k)})] \cdot r(1), \tag{19}$$

$$y_2(t^{(k)}, \zeta) = \rho(t^{(k)}) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(t^{(k)})] \cdot w_1(\zeta) - r(1), \tag{20}$$

$\mathfrak{r}_1(h)$, $w_1(h)$ — *стационарные характеристики однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, $h \in \mathrm{H}^n$, $\mathrm{B}_1(h)$ — *матрица, определенная выражением* (4) § 2.1.

9. *Справедливо выражение*

$$\lim_{k\to\infty} y_2(t^{(k)},\zeta) \geqslant 0. \tag{21}$$

10. *Справедливо следующее соотношение*:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{r}_1(t^{(k)}) = \mathfrak{r}_1 = r(1). \tag{22}$$

Доказательство.

1. Из следствия 1 следует, что множество

$$\mathrm{X}^{(1)} = \mathrm{X}_1^{(1)} \times \ldots \times \mathrm{X}_n^{(1)}, \quad \text{где} \quad \mathrm{X}_i^{(1)} \subset \mathrm{H}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{23}$$

$$\mathrm{X}_i^{(1)} = \{h_i \in \mathrm{H}\colon p_i(h_i)\cdot r(1) - r_i(1) \geqslant 0\}, \quad i = \overline{1,n},$$

является линейным (выпуклым) многогранником и справедливо выражение: $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{X}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,n}$.

Так как множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$, где $i \in \mathrm{J}$, является замкнутым выпуклым множеством, то можно построить последовательность $\mathcal{J}_1 = [\mathrm{X}^{(1)},\ldots,\mathrm{X}^{(k)},\ldots]$, где $\mathrm{X}^{(k)} = \mathrm{X}_1^{(k)} \times \ldots \times \mathrm{X}_n^{(k)}$, $\mathrm{X}_i^{(k)} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,\infty}$, обладающую следующими свойствами:

1) $$\mathcal{D}_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{X}_i^{(k)}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{24}$$

2) каждое множество $\mathrm{X}_i^{(k)}$ является линейным (выпуклым) многогранником;

3) справедливы выражения $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{X}_i^{(k)}$, $\mathrm{X}_i^{(k+1)} \subset \mathrm{X}_i^{(k)}$, $k = \overline{1,\infty}$, $i = \overline{1,n}$.

Так как множество $\mathrm{X}^{(k)} = \mathrm{X}_1^{(k)} \times \ldots \times \mathrm{X}_n^{(k)}$, где $k \in \mathcal{N}$, таково, что множества $\mathrm{X}_i^{(k)}$, где $k \in \mathcal{N}$, $i \in \mathrm{J}$, являются линейными (выпуклыми) многогранниками, то из следствия 2 § 4.3 следует, что в каждом множестве $\mathrm{X}^{(k)}$ существует $(n+2)$-минимальный элемент $\zeta^{(k)}$, где $k \in \in \mathcal{N}$. Тогда последовательности $\mathcal{J}_1$ соответствует последовательность $\mathcal{J}_2 = = [\zeta^{(1)}\ldots,\zeta^{(k)},\ldots]$. Учитывая, что справедливо выражение $\zeta^{(k)} \in \mathrm{H}^n$, где $k \in \mathcal{N}$ и H^n — ограниченное подмножество пространства $\mathrm{R}^{n\cdot(n+2)}$, из последовательности $\mathcal{J}_2$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\mathcal{J}_3 = [h^{(1)},\ldots,h^{(k)},\ldots]$, обладающую свойством

$$\lim_{k\to\infty} h^{(k)} = \zeta, \quad \text{где} \quad \zeta \in \mathcal{D}. \tag{25}$$

Учитывая, что совокупность множеств $\{\mathrm{H}_{\mathrm{L}}^n\colon \mathrm{L} \in \mathcal{L}\}$ является конечным разбиением множества H^n, получим, что из последовательности $\mathcal{J}_3$ можно выделить подпоследовательность $\mathcal{J}_4 = [t^{(1)}, \ldots, t^{(k)}, \ldots]$, обладающую свойствами

$$\lim_{k \to \infty} t^{(k)} = \zeta; \quad t^{(k)} \in \mathrm{H}^n_{\mathrm{L}}, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{26}$$

где $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$. Следовательно, существует такая последовательность $\mathcal{J} = [T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}, \ldots]$, где $T^{(k)} = T_1^{(k)} \times \ldots \times T_n^{(k)}$, $T_i^{(k)} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, \infty}$, обладающая свойствами, перечисленными в пунктах 1–4 леммы.

2. Пусть $\mathcal{J}$ — последовательность вида $[T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}, \ldots]$, где $T^{(k)} = T_1^{(k)} \times \ldots \times T_n^{(k)}$, $T_i^{(k)} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, \infty}$, обладающая свойствами, перечисленными в пунктах 1–4 леммы. Тогда из теоремы 1 и 2 § 2.4 следует, что справедливы выражения (14), (15), т.е. последовательность $\mathcal{J}$ обладает свойствами, перечисленными в пунктах 5, 6 леммы.

3. Пусть $\mathcal{J}$ — последовательность вида $[T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}, \ldots]$, где $T^{(k)} \subset \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1, \infty}$, обладающая свойствами, перечисленными в пунктах 1–6 леммы. Тогда, учитывая, что элемент $t^{(k)}$ является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $T^{(k)}$, где $k \in \mathcal{N}$, и справедливо выражение: $\mathcal{D}_i \subset T_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$, из определения $(n+2)$-минимального элемента получим, что для любого элемента h из множества $\mathcal{D}$ справедливо выражение (16) и, следовательно, выражение (17), т.е. последовательность $\mathcal{J}$ обладает свойством, изложенным в пункте 7 леммы.

4. Пусть $\mathcal{J}$ — последовательность вида $[T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}, \ldots]$, где $T^{(k)} \subset \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1, \infty}$, обладающая свойствами, перечисленными в пунктах 1–7 данной леммы. Тогда, используя выражения (2)–(9) § 2.1, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости выражения (18). Перепишем выражение (20) в следующем виде:

$$y_2(t^{(k)}, \zeta) = \rho(t^{(k)}) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(t^{(k)})] \cdot w_1(\zeta) - \mathfrak{r}_1(\zeta) - [r(1) - \mathfrak{r}_1(\zeta)]. \tag{27}$$

Из равенства (см. выражение (12) п. 2.3.2)

$$\rho(\zeta) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(\zeta)] \cdot w_1(\zeta) - \mathfrak{r}_1(\zeta) = 0 \tag{28}$$

и выражения (27) получим, что справедливо выражение

$$\lim_{k \to \infty} y_2(t^{(k)}, \zeta) = -[r(1) - \mathfrak{r}_1(\zeta)] \geqslant 0. \tag{29}$$

Таким образом, последовательность $\mathcal{J}$ обладает также свойствами, перечисленными в пунктах 8, 9 леммы 2.

5. Пусть $\mathcal{J}$ — последовательность вида $[T^{(1)}, \ldots, T^{(k)}, \ldots]$, где $T^{(k)} \subset \mathrm{H}^n$, $k = \overline{1, \infty}$, обладающая свойствами, перечисленными в пунктах 1–9 леммы 2. Тогда, используя выражение (7) п. 3.3.2, запишем выражение (18)

данного параграфа в следующем виде:

$$\mathfrak{r}_1(t^{(k)}) = r(1) + [\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(t^{(k)})]^{-1} \cdot \mathrm{E}_0(t^{(k)}) \cdot y_1(t^{(k)}, \zeta) + \\ + \sum_{k=1}^{n(t^{(k)})} \mathrm{B}_1(t^{(k)}) \cdot \mathrm{E}_k(t^{(k)}) \cdot y_1(t^{(k)}, \zeta) + \pi(t^{(k)}) \cdot y_2(t^{(k)}. \zeta). \quad (30)$$

где $n(t^{(k)})$ — число классов возвратных сообщающихся состояний однородной КМЦД $\xi_0(a, t^{(k)})$, $k \in \mathcal{N}$, $t^{(k)}) \in \mathrm{H}^n$.

Так как справедливо выражение (11), то справедливо выражение

$$y_1(t^{(k)}) \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Тогда из леммы 12 п. 3.3.1 следует, что выполняется следующие соотношения:

$$\mathrm{E}_0(t^{(k)}) \cdot y_1(t^{(k)}) \geqslant 0, \quad (31)$$

$$\mathrm{E}_\alpha(t^{(k)}) \cdot y_1(t^{(k)}) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}(t^{(k)}), \quad (32)$$

$$[\mathrm{E} - \mathrm{P}_{0,0}(t^{(k)})]^{-1} \cdot \mathrm{E}_0(t^{(k)}) \cdot y_1(t^{(k)}) \geqslant 0 \quad (33)$$

для всех $k \in \mathcal{N}$.

Учитывая, что π является стохастической матрицей, из выражения (29) следует, что справедливо выражение

$$\lim_{k \to \infty} \pi(t^{(k)}) \cdot y_2(t^{(k)}, \zeta) = \pi \cdot [\mathfrak{r}_1(\zeta) - r(1)] \geqslant 0. \quad (34)$$

Тогда, из выражения (30), используя выражения (31)–(34) и (20), получим неравенство

$$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{r}_1(t^{(k)}) = \mathfrak{r}_1 \geqslant r(1). \quad (35)$$

А из пункта 7 леммы 2 следует, что справедливо выражение $\mathfrak{r}_1 \leqslant r(1)$. Из этого выражения и выражения (35) следует, что справедливо равенство $\mathfrak{r}_1 = r(1)$, т.е. последовательность $\mathcal{J}$ обладает свойством, изложенным в пункте 10 данной леммы 2. Лемма доказана.

Лемма 3.

Выполняется система неравенств

$$r_i(1) \leqslant \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h): h \in Co\mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (36)$$

где $r_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h): h \in \mathcal{D}\}$.

Справедливость леммы 3 следует из леммы 5 § 4.3.

Лемма 4.

Пусть даны два множества $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ *и* $Co\mathcal{D} = Co\mathcal{D}_1 \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n$, *где* $\mathcal{D}_i \subset Co\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$. *Тогда справедлива следующая система равенств*:

$$r_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h): h \in Co\mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (37)$$

где $r_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h): h \in \mathcal{D}\}$.

Доказательство.

Так как выполняется включение $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_o\mathcal{D}$, то справедлива следующая система неравенств:

$$r_i(1) \geqslant \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{C}_o\mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1,n} \tag{38}$$

Выражение (38) и лемма 3 влекут справедливость системы равенств (37), т.е. лемма 4 доказана.

Теорема 1.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ — замкнутое множество, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,1} \times \ldots \times T_{\varepsilon,n}$, где $T_{\varepsilon,i}$ — линейный многогранник, обладающий свойством $\mathcal{D}_i \subset T_{\varepsilon,i} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, для которого выполняется следующая система неравенств:

$$r_i(1) - \mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(1)}) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \tag{39}$$

где $r_i(1) = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$, $\zeta^{(1)}$ — 1-минимальный элемент в множестве T_ε.

Доказательство.

Так как по условию теоремы 1 $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, — замкнутые множества, то и $\mathcal{C}_o\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, являются также замкнутыми выпуклыми множествами. Тогда из леммы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $T^{(k)} = T_1^{(k)} \times \ldots \times T_n^{(k)}$, где $T_n^{(k)}$ — линейный многогранник, обладающий свойством: $\mathcal{C}_o\mathcal{D}_i \subset T_n^{(k)}$, $i = \overline{1,n}$, для которого справедлива система неравенств

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{C}_o\mathcal{D}\} - \mathfrak{r}_{1,i}(t^{(k)}) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \tag{40}$$

где $t^{(k)}$ — $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $T^{(k)}$.

Из леммы 4 и системы (40) следует, что

$$r_i(1) - \mathfrak{r}_{1,i}(t^{(k)}) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}. \tag{41}$$

Введя обозначения $T_\varepsilon = T^{(k)}$, $\zeta^{(1)} = t^{(k)}$ и учитывая, что $(n+2)$-минимальный элемент является 1-минимальным элементом, из системы неравенств (41) следует справедливость теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Теорема 2.

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ — замкнутое множество, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $T_\varepsilon = T_{\varepsilon,1} \times \ldots \times T_{\varepsilon,n}$, где $T_{\varepsilon,i}$ — линейный многогранник, обладающий свойством: $\mathcal{D}_i \subset T_{\varepsilon,i} \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, для которого выполняется следующая система неравенств:

$$\mathfrak{r}_{1,i}(\zeta^{(2)}) - r_i(2) \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}, \tag{42}$$

где $r_i(2) = \sup\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$, $\zeta^{(2)}$ — 1-максимальный элемент в множестве T_ε.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы 1, и поэтому в данной работе не приводится.

ГЛАВА 5

ЧАСТИЧНЫЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ В МНОЖЕСТВЕ $\mathrm{A}(\mathrm{H}^n)$

В этой главе вводится ℓ-частичная упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ — множество всевозможных подмножеств множества H^n, и устанавливаются некоторые ее свойства.

Эта глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе дается определение ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ и приводятся утверждения, устанавливающие ее основные свойства. Вводятся также понятия ℓ-максимального и ℓ-минимального элементов в подмножествах множества $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ и выявляются некоторые их свойства.

Во втором параграфе приводится доказательство существования ℓ-максимального и ℓ-минимального элементов в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $\mathrm{A}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i) \subset \mathrm{H}$, u_i — i-я компонента элемента u, $\mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$.

В третьем параграфе устанавливаются некоторые свойства ℓ-частичной упорядоченности, необходимые для дальнейшего изложения материала.

5.1. Определение ℓ-частичной упорядоченности. Максимальный и минимальный элементы

Пусть $\mathcal{D}^{(1)}$ и $\mathcal{D}^{(2)}$ — некоторые произвольно выбранные элементы из множества $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, т.е. $\mathcal{D}^{(\nu)} \in \mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\nu = 1, 2$. Тогда определим ℓ-частичную упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ следующим образом, где $\ell \in \{1, 2, \ldots\}$.

Элемент $\mathcal{D}^{(1)}$ не превосходит элемент $\mathcal{D}^{(2)}$, т.е. $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}^{(2)}$, в том и только в том случае, если выполняется следующее условие: для любого произвольно выбранного элемента $h^{(2)}$ из множества $\mathcal{D}^{(2)}$ существует в множестве $\mathcal{D}^{(1)}$ такой элемент $h^{(1)}$, что выполняется соотношение $h^{(1)} \overset{\ell}{\preccurlyeq} h^{(2)}$, где $\overset{\ell}{\preccurlyeq}$ — символ ℓ-частичной упорядоченности в множестве H^n, введенной в § 3.1.

Установим некоторые свойства введенной ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$.

Л е м м а 1.

Для всех $m \leqslant \ell$, где $m \in \mathcal{N}$, $\ell \in \mathcal{N}$, справедливы следующие утверждения.

1. *Из отношения $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}^{(2)}$ следует, что $\mathcal{D}^{(1)} \overset{m}{\Leftarrow} \mathcal{D}^{(2)}$.*

2. *Из отношения $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{=} \mathcal{D}^{(2)}$ следует, что $\mathcal{D}^{(1)} \overset{m}{=} \mathcal{D}^{(2)}$.*

Справедливость леммы 1 непосредственно следует из определения ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ и леммы 2 § 3.2.

Л е м м а 2.

В множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ существуют не более $(n+2)$ различных частичных упорядоченностей. При этом различными могут являться частичные упорядоченности, для которых $\ell = \overline{1, n+2}$.

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из определения ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ и теоремы 1 § 3.2.

Л е м м а 3.

Пусть в множестве $\mathcal{D}^{(1)}$ имеется ℓ-минимальный элемент t, где $\ell = \overline{1, n+2}$. Тогда для того чтобы выполнялось соотношение $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}^{(2)}$, где $\mathcal{D}^{(\nu)} \in \mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\nu = 1, 2$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$t \overset{\ell}{\preccurlyeq} h \quad \forall\, h \in \mathcal{D}^{(2)}. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Необходимость. Пусть выполняется соотношение $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}^{(2)}$, тогда для любого $h \in \mathcal{D}^{(2)}$ существует такой элемент $h^{(1)} \in \mathcal{D}^{(1)}$, для которого справедливо выражение: $h^{(1)} \overset{\ell}{\preccurlyeq} h$. Приведенное утверждение и выражение $t \overset{\ell}{\preccurlyeq} h^{(1)}$ $\forall\, h^{(1)} \in \mathcal{D}^{(1)}$ влекут справедливость выражения (1). Необходимость доказана.

2. Достаточность. Выражение (1) и определение ℓ-частичной упорядоченности в $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ влекут справедливость соотношения $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}^{(2)}$. Достаточность доказана.

Лемма 3 доказана.

Теперь введем понятия ℓ-максимального и ℓ-минимального элементов в некотором подмножестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) \colon u \in \mathcal{U}\}$ множества $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, где $\mathcal{U}$ — некоторое множество индексов, $\ell = \overline{1, n+2}$.

О п р е д е л е н и е 1.

Элемент $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $æ \in \mathcal{U}$, называется *ℓ-максимальным* (*ℓ-минимальным*) *элементом в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, если он удовлетворяет условию

$$\mathcal{D}(æ) \overset{\ell}{\Rightarrow} \mathcal{D}(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \tag{2}$$

$$(\mathcal{D}(æ) \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}). \tag{3}$$

Из определения 1 и леммы 1 следует справедливость следующей леммы 4.

Л е м м а 4.

Если элемент $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $æ \in \mathcal{U}$, является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$, то $\mathcal{D}(æ)$ является и m-максимальным (m-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $m = \overline{1, \ell}$.

Из определения ℓ-частичной упорядоченности $\overset{\ell}{\Leftarrow}$ следует, что ℓ-максимальный и ℓ-минимальный элементы могут быть определены иным образом.

Определение 2.

Элемент $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $æ \in \mathcal{U}$, называется *ℓ-максимальным элементом в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, если для любого произвольно выбранного элемента $h(æ)$ из множества $\mathcal{D}(æ)$ в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, существует такой элемент $h(u)$, что выполняется условие

$$h(æ) \overset{\ell}{\succcurlyeq} h(u). \tag{4}$$

Определение 3.

Элемент $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$ называется *ℓ-минимальным элементом в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, если для любого множества $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, и любого произвольно выбранного элемента $h(u)$ из $\mathcal{D}(u)$ в множестве $\mathcal{D}(æ)$ существует такой элемент $h(æ)$, что выполняется условие

$$h(æ) \overset{\ell}{\preccurlyeq} h(u). \tag{5}$$

Непосредственно из определения 2, 3 и лемм 3, 4 следует справедливость лемм 5 и 6.

Лемма 5.

Пусть в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, имеется ℓ-минимальный элемент $t(u)$, где $\ell \in \{1, \dots, n+2\}$.

Тогда для того чтобы $\mathcal{D}(æ)$, где $æ \in \mathcal{U}$, являлся ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$t(æ) \overset{\ell}{\succcurlyeq} t(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \tag{6}$$

$$\left(t(æ) \overset{\ell}{\preccurlyeq} t(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}\right). \tag{7}$$

Лемма 6.

Пусть $\mathcal{U}(\ell)$ — непустое множество всех таких $u \in \mathcal{U}$, для которых $\mathcal{D}(u)$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $\ell \in \{1, \dots, n+2\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Справедливо выражение*

$$\mathcal{D}(u) \overset{\ell}{=} \mathcal{D}(æ) \quad \forall\, (u \in \mathcal{U}(\ell),\ \ æ \in \mathcal{U}(\ell)) \tag{8}$$

2. *Если имеется такой элемент $u \in \mathcal{U}(\ell)$, что в множестве $\mathcal{D}(u)$ существует ℓ-минимальный элемент $h(u)$, то для любого $æ \in \mathcal{U}(\ell)$ в множестве $\mathcal{D}(æ)$ также существует ℓ-минимальный элемент $h(æ)$. При этом выполняется соотношение: $h(u) \overset{\ell}{\asymp} h(æ)$.*

3. *Если для некоторого элемента $u \in \mathcal{U}(\ell)$ в множестве $\mathcal{D}(u)$ не существует ℓ-минимального элемента, то для любого $æ \in \mathcal{U}(\ell)$ в множестве $\mathcal{D}(æ)$ также не существует ℓ-минимального элемента. При этом справедливы включения: $\mathcal{U}(\ell) \supseteq \mathcal{U}(k)$, $k = \ell+1, \dots, n+2$.*

5.2. Теоремы существования максимального и минимального элементов в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$

В этом параграфе доказываются теоремы существования ℓ-максимального и ℓ-минимального элементов в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{A}(\mathrm{H}^n)$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{U}$ — конечное множество, имеющее вид $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i) \subset \mathrm{H}$, u_i — i-я компонента элемента $u = [u_1, \ldots, u_n]$, $u_i \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$.

5.2.1. Доказательство существования ℓ-максимального элемента

Изложим процедуру 1 получения последовательности $\mathcal{D}^{(k)} = \mathcal{D}(u^{(k)})$, $k = \overline{1, \infty}$, упорядоченных элементов из множества $\mathrm{A}(\mathcal{U})$. Процедура I может быть применена к множеству $\mathrm{A}(\mathcal{U})$ только в том случае, если в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, существует $(n+2)$-минимальный элемент.

Процедура I.

Процедура состоит из последовательности циклов.

На k-м цикле, где $k = \overline{1, \infty}$, выполняем следующие действия.

1. В множестве $\mathcal{D}^{(k)} = \mathcal{D}(u^{(k)})$ находим $(n+2)$-минимальный элемент $t^{(k)}$ (при $k = 1$ элемент $u^{(1)}$ выбирается произвольно из множества $\mathcal{U}$).

2. Проверяем условие B: выполняется система соотношений

$$\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t^{(k)}) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t^{(k)})] \neq \varnothing, \quad i = \overline{1, n}, \quad u_i = \overline{1, m}(i), \tag{1}$$

где $\mathrm{H}_i^-(n+3, t^{(k)})$, $\mathrm{H}_i^0(n+3, t^{(k)})$ — множества, определенные в § 3.2.

2.1. Если условие B выполнено, то полагаем $\text{æ} = u^{(k)}$ и процедуру I завершаем.

2.2. Если условие B не выполнено, то для каждого элемента i, где $i \in \mathrm{J}$, формируем множество

$$\mathcal{U}_i^k = \{u_i \in \mathcal{U}_i\colon \mathcal{D}_i(u_i) \subset \mathrm{H}_i^+(n+3, t^{(k)}), \tag{2}$$

где $\mathrm{H}_i^+(n+3, t^{(k)})$ — множество, определенное в § 3.2.

3. Формируем элемент $u^{(k+1)} = [u_1^{(k+1)}, \ldots, u_n^{(k+1)}]$, где $u_i^{(k+1)} \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$, по следующему правилу: если множество $\mathcal{U}_i^k$ является непустым множеством, то i-я компонента элемента $u^{(k+1)}$ является произвольно выбранным элементом из множества $\mathcal{U}_1^k$; если множество $\mathcal{U}_i^k$ является пустым множеством, то полагаем $u_i^{(k+1)} = u_i^{(k)}$, $i \in \mathrm{J}$. Переходим к пункту 1 следующего $(k+1)$-го цикла данной процедуры.

На этом изложение процедуры I завершается.

Л е м м а 1.

Пусть множество $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$ *таково, что в каждом множестве* $\mathcal{D}(u)$, *где* $u \in \mathcal{U}$, *имеется* $(n+2)$-*минимальный элемент.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Выполняются соотношения*

$$\mathcal{D}^{(k)} \overset{n+2}{<} \mathcal{D}^{(k+1)} \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{3}$$

где $\mathcal{D}^{(k)} = \mathcal{D}(u^{(k)})$, $k = \overline{1, \infty}$, *— множества, построенные в результате применения процедуры* I *к множеству* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$.

2. *Процедура* I, *примененная к множеству* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, *завершается за конечное число циклов построением* ℓ*-максимального элемента в* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, *который обозначается через* $\mathcal{D}(æ)$, *где* $æ \in \mathcal{U}$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

3. *Выполняется система соотношений*

$$\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(æ)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(æ))] \neq \varnothing, \quad i = \overline{1, n}, \quad u_i = \overline{1, m}(i). \tag{4}$$

Доказательство.

1. Пусть процедура I, примененная к системе множеств $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, не завершилась на k-м цикле, где $k \in \{1, 2, \ldots\}$. Тогда из процедуры I § 2.2 следует, что множество

$$\mathcal{D}(u^{(k+1)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(k+1)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(k+1)}), \tag{5}$$

где $u_i^{(k+1)}$ — i-я компонента элемента $u^{(k+1)}$, $i = \overline{1, n}$, построенное на $(k+1)$-м цикле процедуры, обладает свойством

$$\mathcal{D}_i(u_i^{(k+1)}) \subset \mathrm{H}_i^+(n+3, t^k) \quad \forall\, i \in \mathrm{J}_1, \tag{6}$$

$$\mathcal{D}_i(u_i^{(k+1)}) = \mathcal{D}_i(u_i^{(k)}) \quad \forall\, i \in [\mathrm{J} \backslash \mathrm{J}_1], \tag{7}$$

где J_1 — некоторое непустое подмножество множества J.

Из выражений (5), (6), (7) и теоремы 5 § 3.2 следует, что для любого $h \in \mathcal{D}(u^{(k+1)})$ выполняется соотношение $t^{(k)} \overset{n+2}{\prec} h$. Таким образом, выполняется система неравенств (3).

2. Так как частичная упорядоченность $\overset{\ell}{\Leftarrow}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, обладает свойством транзитивности, а $\mathcal{U}$ является конечным множеством, то процедура I, в силу неравенств (3), завершится за конечное число шагов.

Пусть процедура I завершилась на k-м цикле, где $k \in \mathcal{N}$. Тогда выполняется система неравенств (4), где $t(æ) = t^{(k)}$ — $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(æ) = \mathcal{D}(u^{(k)})$. Из системы (4) и теоремы 3 § 3.2 следует, что в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, существует элемент $h(u)$, для которого выполняется соотношение $t(æ) \overset{n+2}{\succcurlyeq} h(u)$.

Из последнего утверждения следует, что справедливо выражение

$$t(æ) \overset{n+2}{\succcurlyeq} t(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}, \tag{8}$$

где $t(u)$ — $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(u)$.

Из выражения (8) и леммы 5 § 5.1 следует, что $\mathcal{D}(æ)$ — $(n+2)$-максимальный элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, а следовательно, в силу леммы 4 § 5.1, и ℓ-максимальный элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2.

Пусть множество $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$ *таково, что в каждом множестве* $\mathcal{D}(u)$, *где* $u \in \mathcal{U}$, *имеется* $(n+2)$-*минимальный элемент* $t(u)$.

Тогда для любого $æ \in \mathcal{U}(n+2)$, *где* $\mathcal{U}(n+2)$ — *множество всех* $(n+2)$-*максимальных элементов в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, *выполняется система соотношений*

$$\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(æ)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(æ))] \neq \varnothing, \quad i = \overline{1, n}, \quad u_i = \overline{1, m(i)}. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Прежде всего отметим, что из леммы 1 (пункт 2) следует, что множество $\mathcal{U}(n+3)$ является непустым множеством.

Так как из леммы 6 (пункт 2) § 5.1 следует, что

$$t(u) \overset{n+2}{\asymp} t(æ) \quad \forall \ [u \in \mathcal{U}(n+2), \quad æ \in \mathcal{U}(n+2)], \tag{10}$$

то справедливость системы соотношений 9 непосредственно следует из леммы 1 (пункт 3) и выражения (10). Лемма 2 доказана.

Теперь докажем теорему существования ℓ-максимального элемента в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ в общем случае, когда в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, может не существовать $(n+2)$-минимального элемента.

Рассмотрим следующую процедуру II.

Процедура II.

1. Для каждого элемента $u \in \mathcal{U}$ из множества $\mathcal{D}(u)$ выберем $(k(u), \nu^{-1})$-минимальный элемент $h(k(u), \nu^{-1})$, где

$$k(u) = \begin{cases} \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell, u) = \varnothing, \quad \ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}, \\ n+2, \quad \text{если} \ \ \mathcal{D}_0(\ell, u) \neq \varnothing, \quad \forall\, \ell \in \{1, \ldots, n+2\}, \end{cases}$$

$\mathcal{D}_0(\ell, u)$ — множество всех ℓ-минимальных элементов в множестве $\mathcal{D}(u)$, $\nu \in \mathcal{N}$.

2. Сформируем систему множеств $T(\mathcal{U}, \nu^{-1}) = \{T(a, \nu^{-1})\colon a \in \mathcal{U}\}$, где $a = [a_1, \ldots, a_n]$, $a_i \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$, $T(a, \nu^{-1}) = T_1(a_1, \nu^{-1}) \times \ldots \times T_n(a_n, \nu^{-1})$, $T_i(a_i, \nu^{-1}) = \{h_i(k(u), \nu^{-1})\colon u_i = a_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $h_i(k(u), \nu^{-1})$ — i-я компонента элемента $h(k(u), \nu^{-1})$.

3. Применяя процедуру I к множеству $T(\mathcal{U}, \nu^{-1})$, получим $(n+2)$-максимальный элемент $T(a(\nu), \nu^{-1})$ в множестве $T(\mathcal{U}, \nu^{-1})$.

4. Из последовательности $\{a(\nu) \in \mathcal{U}\colon \nu = \overline{1, \infty}\}$ выделяем последовательность $\{a(\nu_m)\colon m = \overline{1, \infty}\}$, обладающую свойством: $a(\nu_{m+1}) = a(\nu_m)$, $m = \overline{1, \infty}$. Полагаем $æ = a(\nu_m)$, где $m \in \mathcal{N}$, и прекращаем процедуру II.

Л е м м а 3.

Элемент $æ = a(\nu_m)$, *полученный в результате применения процедуры* II *к множеству* $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, *обладает следующими свойствами:*

1. *Существуют такие последовательности* $\mathcal{P}_1 = \{\varepsilon_m, m = \overline{1,\infty}\}$, $\mathrm{L} = \{t(k(æ), \varepsilon_m),\ m = \overline{1,\infty}\}$, *для которых выполняется система соотношений*

$$\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(æ),\ \varepsilon_m)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(æ),\ \varepsilon_m))] \neq \varnothing,$$
$$i = \overline{1,n},\ \ u_i = \overline{1, m}(i),\ \ m = \overline{1,\infty},$$

где $\varepsilon_m = \nu_m^{-1}$, $t(k(æ), \varepsilon_m)$ — $(k(æ), \varepsilon_m)$-*минимальный элемент в множестве* $\mathcal{D}(æ)$,

$$k(æ) = \begin{cases} \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell, t) = \varnothing, \quad \ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}, \\ n+2, \ \ \text{если}\ \ \mathcal{D}_0(\ell, t) \neq \varnothing, \quad \forall\, \ell \in \{1, \ldots, n+2\}, \end{cases}$$

$\mathcal{D}(æ)$ *является* ℓ-*максимальным элементом в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, *где* $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

1. Рассмотрим пункт 1 процедуры II. Поскольку для каждого $u \in \mathcal{U}$ число $k(u)$ является либо а) минимальным целым числом из множества $\{1, \ldots \ldots, n+2\}$, для которого выполняются соотношения

$$\mathcal{D}_0(1, u) \neq \varnothing,\ \ldots,\ \mathcal{D}_0(k(u)-1, u) \neq \varnothing, \quad \mathcal{D}_0(k(u), u) = \varnothing, \tag{11}$$

либо б) $k(u) = n+2$ и справедливы соотношения

$$\mathcal{D}_0(\ell, u) \neq \varnothing, \quad \ell = \overline{1, n+2}, \tag{12}$$

то по теоремам 1, 2 п. 4.1.2 в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$ и для каждого числа ν^{-1}, где $u \in \mathcal{U}$, $\nu \in \mathcal{N}$, имеется $(k(u), \nu^{-1})$-минимальный элемент $h(k(u), \nu^{-1})$.

Заметим, что в случае, если для некоторого элемента u выполняются соотношения (12), то $h(k(u), \nu^{-1}) = h(n+2, \nu^{-1})$ является, в силу леммы 2 (пункт 2) п. 4.1.2, $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}(u)$.

2. Рассмотрим пункт 2 процедуры II. Из содержания этого пункта следует, что каждое множество $T(a, \nu^{-1})$, где $a \in \mathcal{U}$, является конечным множеством, обладающим свойством

$$T(a, \nu^{-1}) \subset \mathcal{D}(a), \quad h(k(u), \nu^{-1}) \in T(a, \nu^{-1}). \tag{13}$$

При этом, в силу теоремы 1 § 4.2, в каждом множестве $T(a, \nu^{-1})$, где $a \in \mathcal{U}$, имеется $(n+2)$-минимальный элемент $t(a, \nu)$.

3. Рассмотрим пункт 3 процедуры II. Применяя процедуру I к множеству $T(\mathcal{U}, \nu^{-1})$, получим, в силу леммы 1 (пункт 2), $(n+2)$-максимальный элемент $T(a(\nu), \nu^{-1})$ в множестве $T(\mathcal{U}, \nu^{-1})$. При этом $(n+2)$-минимальный элемент $t(a(\nu), \nu)$ в множестве $T(a(\nu), \nu^{-1})$, в силу соотношений (11)–(13), является $(k(a(\nu), \nu^{-1}))$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}(a(\nu))$.

Отметим, что лемма 2 и соотношения (13) влекут справедливость выражения

$$\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(a(\nu), \nu)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(a(\nu), \nu))] \neq \varnothing,$$
$$i = \overline{1, n}, \quad u_i = \overline{1, m}(i), \quad \nu = \overline{1, \infty}. \tag{14}$$

4. Рассмотрим пункт 4 процедуры II. Так как $\mathcal{U}$ является конечным множеством, то из последовательности $\{a(\nu), \nu = \overline{1, \infty}\}$, можно выделить подпоследовательность $\{a(\nu_m),\ m = \overline{1, \infty}\}$, обладающую свойством: $a(\nu_{m+1}) = a(\nu_m),\ m = \overline{1, \infty}$. Введя обозначения $æ = a(\nu_m),\ \varepsilon_m = \nu_m^{-1}$, $\mathcal{P}_1 = \{\varepsilon_m,\ m = \overline{1, \infty}\}$, $\mathrm{L} = \{t(k(æ),\ \varepsilon_m),\ m = \overline{1, \infty}\}$ и учитывая содержание пункта 3 настоящего доказательства, получаем справедливость утверждения пункта 1 леммы 3.

5. Пусть $h(æ)$ — произвольно выбранный элемент из множества $\mathcal{D}(æ)$, где $æ = a(\varepsilon_m),\ \varepsilon_m \in \mathcal{P}_1$. Тогда из соотношений (11), (12) при $u = æ$ следуют два возможных случая:

а) $k(æ) \in \{1, \ldots, n+2\}$ и выполняются соотношения (11);

б) $k(æ) = n+2$ и выполняются соотношения (12).

Рассмотрим случай (*а*).

Из соотношений (11) и лемм 1, 2 (пункт 3) п. 4.1.2 следует, что существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, для которого справедливо выражение:

$$h(æ) \overset{k(æ)}{\succ} t(k(æ), \varepsilon) \quad \forall\, t(k(æ), \varepsilon) \in \mathcal{D}(k(æ), \varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \tag{15}$$

где $\mathcal{D}(k(æ), \varepsilon)$ — множество всех $(k(æ), \varepsilon)$-минимальных элементов в множестве $\mathcal{D}(æ)$.

Из леммы 2 (пункт 3) § 3.2 следует, что выражение (15) влечет справедливость выражения:

$$h(æ) \overset{n+2}{\succ} t(k(æ), \varepsilon) \quad \forall\, t(k(æ), \varepsilon) \in \mathcal{D}(k(æ), \varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0] \tag{16}$$

Рассмотрим случай (*б*).

Из соотношений (12) и определения $(n+2, \varepsilon)$-минимального элемента в множестве $\mathcal{D}(æ)$ следует, что $t(n+2, \varepsilon) \in \mathcal{D}(æ)$ является $(n+2)$-минимальным элементом, т.е. в силу леммы 2 (пункт 2) п. 4.1.2, справедливы выражения

$$\mathcal{D}(n+2, \varepsilon) = \mathcal{D}_0(n+2, æ), \quad t(n+2, \varepsilon) \subset \mathcal{D}_0(n+2, æ) \quad \forall\, \varepsilon > 0, \tag{17}$$

где $\mathcal{D}(n+2, \varepsilon)$ — множество всех $(n+2, \varepsilon)$-минимальных элементов в множестве $\mathcal{D}(æ)$. Из выражения (17) и леммы 2 (пункт 4) следует, что для любого $\varepsilon_0 \in]0, \infty[$ справедливо выражение

$$h(æ) \overset{n+2}{\succcurlyeq} t(k(æ), \varepsilon) \quad \forall\, t(k(æ), \varepsilon) \subset \mathcal{D}(k(æ), \varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \tag{18}$$

где $k(æ) = n+2$.

Итак, рассмотрение альтернативных случаев (*а*) и (*б*) приводят к результатам, определяемым выражениями (16), (18). Теперь, если ввести обозначение $m_0 = \min\{m\colon \varepsilon_m \in]0, \varepsilon_0]\}$, то из выражений (16) и (18) следует справедливость выражения

$$h(\text{æ}) \overset{n+2}{\succcurlyeq} t(k(\text{æ}), \varepsilon_m) \quad \forall\, m \in \{m_0, m_0+1, \ldots\}. \tag{19}$$

Из выражения (14) и теоремы 3 § 3.2 следует, что для любого $u \in \mathcal{U}$ в множестве $\mathcal{D}(u)$ имеется элемент $h(u)$ обладающий свойством

$$t(k(\text{æ}), \varepsilon_m) \overset{n+2}{\succcurlyeq} h(u) \quad \forall\, m \in \{m_0, m_0+1, \ldots\}. \tag{20}$$

Таким образом, выражения (19) и (20) влекут справедливость следующего утверждения: для любого элемента $h(\text{æ}) \subset \mathcal{D}(\text{æ})$ в каждом множестве $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, существует элемент $h(u)$, обладающий свойством

$$h(\text{æ})) \overset{n+2}{\succcurlyeq} h(u). \tag{21}$$

Последнее утверждение говорит о том, что $\mathcal{D}(\text{æ})$ является $(n+2)$-максимальным, а следовательно, в силу леммы 4 § 5.1, ℓ-максимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1.

В множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$ *существует* ℓ*-максимальный элемент* $\mathcal{D}(\text{æ})$, *где* $\text{æ} \in \mathcal{U}$, $\ell = \overline{1, n+2}$. *При этом в множестве* $\mathcal{D}(\text{æ})$ *существует такая последовательность* $\mathrm{L} = \{t(k(\text{æ}), \varepsilon_m),\ m = \overline{1, \infty}\}$, *для которой выполняется система соотношений*

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(\text{æ}), \varepsilon_m)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(\text{æ}), \varepsilon_m))] \neq \varnothing,\\ i = \overline{1, n}, \quad u_i = \overline{1, m}(i), \quad m = \overline{1, \infty},\end{gathered} \tag{22}$$

где $\varepsilon_m > 0$, $\varepsilon_m \to 0$, *если* $m \to \infty$, $t(k(\text{æ}), \varepsilon_m)$ — $(k(\text{æ}), \varepsilon_m)$*-минимальный элемент в множестве* $\mathcal{D}(\text{æ})$,

$$k(\text{æ}) = \begin{cases} \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell, t) = \varnothing, & \ell \subset \{1, \ldots, n+2\}\},\\ n+2, \ \text{если}\ \mathcal{D}_0(\ell, t) \neq \varnothing, & \forall\, \ell \in \{1, \ldots, n+2\},\end{cases} \tag{23}$$

$\mathcal{D}_0(\ell, \text{æ})$ — *множество всех* ℓ*-минимальных элементов в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

Применим процедуру II к множеству $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, тогда справедливость теоремы 1 непосредственно следует из леммы 3. Теорема 1 доказана.

5.2.2. Доказательство существования ℓ-минимального элемента

Введем следующие обозначения.

1. $\mathcal{D}_i(\mathcal{U}_i) = \bigcup\limits_{u_i \in \mathcal{U}_i} \mathcal{D}_i(u_i)$, $i = \overline{1, n}$. 2. $\mathcal{D}(\mathcal{U}) = \mathcal{D}_1(\mathcal{U}_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\mathcal{U}_n)$.

Непосредственно из определений множеств $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ и $\Lambda(\mathcal{U})$ следует справедливость лемм 1 и 2.

Лемма 1.

Для любого $u \in \mathcal{U}$ выполняется включение

$$\mathcal{D}(u) \subset \mathcal{D}(\mathcal{U}), \tag{1}$$

где $\mathcal{D}(u) \subset \mathrm{A}(\mathcal{U})$.

Лемма 2.

Для любого элемента $h \subset \mathcal{D}(\mathcal{U})$ существует такой элемент $u \subset \mathcal{U}$, для которого справедливо выражение

$$h \in \mathcal{D}(u), \tag{2}$$

где $\mathcal{D}(u) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$.

Лемма 3.

Пусть в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ существует $(n+2)$-минимальный элемент h. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Выполняется система соотношений*

$$\mathcal{D}_i(u_i) \subset [\mathrm{H}_i^+(n+3,h) + \mathrm{H}_i^0(n+3,h)], \quad i = \overline{1,n}, \quad u_i = \overline{1,m}(i). \tag{3}$$

2. *Элемент $æ \subset \mathcal{U}$, для которого $h \in \mathcal{D}(æ)$, таков, что $\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\ell = \overline{1,n+2}$.*

Доказательство.

1. Так как h является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U}) = \mathcal{D}_1(\mathcal{U}_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\mathcal{U}_n)$, то из теоремы 1 (пункт 2) п. 4.1.1 следует, что выполняется система соотношений

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{U}_i) \cap \mathrm{H}_i^-(n+3,h) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Система (4) и лемма 4 § 3.2 влекут справедливость соотношений

$$\mathcal{D}_i(\mathcal{U}_i) \subset [\mathrm{H}_i^+(n+3,h) + \mathrm{H}_i^0(n+3,h)], \quad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Из соотношений (5) и определения множества $\mathcal{D}_i(\mathcal{U}_i)$ следует выполнение системы соотношений (3).

Из системы соотношений (3) и теоремы 6 § 3.2 следует, что для любого элемента $u \in \mathcal{U}$ и для любого элемента $h(u) \in \mathcal{D}(u)$, где $\mathcal{D}(u) \in \Lambda(\mathcal{U})$, выполняется соотношение

$$h \overset{n+2}{\preccurlyeq} h(u). \tag{6}$$

Соотношение (6) и определение 3 § 5.1 влекут справедливость утверждения, приведенного в п. 2 настоящей леммы.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим следующую процедуру III, применение которой к множеству $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ позволяет найти ℓ-минимальный элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$. При этом считается, что в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ не существует $(n+2)$-минимального элемента.

Процедура III.

1. Выберем из множества $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ (k, ν^{-1})-минимальный элемент $h(k, \nu^{-1})$, где $k = \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell, \mathcal{U}) = \varnothing,\ \ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}$, $\nu \in \mathcal{N}$, $\mathcal{D}_0(\ell, \mathcal{U})$ — множество всех ℓ-минимальных элементов в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел.

2. Из последовательности $\{\nu^{-1}, \nu = \overline{1, \infty}\}$ выберем такую последовательность $\{\varepsilon_m = \nu_m^{-1},\ m = \overline{1, \infty}\}$, для которой справедливо выражение

$$h(k, \varepsilon_m) \in \mathcal{D}(æ) \quad \forall\, m \in \mathcal{N}, \tag{7}$$

где $æ \in \mathcal{U}$, $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$.

Изложение процедуры III закончено.

Л е м м а 4.

Пусть в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ не существует $(n+2)$-минимального элемента.

Тогда элемент $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$, найденный в результате применения процедуры III *к множеству $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим последовательность $\{h(k, \nu^{-1}), \nu = \overline{1, \infty}\}$, где $h(k, \nu^{-1})$ — (k, ν^{-1})-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, найденный в пункте 1 процедуры III, k — целое число из множества $\{1, \ldots, n+2\}$, для которого выполняется система соотношений

$$\mathcal{D}_0(\ell, \mathcal{U}) \neq \varnothing, \quad \ell = \overline{1, k-1}, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}_0(k, \mathcal{U}) = \varnothing. \tag{9}$$

Поскольку $\mathcal{U}$ является конечным множеством, то в силу леммы 2 из последовательности $\{h(k, \nu^{-1}),\ \nu = \overline{1, \infty}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h(k, \varepsilon_m),\ m = \overline{1, \infty}\}$, где $\varepsilon_m = \nu_m^{-1}$, для которой справедливо выражение (7). Таким образом, реализация пункта 2 процедуры III позволяет найти такой элемент $æ \in \mathcal{U}$, что $h(k, \varepsilon_m) \in \mathcal{D}(æ)\ \forall\, m \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{D}(æ) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$.

Произвольным образом выберем элемент $u \subset \mathcal{U}$ и из множества $\mathcal{D}(u) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$ произвольно выберем элемент $h(u)$. Понятно, что $h(u) \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Тогда из соотношений (8), (9) и лемм 1, 2 (пункт 3) п. 4.1.2 следует, что для элемента $h(u)$ существует такое число $\varepsilon_{m(0)} > 0$, для которого выполняется соотношение

$$h(u) \overset{k}{\succ} h(k, \varepsilon_{m(0)}). \tag{10}$$

Соотношение (10), в силу леммы 2 (пункт 3) § 3.2, влечет справедливость выражения

$$h(u) \overset{n+2}{\succ} h(k, \varepsilon_{m(0)}). \tag{11}$$

Из выражений (7), (11) и определения 3 § 5.1 следует, что $\mathcal{D}(æ)$ является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$. По лемме 4 § 5.1 $\mathcal{D}(æ)$

является также и ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Лемма 4 доказана.

5.3. Некоторые свойства частичной упорядоченности

В этом параграфе устанавливаются некоторые свойства частичной упорядоченности в системах множеств: $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, $\mathrm{B}(\mathcal{U}) = \{Co\mathcal{D}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, $\mathrm{C}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{D}(\mathfrak{s})\colon \mathfrak{s} \in \mathcal{P}\}$, где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$, $u = [u_1, \ldots, u_n] \in \mathcal{U}$, $u_i \in \mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, n}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i) \subset \mathrm{H}$, $Co\mathcal{D}(u) = Co\mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n(u_n)$, $Co\mathcal{D}_i(u_i)$ — выпуклая оболочка $\mathcal{D}_i(u_i)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1,m(1)} \times \ldots \times \mathcal{P}_{1,m(n)}$, $\mathcal{P}_{1,m(i)}$ — множество всевозможных $m(i)$-мерных стохастических векторов-строк, $i = \overline{1, n}$, $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n] \in \mathcal{P}$, $\mathfrak{s}_i = [\mathfrak{s}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{s}_{i,m(i)}] \in \mathcal{P}_{1,m(i)}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{s}) = \mathcal{D}_1(\mathfrak{s}_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\mathfrak{s}_n)$, $\mathcal{D}_i(\mathfrak{s}_i) = \{h_i = \mathfrak{s}_{i,1} \cdot t_i(1) + \ldots + \mathfrak{s}_{i,m(i)} \cdot t_i(m(i))\colon t_i(j) \in \mathcal{D}_i(j),\ j = \overline{1, m(i)}\}$, $i = \overline{1, n}$.

Свойства частичной упорядоченности в рассматриваемых системах формулируются в виде утверждений, использующихся в дальнейшем для доказательства основных результатов настоящей работы.

Л е м м а 1.

Для любого $u \in \mathcal{U}$ выполняется система равенств

$$\inf_{h \in \mathcal{D}(t)} \mathfrak{r}_{1,i}(h) \geqslant \inf_{h \in \mathcal{D}(u)} \mathfrak{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1, n} \tag{1}$$

$$\Big(\inf_{h \in \mathcal{D}(t)} \mathfrak{r}_{1,i}(h) \leqslant \inf_{h \in \mathcal{D}(u)} \mathfrak{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1, n}\Big), \tag{2}$$

где $\mathcal{D}(\text{æ})$ — ℓ-максимальный (ℓ-минимальный) элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\text{æ} \in \mathcal{U}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Поскольку из соотношения $h^{(1)} \overset{\ell}{\succcurlyeq} h^{(2)}$ $(h^{(1)} \overset{\ell}{\preccurlyeq} h^{(2)})$, где $h^{(1)} \in \mathcal{D}(\text{æ})$, $h^{(2)} \in \mathcal{D}(u)$, следует, в силу леммы 2 § 3.2, соотношение $h^{(1)} \overset{1}{\succcurlyeq} h^{(2)}$ $(h^{(1)} \overset{1}{\geqslant} h^{(2)})$, т.е. $\mathfrak{r}_1(h^{(1)}) \geqslant \mathfrak{r}_1(h^{(2)})$ $(\mathfrak{r}_1(h^{(1)}) \leqslant \mathfrak{r}_1(h^{(2)}))$, то справедливость выражения (1) (выражения 2) непосредственно следует из определения 2 (определения 3) § 5.1.

Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1.

Для элемента æ выполняется система равенств

$$\inf_{h \in \mathcal{D}(t)} \mathfrak{r}_{1,i}(h) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{h \in \mathcal{D}(u)} \mathfrak{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1, n} \tag{3}$$

$$\Big(\inf_{h \in \mathcal{D}(t)} \mathfrak{r}_{1,i}(h) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \inf_{h \in \mathcal{D}(u)} \mathfrak{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1, n}\Big), \tag{4}$$

где $\mathcal{D}(\text{æ})$ — ℓ-максимальный (ℓ-минимальный) элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\text{æ} \in \mathcal{U}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Справедливость теоремы 1 непосредственно следует из леммы 1 и соотношения $æ \in \mathcal{U}$.

Лемма 2.

Для произвольно выбранного элемента h из множества $Co\mathcal{D}(u) = Co\mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n(u_n)$, где $Co\mathcal{D}_i(u_i)$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{D}_i(u_i)$, u_i — i-я компонента элемента u, $u \in \mathcal{U}$, всегда можно указать такой элемент t из множества $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, для которого справедливо выражение: $t \overset{n+2}{\preccurlyeq} h$.

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из леммы 5 § 4.3.

Лемма 3.

Для любого $u \in \mathcal{U}$ выполняются соотношения

$$Co\mathcal{D}(u) \overset{\ell}{=} \mathcal{D}(u), \quad \ell = \overline{1, n+2}, \tag{5}$$

где $Co\mathcal{D}(u) = Co\mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $Co\mathcal{D}(u) \in \mathrm{B}(\mathcal{U})$, $\mathcal{D}(u) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$.

Доказательство.

Из леммы 2 следует, что выполняется соотношение

$$\mathcal{D}(u) \overset{n+2}{\Leftarrow} Co\mathcal{D}(u), \tag{6}$$

где $u \subset \mathcal{U}$.

Очевидное включение $\mathcal{D}(u) \subset Co\mathcal{D}(u)$ влечет справедливость соотношения

$$\mathcal{D}(u) \overset{n+2}{\Rightarrow} Co\mathcal{D}(u). \tag{7}$$

Из соотношений (6) и (7) следует, что $\mathcal{D}(u) \overset{n+2}{=} Co\mathcal{D}(u)$, т.е. в силу леммы 1 § 5.1, выполняются соотношения (5).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4.

1. *Пусть $æ$ такой элемент из $\mathcal{U}$, что $\mathcal{D}(æ)$ — ℓ-максимальный (ℓ-минимальный) элемент в $\mathrm{A}(\mathcal{U})$. Тогда $Co\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{B}(\mathcal{U}) = \{Co\mathcal{D}(u)\colon u \subset \mathcal{U}\}$, где $\ell \in \{1, \ldots\ldots, n+2\}$.*

2. *Пусть $æ$ такой элемент из $\mathcal{U}$, что $Co\mathcal{D}(æ)$ — ℓ-максимальный (ℓ-минимальный) элемент в $\mathrm{B}(\mathcal{U})$. Тогда $\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$.*

Доказательство.

1. Пусть $\mathcal{D}(æ)$ — ℓ-максимальный (ℓ-минимальный) элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, т.е. справедливо выражение

$$\mathcal{D}(æ) \overset{\ell}{\Rightarrow} \mathcal{D}(u) \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \tag{8}$$

$$(\mathcal{D}(æ) \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}(u) \quad \forall\, u \subset \mathcal{U}), \tag{9}$$

Тогда из леммы 3 и выражения (8) (выражения (9)) следует, что справедливо выражение:

$$C_0\mathcal{D}(æ) \overset{\ell}{\Rightarrow} C_0\mathcal{D}(u), \quad \forall\, u \in \mathcal{U}, \tag{10}$$

$$(C_0\mathcal{D}(æ) \overset{\ell}{\Leftarrow} C_0\mathcal{D}(u), \quad \forall\, u \in \mathcal{U}), \tag{11}$$

из которого получаем, что $C_0\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathrm{B}(\mathcal{U})$.

Утверждение п. 1 леммы 4 доказано.

Аналогично доказывается утверждение п. 2 леммы 4.

Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5.

Если выполняется соотношение $\mathcal{D}^{(1)} \overset{\ell}{=} \mathcal{D}^{(2)}$, где $\mathcal{D}^{(\nu)} \in \mathrm{A}(\mathrm{H}^n)$, $\nu = 1, 2$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$, то справедлива система равенств

$$\inf\{\mathrm{r}_{1,i}(h)\colon h \subset \mathcal{D}^{(1)}\} = \inf\{\mathrm{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}^{(2)}\}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Справедливость леммы 5 непосредственно следует из определения ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathrm{A}(\mathrm{H}^n)$.

Т е о р е м а 2.

Для элемента æ выполняется система равенств:

$$\inf_{h \in \mathcal{D}(æ)} \mathrm{r}_{1,i}(h) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{h \in C_0\mathcal{D}(u)} \mathrm{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1,n} \tag{12}$$

$$(\inf_{h \in \mathcal{D}(æ)} \mathrm{r}_{1,i}(h) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \inf_{h \in C_0\mathcal{D}(u)} \mathrm{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1,n}), \tag{13}$$

где $\mathcal{D}(æ)$ — максимальный (минимальный) элемент в множестве $\Lambda(\mathcal{U})$. $C_0\mathcal{D}(æ)$ — максимальный (минимальный) элемент в множестве $\mathrm{B}(\mathcal{U})$.

Справедливость теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1 и лемм 3, 4, 5.

Т е о р е м а 3.

Для элемента æ выполняется система равенств:

$$\inf_{h \in \mathcal{D}(t)} \mathrm{r}_{1,i}(h) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{h \in T(u)} \mathrm{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$(\inf_{h \in \mathcal{D}(t)} \mathrm{r}_{1,i}(h) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \inf_{h \in T(u)} \mathrm{r}_{1,i}(h), \quad i = \overline{1,n}), \tag{15}$$

где $\mathcal{D}(æ)$ — ℓ-максимальный (ℓ-минимальный) элемент в множестве $\Lambda(\mathcal{U})$,

$$T(u) = T_1(u_1) \times \ldots \times T_n(u_n),$$

$$\mathcal{D}_i(u_i) \subset T_i(u_i) \subset C_0\mathcal{D}_i(u_i), \quad i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Справедливость теоремы 3 непосредственно следует из теоремы 2 и соотношений (16).

Л е м м а 6.

Справедливо выражение

$$\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}(\mathfrak{s}(u)) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}, \tag{17}$$

где $\mathcal{D}(u) = [\mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)] \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(u)) = [\mathcal{D}_1(\mathfrak{s}_1(u_1))\times \ldots \ldots \times \mathcal{D}_n(\mathfrak{s}_n(u_n))] \in \mathrm{C}(\mathcal{P})$, $\mathfrak{s}(u) = [\mathfrak{s}_1(u_1), \ldots, \mathfrak{s}_n(u_n)] \in \mathcal{P}$, $\mathfrak{s}_i(u_i) = [\mathfrak{s}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{s}_{i,m(i)}]$ — *стохастический вектор, обладающий свойством* $\mathfrak{s}_{i,u_i} = 1$, $\mathfrak{s}_{i,j} = 0$ *при* $j \neq u_i$, $i = \overline{1,n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из определения $\mathcal{D}_i(\mathfrak{s}_i)$, приведенного в начале § 5.3, где $i = \overline{1,n}$, получаем, что множества $\mathcal{D}_i(u_i)$, $i = \overline{1,n}$, тождественно совпадают с соответствующими множествами $\mathcal{D}_i(\mathfrak{s}_i(u_i))$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно справедливо выражение (17).

Лемма 6 доказана.

Т е о р е м а 4.

Элемент $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(æ))$ *является* ℓ*-максимальным элементом в множестве* $\mathrm{C}(\mathcal{P})$, *где* $\mathcal{D}(æ)$ — *любой* $(n+2)$*-максимальный элемент в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим два следующих альтернативных случая.

1. Пусть в множестве $\mathcal{D}(æ)$ не существует $(n+2)$-минимального элемента. Тогда, применив процедуру II к множеству $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, получим, в силу леммы 3 п. 5.2.1, существование таких последовательностей $\mathcal{P}_1 = \{\varepsilon_m, m = \overline{1,\infty}\}$, $\mathrm{L} = \{t(k(æ), \varepsilon_m), m = \overline{1,\infty}\}$, для которых выполнятся система соотношений:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m))] \neq \varnothing, \\ i = \overline{1,n}, \quad u_i = \overline{1, m}(i), \quad m = \overline{1,\infty},\end{gathered} \tag{18}$$

где $\varepsilon_m > 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$, $t(k(æ), \varepsilon_m)$ — $(k(æ), \varepsilon_m)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(æ)$, $\mathcal{D}(æ)$ — $(n+2)$-максимальный элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $k(æ) = \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell, æ) = \varnothing,\ \ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}$.

Произвольным образом выберем из множества $\mathcal{D}(æ)$ элемент $h(æ)$. Тогда из лемм 1, 2 (пункт 3) п. 4.1.2 следует, что существует такое целое число $m(0)$, для которого выполняется соотношение

$$h(æ) \overset{k(t)}{\succ} t(k(æ), \varepsilon_{m(0)}). \tag{19}$$

Соотношение (19), в силу леммы 2 (пункт 3) § 3.2, влечет справедливость выражения

$$h(æ) \overset{n+2}{\succ} t(k(æ), \varepsilon_{m(0)}). \tag{20}$$

Из выражения (18) следует, что для любого $u = [u_1, \ldots, u_n]$, где $u \in \mathcal{U}$, $u_i \in \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1,n}$ из множества $\mathcal{D}(u) \in \mathrm{A}(\mathcal{U})$ можно выбрать элемент $t(u) = [t_1(u_1), \ldots, t_n(u_n)]$, для которого справедливо выражение

$$t_i(u_i) \in [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(æ), \varepsilon_{m(0)})) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(æ), \varepsilon_{m(0)}))]. \qquad (21)$$

Теперь произвольным образом выберем $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n] \in \mathcal{P}$ и сформируем элемент $h(\mathfrak{s}) = [h_1(\mathfrak{s}_1), \ldots, h_n(\mathfrak{s}_n)] \in \mathcal{D}(\mathfrak{s})$ следующим образом:

$$h_i(\mathfrak{s}_i) = \sum_{j=1}^{m(i)} \mathfrak{s}_{i,j} \cdot t_i(j), \quad i = \overline{1,n} \qquad (22)$$

Из выражений (21), (22), леммы 2 § 4.3 и определений множеств $\mathrm{H}_i^-(n+3,\cdot)$, $\mathrm{H}_i^0(n+3,\cdot)$, $i = \overline{1,n}$, следует справедливость выражения

$$h_i(\mathfrak{s}_i) \subset [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(æ), \varepsilon_{m(0)})) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(æ), \varepsilon_{m(0)}))], \quad i = \overline{1,n}. \qquad (23)$$

Выражение (23) и теорема 3 § 3.2 влекут справедливость выражения

$$t(k(æ), \varepsilon_{m(0)})) \overset{n+2}{\succcurlyeq} h(\mathfrak{s}). \qquad (24)$$

Из выражений (20) и (24) следует, что выполняются соотношения

$$h(æ) \overset{n+2}{\succ} h(\mathfrak{s}) \quad \forall\, \mathfrak{s} \in \mathcal{P}. \qquad (25)$$

Из соотношений (25), леммы 6 и определения 2 § 5.1 следует, что $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(æ))$ является $(n+2)$-максимальным элементом в множестве $\mathrm{C}(\mathcal{P})$. Из последнего утверждения и леммы 6 (пункт 1) § 5.1 следует справедливость теоремы 4 для рассматриваемого случая.

2. Пусть в множестве $\mathcal{D}(æ)$ имеется $(n+2)$-минимальный элемент $t(æ)$, т.е. справедливо выражение $\mathcal{D}_0(\ell, æ) \neq \varnothing$ $\forall\, \ell \in \{1, \ldots, n+2\}$. Тогда, применив процедуру II к множеству $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, получим, в силу леммы 2 (пункт 2) п. 4.1.2 и леммы 3 п. 5.2.1, выполнение соотношений

$$\mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(æ)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(æ))] \neq \varnothing, \quad u_i = \overline{1, m}(i), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (26)$$

Далее, проведя рассуждения, аналогичные приведенным в п. 1 настоящего доказательства, докажем справедливость теоремы 4 для рассматриваемого случая.

Из содержания п.п. 1, 2 следует справедливость теоремы 4.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5.

Элемент $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(æ))$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathrm{C}(\mathcal{P})$, где $\mathcal{D}(æ)$ — любой $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

Рассмотрим два следующих альтернативных случая.

1. Пусть в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ существует $(n+2)$-минимальный элемент h, где $\mathcal{D}(\mathcal{U}) = \mathcal{D}_1(\mathcal{U}_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\mathcal{U}_n)$, $\mathcal{D}_i(\mathcal{U}_i) = \bigcup\limits_{u_i \in \mathcal{U}_i} \mathcal{D}_i(u_i)$, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда, в силу леммы 3, $\mathcal{D}(\text{æ})$, для которого справедливо выражение $h \in \mathcal{D}(\text{æ})$, является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\Lambda(\mathcal{U})$. При этом выполняется система соотношений

$$\mathcal{D}_i(j) \subset [\mathrm{H}_i^+(n+3, h) + \mathrm{H}_i^0(n+3, h)], \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}(i). \tag{27}$$

Теперь произвольным образом выберем элемент $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n] \in \mathcal{P}$ и из множества $\mathcal{D}(\mathfrak{s})$ произвольно выберем элемент $h(\mathfrak{s}) = [h_1(\mathfrak{s}_1), \ldots \ldots, h_n(\mathfrak{s}_n)] \in \mathcal{D}(\mathfrak{s})$, где

$$h_i(\mathfrak{s}_i) = \sum_{j=1}^{m(i)} \mathfrak{s}_{i,j} \cdot t_i(j), \quad i = \overline{1, n}, \tag{28}$$

$$t_i(j) \in \mathcal{D}_i(j), \quad j = \overline{1, m}(i). \tag{29}$$

Из выражений (27)–(29), леммы 2 § 4.3 и определений множеств $\mathrm{H}_i^+(n+ + 3, \cdot)$, $\mathrm{H}_i^0(n+3, \cdot)$, $i = \overline{1, n}$, следует справедливость выражения

$$h_i(\mathfrak{s}_i) \in [\mathrm{H}_i^+(n+3, h) + \mathrm{H}_i^0(n+3, h)], \quad i = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Выражение (30) и теорема 6 § 3.2 влечет справедливость выражения

$$h \overset{n+2}{\preccurlyeq} h(\mathfrak{s}) \quad \forall\, [\mathfrak{s} \in \mathcal{P}, \ \ h(\mathfrak{s}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{s})]. \tag{31}$$

Из выражения (31) и определения 3 § 5.1 следует, что $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(\text{æ})) = \mathcal{D}(\text{æ})$ является $(n+2)$-минимальным, а следовательно и ℓ-минимальным, элементом в множестве $\mathrm{C}(\mathcal{P})$. Из этого утверждения и леммы 6 (пункт 1) § 5.1 следует справедливость теоремы 5 для рассматриваемого случая.

2. Пусть в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ не существует $(n+2)$-минимального элемента.

Применим к множеству $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ процедуру III, изложенную в п. 5.2.2. При этом получим последовательность $\{h(k, \varepsilon_m) \in \mathcal{D}(\text{æ}), \ m = \overline{1, \infty}\}$, где $h(k, \varepsilon_m)$ — (k, ε_m) —минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}(\mathcal{U})$, а следовательно и в множестве $\mathcal{D}(\text{æ})$, $k = \min\{\ell\colon \mathcal{D}_0(\ell, \text{æ}) = \varnothing, \ \ell \in \{1, \ldots, n+2\}\}$. $\mathcal{D}(\text{æ})$, с учетом леммы 4 п. 5.2.2, является $(n+2)$-минимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$, $\{\varepsilon_m, \ m = \overline{1, \infty}\}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю.

Произвольным образом выберем элемент $\mathfrak{s} \in \mathcal{P}$ и из множества $\mathcal{D}(\mathfrak{s})$ произвольно выберем элемент $h(\mathfrak{s})$, для которого справедливы выражения (28), (29).

Сформируем конечное множество $T = T_1 \times \ldots \times T_n$, где $T_i = \{t_i(1), \ldots \ldots, t_i(m(i))\}$, $i = \overline{1, n}$, $t_i(j)$, $j = \overline{1, m}(i)$ — элементы, входящие в конструкцию элемента $h(\mathfrak{s})$, и $t_i(j) \in \mathcal{D}_i(j)$. По построению множество T обладает свойством

$$T \subset \mathcal{D}(\mathcal{U}). \tag{32}$$

По теореме 1 § 4.2 в множестве T имеется $(n+2)$-минимальный элемент h, для которого, в силу теоремы 1 (пункт 2) п. 4.1.1 и леммы 4 § 3.2, справедливо выражение:

$$T_i \subset [\mathrm{H}_i^+(n+3, h) + \mathrm{H}_i^0(n+3, h)], \quad i = \overline{1, n}. \tag{33}$$

Из выражений (28), (33) и леммы 2 § 4.3 следует, что

$$h_i(\mathfrak{s}_i) \in [\mathrm{H}_i^+(n+3, h) + \mathrm{H}_i^0(n+3, h)], \quad i = \overline{1, n}. \tag{34}$$

Выражение (34) и теорема 6 § 3.2 влечет справедливость выражения

$$h \overset{n+2}{\preccurlyeq} h(\mathfrak{s}). \tag{35}$$

Из выражения (32) и лемм 1, 2 (пункт 3) п. 4.1.2 следует, что существует такое число $\varepsilon_{m(0)} > 0$, для которого выполняется соотношение

$$h(k, \varepsilon_{m(0)}) \overset{k}{\prec} h, \tag{36}$$

которое влечет, в силу леммы 2 (пункт 3) § 3.2, выполнение соотношения

$$h(k, \varepsilon_{m(0)}) \overset{n+2}{\prec} h. \tag{37}$$

Из выражений (35), (37) следует справедливость соотношения

$$h(k, \varepsilon_{m(0)}) \overset{n+2}{\prec} h(\mathfrak{s}), \quad \text{где} \ \ h(k, \varepsilon_{m(0)}) \in \mathcal{D}(\text{æ}). \tag{38}$$

Таким образом, для любых $\mathfrak{s} \in \mathcal{P}$, $h(\mathfrak{s}) \in \mathcal{D}(\mathfrak{s})$ в множестве $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(\text{æ})) = \mathcal{D}(\text{æ})$ существует такой элемент $h(k, \varepsilon_{m(0)})$, для которого выполняется соотношение (38), т.е. $\mathcal{D}(\mathfrak{s}(\text{æ}))$ является $(n+2)$-минимальным, а следовательно и ℓ-минимальным, элементом в множестве $\mathrm{C}(\mathcal{P})$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Теорема 5 для рассматриваемого случая доказана.

Теорема 5 доказана.

ГЛАВА 6

1-ЧАСТИЧНАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В МНОЖЕСТВЕ $\mathfrak{G}$ И ЕЕ СВОЙСТВА

В этой главе дается определение 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G} = \mathrm{H}^n \times \ldots \times \mathrm{H}^n \times \ldots$, и приводятся некоторые ее свойства.

Глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе дается определение 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{G}$ и указывается соотношение этой упорядоченности с 1-частичной упорядоченностью в множестве H^n. Даются также определения 1-минимального (1-максимального) и $(1, \varepsilon)$-минимального ($(1, \varepsilon)$-максимального) элементов в множестве $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{G}$, где $\varepsilon > 0$.

Во втором параграфе указываются условия существования 1-минимального (1-максимального) и $(1, \varepsilon)$-минимального ($(1, \varepsilon)$-максимального) элементов в замкнутом множестве $\mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i$ — любое замкнутое подмножество множества H, $i = \overline{1, n}$. Указываются также основные свойства упомянутых элементов.

В третьем параграфе приводятся теоремы существования $(1, \varepsilon)$-минимального и $(1, \varepsilon)$-максимального элементов в $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{D}_i$ — любое подмножество множества H, $i = \overline{1, n}$. Приводятся также основные свойства упомянутых элементов.

6.1. Определение 1-частичной упорядоченности. Минимальные и максимальные элементы в подмножествах множества $\mathfrak{G}$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) = \varliminf_{k \to \infty} \varphi_i(k, \mathfrak{h}), \tag{1}$$

$$\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) = \varlimsup_{k \to \infty} \varphi_i(k, \mathfrak{h}), \tag{2}$$

где $i = \overline{1, n}$, $\varliminf(\cdot)$, $\varlimsup(\cdot)$ — соотвстственно нижний и верхний пределы последовательности $(\cdot)$, $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots] \in \mathfrak{G}$, $h^{(k)} \in \mathrm{H}^n$, $k \in \mathcal{N}$, $\varphi_i(k, \mathfrak{h})$ — i-я компонента вектора $\varphi(k, \mathfrak{h})$, определяемого выражением (1) п. 1.1.2, т.е.

$$\varphi(k, \mathfrak{h}) = k^{-1} \varphi_k(\mathfrak{h}), \tag{3}$$

$\varphi_k(\mathfrak{h})$ — вектор, определяемый выражением

$$\varphi_k(\mathfrak{h}) = \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}^{(j-1)} \rho^{(m)}(\mathfrak{h}), \tag{4}$$

$\mathrm{P}^{(0)}(\mathfrak{h})$ — единичная матрица порядка n, $\mathrm{P}^{(k)}(\mathfrak{h}) = \mathrm{P}(h^{(k)})$, $k = \overline{1,\infty}$, $\mathrm{P}(h^{(k)})$ — стохастическая матрица, соответствующая элементу $h^{(k)} \in \mathrm{H}^n$, $h^{(k)}$ — k-я компонента элемента $\mathfrak{h}$, $\rho^{(m)}(\mathfrak{h}) = \rho(h^{(m)}, \mathrm{c})$ — вектор приведенного дохода, соответствующий элементу $h^{(m)} \in \mathrm{H}^n$, $\mathrm{c} \in \mathrm{R}^1$.

Определим 1-частичную упорядоченность в множестве $\mathfrak{G}$ следующим образом: пусть $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — два произвольно выбранных элемента из множества $\mathfrak{G}$, тогда $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}_2$ в том и только в том случае, когда выполняется система неравенств:

$$\begin{aligned} &\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_2), \\ &\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_2), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\varphi_{\text{н}}(\cdot) = [\varphi_{\text{н},1}(\cdot), \ldots, \varphi_{\text{н},n}(\cdot)]^{\mathrm{T}}$, $\varphi_{\text{в}}(\cdot) = [\varphi_{\text{в},1}(\cdot), \ldots, \varphi_{\text{в},n}(\cdot)]^{\mathrm{T}}$. При этом $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\prec} \mathfrak{h}_2$ в том и только в том случае, когда в системе неравенств (5) хотя бы одно неравенство строгое; $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\asymp} \mathfrak{h}_2$ — когда в системе (5) присутствуют только равенства.

Соотношение 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathfrak{G}$ с 1-частичной упорядоченностью в множестве H^n устанавливает следующая теорема.

Т е о р е м а 1.

Пусть $\mathfrak{h}_1$ *и* $\mathfrak{h}_2$ — *два стационарных элемента из множества* $\mathfrak{G}$, *порожденные соответственно элементами* h *и* t *из множества* H^n, *т.е.* $\mathfrak{h}_1 = [h, \ldots, h, \ldots]$, $\mathfrak{h}_2 = [t, \ldots, t, \ldots]$.

Тогда соотношение $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}_2$ *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение* $h \overset{1}{\preccurlyeq} t$.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из определений 1-частичных упорядоченностей соответственно в множествах $\mathfrak{G}$ и H^n, а также соотношений

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{r}_1(h), \tag{6}$$

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_2) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{r}_1(t), \tag{7}$$

где $\mathfrak{h}_1 = [h, \ldots, h, \ldots]$, $\mathfrak{h}_2 = [t, \ldots, t, \ldots]$, $\mathfrak{r}_1(h)$, $\mathfrak{r}_1(t)$ — стационарные характеристики соответственно ОКМЦД $\xi_0(a, h)$ и $\xi_0(a, t)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$.

Пусть $\mathfrak{D}$ — подмножество множества $\mathfrak{G}$. Тогда элемент $\mathfrak{h}_1 \in \mathfrak{D}$ называется 1-минимальным (1-максимальным) элементом в множестве $\mathfrak{D}$, если для любого элемента $\mathfrak{h}_2 \in \mathfrak{D}$ выполняется соотношение $\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}_2$ $(\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\succcurlyeq} \mathfrak{h}_2)$.

Введем следующие обозначения.

$$1. \quad a_{1,i} = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$2. \quad a_{2,i} = \sup\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

$$3. \quad b_{1,i} = \inf\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$$4. \quad b_{2,i} = \sup\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$5. \quad a_\nu = [a_{\nu,1}, \ldots, a_{\nu,n}]^{\mathrm{T}}, \quad b_\nu = [b_{\nu,1}, \ldots, b_{\nu,n}]^{\mathrm{T}}, \quad \nu = 1, 2. \tag{12}$$

Элемент $\mathfrak{h} \in \mathfrak{D}$ называется $(1, \varepsilon)$-минимальным ($(1, \varepsilon)$-максимальным) элементом в множестве $\mathfrak{D}$, если выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) - a_1 < \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \\ \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) - b_1 < \varepsilon \cdot \mathbf{1} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_2 - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) < \varepsilon \cdot \mathbf{1} \\ b_2 - \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) < \varepsilon \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$, $\mathbf{1}$ — n-мерный вектор вида $[1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$.

Понятно, что 1-минимальный (1-максимальный) элемент в множестве $\mathfrak{D}$ является для любого $\varepsilon > 0$ $(1, \varepsilon)$-минимальным ($(1, \varepsilon)$-максимальным) элементом в множестве $\mathfrak{D}$.

6.2. Условия существования минимальных и максимальных элементов в замкнутом множестве

Для формулирования условий существования 1-минимального и $(1, \varepsilon)$-минимального элементов нам понадобятся следующие утверждения.

Л е м м а 1.

Пусть h и t некоторые произвольно выбранные элементы из множества H^n. Тогда для любого $a_0 \in \mathrm{R}^1$ справедливо выражение

$$\rho(h)+\mathrm{P}(h)\cdot[a_0\cdot\mathfrak{r}_1(t)+w_1(t)] = (a_0+1)\cdot\mathfrak{r}_1(t)+w_1(t)+a_0\cdot x_1(h,t)+x_2(h,t), \tag{1}$$

где $\mathfrak{r}_1(t)$, $w_1(t)$ — стационарные характеристики однородной КМЦД $\xi_0(a,t)$, $a \in \mathcal{P}_1$,

$$x_1(h,t) = -[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot \mathfrak{r}_1(t), \tag{2}$$

$$x_2(h,t) = \rho(h) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h)] \cdot w_1(t) - \mathfrak{r}_1(t). \tag{3}$$

Справедливость леммы 1 устанавливается, с учетом выражений (2) и (3), непосредственной проверкой равенства (1).

Л е м м а 2.

Пусть $\{h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, h^{(k+1)}, t\}$, где $k \in \mathcal{N}$, некоторая произвольно выбранная последовательность элементов из множества H^n. Тогда для любого $a_0 \in \mathrm{R}^1$ выполняется следующее равенство:

$$\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{m}\mathrm{P}(h^{(j-1)})\rho(h^{(m)}) = (a_0+k)\cdot\mathfrak{r}_1(t)+w_1(t)+ \\ +\sum_{m=1}^{k}\prod_{j=0}^{m-1}\mathrm{P}(h^{(j)})\cdot[(a_0+k-m)\cdot x_1(h^{(m)},t)+x_2(h^{(m)},t)] - \\ -\prod_{j=1}^{k}\mathrm{P}(h^{(j)})[a_0\cdot\mathfrak{r}_1(t)+w_1(t)-\rho(h^{(k+1)})], \tag{4}$$

где $\mathrm{r}_1(t)$, $w_1(t)$ — *стационарные характеристики однородной* КМЦД $\xi_0(a,t)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$,

$$x_1(h^{(m)},t) = -[\mathrm{E} - \mathrm{P}(h^{(m)})] \cdot \mathrm{r}_1(t), \quad (5)$$

$$x_2(h^{(m)},t) = \rho(h^{(m)}) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h^{(m)})] \cdot w_1(t) - \mathrm{r}_1(t). \quad (6)$$

Доказательство леммы 2 проведем методом математической индукции.

1. Пусть в лемме 2 $k = 1$. Тогда левая часть выражения (4) принимает вид

$$\rho(h^{(1)}) + \mathrm{P}(h^{(1)}) \cdot \rho(h^{(2)}). \quad (7)$$

Выражение (7) запишем в следующем виде:

$$\rho(h^{(1)})+\mathrm{P}(h^{(1)})\cdot[a_0\cdot\mathrm{r}_1(t)+w_1(t)]-\mathrm{P}(h^{(1)})\cdot[a_0\cdot\mathrm{r}_1(t)+w_1(t)-\rho(h^{(2)})]. \quad (8)$$

Используя лемму 1, выражение (8) представим в виде

$$(a_0+1)\cdot\mathrm{r}_1(t) + w_1(t) + a_0\cdot x_1(h^{(1)},t) + x_2(h^{(1)},t) - \\ - \mathrm{P}(h^{(1)})\cdot[a_0\cdot\mathrm{r}_1(t) + w_1(t) - \rho(h^{(2)})]. \quad (9)$$

Выражение (9) представляет собой правую часть выражения (4) при $k = 1$. Справедливость выражения (4) при $k = 1$ доказана.

Пусть выражение (4) справедливо при $k = \ell$, где $\ell \in \mathcal{N}$, тогда покажем, что выражение (4) справедливо и при $k = \ell + 1$.

Запишем левую часть выражения (4) при $k = \ell + 1$ в следующем виде:

$$\rho(h^{(1)}) + \mathrm{P}(h^{(1)})\cdot[\rho(h^{(2)}) + \sum_{m=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{m}\mathrm{P}(h^{(j+1)})\rho(h^{(m+2)})] = \\ = \rho(h^{(1)}) + P(h^{(1)})\cdot[\rho(\zeta^{(1)}) + \sum_{m=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{m}\mathrm{P}(\zeta^{(j)})\rho(\zeta^{(m+1)})], \quad (10)$$

где $\zeta^{(j)} = h^{(j+1)}$, $j = \overline{1, \ell+1}$.

Так как, по предположению, выражение (4) справедливо при $k = \ell$, то его можно применить к выражению, стоящему в квадратных скобках правой части равенства (10). Тогда выражение, стоящее в правой части равенства (22), можно записать следующем образом:

$$\rho(h^{(1)}) + \mathrm{P}(h^{(1)})\cdot[(a_0+\ell)\cdot\mathrm{r}_1(t) + w_1(t) + \\ + \sum_{m=1}^{\ell}\prod_{j=0}^{m-1}\mathrm{P}(\zeta^{(j)})[(a_0+\ell-i)\cdot x_1(\zeta^{(m)},t) + x_2(\zeta^{(m)},t)] - \\ - \prod_{m=1}^{\ell}\mathrm{P}(\zeta^{(m)})\cdot[a_0\cdot\mathrm{r}_1(t) + w_1(t) - \rho(\zeta^{(\ell+1)})], \quad (11)$$

где $\mathrm{P}(\zeta^{(0)}) = \mathrm{E}$ — единичная матрица размерности $n \times n$.

Используя лемму 1, выражение (11) запишем в следующем виде:

$$(a_0 + \ell + 1) \cdot \mathrm{r}_1(t) + w_1(t) + (a_0 + \ell) \cdot x_1(h^{(1)}, t) + x_2(h^{(1)}, t) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\ell} \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{P}(h^{(1)})\mathrm{P}(\zeta^{(j)}) \cdot [(a_0 + \ell - m) \cdot x_1(\zeta^{(m)}, t) + x_2(\zeta^{(m)}, t)] -$$

$$- \prod_{m=1}^{\ell} \mathrm{P}(h^{(1)})\mathrm{P}(\zeta^{(m)})[a_0 \cdot \mathrm{r}_1(t) + w_1(t) - \rho(\zeta^{(\ell+1)})]. \quad (12)$$

Учитывая равенство $\zeta^{(j)} = h^{(j+1)}$, где $j = \overline{1, \ell + 1}$, получим, что выражение (12) представляет собой правую часть выражения (4) при $k = \ell + 1$.

Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3.

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$ является либо конечным множеством, либо линейным многогранником, т.е. выпуклой оболочкой некоторого конечного множества.

Тогда существует такое число $a_0 > 0$, где $a_0 \in \mathrm{R}^1$, что для любого числа $n_0 \geqslant a_0$ и для любого элемента h из множества $\mathcal{D}$ справедливо выражение

$$n_0 \cdot x_{1,i}(h_i, t) + x_{2,i}(h_i, t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

где h_i — i-я компонента элемента h, $i = \overline{1, n}$, t — $(n + 2)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}$ (см. § 4.2 и 4.3),

$$x_{1,i}(h_i, t) = p_i(h_i) \cdot \mathrm{r}_1(t) - \mathrm{r}_{1,i}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$x_{2,i}(h_i, t) = \rho_i(h_i) + p_i(h_i) \cdot w_1(t) - w_{1,i}(t) - \mathrm{r}_{1,i}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$\mathrm{r}_{1,i}(t)$ — i-я компонента вектора $\mathrm{r}_1(t)$, $w_{1,i}(t)$ — i-я компонента вектора $w_1(t)$, $p_i(h_i)$ — i-я строка матрицы $\mathrm{P}(h)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Определим множество T_i, где $i \in \mathrm{J}$, $\mathrm{T}_i \subset \mathrm{H}$, следующим образом: если $\mathcal{D}_i$ является конечным множеством, то $\mathrm{T}_i = \mathcal{D}_i$; если $\mathcal{D}_i$ — линейный многогранник, то T_i представляет собой конечное множество вершин этого многогранника.

Образуем множество $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \times \ldots \times \mathrm{T}_n$. Тогда из теоремы 1 § 4.2 следует, что в T существует $(n + 2)$-минимальный элемент t, который, как следует из теоремы 3 § 4.3 является $(n + 2)$-минимальным элементом в множестве $\mathcal{D}$, так как выполняются включения $\mathrm{T}_i \subseteq \mathcal{D}_i \subseteq C_0\mathrm{T}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Из теоремы 1 § 4.1 (пункт 2) следует, что для элемента t справедливо выражение

$$\mathcal{D}_i \cap \mathrm{H}_i^-(n + 3, t) = \varnothing, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где $\mathrm{H}_i^-(n+3,t)$ — множество, определенное выражением (11) § 3.2. Из выражения (16) и определения множества $\mathrm{H}_i^-(n+3,t)$ следует, что для любого элемента ζ_i из множества T_i выполняется либо неравенство $x_{1,i}(\zeta_i,t) > 0$, и тогда величина $x_{2,i}(\zeta_i,t)$ может быть отрицательной, либо выполняется равенство $x_{1,i}(\zeta_i,t) = 0$, и тогда величина $x_{2,i}(\zeta_i,t)$ неотрицательна, где

$$x_{1,i}(\zeta_i,t) = p_i(\zeta_i)\cdot \mathfrak{r}_1(t) - \mathfrak{r}_{1,i}(t), \tag{17}$$

$$x_{2,i}(\zeta_i,t) = \rho_i(\zeta_i) - w_{1,i}(t) - \mathfrak{r}_{1,i}(t) + p_i(\zeta_i)\cdot w_{1,i}(t). \tag{18}$$

Учитывая, что каждое множество T_i является конечным множеством получим, что существует такое число $a_0 > 0$, что для любого числа n_0, где $n_0 > a_0$, справедливо выражение

$$n_0\cdot x_{1,i}(\zeta_i,t) + x_{2,i}(\zeta_i,t) \geqslant 0, \quad i=\overline{1,n}, \tag{19}$$

где ζ_i — любой элемент из множества T_i.

Пусть h — произвольно выбранный элемент из множества $\mathcal{D}$. Учитывая, что справедливо выражение $Co\mathrm{T}_i \supset \mathcal{D}_i,\ i=\overline{1,n}$, элемент h_i, являющийся i-й компонентой элемента $h,\ h_i\in\mathcal{D}_i,\ i=\overline{1,n}$, представим в виде выпуклой комбинации элементов из множества T_i, т.е. представим в следующем виде:

$$h_i = \sum_{k=1}^{|\mathrm{T}_i|} \alpha_i(k)\cdot\zeta_i^{(k)}, \tag{20}$$

где $\alpha_i(k) \geqslant 0,\ k=\overline{1,|\mathrm{T}_i|},\ \alpha_1(1)+\ldots+\alpha_1(|\mathrm{T}_i|) = 1,\ |\mathrm{T}_i|$ — число элементов в конечном множестве T_i. Из выражения (20) и леммы 2 § 4.3 следует, что справедливо выражение

$$x_{j,i}(h_i,t) = \sum_{k=1}^{|\mathrm{T}_i|} \alpha_i(k)\cdot x_{j,i}(\zeta^{(k)},t), \quad j=1,2. \tag{21}$$

Тогда из выражений (19), (20) следует, что выражение (13) справедливо для всех i из множества J и всех $n_0 > a_0$. Лемма доказана.

Теорема 1.

Пусть дано множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\ldots\times\mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i\subset\mathrm{H},\ i=\overline{1,n}$, таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$, где $i\in\mathrm{J}$, является либо конечным множеством, либо линейным многогранником. Тогда в множестве $\mathfrak{D} = \mathcal{D}\times\ldots\times\mathcal{D}\times\ldots$ существует 1-минимальный стационарный элемент $\mathfrak{h}_0$, порожденный элементом h, т.е. $\mathfrak{h}_0 = [h,\ldots,h,\ldots]$, где h — любой 1-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}$. При этом выполняется соотношение: $\varphi_н(\mathfrak{h}_0) = \varphi_в(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}_1(h)$.

Доказательство.

Из выражений (1), (3) § 6.1, следует, что для любого элемента $\mathfrak{h} \in \mathfrak{D}$ и любого $i \in \mathrm{J}$ выполняется равенство

$$\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) = \varliminf_{k\to\infty} e(i)\cdot(k+1)^{-1}\cdot\sum_{m=1}^{k+1}\prod_{j=1}^{m}\mathrm{P}(h^{(j-1)})\cdot\rho(h^{(m)}), \tag{22}$$

где $e(i) = [a_1,\ldots,a_n]$, $a_j = 0$ при $j \neq i$, $a_i = 1$, $h^{(k)}$ — k-я компонента стратегии $\mathfrak{h}$, $k = \overline{1,n}$.

С учетом равенства (4) выражение (22) можно представить в виде

$$\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) = e(i)\cdot\mathfrak{r}_1(t) + \varliminf_{k\to\infty} e(i)\cdot(k+1)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{k}\prod_{j=0}^{m-1}\mathrm{P}(h^{(j-1)})\cdot[(a_0+k-m)\cdot x_1(h^{(m)},t)+x_2(h^{(m)},t)], \tag{23}$$

где t — $(n+2)$-минимальный элемент в множестве $\mathcal{D}$, $a_0 \in \mathrm{R}^1$.

Из леммы 3 следует, что существует такое число $n_0 \geqslant a_0$, для которого выполняется неравенство

$$n_0\cdot x_1(h^{(m)},t)+x_2(h^{(m)},t)\geqslant 0,\quad\text{где}\ \ m=\overline{1,\infty}. \tag{24}$$

Теперь, учитывая, что $k - m \geqslant 0$, из выражений (23) и (24) получим следующую систему соотношений:

$$\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}) \geqslant \mathfrak{r}_{1,i}(t),\quad i=\overline{1,n}, \tag{25}$$

где $\mathfrak{r}_{1,i}(t)$ — i-я компонента вектора $\mathfrak{r}_1(t)$.

Аналогичным образом показывается, что для любого элемента $\mathfrak{h} \in \mathfrak{D}$ выполняется система соотношений:

$$\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}) \geqslant \mathfrak{r}_{1,i}(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{26}$$

Так как $\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_1) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{r}_1(t)$, где $\mathfrak{h}_1 = [t,\ldots,t,\ldots]$, то системы неравенств (25) и (26) влекут справедливость выражения

$$\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}\quad\forall\,\mathfrak{h}\in\mathfrak{D}, \tag{27}$$

т.е. $\mathfrak{h}_1 = [t,\ldots,t,\ldots]$ является 1-минимальным элементом в множестве $\mathfrak{D}$.

Поскольку для любого 1-минимального элемента h в множестве $\mathcal{D}$ выполняется равенство $\mathfrak{r}_1(h) = \mathfrak{r}_1(t)$, то стационарный элемент $\mathfrak{h}_0 = [h,\ldots,h,\ldots]$ также является 1-минимальным элементом в множестве $\mathfrak{D}$.

Теорема доказана.

Лемма 4.

Пусть имеется замкнутое множество $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, *где* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$. *Тогда выполняются равенства*

$$a_1 = b_1 = \mathfrak{r}(1), \tag{28}$$

где $a_1 = [a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}]^T$, $b_1 = [b_{1,1}, \ldots, b_{1,n}]^T$ *и* $a_{1,i}$, $b_{1,i}$ — *величины, определенные выражениями* (8), (10) § 6.1, $r(1) = [r_1(1), \ldots, r_n(1)]^T$, $r_i(1) = \inf\{r_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство.

Из теоремы 1 § 4.6 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\mathrm{T}_\varepsilon = \mathrm{T}_{\varepsilon,1} \times \ldots \times \mathrm{T}_{\varepsilon,n}$, где $\mathrm{T}_{\varepsilon,i} \subset \mathrm{H}$, $\mathrm{T}_{\varepsilon,i}$ — линейный многогранник, содержащий замкнутое множество $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, что выполняется система неравенств:

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\} - \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathrm{T}_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}. \tag{29}$$

Учитывая, что $\mathrm{T}_{\varepsilon,i}$, $i = \overline{1, n}$, — линейные многогранники, из теоремы 1 получаем, что справедлива система равенств:

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h)\colon h \in \mathrm{T}_\varepsilon\} = \inf\{\varphi_{\mathrm{н},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{T}_\varepsilon\} = \\ = \inf\{\varphi_{\mathrm{в},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{T}_\varepsilon\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{30}$$

где $\mathfrak{T}_\varepsilon = \mathrm{T}_\varepsilon \times \ldots \times \mathrm{T}_\varepsilon \times \ldots$

Тогда, с учетом выражения $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{T}_\varepsilon \ \forall\, \varepsilon > 0$, из соотношений (29) и (30) следует справедливость выражения (28), т.е. лемма 4 доказана.

Теорема 2.

Если множество $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, *где* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, *является замкнутым множеством, то в нем для любого* $\varepsilon > 0$ *имеется* $(1, \varepsilon)$-*минимальный стационарный элемент* $\mathfrak{h}_\varepsilon$, *порожденный* $(1, \varepsilon)$-*минимальным элементом* h_ε *в множестве* $\mathcal{D}$, *т.е.* $\mathfrak{h}_\varepsilon = [h_\varepsilon, \ldots, h_\varepsilon, \ldots]$. *При этом выполняется соотношение*

$$\varphi_{\mathrm{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\mathrm{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon).$$

Доказательство.

Так как $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$, то по теореме 1 п. 4.1.2 для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{D}$ существует $(1, \varepsilon)$-минимальный элемент h_ε, т.е. выполняется система неравенств:

$$\mathfrak{r}_1(h_\varepsilon) - r(1) < \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \tag{31}$$

где $r(1)$ — вектор, определенный в выражении (28).

Поскольку $\mathfrak{D}$ — замкнутое множество, то, в силу леммы 4, из выражения (31) следует система соотношений:

$$\begin{cases} \varphi_{\mathrm{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) - a_1 < \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \\ \varphi_{\mathrm{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) - b_1 < \varepsilon \cdot \mathbf{1}, \end{cases} \tag{32}$$

где $\mathfrak{h}_\varepsilon = [h_\varepsilon, \ldots, h_\varepsilon, \ldots]$, $\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{r}_{1,i}(h_\varepsilon)$.

Выражение (32) указывает на то, что $\mathfrak{h}_\varepsilon$ является $(1, \varepsilon)$-минимальным элементом в множестве $\mathfrak{D}$.

Теорема доказана.

Теорема 3.

Если множество $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, является замкнутым множеством и в множестве $\mathcal{D}$ имеется 1-минимальный элемент h, то $\mathfrak{h}_0 = [h, \ldots, h, \ldots]$ является 1-минимальным элементом в множестве $\mathfrak{D}$. При этом выполняется соотношение

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_0) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}_1(h) = r(1).$$

Справедливость теоремы 3 непосредственно следует из теоремы 2, если учесть, что 1-минимальный элемент h в множестве $\mathcal{D}$ является $(1, \varepsilon)$-минимальным элементом в $\mathcal{D}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Аналогично теоремам 1, 2 и 3 доказываются следующие теоремы 4, 5 и 6.

Теорема 4.

Пусть множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, таково, что каждое множество $\mathcal{D}_i$, где $i \in \mathrm{J}$, является либо конечным множеством, либо линейным многогранником. Тогда в множестве $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$ существует 1-максимальный стационарный элемент $\mathfrak{h}_0$, порожденный элементом h, т.е. $\mathfrak{h}_0 = [h, \ldots, h, \ldots]$, где h любой 1-максимальный элемент в множестве $\mathcal{D}$. При этом выполняется соотношение: $\varphi_н(\mathfrak{h}_0) = \varphi_в(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}_1(h)$.

Теорема 5.

Если множество $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, является замкнутым множеством, то в нем для любого $\varepsilon > 0$ имеется $(1, \varepsilon)$-максимальный стационарный элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon$, порожденный $(1, \varepsilon)$-максимальным элементом h_ε в множестве $\mathcal{D}$, т.е. $\mathfrak{h}_\varepsilon = [h_\varepsilon, \ldots, h_\varepsilon, \ldots]$. При этом выполняется соотношение: $\varphi_н(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_в(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)$.

Теорема 6.

Если множество $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, является замкнутым множеством и в множестве $\mathcal{D}$ имеется 1-максимальный элемент h, то $\mathfrak{h}_0 = [h, \ldots, h, \ldots]$ является 1-максимальным элементом в множестве $\mathfrak{D}$. При этом выполняется соотношение

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_0) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}_1(h).$$

6.3. Теоремы существования $(1, \varepsilon)$-минимального и $(1, \varepsilon)$-максимального элементов

Докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.

Пусть в множестве $\mathfrak{D}_1$ имеется элемент $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots]$, обладающий свойством

$$||h^{(k)} - t|| < \varepsilon^k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где $h^{(k)} \in \mathcal{D}$, $t \in \mathrm{H}^n$, $||h^{(k)} - t|| = \max\{|h_{i,1}^{(k)} - t_{i,1}| + \ldots + |h_{i,n+2}^{(k)} - t_{i,n+2}|\colon i \in \mathrm{J}\}$, $h_{i,j}^{(k)}$, $t_{i,j}$ *— соответствующие компоненты элементов* $h^{(k)}$, t, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n+2}$, $\varepsilon \in]0,1[$. *Тогда для любого* $\nu \in \{0,1,2,\ldots\}$ *справедливы следующие выражения:*

$$1.\quad ||(k-m)\cdot x_1(h^{(\nu+m)},t) + x_2(h^{(\nu+m)},t)|| \leqslant \mathrm{c}_0(k+1)\cdot\varepsilon^{\nu+m}, \qquad (2)$$

где $k > m$, $c_0 \in]0,\infty[$, $m \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ *— множество натуральных чисел,*

$$x_1(h^{(k)},t) = \mathrm{P}(h^{(k)})\cdot \mathfrak{r}_1(t) - \mathfrak{r}_1(t), \qquad (3)$$

$$x_2(h^{(k)},t) = \rho(h^{(k)}) + \mathrm{P}(h^{(k)})\cdot w_1(t) - w_1(t) - \mathfrak{r}_1(t), \qquad (4)$$

$$||x|| = \max\{|x_i|\colon i \in \mathrm{J}\}, \quad x^{\mathrm{T}} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{R}^n;$$

$$2.\quad (k+1)^{-1}\cdot||\sum_{m=1}^{k}\prod_{j=0}^{m-1}\mathrm{P}(h^{(\nu+j)})\cdot[(k-m)\cdot x_1(h^{(\nu+m)},t) + x_2(h^{(\nu+m)},t)]|| \leqslant \mathrm{c}_0\cdot\varepsilon^{\nu+1}\cdot(1-\varepsilon)^{-1}. \qquad (5)$$

Доказательство.

1. Из леммы 5 § 3.2 следует, что выполняются равенства

$$x_1(t,t) = 0, \quad x_2(t,t) = 0. \qquad (6)$$

Используя выражения (3), (4) и (6) для левой части неравенства (2) выписывается следующее соотношение:

$$||(k-m)\cdot x_1(h^{(\nu+m)},t) + x_2(h^{(\nu+m)},t)|| \leqslant (k-m)\cdot||\mathrm{P}(h^{(\nu+m)}) - P(t)||\times \times ||\mathfrak{r}_1(t)|| + ||\rho(h^{(\nu+m)}) - \rho(t)|| + ||\mathrm{P}(h^{(\nu+m)}) - \mathrm{P}(t)||\cdot||w_1(t)||. \qquad (7)$$

Учитывая, что по определению характеристик $\rho(h)$, $\mathrm{P}(h)$, где $h \in \mathrm{H}^n$, справедливы равенства $\mathrm{P}(h) = (h_{i,j})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $\rho(h) = [(h_{1,n+1} - \mathrm{c}\cdot h_{1,n+2}),\ldots,(h_{n,n+1} - \mathrm{c}\cdot h_{n,n+2})]^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{c} \in \mathrm{R}^1$, из выражений (7) и (1) получим неравенства

$$||(k-m)\cdot x_1(h^{(\nu+m)},t) + x_2(h^{(\nu+m)},t)|| \leqslant \mathrm{c}_0\cdot(k+1)\cdot\varepsilon^{\nu+1}, \qquad (8)$$

где $\mathrm{c}_0 = \max\{1, ||r_1(t)||, ||w_1(t)||\}$.

Таким образом, первая часть леммы 1 доказана.

Справедливость второй части леммы 1 непосредственно следует из выражения $||\mathrm{P}(h)|| = 1$ $\forall\, h \in \mathrm{H}^n$, где $||\mathrm{P}(h)|| = \max\{|h_{i,j}| + \ldots + |h_{i,n}|\colon i \in \mathrm{J}\}$, и неравенства (8).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2.

Для любого элемента $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}$ *и любого* $\nu \in \mathcal{N}$ *выполняются неравенства*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) \leqslant \prod_{j=1}^{\nu} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}^{\nu}), \tag{9}$$

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) \geqslant \prod_{j=1}^{\nu} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}^{\nu}), \tag{10}$$

где $h^{(j)}$ — j*-я компонента элемента* $\mathfrak{h}$, $j = \overline{1,\infty}$, $\mathfrak{h}^{\nu} = [h^{(\nu+1)}, \ldots$ $\ldots, h^{(\nu+k+1)}, \ldots] \in \mathfrak{G}$.

Доказательство.

Из определения вектора $\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h})$, данного в § 6.1, следует справедливость соотношений

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) = \varlimsup_{k\to\infty} k^{-1} \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot \rho(h^{(m)}) =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} k^{-1} \sum_{m=\nu+1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot \rho(h^{(m)}) = \varlimsup_{k\to\infty} k^{-1} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \times$$

$$\times [\rho(h^{(\nu+1)}) + \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(h^{(\nu+j)}) \cdot \rho(h^{(\nu+m+1)})] \leqslant \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}^{\nu}), \tag{11}$$

т.е. неравенство (9) доказано.

Аналогично доказывается неравенство (10).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3.

Пусть в множестве $\mathfrak{D}$ *имеется элемент* $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots]$, *обладающий свойством*

$$||h^{(k)} - t|| < \varepsilon^{k}, \quad k = \overline{1,\infty}, \text{ где } t \in \mathrm{H}^{n}, \ \varepsilon \in \,]0,1[. \tag{12}$$

Тогда элемент $\mathfrak{h}$ *обладает следующими свойствами:*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{h}), \tag{13}$$

$$||\varphi(\mathfrak{h}) - \mathfrak{r}_1(t)|| \leqslant \mathrm{c}_0 \cdot \varepsilon \cdot (1-\varepsilon)^{-1}, \tag{14}$$

где

$$\varphi(\mathfrak{h}) = (k+1)^{-1} \cdot \sum_{m=1}^{k+1} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot \rho(h^{(m)}). \tag{15}$$

Доказательство.

1. Доказательство равенства $\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h})$ проведем от противного.

Предположим, что $||\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h})|| = \alpha$, где $\alpha > 0$, и рассмотрим разность $\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h})$. По лемме 2 для этой разности выполняется неравенство

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) \leqslant \prod_{j=1}^{\nu} \mathrm{P}(h^{(j-1)}) \cdot [\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}^{\nu}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}^{\nu})], \tag{16}$$

т.е. справедливо выражение

$$||\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h})|| \leqslant ||\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}^{\nu}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}^{\nu})|| \leqslant \\ \leqslant ||\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}^{\nu}) - \mathfrak{r}_1(t)|| + ||\mathfrak{r}_1(t) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}^{\nu})||. \tag{17}$$

где $\mathfrak{h}^{\nu} = [h^{(\nu+1)}, \ldots, h^{(\nu+1)}, \ldots] \in \mathfrak{D}$.

Используя лемму 2 § 6.2, где $a_0 = 0$, получаем следующее выражение для $\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h})$:

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{r}_1(t) + \varlimsup_{k\to\infty} (k+1)^{-1} \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{P}(h^{(\nu+j)}) \times \\ \times [(k-m)\cdot x_1(h^{(\nu+m)}, t) + x_2(h^{(\nu+m)}, t)]. \tag{18}$$

Из выражения (18) и леммы 1 (пункт 2) следует, что выполняется неравенство

$$||\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}^{\nu}) - \mathfrak{r}_1(t)|| \leqslant \mathrm{c}_0 \cdot \varepsilon^{\nu+1} \cdot (1-\varepsilon)^{-1}. \tag{19}$$

Аналогично неравенству (19) получаем, что

$$||\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}^{\nu}) - \mathfrak{r}_1(t)|| \leqslant \mathrm{c}_0 \cdot \varepsilon^{\nu+1} \cdot (1-\varepsilon)^{-1}. \tag{20}$$

Выражения (17), (19), (20) влекут выполнение для любого $\nu \in \mathcal{N}$ неравенства

$$||\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) - \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h})|| \leqslant 2 \cdot \mathrm{c}_0 \cdot \varepsilon^{\nu+1} \cdot (1-\varepsilon)^{-1}, \tag{21}$$

которое противоречит сделанному предположению.

Указанное противоречие доказывает справедливость выражения (13).

2. Так как для элемента $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots]$ выполняется равенство $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\nu}$ при $\nu = 0$, то из выражения (19), с учетом выражения (13), следует выполнение неравенства (14).

Лемма 3 доказана.

Лемма 4.

Пусть имеется множество $\underline{\mathfrak{D}_1} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, *где* $\mathcal{D} \in \mathrm{H}^n$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, *и пусть элемент* t *из множества* H^n *является предельной точкой множества* $\mathcal{D}$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует такой элемент* $\mathfrak{h} \in \mathfrak{D}_1$, *для которого справедливы выражения*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}) = \varphi(\mathfrak{h}), \tag{22}$$

$$\|\varphi(\mathfrak{h}) - \mathfrak{r}_1(t)\| \leqslant \delta. \tag{23}$$

Доказательство.

Выберем положительное число ε из условия: $\varepsilon < \delta \cdot (c_0 + \delta)^{-1}$, где c_0 — положительное число, определенное в лемме 1. Тогда, в силу того что t — предельная точка множества $\mathcal{D}$, в любой ε-окрестности точки t имеется бесконечно много элементов из множества $\mathcal{D}$, т.е. можно построить элемент $\mathfrak{h} = [h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots]$, где $h^{(k)} \in \mathcal{D}$, $k = \overline{1, \infty}$, обладающий свойством

$$\|h^{(k)} - t\| < \varepsilon^k. \tag{24}$$

При этом по лемме 3 и условию выбора числа ε для элемента $\mathfrak{h}$ выполняются соотношения (22) и (23).

Лемма 4 доказана.

Введем следующие обозначения.

1. $a^{(1)}_{1,i}$, $a^{(1)}_{2,i}$, $b^{(1)}_{1,i}$, $b^{(1)}_{2,i}$ — величины, определяемые соответственно выражениями (8)–(11) § 6.1, в которых положили $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$, где $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{D} \times \ldots \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1, n}$.

2. $a^{(2)}_{1,i}$, $a^{(2)}_{2,i}$, $b^{(2)}_{1,i}$, $b^{(2)}_{2,i}$ — величины, определяемые также выражениями (8)÷(11) § 6.1, в которых положили $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_2$, где $\mathfrak{D}_2$ — замыкание множества $\mathfrak{D}_1$, т.е. $\mathfrak{D}_2 = \bar{\mathcal{D}} \times \ldots \times \bar{\mathcal{D}} \times \ldots$, $\bar{\mathcal{D}}$ — замыкание множества $\mathcal{D}$.

3. $a^{(\nu)}_1 = [a^{(\nu)}_{1,1}, \ldots, a^{(\nu)}_{1,n}]^{\mathrm{T}}$, $b^{(\nu)}_1 = [b^{(\nu)}_{1,1}, \ldots, b^{(\nu)}_{1,n}]^{\mathrm{T}}$.

Отметим, что из леммы 4 § 6.2 следует, что для множества $\mathfrak{D}_2 = \bar{\mathcal{D}} \times \ldots \ldots \times \bar{\mathcal{D}} \times \ldots$ выполняются соотношения

$$a^{(2)}_1 = b^{(2)}_1 = r(1), \tag{25}$$

где $r(1) = [r_1(1), \ldots, r_n(1)]^{\mathrm{T}}$, $r_i(1) = \inf\{r_{1,i}(h)\colon h \in \bar{\mathcal{D}}\}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 1.

1. *Выполняются равенства*

$$a^{(1)}_1 = b^{(1)}_1 = a^{(2)}_1 = b^{(2)}_1 = r(1). \tag{26}$$

2. *Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathfrak{D}_1$ существует $(1, \varepsilon)$-минимальный элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon$, для которого выполняются соотношения*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon), \tag{27}$$

$$\|\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)\| < \varepsilon, \tag{28}$$

где h_ε — любой $(1, \varepsilon)$-минимальный элемент в множестве $\bar{\mathcal{D}}$, $\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon)$ — вектор, определяемый в соответствии с выражением (15).

Доказательство.

Из включения $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$, выражения (25) и определения векторов $a^{(\nu)}_1$, $b^{(\nu)}_1$, $\nu = 1, 2$, следует, что выполняются неравенства

$$b^{(1)}_1 \geqslant a^{(1)}_1 \geqslant r(1) \tag{29}$$

По теореме 1 п. 4.1.2 для любого $\varepsilon > 0$ в множестве имеется $(1, \varepsilon)$-минимальный элемент. Пусть h_ε — любой $(1,\ \varepsilon)$-минимальный элемент в множестве $\bar{\mathcal{D}}$, т.е. такой элемент, для которого выполняется неравенство

$$||r_1(h_\varepsilon) - \mathfrak{r}(1)|| < \varepsilon. \tag{30}$$

Теперь возможны следующие два альтернативных случая.

1. $h_\varepsilon \in \mathcal{D}$.

Тогда, положив $\mathfrak{h}_\varepsilon = [h_\varepsilon, \ldots, h_\varepsilon, \ldots] \in \mathfrak{D}_1$, получим, что справедливо выражение

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi(h_\varepsilon) = \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon), \tag{31}$$

из которого, с учетом (30), следует соотношение

$$||\varphi(h_\varepsilon) - r(1)|| < \varepsilon. \tag{32}$$

2. $h_\varepsilon \not\in \mathcal{D}$.

Тогда h_ε является предельной точкой множества $\mathcal{D}$.

Выберем положительное число δ следующим образом:

$$\delta = \varepsilon - ||\mathfrak{r}_1(h_\varepsilon) - r(1)||. \tag{33}$$

По лемме 4 в множестве $\mathfrak{D}_1$ существует такой элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon$, для которого выполняются соотношения

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon), \tag{34}$$

$$||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)|| < \delta. \tag{35}$$

Для разности $||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - r(1)||$, с учетом (33) и (35), справедливы следующие соотношения:

$$||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - r(1)|| \leqslant ||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)|| + ||\mathfrak{r}_1(h_\varepsilon) - r(1)|| < \varepsilon. \tag{36}$$

Рассмотрение вышеприведенных случаев приводит к следующему результату: для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathfrak{D}_1$ имеется такой элемент $\mathfrak{h}_\varepsilon$, для которого справедливы выражения

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi(h_\varepsilon), \quad ||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \mathfrak{r}_1(\mathfrak{h}_\varepsilon)|| < \varepsilon \quad ||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - r_1(\mathfrak{h}_\varepsilon)|| < \varepsilon. \tag{37}$$

Из последнего утверждения и неравенств (29) непосредственно следует справедливость теоремы 1.

Теорема 1 доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема 2.

Т е о р е м а 2.

1. *Выполняются равенства*

$$a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = a_2^{(2)} = b_2^{(2)} = r(2), \tag{38}$$

где $r(2) = [r_1(2), \ldots, r_n(2)]^T$, $r_i(2) = \sup\{r_{1,i}(h) \colon h \in \bar{\mathcal{D}}\}$, $i = \overline{1, n}$.

2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве* $\mathfrak{D}_1$ *существует* $(1,\varepsilon)$*-максимальный элемент* $\mathfrak{h}_\varepsilon$, *для которого выполняются соотношения*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi(h_\varepsilon), \tag{39}$$

$$||\varphi(\mathfrak{h}_\varepsilon) - \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon)|| < \varepsilon, \tag{40}$$

где h_ε — $(1,\ \varepsilon)$*-максимальный элемент* $\bar{\mathcal{D}}$.

Следствие 1.

Пусть имеется множество $\mathfrak{D}_1 = C_o\mathcal{D} \times \ldots \times C_o\mathcal{D} \times \ldots$, *где* $C_o\mathcal{D} = C_o\mathcal{D}_1 \times \ldots \times C_o\mathcal{D}_n$, $C_o\mathcal{D}_i$ - *выпуклая оболочка множества* $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда справедливы утверждения.

1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве* $\mathfrak{D}_1$ *существует* $(1,\varepsilon)$*-минимальный* ($(1,\ \varepsilon)$*-максимальный*) *элемент* $\mathfrak{h}_\varepsilon$, *для которого выполняется равенство*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon). \tag{41}$$

2. *Если выполняются равенства* $\mathcal{D}_i = \bar{\mathcal{D}}_i$, $i = \overline{1,n}$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве* $\mathfrak{D}_1$ *существует* $(1,\ \varepsilon)$*-минимальный* ($(1,\ \varepsilon)$*-максимальный*) *элемент* $\mathfrak{h}_\varepsilon$, *для которого выполняется соотношение*

$$\mathfrak{h}_\varepsilon = [t_\varepsilon, \ldots, t_\varepsilon, \ldots], \tag{42}$$

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon) = \mathfrak{r}_1(t_\varepsilon), \tag{43}$$

где t_ε — $(1,\ \varepsilon)$*-минимальный* ($(1,\ \varepsilon)$*-максимальный*) *элемент в множестве* $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\bar{\mathcal{D}}_i$ — *замыкание множества* $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$.

3. *Если* $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1,n}$, *являются конечными множествами или линейными многогранниками, то в множестве* $\mathfrak{D}_1$ *существует* 1*-минимальный* (1*-максимальный*) *элемент* $\mathfrak{h}_0$, *для которого выполняются соотношения*

$$\mathfrak{h}_0 = [t, \ldots, t, \ldots], \tag{44}$$

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_0) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}(t), \tag{45}$$

где t — *любой* ℓ*-минимальный* (ℓ*-максимальный*) *элемент в множестве* $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\ell = \overline{1, n+2}$.

Доказательство.

1. Справедливость утверждения пункта 1 непосредственно следует из теоремы 1 и 2.

2. Из теоремы 1 следует, что в множестве $\mathfrak{D}_1$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $(1,\ \varepsilon)$-минимальный элемент $\mathfrak{h}_{1,\varepsilon} = [h_\varepsilon, \ldots, h_\varepsilon, \ldots]$, где h_ε — $(1,\ \varepsilon)$-минимальный элемент в множестве $C_o\mathcal{D} = C_o\mathcal{D}_1 \times \ldots \times C_o\mathcal{D}_n$.

Из леммы 5 § 4.3 следует, что в множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$ имеется элемент t_ε, для которого выполняются соотношения

$$t_\varepsilon \overset{\ell}{\preccurlyeq} h_\varepsilon, \quad \ell = \overline{1, n+2}. \tag{46}$$

Из выражения (46) следуют равенства

$$r_i(1) = \inf\{r_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{C}o\mathcal{D}\} = \inf\{r_{1,i}(h)\colon h \in \mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (47)$$

которые влекут справедливость утверждения: $\mathfrak{h}_\varepsilon = [t_\varepsilon, \ldots, t_\varepsilon, \ldots]$ является $(1, \varepsilon)$-минимальным элементом в множестве $\mathfrak{D}_1$.

Аналогично показывается существование $(1, \varepsilon)$-максимального элемента в множестве $\mathfrak{D}_1$.

Таким образом, справедливость утверждения пункта 2 доказана.

3. Из теоремы 1 § 4.2 и следствия 2 § 4.3 следует, что при выполнении условия утверждения пункта 3 в множестве $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, имеется ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент, который в силу леммы 1 § 4.11 является ℓ-минимальным (ℓ-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{C}o\mathcal{D} = \mathcal{C}o\mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}o\mathcal{D}_n$, где $\ell = \overline{1, n+2}$.

Поскольку любой ℓ-минимальный (ℓ-максимальный) элемент в множестве $\mathcal{C}o\mathcal{D}$ является и 1-минимальным (1-максимальным) элементом в множестве $\mathcal{D}$, то справедливость утверждения пункта 3 следствия 1 непосредственно следует из теоремы 1 (теоремы 4) § 6.2.

Следствие 1 доказано.

ГЛАВА 7

1-ЧАСТИЧНАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В МНОЖЕСТВЕ $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$

В этой главе вводится 1-частичная упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G} = \mathrm{H}^n \times \ldots \times \mathrm{H}^n \times \ldots$, $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ — множество всевозможных подмножеств $\mathfrak{G}$, и устанавливаются некоторые ее свойства.

Глава состоит из трех параграфов.

В первом параграфе даются определения 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ и указывается соотношение 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ с ℓ-частичной упорядоченностью в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$. Даются определения 1-максимального и 1-минимального элементов в подмножестве $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}(\mathfrak{G})$.

Во втором параграфе приводятся теоремы существования 1-максимального и 1-минимального элементов в множествах $\mathfrak{T}_1 = \{\mathfrak{G}_1(s)\colon s \subset \mathrm{S}\}$ и $\mathfrak{T}_{1,0} = \{\mathfrak{G}_1(s(u))\colon u \in \mathcal{U}\}$, где S — множество стратегий, определенное в пп. 1.2.1.1, $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s})$ — множество, определенное выражением (3) пп. 1.2.1.2, $\mathrm{s}(u)$ — стационарная вырожденная стратегия, порожденная управлением u (см. пп. 2.1.1.2), $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$ — множество управлений, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$. Показывается, что 1-максимальный (1-минимальный) элемент $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(\text{æ}))$ в множестве $\mathfrak{T}_{1,0}$ является 1-максимальным (1-минимальным) элементом в множестве $\mathfrak{T}_1$. При этом æ является таким элементом из множества $\mathcal{U}$, для которого $\mathcal{D}(\text{æ})$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \{D(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению u_i, которая определена в п. 1 пп. 1.2.1.2, u_i — i-я компонента управления u, $i = \overline{1, n}$.

В третьем параграфе приводятся теоремы существования 1-максимального и 1-минимального элементов в множествах $\mathfrak{T}_2 = \{\mathfrak{G}(\mathrm{s})\colon \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$ и $\mathfrak{T}_{2,0} = \{\mathfrak{G}(\mathrm{s}(u)) : u \in \mathcal{U}\}$, где $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ множество, определенное выражением (2) пп. 1.2.1.2. Показывается, что 1-максимальный (1-минимальный) элемент $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(\text{æ}))$ в множестве $\mathfrak{T}_{2,0}$ является 1-максимальным (1-минимальным) элементом в множестве $\mathfrak{T}_2$. При этом æ является таким элементом из множества $\mathcal{U}$, для которого $\bar{D}(\text{æ})$ является ℓ-максимальным (ℓ-минимальным) элементом в множестве $\bar{\mathrm{A}}(\mathcal{U}) = \{\bar{\mathcal{D}}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, где $\ell = \overline{1, n+2}$, $\bar{\mathcal{D}}(u)$ — замыкание множества $\mathcal{D}(u)$.

7.1. Определение 1-частичной упорядоченности и ее свойства

Пусть $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ — некоторые произвольно выбранные элементы из множества $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$. Тогда определим 1-частичную упорядоченность в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ следующим образом: $\mathfrak{D}_1$ не превосходит элемент $\mathfrak{D}_2$, т.е. $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2$, в том и только в том случае, если выполняются неравенства:

$$a_1^{(1)} \leqslant a_1^{(2)}, \quad b_1^{(1)} \leqslant b_1^{(2)}, \tag{1}$$

где $a_1^{(\nu)} = [a_{1,1}^{(\nu)}, \ldots, a_{1,n}^{(\nu)}]^{\mathrm{T}}$, $b_1^{(\nu)} = [b_{1,1}^{(\nu)}, \ldots, b_{1,n}^{(\nu)}]^{\mathrm{T}}$, $\nu = 1, 2$, $a_{1,i}^{(\nu)}$, $b_{1,i}^{(\nu)}$ — величины, определенные соответственно выражениями (8) и (10) § 6.1, в которых множество $\mathfrak{D}$ заменено на множество $\mathfrak{D}_\nu$, т.е.

$$a_{1,i}^{(\nu)} = \inf\{\varphi_{\text{н},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}_\nu\}, \tag{2}$$

$$b_{1,i}^{(\nu)} = \inf\{\varphi_{\text{в},i}(\mathfrak{h})\colon \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}_\nu\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Установим некоторые свойства 1-частичной упорядоченности.

Лемма 1.

Пусть $\mathfrak{h}(\varepsilon_m)$ *является* $(1, \varepsilon_m)$*-минимальным элементом в множестве* $\mathfrak{D}_2$, *где* $\mathfrak{D}_2 \in \mathcal{A}(\mathfrak{G})$, $\varepsilon_m > 0$, $m \in \mathcal{N}$, $\varepsilon_m \to 0$, *если* $m \to \infty$.

Тогда, если для любого $m \in \mathcal{N}$ *в множестве* $\mathfrak{D}_1$ *имеется элемент* $\mathfrak{h}_m$, *обладающий свойством* $\mathfrak{h}_m \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}(\varepsilon_m)$, *то выполняется соотношение* $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2$, *где* $\mathfrak{D}_1 \in \mathcal{A}(\mathfrak{G})$.

Справедливость леммы 1 следует непосредственно из определений 1-частичных упорядоченностей в множествах $\mathfrak{G}$ и $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$.

Лемма 2.

Пусть $\mathfrak{h}(\varepsilon_m)$ *является* $(1, \varepsilon_m)$*-минимальным элементом в множестве* $\mathfrak{D}_2$, *где* $\mathfrak{D}_2 \in \mathcal{A}(\mathfrak{G})$, $\varepsilon_m > 0$ *и* $\varepsilon_m \to 0$, *если* $m \to \infty$, $m \in \mathcal{N}$.

Тогда, если для любого $m \in \mathcal{N}$ *в множестве* $\mathfrak{D}_1$ *имеется элемент* $\mathfrak{h}(m)$, *обладающий свойством*

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(m)) < \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)) + \gamma_m \cdot \mathbf{1}, \tag{4}$$

где $\gamma_m > 0$ *и* $\gamma_m \to 0$ *при* $m \to \infty$, *то выполняется соотношение:* $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2$.

Доказательство.

Из определения векторов $\varphi_{\text{в}}(\cdot)$, $\varphi_{\text{н}}(\cdot)$ и условия леммы следует справедливость следующего выражения:

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(m)) \leqslant \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(m)) < \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)) + \gamma_m \cdot \mathbf{1} \quad \forall\, m \in \mathcal{N}. \tag{5}$$

Выражение (5) влечет выполнение системы неравенств (1), т.е. выполняется соотношение $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2$. Лемма доказана.

Лемма 3.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Пусть множество* $\mathfrak{D}_1 \in \mathcal{A}(\mathfrak{G})$ *имеет вид* $\mathfrak{D}_1 = \{[h \ldots, h \ldots]: h \in \mathcal{D}\}$, *где* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда выполняются соотношения*

$$a_{1,i}^{(1)} = b_{1,i}^{(1)} = \inf\{\mathrm{r}_{1,i}(h) : h \in \mathcal{D}\}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

2. *Пусть* $\mathfrak{D}_\nu$, $\nu = 1, 2$, — *элементы множества* $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, *имеющие вид* $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathfrak{D}_2 = \bar{\mathcal{D}} \times \ldots \times \bar{\mathcal{D}} \times \ldots$, *где* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$, $\bar{\mathcal{D}}$ — *замыкание множества* $\mathcal{D}$. *Тогда выполняются соотношения*

$$\mathfrak{D}_1 \overset{1}{=} \mathfrak{D}_2, \tag{7}$$

$$a_{1,i}^{(1)} = a_{1,i}^{(2)} = b_{1,i}^{(1)} = b_{1,i}^{(2)} = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \bar{\mathcal{D}}\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $\mathfrak{r}_{1,i}(h)$ — *i-я компонента вектора* $\mathfrak{r}_1(h)$, $\mathfrak{r}_1(h)$ — *стационарная характеристика однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, $a \in \mathcal{P}_{1,n}$.

Доказательство.

1. Справедливость утверждения пункта 1 следует из непосредственно проверяемого соотношения

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_0) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}_1(h), \tag{9}$$

где $\mathfrak{h}_0 = [h, \ldots, h, \ldots]$, $h \in \mathcal{D}$.

Справедливость утверждения пункта 2 непосредственно следует из теоремы 1 (пункт 1) § 6.3. Лемма 3 доказана.

Лемма 4.

Пусть $\mathfrak{D}_\nu$, $\nu = 1, 2$ — *элементы множества* $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, *имеющие вид* $\mathfrak{D}_\nu = \mathcal{D}(\nu) \times \ldots \times \mathcal{D}(\nu) \times \ldots$, *где* $\mathcal{D}(\nu) = \mathcal{D}_1(\nu) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\nu)$, $\mathcal{D}_i(\nu) \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если выполняется соотношение* $\bar{\mathcal{D}}(1) \overset{\ell}{\Leftarrow} \bar{\mathcal{D}}(2)$, *то* $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2$, *где* $\overset{\ell}{\Leftarrow}$ — *символ* ℓ*-частичной упорядоченности в множестве* $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\bar{\mathcal{D}}(\nu)$ — *замыкание множества* $\mathcal{D}(\nu)$, $\nu = 1, 2$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

2. *Если* $\bar{\mathcal{D}}(1) \overset{\ell}{=} \bar{\mathcal{D}}(2)$, *то* $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{=} \mathfrak{D}_2$.

Доказательство.

Так как из определения ℓ-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$ следует, что для любого $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$ соотношения $\bar{\mathcal{D}}(1) \overset{\ell}{\Leftarrow} \bar{\mathcal{D}}(2)$ и $\bar{\mathcal{D}}(1) \overset{\ell}{=} \bar{\mathcal{D}}(2)$ влекут справедливость соответственно следующих выражений:

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \bar{\mathcal{D}}(1)\} \leqslant \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \bar{\mathcal{D}}(2)\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \bar{\mathcal{D}}(1)\} = \inf\{\mathfrak{r}_{1,i}(h) : h \in \bar{\mathcal{D}}(2)\}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

то справедливость леммы 4 следует непосредственно из леммы 3 и определения 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5.

Пусть элементы $\mathfrak{D}_\nu$, $\nu = 1, 2$, — *элементы множества* $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, *имеющие вид* $\mathfrak{D}_\nu = \{[h \ldots, h \ldots] : h \in \mathcal{D}(\nu)\}$, *где* $\mathcal{D}(\nu) = \mathcal{D}_1(\nu) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(\nu)$, $\mathcal{D}_i(\nu) \subset \mathrm{H}$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если выполняется соотношение* $\mathcal{D}(1) \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}(2)$, *то* $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2$, *где* $\overset{\ell}{\Leftarrow}$ — *символ* ℓ*-частичной упорядоченности в множестве* $\mathcal{A}(\mathrm{H}^n)$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

2. *Если* $\mathcal{D}(1) \overset{\ell}{=} \mathcal{D}(2)$, *то* $\mathfrak{D}_1 \overset{1}{=} \mathfrak{D}_2$.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4, если учесть, что для элемента $\mathfrak{h}_0 = [h, \dots, h, \dots]$, где $h \in \mathrm{H}^n$, выполняются равенства

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_0) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{r}_1(h). \tag{12}$$

Теперь дадим определение 1-максимального (1-минимального) элемента в множестве $\mathfrak{T}$, являющемся некоторым подмножеством множества $\mathcal{A}(\mathfrak{S})$.

Элемент $\mathfrak{D}_1 \in \mathfrak{T}$ называется 1-максимальным (1-минимальным) элементом в множестве $\mathfrak{T}$, если справедливо выражение

$$\mathfrak{D}_2 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_1 \quad \forall\, \mathfrak{D}_2 \in \mathfrak{T} \tag{13}$$

$$(\mathfrak{D}_1 \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{D}_2 \quad \forall\, \mathfrak{D}_2 \in \mathfrak{T}). \tag{14}$$

7.2. Теоремы существования 1-максимального и 1-минимального элементов в множествах $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_{1,0}$

Установим наличие 1-максимального и 1-минимального элементов в множестве $\mathfrak{T}_{1,o} = \{\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(u)) : u \in \mathcal{U}\}$.

Л е м м а 1.

Любой элемент $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(u))$, где $u \in \mathcal{U}$, представляется в виде

$$\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(u)) = \{[h, \dots, h, \dots] : h \in \mathcal{D}(u)\}, \tag{1}$$

где $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению u_i, $i = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из определения стационарной вырожденной стратегии $\mathrm{s}(u)$, порожденной управлением $u = [u_1, \dots, u_n] \in \mathcal{U}$, следует, что выполняется соотношение

$$\mathrm{s}(u) = [\mathfrak{s}(u), \dots, \mathfrak{s}(u), \dots], \tag{2}$$

где $\mathfrak{s}(u) = [\mathfrak{s}_1(u_1), \dots, \mathfrak{s}_n(u_n)]$, $\mathfrak{s}_i(u_i) = [\mathfrak{s}_{i,1}, \dots, \mathfrak{s}_{i,m}(i)]$ — стохастический вектор, обладающий свойством $\mathfrak{s}_{i,u_i} = 1$, $\mathfrak{s}_{i,j} = 0$ при $j \neq u_i$, $i = \overline{1, n}$.

Соотношение (2) и определение множества $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s})$ влекут справедливость выражения (1). Лемма доказана.

Л е м м а 2.

Пусть æ — любой элемент из множества $\mathcal{U}$, для которого элемент $\mathcal{D}(\text{æ})$ является ℓ-максимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, где $\ell \in \{1, \dots, n+2\}$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению u_i, $i = \overline{1, n}$.

Тогда $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(\text{æ}))$ является 1-максимальным элементом в множестве $\mathfrak{T}_{1,0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как для ℓ-максимального элемента $\mathcal{D}(\text{æ})$ в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$ справедливо выражение: $\mathcal{D}(u) \overset{\ell}{\Leftarrow} \mathcal{D}(æ)$ $\forall\ u \in \mathcal{U}$, то в силу леммы 5 § 7.1 и леммы 1 справедливо выражение

$$\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(u)) \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(æ)) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}. \tag{3}$$

Выражение (3) влечет справедливость леммы 2. Лемма 2 доказана.

Теорема 1.

В множестве $\mathfrak{T}_{1,0}$ существует 1-максимальный элемент $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(æ))$, где æ — любой элемент из множества $\mathcal{U}$, для которого элемент $\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-максимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \in \mathcal{U}\}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Доказательство.

Так как из теоремы 1 п. 5.2.1 следует, что в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$ имеется ℓ-максимальный элемент $\mathcal{D}(æ)$, то справедливость теоремы 1 устанавливается леммой 2. Теорема 1 доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается теорема 2.

Теорема 2.

В множестве $\mathfrak{T}_{1,0}$ существует 1-минимальный элемент $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(æ))$, где æ — любой элемент из множества $\mathcal{U}$, для которого элемент $\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, $\ell \in \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Теперь установим наличие 1-максимального и 1-минимального элементов в множестве $\mathfrak{T}_1 = \{\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}) : \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$.

Теорема 3.

В множестве $\mathfrak{T}_1$ существует 1-максимальный элемент $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(æ))$, где $\mathfrak{S}_1(\mathrm{s}(æ))$ является 1-максимальным элементом в множестве $\mathfrak{T}_{1,0}$. При этом æ — любой элемент из множества $\mathcal{U}$, для которого $\mathcal{D}(æ)$ является ℓ-максимальным элементом в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, где $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению u_i, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство.

По теореме 1 п. 5.2.1 в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U})$ имеется ℓ-максимальный элемент $\mathcal{D}(æ)$, в котором имеется последовательность $(k(æ), \varepsilon_m)$-минимальных элементов $\{t(k(æ), \varepsilon_m),\ m = \overline{1, \infty}\}$, обладающая свойством

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_i(u_i) \cap [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m))] \neq \varnothing, \\ i = \overline{1, n}, \quad u_i = \overline{1, m(i)}, \quad m = \overline{1, \infty}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $k(æ)$ — число, определенное выражением (23) п. 5.2.1.

Построим конечное множество $\mathcal{D}(m)$ следующим образом: $\mathcal{D}(m) = = \mathcal{D}_1(m) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(m)$, где $\mathcal{D}_i(m) = \{t_i(k(æ), \varepsilon_m), h_i(1), \ldots, h_i(m(i))\}$, $t_i(k(æ), \varepsilon_m)$ — i-я компонента элемента $t(k(æ), \varepsilon_m)$, $h_i(u_i)$ — элемент из пересечения множеств, определяемого выражением (4), $i = \overline{1, n}$, $u_i = = \overline{1, m(i)}$. Из определения конечных множеств $\mathcal{D}_i(m)$, $i = \overline{1, n}$, следует, что для любого $m \in \mathcal{N}$ выполняются включения

$$\mathcal{D}_i(m) \subset [\mathrm{H}_i^-(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m)) + \mathrm{H}_i^0(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m))], \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

т.е. $\mathcal{D}_i^+(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m)) = \mathcal{D}_i(m) \cap \mathrm{H}_i^+(n+3, t(k(æ), \varepsilon_m)) = \varnothing$, $i = \overline{1,n}$, из которых, в силу следствия 3 п. 4.1.1 и теоремы 1 § 4.3, следует, что $t(k(æ), \varepsilon_m)$ является $(n+2)$-максимальным элементом как в множестве $\mathcal{D}(m)$, так и в множестве $Co\mathcal{D}(m) = Co\mathcal{D}_1(m) \times \ldots \times Co\mathcal{D}_n(m)$, где $Co\mathcal{D}_i(m)$ — выпуклая оболочка (замкнутый линейный многогранник) конечного множества $\mathcal{D}_i(m)$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть s — произвольно выбранная стратегия из множества S, тогда $\mathfrak{h}(\mathrm{s}) = [h^{(1)}(\mathrm{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathrm{s}^{(k)}), \ldots]$, где $h^{(k)}(\mathrm{s}^{(k)}) = [h_1^{(k)}(\mathrm{s}_1^{(k)}), \ldots \ldots, h_n^{(k)}(\mathrm{s}_n^{(k)})]$, $h_i^{(k)}(\mathrm{s}_i^{(k)}) = \mathrm{s}_{i,1}^{(k)} \cdot h_i(1) + \ldots + \mathrm{s}_{i,m(i)}^{(k)} \cdot h_i(m(i))$, $\mathrm{s}_i^{(k)}$, $\mathrm{s}^{(k)}$ — соответствующие компоненты стратегии s, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,\infty}$, является по построению элементом как множества $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s})$, так и множества $Co\mathfrak{D}(m) = Co\mathcal{D}(m) \times \ldots \times Co\mathcal{D}(m) \times \ldots$

Так как множества $Co\mathcal{D}_i(m)$, $i = \overline{1,n}$, являются линейными многогранниками и элемент $t(k(æ), \varepsilon_m)$ является $(n+2)$-максимальным, а следовательно 1-максимальным, элементом в множестве $Co\mathcal{D}(m) = Co\mathcal{D}_1(m) \times \ldots \ldots \times Co\mathcal{D}_n(m)$ и не зависит от стратегии s, то из теоремы 4 § 6.2 следует, что справедливо выражение

$$\mathfrak{h}(\mathrm{s}) \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}(\varepsilon_m) \quad \forall\, \mathrm{s} \in \mathrm{S}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{h}(\varepsilon_m) = (t(k(æ), \varepsilon_m), \ldots, t(k(æ), \varepsilon_m), \ldots)$ — 1-максимальный элемент в множестве множества $Co\mathfrak{D}(m) = Co\mathcal{D}(m) \times \ldots \times Co\mathcal{D}(m) \times \ldots$

Так как $t(k(æ), \varepsilon_m)$ является $(k(æ), \varepsilon_m)$-минимальным, а следовательно и $(1,\ \varepsilon_m)$-минимальным, элементом в множестве $\mathcal{D}(æ) = \mathcal{D}_1(æ_1) \times \ldots \ldots \times \mathcal{D}_n(æ_n)$, то из леммы 3 (п. 1) § 7.1 следует, что $\mathfrak{h}(\varepsilon_m)$ является $(1,\ \varepsilon_m)$-минимальным элементом в множестве $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(æ)) = \{[h, \ldots, h, \ldots]\colon h \in \mathcal{D}(æ)\}$.

Выражение (6) и лемма 1 § 7.1 влекут справедливость выражения

$$\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}) \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(æ)) \quad \forall\, \mathrm{s} \in \mathrm{S}, \tag{7}$$

т.е. $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(æ))$ является 1-максимальным элементом в множестве $\mathfrak{T}_1$.

Теорема 3 доказана.

Аналогично теореме 3 доказывается теорема 4.

Т е о р е м а 4.

В множестве $\mathfrak{T}_1$ *существует* 1-*минимальный элемент* $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(æ))$, *где* $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(æ))$ *является* 1-*минимальным элементом в множестве* $\mathfrak{T}_0$. *При этом* $æ$ — *любой элемент из множества* $\mathcal{U}$, *для которого* $\mathcal{D}(æ)$ *является* ℓ-*минимальным элементом в множестве* $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$.

7.3. Теоремы существования 1-максимального и 1-минимального элементов в множествах $\mathfrak{T}_2$ и $\mathfrak{T}_{2,0}$

Установим наличие 1-максимального и 1-минимального элементов в множестве $\mathfrak{T}_{2,0} = \{\mathfrak{G}(\mathrm{s}(u)) : u \in \mathcal{U}\}$.

Л е м м а 1.

Любой элемент $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(u)) \in \mathfrak{T}_{2,0}$ *представляется в виде*

$$\mathfrak{G}(\mathrm{s}(u)) = \mathcal{D}(u) \times \ldots \times \mathcal{D}(u) \times \ldots, \tag{1}$$

где $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ *— характеристика неполной информации в состоянии* i, *соответствующая управлению* u_i, *где* $i = \overline{1,n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из определения стационарной вырожденной стратегии, порожденной управлением $u = [u_1, \ldots, u_n]$, следует, что выполняется соотношение

$$\mathrm{s}(u) = [\mathfrak{s}(u), \ldots, \mathfrak{s}(u), \ldots], \tag{2}$$

где $\mathfrak{s}(u) = [\mathfrak{s}_1(u_1), \ldots, \mathfrak{s}_n(u_n)] \in \mathcal{P}$, $\mathfrak{s}_i(u_i) = [\mathfrak{s}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{s}_{i,m(i)}]$ — стохастический вектор, обладающий свойством $\mathfrak{s}_{i,u_i} = 1$, $\mathfrak{s}_{i,j} = 0$ при $j \neq u_i$, $i = \overline{1,n}$.

Соотношение (2) и определение множества $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ влекут справедливость выражения (1).

Лемма доказана.

Л е м м а 2.

Пусть æ *— любой элемент из множества* $\mathcal{U}$, *для которого элемент* $\bar{\mathcal{D}}(æ)$ *является* ℓ*-максимальным элементом в множестве* $\bar{A}(\mathcal{U}) = \{\bar{\mathcal{D}}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, *где* $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$, $\bar{\mathcal{D}}(u)$ *— замыкание множества* $\mathcal{D}(u)$.

Тогда $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ))$ *является* 1*-максимальным элементом в множестве* $\mathfrak{T}_{2,0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как для ℓ-максимального элемента $\bar{\mathcal{D}}(æ)$ в множестве $\bar{A}(\mathcal{U})$ выполняются соотношения: $\bar{\mathcal{D}}(u) \overset{\ell}{\Leftarrow} \bar{\mathcal{D}}(æ)$ $\forall\, u \in \mathcal{U}$, то в силу леммы 4 § 7.1 и леммы 1, справедливо выражение

$$\mathfrak{G}(\mathrm{s}(u)) \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ)) \quad \forall\, u \in \mathcal{U} \tag{3}$$

Выражение (3) влечет справедливость леммы 2. Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 1.

В множестве $\mathfrak{T}_{2,0}$ *существует* 1*-максимальный элемент* $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ))$, *где* $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ)) = \mathcal{D}(æ) \times \ldots \times \mathcal{D}(æ) \times \ldots$, æ *— такой элемент из множества* $\mathcal{U}$, *для которого* $\bar{\mathcal{D}}(æ)$ *является* ℓ*-максимальным элементом в множестве* $\bar{A}(\mathcal{U}) = \{\bar{\mathcal{D}}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как из теоремы 1 п. 5.2.1 следует, что в множестве $\bar{A}(\mathcal{U})$ имеется ℓ-максимальный элемент $\bar{\mathcal{D}}(æ)$, то справедливость теоремы 1 устанавливается леммой 2.

Теорема 1 доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается теорема 2.

Т е о р е м а 2.

В множестве $\mathfrak{T}_{2,0}$ *существует* 1*-минимальный элемент* $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ))$, *где* $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ)) = \mathcal{D}(æ) \times \ldots \times \mathcal{D}(æ) \times \ldots$, æ *— такой элемент из множе-*

ства $\mathcal{U}$, для которого $\bar{\mathcal{D}}(æ)$ является ℓ-минимальным элементом в множестве $\bar{A}(\mathcal{U}) = \{\bar{\mathcal{D}}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Теперь установим существование 1-максимального и 1-минимального элементов в множестве $\mathfrak{T}_2 = \{\mathfrak{G}(s) : s \in S\}$.

Теорема 3.

Пусть каждое множество $\mathcal{D}(u)$, где $u \in \mathcal{U}$, является замкнутым множеством, т.е. $\mathcal{D}(u) = \bar{\mathcal{D}}(u)$.

Тогда в множестве $\mathfrak{T}_2$ существует 1-максимальный элемент $\mathfrak{G}(s(æ))$, где $\mathfrak{G}(s(æ))$ — 1-максимальный элемент в множестве $\mathfrak{T}_{2.0}$, $\mathfrak{G}(s(æ)) = \mathcal{D}(æ) \times \ldots \times \mathcal{D}(æ) \times \ldots$, $\mathcal{D}(æ)$ — ℓ-максимальный элемент в множестве $A(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, $æ \in \mathcal{U}$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

Доказательство теоремы 3 совпадает с доказательством теоремы 3 § 7.2, если в последнем выражения $\mathfrak{G}_1(s)$, $\mathfrak{G}_1(s(æ)) = \{[h, \ldots, h, \ldots] : h \in \mathcal{D}(æ)\}$, $\mathfrak{T}_1$ заменить на $\mathfrak{G}(s)$, $\mathfrak{G}(s(æ)) = \mathcal{D}(æ) \times \ldots \times \mathcal{D}(æ) \times \ldots$, $\mathfrak{T}_2$.

Лемма 3.

Пусть дана последовательность $[h^{(1)}, \ldots, h^{(k)}, \ldots]$, сходящаяся к элементу h со скоростью, определяемой выражением

$$||h^{(k)} - h|| < \varepsilon^k, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{4}$$

где $h^{(k)} \in H^n$, $k = \overline{1, \infty}$, $h \in H^n$, $\varepsilon \in]0, 1[$, и пусть, кроме того, имеется элемент $t \in H^n$, для которого справедливо выражение

$$h_i \in [H_i^-(n+3, t) + H_i^0(n+3, t)], \quad i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

где h_i — i-я компонента элемента h.

Тогда существует такое число $a_0 \in \mathcal{N}$, зависящее от h и t, что для любого $n_0 > a_0$ выполняется неравенство

$$(n_0 + k - m) \cdot x_1(h^{(m)}, t) + x_2(h^{(m)}, t) < (n_0 + k) \cdot c_0 \cdot \varepsilon^m \cdot \mathbf{1}, \tag{6}$$

где $k \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{N}$, $m \leqslant k$, $c_0 > 0$, c_0 — константа, зависящая от t, $\mathbf{1} = [1, \ldots, 1]^T$ — n-мерный единичный вектор,

$$x_1(h^{(m)}, t) = P(h^{(m)}) \cdot \mathfrak{r}_1(t) - \mathfrak{r}_1(t), \tag{7}$$

$$x_2(h^{(m)}, t) = \rho(h^{(m)}) + P(h^{(m)}) \cdot w_1(t) - \mathfrak{r}_1(t) - w_1(t). \tag{8}$$

Доказательство.

Учитывая, что по определению характеристик $\rho(h)$, $P(h)$, справедливы выражения

$$\rho(h^{(m)}) = [h_{1,n+1}^{(m)} - c \cdot h_{1,n+2}^{(m)}, \ldots, h_{n,n+1}^{(m)} - c \cdot h_{n,n+2}^{(m)}]^T, \tag{9}$$

$$P(h^{(m)}) = (h_{i,j}^{(m)}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{10}$$

где $c \in R^1$, $h_{i,n+1}^{(m)} \in [-\beta_0; \beta_0]$, $h_{i,n+2}^{(m)} \in [\alpha_0, \beta_0]$, $\alpha_0 > 0$, $m = \overline{1, \infty}$, из условий данной леммы получим, что выполняется следующее неравенство:

$$(n_0 + k - m) \cdot x_1(h^{(m)}, t) + x_2(h^{(m)}, t) < (n_0 + k - m) \cdot x_1(h, t) + \\ + x_2(h, t) + (n_0 + k) \cdot \varepsilon^m \cdot c_0 \cdot \mathbf{1}, \quad (11)$$

где c_0 — константа, зависящая от компонент векторов $r_1(t)$, $w_1(t)$.

Из определения множеств $H_i^-(n+3, t)$, $H_i^0(n+3, t)$, $i = \overline{1, n}$, и выражения (5) следует, что величина $x_{1,i}(h_i, t)$, где $i = \overline{1, n}$, может быть либо отрицательной, либо равной нулю, при этом, если величина $x_{1,i}(h_i, t)$ отрицательна, то величина $x_{2,i}(h_i, t)$ может быть положительна, а если величина $x_{1,i}(h_i, t)$ равна нулю, то величина $x_{2,i}(h_i, t)$ неположительна. Следовательно, существует такое число $a_0 \in \mathcal{N}$, что для любого $n_0 > a_0$ справедливо выражение: $n_0 \cdot x_1(h, t) + x_2(h, t) \leqslant 0$. Тогда из соотношения $m \leqslant k$ и выражения (11) следует справедливость неравенства (6). Лемма 3 доказана.

Лемма 4.

Пусть имеется такой элемент $t \in H^n$, *для которого справедливо выражение*

$$\bar{\mathcal{D}}_i(u_i) \cap [H_i^-(n+3, t) + H_i^0(n+3, t)] \neq \varnothing, \quad u_i = \overline{1, m}(i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где $\bar{\mathcal{D}}_i(u_i)$ *— замыкание множества* $\mathcal{D}_i(u_i)$.

Тогда для любого $\delta > 0$ *и любой стратегии* $s \in S$ *в множестве* $\mathfrak{G}(s)$ *существует такой элемент* $\mathfrak{h}(s) = [h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots]$, *для которого выполняется неравенство*

$$\varphi_в(\mathfrak{h}(s)) - \mathfrak{r}_1(t) < \delta \cdot \mathbf{1}, \quad (13)$$

где $\mathfrak{s}^{(k)}$ *— соответствующая компонента стратегии* s, $\varphi_в(\mathfrak{h}(s))$ *— вектор, компоненты которого определены выражением* (2) § 6.1, $\mathfrak{G}(s) \in \mathfrak{T}_2$.

Доказательство.

Для каждого элемента i, где $i \in J$, $J = \{1, \ldots, n\}$, определим множества: $I_i(1) = \{u_i \in \mathcal{U}_i : \mathcal{D}_i(u_i) \cap [H_i^-(n+3, t) + H_i^0(n+3, t)] \neq \varnothing\}$, $I_i(2) = \mathcal{U}_i \backslash I_i(1)$, где $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$.

Для каждого элемента $i \in J$ и каждого элемента $u_i \in \mathcal{U}_i$ определим следующим образом элемент $h_i(u_i)$:

$$h_i(u_i) \in \{\mathcal{D}_i(u_i) \cap [H_i^-(n+3, t) + H_i^0(n+3, t)]\}, \text{ если } u_i \in I_i(1), \quad (14)$$

$$h_i(u_i) \in \{\bar{\mathcal{D}}_i(u_i) \cap [H_i^-(n+3, t) + H_i^0(n+3, t)]\}, \text{ если } u_i \in I_i(2). \quad (15)$$

Сформируем последовательности:

$$L_i^{(1)}(u_i) = [\zeta_i^{(1)}(u_i), \ldots, \zeta_i^{(k)}(u_i), \ldots], \quad u_i \in I_i(1), \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где $\zeta_i^{(k)}(u_i) = h_i(u_i)$, $k = \overline{1, \infty}$,

$$\mathrm{L}_i^{(2)}(u_i) = [\zeta_i^{(1)}(u_i), \ldots, \zeta_i^{(k)}(u_i), \ldots], \quad u_i \in \mathrm{I}_i(2), \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где $\zeta_i^{(k)}(u_i) \in \mathcal{D}_i(u_i)$, $k = \overline{1, \infty}$; последовательность $\mathrm{L}_i^{(2)}(u_i)$ сходится к элементу $h_i(u_i) \in \bar{\mathcal{D}}_i(u_i)$ со скоростью, определяемой выражением

$$||\zeta_i^{(k)}(u_i) - h_i(u_i)|| < \varepsilon^k, \quad k = \overline{1, \infty}, \tag{18}$$

где $\varepsilon \in]0, 1[$.

Выберем произвольным образом из множества стратегий S элемент $\mathrm{s} = [\mathfrak{s}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{s}^{(k)}, \ldots]$, $\mathfrak{s}^{(k)} = [\mathrm{s}_1^{(k)}, \ldots, \mathrm{s}_n^{(k)}] \in \mathcal{P}$, $\mathrm{s}_i^{(k)} = [\mathrm{s}_{i,1}^{(k)}, \ldots, \mathrm{s}_{i,m(i)}^{(k)}] \in \mathcal{P}_{1,m(i)}$, $k = \overline{1, \infty}$, $i = \overline{1, n}$.

Построим последовательность $\mathfrak{h}(\mathrm{s}) = [h^{(1)}(\mathfrak{s}^{(1)}), \ldots, h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}), \ldots]$, где

$$h^{(k)}(\mathfrak{s}^{(k)}) = [h_1^{(1)}(\mathrm{s}_1^{(k)}), \ldots, h_n^{(k)}(\mathrm{s}_n^{(k)})],$$

$$h_i^{(k)}(\mathrm{s}_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^{m(i)} \mathrm{s}_{i,j}^{(k)} \cdot \zeta_i^{(k)}(j), \quad k = \overline{1, \infty}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{19}$$

т.е. элемент $h_i^{(k)}(\mathrm{s}_i^{(k)})$ — является выпуклой комбинацией элементов $\zeta_i^{(k)}(1), \ldots, \zeta_i^{(k)}(m(i))$. По построению элемент $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$ принадлежит множеству $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$.

Из леммы 2 § 6.2 следует, что справедливо равенство

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s})) = \mathfrak{r}_1(t) + \varlimsup_{k \to \infty} (k+1)^{-1} \cdot \sum_{m=1}^{k} \prod_{j=0}^{m-1} \mathrm{P}(h^{(j-1)}(\mathfrak{s}^{(j-1)})) \times$$
$$\times [(a_0 + k - m) \cdot x_1(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}), t) + x_2(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}), t)], \tag{20}$$

где $\mathrm{P}(h^{(0)}(\mathfrak{s}^{(0)})) = \mathrm{E}$, $x_1(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}), t) = \mathrm{P}(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)})) \cdot \mathfrak{r}_1(t) - \mathfrak{r}_1(t)$, $x_2(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}), t) = \rho(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)})) - [\mathrm{E} - \mathrm{P}(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}))] \cdot w_1(t) - \mathfrak{r}_1(t)$, a_0 — любое число из множества R^1.

Из выражения (19) и леммы 2 § 4.3 следует, что i-я компонента вектора

$$(a_0 + k - m) \cdot x_1(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}), t) + x_2(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}), t) \tag{21}$$

представляется в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{m(i)} \mathrm{s}_{i,j}^{(m)} [(a_0 + k - m) \cdot x_{1,i}(\zeta_i^{(m)}(j), t) + x_{2,i}(\zeta_i^{(m)}(j), t)]. \tag{22}$$

Теперь, если положить $a_0 = n_0$, то по лемме 3, с учетом выражения (22), справедливо следующее неравенство:

$$(n_0+k-m)\cdot x_1(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}),t)+x_2(h^{(m)}(\mathfrak{s}^{(m)}),t) < (n_0+k)\cdot \mathrm{c}_0\cdot\varepsilon^m\cdot\mathbf{1}, \quad (23)$$

где $\mathrm{c}_0 \in]0,\infty[$.

Из выражения (20), где $a_0 = n_0$, и выражения (23) следует выполнение неравенства

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s})) - \mathfrak{r}_1(t) < \mathrm{c}_0\cdot\varepsilon\cdot(1-\varepsilon)^{-1}\cdot\mathbf{1}. \quad (24)$$

Так как для любого $\varepsilon \in]0,1[$ можно построить последовательность $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$, обладающую свойством (24), то, положив $\varepsilon < \delta\cdot(\mathrm{c}_0+\delta)^{-1}$, получим, что для любого $\delta > 0$ в множестве $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ имеется элемент $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$, для которого справедливо выражение (13). Лемма 4 доказана.

Теорема 4.

В множестве $\mathfrak{T}_2$ существует 1-максимальный элемент $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ))$. При этом $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ))$ является 1-максимальным элементом в множестве $\mathfrak{T}_{2,0}$, где æ — любой элемент из множества $\mathcal{U}$, для которого $\bar{\mathcal{D}}(æ)$ — ℓ-максимальный элемент в множестве $\bar{A}(\mathcal{U}) = \{\bar{\mathcal{D}}(u)\colon u \in \mathcal{U}\}$, $\bar{\mathcal{D}}(u)$ — замыкание множества $\mathcal{D}(u)$, $\ell \in \{1,\ldots,n+2\}$.

Доказательство.

По теореме 1 п. 5.2.1 в множестве $\bar{\mathrm{A}}(\mathcal{U})$ существует ℓ-максимальный элемент $\bar{\mathcal{D}}(æ)$, в котором имеется последовательность $(k(æ),\varepsilon_m)$-минимальных элементов $\{t(k(æ),\varepsilon_m),\ m=\overline{1,\infty}\}$, обладающих свойством

$$\begin{gathered}\bar{\mathcal{D}}_i(u_i)\cap[\mathrm{H}_i^-(n+3,t(k(æ),\varepsilon_m))+\mathrm{H}_i^0(n+3,t(k(æ),\varepsilon_m))] \neq \varnothing,\\ i=\overline{1,n},\quad u_i=\overline{1,m}(i),\end{gathered} \quad (25)$$

где $t(k(æ),\varepsilon_m) \in \bar{\mathcal{D}}(æ)$, $k(æ) \geqslant 1$ и $k(æ)$ — натуральное число, определенное выражением (23) п. 5.2.1.

Выражение (25) и лемма 4, в которой положим $t = t(k(æ),\varepsilon_m)$, влекут справедливость следующего выражения:

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s})) - \mathfrak{r}_1(t(k(æ),\varepsilon_m)) < \delta_m\cdot\mathbf{1} \quad \forall\,[\mathrm{s}\in\mathrm{S},\ m\in\mathcal{N}], \quad (26)$$

где $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$ — некоторый элемент из множества $\mathfrak{G}(\mathrm{s}) \in \mathfrak{T}_2$, $\delta_m > 0$ и $\delta_m \to 0$ при $m\to\infty$.

Из теоремы 1 (пункт 2) § 6.3 следует, что для любого $m \in \mathcal{N}$ в множестве $\mathfrak{G}(\mathrm{s}(æ)) = \mathcal{D}(æ)\times\ldots\times\mathcal{D}(æ)\times\ldots$ имеется $(1,\varepsilon_m)$-минимальный элемент $\mathfrak{h}(\varepsilon_m)$, для которого выполняются соотношения

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)) = \varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)) = \varphi(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)), \quad (27)$$

$$\mathfrak{r}_1(t_{\varepsilon(m)}) < \varphi(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)) + \varepsilon_m\cdot\mathbf{1}, \quad (28)$$

где $t_{\varepsilon(m)}$ — любой $(1,\varepsilon(m))$-минимальный элемент в множестве $\bar{\mathcal{D}}(æ)$.

Так как $(k(æ),\varepsilon_m)$-минимальный элемент $t(k(æ),\varepsilon_m)$ является $(1,\varepsilon_m)$-

минимальным элементом в множестве $\bar{\mathcal{D}}(æ)$, то из выражений (26)–(28) следует справедливость выражения

$$\varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\text{s})) < \varphi(\mathfrak{h}(\varepsilon_m)) + \gamma_m \cdot \mathbf{1} \quad \forall\, (\mathbf{s} \in \mathbf{S},\ \ m \in \mathcal{N}), \tag{29}$$

где $\gamma_m = \varepsilon_m + \delta_m$ и $\gamma_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Из выражения (29), с учетом леммы 2 § 7.1, следует, что

$$\mathfrak{G}(\text{s}) \overset{1}{\Leftarrow} \mathfrak{G}(\text{s}(æ)) \quad \forall\, \text{s} \in \text{S}, \tag{30}$$

т.е. $\mathfrak{G}(\text{s}(æ))$ является 1-максимальным элементом в множестве $\mathfrak{T}_2$.

Теорема 4 доказана.

Аналогично теореме 4 доказывается теорема 5.

Т е о р е м а 5.

В множестве $\mathfrak{T}_2$ *существует* 1-*минимальный элемент* $\mathfrak{G}(\text{s}(æ))$. *При этом* $\mathfrak{G}(\text{s}(æ))$ *является* 1-*минимальным элементом в множестве* $\mathfrak{T}_{2,0}$, *где* $æ$ — *любой элемент из множества* $\mathcal{U}$, *для которого* $\bar{\mathcal{D}}(æ)$ — ℓ-*минимальный элемент в множестве* $\bar{A}(\mathcal{U}) = \{\bar{\mathcal{D}}(u)\colon\ u \in \mathcal{U}\}$, $\bar{\mathcal{D}}(u)$ — *замыкание множества* $\mathcal{D}(u)$, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

ГЛАВА 8

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ КОНЕЧНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

В этой главе устанавливаются основные свойства управляемых конечных марковских цепей (УКМЦ). Большая часть этих свойств была сформулирована в п. 1.1.3 и 1.2.3 в виде утверждений, представляющих собой результаты исследования УКМЦ как с полной, так и с неполной информацией.

Данная глава состоит из двух параграфов.

В первом параграфе излагаются основные свойства УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K}$, введенной в п. 1.1.1.

Во втором параграфе излагаются основные свойства УКМЦ с неполной информацией, как со стационарной, так и с нестационарной характеристикой неполной информации, введенных в п. 1.2.1.

8.1. Основные свойства УКМЦ с полной информацией

В этом параграфе излагаются основные свойства УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K} = [\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$, где S — множество стратегий, определенное выражением (2) пп. 1.1.1.2, $\Xi = \{\xi(a, \mathfrak{h}) \colon a \in \mathcal{P}_{1,n}, \ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}\}$ — множество всех конечных марковских цепей с доходом и ресурсом (КМЦД), определенное выражением (8) пп. 1.1.1.1, $\xi(a, \mathfrak{h})$ — КМЦД, задаваемая совокупностью $(a, \mathfrak{h})$ и определенная в пп. 1.1.1.1, $\mathcal{F} : \mathrm{S} \to \Xi$ — отображение, определяемое выражением (4) пп. 1.1.1.3, т.е. $\mathcal{F}(\mathrm{s}) = \xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}))$, $\mathfrak{h}(\mathrm{s})$ — элемент множества $\mathfrak{G}$, определяемый выражением (1) пп. 1.1.1.3.

Введем частичные упорядоченности в множествах Ξ и S.

Упорядоченности $\overset{1}{\preccurlyeq}$ в множестве $\mathfrak{G}$, определенной в гл. 6, поставим во взаимно однозначное соответствие 1-частичную упорядоченность $\overset{1}{\leqslant}$ в множестве Ξ всех КМЦД следующим образом: пусть $\xi_\nu = \xi(a_\nu, \mathfrak{h}_\nu)$, $\nu = 1, 2,$ — две КМЦД, где $\xi_\nu \in \Xi$, $\nu = 1, 2$, $a_\nu \in \mathcal{P}_{1,n}$, $\mathfrak{h}_\nu \in \mathfrak{G}$; тогда $\xi_1 \overset{1}{\leqslant} \xi_2$ в том и только в том случае, когда выполнится соотношение

$$\mathfrak{h}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathfrak{h}_2.$$

Пусть Φ — любое подмножество из множества Ξ, т.е. $\Phi = \{\xi(a, \mathfrak{h}) : a \in \mathcal{P}_{1,n}, \ \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}\}$, где $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{G}$. Тогда КМЦД $\xi_1 = \xi(a, \mathfrak{h}_1)$ из множества Φ называется 1-минимальной (1-максимальной) КМЦД в Φ тогда и только тогда, когда элемент $\mathfrak{h}_1$ является 1-минимальным (1-максимальным) элементом в множестве $\mathfrak{D}$. При этом КМЦД $\xi_2 = \xi(a, \mathfrak{h}_2)$ называется ε-минимальной (ε-максимальной) КМЦД множестве Φ тогда и только тогда, когда элемент $\mathfrak{h}_2$ является $(1, \varepsilon)$-минимальным ($(1, \varepsilon)$-максимальным)) элементом в множестве $\mathfrak{D}$, где $\varepsilon > 0$.

На множестве $\Xi_0 = \{\xi_0(a,h)\colon a \in \mathcal{P}_{1,n},\ h \in \mathrm{H}^n\}$ однородных КМЦД, где $\Xi_0 \subset \Xi$, $\xi_0(a,h) = \xi(a,\mathfrak{h}_0)$, $\mathfrak{h}_0 = [h,\ldots,h,\ldots]$, определим ℓ-частичную упорядоченность $\overset{\ell}{\leqslant}$, связанную непосредственно с ℓ-частичной упорядоченностью в множестве H^n, определенной в гл. 3. Пусть $\xi_\nu = \xi_0(a,h^{(\nu)})$, $\nu = 1,2,$ — две однородных КМЦД из множества Ξ_0, тогда $\xi_1 \overset{\ell}{\leqslant} \xi_2$ в том и только в том случае, когда выполняется соотношение $h^{(1)} \overset{\ell}{\preccurlyeq} h^{(2)}$, где $\ell = \overline{1,\infty}$. Отметим, что (см. теорему 1 § 6.1) ℓ-частичная упорядоченность в множестве $\Xi_0 \subset \Xi$ при $\ell = 1$ тождественна 1-частичной упорядоченности в множестве Ξ.

Теперь определим 1-частичную упорядоченность $\overset{1}{\preccurlyeq}$ в множестве стратегий S.

Пусть s_1 и s_2 — две стратегии из множества S, тогда $\mathrm{s}_1 \overset{1}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда КМЦД $\mathcal{F}(\mathrm{s}_\nu) = \xi(a,\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu))$, $\nu = 1,2$, удовлетворяют соотношению $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{1}{\leqslant} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2)$.

Стратегия s_1 называется 1-минимальной (1-максимальной) стратегией в множестве S в том и только в том случае, когда КМЦД $\xi(a,\mathfrak{h}(\mathrm{s}_1))$ является I-минимальной (I-максимальной) КМЦД в множестве $\mathcal{F}(\mathrm{S}) = \{\xi(a,\mathfrak{h}(\mathrm{s}))\colon \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$. Стратегия s_ε называется ε-минимальной (ε-максимальной) стратегией в множестве S в том и только в том случае, когда КМЦД $\xi(a,\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\varepsilon))$ является ε-минимальной (ε-максимальной) КМЦД в множестве $\mathcal{F}(\mathrm{S})$, где $\varepsilon > 0$.

В множестве $\mathrm{S}_3 \subset \mathrm{S}$ стационарных вырожденных стратегий, определенном выражением (6) пп. 1.1.1.2, то есть

$$\mathrm{S}_3 = \{\mathrm{s}(u) : u \in \mathcal{U}\}, \tag{1}$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$ — множество управлений, $\mathcal{U}_i \subset \mathrm{R}$, $i = \overline{1,n}$, $\mathrm{s}(u)$ — стационарная вырожденная стратегия, порожденная управлением u, определим ℓ-частичную упорядоченность, где $\ell = 1,2\ldots$

Пусть s_1 и s_2 — две стационарные вырожденные стратегии, тогда $\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2$ в том и только в том случае, когда однородные КМЦД $\mathcal{F}(\mathrm{s}_\nu)$, $\nu = 1,2$, удовлетворяют соотношению: $\mathcal{F}(\mathrm{s}_1) \overset{\ell}{\leqslant} \mathcal{F}(\mathrm{s}_2)$.

Стратегия $\mathrm{s}_1 \in \mathrm{S}_3$ называется ℓ-минимальной (ℓ-максимальной) стратегией в множестве S_3, если справедливо выражение

$$\mathrm{s}_1 \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_2 \quad \forall\, \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}_3 \tag{2}$$

$$(\mathrm{s}_2 \overset{\ell}{\preccurlyeq} \mathrm{s}_1 \quad \forall\, \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}_3). \tag{3}$$

Отметим, что все вышеизложенные определения являются повторением соответствующих определений, приведенных в § 1.1.

Теперь изложим основные свойства УКМЦ с полной информацией.

Теорема 1.

1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве стратегий* S *существуют* ε*-максимальная* (s_1) *и* ε*-минимальная* (s_2) *стратегии. При этом* ε*-максимальная* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}_1))$ *и* ε*-минимальная* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}_1))$ *в множестве* $\mathcal{F}(\mathrm{S})$ *обладают свойством*

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu)) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu)), \quad \nu = 1, 2, \tag{4}$$

где $\mathfrak{h}(\mathrm{s}_1)$, $\mathfrak{h}(\mathrm{s}_2)$ — *соответственно* $(1, \varepsilon)$*-максимальный и* $(1, \varepsilon)$*-минимальный элементы в множестве* $\mathfrak{D} = \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_i = \{h_i(u_i) : u_i \in \mathcal{U}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $h_i(\cdot)$ — *отображение, определенное в* пп. 1.1.1.3, $\varphi_н(\cdot)$, $\varphi_в(\cdot)$ — *векторы, определенные соответственно выражениями* (4) *и* (5) п. 1.1.2.

2. *Если множества* $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, *являются замкнутыми множествами, то справедливы следующие утверждения.*

2.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве стратегий* S *существуют* ε*-максимальная* s_1 *и* ε*-минимальная* s_2 *стационарные вырожденные стратегии, т.е.* $\mathrm{s}_\nu \in \mathrm{S}_3$, $\nu = 1, 2$.

При этом ε*-максимальная однородная* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}_1)) = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)})$ *и* ε*-минимальная однородная* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}_2)) = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)})$, *где* $\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu) = [h_\varepsilon^{(\nu)}, \ldots, h_\varepsilon^{(\nu)}, \ldots]$, $\nu = 1, 2$, *обладают свойством*

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu)) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu)) = \mathfrak{r}_1(h_\varepsilon^\nu), \quad \nu = 1, 2, \tag{5}$$

где $h_\varepsilon^{(1)}$, $h_\varepsilon^{(2)}$ — *соответственно* $(1, \varepsilon)$*-максимальный и* $(1, \varepsilon)$*-минимальный элементы в множестве* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_n$, $\mathfrak{r}_1(\cdot)$ — *вектор, определяемый выражением* (10) п. 1.1.2.

2.2. *Если множества* $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$, *являются конечными множествами или линейными многогранниками, то в множестве* S *существуют* ℓ*-максимальная* $\mathrm{s}_1 = \mathrm{s}(u^{(1)})$ *и* ℓ*-минимальная* $\mathrm{s}_2 = \mathrm{s}(u^{(2)})$ *стационарные вырожденные стратегии, порожденные соответственно управлениями* $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$. *При этом*:

а) *стратегии* s_1 *и* s_2 *являются соответственно* ℓ*-максимальной и* ℓ*-минимальной стратегиями в множестве* S_3, *где* $\ell = \overline{1, \infty}$;

б) *однородные* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu)) = \xi_0(a, h^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, *являются соответственно* ℓ*-максимальной и* ℓ*-минимальной однородными* КМЦД *в множестве* $\Phi_0 = \{\xi_0(a, h) : h \in \mathcal{D},\ a \in \mathcal{P}_{1,n}\}$, $\nu = 1, 2$, *где* $\mathfrak{h}(\mathrm{s}_\nu) = [h^{(\nu)}, \ldots, h^{(\nu)}, \ldots]$, $h^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, — *соответственно* ℓ*-максимальным и* ℓ*-минимальным элементом в множестве* $\mathcal{D}$;

в) *имеется численный итерационный метод, позволяющий отыскать элемент* $h^{(\nu)}$, *а следовательно однородную* КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$ *и стратегию* $\mathrm{s}_\nu = \mathrm{s}(u^{(\nu)})$, *где* $\nu = 1, 2$, *за конечное число итераций.*

Доказательство.

Из определения отображения $\mathcal{F}$ (см. пп. 1.1.1.3) следует, что множество $\mathcal{F}(\mathrm{S}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}(\mathrm{s})) : \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$ может быть представлено в виде $\mathcal{F}(\mathrm{S}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) : \mathfrak{h} \in \mathfrak{D}_1\}$, где $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{C}o\mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{C}o\mathcal{D} \times \ldots$, $\mathcal{C}o\mathcal{D} = \mathcal{C}o\mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}o\mathcal{D}_n$, $\mathcal{C}o\mathcal{D}_i$ — выпуклая оболочка множества $\mathcal{D}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Теперь, с учетом вышеизложенного, справедливость теоремы 1 следует непосредственно из следствия 1 § 6.3, теоремы 1 § 3.2 и итерационных процедур 1*а*, 1*б* § 4.2, позволяющих найти элемент $h^{(\nu)} \in \mathcal{D}$, где $\nu = 1, 2$, а следовательно и такое управление $u^{(\nu)} \in \mathcal{U}$, для которого $h(u^{(\nu)}) = h^{(\nu)}$.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 является основным результатом исследования УКМЦ с полной информацией $\mathcal{K} = [\mathrm{S}, \Xi, \mathcal{F}]$, изложенным в п. 1.1.3.

8.2. Основные свойства УКМЦ с неполной информацией

В этом параграфе излагаются основные свойства как УКМЦ со стационарной характеристикой неполной информации, так и УКМЦ с нестационарной характеристикой неполной информации, рассмотренные в § 1.2. УКМЦ со стационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_1$ и УКМЦ с нестационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_2$ представляют собой следующие математические конструкции: $\mathcal{K}_\nu = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_\nu]$, $\nu = 1, 2$, где S — множество стратегий, определенное выражением (2) пп. 1.1.1.2, $\mathcal{A}(\Xi)$ — множество всех подмножеств множества Ξ конечных марковских цепей с доходом и ресурсом, $\mathcal{F}_\nu : \mathrm{S} \to \mathcal{A}(\Xi)$ — отображение множества стратегий S в множестве $\mathcal{A}(\Xi)$, определенное выражением $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) \colon \mathrm{a} \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}_1(\mathrm{s})\}$, $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}) = \{\xi(a, \mathfrak{h}) \colon \mathrm{a} \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}(\mathrm{s})\}$, $\xi(a, \mathfrak{h})$ — конечная марковская цепь с доходом и ресурсом, задаваемая совокупностью $(a, \mathfrak{h})$ (см. пп. 1.1.1.1), $\mathfrak{G}_1(\mathrm{s})$ — стационарная характеристика неполной информации, соответствующая стратегии s, $\mathfrak{G}(\mathrm{s})$ — нестационарная характеристика неполной информации, соответствующая стратегии s (см. выражения (2), (3) пп. 1.2.1.2).

Введем следующую частичную упорядоченность в множество стратегий S, определяемое выражением (2) пп. 1.1.1.2. Пусть s_1 и s_2 — две стратегии из множества S, тогда соотношение $\mathrm{s}_1 \preccurlyeq \mathrm{s}_2$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\mathcal{F}_\nu(\mathrm{s}_1) \overset{1}{\Leftarrow} \mathcal{F}_\nu(\mathrm{s}_2)$, где $\overset{1}{\Leftarrow}$ — символ 1-частичной упорядоченности в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$, определенной в гл. 7. Стратегия s_1 называется минимальной (максимальной) стратегией в множестве S, если справедливо выражение

$$\mathrm{s}_1 \preccurlyeq \mathrm{s}_2 \quad \forall\, \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S} \tag{1}$$

$$(\mathrm{s}_2 \preccurlyeq \mathrm{s}_1 \quad \forall\, \mathrm{s}_2 \in \mathrm{S}). \tag{2}$$

Отметим, что введенная частичная упорядоченность находится во взаимно однозначном соответствии с 1-частичной упорядоченностью в множестве $\mathcal{A}(\mathfrak{G})$ и является частичной упорядоченностью в множестве S, введенной в п. 1.2.2.

Теперь изложим основные свойства УКМЦ со стационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_1$.

Теорема 1.

1. *В множестве стратегий* S *существуют максимальная* $\mathrm{s}_1 = \mathrm{s}(u^{(1)})$ *и минимальная* $\mathrm{s}_2 = \mathrm{s}(u^{(2)})$ *стратегии, которые являются стационарными*

вырожденными стратегиями, порожденными соответственно управлениями $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$, *где* $u^{(\nu)} \in \mathcal{U}$, $\nu = 1, 2$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_n$ — *множество управлений*, $\mathcal{U}_i = \{1, \ldots, m(i)\}$, $i = \overline{1, n}$.

2. *Для множества* $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu) \subset \Xi$, *где* $\nu = 1, 2$, s_1, s_2 — *соответственно максимальная и минимальная стационарные вырожденные стратегии в множестве* S, *порожденные соответственно управлениями* $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$, *справедливы следующие утверждения.*

2.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *в множестве* $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu)$ *существуют* ε-*максимальная однородная* КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)})$ *и* ε-*минимальная однородная* КМЦД $\xi_2 = \xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)})$, *где* $h_\varepsilon^{(\nu)} \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\mathcal{D}(u^{(\nu)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$ — *характеристика неполной информации в состоянии* i, *соответствующая управлению* $u_i^{(\nu)}$ (*подробней см.* пп. 1.2.1.2), $i = \overline{1, n}$.

2.2. *Если множества* $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, *являются конечными множествами или линейными многогранниками, то в множестве* $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}_\nu)$ *существуют* ℓ-*максимальная однородная* КМЦД $\xi_1 = \xi_0(a, h^{(1)})$ *и* ℓ-*минимальная однородная* КМЦД $\xi_2 = \xi_0(a, h^{(2)})$, *где* $h^{(\nu)} \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, $\ell = \overline{1, \infty}$. *При этом разработан численный итерационный метод, позволяющий отыскать как стратегию* s_ν, *так и однородную* КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$, *где* $\nu = 1, 2$, *за конечное число итераций.*

Доказательство.

1. Из теорем 3 и 4 § 7.2 следует, что в множестве S существуют максимальная $\mathrm{s}(u^{(1)})$ и минимальная $\mathrm{s}(u^{(2)})$ стратегии, где $\mathrm{s}(u^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, — стационарные вырожденные стратегии, порожденные соответственно управлениями $u^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$. При этом $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ — любые элементы из множества $\mathcal{U}$, для которых $\mathcal{D}(u^{(1)})$ и $\mathcal{D}(u^{(2)})$ являются соответственно ℓ-максимальным и ℓ-минимальным элементами в множестве $\mathrm{A}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{D}(u) : u \in \mathcal{U}\}$, где $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $i = \overline{1, n}$, u_i — i-я компонента управления u, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

2. Так как из леммы 1 § 7.2 следуют равенства

$$\mathcal{F}_1(\mathrm{s}(u^{(\nu)})) = \{\xi(a, \mathfrak{2}) : a \in \mathcal{P}_{1,n},\ \mathfrak{h} \in \mathfrak{G}_1(\mathrm{s}(u^{(\nu)}))\} = \\ = \{\xi_0(a, h) : a \in \mathcal{P}_{1,n},\ h \in \mathcal{D}(u^{(\nu)})\}, \quad (3)$$

где $\nu = 1, 2$, то по теореме 1 п. 4.1.2 в множестве $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}(u^{(\nu)}))$ существуют ε-максимальная однородная КМЦД $\xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)}(\nu))$ и ε-минимальная однородная КМЦД $\xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)}(\nu))$, где $h_\varepsilon^{(1)}(\nu)$, $h_\varepsilon^{(2)}(\nu)$ — соответственно $(1, \varepsilon)$-максимальный и $(1, \varepsilon)$-минимальный элементы в множестве $\mathcal{D}(u^{(\nu)})$, ε — любое положительное число.

Пусть $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, являются конечными множествами или линейными многогранниками. Тогда, в силу следствия 2 § 4.3, в множестве $\mathcal{F}_1(\mathrm{s}(u^{(\nu)}))$ существуют ℓ-максимальная однородная КМЦД $\xi_0(a, h^{(1)}(\nu))$ и ℓ-минимальная однородная КМЦД $\xi_0(a, h^{(2)}(\nu))$, где

$h^{(1)}(\nu),\ h^{(2)}(\nu))$ — соответственно ℓ-максимальный и ℓ-минимальный элементы в множестве $\mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\ell = \overline{1, n+2}$. При этом элементы $u^{(\nu)}$, $h^{(1)}(\nu)$, $h^{(2)}(\nu)$, а следовательно и стратегия $\mathrm{s}(u^{(\nu)})$, могут быть определены соответственно итерационной процедурой 1 § 5.2, итерационными процедурами 1*а*, 1*б* § 4.2.

Вышеизложенные утверждения и теорема 1 § 3.2 влекут справедливость теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 является основным результатом исследования УКМЦ со стационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_1 = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_1]$, изложенным в п. 1.2.3.

Из теоремы 1 непосредственно следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 1.

Для любого начального распределения a, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, выполняются следующие соотношения:

$$\sup_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\left[\inf\{\underline{\lim}_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{S}_1(\mathrm{s})\}\right] = \\ = \sup_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\left[\inf\{\overline{\lim}_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{S}_1(\mathrm{s})\}\right] = \\ = \max_{u\in\mathcal{U}}[\inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\mathcal{D}(u)\}] = \inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\mathcal{D}(u^{(1)})\}, \tag{4}$$

$$\inf_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\left[\inf\{\underline{\lim}_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{S}_1(\mathrm{s})\}\right] = \\ = \inf_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\left[\inf\{\underline{\lim}_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{S}_1(\mathrm{s})\}\right] = \\ = \min_{u\in\mathcal{U}}[\inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\mathcal{D}(u)\}] = \inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\mathcal{D}(u^{(2)})\}, \tag{5}$$

где $\varphi(k,\mathfrak{h})$ — вектор, определенный выражением (3) § 6.1, $\mathfrak{r}_1(h) = \pi(h)\cdot\rho(h)$, $\pi(h)$ — матрица финитных вероятностей однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, $\rho(h) = q_1(h) - \mathrm{c}\cdot q_2(h)$, $q_1(h)$, $q_2(h)$ — соответственно векторы дохода и ресурса однородной КМЦД $\xi_0(a,h)$, c — коэффициент приведения и $\mathrm{c}\in\mathrm{R}^1$.

Изложим теперь основные свойства УКМЦ с нестационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_2$.

Теорема 2.

1. *В множестве стратегий* S *существуют максимальная* $\mathrm{s}_1 = \mathrm{s}(u^{(1)})$ *и минимальная* $\mathrm{s}_2 = \mathrm{s}(u^{(2)})$ *стратегии, которые являются стационарными вырожденными стратегиями, порожденными соответственно управлениями* $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$, *где* $u^{(\nu)} \in \mathcal{U}$, $\nu = 1, 2$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1\times\ldots\times\mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_i = \{1,\ldots,m(i)\}$, $i = \overline{1,n}$.

2. *Для множества* $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}_\nu) \subset \Xi$ *справедливы следующие утверждения.*

2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ε-максимальная* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}_\varepsilon^{(1)})$ *и ε-минимальная* КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}_\varepsilon^{(2)})$, *для которых выполняются соотношения*

$$\varphi_{\text{н}}(\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)}) = \varphi_{\text{в}}(\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2, \tag{6}$$

где $\varphi_{\text{н}}(\cdot)$, $\varphi_{\text{в}}(\cdot)$ — векторы, определенные выражениями (4) *и* (5) п. 1.1.2.

2.2. *Для случая, когда множества $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, где $u_i^{(\nu)}$ — i-я компонента управления $u^{(\nu)}$, являются замкнутыми множествами, справедливы следующие утверждения.*

2.2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ε-максимальная однородная* КМЦД $\xi_0(a, h_\varepsilon^{(1)})$ *и ε-минимальная однородная* КМЦД $\xi_0(a, h_\varepsilon^{(2)})$, *где $h_\varepsilon^{(1)}$, $h_\varepsilon^{(2)}$ — соответственно $(1, \varepsilon)$-максимальный и $(1, \varepsilon)$-минимальный элементы в множестве $\mathcal{D}(u^{(\nu)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$.*

2.2.2. *Если множества $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, являются конечными множествами или линейными многогранниками, то в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}_\nu)$ существуют ℓ-максимальная однородная* КМЦД $\xi_0(a, h^{(1)})$ *и ℓ-минимальная однородная* КМЦД $\xi_0(a, h^{(2)})$, *где $h^{(1)}, h^{(2)}$ — соответственно ℓ-максимальный и ℓ-минимальный элементы в множестве $\mathcal{D}(u^{(\nu)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(\nu)})$, $\ell = \overline{1, \infty}$, $\nu = 1, 2$. При этом разработан численный итерационный метод, позволяющий отыскать как стратегию $\mathrm{s}_\nu = \mathrm{s}(u^{(\nu)})$, так и однородную* КМЦД $\xi_0(a, h^{(\nu)})$, *где $\nu = 1, 2$, за конечное число итераций.*

Доказательство.

1. Из теорем 4 и 5 § 7.3 следует, что в множестве S существуют максимальная $\mathrm{s}(u^{(1)})$ и минимальная $\mathrm{s}(u^{(2)})$ стратегии, где $\mathrm{s}(u^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2$, — стационарные вырожденные стратегии, порожденные соответственно управлениями $u^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$. При этом $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ — любые элементы из множества $\mathcal{U}$, для которых $\bar{D}(u^{(1)})$ и $\bar{D}(u^{(2)})$ являются соответственно ℓ-максимальным и ℓ-минимальным элементом в множестве $\bar{A}(\mathcal{U}) = \{\bar{D}(u) \colon u \in \mathcal{U}\}$, где $\bar{D}(u)$ — замыкание множества $\mathcal{D}(u)$, $\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}_1(u_1) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n)$, $\mathcal{D}_i(u_i)$ — характеристика неполной информации в состоянии i, соответствующая управлению u_i, $i = \overline{1, n}$, u_i — i-я компонента управления u, $\ell \in \{1, \ldots, n+2\}$.

2. Так как из леммы 1 § 7.3 следует равенство

$$\mathfrak{S}(\mathrm{s}(u^{(\nu)})) = \mathcal{D}(u^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}(u^{(\nu)}) \times \ldots, \tag{7}$$

где $\mathcal{D}(u^{(\nu)}) = \mathcal{D}_1(u_1^{(\nu)}) \times \ldots \times \mathcal{D}_n(u_n^{(\nu)})$, $i = \overline{1, n}$, $\nu = 1, 2$, $u_i^{(\nu)}$ — i-я компонента управления $u^{(\nu)}$, то по теоремам 1 и 2 § 6.3 в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}(u^{(\nu)}))$ существуют ε-максимальная КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}_\varepsilon^{(1)})$ и ε-минимальная КМЦД $\xi(a, \mathfrak{h}_\varepsilon^{(2)})$, где $\mathfrak{h}_\varepsilon^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$, соответственно $(1, \varepsilon)$-максимальный и $(1, \varepsilon)$-минимальный элементы в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}(u^{(\nu)}))$, ε — любое положительное число. При этом для элементов $\mathfrak{h}_\varepsilon^{(1)}$ и $\mathfrak{h}_\varepsilon^{(2)}$ выполняются соотношения (6).

3. Пусть множества $\mathcal{D}_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = 1, 2$, являются замкнутыми множествами. Тогда справедливость утверждения п. 2.2.1 теоремы 2 следует непосредственно из теорем 2 и 5 § 6.2.

4. Пусть множества $D_i(u_i^{(\nu)})$, $i = \overline{1,n}$, $\nu = 1, 2$, являются конечными множествами или линейными многогранниками. Тогда, в силу следствия 2 § 4.3 и следствия 1 п. 3 § 6.3, в множестве $\mathcal{F}_2(\mathrm{s}(u^{(\nu)}))$ существуют ℓ-максимальная однородная КМЦД $\xi_0(a, h^{(1)}(\nu))$ и ℓ-минимальная однородная КМЦД $\xi_0(a, h^{(2)}(\nu))$, где $h^{(1)}(\nu)$, $h^{(2)}(\nu)$ — соответственно ℓ-максимальный и ℓ-минимальный элементы в множестве $\mathcal{D}(u^{(\nu)})$, $\ell = \overline{1, n+2}$. При этом элементы $u^{(\nu)}$, $h^{(1)}(\nu)$, $h^{(2)}(\nu)$, а следовательно и стратегия $\mathrm{s}(u^{(\nu)})$, могут быть определены итерационными процедурами 1 и 2, изложенными в § 4.2 и 5.2.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что теорема 2 является основным результатом исследования УКМЦ с нестационарной характеристикой неполной информации $\mathcal{K}_2 = [\mathrm{S}, \mathcal{A}(\Xi), \mathcal{F}_2]$, изложенным в п. 1.2.3.

Следствие 2.

Для любого начального распределения a, где $a \in \mathcal{P}_{1,n}$, выполняются следующие соотношения:

$$\sup_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\Big[\inf\{\varliminf_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{G}(\mathrm{s})\}\Big] = \\ = \sup_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\Big[\inf\{\varlimsup_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{G}(\mathrm{s})\}\Big] = \\ = \max_{u\in\mathcal{U}}\big[\inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\bar{\mathcal{D}}(u)\}\big] = \inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\bar{\mathcal{D}}(u^{(1)})\}, \quad (8)$$

$$\inf_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\Big[\inf\{\varliminf_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{G}(\mathrm{s})\}\Big] = \\ = \inf_{\mathrm{s}\in\mathrm{S}}\Big[\inf\{\varliminf_{k\to\infty} a\cdot\varphi(k,\mathfrak{h}) : \mathfrak{h}\in\mathfrak{G}(\mathrm{s})\}\Big] = \\ = \min_{u\in\mathcal{U}}\big[\inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\bar{\mathcal{D}}(u)\}\big] = \inf\{a\cdot\mathfrak{r}_1(h) : h\in\bar{\mathcal{D}}(u^{(2)})\}, \quad (9)$$

где $\varphi(k,\mathfrak{h})$ — вектор, определенный выражением (3) § 6.1, $\mathfrak{r}_1(h) = \pi(h) \times \rho(h)$, $\pi(h)$ — *матрица финитных вероятностей однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, $\rho(h) = q_1(h) - c\cdot q_2(h)$, $q_1(h)$, $q_2(h)$ — *соответственно векторы дохода и ресурса однородной* КМЦД $\xi_0(a,h)$, c — *коэффициент приведения и* $c \in \mathrm{R}^1$, $\bar{D}(u)$ — *замыкание множества* $\mathcal{D}(u)$.

Справедливость следствия 2 непосредственно следует из теоремы 2 и теорем 4, 5 § 7.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа рассматривается автором как первая самостоятельная часть исследований, позволяющая приблизиться к решению проблемы эффективного управления сложной системой с учетом надежности составляющих ее элементов.

Автор монографии в течение длительного времени являлся участником Всесоюзного научного семинара «Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики», возглавляемого академиком Ю.Н. Руденко. На этом семинаре, наряду с изложением результатов, проводилось обсуждение различных научно-технических проблем, одной из которых была проблема повышения технико-экономических показателей как проектируемых, так и эксплуатируемых энергетических систем. Частью упомянутой проблемы является решение задачи эффективного управления сложной системой , обладающей следующими особенностями:

1) поведение системы вполне удовлетворительно описывается управляемым полумарковским процессом;
2) наличие неполной информации о надежностных (вероятностных) характеристиках элементов.

Поскольку многие задачи оптимального управления полумарковским процессом, встречающиеся в приложениях, могут быть сведены к соответствующим задачам оптимального управления конечными марковскими цепями (см., например, раздел 9 в [49]), то исследования, изложенные в настоящей монографии, можно рассматривать как обоснование минимаксного подхода к решению задачи эффективного управления сложной системой, имеющей вышеприведенные особенности.

Необходимо также отметить, что неполная информация о надежностных свойствах сложной системы может иметь характеристики, отличные от рассмотренных в настоящей работе. Это обстоятельство указывает как на необходимость разработки классификации характеристик неполной информации, так и на проведение дальнейших исследований по выявлению их влияния на решение задач управления марковскими цепями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vogel W.* An asymptotie Minimax Theorem for the Two-Armed Bandi Problem. — Ann. Math. Stat. V. 31. P. 444–451.
2. *Derman C.* On sequantial decisions and Markov chains // Manag. Sci. 9. 1. 1962. P. 16–24.
3. *Blackwell D.* Discrete dynamic programming // Ann. Math. Statist. 33. 1962. 719–726.
4. *Висков О.В., Ширяев А.Н.* Об управлениях, приводящих к оптимальным стационарным режимам. Труды Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1964. 35–45.
5. *Ховард Р.* Динамическое программирование и марковские процессы. — М.: Сов. Радио. 1964.
6. *Marting-Lof A.* Optimal control of a continions-time Markov decision chain with periodic transmion probabilities // Operations Pes. 15. 1967. 872–881.
7. *Fabius J., Zwet D.* Some Remarks on the Two-Armed Bandit // — Ann. Math. Stat. 1970. V. 41, № 6. P. 1906–1916.
8. *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. — М.: Наука. 1977.
9. *Ширяев А.Н.* Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. Transacions of 4th Prague Conference on Information Theory, Statistics, Decision Fuctions, Random Processes. Prague, 1967.
10. *Bather I.* Optimal decision procedures for finite Markov chains. Part III: general con-vex system. Adv. Appl. Prob., 5. 3 (1973). 541–553.
11. *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* Управляемые марковские процессы и их приложения. — М.: Наука. 1975.
12. *Читашвили Р.Я.* Управляемая конечная цепь Маркова с произвольным множеством решений. Теория вероятностей и ее применения. 1975. 20, № 4. 855–864.
13. *Файнберг Е.А.* Об управляемых марковских процессах с конечным числом состояний и компактными множествами управлений // Теория вероятностей и ее применения. 1975. 20, № 4. 873–880.
14. *Файнберг Е.А.* О конечных управляемых цепях Маркова // Успехи математических наук. 1977. 32, № 3. 181–182.
15. *Файнберг Е.А.* Существование стационарной ε-оптимальной стратегии // Теория вероятностей и ее применения. 1978. 33, № 2. 313–330.
16. *Файнберг Е.А.* ε-оптимальное управление конечной цепью Маркова при среднем критерии // Теория вероятностей и ее применения. 1980. 35, № 1. 71–82.
17. *Чжун Кай-лай.* Однородные цепи Маркова. — М.: Мир, 1964.
18. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970.
19. *Белоусов Е.Г.* Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. — М.: Изд-во МГУ, 1977.
20. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980.
21. *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М.-Л.: Физматгиз. 1963.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

23. Математическая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1977.

24. *Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А.* Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971.

25. *Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А.* Организация обслуживания при ограниченной информации о надежности системы. — М.: Сов. радио, 1975.

26. *Джевелл В.* Управляемые полумарковские процессы // Кибернетический сборник. Новая серия, вып. 4. — М.: Мир, 1967. 252–268.

27. *Срагович В.Г.* Адаптивное управление. — М.: Наука, 1981.

28. *Пресман Э.Л., Сонин И.М.* Последовательное управление по неполным данным. — М.: Наука, 1982.

29. *Баранов В.В., Подцыкин Н.С., Харыбин Н.И.* Методы оптимальных решений в управляемых марковских системах с ненаблюдаемыми состояниями // Вестник Харьковского университета. 1987. № 298. 49–52.

30. *Великий Ю.А.* Условия сходимости распределений моментов достижения для цепей Маркова // Доклады АН СССР. 1988. А, № 6. 10–12.

31. *Мартыненко О.Н.* Алгоритм исключения неоптимальных стратегий в управляемых марковских процессах // Автоматика. 1988. № 2. 71–73.

32. *Церевадзе Г.Н.* Об агрегировании и укрупнении марковских цепей // Сообщения АН СССР. 1988. 129, № 3. 505–508.

33. *Сарымсаков Т.А.* Основы теории процессов Маркова. — Ташкент: Фан, 1988.

34. *Ядренко В.М.* Об одной экстремальной задаче для цепи Маркова, описывающей простейшее случайное блуждание с отражением. — В сб.: Изб. задачи соврем. теории случ. процессов / Киев, 1988. 116–119.

35. *Grassmann W.* Markov modelling. Winter Simul. Conf. Proc. Arlington, Va, 12–14 Dec., 1983. V. 1. N.Y., № 4. 1983. 613–619.

36. *Nazin A., Poznyak A.* Stochastic. Contr.: Proc. 2 IFAC Symp., Vilnius. 19–23 May. 1966. Oxfort e.a., 1987. 365–369.

37. *Chrzan P.* O pewnym algorytmie rozwiązania zadania optymalizacji niejednorodnego-okresowego łańcucha Markowa // Pr. Nauk. AE Wroclfwin, 1986. № 351. 25–49.

38. *Borkar Vivek S.* Control of Markov chains with loug-run average cost criterion // Stochast. Duffer. Syst., Stochast. Contr. Theory and Appl.: Proc. Workshop. June 9–19, 1986. N.Y. e.a., 1988. 57–77.

39. *Olsder G., Papavassilopoulos G.* A Markov chain game with dynamic information // J. Optimiz. Theory and Appl., 1988. 59. № 3. 467–486.

40. *Seneta E.* Sensitivity to perturbation of the stationary distribution: some refinemens // Linear Algebra and Appl., 1988. 108. 121–126.

41. *Schäl M.* Estimation and control in Markov decision models // Wiss. Z. Tech. Hochsch., Leipzig, 1988. 12. № 3. 187–192.

42. *Rubino G., Sericola B.* On weak lumpability in Markov chains // J. Appl. Probab., 1989. № 3. 446–457.

43. *Semal P., Courtois P.* Stability analysis of large Markov chains. Performance 87: Proc.12th IFIP WG7. 3 Int. Symp. Comput. Performance Modelling, Meas. and Eval., Brussels, 7–9 Dec., 1987. Amsterdam etc., 1988. 363–382.

44. *Filar Jerzy A., Lee Huey-Miin.* Proc. 24th IEEE Conf. Decis. and Contr., Fort Lauderdale, Fla, Dec., 11–13. 1985. V. 2, N.Y., № 4. 1985. 1106–1112.

45. *Kurano Masami.* Markov decision processes with a minimum-variance criterion // J. Math. Anal. and Appl., 1987. 123, № 2. 572–583.

46. *Ohno K.* A value iteration method for undiscounted multichain Markov decision processes // Zor: Z. Oper. Res., 1988. 32, № 2. 71–93.

47. *Schweitzer P.* Solving Markovian decision processes by successeve elimination of variables // J. Math. Anal. and Appl., 1988. 130, № 2. 403–419.

48. *Borkar Vivek S.* Control of Markov chains with loug-run average cost criterion: the dynamic programming equations // SIAM J. Contr. and Optim., 1989. 27, № 3. 642–657.

49. *Карманов А.В., Жуков В.М.* Управляемые конечные марковские цепи с неполной информацией и их приложения. — М.: МГИЭМ, 2000.

50. *Юшкевич А.А.* Проверочные теоремы для марковских процессов принятия решений с управляемым детерминированным сносом // Теория вероятностей и ее применения. 1989. 34, № 3. С. 528–551.

51. *Girlich H.-J., Sokolichin A.A.* Schätzen und Steueru in einem Markoffshen Entsheidungsmodell mit unbekanter Parameterfolge // Wiss. Z. Tech. Hochschule, Leipzig, 1988. 12, № 2.

52. *Команко О.В.* Устойчивость цепей Маркова, порожденных кусочно-линейными преобразованиями. — Киев: Изд-во КГУ, 1990. — 17 с. Деп. в ВИНИТИ 349 Ук. 90.

53. *Боровков А.А.* Эргодичность и устойчивость многомерных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1990. 35, № 3. 543–547.

54. *Гущин А.А., Екушев А.И.* Оценка среднего дохода от программного управления для одного типа управляемых марковских последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 1990. 35, № 3. 438–448.

55. *Küenle H.-U.* Markov games with complete information and average cost criterion. — Trans. 11th Prague Conf. Int. Theory, Statist. Desis. Funct.: Random Process., Prague, Aug. 27–31. 1990. V. B.

56. *Feinberg E.* A Markov decision model of a search process. — Strateg. Seguet. Search and Select. Real Time: Proc. AMC–IMS–SIAM Jt Summer Res. Conf., Amherst, Mass., June 21–27. 1990.

57. *Schäl M.* On the chance tu visit a goal set infinitely of ten Optimization. — 1990. 21, № 4. 585–592.

58. *Медницкий В.Г., Авербах Б.А.* Стохастическая модель функционирования производственной системы // Экономика и экономические методы. 1991. 27, № 2. 383–391.

59. *Mäläncioin Odetta.* On the Markov chains with parameter // Sci. Bull. Moch. Eng. Polytechn. Inst. Buharest. 1991. 53, № 1, 2.

60. *Tsantas N., Vassilion P.* The non-homogeneons Markov system in a stochastic environment // J. Appl. Probab. 1993. 30, № 2. 285–301.

61. *Sennot Linn I.* The average cost optimality equation and critical number policies // Probab. Eng. and Inf. Sci. 1993. 7, № 1. 47–67.

62. *Ferenstein Elzbieta Z.* A variation jf the Dynku stopping game // Math. jap. 1993. 38, № 2. 271–279.

63. *Di Masi G. Stettner L.* On adaptive control of a partially observed Markov chain // Appl. Math. 1994. 22, № 2. 165–180.

64. *Guo Xianping.* Strong optimality for MDP average model. — Acta sci., natur. Univ. norm. Hunanensis. 1996. 19, № 1. 21–24.

65. *Borkar Vivek S.* Ergodic control of Markov chains with constraints — the general case // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1994. 34, № 1.

66. *Stettner Lukasz.* Ergodic control of Markov processes with mixed observation structure // Diss. math. 1995. № 341. P. 1–36.

67. *Scariano Stephen M.* Decisions, decisions, ... // Math. and Comput. Educ. 1995. 29, № 1. P. 83–93.

68. *Haviv M., Puterman M.* Bias optimality in controlled queueing systems // J. Appl. Prob. V. 35. P. 136–150.

69. *Ибрагимов А.А.* О марковской игре «Большой матч» // АиТ, 2000. № 11. С. 104–113.

70. *Ибрагимов А.А.* Об одном классе марковских игр. — Тезисы доклада на I Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике. Сочи, 1–6 окт., 2000 // Обозрение прикл. и пром. матем. 2000. 7, № 2. С. 538–539.

71. *Domansky V.* Solution of stopping hame of Markov chains. Тезисы доклада на 5-й Международной Петрозаводской конференции «Вероятностные методы в дискретной математике». Петрозаводск. 1–6 июня. 2000 // Обозрение прикл. и пром. матем. 2000. 7, № 1. С. 166.

72. *Ибрагимов А.А.* Существование и нахождение значения и оптимальных стратегий в рекурсивных играх // Изв. РАН. Т и СУ. 2001. № 4. С. 102–109.

Научное издание

КАРМАНОВ Анатолий Вячеславович

Исследование управляемых конечных марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход)

Редактор *Н. Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *Е. В. Третьяков*
Оформление обложки: *А. А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.02.02.
Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 11. Тираж 300 экз.
Заказ тип. №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Московская типография № 6» Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
109088 Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24

ISBN 5-9221-0260-5

9 785922 102605