

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**В.И.Иванов**  
**В.Ю.Попов**

# КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

*и их  
приложения*

Под редакцией  
А.Г. Свешникова

Москва • 2002



УРСС

**Иванов Валентин Иванович, Попов Виктор Юрьевич**

**Конформные отображения и их приложения.** — М.: Едиториал УРСС, 2002.  
— 324 с.

ISBN 5-354-00178-1

Книга представляет расширенный конспект специального курса, посвященного конформным отображениям, их приложениям к задачам математической физики и их компьютерной визуализации. Рассмотрены многочисленные приложения конформных отображений для расчета и визуализации плоских гармонических векторных полей в гидродинамике, теории электромагнетизма, теории фильтрации. Подробно рассмотрены отображения многоугольных областей с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца.

Книга содержит атлас конформных отображений, осуществляемых элементарными функциями. Для построения изображений, приведенных в книге, использовался математический пакет Maple V.

Издание осуществлено с готового оригинал-макета.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 12.07.2002 г.

Формат 60×84/16. Тираж 800 экз. Печ. л. 20,5. Зак. № 19.

Отпечатано в типографии ООО «Рохос». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5-354-00178-1

|                                                                                    |                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| ИЗДАТЕЛЬСТВО<br>НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ                                       | <b>УРСС</b>                                             |
|                                                                                    |                                                         |
|  | E-mail: <a href="mailto:urss@urss.ru">urss@urss.ru</a>  |
|                                                                                    | Каталог изданий                                         |
|                                                                                    | в Internet: <a href="http://urss.ru">http://urss.ru</a> |
|                                                                                    | Тел./факс: 7 (095) 135-44-23                            |
| Тел./факс: 7 (095) 135-42-46                                                       |                                                         |

© Едиториал УРСС, 2002

# Оглавление

|                                                                                             |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Предисловие</b>                                                                          | <b>7</b> |
| <b>1 Основы теории конформных отображений</b>                                               | <b>9</b> |
| 1.1 Области и кривые на комплексной плоскости . . . . .                                     | 9        |
| 1.1.1 Комплексная плоскость и сфера комплексных чисел                                       | 9        |
| 1.1.2 Области на комплексной плоскости . . . . .                                            | 12       |
| 1.1.3 Кривые на комплексной плоскости . . . . .                                             | 14       |
| 1.1.4 Классификация плоских областей . . . . .                                              | 15       |
| 1.2 Аналитические функции . . . . .                                                         | 20       |
| 1.3 Гармонические сопряженные функции . . . . .                                             | 22       |
| 1.4 Изогональные и локально – конформные отображения .                                      | 24       |
| 1.4.1 Условия изогональности отображения в точке $z_0 = \infty$ . . . . .                   | 26       |
| 1.4.2 Условие изогональности отображения в точке $w_0 = \infty$ . . . . .                   | 26       |
| 1.5 Однолистные аналитические функции.<br>Конформные отображения плоских областей . . . . . | 29       |
| 1.6 Основные принципы теории конформных отображений .                                       | 31       |
| 1.6.1 Принцип сохранения границы . . . . .                                                  | 31       |
| 1.6.2 Теоремы существования . . . . .                                                       | 32       |
| 1.6.3 Теоремы единственности . . . . .                                                      | 33       |
| 1.6.4 Принцип однолистности . . . . .                                                       | 34       |
| 1.6.5 Принцип соответствия границ . . . . .                                                 | 35       |
| 1.6.6 Принцип симметрии . . . . .                                                           | 42       |

|                                                                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2 Простейшие приложения конформных отображений в механике и физике</b>                                     | <b>46</b> |
| 2.1 Плоское гармоническое векторное поле . . . . .                                                            | 46        |
| 2.2 Плоские гармонические векторные поля в механике и физике . . . . .                                        | 48        |
| 2.2.1 Поле скоростей установившегося течения идеальной жидкости . . . . .                                     | 48        |
| 2.2.2 Поле скорости жидкости при установившейся фильтрации . . . . .                                          | 49        |
| 2.2.3 Стационарные задачи теории теплопроводности .                                                           | 49        |
| 2.2.4 Задачи электростатики . . . . .                                                                         | 50        |
| 2.2.5 Задачи магнитостатики . . . . .                                                                         | 50        |
| 2.2.6 Стационарный электрический ток в однородной электропроводящей среде . . . . .                           | 51        |
| 2.2.7 Поперечные электромагнитные волны в волноведущих системах . . . . .                                     | 52        |
| 2.3 Комплексный потенциал . . . . .                                                                           | 53        |
| 2.4 Граничные задачи для гармонических функций . . . . .                                                      | 55        |
| 2.5 Визуализация гармонических векторных полей методом конформного отображения . . . . .                      | 57        |
| 2.5.1 Инвариантность аналитической функции при конформном отображении . . . . .                               | 57        |
| 2.5.2 Поток в криволинейной угловой области. Обтекание бесконечной кривой . . . . .                           | 58        |
| 2.5.3 Поток в криволинейной полосе . . . . .                                                                  | 59        |
| 2.5.4 Плоская задача Робена. Визуализация электростатического поля заряженного проводящего цилиндра . . . . . | 61        |
| 2.5.5 Построение функции источника задачи Дирихле .                                                           | 62        |
| <b>3 Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями</b>                                       | <b>66</b> |
| 3.1 Линейная функция . . . . .                                                                                | 66        |
| 3.2 Квадратичная функция . . . . .                                                                            | 67        |
| 3.3 Дробно - линейная функция . . . . .                                                                       | 72        |
| 3.4 Функция Жуковского . . . . .                                                                              | 81        |

|          |                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.5      | Показательная (экспоненциальная) функция . . . . .                     | 87         |
| 3.6      | Логарифмическая функция . . . . .                                      | 89         |
| 3.7      | Степенная функция . . . . .                                            | 92         |
| 3.8      | Гиперболические и тригонометрические функции . . . . .                 | 97         |
| 3.9      | Обратные тригонометрические и гиперболические функции. . . . .         | 104        |
| <b>4</b> | <b>Визуализация плоских векторных полей с точечными особенностями</b>  | <b>109</b> |
| 4.1      | Визуализация векторных полей с одной особенностью . . . . .            | 110        |
| 4.1.1    | Источники, вихри, вихреисточники . . . . .                             | 110        |
| 4.1.2    | Диполи и квадруполь . . . . .                                          | 111        |
| 4.1.3    | Источник в однородном поле . . . . .                                   | 111        |
| 4.1.4    | Диполь в однородном поле . . . . .                                     | 113        |
| 4.1.5    | Визуализация функций источника уравнения Лапласа . . . . .             | 114        |
| 4.2      | Визуализация векторных полей с двумя точечными особенностями . . . . . | 120        |
| 4.2.1    | Два точечных источника . . . . .                                       | 120        |
| 4.2.2    | Два вихреисточника . . . . .                                           | 123        |
| 4.2.3    | Точечные источник и сток в задаче Дирихле . . . . .                    | 123        |
| 4.2.4    | Точечные источник и сток в задаче Неймана . . . . .                    | 127        |
| 4.3      | Поля решеток точечных особенностей . . . . .                           | 129        |
| 4.3.1    | Решетка из одинаковых источников . . . . .                             | 129        |
| 4.3.2    | Решетка из чередующихся источников и стоков . . . . .                  | 131        |
| 4.3.3    | Вихревые цепочки Кармана . . . . .                                     | 131        |
| 4.3.4    | Решетка источников в однородном поле . . . . .                         | 132        |
| 4.3.5    | Поля решеток диполей . . . . .                                         | 134        |
| <b>5</b> | <b>Конформные отображения некоторых замечательных областей</b>         | <b>137</b> |
| 5.1      | Отображения круговых двуугольников (луночек) . . . . .                 | 137        |
| 5.1.1    | Криволинейные полуплоскости . . . . .                                  | 138        |
| 5.1.2    | Внешности конечных контуров . . . . .                                  | 140        |
| 5.1.3    | Конечные круговые двуугольники . . . . .                               | 143        |

|       |                                                                                                               |     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.2   | Построение отображений с помощью принципа соответствия границ . . . . .                                       | 145 |
| 5.2.1 | Эпициклоиды и укороченные эпитрохоиды . . . . .                                                               | 146 |
| 5.2.2 | Гипоциклоиды и укороченные гипотрохоиды . . . . .                                                             | 147 |
| 5.2.3 | Обобщенные овалы Кассини и обобщенная лемниската $n$ - го порядка . . . . .                                   | 148 |
| 5.2.4 | Внешность звездобразного разреза . . . . .                                                                    | 153 |
| 5.2.5 | Плоскость с $n$ симметричными разрезами вдоль лучей . . . . .                                                 | 154 |
| 5.2.6 | Область между двумя трактрисами . . . . .                                                                     | 157 |
| 5.3   | Построение конформных отображений при помощи аналитического продолжения функции с вещественной осью . . . . . | 160 |
| 5.3.1 | Цепная линия . . . . .                                                                                        | 160 |
| 5.3.2 | Кривая $v = a \operatorname{sh} u$ . . . . .                                                                  | 162 |
| 5.3.3 | Экспоненциальная кривая и кривые Кирхгофа . . . . .                                                           | 163 |
| 5.3.4 | Циклоида и трохойды . . . . .                                                                                 | 165 |
| 5.3.5 | Отображение, осуществляемое функцией $w = z + a \operatorname{th} z$ . . . . .                                | 167 |
| 5.4   | Построение конформных отображений с использованием принципа симметрии . . . . .                               | 167 |
| 5.4.1 | Построение отображения "половиной" области . . . . .                                                          | 169 |
| 5.4.2 | Построение отображения "удвоенной" области . . . . .                                                          | 172 |
| 5.5   | Конформные отображения конических сечений и их инверсий . . . . .                                             | 177 |
| 5.5.1 | Эллипс . . . . .                                                                                              | 179 |
| 5.5.2 | Парабола . . . . .                                                                                            | 181 |
| 5.5.3 | Гипербола . . . . .                                                                                           | 184 |
| 6     | <b>Отображения многоугольных областей</b> . . . . .                                                           | 191 |
| 6.1   | Классификация многоугольных областей . . . . .                                                                | 191 |
| 6.2   | Прямая задача Кристоффеля - Шварца . . . . .                                                                  | 192 |
| 6.3   | Обратная задача Кристоффеля-Шварца . . . . .                                                                  | 199 |
| 6.4   | Отображение внешности многоугольника . . . . .                                                                | 202 |
| 6.5   | Многоугольники, ограниченные разрезами по лучам параллельных прямых . . . . .                                 | 205 |
| 6.5.1 | Плоскость с разрезами вдоль параллельных лучей, направленных в одну сторону . . . . .                         | 205 |

|          |                                                                                                        |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.5.2    | Плоскость с разрезами вдоль параллельных лучей, направленных в противоположные стороны                 | 208        |
| 6.5.3    | Полуплоскость с разрезами вдоль параллельных лучей . . . . .                                           | 211        |
| 6.5.4    | Полоса с разрезами вдоль лучей . . . . .                                                               | 216        |
| 6.6      | Звездообразные многоугольные области . . . . .                                                         | 218        |
| 6.6.1    | Угловые звездообразные области . . . . .                                                               | 219        |
| 6.6.2    | Звездообразные полосы, для которых начало координат является граничной точкой . . . . .                | 221        |
| 6.6.3    | Звездообразные многоугольные полосы, для которых начало координат является внутренней точкой . . . . . | 223        |
| 6.6.4    | Внешности конечных звездообразных разрезов . . . . .                                                   | 226        |
| 6.7      | Отображения треугольных областей . . . . .                                                             | 228        |
| 6.7.1    | Конечные треугольники . . . . .                                                                        | 230        |
| 6.7.2    | Угловые треугольные области . . . . .                                                                  | 231        |
| 6.7.3    | Треугольные полосы . . . . .                                                                           | 235        |
| 6.7.4    | Внешности треугольников . . . . .                                                                      | 236        |
| 6.8      | Отображения четырехугольных областей . . . . .                                                         | 237        |
| 6.8.1    | Четырехугольники с четырьмя целочисленными углами . . . . .                                            | 240        |
| 6.8.2    | Четырехугольники с двумя целочисленными углами . . . . .                                               | 240        |
| 6.8.3    | Четырехугольники с одним целочисленным углом . . . . .                                                 | 251        |
| 6.9      | Отображения правильных и симметричных многоугольников . . . . .                                        | 257        |
| <b>7</b> | <b>Визуализация регулярных гармонических векторных полей методом конформного отображения</b>           | <b>262</b> |
| 7.1      | Поток, набегающий на бесконечную кривую и разветвляющийся на ней . . . . .                             | 262        |
| 7.2      | Бесциркуляционное обтекание произвольного цилиндра                                                     | 264        |
| 7.3      | Общая задача обтекания цилиндра . . . . .                                                              | 266        |
| 7.3.1    | Обтекание круглого цилиндра . . . . .                                                                  | 267        |
| 7.3.2    | Обтекание произвольного цилиндра . . . . .                                                             | 269        |
| 7.3.3    | Обтекание аэродинамических профилей . . . . .                                                          | 272        |

|                                                |                                                                                                              |            |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.4                                            | Задача об ударе твердого цилиндра о поверхность несжимаемой жидкости . . . . .                               | 274        |
| 7.5                                            | Смешанная граничная задача в криволинейной угловой области. Простейшая задача теории фильтрации . . . . .    | 277        |
| 7.6                                            | Плоское электрическое поле в многоэлектродной системе. Поток в криволинейной полосе с $N$ рукавами . . . . . | 279        |
| 7.6.1                                          | Визуализация вращающегося магнитного поля в асинхронных электродвигателях трехфазного тока . . . . .         | 282        |
| 7.6.2                                          | Визуализация электрического поля в плоской квадрупольной электронной линзе . . . . .                         | 285        |
| <b>Атлас конформных отображений</b>            |                                                                                                              | <b>288</b> |
|                                                | Каталог 1. Конечные области . . . . .                                                                        | 288        |
|                                                | Каталог 2. Внешности конечных контуров . . . . .                                                             | 291        |
|                                                | Каталог 3. Криволинейные угловые области . . . . .                                                           | 296        |
|                                                | Каталог 4. Криволинейные полосы . . . . .                                                                    | 304        |
|                                                | Каталог 5. Криволинейные полосы с $N$ рукавами . . . . .                                                     | 309        |
| <b>Приложение. Комплексная графика в Maple</b> |                                                                                                              | <b>313</b> |
|                                                | Процедуры <b>complexplot</b> и <b>conformal</b> . . . . .                                                    | 313        |
|                                                | Приложение. Комплексные числа и функции в Maple . . . . .                                                    | 316        |
| <b>Литература</b>                              |                                                                                                              | <b>317</b> |
| <b>Предметный указатель</b>                    |                                                                                                              | <b>319</b> |



# Предисловие

Конформными отображениями называются преобразования геометрических фигур, при которых бесконечно малые части фигур отображаются в подобные им фигуры. Теория конформных отображений тесно связана с теорией аналитических функций комплексного переменного. Аналитическая функция, рассматриваемая как отображение, определяет (при некоторых условиях) конформное отображение области задания функции на область ее значений. Конформное отображение представляет геометрический образ функций комплексного переменного, подобно тому, как график функции вещественного переменного представляет ее геометрический "портрет".

Студент, изучающий комплексный анализ, с самого начала сталкивается с конформными отображениями как с графическими образами аналитических функций. Тем самым теория конформных отображений представляет существенный элемент математического образования. Она включается во все учебники [1-5] и задачкиники [6-8] по теории аналитических функций.

С другой стороны конформные отображения имеют многочисленные приложения в механике, физике и технике, прежде всего – для расчетов плоских гармонических векторных полей в гидро- и аэродинамике, теории фильтрации, теории электрических и магнитных полей, теории теплопередачи [12-19]. Конформные отображения представляют весьма удобный математический аппарат для решения довольно широкого круга задач математической физики и прикладной математики.

Высказанные соображения объясняют важность раздела о конформных отображениях в учебных программах для физиков и механиков. Между тем в последние годы этот раздел почти исчез из программ общих курсов физических факультетов и факультетов прикладной математики.

Предлагаемая книга представляет учебное пособие по конформным

отображениям, их применениям к задачам механики и физики и их построению на дисплее персонального компьютера. Основой книги стал специальный курс лекций, который один из авторов (В.И. Иванов) читает студентам физического курса МГУ. При ее написании были использованы материалы книги - справочника [11], написанной В.И. Ивановым совместно с М.К. Трубецковым.

Предлагаемая книга состоит из семи глав и Атласа конформных отображений. Материал расположен по принципу чередования математических и физических глав, для того чтобы дать читателю возможность как можно раньше приступить к физическим задачам.

Большинство конформных отображений в книге построено с помощью программы *Conformal* пакета математических программ *Maple*.

К некоторым параграфам книги даются упражнения на построение конформных отображений на дисплее ПЭВМ. Эти построения также могут быть выполнены с помощью программы *Conformal* пакета *Maple*. В приложении приводятся правила работы с этой программой.

Авторы благодарны Г.Ю. Степанову за консультации по вопросам приложений конформных отображений и ценные замечания. Авторы признательны Ф.В. Шугаеву, прочитавшему рукопись и сделавшему ценные замечания, и Л.А. Корчуновой за компьютерный набор текста данной книги.

# Глава 1

## Основы теории конформных отображений

### 1.1 Области и кривые на комплексной плоскости

Мы полагаем, что читатель, открывающий "Учебное пособие по конформным отображениям", уже знаком с основами теории функций комплексного переменного, но все же считаем необходимым кратко напомнить ее основные понятия.

#### 1.1.1 Комплексная плоскость и сфера комплексных чисел

*Комплексным числом* называется упорядоченная пара двух вещественных чисел  $(a, b)$ , которая записывается в виде  $z = a + ib$ , где  $i$  – мнимая единица;  $a$  называется вещественной,  $b$  – мнимой частью комплексного числа  $z$ :  $a = \operatorname{Re} z$ ,  $b = \operatorname{Im} z$ . Комплексные числа складываются и перемножаются по правилам сложения и умножения многочленов, при этом  $i^2 = -1$ .

Комплексное число  $z = a + ib$  изображается точкой на плоскости с декартовыми координатами  $a, b$ . Эту плоскость (и соответственно множество всех комплексных чисел) обозначают символом  $\mathcal{C}$ . Ось абсцисс на комплексной плоскости называется вещественной осью, а ось ординат – мнимой.

Положение точки  $z$  на плоскости можно характеризовать (наряду с декартовыми) также полярными координатами  $\rho, \varphi$

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos \varphi, & b &= \rho \sin \varphi; \\ z &= \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Величина  $\rho$  называется *модулем комплексного числа*  $z$ ; она представляет расстояние точки  $z = a + ib$  от начала координат:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Величина  $\varphi$  называется *аргументом комплексного числа*  $z$  ( $\text{Arg } z$ ), она представляет угол, который радиус-вектор точки  $z$  составляет с положительным направлением оси  $x$ . Величина  $\varphi$  определяется из системы уравнений

$$\cos \varphi = a/\rho,$$

$$\sin \varphi = b/\rho.$$

Угол  $\varphi$  определяется из этой системы не однозначно, а с точностью до слагаемого  $2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел. В полуинтервале  $-\pi < \varphi \leq \pi$  система имеет ровно один корень, который называется *главным значением аргумента* и обозначается  $\arg z$ , таким образом

$$\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi n.$$

Аргумент числа  $z = 0$  не определен.

Комплексное число  $\bar{z} = a - ib$  называется *комплексно-сопряженным* к числу  $z = a + ib$ . Оно изображается точкой, симметричной точке  $z$  относительно вещественной оси (фиг. 1.1), причем

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Представление комплексного числа в виде  $z = a + ib$  называется алгебраической формой комплексного числа, а запись в виде (1.1) — тригонометрической формой. С помощью *формулы Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \tag{1.2}$$

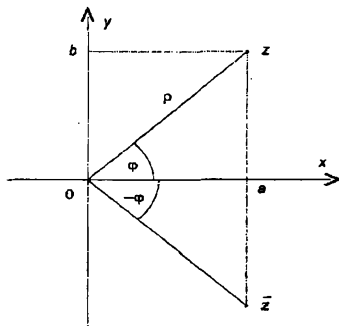
выражение (1.1) может быть записано короче:

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Оно называется *показательной (экспоненциальной) формой* комплексного числа.

Складывать и вычитать комплексные числа удобнее, записывая их в алгебраической форме. Умножение, деление, возведение комплексных чисел в целую степень и извлечение корня целой степени удобнее производить, представив числа в показательной форме. Если

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2},$$



Фиг. 1.1. Комплексная плоскость

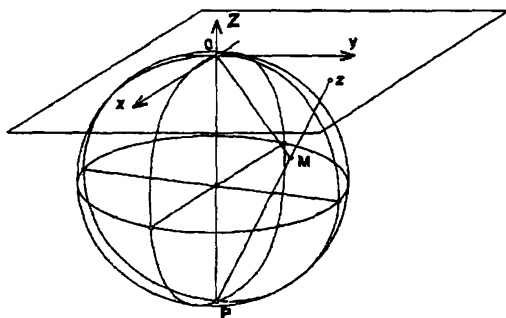
то

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_1^n = \rho_1^n e^{in\varphi_1}.$$

Другой геометрической интерпретацией множества всех комплексных чисел (наряду с комплексной плоскостью  $\mathcal{C}$ ) является комплексная числовая сфера, или сфера Римана. Взаимно - однозначное соответствие точек плоскости и точек сферы устанавливается с помощью *стереографической проекции*.

Для построения стереографической проекции рассмотрим плоскость  $\mathcal{C}$  как координатную плоскость  $\zeta = 0$  в трехмерном пространстве  $\mathcal{R}^3$  с декартовыми координатами  $\xi, \eta, \zeta$ . Построим сферу  $S$  единичного радиуса с центром  $(0, 0, -1)$ , касающуюся плоскости в начале координат. Назовем полюсом сферы конец ее диаметра, проходящего через точку касания. Обозначим его через  $P$ ; его декартовы координаты суть  $(0, 0, -2)$ . Стереографической проекцией точки  $z$  плоскости на сферу  $S$  называется точка пересечения прямой, соединяющей точку  $z$  и полюс  $P$ , со сферой  $S$  (фиг. 1.2). Очевидно, что любая точка сферы, отличная от полюса  $P$ , отображается взаимно - однозначно в некоторую точку плоскости  $\mathcal{C}$ .

Для того, чтобы отображение всей сферы  $S$  на плоскость было взаимно - однозначным, вводят понятие *бесконечно удаленной точки* как образа полюса  $P$  при стереографической проекции сферы на плоскость. Все остальные точки плоскости  $\mathcal{C}$  будем называть *конечными*.



Фиг. 1.2. Стереографическая проекция

Комплексная плоскость с добавленной бесконечно удаленной точкой называется *полной комплексной плоскостью* и обозначается  $\bar{C}$  (иногда ее называют комплексной сферой). Бесконечно удаленную точку плоскости будем обозначать символом  $\infty$ . Сама плоскость  $C$  иногда называется *открытой комплексной плоскостью*; точка  $z = \infty$  является ее границей.

Введем на сфере  $S$  сферические координаты :

$$\begin{aligned}\xi &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \eta &= \sin \theta \sin \varphi, \\ \zeta &= -1 + \cos \theta,\end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta < \pi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Стереографической проекцией точки сферы  $S$  со сферическими координатами  $\theta$ ,  $\varphi$  является точка  $z = 2 \operatorname{tg}(\theta/2)e^{i\varphi}$ . Обратно, стереографической проекцией точки плоскости  $z = \rho e^{i\varphi}$  является точка сферы  $S$  со сферическими координатами  $\theta$ ,  $\varphi$ , где

$$\theta = 2 \operatorname{arctg}(\rho/2).$$

### 1.1.2 Области на комплексной плоскости

Множество точек плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить линией, целиком принадлежащей этому мно-

жеству.

*Окрестностью* ( $\varepsilon$  - окрестностью) точки  $z_0$  ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ) называется множество точек комплексной плоскости  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Множество точек, удовлетворяющих условию  $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ , называется *проколотой окрестностью* точки  $z_0$ .

*Окрестностью бесконечно удаленной точки*  $z = \infty$  (или  $R$  - окрестностью бесконечно удаленной точки) называется множество точек  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z| > R$ , где  $R > 0$ .

Пусть  $D$  - некоторое множество точек комплексной плоскости. Точка  $z$  называется *внутренней точкой* множества  $D$ , если существует такая ее (достаточно малая)  $\varepsilon$  - окрестность, все точки которой принадлежат  $D$ .

Множество  $D$  называется *областью*, если:

- 1) это множество является связным,
- 2) все его точки - внутренние.

Конечная точка  $z$  называется *граничной точкой* области  $D$ , если сама она не принадлежит области, но в любой (сколь угодно малой) ее  $\varepsilon$  - окрестности есть точки, принадлежащие  $D$ .

Конечная точка  $z$  называется *изолированной граничной точкой* области  $D$ , если она не принадлежит  $D$ , но некоторая ее (достаточно малая) проколотая  $\varepsilon$  - окрестность принадлежит области  $D$ .

Конечная точка  $z$  называется *внешней точкой* области  $D$ , если существует такая ее  $\varepsilon$  - окрестность, в которой нет точек области  $D$ .

Приведенные определения внутренней, внешней и граничной конечных точек можно распространить и на случай бесконечно удаленной точки, если в этих определениях рассматривать вместо  $\varepsilon$  - окрестности конечной точки  $R$  - окрестность бесконечно удаленной точки.

Совокупность всех граничных точек области  $D$  называется *границей* области; мы будем обозначать границу символом  $\partial D$ . У полной комплексной плоскости нет границы, у остальных областей комплексной плоскости есть граница, содержащая хотя бы одну точку.

Объединение области  $D$  и ее границы  $\partial D$  называется *замкнутой областью*; мы будем обозначать ее символом  $\bar{D}$ . Таким образом,

$$\bar{D} = D \cup \partial D.$$

Примеры.

1) Множество всех точек квадрата  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  представляет область. Множество всех точек квадрата с рациональными координатами  $x = m/n$ ,  $y = k/l$ , ( $m, n, k, l \in \mathcal{N}$ ,  $m < n$ ,  $k < l$ ) не является областью, т.к. оно не является связным и точки его не являются внутренними. Здесь  $\mathcal{N}$  обозначает множество натуральных чисел.

2) Множество точек  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < R$  (где  $R > 0$ ), представляет область – круг с центром в точке  $z_0$  радиусом  $R$ . Окружность  $|z - z_0| = R$  является его границей.

3) Множество точек  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| \leq R$  ( $R > 0$ ), представляет замкнутую область.

4) Множество точек  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| \neq R$  ( $R > 0$ ), не является областью, т.к. это множество не является связным.

### 1.1.3 Кривые на комплексной плоскости

Пусть  $L$  – кривая на плоскости  $\mathcal{C}$ , определяемая параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (1.3)$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – вещественные непрерывные функции вещественного параметра  $t$ , заданные на сегменте  $a \leq t \leq b$ . Иначе кривую  $L$  мы будем записывать в виде :

$$z = z(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.4)$$

где  $z(t) = x(t) + iy(t)$  – комплексная функция вещественного параметра  $t$ .

Предположим, что функция  $z(t)$  такова, что  $z(t_1) \neq z(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$  (где  $t_1, t_2$  – любые точки сегмента  $[a, b]$ ), т.е. кривая  $L$  не имеет самопересечений. В этом случае кривая (1.4) называется *жордановой кривой*.

Если начало и конец кривой Жордана совпадают ( $z(a) = z(b)$ ), то такая кривая называется *замкнутой жордановой кривой* (при этом совпадение начальной и конечной точек кривой не считается самопересечением).

Кривая Жордана (1.4) представляет образ отрезка  $[a, b]$  при непрерывном взаимно-однозначном отображении его на плоскость (такое



отображение называется гомеоморфным). Замкнутую кривую Жордана можно рассматривать как образ окружности при гомеоморфном отображении окружности на плоскость  $\mathbb{C}$ .<sup>1</sup>

Замкнутая кривая без самопересечений на полной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ , проходящая через бесконечно удаленную точку, называется *бесконечной жордановой кривой*. Ее можно рассматривать как образ бесконечной прямой при гомеоморфном отображении ее на плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$ .

Кривая (1.3–1.4) называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная. Как известно из курса математического анализа, для существования касательной достаточно, чтобы существовали производные  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$ , удовлетворяющие условию  $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$  или иначе  $\dot{z}(t) \neq 0$ .

Бесконечная жорданова кривая называется гладкой в бесконечно удаленной точке, если существует  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \arg \dot{z}(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ .

Мы будем рассматривать только такие области, границы которых представляют кусочно – гладкие кривые, то есть состоят из конечного числа гладких кривых.

#### 1.1.4 Классификация плоских областей

Область  $D$  на плоскости  $\mathbb{C}$  называется *конечной*, если существует такой круг, который содержит область  $D$ . В противном случае область называется бесконечной.

Пусть  $L$  – замкнутая жорданова кривая на полной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ . Эта кривая разбивает плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$  на две области – внутреннюю  $D_i$  и внешнюю  $D_e$ , для которых кривая  $L$  является границей.<sup>2</sup>

Конечная область  $D_i$  обладает замечательным свойством: любая замкнутая жорданова кривая, лежащая в  $D_i$ , ограничивает область, также целиком принадлежащую  $D_i$ . Иными словами, любой контур, лежащий в  $D_i$ , можно непрерывной деформацией, не выходя за пределы  $D_i$ , стянуть в точку, принадлежащую  $D_i$ . Аналогичным свойством обладает бесконечная область  $D_e$ : любая замкнутая кривая, лежащая в  $D_e$ , разбивает полную плоскость  $\bar{\mathbb{C}}$  на две части, из которых либо

<sup>1</sup> Действительно, на замкнутой жордановой кривой (1.4) можно ввести новый параметр  $\tau = 2\pi t/(b-a)$  и трактовать его как полярный угол на окружности.

<sup>2</sup> Это утверждение называется теоремой Жордана. На первый взгляд оно кажется очевидным, но его строгое доказательство не просто.

внутренняя, либо внешняя часть принадлежит  $D_e$ . В области  $D_e$  тоже можно любой контур стянуть непрерывной деформацией, не выходя за пределы  $D_e$ , в точку – конечную или бесконечно удаленную.

Области, обладающие таким свойством, называются *односвязными*. Область  $D_i$  представляет пример конечной односвязной области; для нее точка  $z = \infty$  является внешней. Область  $D_e$  – пример бесконечной односвязной области; мы будем называть ее *внешностью* контура  $L$ . Для нее бесконечно удаленная точка является *внутренней*.<sup>3</sup>

Точка  $z = \infty$  может быть и граничной точкой односвязной области. Рассмотрим, например, бесконечную жорданову кривую  $L$ , заданную параметрически:

$$z = z(t), \quad t \in \mathcal{R}, \quad (1.5)$$

где  $z(t)$  – непрерывная функция вещественного параметра  $t$ , неограниченно возрастающая при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Пусть эта кривая имеет при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  асимптоты с углом  $\alpha$  между ними (фиг. 1.3). Кривая (1.5) разбивает комплексную плоскость  $\mathcal{C}$  на две бесконечные односвязные области  $D_1$  и  $D_2$ , которые мы будем называть *криволинейными угловыми областями* с раствором  $\alpha$  и  $2\pi - \alpha$  соответственно. В случае  $\alpha = \pi$  мы будем называть области  $D_1$  и  $D_2$  *криволинейными полуплоскостями*. Для криволинейных угловых областей  $D_1$  и  $D_2$  точка  $z = \infty$  является граничной.

В общем случае за раствор криволинейной угловой области принимается угол между векторами

$$e^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{z(t)}{|z(t)|}, \quad e^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{z(t)}{|z(t)|}.$$

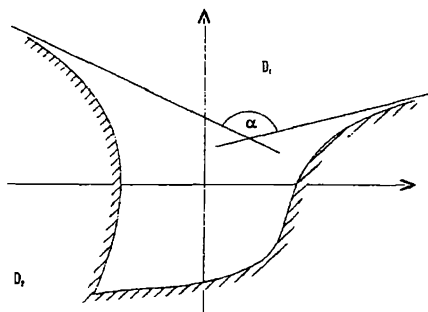
Так, например, у обеих криволинейных угловых областей, разделенных синусоидой  $z(t) = t + i \sin t$ , раствор равен  $\pi$ .

Важнейшей характеристикой плоской области является порядок связности. В случае конечной области, граница которой состоит из конечного числа замкнутых кривых, разрезов и изолированных особых точек, *порядком связности* называется число  $N$  связных участков границы.<sup>4</sup> Сама область называется  $N$  – связной.

Например, на фиг. 1.4 изображена конечная область, граница которой состоит из двух замкнутых кривых  $L_0$  и  $L_1$ , двух разрезов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$

<sup>3</sup>Отметим, что если исключить точку  $z = \infty$ , то область  $D_e$  станет двусвязной.

<sup>4</sup>При этом каждая изолированная граничная точка считается связным множеством.



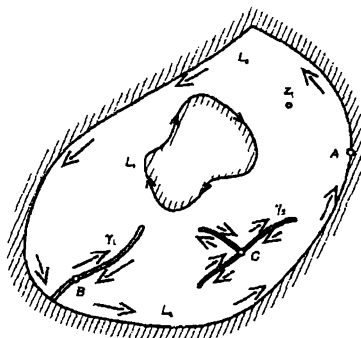
Фиг. 1.3. Криволинейная угловая область

и изолированной граничной точки  $z_1$ . Эта область является четырехсвязной ( $N = 4$ ).

В случае бесконечной области порядок связности  $N$  определяется как число связных участков границы области. Если точка  $z = \infty$  является изолированной граничной точкой области, то при подсчете порядка связности она учитывается как связное множество. Если же точка  $z = \infty$  является неизолированной граничной точкой и в состав границы области входят несколько бесконечных кривых, проходящих через точку  $z = \infty$ , то все они учитываются как один связный участок границы.

Для классификации плоских областей полезно понятие кратности граничной точки области. Удобнее ввести это понятие сначала для конечной односвязной области (фиг. 1.4). Выберем на границе области какую-либо начальную точку и будем обходить границы, начиная от этой точки, в положительном направлении (под положительным направлением обхода границы подразумевается такое направление, при котором область остается все время слева). При полном обходе границы некоторые ее точки проходятся один раз, некоторые два раза, три раза и т.д. В соответствии с этим граничные точки называются однократными, двукратными, трехкратными и т.д. Так на фиг. 1.4 точка  $A$  является однократной,  $B$  – двукратной,  $C$  – трехкратной.

Это определение годится и для многосвязных, а также для бесконеч-



Фиг. 1.4. Пример многосвязной области

ных областей. В частности, бесконечно удаленная точка является  $K$ -кратной граничной точкой некоторой области, если при полном обходе границы области наблюдатель  $K$  раз попадает в бесконечно удаленную точку. В этом случае граница области содержит  $K$  бесконечных непересекающихся кривых.

Выше было введено понятие криволинейной угловой области. Точка  $z = \infty$  является для нее однократной граничной точкой. Другой вид бесконечной односвязной области с бесконечной границей представляет область, заключенная между двумя непересекающимися бесконечными кривыми. Такие области мы будем называть *криволинейными полосами*. Для таких областей точка  $z = \infty$  является двукратной граничной точкой.

В общем случае граница односвязной бесконечной области может состоять из  $K$  бесконечных кривых. Такие области мы будем называть *криволинейными полосами с  $K$  рукавами*. Примером такой области является плоскость  $C$ , на которой проведено  $K$  разрезов вдоль непересекающихся прямолинейных лучей.

Таким образом, можно классифицировать плоские области по таким признакам: односвязные и многосвязные, конечные и бесконечные области, конечные и бесконечные границы; области с бесконечной границей можно классифицировать по кратности бесконечно удаленной точки.

Вот полная классификация односвязных областей:

1. Полная комплексная плоскость  $\bar{C}$  – область без границы.
2. Полная комплексная плоскость  $\bar{C}$  с одной выброшенной точкой (конечной или бесконечно удаленной) – область с границей, состоящей из одной точки.
3. Конечная область. Границей конечной области является, как правило, кусочно-гладкая замкнутая кривая, которую мы будем называть *контуром*. Если все точки контура являются однократными граничными точками, то контур представляет замкнутую жорданову кривую. Бесконечно удаленная точка является для конечной области внешней точкой.
4. Бесконечная область с конечной границей. Границей области является замкнутая кусочно-гладкая кривая, которую мы также будем называть контуром, а область – *внешностью контура*. Если все точки контура являются однократными граничными точками, то он представляет замкнутую жорданову кривую. Бесконечно удаленная точка является для этой области внутренней.
5. Криволинейная угловая область (в частности – криволинейная полуплоскость). Бесконечно удаленная точка является для таких областей однократной граничной точкой.
6. Криволинейная полоса. Бесконечно удаленная точка является для таких областей двукратной граничной точкой.
7. Криволинейная полоса с  $K$  рукавами ( $K > 2$ ) Точка  $z = \infty$  является для такой области  $K$  - кратной граничной точкой

Односвязные области типа 1 – 2 называются *вырожденными*, области типа 3 – 7 – *невырожденными*. Для невырожденных областей граница содержит более одной точки.

В последней главе Учебного пособия приводится каталог конформных отображений различных односвязных областей на некоторые области простого вида, которые мы будем называть каноническими областями. Каждой из односвязных областей типа 1 – 7 соответствует своя каноническая область. При этом вырожденные области могут быть отображены только в вырожденные.

1. Как будет выяснено ниже, полную комплексную плоскость  $\bar{C}$  можно конформно отобразить только на полную комплексную плоскость  $\bar{C}$ . Канонической областью является сама полная комплексная плоскость  $\bar{C}$ .
2. Для полной комплексной плоскости  $\bar{C}$  с одной выброшенной точкой канонической областью является открытая комплексная плоскость  $C$ .
3. Для конечных односвязных областей канонической областью является единичный круг  $|z| < 1$ .
4. Для бесконечных односвязных областей с конечной границей (т.е. для внешностей конечных контуров) канонической областью является внешность единичного круга  $|z| > 1$  с включенной бесконечно удаленной точкой.
5. Для криволинейных угловых областей (в частности – для криволинейных полуплоскостей) канонической областью является полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ .
6. Для криволинейных полос в качестве канонической области рассматривается прямолинейная горизонтальная полоса  $0 < \text{Im } z < \pi$ .
7. Для криволинейной полосы с  $K$  рукавами в качестве канонической области можно взять круг  $|z| < 1$  или полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ .

## 1.2 Аналитические функции

Если каждому комплексному числу  $z = x + iy$  из некоторой области  $G$  ( $G \subset C$ ) ставится в соответствие комплексное число  $w = u + iv$ , то говорят, что в области  $G$  задана функция

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Таким образом, задание функции комплексного переменного  $w(z)$  эквивалентно заданию двух вещественных функций  $u$ ,  $v$  двух вещественных переменных  $x$ ,  $y$ .

Геометрически функция  $w(z)$  представляет отображение, т.е. закон, по которому каждой точке области  $G$  ставится в соответствие

некоторая точка на комплексной плоскости  $w$ . Вся область определения функции  $G$  отображается в некоторое множество точек плоскости  $w$ .

Пусть  $z_0$  — некоторая фиксированная точка области  $G$ ,  $z$  — произвольная точка области. Обозначим  $\Delta z = z - z_0$  — приращение независимой переменной,  $\Delta w = w(z) - w(z_0)$  — приращение функции.

Функция  $w(z)$  называется *дифференцируемой в точке  $z_0$* , если она имеет в этой точке производную

$$w'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Функция  $w(z)$  называется *дифференцируемой в области  $G$*  (или *аналитической*), если она дифференцируема в каждой точке области. Для дифференцируемости комплексной функции  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  в области необходимо (но недостаточно), чтобы вещественные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  были дифференцируемы в этой области.<sup>5</sup>

Достаточным условием дифференцируемости функции  $w = u + iv$  является существование у функций  $u, v$  непрерывных частных производных  $u_x, u_y, v_x, v_y$ , удовлетворяющих условиям Коши–Римана

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.6)$$

Выражения (1.6) являются условиями дифференцируемости функции, заданной в декартовых координатах. Если же используются полярные координаты, то есть независимая переменная представляется в показательной форме  $z = \rho e^{i\varphi}$ , то для функции  $w = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$  условия Коши–Римана принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (1.7)$$

Наконец, сама функция  $w$  может быть представлена в показательной форме  $w = R e^{i\Phi}$ . В этом случае условия дифференцируемости функции, заданной в декартовых координатах, принимают вид

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1.8)$$

<sup>5</sup> Вещественная функция двух переменных  $u(x, y)$  называется дифференцируемой, если она имеет дифференциал

$$du = u_x dx + u_y dy.$$

Из курса вещественного анализа известно, что для дифференцируемости функции  $u(x, y)$  в области достаточно непрерывности ее частных производных  $u_x$  и  $u_y$  в этой области.

### 1.3 Гармонические сопряженные функции

Из условий Коши-Римана (1.6) для функции  $w = u + iv$  следует, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.9)$$

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad (1.10)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа (1.10) называются *гармоническими*. Две функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ , связанные условиями Коши-Римана, называются *гармонически сопряженными*.

Вводя векторы градиентов

$$\text{grad } u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{grad } v = \vec{i} \frac{\partial v}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial v}{\partial y},$$

(где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  — единичные векторы декартовой системы координат) можно представить уравнение (1.9) в виде

$$(\text{grad } u, \text{grad } v) = 0, \quad (1.11)$$

где круглые скобки  $(\cdot, \cdot)$  означают скалярное произведение двух векторов.

Из условий Коши-Римана следует, что

$$|\text{grad } u| = |\text{grad } v| = |w'(z)|.$$

Таким образом, векторы  $\text{grad } u$  и  $\text{grad } v$  равны по величине и ортогональны, причем вектор  $\text{grad } v$  получается из вектора  $\text{grad } u$  поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки. Так как вектор  $\text{grad } u$  представляет нормаль к линии уровня, определяемой уравнением  $u(x, y) = \text{const}$ , то условие (1.11) можно истолковать как условие взаимной ортогональности семейств линий уровня, определяемых уравнениями

$$u(x, y) = \text{const} \quad \text{и} \quad v(x, y) = \text{const}. \quad (1.12)$$

Сеть линий уровня двух гармонически сопряженных функций называется *изотермической сетью*. Таким образом, всякая аналитическая функция  $w(z)$  определяет изотермическую сеть линий, заданных уравнениями (1.12). В тех точках, в которых  $w'(z) = 0$ , векторы  $\text{grad } u$  и



$\text{grad } v$  обращаются в нуль – в этих точках направление линий изотермической сети не определено.

Вводя новую переменную  $U = \ln R$ , можно преобразовать условия Коши – Римана (1.8) для функции  $w = Re^{i\Phi}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

(предполагается, что  $w \neq 0$ , т.е.,  $R > 0$ ). Следовательно, функции  $U$  и  $\Phi$  являются гармонически сопряженными и

$$(\text{grad } U, \text{grad } \Phi) = 0, \quad |\text{grad } U| = |\text{grad } \Phi|.$$

Так как  $\text{grad } U = \frac{1}{R} \text{grad } R$ , то

$$(\text{grad } R, \text{grad } \Phi) = 0, \quad \frac{1}{R} |\text{grad } R| = |\text{grad } \Phi|. \quad (1.13)$$

Векторы  $\text{grad } R$  и  $\text{grad } \Phi$  представляют нормали к линиям уровня функций  $R(x, y)$ ,  $\Phi(x, y)$ , т. е. к линиям, определенным уравнениями

$$R(x, y) = \text{const}, \quad \Phi(x, y) = \text{const}. \quad (1.14)$$

В силу условия (1.13) семейства линий (1.14) являются взаимно ортогональными. Эти два семейства линий образуют *карту рельефа аналитической функции*  $w = f(z)$ .<sup>6</sup>

Если в односвязной области  $G$  задана одна из гармонически сопряженных функций (например,  $u(x, y)$ ), то другая функция ( $v(x, y)$ ) может быть найдена с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Действительно, рассмотрим вещественный криволинейный интеграл

$$V(x, y) = \int_{M_0 LM} (-u_y dx + u_x dy) + C, \quad (1.15)$$

где  $L$  – произвольная кривая, имеющая фиксированное начало  $M_0(x_0, y_0)$  и конец  $M(x, y)$  и целиком расположенная в области  $G$ ;

<sup>6</sup>Поверхность в трехмерном пространстве  $(x, y, Z)$ , определяемая уравнением  $Z = |f(x + iy)|$ , называется *рельефом* функции комплексного переменного  $w = f(z)$ . Сечения этой поверхности плоскостями  $Z = \text{const}$  называются *горизонталями рельефа*, проекции горизонталей на плоскость  $(x, y)$  образуют *карту горизонталей* рельефа функции  $f(z)$ . Линии, направленные вдоль векторного поля  $\text{grad } R = \text{grad } |f(z)|$ , т. е. ортогональные горизонталям карты рельефа, называются *кривыми быстрого спуска*. Для аналитической функции  $f(z)$  кривые быстрого спуска совпадают с линиями  $\arg f(z) = \text{const}$ . Направления горизонталей и кривых быстрого спуска функции  $f(z)$  определены во всех точках, где  $f(z) \neq 0$ ,  $f'(z) \neq 0$ .

$C = V(x_0, y_0)$  – произвольная константа. Интеграл (1.15) не зависит от пути интегрирования  $L$ .<sup>7</sup>

Дифференциал функции (1.15) равен

$$dV = -u_y dx + u_x dy,$$

или иначе,

$$V_x = -u_y, \quad V_y = u_x.$$

Таким образом, функция (1.15) является гармонически сопряженной к  $u(x, y)$ , причем определяется она с точностью до константы  $C$ . Если в односвязной области задана вещественная (или мнимая) часть некоторой аналитической функции, то сама функция восстанавливается с точностью до постоянного слагаемого.

Задача имеет решение в том только случае, когда заданная функция является гармонической. В не односвязной области рассматриваемая задача может иметь решением неоднозначную (бесконечнозначную) аналитическую функцию.

## 1.4 Изогональные и локально – конформные отображения

Функция  $w = f(z)$ , определенная в некоторой области  $G$ , ( $G \subset \mathbb{C}$ ) отображает эту область на некоторое множество точек  $E$  комплексной плоскости  $w$ . Множество  $E$  называется *образом*, а область  $G$  – *прообразом* при отображении, осуществляемом функцией  $w = f(z)$ . Аналитические функции обладают свойством *сохранения области*: если функция  $f(z)$  аналитична в  $G$  и  $f(z) \neq \text{const}$ , то множество  $E$  представляет область. Неаналитические функции таким свойством, вообще говоря, не обладают. Например, функции

$$w_1 = z + \bar{z}, \quad w_2 = z \bar{z}$$

<sup>7</sup>Из курса вещественного анализа известно, что криволинейный интеграл

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где  $P$  и  $Q$  – непрерывные и дифференцируемые функции в односвязной области  $G$ , не зависит от формы кривой  $L$  в том и только том случае, когда функции  $P$  и  $Q$  связаны соотношением

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

отображают любую область в отрезки вещественной оси.

Аналогичным свойством обладают аналитические функции в отношении линий: всякая кривая, лежащая в области  $G$ , отображается аналитической функцией  $w = f(z)$  в кривую, расположенную в области  $E$ . Для неаналитических функций образом кривой может и не быть кривая. Например, для функции  $w_1 = z + \bar{z}$  образом вертикальной прямой  $\operatorname{Re} z = c$  является точка  $w_1 = 2c$ , а для функции  $w_2 = z \bar{z}$  образом окружности  $|z| = R$  является точка  $w_2 = R^2$ .

Пусть функция  $w = f(z)$  аналитична в конечной точке  $z_0$ <sup>8</sup> и  $f'(z_0) \neq 0$ . Пусть, далее,  $\gamma$  — произвольная гладкая жорданова кривая с началом в точке  $z_0$ :

$$z = z(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad z(t_0) = z_0.$$

Образом кривой  $\gamma$  при отображении  $w = f(z)$  является гладкая кривая  $\Gamma$  с началом в точке  $w_0 = f(z_0)$ . Направления касательных к кривым  $\gamma$  и  $\Gamma$  в точках  $z_0$  и  $w_0$  соответственно определяются линейными элементами

$$dz = z'(t_0) dt, \quad dw = f'(z_0) z'(t_0) dt = f'(z_0) dz.$$

Если обозначим  $f'(z_0) = k e^{i\alpha}$ , то связь линейных элементов кривых  $\gamma$  и  $\Gamma$  выражается равенствами

$$|dw| = k |dz|, \quad \arg(dw) = \arg(dz) + \alpha.$$

Величина  $k = |f'(z_0)|$  представляет коэффициент растяжения элемента кривой в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ , а величина  $\alpha = \arg f'(z_0)$  — угол поворота элемента кривой  $\gamma$  при этом отображении.

Если  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — две гладкие кривые, пересекающиеся в точке  $z_0$  под углом  $\varphi$ , то их образы при отображении  $w = f(z)$  тоже пересекаются в точке  $w_0 = f(z_0)$  под углом  $\varphi$ . Такие отображения, при которых углы между кривыми сохраняются по величине и направлению, называются *изогональными*.

Если  $f'(z_0) = 0$ , то отображение  $w = f(z)$  не является изогональным в точке  $z_0$ . Таким образом, отображение, осуществляемое аналитической функцией  $w = f(z)$ , является изогональным в точке  $z_0$  ( $z_0 \in \mathcal{C}$ ) в том и только том случае, когда  $f'(z_0) \neq 0$ .

<sup>8</sup>Функция  $f(z)$  называется аналитической в точке  $z_0 \neq \infty$ , если она аналитична в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Функция  $f(z)$  называется аналитической в точке  $z_0 = \infty$ , если функция  $F(\zeta) = f(1/\zeta)$  аналитична в точке  $\zeta = 0$ .

Понятие изогональности отображения распространяется и на те случаи, когда одна из точек  $z_0$  и  $w_0$  (или даже обе) являются бесконечно удаленными. В этих случаях под углом между двумя гладкими кривыми, проходящими через точку  $z = \infty$ , понимается угол между образами этих кривых в точке  $\zeta = 0$  при отображении  $\zeta = 1/z$ .

Если например, кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеют асимптоты, угол между которыми равен  $\varphi$ , то угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $\infty$ , согласно этому определению, равен  $-\varphi$ .

#### 1.4.1 Условия изогональности отображения в точке $z_0 = \infty$ .

Пусть функция  $w = f(z)$  аналитична в точке  $z_0 = \infty$ , т.е. функция

$$F(\zeta) = f(1/\zeta)$$

аналитична в точке  $\zeta = 0$ . Функция  $F(\zeta)$  разлагается в окрестности точки  $\zeta = 0$  в степенной ряд

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n. \quad (1.16)$$

Отображение (1.16) является изогональным в точке  $\zeta = 0$ , если  $F'(0) = c_1 \neq 0$ . Разложению (1.16) соответствует ряд Лорана для функции  $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Это отображение является изогональным в точке  $z = \infty$  в том и только том случае, если  $c_1 \neq 0$ , т.е. когда вычет функции  $f(z)$  относительно бесконечно удаленной точки отличен от нуля:  $\text{Res } f(\infty) \neq 0$ .

#### 1.4.2 Условие изогональности отображения в точке $w_0 = \infty$ .

Аналитическая функция  $w = f(z)$  отображает некоторую точку  $z_0$  ( $z_0 \in \mathcal{C}$ ) в точку  $w_0 = \infty$  в том и только том случае, когда точка  $z_0$  является полюсом функции  $f(z)$ . Если порядок полюса равен  $N$ , то функцию  $f(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^N},$$

где  $\varphi(z)$  – аналитическая функция,  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Отображение, осуществляемое функцией  $w = f(z)$ , является изогональным в точке  $z_0$ , если в этой точке изогонально отображение

$$\zeta = \frac{1}{w} = \frac{(z - z_0)^N}{\varphi(z)}.$$

Последнее отображение удовлетворяет условию изогональности  $\zeta'(z_0) \neq 0$  в том и только том случае, когда  $N = 1$ , т.е. когда точка  $z_0$  является полюсом первого порядка.

Последнее утверждение справедливо и в том случае, когда одновременно  $z_0 = \infty$  и  $w_0 = \infty$ . Действительно, в этом случае функция  $w = f(z)$  имеет в точке  $z_0 = \infty$  полюс и представляется в виде

$$f(z) = z^N \varphi(1/z),$$

где  $N$  – порядок полюса,  $\varphi(\zeta)$  – аналитическая в точке  $\zeta = 0$  и  $\varphi(0) \neq 0$ . Изогональность отображения  $w = f(z)$  в точке  $z_0 = \infty$  означает изогональность отображения

$$W = \frac{1}{f(1/\zeta)} = \frac{\zeta^N}{\varphi(\zeta)}$$

в точке  $\zeta = 0$ . Производная  $dW/d\zeta$  при  $\zeta = 0$  отлична от нуля в том и только том случае, когда  $N = 1$ . Таким образом, отображение  $w = f(z)$ , при котором некоторая точка  $z_0$  (конечная или бесконечно удаленная) отобразится в точку  $w_0 = \infty$ , является изогональным в точке  $z_0$  в том и только том случае, когда точка  $z_0$  является полюсом первого порядка.

Если функция  $w = f(z)$  аналитична в конечной точке  $z_0$  и  $f'(z_0) \neq 0$ , то реализуемое ею отображение сохраняет не только углы между кривыми, но и форму бесконечно малых фигур, расположенных в окрестности точки  $z_0$ . Действительно, в силу дифференцируемости функции  $f(z)$  можно написать

$$\Delta w = f'(z_0) \Delta z + \varepsilon \Delta z,$$

где  $\Delta z = z - z_0$ ,  $\Delta w = w(z) - w(z_0)$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Рассматривая  $\Delta z$  как отрезок прямой, соединяющий точки  $z_0$  и  $z = z_0 + \Delta z$ , получим, что при отображении  $w = f(z)$  он отображается в некоторую кривую, хорда которой с точностью до слагаемого более высокого порядка равна

$$\Delta w = f'(z_0) \cdot \Delta z.$$

При таком отображении бесконечно малый треугольник, образованный двумя векторами  $\Delta z_1$  и  $\Delta z_2$ , отображается в подобный ему бесконечно малый треугольник со сторонами  $\Delta w_1$  и  $\Delta w_2$ , линейные размеры которого растянуты в  $k = |f'(z_0)|$  раз, а площадь увеличена в  $k^2 = |f'(z_0)|^2$  раз. Любая бесконечно малая фигура отображается функцией в подобную ей фигуру.

Геометрическое преобразование, при котором любая бесконечно малая фигура, расположенная в окрестности точки  $z_0$ , отображается в подобную ей фигуру, называется конформным отображением в точке  $z_0$ , или иначе *локально-конформным*. Для того, чтобы отображение  $w = f(z_0)$  было изогональным и конформным в точке  $z_0$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(z)$  была аналитической в точке  $z_0$  и удовлетворяла условию  $f'(z_0) \neq 0$ .

Иногда используется понятие *конформного отображения второго рода*. Так называется отображение, при котором углы между кривыми сохраняются по величине, но изменяются по направлению. Такие отображения осуществляются функциями  $w = \bar{f}(z)$ , где  $f(z)$  – аналитическая функция с отличной от нуля производной; их можно рассматривать как последовательность конформного отображения  $\zeta = f(z)$  и зеркального отображения  $w = \bar{\zeta}$  относительно вещественной оси плоскости  $\zeta$ .

Отображения, реализуемые неаналитическими функциями, не являются конформными.

### Упражнение

Используя программу CONFORMAL пакета MAPLE, построить на дисплее компьютера отображения декартовой и полярной сеток, осуществляемые неаналитической функцией

$$w = z + 0.3 \cdot i \cdot \bar{z}.$$

Убедиться, что отображение не является конформным: круги отображаются этой функцией в эллипсы, а квадраты – в параллелограммы.

## 1.5 Однолистные аналитические функции.

### Конформные отображения плоских областей

Функция  $f(z)$ , заданная в области  $G$ , называется однолистной в этой области, если в различных точках области она принимает различные

значения, т.е. если из условия  $z_1 \neq z_2$  ( $z_1, z_2 \in G$ ) следует  $f(z_1) \neq f(z_2)$ . Однолистность функции означает однозначность обратной функции. Отображение, осуществляемое однолистной функцией, является взаимно — однозначным.

Для аналитической функции  $f(z)$  необходимым условием однолистности в области  $G$  является условие  $f'(z) \neq 0$  в этой области. Для достаточно малой окрестности  $z_0$  это условие является и достаточным, как это следует из теоремы существования и единственности обратной функции. В общем случае условие  $f'(z) \neq 0$  не является достаточным для однолистности. Например, в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  функция  $f(z) = z^4$  не является однолистной, т.к. принимает одинаковые значения в различных точках области (например, в точках полуплоскости  $z = e^{i\pi/4}$  и  $z = e^{-i\pi/4}$  функция равна  $-1$ ). Однако производная функции  $f'(z) = 4z^3$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  нигде в нуль не обращается.

Нули производной функции  $f(z)$ , т.е. точки, в которых  $f'(z) = 0$ , называются *критическими точками* функции  $f(z)$ . В области, содержащей критические точки, функция не однолистка.

Пусть функция  $w = f(z)$ , заданная в некоторой области  $G$ , отображает ее на другую область  $D$ . Это отображение одной области на другую называется конформным, если оно является взаимно — однозначным и изогональным в каждой точке области  $G$ . Для того, чтобы отображение области  $G$ , реализуемое функцией  $w = f(z)$ , было конформным, необходимо, чтобы функция  $f(z)$  была однолистной и аналитической всюду в  $G$ , кроме, быть может, одной точки, в которой функция может иметь полюс первого порядка. Во всех конечных точках аналитичности функция  $f(z)$  должна удовлетворять условию  $f'(z) \neq 0$ , а в бесконечно удаленной точке — условию  $\operatorname{Res} f(\infty) \neq 0$ .

Из определения конформного отображения и из простейших свойств аналитических функций вытекают основные свойства конформных отображений:

1) Отображение, обратное конформному, тоже является конформным. Иначе говоря, если функция  $w = f(z)$  конформно отображает область  $G$  на область  $D$ , то обратная функция  $z = F(w)$  конформно отображает область  $D$  на область  $G$ .

2) Композиция конформных отображений представляет конформное отображение. Иначе говоря, если функция  $w = f(z)$  конформно отображает область  $G$  на область  $D$ , а функция  $W = F(w)$  конформно

отображает область  $D$  на область  $E$ , то сложная функция  $W = F(f(z))$  конформно отображает область  $G$  на область  $E$ .

Конформное отображение представляет частный, специальный вид общей замены переменных (или преобразования координат), рассматриваемой в вещественном анализе:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (1.17)$$

В случае конформного отображения переменные  $u, v$  связаны условиями Коши – Римана (1.6). Якобиан этой замены переменных равен

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 > 0.$$

Пусть функция  $w = u + iv = f(z)$  отображает конформно область  $G$  на  $D$ . Если функция  $f(z)$  в области  $G$  ограничена, то область  $D$  является конечной. Площадь области  $D$  выражается в виде двойного интеграла

$$S = \iint_G |f'(z)|^2 dx dy.$$

Поскольку конформные отображения являются взаимно - однозначными, то переменные  $u$  и  $v$  можно рассматривать как криволинейные координаты, однозначно определяющие положение точки  $z$  в области  $G$ . Координатные линии этой системы криволинейных координат, определяемые уравнениями

$$u(x, y) = \text{const}, \quad v(x, y) = \text{const},$$

образуют изотермическую сеть, т.е. сеть линий уровня двух гармонически сопряженных функций  $u(x, y), v(x, y)$ . Эта сеть линий представляет образ декартовой сети в области  $D$  при обратном конформном отображении  $z = F(w)$  (где  $F = f^{-1}$  - обратная функция). Так с помощью конформных отображений вводятся некоторые часто употребляемые системы криволинейных ортогональных координат на плоскости - параболические, биполярные, эллиптические.

Образом полярной сети линий при обратном отображении  $z = F(w)$  является сеть линий, определяемых уравнениями

$$|w| = |f(z)| = \text{const}, \quad \arg w = \arg f(z) = \text{const}.$$

Эта сеть линий в области  $G$  (области определения функции  $f(z)$ ) называется картой рельефа функции  $f(z)$ .



### Упражнение

Построить с помощью программы CONFORMAL пакета MAPLE отображение полярной сети в круге  $|z| < R$ , реализуемое функцией

$$w = z + z^2.$$

Подобрать экспериментальным путем наибольшее значение  $R$ , при котором функция однолистна внутри круга. Убедиться в том, что единственная критическая точка ( $z = -1/2$ ) лежит на границе максимального круга однолистности.

Указание.

Нарушение однолистности обнаруживается в программе CONFORMAL по наложению одной части отображения на другую.

## 1.6 Основные принципы теории конформных отображений

Основной задачей теории конформных отображений является разыскание аналитической функции, реализующей отображение заданной области на заданную область. Для решения этой задачи не существует общего алгоритма. Тем большее значение имеют общие принципы конформных отображений, которые приходится использовать при решении конкретных задач.

### 1.6.1 Принцип сохранения границы

Выше было отмечено, что для отображений, осуществляемых любыми аналитическими функциями, справедлив *принцип сохранения области*: всякая область отображается аналитической функцией в область, т.е. в открытое связное множество. Для функций, осуществляющих конформное отображение, справедлив также *принцип сохранения границы*:

Если функция  $w = f(z)$ , аналитическая в области  $G$  и непрерывная в замкнутой области  $\bar{G}$ , конформно отображает область  $G$  на некоторую область  $D$  ( $D = f(G)$ ), то граница области  $\partial G$  отображается этой функцией в границу  $\partial D$ .

При конформном отображении областей сохраняется порядок связности области, т.е. односвязная область конформно отображается в

односвязную, двусвязная – в двусвязную и т.д. Изолированные граничные точки области  $G$  отображаются в изолированные граничные точки области  $D$ , невырожденные участки границы одной области – в невырожденные участки границы другой.

Если границы областей  $G$  и  $D$  представляют жордановы кривые или состоят из  $N$  непересекающихся жордановых кривых, то между точками границы  $\partial G$  и  $\partial D$  функция  $w = f(z)$  устанавливает взаимно – однозначное и непрерывное соответствие (гомеоморфизм). В общем случае отображение границы  $\partial G$  на  $\partial D$  не является взаимно – однозначным, т.к. кратным точкам границы  $\partial G$  могут соответствовать однократные точки границы  $\partial D$  и наоборот. Однако, если ввести понятие линии обхода границы области и считать все ее точки различными, то можно утверждать, что при конформном отображении функция  $w = f(z)$  отображает границу  $\partial G$  на границу  $\partial D$  взаимно – однозначно с сохранением ориентации.<sup>9</sup>

### 1.6.2 Теоремы существования

Для односвязных областей теорема существования конформного отображения принадлежит Б. Риману. Теорема Римана утверждает, что для всякой односвязной области комплексной плоскости  $z$  с невырожденной границей существует аналитическая функция  $w = f(z)$ , конформно отображающая эту область на единичный круг  $|w| < 1$ . Следствием из этой теоремы является утверждение о том, что любую невырожденную односвязную область можно конформно отобразить на любую невырожденную односвязную область, причем бесчисленным множеством способов.

Теорема Римана представляет типичную теорему существования. Она ничего не говорит о том, как найти отображающую функцию.

Теорема Римана позволяет разбить все односвязные области на три класса:

1. Полная комплексная плоскость  $\bar{C}$ .
2. Полная комплексная плоскость  $\bar{C}$  с одной выброшенной (конечной или бесконечно удаленной) точкой.

<sup>9</sup>Граница области называется ориентированной, если на ней задано направление обхода. За положительное направление обхода невырожденного участка границы принимается такое направление, при котором область остается слева.

### 3. Невырожденные односвязные области.

Полную комплексную плоскость  $\bar{C}$  можно конформно отобразить только на полную комплексную плоскость  $\bar{C}$ . Такое отображение реализуется дробно - линейными функциями.

Полную комплексную плоскость  $\bar{C}$  с одной выброшенной точкой можно конформно отобразить только на полную комплексную плоскость  $\bar{C}$  с выброшенной точкой, например – на открытую комплексную плоскость  $C$ . Это отображение также реализуется дробно - линейными функциями.

Наконец, невырожденную односвязную область можно, согласно теореме Римана, конформно отобразить на любую невырожденную односвязную область, например – на круг, полуплоскость, полосу и т.д.

Для многосвязных областей теоремы существования конформных отображений формулируются гораздо сложнее. Уже для двусвязных областей нельзя утверждать возможность конформного отображения заданной области на любую двусвязную область. Однако можно утверждать, что для заданной двусвязной области с невырожденными границами найдется такое концентрическое кольцо  $1 < |w| < R$ , на которое можно конформно отобразить заданную область. Число  $R$  называется модулем двусвязной области. Оно однозначно определяется формой заданной области. Все двусвязные области с одинаковыми модулями  $R$  можно конформно отобразить друг на друга.

#### 1.6.3 Теоремы единственности

Теоремы единственности конформного отображения мы сформулируем только для односвязных областей.

Теорема Римана утверждает существование функции  $w = f(z)$ , реализующей конформное отображение заданной невырожденной односвязной области на единичный круг  $|w| < 1$ . Функция  $f(z)$  определяется единственным образом, если потребовать, чтобы некоторая внутренняя точка области  $z_0$  отображалась в центр круга, а угол поворота линейного элемента в точке  $z_0$  был равен заданному числу  $\alpha$ :

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha.$$

В общем случае теорема Римана утверждает существование функции  $w = f(z)$ , реализующей конформное отображение невырожденной

односвязной области  $G$  на невырожденную односвязную область  $D$ . Условия, обеспечивающие единственность такого отображения, называются условиями нормировки. Наиболее употребительны три такие формы условий нормировки:

1.  $f(z_0) = w_0$ ,  $\arg f'(z_0) = \alpha$ , где  $z_0, w_0$  – произвольные внутренние точки областей  $G$  и  $D$  соответственно;  $\alpha$  – произвольное вещественное число;
2.  $f(z_0) = w_0$ ,  $f(z_1) = w_1$ , где  $z_0, w_0$  – внутренние,  $z_1, w_1$  – граничные точки областей  $G$  и  $D$  соответственно;
3.  $f(z_1) = w_1$ ,  $f(z_2) = w_2$ ,  $f(z_3) = w_3$ , где  $z_1, z_2, z_3$  – три различные граничные точки области  $G$ , занумерованные в порядке положительного обхода границы  $\partial G$ ;  $w_1, w_2, w_3$  – различные граничные точки области  $D$ , занумерованные в порядке положительного обхода границы  $\partial D$ .

Теорема существования и единственности конформного отображения для односвязных областей может быть сформулирована в таком виде:

Если  $G$  – невырожденная односвязная область плоскости  $z$ , а  $D$  – невырожденная односвязная область плоскости  $w$ , то существует единственная функция  $w = f(z)$ , реализующая конформное отображение области  $G$  на область  $D$  и удовлетворяющая одному из условий нормировки 1 – 3.

#### 1.6.4 Принцип однолиственности

Для того, чтобы отображение, осуществляемое аналитической в области  $G$  функцией  $w = f(z)$ , было конформным, необходимо, согласно определению, чтобы оно было взаимно-однозначным, т.е. функция  $f(z)$  необходимо должна быть однолистной в области  $G$ . Условие однолиственности оказывается и достаточным условием конформного отображения, что формулируется в виде следующей теоремы:

**Принцип однолиственности.**

Отображение, реализуемое аналитической в области  $G$  функцией  $w = f(z)$ , является конформным в том и только том случае, когда функция  $f(z)$  однолистка в области  $G$ .

Сформулированный в общей форме, этот принцип превращается в *критерий конформности отображения*:

Функция  $w = f(z)$ , заданная в области  $G$ , отображает конформно область  $G$  на область значений функции  $f(z)$  ( $D = f(G)$ ) в том и только том случае, когда эта функция однолистна и аналитична в  $G$  всюду, кроме, может быть, одной точки, в которой функция  $f(z)$  может иметь полюс первого порядка.

### 1.6.5 Принцип соответствия границ

Конформные отображения областей, по определению, являются взаимно - однозначными, т.е. они осуществляются однолистными функциями. Однако во многих случаях исследовать функцию на однолистность в заданной области весьма сложно, тогда как изучение взаимной однозначности отображения границы области представляет гораздо более простую задачу. Для исследования конформности отображения одной области на другую часто оказывается достаточным исследовать отображение границ этих областей. Теоремы, позволяющие судить об однолистности функции в области по отображению границы этой области, объединяются под названием принципа соответствия границ. Мы сформулируем их только для односвязных областей и только для отображений на адекватные канонические области.

Теорема 1 (для конечных областей).

Пусть функция  $w = f(z)$ , аналитическая в круге  $|z| < 1$  и непрерывная в замкнутой области  $|z| \leq 1$ , отображает взаимно - однозначно окружность  $|z| = 1$  на конечную жорданову кривую  $\Gamma$ . Тогда функция  $w = f(z)$  конформно отображает этот круг на область  $D_i$ , лежащую внутри кривой  $\Gamma$ .

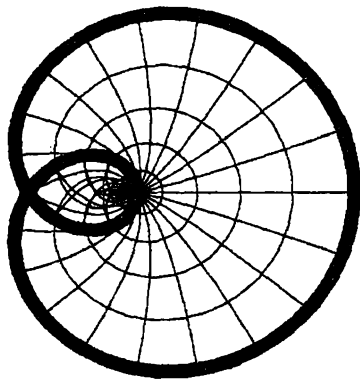
Здесь требование взаимной однозначности отображения границ существенно. Например, функция  $w = z^2$  отображает окружность  $|z| = 1$  на окружность  $|w| = 1$ , но не взаимно - однозначно. Отображение круга, осуществляемое этой функцией, неконформно.

Для нежордановых кривых, имеющих точки самопересечения, теорема 1 несправедлива. Например, функция

$$w = z + z^2, \quad (1.18)$$

аналитическая внутри круга  $|z| < 1$ , отображает окружность  $|z| = 1$  на

замкнутую кривую с самопересечением (так называемую гиперболическую улитку Паскаля). Действительно, точки единичной окружности  $z_1 = \exp(i2\pi/3)$  и  $z_2 = \exp(-i2\pi/3)$  отображаются функцией (1.18) в одну точку  $w = -1$ . Отображение круга  $|z| < 1$  функцией (1.18) представлено на фиг. 1.5. Оно не является конформным, что ясно видно по наложению одной части изображения на другую.



Фиг. 1.5. Отображение круга  $|z| < 1$  функцией  $w = z + z^2$

Теорема 2 (для внешностей конечных контуров).

Пусть  $w = f(z)$  — функция, аналитическая вне круга  $|z| > 1$  всюду, кроме одной точки, в которой  $f(z)$  имеет полюс первого порядка, и непрерывная в замкнутой области  $|z| \geq 1$ .<sup>10</sup> Если функция  $w = f(z)$  отображает окружность  $|z| = 1$  на замкнутую жорданову кривую  $\Gamma$  взаимно-однозначно с сохранением направления обхода, то она конформно отображает область  $|z| > 1$  на область  $D_e$ , внешнюю по отношению к контуру  $\Gamma$ .

В теореме 2 требование сохранения направления обхода границы является существенным, что демонстрирует следующий контрпример.

<sup>10</sup>Здесь и всюду в дальнейшем непрерывность функции понимается в обобщенном смысле: функция  $f(z)$  называется непрерывной в точке  $z_0$ , если  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , причем возможность  $f(z_0) = \infty$  (как и возможность  $z_0 = \infty$ ) не исключается. Таким образом, если точка  $z_0$  является полюсом функции  $f(z)$  и  $f(z_0) = \infty$ , то функция  $f(z)$  считается непрерывной в точке  $z_0$ .

Функция

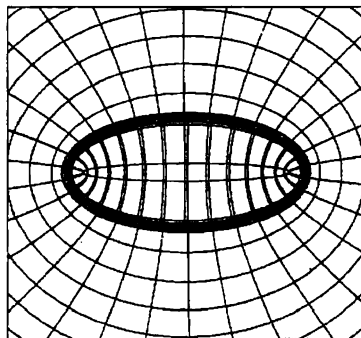
$$w = z + \frac{3}{z}, \quad (1.19)$$

аналитическая внутри круга  $|z| < 1$ , отображает окружность  $z = e^{i\varphi}$  на эллипс

$$u = 4 \cos \varphi, \quad v = -2 \sin \varphi,$$

пробегаемый по часовой стрелке при возрастании параметра  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$ .

Отображение внешности круга  $|z| > 1$  функцией (1.19) представлено на фиг. 1.6. Оно не является конформным, что явилось следствием несохранения направления обхода границы.



Фиг. 1.6. Отображение внешности круга  $|z| > 1$  функцией  $w = z + 3/z$

Для областей с бесконечными границами принцип соответствия границ формулируется несколько сложнее. Простые примеры показывают, что на этот случай нельзя перенести теоремы 1 - 2 без дополнительных условий. Например, функции

$$w_1 = z^3, \quad w_2 = \operatorname{sh} z,$$

аналитические на всей комплексной плоскости  $\mathcal{C}$ , отображают вещественную ось  $\operatorname{Im} z = 0$  в вещественную ось  $\operatorname{Im} w = 0$  взаимно - однозначно. Однако ни в нижней, ни в верхней полуплоскости эти функции не являются однолиственными.

Сформулируем принцип соответствия границ для случая, когда функция  $w = f(z)$  отображает бесконечную прямую в бесконечную жорданову кривую.

Теорема 3 (для криволинейных угловых областей ненулевого раствора).

Пусть функция  $w = f(z)$  аналитична в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  и непрерывна в замкнутой области  $\text{Im } z \geq 0$ . Пусть функция  $w = f(x)$  отображает взаимно - однозначно и непрерывно вещественную ось  $x$  в бесконечную жорданову кривую  $L$ , слева от которой (при обходе кривой в направлении возрастания координаты  $x$ ) находится криволинейная угловая область  $D_l$  с раствором  $\pi p$ , где  $0 < p \leq 2$ . Если функция  $f(z)$  имеет при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } z > 0$  порядок роста  $C z^p$ ,<sup>11</sup> то она отображает полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на область  $D_l$  конформно.

Проиллюстрируем теорему 3 примером и контрпримером.

### Пример 1.1.

Функция  $w = (z + i)^2$ , отображает вещественную ось в параболу

$$u = x^2 - 1, \quad v = 2x \quad \text{или} \quad u = v^2/4 - 1,$$

пробегаемую в направлении *возрастания* координаты  $v$ . Слева от параболы остается ее внешность - криволинейная угловая область раствора  $2\pi$ . Порядок роста функции при  $|z| \rightarrow \infty$ :  $w \sim z^2$ . Показатель роста функции совпадает с раствором области; по теореме 3 отображение верхней полуплоскости на внешность параболы конформно.

### Пример 1.2.

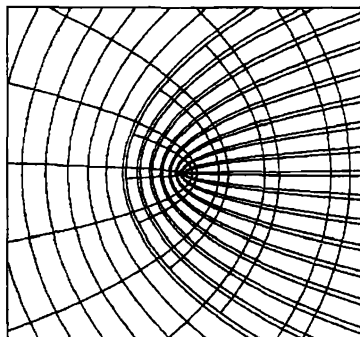
Контрпример. Функция  $w = (z - i)^2$  отображает вещественную ось в ту же параболу

$$u = x^2 - 1, \quad v = -2x \quad \text{или} \quad u = v^2/4 - 1,$$

пробегаемую в направлении *убывания* координаты  $v$ . Слева от параболы остается ее внутренность - криволинейная угловая область раствора 0. Показатель роста функции не совпадает с раствором области - отображение верхней полуплоскости заданной функцией неконформно. Это наглядно видно на фиг. 1.7 по наложению одной части изображения на другую.

<sup>11</sup>Это значит, что существует  $\lim(f(z)/z^p) = C \neq 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .





Фиг. 1.7. Отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  функцией  $w = (z - i)^2$

Теорема 4 (для криволинейной угловой области нулевого раствора)

Пусть функция  $w = f(z)$  аналитична в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  и непрерывна в замкнутой области  $\text{Im } z \geq 0$ . Пусть функция  $w = f(x)$  отображает взаимно - однозначно и непрерывно вещественную ось  $x$  в бесконечную жорданову кривую  $L$ , слева от которой находится криволинейная угловая область  $D_I$  с нулевым раствором. Если функция  $f(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } z > 0$  растет медленнее, чем  $Cz^\varepsilon$ ,<sup>12</sup> где  $\varepsilon$  - любое положительное число, то она отображает полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на область  $D_I$  конформно.

### Пример 1.3.

Функция

$$w = \ln(1 - iz), \quad (1.20)$$

аналитическая в верхней полуплоскости, растет при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$  медленнее, чем  $Cz^\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - любое положительное число.

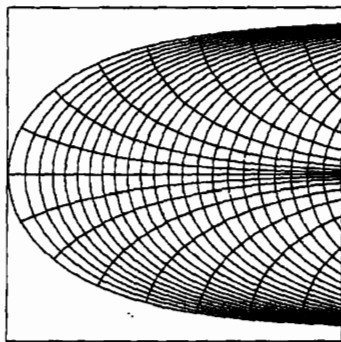
Вещественная ось отображается функцией (1.20) в бесконечную кривую  $w(x) = \ln(1 - ix)$ , которая после введения параметра  $x = \text{tg } t$  записывается в виде

$$u = \ln \cos t, v = -t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad (1.21)$$

(эта кривая называется цепной линией постоянной прочности; подробнее о ней см. гл. III).

<sup>12</sup>Это значит, что  $\lim(f(z)/z^\varepsilon) = 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .

Кривая (1.21) обходится в направлении убывания координаты  $v$ . Слева от кривой (1.21) находится криволинейная угловая область нулевого раствора. Условия теоремы 4 выполнены; функция (1.20) отображает полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на внутренность кривой (1.21) конформно. Такое отображение представлено на фиг. 1.8.



Фиг. 1.8. Отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  функцией  $w = \ln(1 - iz)$

Следующая и последняя из теорем о соответствии границ относится к случаю криволинейной полосы с  $K$  рукавами, когда бесконечно удаленная точка является  $K$ -кратной точкой кривой  $\Gamma$ . Сформулируем ее для случая, когда каждый рукав полосы имеет ненулевой раствор.

Возьмем круг  $|z| < 1$  в качестве области задания функции  $w = f(z)$ . Предположим, что окружность  $|z| = 1$  отображается в кривую  $\Gamma$ , представляющую границу некоторой односвязной области  $D$  (криволинейной полосы с  $K$  рукавами). Обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_K$  точки единичной окружности, в которых функция  $f(z)$  бесконечна (эти точки являются прообразами рукавов полосы). Предположим, что в каждой точке  $a_k$  существует предел

$$\lim_{z \rightarrow a_k} [f(z)(z - a_k)^{p_k}] = C_k \neq 0,$$

где  $p_k$  — некоторое вещественное положительное число. Иначе это условие записывается в виде

$$f(z) \sim \frac{C_k}{(z - a_k)^{p_k}}.$$

Число  $p_k$  называется степенью роста функции  $f(z)$  в точке  $z = a_k$ . В этих обозначениях теорему о соответствии границ для криволинейной полосы с  $K$  рукавами можно сформулировать так:

Теорема 5 (для криволинейных полос).

Пусть функция  $f(z)$ , аналитичная в круге  $|z| < 1$  и непрерывная (в обобщенном смысле) в замкнутом круге  $|z| \leq 1$ , отображает окружность  $|z| = 1$  взаимно - однозначно с сохранением направления обхода на  $K$  непересекающихся бесконечных жордановых кривых, составляющих границу некоторой криволинейной полосы с  $K$  рукавами  $D$ , причем точки единичной окружности  $a_1, a_2, \dots, a_K$  отображаются в рукава криволинейной полосы, имеющие ненулевые растворы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K$  соответственно. Если функция  $f(z)$  имеет в точках  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) степени роста  $p_k = \alpha_k/\pi$ , то функция  $f(z)$  является однолистной в круге  $|z| < 1$  и отображает его конформно на криволинейную полосу с  $K$  рукавами  $D$ .

Теоремы 1-5 можно применять к областям, имеющим разрезы.<sup>13</sup>

В таких случаях вводят понятие линии обхода границы области как непрерывной замкнутой кривой без самопересечений, лежащей в области бесконечно близко к ее границе. Все точки линии обхода полагаются различными; точки на противоположных сторонах разрезов не отождествляются; каждая кратная точка границы области считается столько раз, какова ее кратность. Такая процедура позволяет установить взаимно - однозначное соответствие границ областей и перенести теоремы 1-5 на односвязные области, имеющие разрезы или другие кратные граничные точки

### Упражнения

1. С помощью программы CONFORMAL пакета Maple построить отображение декартовой сети в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , осуществляемое функцией

$$w = (z + i)^p$$

для различных значений  $p > 1$ . Убедиться, что при  $p \leq 2$  функция  $w$  в данной полуплоскости однолистка, а при  $p > 2$  - неоднолистка. Объяснить результаты с точки зрения теоремы 3.

<sup>13</sup>Разрезом мы называем незамкнутую двустороннюю кривую, на противоположных сторонах которой функция имеет различные предельные значения. При обходе границы области с разрезом каждая точка разреза проходится дважды.

Указание. Рекомендуется строить отображение прямоугольника

$$-a < x < a, \quad 0 < y < a,$$

подбирая параметр  $a$  и масштаб изображения опытным путем.

2. Построить отображение полярной сети в единичном круге, осуществляемое функцией

$$w = \frac{z}{(1 + z^k)^p},$$

где  $k$  – натуральное число,  $p > 0$  – вещественное. Убедиться, что при  $p \leq 2/k$  отображение однолистно, а при  $p > 2/k$  неоднолистно. Объяснить результаты с точки зрения теоремы 5.

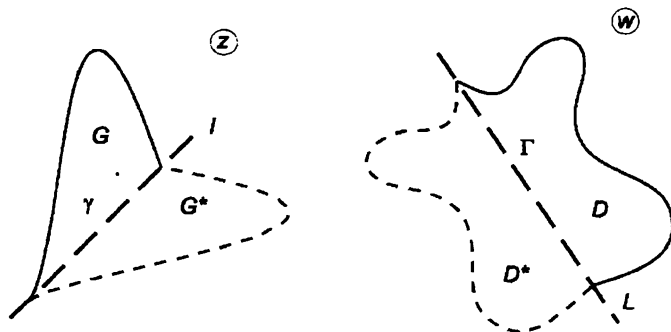
### 1.6.6 Принцип симметрии

При решении конкретных задач на конформные отображения областей, имеющих оси симметрии, часто используется так называемый принцип симметрии. Этот принцип теории конформных отображений был впервые сформулирован Б. Риманом и обоснован Г.А. Шварцем, поэтому он часто называется принципом симметрии Римана-Шварца.

В простейшей (и наиболее употребляемой) форме принципа симметрии рассматривается некоторая конечная или бесконечная область  $G$ , граница которой имеет прямолинейный участок  $\gamma$  (таким участком может быть отрезок или луч некоторой прямой  $l$  или вся бесконечная прямая  $l$ )

Область  $G^*$ , получаемая при зеркальном отображении области  $G$  относительно прямой  $l$ , называется симметричной области  $G$  относительно этой прямой  $l$ . Предполагается, что область  $G$  расположена по одну сторону от прямой  $l$ , при этом области  $G$  и  $G^*$  не пересекаются.

Пусть функция  $w = f(z)$ , аналитическая в области  $G$  и непрерывная в замкнутой области  $\bar{G}$ , отображает ее конформно на некоторую область  $D$ , граница которой тоже имеет прямолинейный участок  $\Gamma$ , принадлежащий прямой  $L$ . Пусть, наконец, функция  $w = f(z)$  отображает прямолинейный участок  $\gamma$  в прямолинейный участок  $\Gamma$ , т.е.  $\Gamma = f(\gamma)$ . Участки  $\gamma$  и  $\Gamma$  изображены на фиг. 1.9 пунктиром.



Фиг. 1.9. К принципу симметрии

В этих предположениях справедлива следующая теорема:

Теорема (принцип симметрии).

Пусть функция  $f(z)$ , аналитичная в области  $G$ , граница которой содержит прямолинейный участок  $\gamma$ , и непрерывная в замкнутой области  $\bar{G}$ , отображает конформно область  $G$  на некоторую область  $D$ , граница которой тоже содержит прямолинейный участок  $\Gamma$ , причем  $\Gamma$  является образом участка  $\gamma$  при этом отображении:  $\Gamma = f(\gamma)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. существует аналитическое продолжение функции  $f(z)$  из области  $G$  через участок границы  $\gamma$  в область  $G^*$ , симметричную области  $G$  относительно  $\gamma$ ;
2. аналитически продолженная функция конформно отображает область  $G^*$  на область  $D^*$ , симметричную области  $D$  относительно  $\Gamma$ ;
3. если области  $D$  и  $D^*$  не перекрываются, то аналитическое продолжение функции  $f(z)$  конформно отображает область  $G \cup \gamma \cup G^*$  на область  $D \cup \Gamma \cup D^*$ .

В простейшем случае, когда  $\gamma$  и  $\Gamma$  представляют участки вещественной оси, аналитическое продолжение функции  $f(z)$  на область  $G \cup \gamma \cup G^*$

имеет вид

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in G^*. \end{cases}$$

В общей формулировке принципа симметрии вместо прямолинейных отрезков  $\gamma$  и (или)  $\Gamma$  рассматриваются дуги окружностей, а вместо симметрии областей  $G$  и  $G^*$ ,  $D$  и  $D^*$  относительно прямых рассматривается симметрия относительно окружностей. Симметрия точек плоскости относительно окружности определяется следующим образом. Пусть  $l$  — окружность радиуса  $R$  с центром в некоторой точке  $O$ . Точки  $M$  и  $M^*$  называются симметричными относительно окружности  $l$ , если они лежат на одном луче, выходящем из точки  $O$ , и произведение их расстояний до точки  $O$  равно  $R^2$ :

$$|OM| \cdot |OM^*| = R^2.$$

Точкой, симметричной центру  $O$  окружности  $l$  относительно этой окружности, является бесконечно удаленная точка.

Области  $G$  и  $G^*$  называются симметричными относительно окружности  $l$ , если каждая точка  $M$  одной области симметрична некоторой точке  $M^*$  другой области относительно окружности  $l$ .

Будем предполагать, что  $G$  лежит по одну сторону окружности  $l$  (т.е. расположена либо внутри, либо вне окружности  $l$ ). В этом случае симметричная область  $G^*$  лежит по другую сторону окружности, т.е. области  $G$  и  $G^*$  не пересекаются.

В общей формулировке принципа симметрии прямая рассматривается как окружность полной комплексной плоскости, проходящая через бесконечно удаленную точку. Симметрия относительно такой "окружности бесконечного радиуса" определяется как обычная симметрия относительно прямой.

С учетом введенных понятий формулируется следующая

Теорема (общий принцип симметрии):

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $G$ , граница которой содержит дугу окружности  $\gamma$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{G}$ . Пусть, далее, функция  $w = f(z)$  отображает конформно область  $G$  на некоторую область  $D$ , граница которой также содержит дугу окружности  $\Gamma$ , причем  $\Gamma$  является образом дуги  $\gamma$  при этом отображении:  $\Gamma = f(\gamma)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. существует аналитическое продолжение функции  $f(z)$  из области  $G$  через дугу  $\gamma$  в область  $G^*$ , симметричную области  $G$  относительно дуги  $\gamma$ ;
2. аналитически продолженная функция  $f(z)$  отображает конформно область  $G^*$  на область  $D^*$ , симметричную области  $D$  относительно дуги  $\Gamma$ ;
3. если области  $D$  и  $D^*$  не перекрываются, то аналитическое продолжение функции  $f(z)$  конформно отображает область  $G \cup \gamma \cup G^*$  на область  $D \cup \Gamma \cup D^*$ .

# Глава 2

## Простейшие приложения конформных отображений в механике и физике

Конформные отображения широко применяются в математической физике при решении задач гидродинамики идеальной (невязкой) жидкости [14] и аэродинамики малых (дозвуковых) скоростей [15], теории фильтрации [16], теории теплопроводности [17], теории электромагнитного поля [18], [19]. Основной областью приложения конформных отображений являются расчеты плоских гармонических векторных полей.

### 2.1 Плоское гармоническое векторное поле

Векторное поле  $\vec{A}$  называется *плоским* (или плоско-параллельным), если во всех точках пространства вектор  $\vec{A}$  параллелен некоторой плоскости  $S$ , причем вектор  $\vec{A}$  имеет одни и те же величину и направление во всех точках любой прямой, перпендикулярной плоскости  $S$ .

Предположим, что плоскость  $S$  совпадает с плоскостью  $x, y$  декартовой системы координат  $x, y, Z$ , а  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  представляют единичные векторы, направленные вдоль осей  $x, y, Z$  соответственно. В этой системе координат плоское поле имеет вид

$$\vec{A} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}, \quad (2.1)$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – проекции вектора  $\vec{A}$  на координатные оси.

Векторное поле  $\vec{B}$ , направленное по нормали к плоскости  $S$  и имеющее одинаковую величину во всех точках любой прямой, перпендику-



лярной  $S$ , называется антиплоским.

В системе координат  $x, y, Z$  антиплоское поле имеет вид

$$\vec{B} = B(x, y) \vec{k}.$$

Отметим, что ротор плоского векторного поля представляет антиплоское поле:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial Z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \quad (2.2)$$

В свою очередь ротор антиплоского поля представляет плоское поле:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{i} \frac{\partial B}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Векторное поле  $\vec{A}$  называется потенциальным, если  $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$ .

Векторное поле  $\vec{A}$  называется соленоидальным, если  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ .

Векторное поле  $\vec{A}$ , являющееся одновременно потенциальным и соленоидальным, называется гармоническим

Плоское поле (2.1) является потенциальным, если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (2.3)$$

Плоское поле (2.1) является соленоидальным, если

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (2.4)$$

Условия гармоничности плоского векторного поля (2.3–2.4) представляют условия Коши-Римана для функции  $F(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$ , где  $i$  – мнимая единица (не путать с вектором  $\vec{i}$ ),  $z = x + iy$  (не путать с декартовой координатой  $Z$ ).

Вектор в плоскости  $xy$

$$\vec{A}^* = [\vec{k} \times \vec{A}] = -Q(x, y) \vec{i} + P(x, y) \vec{j}$$

представляет вектор  $\vec{A}$ , повернутый на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Для плоского векторного поля  $\vec{A}^*$  имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A}^* &= \vec{k} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) = \vec{k} \operatorname{div} \vec{A}, \\ \operatorname{div} \vec{A}^* &= -\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = -(\vec{k} \cdot \operatorname{rot} \vec{A}). \end{aligned}$$

Если плоское векторное поле  $\vec{A}$  является гармоническим, то и поле  $\vec{A}^*$  тоже является гармоническим. Оно называется гармонически-сопряженным векторному полю  $\vec{A}$ .

Пусть в плоской области  $G$  задано плоское векторное поле  $\vec{A} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ ;  $L$  — гладкая кривая этой области,  $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$  — элемент дуги кривой  $L$ . Криволинейный интеграл

$$\Gamma = \int_L (P dx + Q dy) = \int_L (\vec{A} \cdot d\vec{r}) \quad (2.5)$$

называется работой вектора  $\vec{A}$  вдоль кривой  $L$ . Если кривая  $L$  является замкнутой, то интеграл (2.5) называется циркуляцией вектора  $\vec{A}$ .

Криволинейный интеграл

$$N = \int_L (-Q dx + P dy) = \int_L (\vec{A}^* \cdot d\vec{r}) \quad (2.6)$$

называется потоком вектора  $\vec{A}$  через кривую  $L$ .

Если область  $G$  является односвязной, а поле  $\vec{A}$  — гармоническим, то в силу известной теоремы векторного анализа интегралы (2.5) и (2.6) по любой замкнутой кривой равны нулю. Интегралы по незамкнутым кривым  $L$ , соединяющим две фиксированные точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_1(x_1, y_1)$ , не зависят от формы кривой  $L$ .

Имеет место простое выражение для линейной комбинации  $\Gamma + iN$ :

$$\Gamma + iN = \int_L (P - iQ)(dx + i dy) = \int_L F(z) dz,$$

где  $F(z) = P - iQ$  — упомянутая выше аналитическая функция.

## 2.2 Плоские гармонические векторные поля в механике и физике

В настоящем разделе рассматриваются основные физические задачи, связанные с расчетами плоских гармонических векторных полей.

### 2.2.1 Поле скоростей установившегося течения идеальной жидкости

Поле скоростей  $\vec{v}$  при движении несжимаемой жидкости удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ .

Мы будем рассматривать только потенциальные течения идеальной (невязкой) жидкости, для которых  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Таким образом, поле скоростей  $\vec{v}$  при потенциальном течении несжимаемой жидкости является гармоническим.

Примером плоского гармонического поля является поле скоростей идеальной жидкости при потенциальном обтекании бесконечного цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости  $(x, y)$ , или при потенциальном течении жидкости в криволинейном канале постоянной глубины. На стенке канала или на поверхности неподвижного цилиндра поле  $\vec{v}$  удовлетворяет условию  $v_n = 0$ , где  $v_n = (\vec{n} \cdot \vec{v})$  – нормальная компонента скорости жидкости.

### 2.2.2 Поле скорости жидкости при установившейся фильтрации

Скорость движения жидкости в пористой среде (например, подземных вод в грунте) описывается *законом Дарси*:

$$\vec{v} = -D \text{ grad } p, \quad (2.7)$$

где  $p$  – давление,  $D$  – константа, характеризующая пористую среду. Из формулы (2.7) следует, что поле скоростей жидкости в однородной пористой среде потенциально:  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Если жидкость и пористая среда являются несжимаемыми, то  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Таким образом, поле скоростей несжимаемой жидкости при фильтрации в однородной несжимаемой среде является гармоническим.

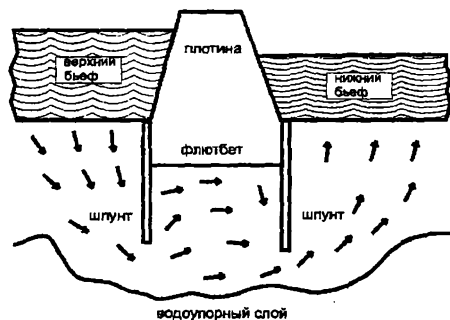
Примером плоского гармонического поля в теории фильтрации является поле скоростей жидкости в однородном грунте под длинной плотиной, сооруженной на широком русле постоянной глубины (фиг. 2.1).

На водонепроницаемой границе пористой среды (флютбет, водоупорный слой) скорость  $\vec{v}$  удовлетворяет условию  $v_n = 0$ , где  $v_n = (\vec{n} \cdot \vec{v})$  – нормальная компонента скорости жидкости.

### 2.2.3 Стационарные задачи теории теплопроводности

Вектор плотности потока тепла  $\vec{q}$  в неравномерно нагретом теле определяется законом Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \text{ grad } u, \quad (2.8)$$



Фиг. 2.1. Фильтрация воды под плотиной

где  $u$  — температура,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. Из (2.8) следует, что если  $\lambda = \text{const}$ , то  $\text{rot } \vec{q} = 0$ , т.е. в однородной среде вектор потока тепла (2.8) представляет потенциальное векторное поле с потенциалом  $-\lambda u$ . Если в среде нет объемных источников тепла, то установившийся поток тепла представляет соленоидальное поле:  $\text{div } \vec{q} = 0$ . Примером плоского гармонического векторного поля является установившийся поток тепла в однородной теплопроводящей пластинке, в которой источники тепла расположены на периметре пластинки.

## 2.2.4 Задачи электростатики

Электромагнитное поле  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в вакууме описывается системой уравнений Максвелла <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \\ \text{div } \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \text{div } \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

<sup>1</sup>Мы пользуемся Гауссовой системой единиц. При использовании других систем единиц в уравнениях (2.9) изменяются лишь коэффициенты. Уравнения Максвелла для поля в однородной среде, отличной от вакуума, отличаются от уравнений (2.9) также только постоянными коэффициентами.

где  $c$  – скорость света,  $\vec{J}$  – плотность электрического тока,  $\rho$  – плотность электрического заряда.

Электростатическое поле в однородной среде, свободной от электрических зарядов, удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0,$$

то-есть является гармоническим.

Примером плоского электрического поля является поле, создаваемое бесконечным заряженным проводящим цилиндром произвольного сечения.

### 2.2.5 Задачи магнитостатики

Из уравнений Максвелла (2.9) следует, что в однородной среде, свободной от электрических токов, магнитное поле  $\vec{H}$  является гармоническим:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Примером плоского магнитного поля является магнитное поле тока, текущего вдоль бесконечного цилиндра произвольного сечения. Вне цилиндра поле  $\vec{H}$  является плоским гармоническим векторным полем. Если цилиндр является сверхпроводящим, то внутри цилиндра магнитное поле равно нулю (так называемый *эффект Мейсснера*). На поверхности сверхпроводящего цилиндра магнитное поле удовлетворяет условию  $(\vec{n} \cdot \vec{H}) = 0$ , т.е. поле  $\vec{H}$  направлено по касательной к поверхности цилиндра.

Другой пример плоского магнитного поля – поле в зазоре между полюсами магнита, представляющими две бесконечные цилиндрические поверхности с бесконечными направляющими. Если полюсы магнита изготовлены из магнетика с бесконечно большой магнитной проницаемостью, то на поверхности полюса поле  $\vec{H}$  удовлетворяет условию  $[\vec{n} \times \vec{H}] = 0$ , т.е. магнитное поле направлено по нормали к поверхности полюса.

### 2.2.6 Стационарный электрический ток в однородной электропроводящей среде

Плотность электрического тока в среде с электрической проводимостью  $\sigma$  определяется законом Ома:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . Из уравнений Максвелла

(2.9) следует, что в однородной среде (при  $\sigma = \text{const}$ ) плотность тока  $\vec{J}$  представляет гармоническое векторное поле

$$\text{rot } \vec{J} = 0, \quad \text{div } \vec{J} = 0.$$

Примером плоского гармонического поля тока является распределение электрического тока в однородной электропроводящей пластинке, созданного электродами, помещенными на краю пластинки.

### 2.2.7 Поперечные электромагнитные волны в волноведущих системах

В некоторых линиях передачи электромагнитных волн бесконечной протяженности вдоль оси  $Z$  (например, в двухпроводной линии, коаксиальном кабеле, полосковой линии) возбуждаются электромагнитные волны вида

$$\vec{E} = \vec{A}(x, y) f(Z - ct), \quad \vec{H} = \vec{A}^*(x, y) f(Z - ct), \quad (2.10)$$

где  $\vec{A}$  – плоское гармоническое поле,  $\vec{A}^*$  – гармонически сопряженное поле,  $f$  – произвольная дифференцируемая функция одного аргумента.<sup>2</sup> Несложно проверить, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , заданные формулами (2.10), удовлетворяют системе уравнений Максвелла (2.9). Действительно, по известным формулам векторного анализа имеем

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= [\text{grad } f \times \vec{A}] = [\vec{k} \times \vec{A}] f' = \vec{A}^* f'(Z - ct), \\ \text{rot } \vec{H} &= [\text{grad } f \times \vec{A}^*] = [\vec{k} \times \vec{A}^*] f' = -\vec{A} f'(Z - ct). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -cf'(Z - ct) \vec{A}, \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -cf'(Z - ct) \vec{A}^*$$

и наконец

$$\text{div } \vec{E} = f \text{ div } \vec{A} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = f \text{ div } \vec{A}^* = 0.$$

Таким образом, электромагнитная волна (2.10) представляет решение уравнений (2.9) при  $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ . Она называется поперечной электромагнитной волной (или ТЕМ-волной), распространяющейся вдоль

<sup>2</sup>Отметим, что поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не являются ни плоскими, ни гармоническими.

оси  $Z$ . На идеально проводящей поверхности (стенке волноведущей системы) касательная составляющая поля  $\vec{E}$  и нормальная составляющая поля  $\vec{H}$  должны обращаться в нуль:

$$[\vec{n} \times \vec{A}] = (\vec{n} \cdot \vec{A}^*) = 0.$$

## 2.3 Комплексный потенциал

Пусть  $\vec{A} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  — плоское гармоническое векторное поле, заданное в односвязной плоской области  $G$ . Согласно известной теореме векторного анализа, в области  $G$  существует функция  $U(x, y)$  такая, что

$$\vec{A} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} = \text{grad } U. \quad (2.11)$$

Функция  $U(x, y)$  называется *скалярным потенциалом* (или просто потенциалом) векторного поля  $\vec{A}$ . Он определяется с точностью до постоянного слагаемого. В силу условия  $\text{div } \vec{A} = 0$  функция  $U(x, y)$  является гармонической:  $\nabla^2 U = 0$ .

В разделе 1.3 было отмечено, что для всякой функции  $U(x, y)$ , гармонической в односвязной области  $G$ , существует гармонически - сопряженная функция  $V(x, y)$  такая, что комплексная функция

$$f(x, y) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (2.12)$$

является аналитической в области  $G$ . Функция  $V(x, y)$  также определяется с точностью до постоянного слагаемого.

В силу условий Коши-Римана для функции  $f$  поле  $\vec{A}$  (2.11) можно представить в виде

$$\vec{A} = \frac{\partial V}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial x}\vec{j} = \text{rot}(\vec{k}V).$$

Мы будем называть функцию  $V(x, y)$  векторным потенциалом<sup>3</sup> гармонического векторного поля  $\vec{A}$ .

Аналитическая функция (2.12) называется *комплексным потенциалом* векторного поля  $\vec{A}$ .

Функцию комплексного переменного

$$a(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

<sup>3</sup>В гидродинамике функцию  $V$  обычно называют функцией тока, в электродинамике — силовой функцией.

где  $z = x + iy$ , будем ставить в соответствие векторному полю  $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ . Функция  $a(z)$  не является аналитической, но функция  $\overline{a(z)}$  является, причем

$$\overline{a(z)} = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = f'(z).$$

Таким образом, функция  $a(z)$ , представляющая плоское гармоническое векторное поле  $\vec{A}$ , весьма просто выражается через комплексный потенциал  $f(z)$ :

$$a(z) = \overline{f'(z)}. \quad (2.13)$$

Работа (2.5) и поток (2.6) гармонического векторного поля также весьма просто выражаются через комплексный потенциал. Пусть  $L$  — кривая, соединяющая две точки односвязной области  $z_0 = x_0 + iy_0$  и  $z_1 = x_1 + iy_1$ . Работа векторного поля  $\vec{A}$  по кривой  $L$  (2.5) и поток этого вектора через кривую  $L$  (2.6) выражаются через комплексный потенциал так

$$\Gamma + iN = \int_{z_0}^{z_1} \overline{a(z)} dz = f(z_1) - f(z_0),$$

$$\Gamma = \operatorname{Re} [f(z_1) - f(z_0)], \quad N = \operatorname{Im} [f(z_1) - f(z_0)].$$

Мы будем использовать комплексный потенциал для визуализации плоских гармонических векторных полей. Всякое плоское потенциальное поле можно изобразить на плоскости в виде сети эквипотенциалей и векторных линий этого поля<sup>4</sup>. Гармоническое векторное плоское поле визуализируется как изотермическая сеть комплексного потенциала. При этом критические точки комплексного потенциала (т.е. точки, в которых  $f'(z) = 0$ ) представляют особые точки векторного поля  $\vec{A}$ , т.к. в них  $\vec{A} = 0$  и направление поля не определено.

Если плоское гармоническое поле  $\vec{A}$  имеет комплексный потенциал  $f(z)$ , то гармонически сопряженное поле  $\vec{A}^*$  имеет комплексный потенциал  $-if(z)$ . Эквипотенциали векторного поля  $\vec{A}$  представляют векторные линии гармонически сопряженного поля  $\vec{A}^*$  и наоборот. Таким образом, построив изотермическую сеть одной аналитической

<sup>4</sup>Эквипотенциалами потенциального поля  $\vec{A}$  называются изолинии скалярного потенциала, т.е. линии, определяемые уравнением  $U(x, y) = C$ . Векторной линией векторного поля  $\vec{A}$  называется линия, касательная к которой в каждой точке коллинеарна направлению вектора  $\vec{A}$  в этой точке (в гидродинамике векторные линии называются линиями тока, в электродинамике — силовыми линиями). Для гармонического векторного поля векторные линии представляют изолинии векторного потенциала:  $V(x, y) = C$ .



функции  $f(z)$ , мы получаем сеть эквипотенциалей и векторных линий двух гармонически-сопряженных векторных полей  $\vec{A}$  и  $\vec{A}^*$ .

В заключение отметим, что понятие комплексного потенциала можно ввести и для гармонического векторного поля, заданного в не-односвязной области. Однако в этом случае комплексный потенциал может оказаться неоднозначной (бесконечно - значной) функцией, различные ветви которой отличаются друг от друга на постоянные слагаемые, называемые циклическими постоянными.

## 2.4 Граничные задачи для гармонических функций

Задачу определения гармонического векторного поля обычно формулируют в виде граничной задачи для вещественной гармонической функции  $U(x, y)$  – потенциала рассматриваемого поля. Гармоническая функция в области может быть найдена по условию на границе области и (в случае неограниченной области) – по условиям в бесконечно удаленной точке.

Пусть гладкая кривая  $L$  представляет часть границы области гармоничности функции  $U(x, y)$ . В настоящей книге рассматриваются граничные условия двух видов:

1. Граничное условие первого рода, при котором на кривой  $L$  задается величина  $U(x, y)$  :

$$U|_L = f(x, y); \quad (2.14)$$

2. Граничное условие второго рода, при котором на кривой  $L$  задается нормальная производная:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_L = g(x, y), \quad (2.15)$$

где  $n$  – нормаль к кривой  $L$ .

Пусть  $G$  – плоская область с границей  $\partial G$ . Если на всей границе  $\partial G$  заданы граничные условия первого рода (2.14) для гармонической функции  $U(x, y)$ , то задача разыскания функции  $U$  называется *задачей Дирихле*. Задача разыскания гармонической функции по заданному

граничному условию второго рода (2.15) называется *задачей Неймана*. Если же на одной части границы области задано граничное условие первого рода, а на остальной части границы – условие второго рода, то такая граничная задача называется *смешанной задачей*.

В курсах математической физики доказывается, что в конечной области задача Дирихле и смешанная задача имеют решения, причем единственные, для любой непрерывной функции  $f(x, y)$  на кривой  $L$ .

Задача Неймана с условием (2.15) имеет решение при условии

$$\int_{\partial G} g(x, y) ds = 0,$$

причем это решение определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Для бесконечных плоских областей граничные задачи гармонических функций ставятся по-разному для различных видов областей. Например, для бесконечной области, представляющей внешность конечного контура  $\partial G$ , теоремы существования решений граничных задач утверждают:

1. Для задачи Дирихле и смешанной краевой задачи существуют единственные решения, ограниченные в бесконечно удаленной точке;
2. Для задачи Неймана с граничным условием (2.15) ограниченное решение существует при условии

$$\int_{\partial G} g(x, y) ds = 0.$$

Это решение определяется с точностью до постоянного слагаемого. Если же

$$\int_{\partial G} g(x, y) ds = C \neq 0,$$

то внешняя задача Неймана имеет неограниченное решение, которое растет в бесконечности как  $C/(2\pi) \ln R$  при  $|z| = R \rightarrow \infty$ .

Эффективным методом решения граничных задач для гармонических функций в плоских областях сложной формы является метод конформного отображения. Этот метод заключается в том, что рассматриваемая сложная область конформно отображается на какую-либо простую область (круг, круговое кольцо, полуплоскость или полосу),

для которой решение соответствующей задачи известно. В силу инвариантности гармонической функции при конформном отображении оно представляет решение граничной задачи в исходной сложной области.

## 2.5 Визуализация гармонических векторных полей методом конформного отображения

*Визуализацией* плоского векторного поля мы будем называть построение сети эквипотенциалей и векторных линий этого поля. Во многих задачах можно вычислить и визуализировать гармоническое векторное поле в области сложной формы, произведя конформное отображение рассматриваемой области на область простой формы (круг, полуплоскость, полосу и т.д.)

### 2.5.1 Инвариантность аналитической функции при конформном отображении

Пусть в некоторой области  $G$  комплексной плоскости  $z$  задана аналитическая функция  $W(z)$ . Пусть, далее, некоторая функция  $\zeta = f(z)$  конформно отображает область  $G$  на область  $D$  комплексной плоскости  $\zeta$ . В силу однолиственности функции  $f(z)$  ее обратная функция  $z = F(\zeta)$  является аналитической в области  $D$ . В результате конформного отображения области  $G$  функция  $W(z)$  преобразуется в сложную функцию  $W_1(\zeta) = W(F(\zeta))$ , которая является, согласно теореме о дифференцируемости сложной функции, аналитической функцией в области  $D$ .

Если функция  $W(z)$  представляет комплексный потенциал некоторого гармонического векторного поля  $\vec{A}$  в области  $G$ , то после конформного отображения она превращается в аналитическую функцию  $W_1(\zeta)$ , которую можно рассматривать как комплексный потенциал векторного поля  $\vec{A}_1$ , гармонического в области  $D$  и соответствующего векторному полю  $\vec{A}$ . При этом сеть эквипотенциалей и векторных линий поля  $\vec{A}$  отображается в соответствующую сеть линий для поля  $\vec{A}_1$ .

Для простейших векторных полей в канонических областях комплексный потенциал известен. Так, для однородного потока в полуплоскости или полосе комплексный потенциал равен  $W = v_0 z$  ( $v_0$  – скорость течения), а сетью эквипотенциалей и векторных линий является декартова сеть. Для электрического поля заряженной нити

или круглого цилиндра комплексный потенциал равен  $W = \frac{Q}{2\pi} \log z$  ( $Q$  – заряд единицы длины цилиндра), а сетью эквипотенциалей и силовых линий является полярная сеть.

В настоящем разделе рассматриваются простейшие векторные поля, которые можно визуализировать методом конформного отображения на адекватные канонические области.

### 2.5.2 Поток в криволинейной угловой области.

#### Обтекание бесконечной кривой

Пусть область  $G$  представляет криволинейную угловую область плоскости  $w$ , ограниченную бесконечной кривой  $L$ . Пусть раствор области  $G$  равен  $\pi\alpha$ . Область  $G$  можно конформно отобразить с помощью некоторой функции  $z = F(w)$  на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  так, чтобы точка  $w = \infty$  отобразилась в точку  $z = \infty$ .<sup>5</sup>

Функцию  $z = F(w)$  можно рассматривать как комплексный потенциал поля скоростей жидкости в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ . Линии тока и эквипотенциали этого течения представляют декартову сеть. Обратная функция  $w = f(z)$  отображает полуплоскость на область  $G$ , причем декартова сеть в полуплоскости отображается в сеть эквипотенциалей и линий тока для поля скоростей жидкости  $\vec{v}$ , обтекающей кривую  $L$ .

Примеры визуализации потоков в криволинейных угловых областях представлены в каталоге 3 Атласа конформных отображений. Сети линий, изображенные на фигурах каталога 3, визуализируют поле  $\vec{v}$  и одновременно гармонически-сопряженное векторное поле  $\vec{A} = \vec{v}^*$ . Поле  $\vec{A}$  можно интерпретировать как электрическое поле бесконечного электрода, представляющего цилиндр с направляющей линией  $L$  (другой электрод предполагается помещенным в бесконечности). Возможна и иная интерпретация:  $\vec{A}$  представляет магнитное поле вблизи полюса магнита, изготовленного из идеального магнетика (другой полюс магнита помещен в бесконечности).

Функция  $z = F(w)$ , отображающая криволинейную угловую область с раствором  $\pi\alpha$  на полуплоскость, имеет при  $|w| \rightarrow \infty$  асимптотику

$$F(w) = O(w^{1/\alpha}).$$

<sup>5</sup>Такое отображение существует, но не является единственным. Действительно, функция  $z = AF(w) + B$  (где  $A, B$  – вещественные константы,  $A > 0$ ) производит то же отображение.

Абсолютная величина скорости жидкости  $|\vec{v}|$  имеет асимптотику

$$|\vec{v}| = |F'(w)| = O(|w|^{1/p-1}).$$

Таким образом, характер движения жидкости в бесконечности зависит от величины раствора криволинейной угловой области: если  $0 < p < 1$ , то  $|\vec{v}| \rightarrow \infty$  при  $|w| \rightarrow \infty$ ; если же  $1 < p < 2$ , то  $|\vec{v}| \rightarrow 0$  при  $|w| \rightarrow \infty$ . Только в случае  $p = 1$  (т.е. в случае криволинейной полуплоскости) жидкость имеет конечную скорость в бесконечно удаленной точке. Комплексный потенциал для поля скоростей  $\vec{v}$  в криволинейной полуплоскости имеет вид

$$z = A F(w), \quad (2.16)$$

где

$$A = v_0/|F'(\infty)|, \quad F'(\infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} F'(w), \quad (2.17)$$

$v_0$  — абсолютная величина скорости жидкости в бесконечно удаленной точке.

Для криволинейных угловых областей с раствором, отличным от  $\pi$ , условие нормировки (2.17) не годится. В этом случае для однозначного определения поля скоростей жидкости необходимо задавать абсолютную величину скорости потока  $v_0$  в какой-либо конечной точке области  $w_0$ . Комплексный потенциал этого векторного поля равен

$$z = A F(w), \quad \text{где} \quad A = v_0/|F'(w_0)|.$$

### 2.5.3 Поток в криволинейной полосе

Пусть область  $G$  на плоскости  $w$  представляет криволинейную полосу, ограниченную двумя бесконечными кривыми  $L_1$  и  $L_2$ . Обозначим  $A_1$  и  $A_2$  граничные точки этой полосы, лежащие в бесконечности.

Рассмотрим задачу о потенциальном течении идеальной жидкости в канале постоянной глубины со стенками  $L_1$  и  $L_2$ . Ее можно сформулировать как граничную задачу для функции тока  $V(u, v)$ :

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0, \\ V|_{L_1} &= 0, \\ V|_{L_2} &= N, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $N$  означает расход жидкости в канале. Эта задача решается методом конформного отображения области  $G$  на адекватную каноническую область – прямолинейную полосу.

Область  $G$  можно конформно отобразить с помощью функции  $z = F(w)$  на полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  так, чтобы точки  $A_1$  и  $A_2$  отобразились в точки  $z = \pm\infty$ .<sup>6</sup>

Поле скоростей идеальной жидкости в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  имеет комплексный потенциал  $Nz/\pi$ . Сетью его эквипотенциалей и линий тока является декартова сеть.

Полагая  $N = \pi$ , получим комплексный потенциал течения в криволинейной полосе:  $z = F(w)$ . Обратная функция  $w = f(z)$  конформно отображает полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на область  $G$ , а декартову сеть – в сеть линий тока и эквипотенциалей для поля скоростей  $\vec{v}$  идеальной жидкости в области  $G$ .

Примеры визуализации поля скоростей  $\vec{v}$  в криволинейных полосах приведены в каталоге 4 Атласа конформных отображений. Каждое изображение на фигурах этого каталога визуализирует, наряду с полем скоростей  $\vec{v}$ , еще и гармонически - сопряженное поле  $\vec{A} = \vec{v}^*$ . Поле  $\vec{A}$  можно интерпретировать как:

1. стационарный поток тепла  $\vec{q}$  в криволинейной стенке из однородного материала, если на поверхности  $L_1$  поддерживается нулевая температура, а на поверхности  $L_2$  – температура  $T_0 = \text{const}$ ;
2. магнитное поле в зазоре электромагнита между двумя полюсами  $L_1$  и  $L_2$ , изготовленными из магнетика с бесконечно большой магнитной проницаемостью;
3. электрическое поле в криволинейном конденсаторе с обкладками  $L_1$  и  $L_2$ , если одна из этих обкладок имеет нулевой потенциал, а другая – потенциал  $U_0 = \text{const}$ .

<sup>6</sup>Такое отображение существует, но не единственно. Действительно, функция  $z_1 = F(w) + C$  (где  $C$  – любая вещественная константа) осуществляет то же отображение.

### 2.5.4 Плоская задача Робена.

#### Визуализация электростатического поля заряженного проводящего цилиндра

*Задачей Робена* называется задача о распределении электрического заряда на поверхности проводящего тела. Плоской задачей Робена называется задача об электрическом поле бесконечного заряженного проводящего цилиндра произвольного сечения.

Пусть плоская односвязная область  $G$  представляет внешность конечного контура  $L$ . Плоская задача Робена для цилиндра с направляющей кривой  $L$  формулируется в виде граничной задачи для потенциала электрического поля <sup>7</sup>

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0, \\ U|_L &= 0, \\ \int_L \frac{\partial U}{\partial n} ds &= 1.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Задача (2.19) имеет единственное решение. Это решение растет как  $(2\pi)^{-1} \ln R$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Пусть функция  $z = F(w)$  отображает область  $G$  конформно на внешность круга  $|z| > 1$  так, что точка  $w = \infty$  отображается в точку  $z = \infty$ . Функция

$$U(M) = \frac{1}{2\pi} \ln |F(w)|$$

удовлетворяет всем условиям (2.19). Эквипотенциалами электрического поля заряженного цилиндра являются линии  $|F(w)| = \text{const}$ , а силовые линии представляют их ортогональные траектории, определяемые уравнением  $\arg F(w) = \text{const}$ . Обратная функция  $w = f(z)$  отображает полярную сеть линий во внешности круга  $|z| > 1$  в сеть эквипотенциалей и силовых линий задачи Робена. Таким образом, для визуализации решения задачи Робена необходимо построить конформное отображение  $w = f(z)$  внешности круга  $|z| > 1$  на область  $G$ , удовлетворяющее условию  $f(\infty) = \infty$ .

Примеры визуализации решений плоской задачи Робена для различных цилиндров приведены в каталоге 2 Атласа конформных отобра-

<sup>7</sup>Поверхность проводящего тела является эквипотенциалю:  $U|_L = \text{const}$ . Эту константу можно положить равной нулю. Последнее из условий (2.19) означает, что на единицу длины цилиндра приходится единичный заряд.

жений. Каждое из изображений каталога 2 визуализирует электрическое поле  $\vec{E}$  некоторого заряженного цилиндра. Одновременно их можно интерпретировать как сеть эквипотенциалей и силовых линий гармонически-сопряженного поля  $\vec{H} = \vec{E}^*$ , представляющего магнитное поле, созданное электрическим током, текущим вдоль сверхпроводящего цилиндра.

### 2.5.5 Построение функции источника задачи Дирихле

Пусть  $G$  – односвязная область плоскости  $u, v$  с границей  $L$ ;  $M_0(u_0, v_0)$  – фиксированная точка области. Будем обозначать через  $M(u, v)$  произвольную точку области и ставить ей в соответствие комплексное число  $w = u + iv$  в точке  $M$  и число  $w_0 = u_0 + iv_0$  в точке  $M_0$ .

Функцией источника задачи Дирихле называется функция, определяемая условиями

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{G}(M, M_0) &= 0, \quad M \neq M_0, \\ \mathcal{G}|_L &= 0, \\ \mathcal{G}(M, M_0) &= -\frac{1}{2\pi} \ln R + \Phi(u, v),\end{aligned}\tag{2.20}$$

где  $R = |MM_0|$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ ;  $\Phi(u, v)$  – некоторая гармоническая в области  $G$  функция. В случае, если область  $G$  неограничена, на функцию  $\mathcal{G}(M, M_0)$  налагается естественное условие ограниченности в бесконечно удаленной точке. Существует единственная функция  $\mathcal{G}(M, M_0)$ , определяемая условиями (2.20).

Через функцию  $\mathcal{G}(M, M_0)$  выражаются:

1. Потенциал постоянного электрического тока в плоской пластинке в том случае, когда граница пластинки  $\Gamma$  заземлена, а в точке  $M_0$  подключен точечный электрод;
2. Потенциал электростатического поля бесконечной заряженной нити в присутствии бесконечного заземленного цилиндра;
3. Стационарное распределение температуры в плоской пластинке, если контур пластинки поддерживается при нулевой температуре, а в точке  $M_0$  помещен точечный источник тепла;



4. Векторный потенциал  $V(u, v)$  скорости течения идеальной жидкости, вызванного вихревой нитью в присутствии непроницаемого цилиндра с направляющей линией  $L$ .<sup>8</sup>

Пусть функция

$$z = F(w, w_0) \quad (2.21)$$

отображает конформно область  $G$  на единичный круг  $|z| < 1$  так, что точка  $w_0$  отображается в центр круга. Нетрудно проверить, что функция:

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(w, w_0)|$$

удовлетворяет всем условиям (2.20). Функция (2.21) отображает сеть изолиний  $G$  и их ортогональных траекторий в полярную сеть линий в круге<sup>9</sup>  $|z| < 1$ . Обратная функция  $w = f(z)$  отображает конформно круг  $|z| < 1$  на область  $G$ , при этом полярная сеть в круге отображается в карту рельефа функции источника задачи Дирихле.

Для визуализации функции источника следует найти функцию, отображающую конформно круг  $|z| < 1$  на область  $G$  так, чтобы центр круга отобразился в точку  $w_0$ , и построить отображение полярной сети этой функцией.

Пусть известна какая-нибудь функция  $w = f(t)$ , отображающая круг  $|t| < 1$  на область  $G$ . Обозначим через  $t_0$  прообраз точки  $w_0$  при этом отображении:  $t_0 = F(w_0)$ . Отображение круга  $|z| < 1$  на круг  $|t| < 1$ , при котором точка  $z = 0$  отображается в точку  $t_0$ , реализуется дробно-линейной функцией  $t = (z + t_0)/(1 + z\bar{t}_0)$ . Таким образом, искомое отображение круга  $|z| < 1$  на область  $G$ , при котором точка  $z = 0$  отображается в точку  $w_0$ , реализуется композицией функций

$$t = \frac{z + t_0}{1 + z\bar{t}_0}, \quad w = f(t), \quad (2.22)$$

где  $|t_0| < 1$ . Беря выражение функции из каталога 1 Атласа конформных отображений, можно с помощью программы CONFORMAL пакета Maple построить карту рельефа функции источника для любой

<sup>8</sup>На непроницаемой стенке скалярный потенциал поля скоростей  $U(u, v)$  удовлетворяет условию  $v = \partial U / \partial n|_L = 0$ , откуда в силу условий Коши-Римана  $\partial V / \partial \tau|_L = 0$ , где  $\partial / \partial \tau$  - производная по касательной к кривой  $L$ . Из последнего условия следует  $V|_L = \text{const}$ , причем произвольную константу можно, не ограничивая общности, положить равной нулю.

<sup>9</sup>Ортогональной траекторией семейства гладких непересекающихся кривых называется линия, пересекающая каждую линию заданного семейства под прямым углом.

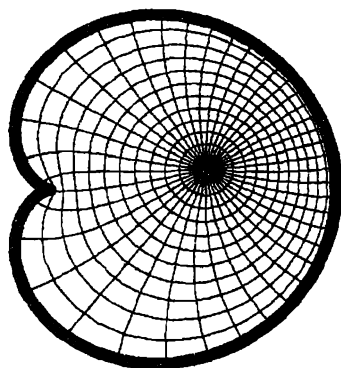
области, приведенной в этом каталоге. При использовании программы CONFORMAL положение точки  $w_0$  не задается, а определяется подбором комплексного параметра  $t_0$ .

### Пример 2.1.

Функция

$$t = \frac{z + t_0}{1 + z t_0}, \quad w = 2t + t^2$$

отображает полярную сеть в круге  $|z| < 1$  на карту рельефа функции источника для области, ограниченной кардиоидой. На фиг. 2.2 представлено это отображение при  $t_0 = R e^{ia}$ ,  $R = 0.5$ ,  $a = 0.1$ . Можно варьировать положение источника, изменяя комплексный параметр  $t_0$  ( $|t_0| < 1$ ).



Фиг. 2.2. Функция источника задачи Дирихле для области, ограниченной кардиоидой

Рассмотрим примеры визуализации функции источника для бесконечных областей.

1. Если область  $G$  представляет внешность конечного контура, и известна функция  $w = f(t)$ , отображающая внешность круга  $|t| > 1$  на область  $G$ , то карта рельефа функции источника в области  $G$  строится как отображение полярной сети в круге  $|z| < 1$ , реализуемое композицией функций (2.22), в которой следует взять  $|t_0| > 1$ . Ряд таких областей представлен в каталоге 2 Атласа конформных отображений.

2. Если область  $G$  представляет криволинейную угловую область, и известна функция  $w = f(t)$ , отображающая полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  на область  $G$ , то карта рельефа функции источника для такой области представляет отображение полярной сети в круге  $|z| < 1$ , осуществляемое композицией функций

$$t = \frac{z\bar{t}_0 - t_0}{z - 1}, \quad w = f(t), \quad (2.23)$$

где  $\text{Im } t_0 > 0$ . С помощью формул (2.23) можно визуализировать функцию источника для любой области, представленной в каталоге 3 Атласа конформных отображений.

3. Если область  $G$  представляет криволинейную полосу, и известна функция  $w = f(s)$ , отображающая полосу  $0 < \text{Im } s < \pi$  на область  $G$ , то карта рельефа функции источника для такой области представляет отображение полярной сети в круге  $|z| < 1$ , осуществляемое композицией функций

$$t = \frac{z\bar{t}_0 - t_0}{z - 1}, \quad s = \ln t, \quad w = f(s), \quad (2.24)$$

где  $\text{Im } t_0 > 0$ . С помощью формул (2.24) можно визуализировать функцию источника для любой области, представленной в каталоге 4 Атласа конформных отображений.

# Глава 3

## Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями

Класс элементарных аналитических функций включает степенную функцию, многочлены, рациональные функции, показательную и логарифмическую функции, тригонометрические и гиперболические функции, обратные тригонометрические и гиперболические функции, а также все функции, которые можно получить из перечисленных с помощью конечного числа четырех арифметических действий и композиций.

В настоящей главе рассматриваются отображения, производимые простейшими элементарными функциями. Из многочленов рассмотрены только многочлены первой и второй степени, а из рациональных – дробно-линейная функция и функция Жуковского.

### 3.1 Линейная функция

Линейной функцией называется функция  $w = az + b$ , где  $a, b$  – любые комплексные константы,  $a \neq 0$ .

Записав коэффициент  $a$  в виде  $a = ke^{i\alpha}$  (где  $k, \alpha$  вещественны,  $k > 0$ ), можно представить отображение, производимое линейной функцией, как последовательность трех преобразований: растяжения в  $k$  раз; поворота на угол  $\alpha$  и параллельного переноса вдоль вектора  $b$ .

Линейная функция производит конформное отображение любой области на геометрически подобную область. Линейная функция – единственное отображение, сохраняющее подобие всех фигур.

## 3.2 Квадратичная функция

Квадратичной функцией называется многочлен второй степени

$$w = az^2 + 2bz + c, \quad (3.1)$$

где  $a, b, c$  — любые комплексные константы,  $a \neq 0$ . Записывая функцию (3.1) в виде

$$w = a \left( z + \frac{b}{a} \right)^2 + c - b^2/a$$

и вводя обозначения  $z_0 = -b/a$ ,  $w_0 = c - b^2/a$ , можно представить ее как композицию трех преобразований:

$$\zeta = z - z_0, \quad t = \zeta^2, \quad w = at + w_0, \quad (3.2)$$

из которых первое и последнее — линейные. Таким образом, для исследования отображений, осуществляемых квадратичной функцией, достаточно исследовать отображение простейшей функцией  $w = z^2$ .

### Простейшая квадратичная функция

Функция  $w = z^2$  имеет единственную критическую точку  $z = 0$ . Осуществляемое ею отображение изогнально всюду, кроме точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ .

Функция  $w = z^2$  на комплексной плоскости неоднолистка — она принимает одинаковые значения в точках  $z$  и  $-z$ . В качестве области однолистности рассматривается обычно какая-либо полуплоскость  $C < \arg z < C + \pi$ , где  $C$  — любое вещественное число. Вводя в полуплоскости полярные координаты  $z = \rho e^{i\varphi}$ , имеем

$$|w| = \rho^2, \quad \arg w = 2\varphi.$$

Таким образом, полярная сеть линий в полуплоскости  $C < \arg z < C + \pi$  отображается в полярную сеть линий в плоскости  $w$  с разрезом вдоль луча прямой:

$$2C < \arg z < 2C + 2\pi.$$

В частности, верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  ( $C = 0$ ) отображается функцией  $w = z^2$  в плоскость  $w$  с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси, а правая полуплоскость  $\operatorname{Re} z > 0$  ( $C = -\pi/2$ ) — в плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Рассмотрим отображение декартовой сети функцией  $w = z^2$ . В декартовых координатах имеем:  $w = u + iv = (x + iy)^2$ , или

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

Прямые  $x = C$  отображаются в кривые, определяемые параметрически

$$u = C^2 - y^2, v = 2Cy.$$

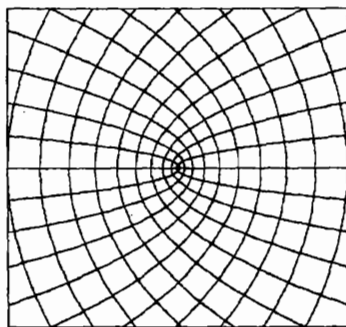
Исключая отсюда параметр  $y$ , получим (при  $C \neq 0$ ) уравнение софокусных парабол

$$u = C^2 - \left(\frac{v}{2C}\right)^2. \quad (3.3)$$

Прямые  $y = C_1$  отображаются аналогично (при  $C_1 \neq 0$ ) в семейство софокусных парабол

$$u = \left(\frac{v}{2C_1}\right)^2 - C_1^2, \quad (3.4)$$

ортогональных семейству (3.3). Таким образом, декартова сеть линий в верхней полуплоскости конформно отображается функцией  $w = z^2$  в два взаимно-ортогональных семейства софокусных парабол, изображенных на фиг. 3.1. Всякая прямая плоскости  $z$ , не проходящая через



Фиг. 3.1. Отображение декартовой сети функцией  $w = z^2$

начало координат, отображается в параболу.

Рассмотрим, во что отображаются круги функцией  $w = z^2$ . Если критическая точка  $z = 0$  лежит внутри круга, то отображение этого

круга не является конформным. Функция  $w = z^2$  является однолистной в круте  $|z - z_0| < R$  только в том случае, когда  $R < |z_0|$ .

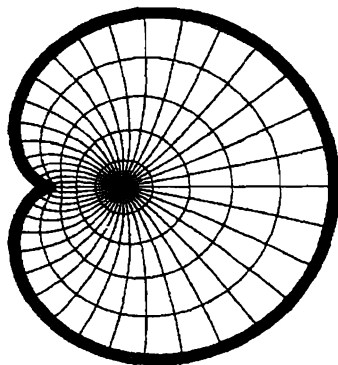
Поместим центр круга в точку вещественной оси ( $z_0 = a$ ,  $a > 0$ ) и построим отображение окружности  $|z - a| = a$ , проходящей через точку  $z = 0$ . Имеем

$$z = a + ae^{i\varphi} = 2a \cos \frac{\varphi}{2} e^{i\varphi/2}, \quad w = 4a^2 \cos^2(\varphi/2) e^{i\varphi}.$$

Образом рассматриваемой окружности является линия с полярным уравнением  $R(\varphi) = 2a^2(1 + \cos \varphi)$ .

Линия, определяемая полярным уравнением  $\rho = l(1 + \cos \varphi)$  называется кардиоидой с параметром  $l$ . Таким образом, круг  $|z - a| < a$  отображается на внутренность кардиоиды с параметром  $2a^2$ . При этом радиусы круга отображаются в дуги парабол, а concentric окружности — в замкнутые гладкие кривые, называемые *улитками Паскаля*.

Отображение круга  $|z - 1| < 1$  функцией  $w = z^2$  представлено на фиг. 3.2.



Фиг. 3.2. Отображение круга  $|z - 1| < 1$  функцией  $w = z^2$

**Функция  $w = \sqrt{z}$**

Функция, обратная к функции  $w = z^2$ , является двузначной. Она имеет две ветви

$$w_1 = \sqrt{z}, \quad w_2 = -\sqrt{z},$$

ее точками ветвления являются  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Если провести разрез, соединяющий точки ветвления, то в полученной односвязной области каждая ветвь оказывается однозначной аналитической функцией. Обычно разрез проводят вдоль отрицательной вещественной полуоси, т.е. считают

$$-\pi < \arg z < \pi, \quad -\pi/2 < \arg w_1 < \pi/2.$$

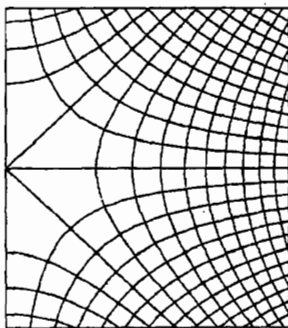
Именно эту ветвь вычисляют стандартные программы ЭВМ как значение функции  $\text{SQRT}(Z)$ . Функция  $w_1 = \sqrt{z}$  отображает плоскость  $z$  с указанным разрезом на правую полуплоскость  $\text{Re } w > 0$ . При этом декартова сеть отображается в два взаимно-ортогональных семейства равнобоковых гипербол. Действительно, из уравнения  $w^2 = z$  имеем

$$(u + iv)^2 = x + iy$$

или

$$u^2 - v^2 = x, \quad 2uv = y.$$

Семейство прямых  $x = C$  отображается в семейство равнобоковых гипербол  $u^2 - v^2 = C$ , а прямые  $y = 2C_1$  отображаются в равнобокие гиперболы  $uv = C_1$ . Образ декартовой сети при отображении  $w = \sqrt{z}$  представлен на фиг. 3.3. Иначе эту сеть линий можно рассматривать



Фиг. 3.3. Отображение декартовой сети функцией  $w = \sqrt{z}$

как изотермическую сеть для обратной функции  $w = z^2$ .

Рассмотрим, во что отображает функция  $w = \sqrt{z}$  полярную сеть с произвольно расположенным центром. Поместим центр в точку  $z = a$



( $a > 0$ ) и рассмотрим функцию

$$w = \sqrt{z + a}. \quad (3.5)$$

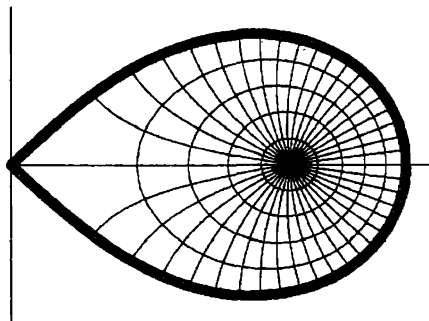
Функция (3.5) аналитична и однолистка в круге  $|z| < a$ . Она отображает окружность  $z = a e^{it}$  в кривую

$$w = \sqrt{2a \cos(t/2)} e^{it/4},$$

которую можно записать в виде  $w = \sqrt{2a \cos(2\varphi)} e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = t/4$ .

Кривая с полярным уравнением  $\rho = l\sqrt{\cos(2\varphi)}$  называется *лемнискатой Бернулли*. Таким образом, функция (3.5) конформно отображает круг  $|z| < a$  на область, ограниченную петлей лемнискаты Бернулли с параметром  $l = \sqrt{2a}$ . На плоскости  $\xi = z + a$  кривая  $\xi = a + a e^{it}$  представляет окружность, проходящую через начало координат. Такая окружность отображается функцией  $w = \sqrt{\xi}$  в петлю лемнискаты Бернулли.

Отображение круга  $|z - 1| < 1$  функцией  $w = \sqrt{z}$  представлено на фиг. 3.4.



Фиг. 3.4. Отображение круга  $|z - 1| < 1$  функцией  $w = \sqrt{z}$

### Общая квадратичная функция

Учитывая представление общей квадратичной функции (3.1) в виде композиции трех преобразований (3.2), можно утверждать, что эта функция однолистка в любой полуплоскости, не содержащей критической точки  $z_0$ . Полуплоскость  $C < \arg(z - z_0) < C + \pi$ , для которой точка

$z_0$  является граничной, отображается в плоскость  $w$  с разрезом вдоль луча  $\arg(w - w_0) = 2C + \arg a$ . Всякая прямая, не проходящая через точку  $z_0$ , отображается функцией (3.1) в параболу. Если для некоторой полуплоскости точка  $z_0$  является внешней, то такая полуплоскость отображается функцией (3.1) во внешность параболы.

Функция (3.1) однолистка во всяком круге, не содержащем критической точки  $z_0$ . Если некоторая окружность проходит через точку  $z_0$ , то она отображается на кардиоиду, а ограниченный ею круг – на внутренность кардиоиды. При этом радиусы круга отображаются в дуги парабол, а концентрические окружности – в улитки Паскаля.

### 3.3 Дробно - линейная функция

Дробно - линейной называется функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.6)$$

где  $a, b, c, d$  – произвольные комплексные константы. Матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

называют матрицей дробно - линейной функции (3.6). Если она не является вырожденной, т.е. если

$$\Delta = \det A = ad - bc \neq 0,$$

то функция (3.6) не вырождается в константу. Всюду в дальнейшем рассматриваются только невырожденные функции (3.6).

При  $c = 0$  функция (3.6) превращается в линейную функцию. При  $c \neq 0$  функция (3.6) не является линейной; мы будем называть ее дробно - линейной функцией. Она имеет полюс первого порядка в точке  $z_\infty = -d/c$ , то есть  $w(z_\infty) = \infty$ . Значение функции в бесконечно удаленной точке определяется по непрерывности:  $w(\infty) = a/c$ .

Обратное отображение плоскости  $w$  на плоскость  $z$  осуществляется дробно - линейной функцией

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

с матрицей

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

пропорциональной матрице  $A^{-1}$ . Таким образом, функция (3.6) аналитична и однолистка на полной комплексной плоскости  $\bar{C}$ ; она конформно отображает  $\bar{C}$  на  $\bar{C}$ .

Справедливо и обратное утверждение: если функция  $w = f(z)$  конформно отображает полную комплексную плоскость  $\bar{C}$  на  $\bar{C}$ , то она является дробно - линейной. Действительно, функция  $f(z)$  должна быть аналитична на  $\bar{C}$  всюду, кроме одной точки  $z_{\infty}$ , в которой функция должна иметь полюс первого порядка. Если  $z_{\infty} = \infty$ , то функция  $f(z)$  является линейной, представляющей частный случай дробно - линейной. Если  $z_{\infty} \neq \infty$ , то функция  $f(z)$  имеет вид:

$$f(z) = \frac{\alpha}{z - z_{\infty}} + \varphi(z), \quad (3.7)$$

где  $\varphi(z)$  - целая функция, не имеющая особенностей на  $\bar{C}$ . Такой функцией, по теореме Лиувилля, может быть только константа. При  $\varphi(z) = C$  функция (3.7) представляет дробно - линейную функцию.

Если дробно - линейная функция (3.6) не является линейной (то есть  $c \neq 0$ ), то ее можно представить в виде

$$w = \frac{ad - bc}{c(cz + d)} + \frac{a}{c} = \frac{A}{z + C} + B,$$

где

$$A = \frac{ad - bc}{c^2}, \quad B = \frac{a}{c}, \quad C = \frac{d}{c}.$$

Это преобразование представляет последовательность трех преобразований

$$\xi = z + C, \quad Z = \frac{1}{\xi}, \quad w = AZ + B,$$

из которых первое и последнее - линейные. Преобразование  $w = 1/z$  является простейшим дробно - линейным преобразованием.

### Основные свойства дробно - линейных отображений.

Свойства дробно - линейной функции рассматриваются во всех курсах ТФКП [1-5], где приводятся доказательства соответствующих теорем.

**Групповое свойство**

Если у функции (3.6) произвести дробно - линейную замену независимой переменной  $z$ , то получится опять дробно - линейная функция. Действительно, если

$$w = \frac{az + b}{cz + d} -$$

дробно - линейная функция с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и

$$z = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} -$$

дробно - линейная функция с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

то

$$w = \frac{(a\alpha + b\gamma)\xi + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)\xi + (c\beta + d\delta)},$$

что представляет дробно - линейную функцию с невырожденной матрицей

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество невырожденных дробно - линейных преобразований образует группу, в которой групповой операцией является композиция преобразований. Единичным элементом группы является тождественное преобразование  $w = z$ ; линейные преобразования образуют подгруппу этой группы.

**Круговое свойство**

При дробно - линейном преобразовании (3.6) окружность плоскости  $z$  отображается в окружность или прямую на плоскости  $w$ ; прямая тоже отображается в окружность или прямую. При этом в прямые отображаются те окружности или прямые плоскости  $z$ , которые проходят через точку  $z_\infty = -d/c$  - прообраз бесконечно удаленной точки.

В теории конформных отображений прямая рассматривается как частный случай окружности, проходящей через бесконечно удаленную

точку. В этой терминологии круговое свойство дробно - линейного отображения формулируется короче: при преобразовании (3.6) всякая окружность отображается в окружность. Справедливо и обратное утверждение: если аналитическая функция  $w = f(z)$  отображает любую окружность в окружность, то эта функция является дробно - линейной.

Используя круговое свойство, можно очень просто построить отображения полярной и декартовой сетей при дробно - линейном преобразовании.

#### Отображение полярной сети дробно - линейной функцией

Если  $c = 0$ , то функция (3.6) превращается в линейную:  $w = az + b$ ; при  $d = 0$  функция имеет вид  $w = a + b/z$ . В обоих случаях полярная сеть линий плоскости  $z$  отображается в полярную сеть плоскости  $w$ , центр которой помещен в точке  $w = b$  или соответственно  $w = a$ .

Во всех остальных случаях (когда  $dc \neq 0$ ) точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  отображаются в конечные точки плоскости:  $w_0 = b/d$ ,  $w_\infty = a/c$ . При этом полярная сеть линий плоскости  $z$  отображается в так называемую *биполярную сеть*, состоящую из двух взаимно - ортогональных семейств окружностей. Образами прямых, проходящих через точку  $z = 0$ , являются окружности, проходящие через точки  $w_0$  и  $w_\infty$ . Эти линии называются *окружностями Штейнера*; они (точнее, их дуги, соединяющие точки  $w_0$  и  $w_\infty$ ) определяются уравнениями

$$\arg \frac{w - w_0}{w - w_\infty} = \text{const.}$$

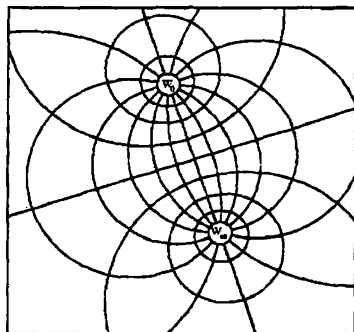
Образами окружностей  $|z| = C$  являются окружности плоскости  $w$ , ортогональные окружностям Штейнера. Эти линии называются *окружностями Аполлония*; они определяются уравнениями

$$\left| \frac{w - w_0}{w - w_\infty} \right| = \text{const.}$$

Биполярная сеть линий представлена на фиг. 3.5.

#### Отображение декартовой сети дробно - линейной функцией

При преобразовании инверсии  $w = 1/z$  оси декартовых координат отображаются в себя. Прямые  $x = \text{const}$  отображаются в окружности,



Фиг. 3.5. Биполярная сеть

проходящие через точку  $w = 0$  и касающиеся в ней мнимой оси. Уравнения этих окружностей:  $|z - C|^2 = C^2$ ,  $C \in \mathcal{R}$ .

Аналогично прямые  $y = \text{const}$  отображаются в семейство окружностей, проходящих через точку  $w = 0$  и касающихся вещественной оси. Уравнения этих окружностей:  $|z - iC|^2 = C^2$ ,  $C \in \mathcal{R}$ .

Сеть, составленная из двух взаимно - ортогональных семейств окружностей, проходящих через одну точку, называется *униполярной сетью*.

При произвольном нелинейном дробно - линейном преобразовании декартова сеть тоже отображается в униполярную сеть. Действительно, такое преобразование можно представить как композицию трех преобразований

$$\zeta = z - z_\infty, \quad Z = 1/\zeta, \quad w = AZ + w_\infty,$$

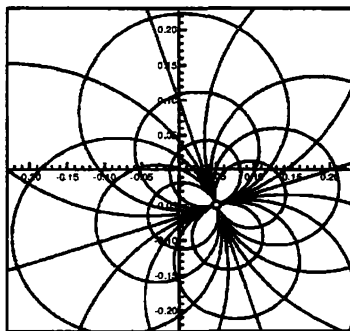
где

$$z_\infty = -d/c, \quad A = (ad - bc)/c^2 = \Delta/c^2, \quad w_\infty = a/c.$$

Прямая  $\text{Im}(z - z_\infty) = 0$  отображается на плоскости  $Z$  в вещественную ось, а прямые  $y = \text{const}$  - в окружности, касающиеся вещественной оси в начале координат. При линейном преобразовании  $w = AZ + w_\infty$  вещественная ось поворачивается на угол  $\arg A$  и центр униполярной сети переносится в точку  $w_\infty$ .

Униполярная сеть окружностей, представляющая отображение декартовой сети функцией  $w = A/z + w_0$  при  $A = 1 + i/3$ ,  $w_0 = 0.05(1 - i)$ ,

изображена на фиг. 3.6.



Фиг. 3.6. Униполярная сеть

#### Карта рельефа и изотермическая сеть дробно - линейной функции

Изотермическую сеть и карту рельефа нелинейной дробно - линейной функции можно построить как отображение декартовой и, соответственно, полярной сети при обратном отображении

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Функция, обратная к нелинейной дробно - линейной функции, тоже является нелинейной. Поэтому изотермическая сеть нелинейной дробно - линейной функции представляет униполярную сеть окружностей с центром в точке  $z_{\infty} = -d/c$ .

Карта рельефа нелинейной дробно - линейной функции (3.6) в случае  $a = 0$  представляет полярную сеть с центром в точке  $z_{\infty} = -d/c$ .

Если же  $a \neq 0$ , то точки  $w = 0$  и  $w = \infty$  отображаются соответственно в конечные точки  $z_0 = -b/a$  и  $z_{\infty} = -d/c$ . Функция (3.6) имеет в этом случае вид

$$w = C \frac{z - z_0}{z - z_{\infty}},$$

где  $C = a/c$ . Полярная сеть линий плоскости  $w$  отображается в би-полярную сеть плоскости  $z$  с вершинами в точках  $z_0$  и  $z_{\infty}$ . При этом

окружности Аполлония

$$\left| \frac{z - z_0}{z - z_\infty} \right| = \text{const}$$

представляют линии постоянного уровня рельефа (горизонтالي), а окружности Штейнера

$$\arg \frac{z - z_0}{z - z_\infty} = \text{const} \quad -$$

линии быстрейшего спуска.

**Свойство сохранения симметрии относительно окружности** Понятие симметрии точек относительно окружности, введенное в гл. I геометрически, переформулируется для точек комплексной плоскости так: точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно окружности  $\gamma$  радиуса  $R$  с центром в точке  $z_0$ , если

$$\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0), \quad |z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2.$$

Из этого определения следует:

$$z^* - z_0 = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (3.8)$$

При дробно - линейном преобразовании симметрия точек относительно окружности сохраняется. Это значит, что если точки  $z$  и  $z^*$  комплексной плоскости  $z$  симметричны относительно некоторой окружности  $\gamma$ , то дробно - линейная функция (3.6) отображает их в точки  $w = f(z)$ ,  $w^* = f(z^*)$ , симметричные относительно образа окружности  $\gamma$ .

#### Связь дробно - линейных отображений с инверсией

Геометрическое преобразование, при котором каждой точке плоскости  $z$  ставится в соответствие точка  $z^*$ , симметричная ей относительно заданной окружности  $\gamma$ , называется инверсией относительно этой окружности. Согласно формуле (3.8), преобразование инверсии осуществляется неаналитической функцией

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$



где  $R$  - радиус окружности,  $z_0$  - ее центр. В частности, инверсия относительно единичной окружности  $|z| = 1$  осуществляется функцией

$$z^* = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Преобразование инверсии представляет конформное отображение второго рода, осуществляемое функцией, комплексно сопряженной к дробно - линейной. Однако в дальнейшем мы будем всюду, где это не вызовет недоразумений, называть для краткости простейшее дробно - линейное отображение  $w = 1/z$  инверсией, а отображение  $w = 1/(z - z_0)$  - инверсией относительно точки  $z_0$ .

Дробно - линейное отображение однозначно определяется заданием соответствия двух троек точек

Пусть на плоскости  $z$  заданы три различные точки  $z_1, z_2, z_3$ , на плоскости  $w$  - их образы  $w_1, w_2, w_3$ . Плоскости  $z$  и  $w$  можно отобразить на вспомогательную плоскость  $t$  с таким соответствием точек

|     |       |       |          |
|-----|-------|-------|----------|
| $z$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$    |
| $w$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$    |
| $t$ | $0$   | $1$   | $\infty$ |

Отображение плоскости  $z$  на плоскость  $t$  осуществляется функцией

$$t = A \frac{z - z_1}{z - z_3},$$

где

$$A = 1 : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Аналогично отображение плоскости  $w$  на плоскость  $t$  реализуется функцией

$$t = \frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}.$$

После исключения вспомогательной переменной  $t$  искомая функция  $w(z)$  получается в неявном виде

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}. \quad (3.9)$$

Выражение

$$D(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \quad (3.10)$$

называется ангармоническим (или двойным дробным) отношением четырех точек. Равенство (3.9) означает инвариантность ангармонического отношения любых четырех точек при дробно - линейном отображении. Четыре точки  $z_1, z_2, z_3, z_4$  можно отобразить дробно - линейной функцией в четыре точки  $w_1, w_2, w_3, w_4$  в том и только том случае, когда у этих четверок чисел одинаковые ангармонические отношения.

В заключение рассмотрим четыре дробно - линейных отображения, часто встречающихся в прикладных задачах.

1. Отображение вещественной оси  $z$  в вещественную ось  $w$  осуществляется дробно - линейной функцией

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

с вещественными коэффициентами  $a, b, c, d$ . При этом верхняя полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  отображается в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ , если  $\Delta = ad - bc > 0$ , и в нижнюю полуплоскость  $\text{Im } w < 0$ , если  $\Delta < 0$ .

2. Отображение верхней полуплоскости на единичный круг  $|w| < 1$ , при котором заданная точка  $z_0$  отображается в центр круга, осуществляется функцией

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (3.11)$$

где  $\theta \in \mathcal{R}$ . Таких преобразований существует бесконечное множество. Если же потребовать, чтобы линейный элемент в точке  $z_0$  при отображении поворачивался на заданный угол  $\alpha$ , то отображение определяется единственным образом:

$$w = i e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

3. Отображение единичного круга  $|z| < 1$  на единичный круг  $|w| < 1$ , при котором точка  $z_0$  ( $|z_0| < 1$ ) отображается в центр круга, имеет вид

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z \cdot \bar{z}_0 - 1},$$

где  $\theta$  - любое вещественное число. Если же потребовать, чтобы линейный элемент в точке  $z_0$  поворачивался на угол  $\alpha$ , то дробно - линейная функция определяется однозначно:

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z \cdot \bar{z}_0}. \quad (3.12)$$

4. Аналогичным образом находится отображение внешности единичного круга  $|z| > 1$  на круг  $|w| < 1$ , при котором точка  $z_0$  ( $|z_0| > 1$ ) отображается в центр круга:

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z \cdot \overline{z_0} - 1}.$$

**Упражнения 1.** С помощью программы CONFORMAL пакета Maple построить отображение полярной сети в единичном круге, осуществляемое функцией, обратной к (3.12):

$$\begin{aligned} z_0 &= p e^{i\alpha} \\ f &= \frac{z + z_0}{1 + z \overline{z_0}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

для различных значений  $0 < p < 1$ . Отметить, как портится изображение при приближении величины  $p$  к единице. Путем эксперимента выяснить, до каких значений величины  $p$  можно построить картину без существенных визуальных искажений. Построить отображение полярной сети в единичном круге посредством функции (3.13) при  $p > 1$  (взять, к примеру,  $p = 2$ ).

2. Построить карту рельефа функции  $w = (z - 1)/(z + 1)$  как отображение полярной сети, осуществляемое обратной функцией

$$w = \frac{1 + z}{1 - z}. \quad (3.14)$$

Строить отображение полярной сети в круге  $|z| < 5$ ,  $-\pi < \arg z < \pi$ . Следует принять меры к тому, чтобы узел сети не попал точно в полюс функции (3.14), например, полагая  $-3.141 < \varphi < 3.1415$ .

### 3.4 Функция Жуковского

Функцией Жуковского называется рациональная функция

$$w = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right). \quad (3.15)$$

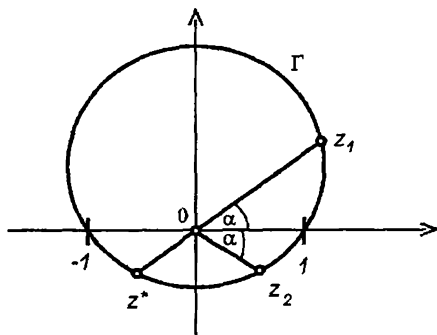
Она имеет полюсы первого порядка в точках  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Производная функции (3.15)

$$w'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

обращается в нуль в точках  $z = \pm 1$ . Точки  $z = \pm 1$  являются критическими; во всех остальных точках полной плоскости  $\mathcal{C}$  отображение (3.15) является изогональным.

Функция (3.15) является однолистной во всякой области, не содержащей точек  $z_1$  и  $z_2$ , связанных соотношением  $z_1 z_2 = 1$ . Действительно, в точках  $z_1$  и  $z_2 = 1/z_1$  функция (3.15) имеет одинаковые значения. Справедливо и обратное: если  $w(z_1) = w(z_2)$  и  $z_1 \neq z_2$ , то  $z_1 z_2 = 1$ .<sup>1</sup>

Точку  $z_2 = 1/z_1$  можно построить геометрически так, как показано на фиг. 3.7. Здесь  $\Gamma$  обозначает окружность, проходящую через точки  $-1$ ,  $1$  и  $z_1$  (предполагается, что  $z_1$  не лежит на вещественной оси),  $z^*$



Фиг. 3.7. Области однолиственности функции Жуковского.

— конец хорды  $z_1 z^*$ , проходящей через начало координат,  $z_2$  — точка, симметричная  $z^*$  относительно мнимой оси,  $\alpha = \arg z_1$ . В начале координат пересекаются две хорды:  $[z_1, z^*]$  и  $[-1, 1]$ . По известной теореме о пересекающихся хордах имеем  $|z_1| |z^*| = 1$ . Для симметричной точки  $z_2$  имеем

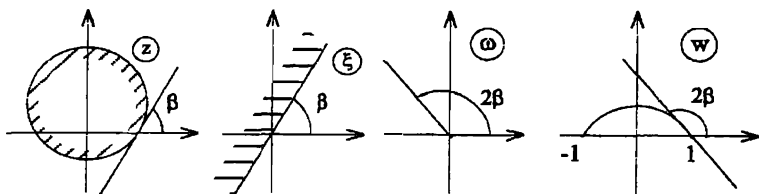
$$|z_2| = \frac{1}{|z_1|}, \quad \arg z_2 = -\alpha = -\arg z_1,$$

а это означает, что  $z_2 = 1/z_1$ . Из фиг. 3.7 видно, что любая окружность  $\Gamma$ , проходящая через точки  $1$  и  $-1$ , разделяет две области однолиственности функции Жуковского. В частности, областями однолиственности

<sup>1</sup> Действительно, из равенства  $z_1 + 1/z_1 = z_2 + 1/z_2$  следует  $(z_1 - z_2)(1 - 1/(z_1 z_2)) = 0$ , откуда вытекает  $z_1 z_2 = 1$ .

являются: внутренность единичного круга  $|z| < 1$ , внешность круга  $|z| > 1$ , верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ , нижняя полуплоскость.

Пусть  $\Gamma$  – окружность, проходящая через точки 1 и  $-1$  и пересекающая вещественную ось под углом  $\beta$  (фиг. 3.8). Рассмотрим, в какую



Фиг. 3.8. Отображение внешности круга функцией Жуковского

область отображает функция (3.15) внешность окружности  $\Gamma$ . Для этого перепишем функцию Жуковского в виде

$$w = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}$$

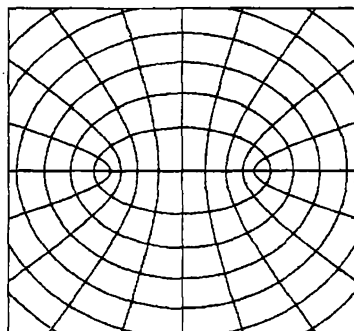
и представим ее как композицию трех простых функций

$$\xi = \frac{z-1}{z+1}, \quad \omega = \xi^2, \quad w = \frac{1+\omega}{1-\omega}.$$

При дробно-линейном преобразовании  $\xi = (z-1)/(z+1)$  внешность окружности  $\Gamma$  отображается в полуплоскость  $\beta - \pi < \arg \xi < \beta$ . Квадратичное преобразование  $\omega = \xi^2$  отображает эту полуплоскость в плоскость с разрезом вдоль луча  $\arg \omega = 2\beta$ . Наконец, при дробно-линейном преобразовании  $w = (1+\omega)/(1-\omega)$  луч отображается в дугу окружности с концами в точках  $w = \pm 1$ , составляющую угол  $2\beta$  с вещественной осью. В результате функция Жуковского отображает конформно внешность  $\Gamma$  на плоскость  $w$  с разрезом вдоль дуги указанной окружности. В такую же область отображается внутренность окружности  $\Gamma$ .

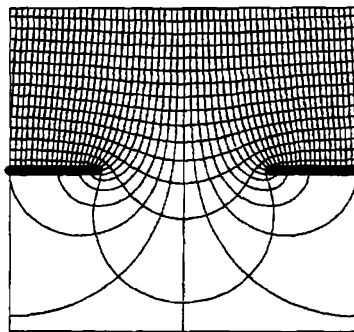
При  $\beta = \pi/2$  окружность  $\Gamma$  представляет единичную окружность  $|z| = 1$ . Функция Жуковского отображает конформно внешность единичного круга в плоскость  $w$  с разрезом вдоль отрезка вещественной

оси  $[-1, 1]$ . При этом полярная сеть во внешности круга отображается в сеть софокусных эллипсов и гипербол с фокусами в точках  $w = \pm 1$ . Такая сеть линий изображена на фиг. 3.9.



Фиг. 3.9. Отображение полярной сети функцией Жуковского

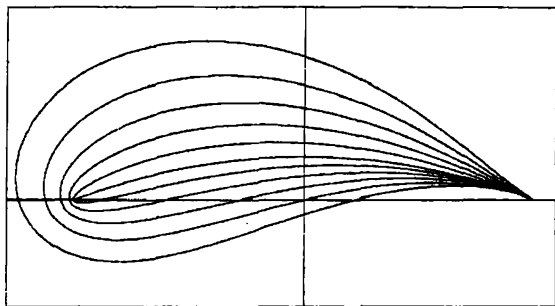
Функция Жуковского однолистка в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ . Она отображает эту полуплоскость на плоскость  $w$  с двумя разрезами вдоль лучей вещественной оси  $(-\infty, -1)$  и  $(1, \infty)$ . Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , осуществляемое функцией Жуковского, представлено на фиг. 3.10.



Фиг. 3.10. Отображение декартовой сети функцией Жуковского

Всякая окружность плоскости  $z$ , расположенная в области однолистности, отображается функцией (3.15) в замкнутую жорданову кривую, называемую профилем Жуковского. Если окружность проходит через одну из точек 1 или  $-1$ , то профиль Жуковского имеет острие (точку возврата), в противном случае профиль Жуковского представляет гладкую жорданову кривую.

Семейство профилей Жуковского изображено на фиг. 3.11. Профили



Фиг. 3.11. Профили Жуковского

Жуковского широко используются в аэродинамике для аппроксимации профилей крыльев самолетов.

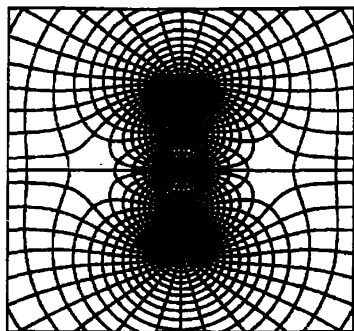
Функция, обратная функции Жуковского, является двузначной. Она имеет две ветви:

$$w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{и} \quad w_2 = z - \sqrt{z^2 - 1}. \quad (3.16)$$

Точками ветвления являются точки  $z = \pm 1$ . Если провести разрез, соединяющий точки ветвления, то в полученной области можно выделить аналитические однозначные ветви обратной функции.

Отображение полярной сети обратной функцией представлено на фиг. 3.12. Эта картина представляет карту рельефа функции Жуковского.

Изотермическая сеть функции Жуковского представлена на фиг. 3.13. Она представляет отображение декартовой сети, осуществляемое обратной функцией (3.16).



Фиг. 3.12. Карта рельефа функции Жуковского

**Упражнения.**

1. Построить с помощью программы CONFORMAL пакета Maple отображение полярной сети во внешности круга  $|z| > 1$ , осуществляемое композицией функций

$$s = \left(1 + \frac{p_1 + p_2}{2}\right) z + \frac{p_2 - p_1}{2}, \quad w = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s}\right),$$

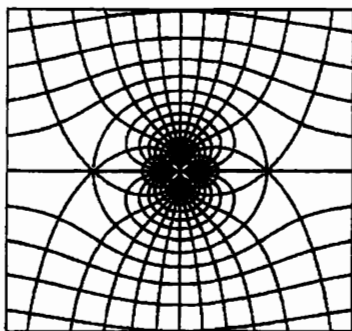
при  $p_1 = 0.35$  и различных значениях параметра  $p_2$  ( $0 < p_2 < 0.1$ ). Убедиться, что окружность  $|z| = 1$  отображается при этом в замкнутую кривую – симметричный профиль Жуковского (иначе называется рулем Жуковского). При  $p_2 = 0$  кривая имеет острие – точку возврата. При  $p_2 > 0$  профиль Жуковского имеет вместо острия скругление.

2. Построить отображение полярной сети во внешности единичного круга  $|z| > 1$ , осуществляемое композицией функций

$$s = \frac{z + i \cos p}{\sin p}, \quad w = \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s}\right),$$

для различных значений параметра  $p$ ,  $\pi/4 < p < \pi/2$ . Убедиться, что при  $p = \pi/4$  образом является плоскость  $w$  с разрезом вдоль дуги полуокружности, а при  $p = \pi/2$  – плоскость с разрезом вдоль отрезка  $[-1, 1]$ .





Фиг. 3.13. Изотермическая сеть функции Жуковского

### 3.5 Показательная (экспоненциальная) функция

Экспонента комплексного аргумента  $z = x + iy$  определяется как

$$w = e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y. \quad (3.17)$$

Функция  $e^z$  является целой трансцендентной функцией (т.е. она аналитична на всей комплексной плоскости и имеет существенную особенность только в бесконечно удаленной точке). Для нее имеем

$$|w| = e^x, \quad \arg w = y, \quad (3.18)$$

следовательно, карта рельефа функции  $e^z$  представляет декартову сеть на плоскости  $z$ . Изотермическая сеть функции  $e^z$  будет построена в следующем разделе.

Производная функции (3.17)  $w' = e^z$  нигде не обращается в нуль, следовательно, отображение  $w = e^z$  является локально-конформным в любой точке комплексной плоскости  $C$ .

Из определения функции (3.17) следует, что она является периодической с чисто мнимым периодом  $2\pi i$ , т.е.  $e^z = e^{z+2\pi i n}$  при любом  $n \in \mathbb{Z}$ . Справедливо и обратное утверждение: если  $e^{z_1} = e^{z_2}$ , то  $z_2 = z_1 + 2\pi i n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, функция  $e^z$  является однолистной в любой области, не содержащей точек  $z_1$  и  $z_2$ , связанных соотношением  $z_2 = z_1 + 2\pi i$ . Такой областью может быть криволинейная полоса

$$f(x) < y < f(x) + 2\pi, \quad (3.19)$$

где  $f(x)$  – любая непрерывная функция, определенная на всей числовой оси  $\mathcal{R}$ . Чаще всего в качестве области однолиственности рассматривается горизонтальная полоса  $C < \operatorname{Im} z < C + 2\pi$ . образом этой полосы при отображении (3.17) является вся комплексная плоскость  $w$  с разрезом вдоль луча  $\arg w = C$ . В частности, полоса  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  отображается функцией (3.17) конформно на плоскость  $w$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси, а полоса  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  – на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ . Функция  $w = e^z$  используется всегда, когда требуется конформно отобразить полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на полуплоскость. При этом декартова сеть линий в полосе отображается в полярную сеть на полуплоскости, а именно – горизонтальные прямые  $\operatorname{Im} z = C_1$  отображаются в лучи  $\arg w = C_1$ , а отрезки вертикальных прямых  $\operatorname{Re} z = C$  – в полуокружности  $|w| = e^C$ ,  $\operatorname{Im} w > 0$ .

Рассмотрим, в какую линию отображает функция (3.17) наклонную прямую  $y = ax + b$ . Записывая функцию  $w$  в показательной форме

$$w = R e^{i\Phi},$$

имеем, согласно (3.18):  $R = e^x$ ,  $\Phi = ax + b$ . Исключая отсюда параметр  $x$ , получим

$$R = \exp\left(\frac{\Phi - b}{a}\right).$$

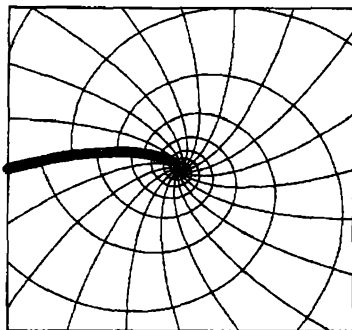
Таким образом, всякая наклонная прямая плоскости  $z$  отображается функцией (3.17) в логарифмическую спираль.<sup>2</sup> Если прямая образует угол  $\alpha$  с осью абсцисс ( $\alpha = \arctg a$ ), то в силу конформности отображения логарифмическая спираль пересекает свои радиусы – векторы под тем же углом  $\alpha$ . Семейство параллельных прямых, соответствующих различным значениям параметра  $b$ , отображается в семейство конгруэнтных логарифмических спиралей

$$R = C \exp\left(\frac{\Phi}{a}\right), \quad \text{где } C = \exp\left(-\frac{b}{a}\right). \quad (3.20)$$

Согласно условию (3.19), функция  $w = e^z$  однолистка в наклонной полосе

$$ax - \pi < y < ax + \pi.$$

<sup>2</sup> Логарифмической спиралью называется плоская кривая, определяемая полярным уравнением  $\rho = \exp(\beta\varphi)$ , где  $\beta \neq 0$  – вещественная константа. Логарифмическая спираль пересекает лучи, выходящие из начала координат, под постоянным углом (изогонально).



Фиг. 3.14. Логарифмические спирали

Иначе эти условия можно записать в виде  $|y - ax| < \pi$  или  $-\pi < \operatorname{Im}(z(1 - ia)) < \pi$ . Обозначив  $\xi = z(1 - ia)$ , найдем, что функция  $w = \exp(\xi/(1 - ia))$  отображает горизонтальную полосу  $-\pi < \operatorname{Im} \xi < \pi$  на плоскость  $w$  с разрезом вдоль логарифмической спирали

$$R = \exp\left(\frac{\Phi - \pi}{a}\right).$$

Декартова сеть в горизонтальной полосе  $-\pi < \operatorname{Im} \xi < \pi$  отображается функцией  $w = \exp(\xi/(1 - ia))$  в два взаимно-ортогональных семейства логарифмических спиралей, а именно: горизонтальные прямые отображаются в семейство бесконечных спиралей (3.20), а отрезки вертикальных прямых  $\operatorname{Re} \xi = C$  — в дуги логарифмических спиралей, ортогональных семейству (3.20).

Отображение декартовой сети, осуществляемое функцией

$$w = \exp\left(\frac{z}{1 - ia}\right)$$

при  $a = 0.25$ , представлено на фиг. 3.14.

### 3.6 Логарифмическая функция

Функцией, обратной к многолистной функции  $e^z$ , является бесконечнозначная функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Ее точками ветвления являются  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Проводя разрез, соединяющий точки ветвления, можно выделить однозначную непрерывную ветвь аналитической функции. Обычно разрез проводят вдоль отрицательной вещественной полуоси и обозначают главное значение логарифмической функции  $\ln z$ ; таким образом

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

где  $-\pi < \arg z < \pi$ . Именно эту величину вычисляют стандартные программы ЭВМ как значение функции  $\operatorname{LOG}(Z)$ .

Функция  $w = \ln z$  аналитична и однолистка на плоскости  $C$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Эта функция конформно отображает плоскость с разрезом на полосу  $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$ , а верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  — на полосу  $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ . При этом полярная сеть линий в полуплоскости отображается в декартову сеть в полосе.

Изотермической сетью функции  $w = \ln z$  является полярная сеть.

Рассмотрим отображение декартовой сети посредством функции  $w = \ln z$ . Вертикальные прямые  $x = C$  имеют полярное уравнение  $\rho = C / \cos \varphi$ . Они отображаются в линии, имеющие параметрическое уравнение

$$u = \ln \left( \frac{C}{\cos \varphi} \right), \quad v = \varphi.$$

Исключая отсюда параметр  $\varphi$ , получим явное уравнение линий:

$$u = -\ln(\cos v) + \ln C. \quad (3.21)$$

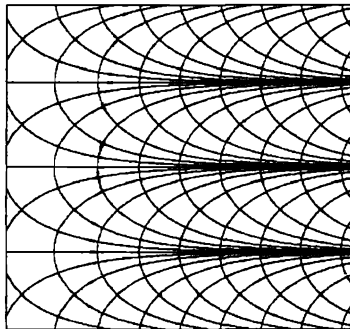
**Цепная линия постоянной прочности.** Линия, определяемая уравнением

$$y = -\ln \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad (3.22)$$

называется цепной линией постоянной прочности. Такую форму принимает под действием силы тяжести гибкая тяжелая нить переменного сечения, у которой зависимость площади сечения от длины подобрана так, чтобы плотность сил натяжения была во всех сечениях одинаковой. В такой нити упругое напряжение (а значит, и вероятность разрыва) во всех ее точках постоянна, что и объясняет название кривой (3.22). Действительно, пусть форма нити определяется уравнением  $y = -\ln \cos x$ , тогда длина элемента дуги равна  $ds = dx / \cos x$ .

Пусть площадь поперечного сечения меняется вдоль нити по закону  $S(x) = S_0 / \cos x$ . Тогда под действием силы натяжения  $T(x) = T_0 / \cos x$  и силы тяжести, пропорциональной  $S(x) ds$ , такая нить будет находиться в покое. При этом плотность сил натяжения, т.е. отношение  $T'(x)/S(x)$ , оказывается постоянной, равной  $T_0/S_0$ .

Таким образом, прямые  $x = C$  отображаются функцией  $w = \ln z$  в цепные линии постоянной прочности (3.21). В такие же цепные линии (только иначе расположенные) отображаются любые прямые, не проходящие через начало координат и не пересекающие линии ветвления. Отображение декартовой сети, производимое функцией  $w = \ln z$ , изображено на фиг. 3.15. Эта картина одновременно представляет изо-



Фиг. 3.15. Отображение декартовой сети функцией  $w = \ln z$

термическую сеть обратной функции  $w = e^z$ .

Рассмотрим в заключение, в какую сеть линий функция  $w = \ln z$  отображает униполярную сеть окружностей. Для этого представим ее как композицию двух функций

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad w = -\ln \xi.$$

Первая функция (инверсия) отображает униполярную сеть в декартову сеть. Вторая функция  $w = -\ln \xi$  отображает декартову сеть в сеть цепных линий постоянной прочности, изображенную на фиг. 3.15, но повернутую на  $180^\circ$  относительно начала координат.

Таким образом, функция  $w = \ln z$  отображает униполярную сеть в сеть цепных линий постоянной прочности.

### 3.7 Степенная функция

Функция  $z^\alpha$ , где  $\alpha = \text{const} \neq 0$  называется степенной функцией с показателем  $\alpha$  (мы будем рассматривать только вещественные показатели). При  $\alpha = 1$  она представляет тождественное преобразование; случаи  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 1/2$  и  $\alpha = -1$  были рассмотрены выше.

При  $\alpha = n$ , где  $n$  – натуральное число ( $n > 2$ ) функция  $z^\alpha$  является целой аналитической функцией с единственной критической точкой  $z = 0$ ; при  $\alpha = -n$  она является мероморфной функцией с единственным полюсом  $n$ -го порядка в точке  $z = 0$ .

При нецелых значениях показателя  $\alpha$  функция  $z^\alpha$  определяется как  $\exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$ . Она является, как и  $\operatorname{Ln} z$ , неоднозначной функцией с точками ветвления  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Стандартные программы ЭВМ вычисляют главную ветвь этой функции

$$w = \exp(\alpha \ln z), \quad (3.23)$$

определяемую условием  $-\pi < \arg z < \pi$ . Эта ветвь представляет однозначную аналитическую функцию на плоскости  $z$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Производная функции (3.23)  $w' = \alpha z^{\alpha-1}$  нигде в области определения не обращается в нуль, т.е. отображение, осуществляемое функцией (3.23), является всюду локально-конформным.

Функция, обратная степенной функции  $z^\alpha$ , представляет степенную функцию с показателем  $1/\alpha$ .

Степенная функция с положительным показателем

Функция (3.23) отображает точку  $z = \rho e^{i\varphi}$  в точку  $w = R e^{i\Phi}$ , где  $R = \rho^\alpha$ ,  $\Phi = \alpha \varphi$ ; полярную сеть линий — в полярную сеть. Пусть  $G$  — угловая область

$$C < \arg z < D, \quad (3.24)$$

где предполагается  $-\pi \leq C < D \leq \pi$ . Область  $G$  отображается функцией (3.23) в угловую область

$$C\alpha < \arg w < D\alpha.$$

Если  $0 < \alpha < 1$ , то функция (3.23) является однолистной во всей области определения. Если же  $\alpha > 1$ , то для однолистности функции (3.23) в области (3.24) необходимо  $D\alpha - C\alpha < 2\pi$ , т.е. раствор области (3.24)  $D - C$  не должен превосходить величины  $2\pi/\alpha$ . В частности, полуплоскость  $\operatorname{Re} z > 0$  конформно отображается при  $\alpha < 2$  на угловую область  $-\pi\alpha/2 < \arg w < \pi\alpha/2$  с углом раствора  $\pi\alpha$ . Если  $\alpha < 1$ , то угол раствора будет меньше  $\pi$ . Такой угол (острый или тупой) называется *выступающим*. Если  $1 < \alpha < 2$ , то угол раствора превосходит  $\pi$ . Такой угол называется *входящим*. При  $\alpha > 2$  отображение полуплоскости на угловую область является неоднолистным.

Степенная функция (3.23) используется всегда, когда требуется конформно отобразить угловую область (3.24) на полуплоскость. Для этого показатель степени  $\alpha$  выбирается равным  $\alpha = \pi/(D - C)$ .

Рассмотрим отображение декартовой сети линий, осуществляемое функцией (3.23). Прямая  $x = C$  (или в полярных координатах  $\rho = C/\cos \varphi$ ) отображается функцией (3.23) в кривую, определяемую полярным уравнением

$$R = \frac{C_1}{(\cos \frac{\Phi}{\alpha})^\alpha}. \quad (3.25)$$

В случае  $0 < \alpha < 1$  мы будем называть кривую (3.25) обобщенной гиперболой. При  $\alpha = 1/2$  она представляет равнобочную гиперболу.

В случае  $1 < \alpha < 2$  назовем кривую (3.25) обобщенной параболой (при  $\alpha = 2$  она представляет обычную параболу).

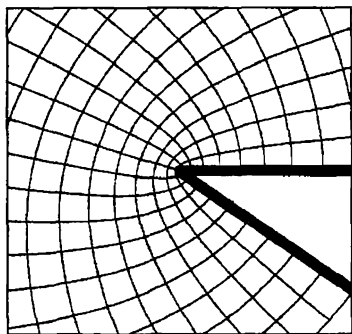
Любая прямая, не проходящая через начало координат и не пересекающая линию ветвления, отображается в обобщенную параболу или гиперболу (3.25), только иначе расположенную. Декартова сеть в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  конформно отображается функцией (3.23) при

$0 < \alpha < 2$  в два взаимно-ортогональных семейства обобщенных гипербол (или парабол). При  $\alpha > 2$  кривая (3.25) имеет самопересечение. В этом случае отображение полуплоскости не является однолиственным (конформным).

Примеры.

1. Сеть обобщенных парабол, представляющая отображение декартовой сети в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  функцией  $w = z^{1.8}$ , изображена на фиг. 3.16.

2. Изотермическая сеть той же функции изображена на фиг. 3.17. Она представляет два взаимно-ортогональных семейства обобщенных гипербол.



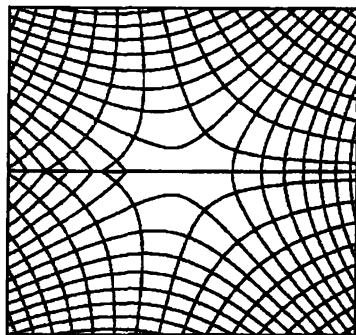
Фиг. 3.16. Отображение декартовой сети функцией  $w = z^{1.8}$

Рассмотрим отображение униполярной сети окружностей, реализуемое функцией (3.23). Окружность, определяемая полярным уравнением  $\rho = C \cos \varphi$ , отображается функцией (3.23) в кривую, определяемую уравнением

$$R = l \left( \cos \frac{\Phi}{\alpha} \right)^\alpha, \quad (3.26)$$

где  $l = C^\alpha$ . В случае  $0 < \alpha < 1$  мы будем называть кривую (3.26) обобщенной лемнискатой. При  $\alpha = 1/2$  она представляет лемнискату Бернулли. Конечная область, ограниченная обобщенной лемнискатой, имеет выступающий угол  $\pi \alpha$  в начале координат.



Фиг. 3.17. Изотермическая сеть функции  $w = z^{1.8}$ 

В случае  $1 < \alpha < 2$  кривая (3.26) будет называться обобщенной кардиоидой (при  $\alpha = 2$  она представляет обычную кардиоиду). Обобщенная кардиоиды ограничивает область, имеющую входящий угол  $\pi \alpha$ .

#### Степенная функция с отрицательным показателем

Степенную функцию с отрицательным показателем  $-\beta$  ( $\beta > 0$ ) можно представить как композицию двух функций

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad w = \xi^\beta.$$

Первая из этих функций (инверсия) отображает декартову сеть правой полуплоскости в униполярную сеть, вторая функция отображает окружности униполярной сети в сеть обобщенных лемнискат или кардиоид.

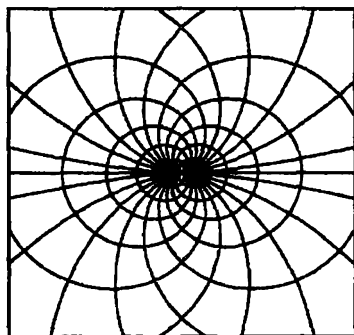
Рассмотрим подробнее рациональную функцию

$$w = \frac{1}{z^2}. \quad (3.27)$$

Ее областью однолиственности, как и для функции  $z^2$ , является полуплоскость  $C < \arg z < C + \pi$ . Функцию (3.27) можно представить как композицию инверсии и квадратичной функции

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad w = \xi^2.$$

Инверсия отображает декартову сеть линий в униполярную сеть окружностей, проходящих через начало координат. Преобразование  $w = \xi^2$  отображает каждую окружность униполярной сети в кардиоида. Таким образом, функция (3.27) отображает декартову сеть в два взаимно-ортогональных семейства кардиоид. Такое семейство кривых изображено на фиг. 3.18. Его можно рассматривать как изотермиче-



Фиг. 3.18. Отображение декартовой сети функцией  $w = 1/z^2$

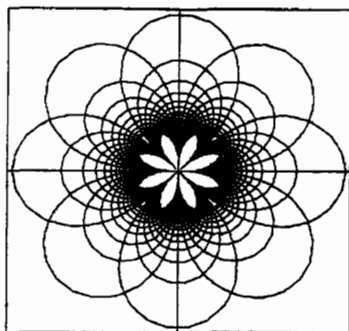
скую сеть обратной функции  $w = 1/\sqrt{z}$ .

Построим изотермическую сеть функции (3.27) как образ декартовой сети при отображении посредством обратной функции  $w = \pm 1/\sqrt{z}$ . Функцию  $w_1 = 1/\sqrt{z}$  можно рассматривать как композицию двух функций:

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad w = \sqrt{\xi}.$$

Первая из этих функций (инверсия) отображает декартову сеть в униполярную сеть окружностей, проходящих через начало координат. Функция  $w = \sqrt{\xi}$  отображает каждую такую окружность в лемнискату Бернулли.

Изотермическая сеть функции  $w = 1/z^2$ , представляющая два взаимно-ортогональных семейства лемнискат Бернулли, изображена на фиг. 3.19.

Фиг. 3.19. Изотермическая сеть функции  $w = 1/z^2$ 

### 3.8 Гиперболические и тригонометрические функции

Гиперболические функции комплексного аргумента определяются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}. \end{aligned}$$

Функции  $\operatorname{ch} z$  и  $\operatorname{sh} z$  можно рассматривать как композицию экспоненты и функции Жуковского:

$$\begin{aligned} \xi &= e^z, & \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right), \\ \xi_1 &= i e^z, & \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2i} \left( \xi_1 + \frac{1}{\xi_1} \right). \end{aligned}$$

Функции  $\operatorname{th} z$  и  $\operatorname{cth} z$  представляют композиции экспоненты и дробно-линейной функции:

$$\xi = e^{2z}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}.$$

Наконец, функцию  $w = \operatorname{sech} z$  можно рассматривать как композицию экспоненты, функции Жуковского и инверсии:

$$\eta = e^z, \quad \xi = \frac{1}{2} \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right), \quad w = \frac{1}{\xi}.$$

Функции  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{sech} z$  имеют, как и  $e^z$ , чисто мнимый период  $2\pi i$ . Функции  $\operatorname{th} z$  и  $\operatorname{cth} z$  также периодичны и имеют, как и  $e^{2z}$ , чисто мнимый период  $\pi i$ .

Функции  $\operatorname{ch} z$  и  $\operatorname{sh} z$  являются целыми трансцендентными функциями. Остальные гиперболические функции являются мероморфными с бесконечным множеством полюсов первого порядка.

Тригонометрические функции комплексного переменного  $\cos z$  и  $\sin z$  определяются как аналитические продолжения функций  $\cos x$  и  $\sin x$  с вещественной оси. Для вещественных значений аргумента из формулы Эйлера следует

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Рассматривая аналитические продолжения этих функций, имеем для любых  $z \in \mathcal{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (3.28)$$

Очевидна связь тригонометрических функций с гиперболическими:

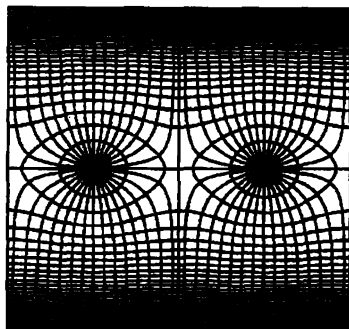
$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z. \quad (3.29)$$

Для функций (3.28) справедливы все формулы (равенства) вещественного анализа (формулы дифференцирования, теоремы сложения, формулы удвоения аргумента и т.д.). В частности из теорем сложения и формул (3.29) следует

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \\ \sin(x + iy) &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Функции  $\cos z$  и  $\sin z$  периодические с периодом  $2\pi$ . Карта рельефа функции  $w = \cos z$  в полосе  $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$  представлена на фиг. 3.20. Вне этой полосы ее карта рельефа продолжается периодически.

Функции  $\sin z$  и  $\cos z$  связаны между собой соотношением  $\sin z = \cos(z - \pi/2)$ , т.е. линейным преобразованием (трансляцией)

Фиг. 3.20. Карта рельефа функции  $w = \cos z$ 

независимого переменного  $z$ . Гиперболические функции  $\operatorname{sh} z$  и  $\operatorname{ch} z$  тоже выражаются через  $\sin z$  и  $\cos z$  с помощью линейного преобразования независимого переменного (3.29), представляющего поворот на угол  $\pi/2$ . Следовательно, для изучения конформных отображений, осуществляемых функциями  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ , достаточно исследовать одно из них, скажем,  $\cos z$ . Остальные преобразования будут получаться из исследованного преобразованиями трансляции и (или) поворота плоскостей  $z$  и  $w$  на угол  $\pi/2$ .

Определим область однолиственности функции  $w = \cos z$ . Критические точки функции находятся из условия  $w' = -\sin z = 0$ , откуда  $z = \pi n$ . Во всех остальных точках комплексной плоскости функция  $w = \cos z$  является локально - однолистной. Если в точках  $z_1$  и  $z_2$  функция принимает одинаковые значения, то

$$\cos z_1 - \cos z_2 = 0$$

или

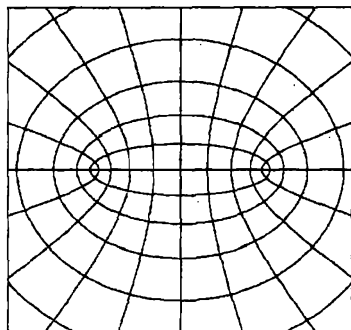
$$\sin \frac{z_1 - z_2}{2} \sin \frac{z_1 + z_2}{2} = 0,$$

откуда либо  $z_1 - z_2 = 2\pi n$ , либо  $z_1 + z_2 = 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Функция  $\cos z$  однолистка в некоторой области, если наряду с любой ее точкой  $z_1$  этой области не принадлежат точки  $-z_1$ ,  $2\pi - z_1$ ,  $-2\pi - z_1$ . Этим условиям удовлетворяет, например, вертикальная полоса  $0 < x < \pi$ , или наклонная полоса  $0 < x - ay < \pi$ .

Для определения образа декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$  при отображении  $w = \cos z$  представим  $\cos z$  как композицию двух функций:

$$\xi = e^{iz}, \quad w = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right).$$

Первая функция отображает конформно полосу  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$  в полуплоскость  $\operatorname{Im} \xi > 0$ , причем декартова сеть в полосе отображается в полярную сеть в полуплоскости. Вторая функция (Жуковского) отображает верхнюю полуплоскость  $\xi$  в плоскость  $w$  с разрезами вдоль лучей вещественной оси  $(-\infty, -1)$  и  $(1, \infty)$ . При этом полярная сеть отображается в сеть софокусных эллипсов и гипербол. Отображение декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ , реализуемое функцией  $w = \cos z$ , представлено на фиг. 3.21.



Фиг. 3.21. Отображение декартовой сети функцией  $w = \cos z$

Функция  $w = \sin z = \cos(z - \pi/2)$  однолистка, например, в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ . Она конформно отображает декартову сеть в этой полосе на сеть софокусных эллипсов и гипербол (фиг. 3.21).

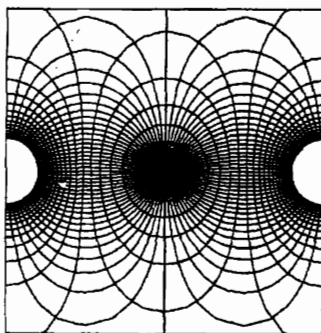
Гиперболические функции  $w = \operatorname{ch} z$  и  $w = -i \operatorname{sh} z$  однолистки соответственно в горизонтальных полосах  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  и  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ . Эти функции также отображают конформно декартову сеть в своих полосах однолиственности на сеть эллипсов и гипербол, изображенную на фиг. 3.21.

Функция  $w = \operatorname{tg} z = \sin z / \cos z$  представляет мероморфную функцию с бесконечным множеством полюсов первого порядка в точках

$z = \pi(n + 1/2)$ . Функция  $\operatorname{tg} z$  периодична с вещественным периодом  $\pi$ . С гиперболическим тангенсом она связана соотношением

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz.$$

Карта рельефа функции  $w = \operatorname{tg} z$  в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$  изображена на фиг. 3.22. За пределы указанной полосы функция и ее



Фиг. 3.22. Карта рельефа функции  $w = \operatorname{tg} z$

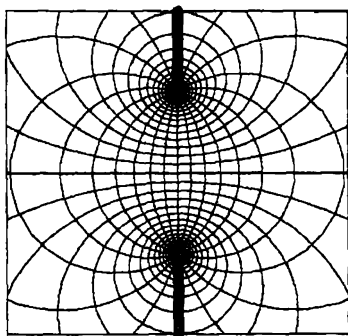
карта рельефа продолжают периодически.

Функцию  $w = \operatorname{tg} z$  можно представить как композицию двух функций

$$\xi = e^{2iz}, \quad w = -i \frac{\xi - 1}{\xi + 1}. \quad (3.30)$$

Экспонента отображает конформно полосу  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$  в плоскость  $\xi$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси, причем декартова сеть в полосе отображается в полярную сеть на плоскости  $\xi$ . Дробно-линейная функция отображает плоскость с разрезом вдоль луча в плоскость  $w$  с двумя разрезами вдоль лучей мнимой оси  $(-\infty, -i)$  и  $(i, \infty)$ . При этом полярная сеть линий конформно отображается в биполярную сеть с полюсами в точках  $\pm i$ .

Отображение декартовой сети в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ , реализуемое функцией  $w = \operatorname{tg} z$ , представлено на фиг. 3.23. При этом вертикальные прямые  $\operatorname{Re} z = C$  отображаются в дуги окружностей Штейнера, проходящих через точки  $i$  и  $-i$ , а отрезки горизонтальных прямых — в окружности Аполлония.



Фиг. 3.23. Отображение декартовой сети функцией  $w = \operatorname{tg} z$

Рассмотрим, в какую линию отображает функция  $w = \operatorname{tg} z$  наклонную прямую  $y - ax = C$ . Рассматривая  $\operatorname{tg} z$  как композицию функций (3.30), получим, что прямая плоскости  $z$  отображается в логарифмическую спираль на плоскости  $\xi$ , которая при дробно - линейном преобразовании отображается в локсодрому на плоскости  $w$ .<sup>3</sup>

### Пример 3.1.

Функция  $w = \operatorname{tg}(z/(1-ip))$  однолистка в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$  и отображает декартову сеть конформно в сеть, состоящую из двух взаимно-ортогональных семейств локсодром. На фиг. 3.24 приведено отображение декартовой сети функцией  $w = \operatorname{tg}(z/(1-0.3i))$ .

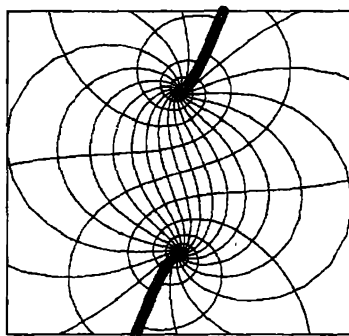
Рассмотрим, наконец, отображение, реализуемое функцией  $w = \sec z = 1/\cos z$ . Эта функция однолистка, как и  $\cos z$ , в полосе  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ . Ее можно представить как композицию двух функций

$$\xi = \cos z, \quad w = 1/\xi.$$

Функция  $\xi = \cos z$ , как выяснено выше, конформно отображает полосу  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$  на плоскость  $\xi$  с разрезами вдоль лучей вещественной оси, причем декартова сеть отображается в сеть софокусных эллипсов

<sup>3</sup>Название *локсодрома* пришло из картографии. Так называются кривые на сфере, пересекающие меридианы под постоянным углом (изогонально). На стереографической проекции локсодромы представляют логарифмические спирали. При дробно - линейном преобразовании стереографической проекции меридианы отображаются в окружности Штейнера, а логарифмические спирали - в их изогональные траектории. Локсодромами на плоскости называются кривые, пересекающие под постоянным углом окружности Штейнера.





Фиг. 3.24. Отображение декартовой сети функцией  $w = \operatorname{tg} \frac{z}{1-i}$

и гипербол. Второе преобразование представляет инверсию относительно общего центра эллипсов и гипербол.

При инверсии центральных кривых второго порядка относительно их центра получаются кривые, называемые *лемнискатами Бута*. Точнее, при инверсии эллипсов относительно центра получаются гладкие замкнутые жордановы кривые, называемые эллиптическими лемнискатами Бута. При инверсии гиперболы, состоящей из двух ветвей, получается замкнутая кривая, имеющая в начале координат точку самопересечения. Такая кривая называется гиперболической лемнискатой Бута.<sup>4</sup>

Таким образом, декартова сеть в полосе  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$  конформно отображается функцией  $w = \sec z$  в два взаимно - ортогональных семейства линий, одно из которых состоит из эллиптических, а второе - из гиперболических лемнискат Бута. Такая сеть линий изображена на фиг. 3.25.

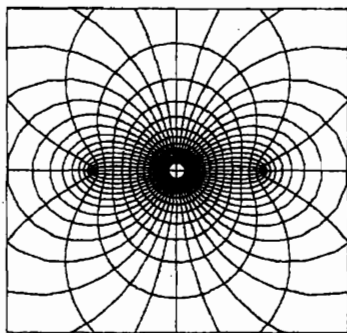
### Упражнения

1. С помощью программы CONFORMAL пакета MAPLE построить изотермическую сеть функции

$$w = \sin z.$$

2. Построить отображение полосы  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  функцией

<sup>4</sup>Рассмотренная выше лемниската Беркулли представляет частный случай гиперболической лемнискаты Бута - она является инверсией равнобочной гиперболы.



Фиг. 3.25. Отображение декартовой сети функцией  $w = \sec z$

$$w = \operatorname{sh} \frac{z}{1 - ip}$$

при значениях параметра  $p = -0.5, 0, 0.6$ .

### 3.9 Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Функция  $w = \operatorname{Arccos} z$  определяется как решение уравнения  $z = \cos w$ . Записанное в виде

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

оно сводится к квадратному уравнению относительно функции  $e^{iw}$ . Уравнение для  $w$  имеет бесконечное множество решений

$$w = -i \operatorname{Ln} \left( z \pm i\sqrt{1 - z^2} \right).$$

Функция  $\operatorname{Arccos} z$  является бесконечно-значной с точками ветвления  $z = \pm 1$ . Для выделения ее однозначной непрерывной ветви следует провести разрез, соединяющий точки ветвления. Обычно разрез проводится вдоль лучей вещественной оси  $(-\infty, -1)$  и  $(1, \infty)$ . В качестве главного значения многозначной функции выбирают

$$\operatorname{arccos} z = -i \ln \left( z + i\sqrt{1 - z^2} \right). \quad (3.31)$$

Функция  $w = \arccos z$  на отрезке  $(-1, 1)$  вещественной оси совпадает с вещественной функцией  $\arccos x$ ,<sup>5</sup> следовательно, она представляет аналитическое продолжение функции  $\arccos x$  с отрезка  $(-1, 1)$  на комплексную плоскость с разрезами вдоль лучей вещественной оси.

Функция  $w = \cos z$ , как выяснено в предыдущем разделе, отображает конформно полосу  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$  на плоскость  $w$  с разрезами вдоль лучей вещественной оси. Обратная функция  $w = \arccos z$  производит обратное отображение плоскости  $z$  с разрезами вдоль лучей на полосу  $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ . При этом правый разрез ( $z = x > 1$ ) отображается функцией (3.31) в мнимую ось  $\operatorname{Re} w = 0$ , а левый разрез — в прямую  $\operatorname{Re} w = \pi$ . Можно проследить соответствие границ при отображении аналитически, но гораздо проще построить отображение на компьютере с помощью программы CONFORMAL пакета MAPLE (см. ниже упражнение 1).

Функцию  $w = \arcsin z$  можно определить аналогично как

$$w = -i \ln \left( \sqrt{1 - z^2} + iz \right). \quad (3.32)$$

Областью определения этой функции, как и функции (3.31) является плоскость  $z$  с разрезами вдоль лучей вещественной оси. На отрезке  $(-1, 1)$  функция (3.32) принимает вещественные значения  $w = \arcsin x$  и, следовательно, она представляет аналитическое продолжение функции  $\arcsin x$  с отрезка  $(-1, 1)$  на комплексную плоскость с разрезами вдоль лучей. На отрезке  $(-1, 1)$  вещественные функции  $\arcsin x$  и  $\arccos x$  связаны соотношением

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

В силу теоремы об аналитическом продолжении соотношений [1] эта формула справедлива во всей области аналитичности функций (3.31), (3.32), таким образом

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z.$$

Из этой формулы следует, что функция  $w = \arcsin z$  отображает конформно плоскость  $z$  с разрезами вдоль лучей вещественной оси на полосу  $-\pi/2 < \operatorname{Re} w < \pi/2$ .

<sup>5</sup> Действительно, при  $z = x = \cos t$  (где  $0 < t < \pi$ ) имеем  $z + i\sqrt{1 - z^2} = \cos t + i \sin t = e^{it}$  и  $w = -i \ln(e^{it}) = t = \arccos x$ .

Функция  $w = \operatorname{Arctg} z$  определяется как решение уравнения

$$z = -i \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}.$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений

$$w = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Функция  $\operatorname{Arctg} z$  является бесконечно - значной с точками ветвления  $z = \pm i$ . Для выделения регулярной ветви следует провести разрез, соединяющий точки ветвления. Обычно разрез проводят вдоль лучей мнимой оси  $(-i\infty, -i)$  и  $(i, i\infty)$ . В качестве главной ветви многозначной функции выбирают

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}. \quad (3.33)$$

Функция (3.33) на вещественной оси (при  $z = x$ ) совпадает с известной вещественной функцией  $\operatorname{arctg} x$ .<sup>6</sup> Следовательно, она является аналитическим продолжением функции  $\operatorname{arctg} x$  с вещественной оси на комплексную плоскость с разрезами вдоль лучей мнимой оси.

Функцию  $w = \operatorname{arctg} z$  можно рассматривать как композицию двух функций

$$\xi = \frac{1+iz}{1-iz}, \quad w = -\frac{i}{2} \ln \xi.$$

Первая функция (дробно - линейная) отображает конформно плоскость  $z$  с разрезами вдоль лучей мнимой оси в плоскость  $\xi$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Вторая функция отображает плоскость  $\xi$  с разрезом в полосу  $-\pi/2 < \operatorname{Re} w < \pi/2$ . Читателю предлагается построить самостоятельно отображение полярной сети этой функцией (упражнение 4).

Обратные гиперболические функции тоже являются бесконечно - значными. Их главные значения определяются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ \operatorname{arch} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \end{aligned}$$

<sup>6</sup> Действительно, пусть  $z = x = \operatorname{tg} t$  (где  $-\pi/2 < t < \pi/2$ ). Тогда  $w = -i/2 \ln(e^{2it}) = t = \operatorname{arctg} z$ .

Обратные гиперболические функции весьма просто выражаются через обратные тригонометрические:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsh} z &= -i \operatorname{arcsin}(iz), \\ \operatorname{arch} z &= i \operatorname{arccos} z, \\ \operatorname{arth} z &= -i \operatorname{arctg}(iz).\end{aligned}$$

Упражнения.

1. Постройте отображение полярной сети в верхней полуплоскости, осуществляемое функцией

$$w = \operatorname{arccos} z$$

(рассмотрите сектор  $0 < \rho < 3$ ,  $0.001 < \varphi < 3.141$ ). Интерпретируйте полученную картину как карту рельефа функции  $\cos z$  в некоторой области.

2. Постройте отображение декартовой сети в верхней полуплоскости, осуществляемое функцией

$$w = \operatorname{arcsin} z$$

(рассмотрите прямоугольник  $-3 < x < 3$ ,  $0.001 < y < 3$ ). Интерпретируйте построенное отображение как изотермическую сеть функции  $\sin z$ .

3. Постройте отображение прямоугольника, реализуемое функцией

$$w = \operatorname{arcsin}(\sin z).$$

Убедитесь, что если прямоугольник расположен в полосе

$-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ , то он отображается в себя, т.е. для таких  $z$  верно  $\operatorname{arcsin}(\sin z) = z$ . Покажите, что квадрат  $|x| < 3$ ,  $|y| < 3$  не отображается в себя.

4. Постройте отображение полярной сети в единичном круге  $|z| < 1$ , реализуемое функцией

$$w = \operatorname{arctg} z$$

и интерпретируйте построенную сеть линий как карту рельефа функции  $\operatorname{tg} z$  в некоторой области. Сравните результаты с фиг. 3.22.

5. Постройте отображение полярной сети, осуществляемое функцией

$$w = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} z)$$

(рассмотрите круг  $0 < \rho < 3.14$ ,  $-3.14 < \varphi < 3.14$ ). Убедитесь, что круг  $|z| < \pi/2$  отображается в себя, т.е. в этой области  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} z) = z$  (за пределами полосы  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$  это равенство не выполняется).

## Глава 4

# Визуализация плоских векторных полей с точечными особенностями

Рассмотрим плоское гармоническое векторное поле  $a(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  с особенностью в точке  $z_0$ . Функция  $\overline{a(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$  является аналитической в проколотой окрестности точки  $z_0$ . По известной теореме комплексного анализа она может быть разложена в ряд Лорана

$$\overline{a(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}, \quad (4.1)$$

где  $c_n, c_{-k}$  — комплексные числа. Первая сумма в правой части равенства (4.1) (правильная часть ряда Лорана) является аналитической функцией в окрестности точки  $z_0$ . Вторая сумма в формуле (4.1) (главная часть ряда Лорана) имеет в точке  $z_0$  особенность. Особенность плоского гармонического поля  $c_{-1}/(z - z_0)$  (первый член главной части ряда Лорана) называется *вихреисточником*, особенности более высокого порядка — *мультиполями*, в частности, особенность  $c_{-2}/(z - z_0)^2$  называется *диполем*, слагаемое  $c_{-3}/(z - z_0)^3$  — *квадруполем* и т.д. Таким образом, любая изолированная особая точка плоского гармонического векторного поля представляет вихреисточник, мультиполь или их суперпозицию.

Предположим, что функция  $\overline{a(z)}$  имеет в точке  $z_0 = 0$  полюс  $N$ -го порядка:

$$\overline{a(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{c_{-k}}{z^k}.$$

Вводя комплексный потенциал  $f(z)$  как первообразную функции  $\overline{a(z)}$ ,

получим

$$f(z) = c_{-1} \ln z - \sum_{k=2}^N \frac{c_{-k}}{(k-1)z^{k-1}}.$$

Комплексный потенциал вихреисточника  $c_{-1} \ln z$  является неоднозначной функцией; ее однозначную ветвь можно выделить, проводя разрез, соединяющий точки ветвления  $z = 0$  и  $z = \infty$ . На разрезе комплексный потенциал вихреисточника имеет разрыв, однако само векторное поле  $\overline{a(z)}$  разрыва не имеет.

Потенциалы мультиполей являются однозначными аналитическими функциями.

## 4.1 Визуализация векторных полей с одной особенностью

### 4.1.1 Точечные источники, вихри, вихреисточники

Представим комплексный потенциал вихреисточника в виде

$$f(z) = \frac{\Gamma + iN}{2\pi i} \ln z,$$

где  $\Gamma$  и  $N$  вещественны. Этому потенциалу соответствует плоское гармоническое векторное поле

$$\overline{a(z)} = \frac{\Gamma + iN}{2\pi iz}.$$

Вычислим интеграл по произвольному контуру  $C$ , охватывающему начало координат:

$$\oint_C \overline{a(z)} dz = \Gamma + iN.$$

Величины  $\Gamma$  и  $N$  имеют определенный физический смысл:  $\Gamma$  представляет циркуляцию вектора  $\overline{a(z)}$  по контуру  $C$ , а величина  $N$  представляет поток вектора  $\overline{a(z)}$  через контур  $C$ .

Особенность гармонического векторного поля с комплексным потенциалом  $N/(2\pi) \ln z$  называется *источником* интенсивности  $N$ . Векторными линиями (или линиями тока) источника являются лучи, выходящие из начала координат.

Особенность векторного поля с потенциалом  $-i\Gamma/(2\pi) \ln z$  называется *вихрем* интенсивности  $\Gamma$ . Его векторными линиями (линиями тока) являются концентрические окружности полярной сети линий.



Построим линии тока вихреисточника с произвольным отношением  $\Gamma/N = a$ . Положим  $N = 2\pi$ , имеем  $f(z) = (1 - ia) \ln z$ . Изотермическая сеть комплексного потенциала  $f(z)$  представляет отображение декартовой сети в полосу  $-\pi < \operatorname{Im} f < \pi$  при обратном отображении  $z = \exp(f/(1 - ia))$ . Такое отображение, представляющее два взаимно-ортогональных семейства логарифмических спиралей, построено в предыдущей главе и представлено на фиг. 3.14.

#### 4.1.2 Диполи и квадруполь

Диполем в точке  $z_0$  называется особенность плоского гармонического поля с комплексным потенциалом

$$f(z) = \frac{d}{z - z_0}. \quad (4.2)$$

Величина  $|d|$  называется моментом диполя, угол  $\alpha = \arg d$  определяет направление диполя. Сеть векторных линий и эквипотенциалов диполя представляет изотермическую сеть дробно-линейной функции (4.2), т.е. униполярную сеть окружностей, проходящих через точку  $z_0$ . Прямая  $\arg(z - z_0) = \alpha$  является осью диполя; векторные линии диполя суть окружности, касающиеся оси диполя. Эквипотенциалами являются окружности, ортогональные оси диполя.

Сеть эквипотенциалов и векторных линий диполя при  $z_0 = 0.05(1 - i)$ ,  $d = 1 + i/3$  представлена на фиг. 3.6.

Квадруполем в точке  $z_0$  называется особенность плоского гармонического поля с комплексным потенциалом

$$f(z) = \frac{q}{(z - z_0)^2}.$$

Величина  $|q|$  называется моментом квадруполь, угол  $\beta = \arg q$  определяет направление квадруполь.

Сеть векторных линий и эквипотенциалов квадруполь при  $z_0 = 0$ ,  $\beta = 0$  представлена на фиг. 3.19. Она представляет изотермическую сеть функции  $f = 1/z^2$  и состоит из двух взаимно-ортогональных семейств лемнискат Бернулли.

#### 4.1.3 Источник в однородном поле

Рассмотрим точечный источник интенсивности  $N = 2\pi q$ , помещенный в точке  $z = 0$  и находящийся в однородном поле с комплексным

потенциалом  $-z$  :

$$f(z) = -z + q \ln z. \quad (4.3)$$

Функция (4.3) имеет единственную критическую точку  $z_0 = q$ , в которой  $f'(z_0) = 0$ .

Сеть векторных линий и эквипотенциалей рассматриваемого поля представляет изотермическую сеть функции (4.3). Полагая  $z = \rho e^{i\varphi}$  и разделяя вещественную и мнимую части, получим уравнения векторных линий и эквипотенциалей в полярных координатах:

$$-\rho \sin \varphi + q\varphi = qC, \quad -\rho \cos \varphi + q \ln \rho = C_1.$$

Векторные линии определяются полярным уравнением

$$\rho = q \frac{\varphi - C}{\sin \varphi}. \quad (4.4)$$

Построим картину векторного поля при  $q = 1$ . При других значениях величины  $q$ , как это видно из уравнения (4.4), картина поля получается преобразованием подобия.

Среди векторных линий (4.4) особо выделяется кривая, получаемая при  $C = 0$  :

$$\rho = \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

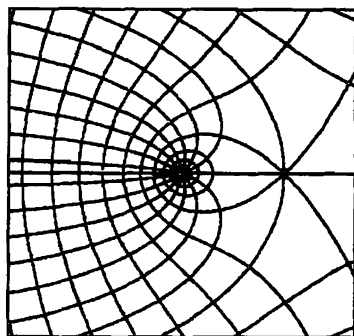
Эта кривая называется *квадратрисой Динострата*. Она проходит через критическую точку  $z_0 = 1$ , расположена целиком в области  $x < 1$ ,  $-\pi < y < \pi$ , имеет горизонтальные асимптоты  $y = \pm \pi$ .

При  $0 < C < \pi$  и  $-\pi < C < 0$  уравнение (4.4) определяет линии, называемые *укороченными квадратрисами*; все они проходят через начало координат. Если  $0 < C < \pi$  и угловая координата  $\varphi$  изменяется в пределах  $0 < \varphi < \pi$ , то ветвь укороченной квадратрисы лежит целиком внутри квадратрисы Динострата между горизонтальными асимптотами  $y = \pi - C$  и  $y = -C$ . Аналогично при  $-\pi < C < 0$  и  $-\pi < \varphi < 0$  ветвь укороченной квадратрисы лежит между асимптотами  $y = -C$  и  $y = -C - \pi$ .

При  $|C| > \pi$  кривые (4.4) называются *удлиненными квадратрисами*; все они лежат вне квадратрисы Динострата. Каждая удлиненная квадратриса лежит между асимптотами  $y = -C$  и  $y = -C + \pi$ . Эквипотенциалами рассматриваемого поля (4.3) являются кривые, определяемые уравнением

$$\cos \varphi = \frac{\ln \rho - C_1}{\rho}. \quad (4.5)$$

При  $C_1 = -1$  кривая (4.5) имеет самопересечение в критической точке  $z = 1$ . Эта кривая образует петлю вокруг начала координат и разбивает плоскость на область замкнутых эквипотенциалей (внутри петли) и область незамкнутых эквипотенциалей (вне петли).



Фиг. 4.1. Точечный источник в однородном поле

Изотермическая сеть функции (4.3) представлена на фиг.4.1. Физически ее можно интерпретировать как картину эквипотенциалей и силовых линий электрического поля заряженной нити, помещенной в однородное электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ . Одновременно фиг.4.1. изображает сеть силовых линий и эквипотенциалей для гармонически - сопряженного поля — магнитного поля линейного тока, помещенного в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $y$ .

#### 4.1.4 Диполь в однородном поле

Пусть в однородное поле с комплексным потенциалом  $z$  помещен диполь с моментом  $q^2$ , ориентированный в направлении поля. Суммарное поле имеет комплексный потенциал

$$f(z) = z + \frac{q^2}{z}. \quad (4.6)$$

Функция (4.6) преобразованием масштаба независимой переменной  $z = q\zeta$  сводится к функции Жуковского:

$$f(z) = 2q\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Таким образом, для визуализации рассматриваемого поля достаточно построить изотермическую сеть функции Жуковского. Такая сеть представлена на фиг. 3.13. При других значениях момента диполя  $q$ , отличных от 1, картину фиг. 3.13 следует растянуть в  $q$  раз.

#### 4.1.5 Визуализация функций источника уравнения Лапласа

Выше в главе II была построена функция источника задачи Дирихле. В настоящем разделе методом конформного отображения строятся функции источника задачи Неймана и смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа.

##### Функция источника задачи Неймана.

**Внешность конечного контура.** Пусть бесконечная область  $G$  представляет внешность конечного контура  $L$ ,  $M_0$  – внутренняя точка области. *Функцией источника задачи Неймана* в области  $G$  называется функция  $\mathcal{H}(M, M_0)$ , удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{H} &= 0, \quad M \neq M_0, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial n} \Big|_L &= 0, \\ \mathcal{H}(M, M_0) &= -\frac{1}{2\pi} \ln R + \Phi(u, v),\end{aligned}\tag{4.7}$$

где  $R$  – расстояние между точками  $M$  и  $M_0$ , а  $\Phi$  обозначает некоторую гармоническую в области  $G$  функцию, ограниченную в бесконечно удаленной точке. Условия (4.7) определяют функцию  $\mathcal{H}$  с точностью до постоянного слагаемого.

Через функцию  $\mathcal{H}(M, M_0)$  выражаются, например:

1. Потенциал электрического тока в бесконечной пластинке (в форме области  $G$ ), если граница пластинки  $L$  электрически изолирована, а в точке  $M_0$  помещен точечный электрод;
2. Стационарное распределение температуры в бесконечной однородной пластинке с вырезом, если граница пластинки  $L$  теплоизолирована, а в точке  $M_0$  помещен точечный источник тепла;

3. Векторный потенциал магнитного поля линейного тока вне бесконечного цилиндра, изготовленного из магнетика с бесконечной магнитной проницаемостью.

Функцию источника задачи Неймана можно построить с помощью конформного отображения. Пусть функция  $z = F(w, w_0)$  отображает область  $G$  на внешность некоторого отрезка вещественной оси  $(p-1, p+1)$  (где  $p < -1$ ) так, что точки  $w = w_0$  и  $w = \infty$  отображаются соответственно в точки  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Функция

$$\mathcal{H}(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(w, w_0)| + C$$

удовлетворяет всем условиям (4.7). Функция  $F(w, w_0)$  отображает карту рельефа функции  $\mathcal{H}(M, M_0)$  в полярную сеть.

Для построения функции  $F(w, w_0)$  предлагается следующий алгоритм. Пусть область  $G$  отображается на внешность единичного круга некоторой функцией  $t = \Phi(w)$ . Пусть при этом точка  $w_0$  отображается в точку  $t_0 = \Phi(w_0)$ . Внешность круга отображается на внешность отрезка вещественной оси последовательностью преобразований

$$s = te^{-ia}, \quad r = \frac{1}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right), \quad z = r - r_0,$$

где обозначено  $t_0 = Re^{ia}$ ,  $r_0 = 1/2(R + 1/R)$ .

Обратное отображение внешности отрезка на область  $G$  с нужным соответствием точек осуществляется последовательностью преобразований

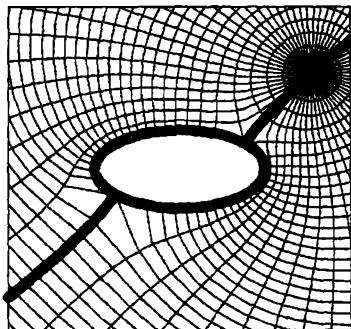
$$r = z + r_0, \quad s = r + \sqrt{r-1} \sqrt{r+1}, \quad t = se^{ia}, \quad w = f(t), \quad (4.8)$$

где  $f(t)$  – функция, обратная к функции  $t = \Phi(w)$ . С помощью программы CONFORMAL пакета Maple можно по формулам (4.8) построить карту рельефа функции  $\mathcal{H}(M, M_0)$  как отображение полярной сети. В качестве  $f(t)$  можно взять любую функцию из каталога 2 Атласа конформных отображений.

#### Пример 4.1.

На фиг. 4.2 приведена карта рельефа функции источника задачи Неймана во внешности эллипса.

Изображение построено по формуле (4.8) при  $\zeta = 1.7t$ ,  $w = 1/2(\zeta + 1/\zeta)$ ,  $r_0 = 1.5$ ,  $a = 0.7$ .



Фиг. 4.2. Функция источника задачи Неймана для внешности эллипса

**Криволинейная угловая область.** Функцию источника задачи Неймана в криволинейной угловой области можно построить с помощью конформного отображения этой области на плоскость  $z$  с разрезом вдоль луча вещественной оси. Пусть функция  $z = F(w, w_0)$  конформно отображает криволинейную угловую область  $G$  на плоскость  $z$  с разрезом вдоль луча  $(-\infty, -1)$  так, что точки  $w = w_0$  и  $w = \infty$  отображаются соответственно в точки  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Тогда

$$\mathcal{H}(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(w, w_0)| + C,$$

где  $C$  — произвольная константа.

Функция  $F(w, w_0)$  отображает карту рельефа функции источника в полярную сеть плоскости  $z$ . Строится она следующим образом.

Пусть функция  $t = \Phi(w)$  отображает криволинейную угловую область  $G$  на полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  так, что  $w = \infty$  отображается в точку  $t = \infty$ . Обозначим  $t_0 = \Phi(w_0) = a + ib$ . Искомое отображение полуплоскости  $\text{Im } t > 0$  на плоскость  $z$  с разрезом вдоль луча  $(-\infty, -1)$  реализуется функцией

$$z = -1 - \frac{(t - a)^2}{b^2}.$$

Обратное отображение плоскости  $z$  с разрезом на криволинейную угловую область  $G$  реализуется композицией функций

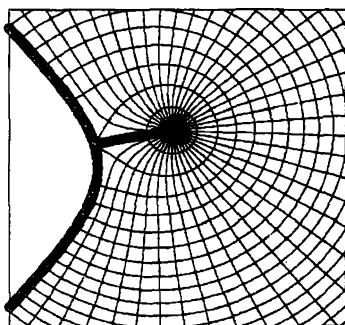
$$t = a + ib\sqrt{z + 1}, w = f(t), \quad (4.9)$$

где  $f(t)$  – функция, обратная к функции  $t = \Phi(w)$ .

Функция (4.9) отображает полярную сеть линий в плоскости  $z$  в карту рельефа функции источника. Эта функция позволяет визуализировать функцию источника задачи Неймана для любой криволинейной угловой области из каталога 3 Атласа конформных отображений. При этом положение источника  $M_0$  можно изменять, варьируя параметры  $a$  и  $b$ .

#### Пример 4.2.

Карта рельефа функции источника задачи Неймана в области, ограниченной одной ветвью гиперболы, представлена на фиг. 4.3.



Фиг. 4.3. Функция источника задачи Неймана для области, ограниченной ветвью гиперболы

Это изображение построено с помощью функции

$$t = a + ib\sqrt{z+1}, \quad r = -it, \quad s = \arccos r, \quad w = \cos(ps)$$

при  $a = 0.6$ ,  $b = 0.1$ ,  $p = 1.5$ .

#### Функция источника смешанной граничной задачи

Пусть граница односвязной области  $G$  состоит из двух связанных частей  $L_1$  и  $L_2$ . Функцией источника смешанной граничной задачи в области  $G$  называется функция  $S(M, M_0)$ , удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} \Delta S &= 0, \quad M \neq M_0, \\ S|_{L_1} &= 0, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial n} \right|_{L_2} = 0, \quad (4.10)$$

$$S(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln R + \Phi(u, v),$$

Если область  $G$  является неограниченной, то к условиям (4.10) добавляется условие ограниченности функции  $S(M, M_0)$  в бесконечно удаленной точке. Перечисленными условиями функция  $S(M, M_0)$  определяется однозначно.

Через функцию  $S(M, M_0)$  выражается потенциал электрического тока в однородной электропроводящей пластинке, если часть ее границы  $L_1$  заземлена, другая часть  $L_2$  электрически изолирована, а в точке  $M_0$  помещен точечный электрод.

Функцию  $S(M, M_0)$  можно построить с помощью конформного отображения области  $G$  на круг с разрезом вдоль отрезка радиуса. Пусть функция  $z = F(w, w_0)$  осуществляет конформное отображение области  $G$  на круг  $|z| < 1$  с разрезом вдоль отрезка  $(-1, -a)$  так, что точка  $w_0$  отображается в центр круга, кривая  $L_1$  отображается в окружность  $|z| = 1$ , а кривая  $L_2$  — в разрез  $(-1, -a)$ . Функция

$$S(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(w, w_0)|$$

удовлетворяет всем условиям (4.10).

Эквивалентом задачи (4.10) является задача о распределении электрического тока в круглой пластинке с заземленным краем и электрически изолированным разрезом вдоль отрезка радиуса, созданного точечным электродом, помещенным в центре круга. Очевидно, что сетью эквипотенциалей и линий тока в такой пластинке является полярная сеть. Таким образом, функция  $z = F(w, w_0)$  отображает карту рельефа функции источника в полярную сеть. Обратная к ней функция  $w = F^{-1} = f(z)$  отображает полярную сеть в круге на карту рельефа функции  $S(M, M_0)$  в области  $G$ .

Конформное отображение области  $G$  на круг с разрезом строится следующим образом. Область  $G$  можно конформно отобразить некоторой функцией  $t = \Phi(w)$  на полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  так, чтобы кривая  $L_1$  отобразилась в отрицательную, а кривая  $L_2$  — в положительную вещественную полуось.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Действительно, согласно теореме Римана область  $G$  можно отобразить конформно некоторой



Пусть образом точки  $w_0$  является точка  $t_0 = \Phi(w_0) = Re^{ia}$ . Можно конформно отобразить круг  $|z| < 1$  с разрезом вдоль некоторого отрезка радиуса  $(-1, -a)$  на полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  так, чтобы разрез отобразился в положительную вещественную полуось. Такое отображение осуществляется последовательностью преобразований

$$r = \frac{1+z}{1-z}, \quad s = i\sqrt{r^2 - b^2}, \quad t = A \frac{b+s}{b-s},$$

где  $b = (1-a)/(1+a)$ ,  $A > 0$ .

Произвольные параметры  $A$  и  $a$  (или  $b$ ) можно подобрать таким образом, чтобы центр круга отобразился в точку  $t_0$ . Для этого следует взять  $A = R = |t_0|$ ,  $b = \cos \alpha/2 = \cos(\arg t_0/2)$ . Таким образом, отображение круга  $|z| < 1$  с разрезом вдоль отрезка радиуса на область  $G$  осуществляется композицией функций

$$r = \frac{1+z}{1-z}, \quad s = i\sqrt{r^2 - b^2}, \quad t = R \frac{b+s}{b-s}, \quad w = f(t), \quad (4.11)$$

где  $f(t)$  — функция, обратная к функции  $t = \Phi(w)$ .

По формулам (4.11) можно построить карту рельефа функции источника смешанной граничной задачи для любой криволинейной угловой области, приведенной в каталоге 3. Для односвязных областей других типов необходимо сначала отобразить адекватную каноническую область на полуплоскость, а затем использовать формулу (4.11).

### Пример 4.3.

Карта рельефа функции источника смешанной граничной задачи в угловой области представлена на фиг. 4.4. Карта представляет сеть линий тока и эквипотенциалей для распределения электрического тока,

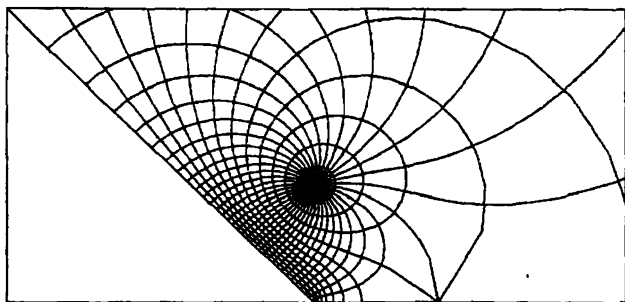
функцией  $\xi = \varphi(w)$  на полуплоскость  $\text{Im } \xi > 0$ . Если при этом кривая  $L_1$  отобразится в конечный отрезок вещественной оси  $(a, b)$ , то искомое отображение на полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  будет

$$t = \frac{\xi - a}{-\xi + b}.$$

Если в конечный отрезок  $(a, b)$  отображается кривая  $L_2$ , то нужное отображение полуплоскости  $\text{Im } \xi > 0$  на полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  осуществляется функцией

$$t = \frac{\xi - b}{\xi - a}.$$

Наконец, если кривая  $L_1$  отображается в луч вещественной оси  $(a, \infty)$ , то искомое дробно-линейное преобразование будет  $t = 1/(a - \xi)$ , а если образом кривой  $L_1$  является луч  $(-\infty, b)$ , то искомое преобразование будет линейным:  $t = \xi - b$ .



Фиг. 4.4. Функция источника смешанной краевой задачи для угловой области

созданного точечным электродом в бесконечной электропроводящей пластинке в форме угла раствором  $\pi p$ , у которого одна сторона электрически изолирована, а другая имеет нулевой потенциал. Карта рельефа представляет отображение полярной сети линий в круге  $|z| < 1$ , осуществляемое композицией функций (4.11), в которой  $f(t) = t^p$ ,  $b = 0.818$ ,  $R = 1$ ,  $p = 0.75$ .

## 4.2 Визуализация векторных полей с двумя точечными особенностями

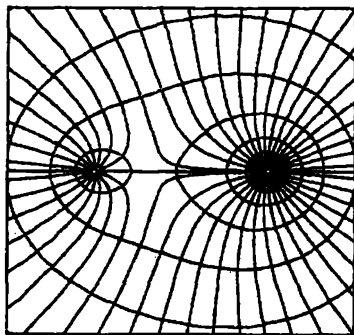
### 4.2.1 Два точечных источника

Пусть в точках  $z_1 = 1$  и  $z_2 = -1$  находятся точечные источники с интенсивностями  $N_1 = 2\pi p$  и  $N_2 = 2\pi q$ . Комплексный потенциал поля этих источников равен

$$f(z) = p \ln(z - 1) + q \ln(z + 1). \quad (4.12)$$

В общем случае эквипотенциали и векторные линии такого поля строятся как изотермическая сеть функции (4.12). В качестве примера на фиг.4.5 изображена изотермическая сеть функции (4.12) при  $p = 1$ ,  $q = 0.5$ .

В частных случаях  $p = \pm q$  из уравнения (4.12) можно выразить координату  $z$  как функцию комплексного потенциала  $f$  и построить

Фиг. 4.5. Поле двух источников при  $p = 2q$ 

картину поля с помощью программы CONFORMAL пакета Maple.

При  $p = -q$  имеем

$$f(z) = p \ln \frac{z-1}{z+1}. \quad (4.13)$$

Изотермическая сеть функции (4.13) представляет биполярную сеть линий с полюсами в точках  $z = \pm 1$ . Она состоит из двух семейств окружностей

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \text{const} \quad \text{и} \quad \arg \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \text{const}.$$

Эта сеть линий изображена на фиг.4.6. Физически она интерпретируется как электромагнитное поле ТЕМ-волны, распространяющейся в двухпроводной линии.

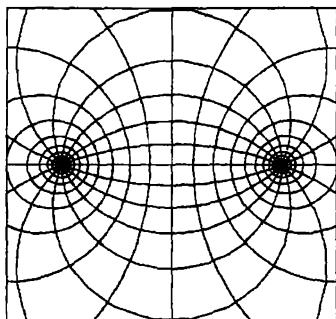
#### Случай одинаковых источников

При  $p = q$  комплексный потенциал двух источников (4.12) равен

$$f(z) = p \ln(z^2 - 1). \quad (4.14)$$

Эквипотенциалами этого поля являются линии  $|z^2 - 1| = \text{const}$ , а векторными линиями – кривые  $\arg(z^2 - 1) = \text{const}$ .

Множество точек плоскости, для которых произведение расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) постоянно, называется *овалом*



Фиг. 4.6. Электромагнитное поле ТЕМ-волны в двухпроводной линии

Кассини или кассинианом. Если фокусы помещены в точках  $z = \pm 1$ , то уравнение овала Кассини имеет вид

$$|z - 1| \cdot |z + 1| = |z^2 - 1| = a^2.$$

При  $a = 1$  кассиниан представляет лемнискату Бернулли.<sup>2</sup>

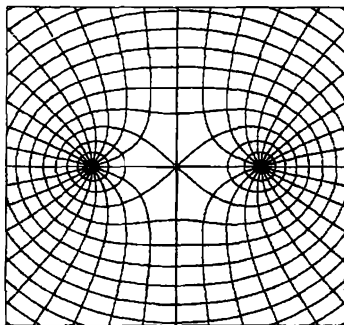
При  $a > 1$  кассиниан представляет замкнутую жорданову кривую (одноконтурный кассиниан); при  $a < 1$  он представляет несвязную кривую, состоящую из двух овалов (двухконтурный кассиниан).

Таким образом, эквипотенциали поля двух равных точечных источников представляют овалы Кассини. Векторные линии представляют дуги равнобоочных гипербол с общим центром в начале координат, проходящих через точки  $z = \pm 1$ . Сеть эквипотенциалей и линий тока рассматриваемого поля изображена на фиг.4.7. Построенное семейство кассинианов можно интерпретировать как эквипотенциали в задаче об электростатическом поле двух одинаково заряженных параллельных нитей. Другая физическая интерпретация: овалы Кассини представляют магнитные силовые линии в задаче о магнитном поле двух параллельных проводов с током одинаковой силы и направления.

<sup>2</sup> Действительно, уравнение  $|z^2 - 1| = 1$  после подстановки  $z = \rho e^{i\varphi}$  принимает вид

$$(\rho^2 \cos(2\varphi) - 1)^2 + (\rho^2 \sin(2\varphi))^2 = 1,$$

откуда  $\rho^4 - 2\rho^2 \cos(2\varphi) = 0$  и  $\rho = \sqrt{2 \cos(2\varphi)}$ , что представляет полярное уравнение лемнискаты Бернулли.



Фиг. 4.7. Поле двух одинаковых точечных источников.

#### 4.2.2 Два вихреисточника

Пусть в точке  $z_1 = -1$  находится вихреисточник с интенсивностью  $N = 2\pi$  и циркуляцией  $\Gamma = aN$ , а в точке  $z_2 = 1$  – вихресток с интенсивностью  $-2\pi$  и циркуляцией  $-aN$ . Суммарный комплексный потенциал двух вихреисточников равен

$$f(z) = (1 - ia) \ln \frac{z+1}{z-1}. \quad (4.15)$$

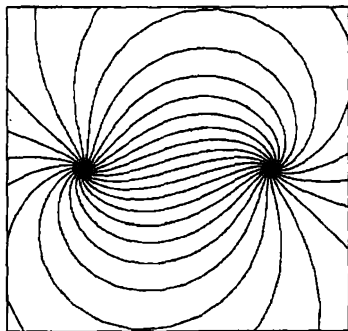
Уравнение (4.15) просто разрешается относительно переменной  $z$ :

$$z = \operatorname{cth} \frac{f}{2(1 - ia)}.$$

Эта функция конформно отображает горизонтальные прямые  $\operatorname{Im} f = C$ ,  $-\pi < C < \pi$  в линии тока рассматриваемого поля, представляющие локсодромы с фокусами в точках  $z = \pm 1$ . Эти кривые изображены на фиг. 4.8 для случая  $a = 0.3$ .

#### 4.2.3 Точечные источник и сток в задаче Дирихле

Пусть граница  $L$  электропроводящей пластинки  $G$  (конечной или бесконечной) имеет нулевой потенциал, а в точках  $M_0(u_0, v_0)$  и  $M_1(u_1, v_1)$  помещены точечные электроды различной полярности (источник и



Фиг. 4.8. Линии тока двух вихреисточников (локсодромы)

сток). Потенциал электрического тока, создаваемого этими электродами, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0, \quad M \neq M_0, \quad M \neq M_1, \\ U|_L &= 0, \\ U &= -\frac{1}{2\pi} \ln R_0 + \frac{1}{2\pi} \ln R_1 + \Phi(u, v),\end{aligned}\tag{4.16}$$

где  $R_0 = |MM_0|$ ,  $R_1 = |MM_1|$ ,  $\Phi(u, v)$  — функция, гармоническая всюду в области  $G$ .

Решение задачи (4.16) в односвязной области  $G$  можно построить с помощью конформных отображений. Обозначим  $w_0 = u_0 + iv_0$ ,  $w_1 = u_1 + iv_1$ ,  $w = u + iv$ . Пусть функция  $z = F(w, w_0, w_1)$  конформно отображает область  $G$  на внешность дуги окружности  $|z| = 1$ ,  $\pi/2 - \beta < \arg z < \pi/2 + \beta$  так, что точка  $w_0$  отображается в точку  $z = 0$ , а точка  $w_1$  — в бесконечность. Функция

$$U = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(w, w_0, w_1)|$$

удовлетворяет всем условиям задачи (4.16). Строится функция  $z = F(w, w_0, w_1)$  следующим образом.

Функция  $\xi = \Phi(w)$  отображает область  $D$  на внешность единичного круга  $|\xi| > 1$ ; при этом точки  $\xi_0 = \Phi(w_0)$  и  $\xi_1 = \Phi(w_1)$  являются образами точек  $w_0$  и  $w_1$ . Внешность круга  $|\xi| > 1$  можно отобразить

за внешность круга  $|r| > 1$  так, чтобы точка  $\xi_1$  отобразилась в точку  $r = \infty$ :

$$r = \frac{\bar{\xi}_1 \xi - 1}{-\xi + \xi_1}.$$

Пусть образом точки  $\xi_0$  будет точка  $r_0 = Re^{i\gamma}$ . Обозначим  $R = \sec \alpha$ , т.е. введем параметр  $\alpha = \arccos(1/R)$ . Последовательность линейных преобразований

$$s = -ire^{-i\gamma}, \quad t = \frac{s + i \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

отображает рассматриваемую область на внешность окружности  $|t - i \operatorname{ctg} \alpha| > 1/\sin \alpha$ , проходящей через точки  $t = \pm 1$ . При этом точка  $r_0$  (источник) отображается в точку  $t_0 = -i \operatorname{tg} \alpha$ .

Функция Жуковского

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$$

отображает внешность круга на внешность дуги окружности, опирающейся на точки  $\zeta = \pm 1$ . При этом точка  $t_0 = -i \operatorname{tg} \alpha$  отображается в центр окружности — точку  $\zeta_0 = i \operatorname{ctg} 2\alpha$ . Наконец, линейное преобразование

$$z = (\zeta - i \operatorname{ctg} 2\alpha) \sin 2\alpha$$

отображает рассматриваемую область на внешность дуги единичной окружности  $|z| = 1$ ,  $\pi/2 - \beta < \arg z < \pi/2 + \beta$  (где  $\beta = \pi - 2\alpha$ ), при этом точка  $\zeta_0 = i \operatorname{ctg} 2\alpha$  отображается в начало координат.

Обратное отображение внешности дуги единичной окружности на область  $G$  реализуется композицией функций

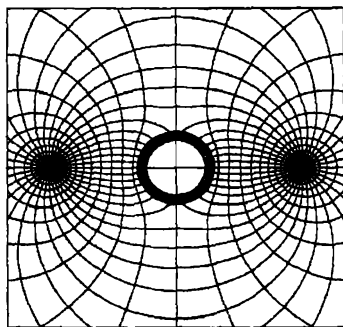
$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{z + i \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}, \\ \tau &= e^{i\beta/2} \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}} e^{i\beta}, \\ t &= \frac{1 + \tau}{1 - \tau}, \\ s &= t \sin \alpha - i \cos \alpha, \\ \xi &= \frac{r \xi_1 + 1}{r + \bar{\xi}_1}, \\ w &= f(\xi), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где  $f(\xi) = \Phi^{-1}$  — функция, обратная к функции  $\xi = \Phi(w)$ .

Композиция функций (4.17) отображает полярную сеть линий плоскости  $z$  в сеть эквипотенциалей и линий тока рассматриваемой задачи о двух точечных источниках в области  $G$ . С помощью функции (4.17) можно визуализировать решение задачи для любой области, представленной в каталоге 2 Атласа конформных отображений. Для областей других типов следует сначала отобразить область на внешность круга, а затем использовать рассмотренный выше алгоритм отображения внешности круга на внешность дуги окружности.

#### Пример 4.4.

Карта эквипотенциалей и линий тока для распределения электрического тока  $\vec{J}$ , созданного двумя точечными электродами во внешности окружности, имеющей нулевой потенциал, представлена на фиг. 4.9. Изображение построено по формулам (4.17) при  $\alpha = \pi/6$ ,  $\gamma = 0$ ,



Фиг. 4.9. Точечные источник и сток в задаче Дирихле

$\xi_1 = -\operatorname{ctg}(\beta/4)$ ,  $w(\xi) = \xi$ . Для получения равномерной сетки переменная  $z$  рассматривается как промежуточная:  $z = e^{z_1}$ , где переменная  $z_1$  принадлежит полосе  $-\infty < \operatorname{Re} z_1 < \infty$ ,  $-\pi < \operatorname{Im} z_1 < \pi$ .

Одновременно фиг. 4.9 визуализирует гармонически сопряженное векторное поле  $\vec{H} = \vec{J}^*$ . Поле  $\vec{H}$  можно интерпретировать как магнитное поле двух параллельных проводов с противоположно направленными электрическими токами в присутствии сверхпроводящего круглого цилиндра.



## 4.2.4 Точечные источник и сток в задаче Неймана

Пусть односвязная область  $G$  (конечная или бесконечная) представляет однородную электропроводящую пластинку с электрически изолированной границей  $L$ , а в точках  $M_0(u_0, v_0)$  и  $M_1(u_1, v_1)$  помещены два точечных электрода противоположной полярности. Потенциал электрического тока  $U(M, M_0, M_1)$  в области  $G$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0, \quad M \neq M_0, \quad M \neq M_1, \\ \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_L &= 0, \\ U &= -\frac{1}{2\pi} \ln R_0 + \frac{1}{2\pi} \ln R_1 + \Phi(u, v)\end{aligned}\quad (4.18)$$

(обозначения те же, что и в предыдущем разделе). Условиями (4.18) функция  $U$  определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Функцию  $U(M, M_0, M_1)$  можно построить с помощью конформных отображений. Пусть функция  $z = F(w, w_0, w_1)$  конформно отображает область  $G$  на внешность отрезка вещественной оси  $-p-1 < \operatorname{Re} z < -p+1$  (где  $p > 1$ ) так, что точка  $w_0$  отображается в точку  $z = 0$ , а точка  $w_1$  — в точку  $z = \infty$ . Функция

$$U(M, M_0, M_1) = -\frac{1}{2\pi} \ln |F(w, w_0, w_1)| + C$$

удовлетворяет всем условиям (4.18) (здесь  $C$  — произвольная константа).

Функция  $F(w, w_0, w_1)$  строится следующим образом. Пусть функция  $\xi = \Phi(w)$  отображает область  $G$  на внешность единичного круга, а точки  $w_0$  и  $w_1$  — соответственно в точки  $\xi_0$  и  $\xi_1$ .

Дробно-линейная функция

$$r = \frac{\xi \bar{\xi}_1 - 1}{-\xi + \xi_1}$$

отображает рассматриваемую область на внешность круга  $|z| > 1$ , причем точка  $\xi = \xi_1$  отображается в точку  $r = \infty$ . Пусть образом источника  $r_0 = Re^{i\gamma}$  является точка  $\xi_0$ . После поворота  $s = re^{-i\gamma}$  (где  $\gamma = \arg r_0$ ) рассматриваемая область отображается на внешность круга  $|z| > 1$ , причем источник (точка  $r_0$ ) отображается в точку  $s_0 = R$  ( $R > 1$ ). Функция Жуковского

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right)$$

отображает рассматриваемую область на внешность отрезка  $[-1, 1]$ , причем точка  $z_0 = R$  отображается в точку вещественной оси  $p = 1/2(R + 1/R)$ . Искомое отображение области  $G$  на плоскость с разрезом вдоль отрезка вещественной оси реализуется функцией

$$z = \zeta - p.$$

Обратное отображение плоскости  $z$  с разрезом на область  $G$  осуществляется последовательностью преобразований

$$\begin{aligned}\zeta &= z + p, \\ s &= \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}, \\ r &= s e^{i\gamma}, \\ \xi &= \frac{r\xi_1 + 1}{r + \xi_1}, \\ w &= f(\xi),\end{aligned}\tag{4.19}$$

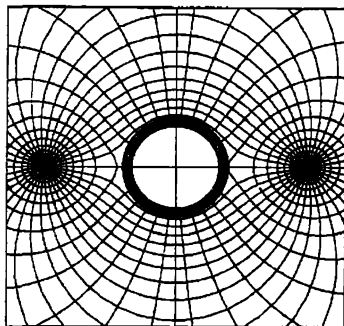
где  $w = f(\xi) = \Phi^{-1}$  — функция, обратная к  $\xi = \Phi(w)$ . Функция (4.19) отображает полярную сеть плоскости  $z$  на сеть эквипотенциалов и линий тока для электрического тока  $\vec{J}$ , созданного в области  $G$  двумя точечными источниками. Положение источников можно изменять, варьируя параметры  $p$ ,  $\gamma$  и  $\xi_1$ .

С помощью функции (4.19) можно визуализировать функцию  $U(M, M_0, M_1)$  для любой области, представленной в каталоге 2 Атласа конформных отображений. Для областей других типов необходимо сначала отобразить область на внешность круга, а затем использовать рассматриваемый выше алгоритм отображения внешности круга на внешность отрезка.

#### Пример 4.5.

Сеть эквипотенциалов и линий тока для электрического тока  $\vec{J}$ , созданного двумя точечными электродами во внешности электрически изолированного круга, представлена на фиг. 4.10. Изображение построено по формулам (4.19) при  $p = 1.1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\xi_1 = -(p + \sqrt{p^2 - 1})$ ,  $w(\xi) = \xi$ . Для получения равномерной сетки переменная  $z$  использовалась как промежуточная:  $z = e^{z_1}$ , где  $z_1$  принадлежит полосе  $-\infty < \operatorname{Re} z_1 < \infty$ ,  $-\pi < \operatorname{Im} z_1 < \pi$ .

Одновременно фиг. 4.10 визуализирует гармонически сопряженное поле  $\vec{H} = \vec{J}^*$ , которое можно интерпретировать как магнитное



Фиг. 4.10. Точечные источник и сток в задаче Неймана

поле, созданное двумя параллельными прямолинейными проводами с противоположно направленными токами в присутствии бесконечного круглого цилиндра, изготовленного из магнетика с бесконечно большой магнитной проницаемостью.

### 4.3 Поля решеток точечных особенностей

Решеткой мы будем называть систему из бесконечного множества одинаковых элементов, периодически расположенных в пространстве. В настоящей главе рассматриваются решетки, состоящие из точечных особенностей (источников, вихрей, диполей и т.д.), расположенных на комплексной плоскости периодически.

#### 4.3.1 Решетка из одинаковых источников

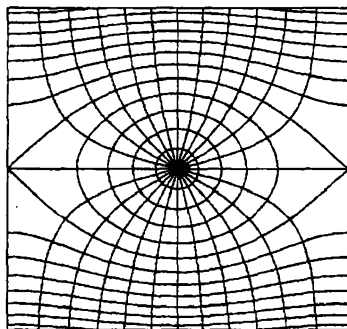
Пусть в точках вещественной оси  $z_n = \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) расположены точечные источники интенсивности  $N = 2\pi$ . Создаваемое ими гармоническое векторное поле представляет периодическую функцию с периодом  $\pi$ . Из соображений симметрии очевидно, что прямые  $\operatorname{Re} z = \pi(n + 1/2)$  представляют векторные линии этого поля.

Рассмотрим один период решетки – полосу  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ . Функция  $\zeta = \sin z$  отображает эту полосу на плоскость  $\zeta$  с разрезами вдоль лучей  $(-\infty, -1)$  и  $(1, \infty)$ , причем источник отображается в

начало координат  $\zeta = 0$ . Для поля свободного источника, помещенного в начале координат, вещественная ось представляет векторную линию, поэтому проведение разрезов вдоль лучей вещественной оси не искажает его поля. Следовательно, комплексный потенциал источника, находящегося на плоскости с разрезами, равен потенциалу свободного источника:  $f = \ln \zeta$ . Производя обратное отображение плоскости  $\zeta$  с разрезами на полосу, найдем комплексный потенциал решетки источников:

$$f(z) = \ln \sin z. \quad (4.20)$$

Эквипотенциалами этого поля являются кривые  $|\sin z| = \text{const}$ , векторными линиями – кривые  $\arg(\sin z) = \text{const}$ . Таким образом, для визуализации поля рассматриваемой решетки источников следует построить карту рельефа функции  $w = \sin z$ . Ее можно построить с помощью программы CONFORMAL пакета Maple как отображение полярной сети с помощью обратной функции  $z = \arcsin w$ .



Фиг. 4.11. Поле решетки одинаковых источников

Сеть эквипотенциалей и векторных линий решетки одинаковых источников представлена на фиг. 4.11.

Физически картина фиг. 4.11. интерпретируется как электрическое поле  $\vec{E}$  решетки одинаково заряженных параллельных нитей, перпендикулярных плоскости чертежа. Одновременно она интерпретируется как картина гармонически-сопряженного поля  $\vec{E}^* = \vec{H}$  – магнитного поля решетки параллельных проводов с токами одинаковой силы и направления.

Функцию (4.20) можно представить как сумму потенциалов отдельных источников. Действительно, из разложения функции  $\sin z$  в бесконечное произведение (см. [2], стр. 352)

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

следует

$$f(z) = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{z}{z_n} \right) \right].$$

Следует заметить, что ряд, стоящий в правой части последней формулы, нельзя разбить на два ряда, так как оба они оказываются расходящимися.

### 4.3.2 Решетка из чередующихся источников и стоков

Пусть в точках  $z_n^- = \pi n$  находятся источники интенсивностью  $N = 2\pi$ , а между ними в точках  $z_n^+ = \pi(n + 1/2)$  — стоки интенсивностью  $-N = -2\pi$ . Рассматривая эту систему как наложение двух решеток из одинаковых источников (стоков), получим комплексный потенциал составной решетки

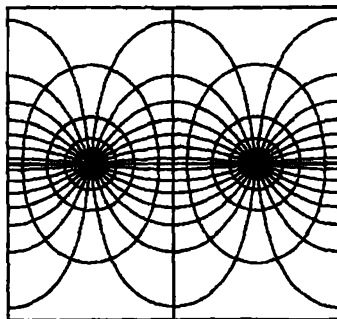
$$f(z) = \ln \sin z - \ln \sin \left( z + \frac{\pi}{2} \right) = \ln \operatorname{tg} z.$$

Эквипотенциалами поля рассматриваемой решетки являются кривые  $|\operatorname{tg} z| = \operatorname{const}$ , векторными линиями — кривые  $\arg(\operatorname{tg} z) = \operatorname{const}$ . Для визуализации поля такой решетки достаточно построить карту рельефа функции  $w = \operatorname{tg} z$ .

Карта рельефа тангенса построена в гл. 3 (см. фиг. 3.20). Более подробная карта рельефа функции  $\operatorname{tg}(z - \pi/4)$  изображена на фиг. 4.12. Она представляет поле решетки чередующихся источников и стоков, помещенных в точках  $z_n^- = -\pi/4 + \pi n$  и  $z_n^+ = \pi/4 + \pi n$  соответственно.

### 4.3.3 Вихревые цепочки Кармана

В гидродинамике рассматривается модель плоского вихревого движения идеальной жидкости в виде двух решеток точечных вихрей — так



Фиг. 4.12. Поле решетки знакочередующихся источников

называемая вихревая цепочка Кармана [14]. Вихревая цепочка Кармана представляет две решетки вихрей, расположенные на параллельных прямых. Расстояние между прямыми обозначим  $h$ , период решетки примем равным  $\pi$ .

Пусть на прямой  $\text{Im } z = h/2$  в точках  $z_n^+ = \pi n + ih/2$  расположены вихри с циркуляцией  $\Gamma = 2\pi$ , а на прямой  $\text{Im } z = -h/2$  в точках  $z_n^- = z_0^- + \pi n$  — вихри с циркуляцией  $-\Gamma = -2\pi$ . Комплексный потенциал цепочки представляет сумму потенциалов двух решеток:

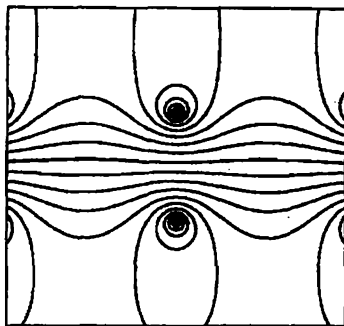
$$f(z) = i \ln \sin(z - z_0^+) - i \ln \sin(z - z_0^-).$$

В задачах гидродинамики [14] рассматриваются две конфигурации решеток: симметричное и шахматное расположение вихрей в решетках цепочки. Для симметричного расположения вихрей  $z_0^- = -ih/2$ , для шахматного расположения вихрей  $z_0^- = -ih/2 + \pi/2$ .

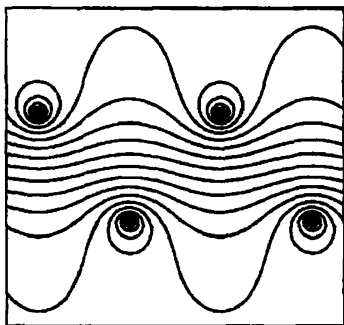
Линии тока в цепочке Кармана при  $h = 2$  изображены на фиг. 4.13. и 4.14. соответственно для симметричного и шахматного расположения вихрей.

#### 4.3.4 Решетка источников в однородном поле

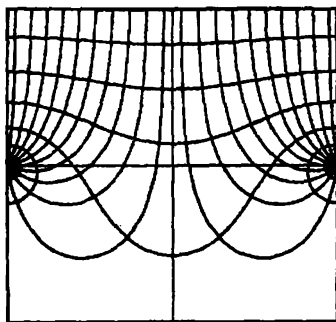
Пусть решетка источников интенсивности  $N = 2\pi q$ , помещенных в точках  $z_n = \pi/2(2n + 1)$ , находится во внешнем однородном поле с комплексным потенциалом  $-iz$ . Суммарное поле имеет комплексный



Фиг. 4.13. Линии тока в цепочке Кармана при симметричном расположении вихрей



Фиг. 4.14. Линии тока в цепочке Кармана при шахматном расположении вихрей



Фиг. 4.15. Электрическое поле вблизи экранной сетки

потенциал

$$f(z) = q \ln \cos z - iz. \quad (4.21)$$

Обозначим  $y = \text{Im } z$  и вычислим асимптотику функции 4.21 при  $|y| \rightarrow \infty$ . Функция  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$  растет как  $e^{-iz}/2$  при  $y \rightarrow +\infty$  и как  $e^{iz}/2$  при  $y \rightarrow -\infty$ . Функция  $\ln \cos z$  растет как  $-iz \text{ sign } y - \ln 2$  при  $|y| \rightarrow \infty$ . Асимптотика комплексного потенциала (4.21) при больших значениях  $|y|$  имеет вид

$$f(z) \sim -q \ln 2 - iz(1 + q \text{ sign } y).$$

Интенсивности источников  $q$  можно подобрать так, чтобы с одной стороны от решетки суммарное поле было бы асимптотически равно нулю (в электронной оптике такая решетка называется экранной сеткой). Действительно, если положить  $q = 1$ , то комплексный потенциал (4.21) при  $y \rightarrow -\infty$  стремится к константе  $-\ln 2$ , а поле стремится к нулю.

Изотермическая сеть функции (4.21) при  $q = 1$  изображена на фиг. 4.15. Она представляет сеть эквипотенциалей и силовых линий электрического поля вблизи экранной сетки, составленной из тонких параллельных проводов.

### 4.3.5 Поля решеток диполей

Пусть в точках  $z_n = n\pi$  расположены одинаковые диполи с дипольным моментом 1, ориентированные вдоль вещественной оси. Комплексный



потенциал одного диполя равен  $1/(z - n\pi)$ . Попытка представить комплексный потенциал решетки диполей в виде ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi}$$

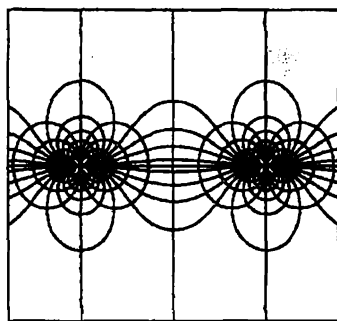
оканчивается неудачей, т.к. этот ряд оказывается расходящимся. Однако этот ряд можно сделать сходящимся (причем абсолютно), если объединить его члены с индексами  $n$  и  $-n$ :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right). \quad (4.22)$$

Ряд (4.22) представляет разложение мероморфной функции  $\operatorname{ctg} z$ . Таким образом, комплексный потенциал решетки одинаковых диполей, помещенных в точках  $n\pi$ , равен

$$f(z) = \operatorname{ctg} z.$$

Изотермическая сеть функции  $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}(z + \pi/2)$  представлена на фиг. 4.16. Она изображает поле решетки одинаковых диполей, помещенных в точках  $z_n = \pi/2 + n\pi$  (изображен один период решетки).



Фиг. 4.16. Поле решетки одинаковых диполей

Аналогичным образом рассматривается поле решетки "знакопередающих" диполей, в которой в точках  $z_k^+ = 2k\pi$  помещены диполи с комплексным потенциалом  $1/(z - z_k^+)$ , а в точках  $z_k^- = \pi(2k + 1)$  —

диполи противоположного направления с потенциалом  $-1/(z - z_k^-)$ . В этом случае ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\pi}$$

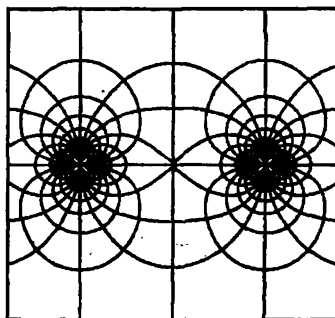
является условно сходящимся. После объединения членов с индексами  $n$  и  $-n$  он становится абсолютно сходящимся:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right). \quad (4.23)$$

Ряд (4.23) представляет разложение мероморфной функции  $\operatorname{cosec} z$  на простейшие дроби (см.[2], стр.352).

Таким образом, комплексный потенциал решетки знакопередающих диполей, помещенных в точках  $z_n = \pi n$ , равен  $\operatorname{cosec} z$ .

На фиг. 4.17. изображена изотермическая сеть функции  $f(z) = \operatorname{sec} z = \operatorname{cosec}(z + \pi/2)$ . Она представляет сеть эквипотенциалей и векторных линий решетки знакопередающих диполей, помещенных в точках  $z_n = \pi/2 + \pi n$ .



Фиг. 4.17. Поле решетки знакопередающих диполей

# Глава 5

## Конформные отображения некоторых замечательных областей

### 5.1 Отображения круговых двуугольников (луночек)

Круговым двуугольником (или круговой луночкой) называется односвязная область полной комплексной плоскости, ограниченная двумя дугами окружностей (в частности, эти дуги могут быть отрезками прямых). Такие области можно конформно отобразить на канонические области с помощью композиций элементарных функций.

В простейших случаях обе граничные дуги представляют части прямых. В этих случаях область вырождается в прямолинейный двуугольник – угловую область, полосу или внешность отрезка прямой. В настоящем разделе рассматриваются конформные отображения невырожденных круговых двуугольников.

Окружности, ограничивающие круговой двуугольник, могут быть пересекающимися или касающимися. В случае пересекающихся окружностей можно, совершив линейное преобразование, поместить точки пересечения окружностей в точки  $w = \pm 1$ . В случае касающихся окружностей мы будем предполагать, что окружности касаются вещественной оси в начале координат, причем диаметр одной из окружностей равен 1. Этого всегда можно добиться с помощью линейного преобразования.

### 5.1.1 Криволинейные полуплоскости

а) Полуплоскость с выброшенным или добавленным сегментом круга

Пусть  $D$  – верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$  с выброшенным (или добавленным) сегментом круга, граница которого проходит через точки  $w = \pm 1$ . Пусть углы области  $D$  в точках  $\pm 1$  равны  $\pi p$  (при  $0 < p < 1$  углы являются выступающими, при  $1 < p < 2$  – входящими).

Дробно-линейное преобразование

$$t = \frac{w - 1}{w + 1}$$

отображает область  $D$  на угловую область  $0 < \arg t < \pi p$ , далее степенная функция  $s = t^{1/p}$  отображает этот угол на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} s > 0$ . При этом точка  $w = \infty$  отображается в точку  $s = 1$ . Для того, чтобы получить каноническое отображение области  $D$  на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ , следует еще раз произвести дробно-линейное преобразование:

$$z = \frac{1 + s}{1 - s}.$$

Обратное отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на область  $D$  реализуется композицией функций

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}, \quad t = s^p, \quad w = \frac{1 + t}{1 - t}, \quad (5.1)$$

которую удобно записать в неявной форме

$$\frac{w - 1}{w + 1} = \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^p. \quad (5.2)$$

Функция (5.2) называется *обобщенной функцией Жуковского*. При  $p = 2$  она представляет обычную функцию Жуковского; при  $p = 1/2$  – обратную функцию Жуковского; при  $p = 1$  – тождественное преобразование  $w = z$ .

Основные свойства обобщенной функции Жуковского:

1. Функция (5.2) аналитична всюду, кроме точек ветвления  $z = \pm 1$ . Главная ветвь функции аналитична на комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка  $(-1, 1)$ .

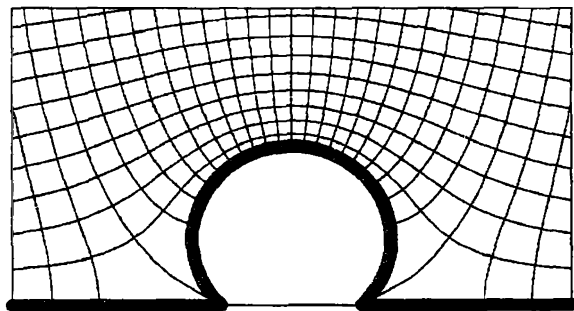
2. При  $0 < p < 1$  функция (5.2) однолистка во всей области определения. При  $1 < p < 2$  она однолистка вне любой окружности, проходящей через точки  $z = \pm 1$ , например – вне единичной окружности или в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ .

3. Функцией, обратной к обобщенной функции Жуковского с параметром  $p$ , является обобщенная функция Жуковского с параметром  $1/p$ .

4. Функция (5.2) отображает биполярную сеть линий с полюсами в точках  $z = \pm 1$  в биполярную сеть с полюсами в точках  $w = \pm 1$ . Действительно, из трех преобразований (5.1) первое отображает биполярную сеть в полярную, при втором преобразовании  $t = s^p$  полярная сеть отображается в себя, третье (дробно-линейное) преобразование снова отображает полярную сеть в биполярную. Отображение (5.2) изогонально во всех точках, кроме  $z = \pm 1$ . Углы между дугами окружностей Штейнера, проходящих через точки  $z = \pm 1$ , увеличиваются при отображении (5.2) в  $p$  раз.

#### Пример 5.1.

На фиг. 5.1 приведено отображение декартовой сети в верхней полуплоскости посредством функции (5.1) при  $p = 1/4$ .



Фиг. 5.1. Обтекание сегмента круга

б) Полуплоскость с выброшенным кругом

Пусть область  $D$  представляет верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  с

выброшенным кругом:

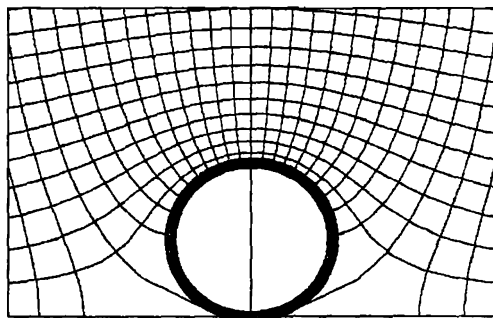
$$D : \left\{ \operatorname{Im} w > 0, \quad \left| w - \frac{i}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}.$$

Инверсией  $t = -\pi/w$  эта область отображается в полосу  $0 < \operatorname{Im} t < \pi$ . Далее функция  $s = e^t$  отображает полосу на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} s > 0$ , при этом точка  $w = \infty$  отображается в точку  $s = 1$ . Наконец, дробно-линейным преобразованием  $z = 1/(1-s)$  верхняя полуплоскость отображается в себя, причем точка  $s = 1$  отображается в бесконечно удаленную точку.

Обратное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на криволинейную полуплоскость  $D$  реализуется функцией

$$w = -\frac{\pi}{\ln(1-1/z)}.$$

Отображение декартовой сети, осуществляемое этой функцией, приведено на фиг. 5.2.

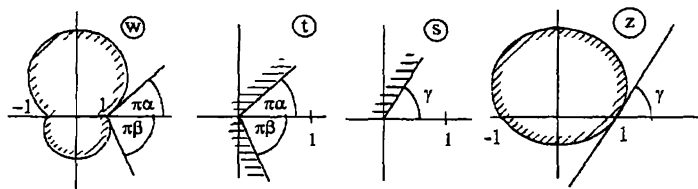


Фиг. 5.2. Обтекание круглого цилиндра, лежащего на дне потока

### 5.1.2 Внешности конечных контуров

#### а) Внешность кругового двуугольника

Пусть две дуги двух окружностей имеют общие концы в точках  $w = \pm 1$  (фиг. 5.3. ). Пусть одна дуга пересекает ось абсцисс под углом



Фиг. 5.3. Отображение внешности кругового двуугольника

$\pi\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), другая — под углом  $\pi\beta$  ( $0 < \beta \leq 2 - \alpha$ ) (при этом угол  $\beta$  отсчитывается по часовой стрелке).

Дробно-линейное преобразование  $t = (w - 1)/(w + 1)$  отображает внешность кругового двуугольника, ограниченного этими дугами, на угол  $-\pi\beta < \arg t < \pi\alpha$ , далее функция  $s = t^{1/(\alpha+\beta)}$  отображает этот угол на полуплоскость

$$-\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta} < \arg s < \frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Наконец, функция  $z_1 = (1 + s)/(1 - s)$  отображает полуплоскость на внешность окружности, проходящей через точки  $z_1 = \pm 1$  и составляющей угол  $\gamma = \pi\alpha/(\alpha + \beta)$  с осью абсцисс. Радиус этой окружности равен  $1/\sin \gamma$ , центр расположен в точке  $i \operatorname{ctg} \gamma$ . На внешность единичной окружности  $|z| > 1$  эта область отображается линейным преобразованием

$$z = (z_1 - i \operatorname{ctg} \gamma) \sin \gamma.$$

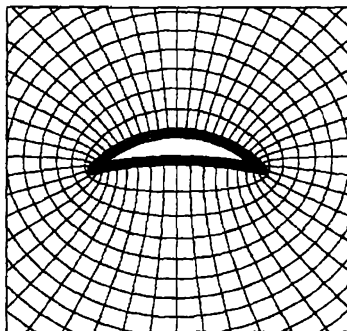
Обратное отображение внешности единичного круга на внешность кругового двуугольника осуществляется цепочкой преобразований

$$z_1 = \frac{z + i \cos \gamma}{\sin \gamma}, \quad s = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}, \quad t = s^{\alpha+\beta}, \quad w = \frac{1+t}{1-t}, \quad (5.3)$$

которая представляет композицию линейной функции и обобщенной функции Жуковского с параметром  $\alpha + \beta$ .

#### Пример 5.2.

Отображение внешности единичного круга по формулам (5.3) при  $\alpha = 0.75$ ,  $\beta = 1.05$  приведено на фиг. 5.4. Сеть линий на фиг. 5.4. ви-



Фиг. 5.4. Отображение внешности круга на внешность кругового двуугольника

зуализирует решение задачи Робена для цилиндра с сечением в форме кругового двуугольника.

#### б) Внешность двух касающихся кругов

Пусть область  $D$  представляет бесконечную плоскость  $w$  с двумя выброшенными касающимися кругами:

$$D : \left\{ \left| w + \frac{i}{2} \right| > \frac{1}{2}, \quad \left| w - \frac{i}{2p} \right| > \frac{1}{2p} \right\},$$

где  $p > 0$ . Отображение этой области на внешность единичного круга  $|z| > 1$  реализуется последовательностью преобразований

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{w}, \quad s = \pi \frac{t+i}{p+1}, \quad r_0 = \exp\left(\frac{\pi i}{p+1}\right), \\ r &= e^s, \quad z = \frac{r - \overline{r_0}}{r - r_0} e^{-i\alpha}, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – произвольное вещественное число.

Обратное отображение внешности единичного круга на область  $D$  осуществляется последовательностью преобразований

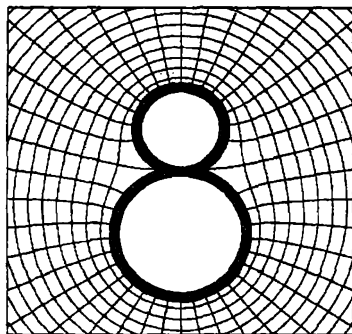
$$\begin{aligned} r_0 &= \exp\left(\frac{i\pi}{p+1}\right), \quad r = \frac{z e^{i\alpha} r_0 - \overline{r_0}}{z e^{i\alpha} - 1}, \quad s = \ln r, \\ t &= \frac{s(p+1)}{\pi} - i, \quad w = -\frac{1}{t}. \end{aligned} \quad (5.4)$$



Для того, чтобы выполнялось условие  $w'(\infty) > 0$ , следует взять  $e^{i\alpha} = -i/r_0$ .

### Пример 5.3.

Отображение внешности единичного круга, реализуемое функцией (5.4) при  $p = 1.5$ , представлено на фиг. 5.5.



Фиг. 5.5. Электрическое поле двух касающихся заряженных цилиндров

### 5.1.3 Конечные круговые двуугольники

а) Область между двумя дугами окружностей

Пусть область  $D$  ограничена двумя дугами двух окружностей с концами в точках  $w = \pm 1$ . Пусть в точке  $w = -1$  одна дуга составляет угол  $\pi\alpha$  с осью абсцисс ( $0 < \alpha < 1$ ), а другая — угол  $\pi\beta$  ( $-1 < \beta < \alpha$ ). Дробно-линейное преобразование  $t = (1+w)/(1-w)$  отображает область  $D$  на угол  $\pi\beta < \arg t < \pi\alpha$ .

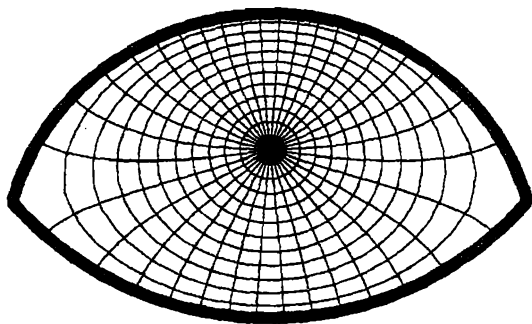
После поворота на угол  $\gamma = \pi(\alpha + \beta)/2$ , осуществляемого функцией  $\tau = te^{-i\gamma}$ , и преобразования  $s = \tau^{1/(\alpha-\beta)}$  область  $D$  отображается в полуплоскость  $\operatorname{Re} s > 0$ . Наконец, дробно-линейное преобразование  $z = (s-1)/(s+1)$  отображает область  $D$  на круг  $|z| < 1$ .

Обратное преобразование единичного круга на круговой двуугольник осуществляется цепочкой функций

$$s = \frac{1+z}{1-z}, \quad \tau = z^{\alpha-\beta}, \quad t = \tau e^{i\gamma}, \quad w = \frac{t-1}{t+1}. \quad (5.5)$$

### Пример 5.4.

Отображение круга  $|z| < 1$  по формулам (5.5) при  $\alpha = 0.4$ ,  $\beta = -0.3$  представлено на фиг. 5.6.



Фиг. 5.6. Отображение круга на круговой двугольник

б) Область между двумя касающимися окружностями

Пусть  $D$  – область, заключенная между двумя окружностями, касающимися вещественной оси в точке  $w = 0$ :

$$D : \left\{ \left| w - \frac{i}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| w - \frac{i}{2p} \right| > \frac{1}{2p} \right\},$$

где  $p > 1$ . Дробно-линейное преобразование

$$t = -\frac{1}{w}, \quad s = \pi \frac{t-i}{p-1}$$

отображает конформно область  $D$  на полосу  $0 < \operatorname{Im} s < \pi$ , а экспонента  $r = e^s$  отображает ее на полуплоскость  $\operatorname{Im} r > 0$ . Наконец, дробно-линейная функция отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг, например, так:

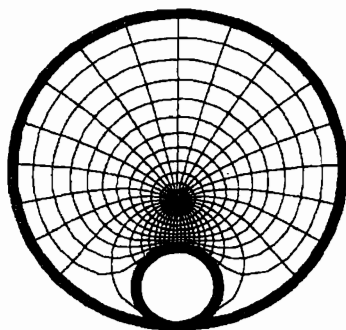
$$z = \frac{r-i}{r+i}.$$

Обратное отображение единичного круга  $|z| < 1$  на область  $D$  реализуется последовательностью преобразований

$$\begin{aligned} r &= i \frac{1+z}{1-z}, \quad s = \ln r, \\ t &= \frac{s(p-1)}{\pi} + i, \quad w = -\frac{1}{t}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

**Пример 5.5.**

Отображение полярной сети в круге  $|z| < 1$ , реализуемое функцией (5.6) при  $p = 4$ , представлено на фиг. 5.7.



Фиг. 5.7. Отображение круга на область между двумя касающимися окружностями

## 5.2 Построение отображений с помощью принципа соответствия границ

Пусть  $L$  — замкнутая жорданова кривая плоскости  $w$ , заданная параметрически:

$$u = u(t), v = v(t), \text{ т.е. } w = u(t) + iv(t) = F(t),$$

где  $-\pi \leq t \leq \pi$ ,  $F(-\pi) = F(\pi)$ . Пусть направлению возрастания параметра  $t$  соответствует обход кривой  $L$  против часовой стрелки.

Кривая  $L$  разбивает полную плоскость  $w$  на две односвязные области — конечную область  $D_i$  (внутренность кривой  $L$ ) и бесконечную область  $D_e$  (внешность кривой  $L$ ).

Обозначим  $z = e^{it}$ ; при возрастании вещественного параметра  $t$  от  $-\pi$  до  $\pi$  точка  $z$  пробегает единичную окружность против часовой стрелки, причем  $t = -i \ln z$ . Функция  $w = F(-i \ln z) = f(z)$  отображает окружность  $|z| = 1$  на кривую  $L$  с сохранением направления обхода.

В некоторых случаях существует аналитическое продолжение функции  $f(z)$ , заданной на окружности  $|z| = 1$ , внутрь или наружу от этой

окружности. В этих случаях можно применить для построения конформного отображения области  $D_i$  (или  $D_e$ ) принцип соответствия границ, рассмотренный в главе I:

1. Если функция  $w = f(z)$  может быть аналитически продолжена внутрь круга  $|z| < 1$ , то она конформно отображает этот круг на внутреннюю область  $D_i$ .
2. Если функция  $w = f(z)$  аналитична вне круга  $|z| > 1$  всюду, кроме одной точки, где она имеет полюс первого порядка, то она конформно отображает внешность круга  $|z| > 1$  на внешнюю область  $D_e$ .

В настоящем разделе рассмотрены примеры того, как с помощью принципа соответствия границ можно, исходя из параметрических уравнений некоторых замечательных кривых, построить конформные отображения ограниченных ими областей.

### 5.2.1 Эпициклоиды и укороченные эпитрохоиды

Эпитрохоидой называется замкнутая кривая, определяемая параметрически

$$u = a(n \cos t - \lambda \cos nt), \quad v = a(n \sin t - \lambda \sin nt)$$

или

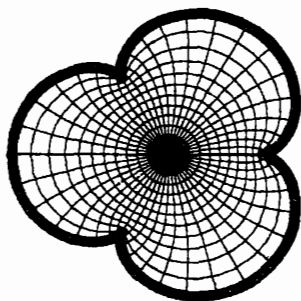
$$w = a(n e^{it} - \lambda e^{int}), \quad (5.7)$$

где  $-\pi \leq t \leq \pi$ ,  $n$  — натуральное число, большее 1. При  $0 < \lambda < 1$  она представляет гладкую жорданову кривую (укороченную эпициклоиду). При  $\lambda = 1$  она превращается в обычную эпициклоиду — негладкую жорданову кривую с  $n - 1$  точкой возврата. Наконец, при  $\lambda > 1$  она представляет удлинненную эпициклоиду — нежорданову кривую с  $n - 1$  точкой самопересечения. При  $n = 2$  эпициклоида представляет кардиоиду, а укороченные эпитрохоиды — эллиптические улитки Паскаля.

Мы рассмотрим отображение конечной области, ограниченной жордановой эпитрохоидой (при  $\lambda \leq 1$ ). Полагая в формуле (5.7)  $\exp(it) = z$ , получим функцию

$$w = a(nz - \lambda z^n), \quad (5.8)$$

отображающую взаимно-однозначно единичную окружность  $|z| = 1$  на эпитрохоиду. Эта функция аналитична внутри круга  $|z| < 1$ ; согласно принципу соответствия границ она отображает конформно круг на конечную область, ограниченную эпитрохойдой. На фиг. 5.8 изображено отображение полярной сети линий, осуществляемое функцией (5.7) при  $\lambda = 1$ ,  $n = 4$  (при этом граница круга  $|z| = 1$  отображается в эпициклоиду, а окружности  $|z| = r$  ( $r < 1$ ) – в укороченные эпитрохойды).



Фиг. 5.8. Отображение круга на область, ограниченную эпициклоидой

### 5.2.2 Гипоциклоиды и укороченные гипотрохойды

Гипотрохойдой называется линия, определяемая параметрически:

$$u = a(n \cos t + \lambda \cos nt), \quad v = a(n \sin t - \lambda \sin nt)$$

или

$$w = a(n e^{it} + \lambda e^{-int}), \quad (5.9)$$

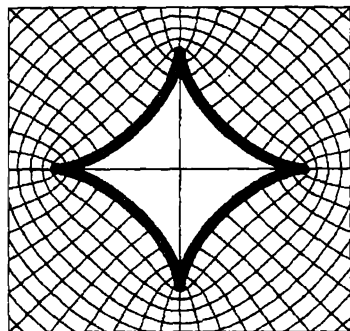
где  $-\pi \leq t \leq \pi$ ,  $n$  – любое натуральное число. При  $0 < \lambda < 1$  она является гладкой жордановой кривой (укороченная гипоциклоида), при  $\lambda = 1$  – негладкой жордановой кривой с  $n + 1$  точкой возврата (обычная гипоциклоида), при  $\lambda > 1$  – нежордановой кривой с  $n + 1$  точкой самопересечения (удлиненная гипоциклоида). Мы рассмотрим только случай жордановых кривых ( $\lambda \leq 1$ ).

Полагая в формуле (5.8)  $\exp(it) = z$ , получим функцию

$$w = a \left( nz + \frac{\lambda}{z^n} \right), \quad (5.10)$$

отображающую взаимно-однозначно окружность  $|z| = 1$  на гипотрохиду. Функция (5.10) аналитична во внешности круга  $|z| > 1$ , в бесконечно удаленной точке она имеет полюс первого порядка. Согласно принципу соответствия границ эта функция осуществляет конформное отображение внешности круга на внешность гипоциклоиды.

На фиг. 5.9 представлено отображение полярной сети линий функцией (5.10) при  $\lambda = 1$ ,  $n = 3$ . При этом окружность  $|z| = 1$  ото-



Фиг. 5.9. Электрическое поле заряженного цилиндра астроидального сечения

бражается в астроиду, а окружности  $|z| = r > 1$  — в укороченные гипоциклоиды.

### 5.2.3 Обобщенные овалы Кассини и обобщенная лемниската $n$ -го порядка

Обобщенным овалом Кассини (или кассинианом  $n$ -го порядка) называется множество точек плоскости  $w$ , удовлетворяющих условию

$$|w^n - c^n| = a^n,$$

где  $a$  и  $c$  — заданные постоянные.

При  $n = 2$  эта кривая представляет обычный овал Кассини, рассмотренный выше в гл. IV. В настоящем параграфе рассматривается случай  $n > 2$ .

Обозначим через  $w_k$  корни уравнения  $w^n - c^n = 0$ , т.е.

$$w_k = c e^{2\pi i k/n},$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Разлагая многочлен  $w^n - c^n$  на линейные множители, можно написать уравнение кассиниана  $n$ -го порядка в виде

$$|w - w_1| \cdot |w - w_2| \cdots |w - w_n| = a^n.$$

Таким образом, овал Кассини  $n$ -го порядка — это множество точек плоскости  $w$ , для которых произведение расстояний до точек  $w_1, w_2, \dots, w_n$  постоянно и равно  $a^n$ .

Если  $a > c$ , то обобщенный овал Кассини представляет гладкую замкнутую жорданову кривую (одноконтурный обобщенный овал). При  $a = c$  кривая является нежордановой линией, состоящей из  $n$  петель с точкой самопересечения в начале координат (обобщенная лемниската). При  $a < c$  кривая распадается на  $n$  гладких не связанных между собой петель.

**Одноконтурный кассиниан  $n$ -го порядка**

При  $a > c$ , т.е. в случае одноконтурного овала, можно параметризовать обобщенный овал Кассини следующим образом

$$w^n - c^n = a^n e^{int}.$$

Обозначая  $\exp(it) = z$  и разрешая уравнение относительно  $w$ , получим функцию  $w = a(z^n + \lambda)^{1/n}$ , где  $\lambda = (c/a)^n < 1$ . Для того, чтобы выделить непрерывную ветвь этой многозначной функции, регулярную вне круга  $|z| > 1$ , представим ее в виде

$$w = az \left(1 + \frac{\lambda}{z^n}\right)^{1/n}. \quad (5.11)$$

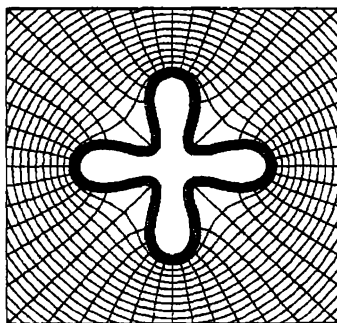
Здесь множитель

$$F(z) = \left(1 + \frac{\lambda}{z^n}\right)^{1/n}$$

обозначает главную ветвь многозначной функции, определяемую условием  $F(\infty) = 1$ .

Функция (5.11) отображает окружность на одноконтурный обобщенный овал Кассини взаимно-однозначно; она аналитична вне единичного круга  $|z| > 1$  и имеет в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка. Следовательно, в силу принципа соответствия границ эта функция отображает конформно (при  $\lambda < 1$ ) внешность единичного круга на внешность одноконтурного обобщенного овала Кассини.

На фиг. 5.10 представлено отображение полярной сети линий во внешности круга  $|z| > 1$ , осуществляемое функцией (5.11) при  $\lambda = 0.99$ ,  $n = 4$ . Следует отметить, что все окружности  $|z| = C$  ( $C > 1$ ) отображаются функцией (5.11) в обобщенные кассинианы.



Фиг. 5.10. Отображение внешности круга на внешность обобщенного одноконтурного овала Кассини 4 - го порядка

#### Лемниската $n$ - го порядка

Функция, отображающая внешность круга  $|z| > 1$  на внешность обобщенной лемнискаты  $n$  - го порядка, получается из (5.11) при  $\lambda = 1$ :

$$w = az \left( 1 + \frac{1}{z^n} \right)^{1/n}. \quad (5.12)$$

Она представляет ветвь  $n$  - значной функции

$$w = (z^n + 1)^{1/n}, \quad (5.13)$$

регулярную вне круга  $|z| > 1$ . Точки ветвления функции (5.13) расположены на единичной окружности:  $z_k = \exp(\pi i(2k - 1)/n)$  ( $k =$

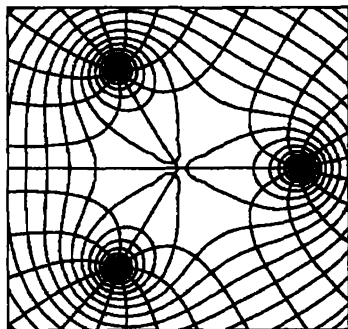


$1, 2, \dots, n$ ). Рассматриваемую ветвь функции (5.12) можно аналитически продолжить внутрь круга  $|z| < 1$ , если провести разрезы вдоль радиусов  $[0, z_k]$ ,  $(k = 1, 2, \dots, n)$ . Продолженная таким образом функция отображает полярную сеть линий в секторах

$$0 < |z| < 1, \quad \pi(2k-1)/n < \arg z < \pi(2k+1)/n$$

на сеть, состоящую из  $n$  - контурных кассинианов и ортогональных им обобщенных гипербол. Физически эта сеть линий интерпретируется как сеть эквипотенциалов и силовых линий  $n$  одинаковых точечных источников, помещенных в вершинах правильного  $n$  - угольника.

Для случая  $n = 3$  такая сеть представлена на фиг. 5.11. Картина построена как карта рельефа обратной функции  $z = (w^3 - 1)^{1/3}$ .



Фиг. 5.11. Поле трех точечных источников, помещенных в вершинах правильного треугольника

**Полярное уравнение лемнискаты  $n$  - го порядка**

Полагая в формуле (5.13)  $z = e^{i\varphi}$ , запишем уравнение лемнискаты  $n$  - го порядка в виде

$$w = (1 + e^{in\varphi})^{1/n} = a \left( 2 \cos \frac{n\varphi}{2} \right)^{1/n} e^{i\varphi/2}.$$

Полагая далее  $\varphi/2 = \Phi$ , получим полярное уравнение лемнискаты  $n$  - го порядка:

$$w = R e^{i\Phi}, \quad \text{где} \quad R = l (\cos n\Phi)^{1/n}, \quad l = a 2^{1/n}.$$

Таким образом, лемниската  $n$ -го порядка представляет частный случай обобщенной лемнискаты (3.26) рассмотренной в разделе 3.7.

#### Инверсия лемнискаты $n$ -го порядка

Инверсией лемнискаты  $n$ -го порядка является кривая с полярным уравнением

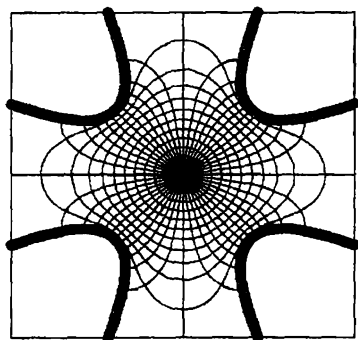
$$R = \frac{C}{(\cos n\Phi)^{1/n}}. \quad (5.14)$$

Будем называть ее *обобщенной гиперболой  $n$ -го порядка*. Она представляет частный случай обобщенной гиперболы (3.25), рассмотренной в разделе 3.7.

Обобщенная гипербола  $n$ -го порядка состоит из  $n$  бесконечных ветвей, ограничивающих криволинейную полосу с  $n$  рукавами. Функция, отображающая круг  $|z| < 1$  на криволинейную полосу, ограниченную гиперболой  $n$ -го порядка, получается из функции (5.12) инверсиями по переменным  $z$  и  $w$ :

$$w = \frac{z}{(1 + z^n)^{1/n}}. \quad (5.15)$$

Отображение единичного круга  $|z| < 1$ , осуществляемое функцией (5.15) при  $n = 4$ , представлено на фиг. 5.12.



Фиг. 5.12. Отображение круга на область, ограниченную гиперболой 4-го порядка

## 5.2.4 Внешность звездообразного разреза

Рассмотрим функцию

$$w = \frac{z}{\sqrt[n]{4}} \left( 1 + \frac{1}{z^n} \right)^{2/n}, \quad (5.16)$$

где  $n$  – натуральное число. При  $n = 1$  и  $n = 2$  эта функция является рациональной: при  $n = 2$  она представляет функцию Жуковского, а при  $n = 1$  она получается из функции Жуковского линейным преобразованием:

$$w = \frac{1}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2}.$$

Отображения, осуществляемые функцией Жуковского, были подробно рассмотрены в главе III. В настоящем параграфе рассматриваются отображения, осуществляемые функцией (5.16) при  $n \geq 3$ .

При  $n > 2$  функция (5.16) является многозначной функцией с ветвлением в точках  $z_k = \exp(\pi i(2k - 1)/n)$ , лежащих на окружности  $|z| = 1$  (здесь  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Вне круга  $|z| > 1$  функция (5.16) распадается на  $n$  регулярных ветвей, из которых мы рассмотрим главную ветвь, выделяемую условием  $w(1) = 1$ .

Отметим на окружности  $|z| = 1$ , наряду с точками ветвления  $z_k$ , еще точки

$$z'_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Функция (5.16) отображает точки  $z'_k$  в себя, а точки  $z_k$  – в начало координат. При  $z = e^{i\varphi}$  имеем

$$w = \left( \cos \frac{n\varphi}{2} \right)^{2/n},$$

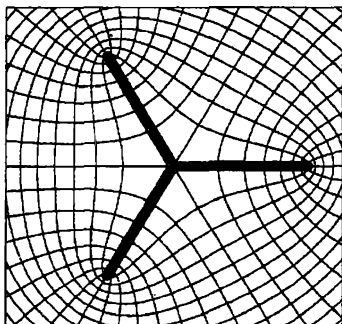
где берется одно из значений  $n$ -значной функции. Точнее, если точка  $z = e^{i\varphi}$  лежит на дуге  $\pi(2k - 1)/n < \varphi < \pi(2k + 1)/n$  между двумя соседними точками ветвления, то

$$w = \left| \cos \frac{n\varphi}{2} \right|^{2/n} e^{2\pi i k/n}.$$

Таким образом, дуга единичной окружности между двумя точками ветвления отображается функцией (5.16) в дважды пробегаемый отрезок, соединяющий точки 0 и  $z'_k = \exp(2\pi i k/n)$ . Вся окружность  $|z| = 1$  отображается в звездообразный разрез, составленный из  $n$  симметричных

отрезков, выходящих из начала координат. Функция (5.16) аналитична вне круга  $|z| > 1$ , имеет в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка, следовательно, согласно принципу соответствия границ, она отображает конформно внешность единичного круга на внешность звездообразного разреза.

На фиг. 5.13 представлено отображение полярной сети линий, осуществляемое функцией (5.16) при  $n = 3$ . Отметим, что окружности



Фиг. 5.13. Отображение внешности круга на внешность звездообразного разреза

$|z| = r > 1$  отображаются в гладкие жордановы кривые, которые можно назвать сглаженными  $n$ -конечными звездами. Конформное отображение внешности единичного круга на внешность такой сглаженной звезды осуществляется функцией

$$w = Cz \left( 1 + \frac{\lambda}{z^n} \right)^{2/n},$$

где  $0 < \lambda < 1$ .

### 5.2.5 Плоскость с $n$ симметричными разрезами вдоль лучей

Произведя в функции (5.16) преобразования инверсии – как по переменной  $z$ , так и по переменной  $w$  – получим функцию

$$w = z \left( \frac{2}{1 + z^n} \right)^{2/n}. \quad (5.17)$$

(как и в предыдущем параграфе, мы рассматриваем при  $n > 2$  регулярную ветвь многозначной функции, выделяемую условием  $w(1) = 1$ ). Она аналитична в круге  $|z| < 1$  и отображает границу этого круга в  $n$  бесконечных разрезов вдоль симметрично расположенных лучей

$$w = R e^{2\pi i k/n},$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $1 < R < \infty$ . Согласно принципу соответствия границ функция (5.17) отображает конформно единичный круг на бесконечную плоскость с  $n$  разрезами вдоль указанных лучей.

Следует особо рассмотреть случаи  $n = 1$  и  $n = 2$ . При  $n = 1$  функцию (5.17) можно представить как последовательность двух преобразований

$$t = \frac{1}{4} \left( z + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2}, \quad w = \frac{1}{t}.$$

Как отмечено в предыдущем пункте, первое преобразование отображает полярную сеть плоскости  $z$  в сеть эллипсов и гипербол с фокусами в точках  $t = 0$  и  $t = 1$ . При втором преобразовании (инверсии относительно точки  $t = 0$  — одного из фокусов) кривые второго порядка отображаются в улитки Паскаля. Таким образом, функция

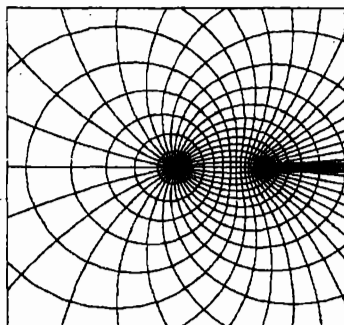
$$w = \frac{4z}{(z+1)^2} \quad (5.18)$$

отображает конформно круг  $|z| < 1$  на плоскость  $w$  с разрезом вдоль луча вещественной оси  $(1, \infty)$ , при этом окружности  $|z| = \text{const}$  отображаются в эллиптические улитки Паскаля, а радиусы  $\arg z = \text{const}$  — в гиперболические улитки Паскаля. Отображение круга функцией (5.18) представлено на фиг. 5.14.

При  $n = 2$  можно представить функцию (5.17) как последовательность преобразований

$$t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad w = \frac{1}{t}.$$

Первое преобразование (функция Жуковского) отображает конформно единичный круг в плоскость  $t$  с разрезом вдоль отрезка  $(-1, 1)$ , а полярную сеть — в сеть эллипсов и гипербол. При втором преобразовании (инверсии относительно центра кривых второго порядка) эллипсы и гиперболы отображаются в кривые, называемые лемнискатами Бута (см. параграф 3.8).

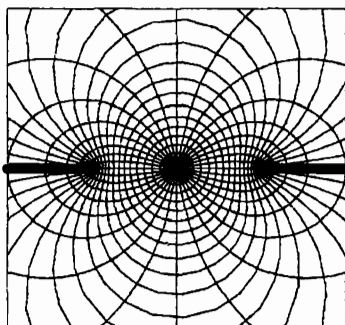


Фиг. 5.14. Функция источника задачи Дирихле для плоскости с одним бесконечным разрезом

Сеть взаимно-ортогональных лемнискат Бута, полученная при отображении полярной сети единичного круга  $|z| < 1$  посредством функции

$$w = \frac{2z}{z^2 + 1},$$

представлена на фиг. 5.15. Построенная сеть линий отличается от

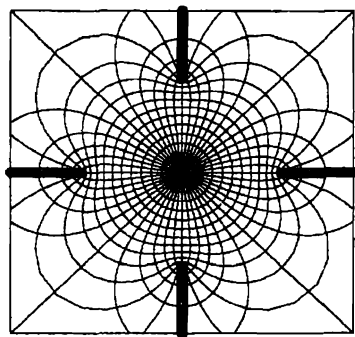


Фиг. 5.15. Функция источника задачи Дирихле для плоскости с двумя разрезами

сети фиг. 3.25 только густотой линий вблизи начала координат.

В общем случае функция (5.17) отображает полярную сеть в круге

$|z| < 1$  в ортогональную сеть на плоскости  $w$  с  $n$  разрезами вдоль симметрично расположенных лучей. Линии этой сети можно назвать обобщенными лемнискатами Бута. Отображение полярной сети в единичном круге, реализуемое функцией (5.17) при  $n = 4$ , представлено на фиг. 5.16.



Фиг. 5.16. Функция источника задачи Дирихле для плоскости с четырьмя разрезами

Более общая функция

$$w = Cz(1 + \lambda z^n)^{-2/n}$$

при  $0 < \lambda < 1$  реализует конформное отображение единичного круга на внутренность гладкой жордановой кривой – обобщенной лемнискаты Бута.

### 5.2.6 Область между двумя трактрисами

Трактрисой называется кривая, определяемая параметрическим уравнением

$$u = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + \cos t, \quad v = \sin t$$

или

$$w = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + e^{it} \quad (0 < t < \pi).$$

Она представляет бесконечную жорданову кривую с точкой возврата  $t = \pi/2$ . Нам удобнее рассматривать кривую, смещенную на расстоя-

ние  $-\pi/2$  вдоль мнимой оси:

$$w = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + e^{it} - i \frac{\pi}{2}. \quad (5.19)$$

Полагая  $\xi = -\exp(it)$  и выражая  $\operatorname{tg}(t/2)$  через  $\xi$  по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = i \frac{1 - e^{it}}{1 + e^{it}} = i \frac{1 + \xi}{1 - \xi},$$

получим уравнение трактрисы (5.19) в виде

$$w = \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} - \xi. \quad (5.20)$$

Функция (5.20) отображает нижнюю полуокружность  $|\xi| = 1$ ,  $-\pi < \arg \xi < 0$  в трактрису (5.19). Она вещественна при вещественных значениях  $\xi$ . По принципу симметрии функция (5.20) отображает верхнюю полуокружность  $0 < \arg \xi < \pi$  на кривую, симметричную трактрисе (5.19) относительно вещественной оси. Таким образом, функция (5.20), аналитическая в круге  $|\xi| < 1$ , отображает взаимно-однозначно окружность  $|\xi| = 1$  на границу бесконечной области, заключенной между двумя симметричными трактрисами. Согласно принципу соответствия границ, круг  $|\xi| < 1$  отображается конформно на указанную криволинейную полосу между двумя трактрисами.

Производя замену независимой переменной

$$\xi = \operatorname{th} \frac{z}{2},$$

получим функцию, реализующую конформное отображение полосы  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  на криволинейную полосу между двумя трактрисами:

$$w = z - \operatorname{th} \frac{z}{2}. \quad (5.21)$$

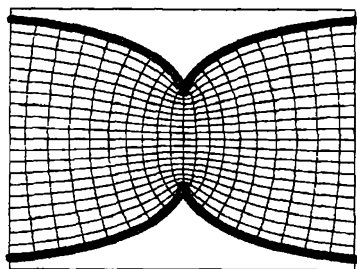
Отображение декартовой сети линий в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  на ортогональную сеть линий в криволинейной полосе представлено на фиг. 5.17.

Упражнения.

1. С помощью программы CONFORMAL построить на дисплее компьютера отображение внешности круга  $|z| > 1$ , реализуемое функцией

$$w = z \left( 1 + \frac{1}{z^n} \right)^p, \quad (5.22)$$





Фиг. 5.17. Поток в криволинейной полосе, ограниченной двумя трактрисами

где  $n$  – натуральное число,  $p > 0$  – вещественное число. Показать, что при  $0 < p < 2/n$  внешность круга отображается конформно на внешность симметричного  $n$ -листника, а при  $p > 2/n$  отображение не является конформным.

*Замечание.* Выше рассмотрены частные случаи функции (5.22): при  $p = 2/n$  внешность круга отображается на внешность звездообразного разреза (параграф 5.2.4), а при  $p = 1/n$  – на внешность лемнискаты  $n$ -го порядка (параграф 5.2.3).

## 2. Функция

$$w = \frac{z}{(1 + z^n)^p} \quad (5.23)$$

получается из (5.22) инверсией как по  $z$ , так и по  $w$ . С помощью программы CONFORMAL требуется показать, что при  $0 < p < 2/n$  единичный круг  $|z| < 1$  отображается функцией (5.23) конформно на бесконечную область (полосу с  $n$  рукавами), а при  $p > 2/n$  функция (5.23) не является однолистной в круге  $|z| < 1$ .

*Замечание.* Частные случаи функции (5.23) при  $p = 1/n$  и  $p = 2/n$  рассмотрены выше в параграфах 5.2.3 и 5.2.5.

### 5.3 Построение конформных отображений при помощи аналитического продолжения функции с вещественной оси

Пусть  $L$  – бесконечная жорданова кривая на плоскости  $w$ , заданная параметрически:

$$u = u(t), v = v(t), \text{ то есть } w = u(t) + iv(t) = F(t),$$

где  $u(t), v(t)$  – непрерывные вещественные функции вещественного параметра  $t$  ( $t \in \mathcal{R}$ ). Функция  $w = F(t)$  отображает (взаимно - однозначно и непрерывно) вещественную ось  $t$  комплексной плоскости  $z$  на кривую  $L$  и задает на  $L$  направление обхода, соответствующее направлению возрастания параметра  $t$ .

Может оказаться, что функция  $w = F(z)$ , заданная на вещественной оси  $z = t$ , имеет аналитическое продолжение на некоторую полосу  $0 < \operatorname{Im} z < C$  верхней полуплоскости  $z$ .<sup>1</sup> Если это аналитическое продолжение является в указанной полосе однолистной функцией, то она конформно отображает эту полосу на некоторую криволинейную полосу, расположенную слева от кривой  $L$ .

Если же функция  $w = F(z)$  имеет однолистное аналитическое продолжение на полосу нижней полуплоскости  $-C < \operatorname{Im} z < 0$ , то эта функция конформно отображает указанную полосу на некоторую криволинейную полосу, расположенную справа от кривой  $L$ . В настоящем разделе рассматриваются некоторые замечательные области, получаемые при аналитическом продолжении отображающей функции с вещественной оси.

#### 5.3.1 Цепная линия

Цепной линией на плоскости  $(u, v)$  называется кривая, определяемая уравнением  $v = a \operatorname{ch} u$ . Нам удобнее рассматривать кривую

$$v = a \operatorname{ch} u + \frac{\pi}{2}, \quad (5.24)$$

<sup>1</sup>Конечно, возможность такого аналитического продолжения зависит не только от вида кривой  $L$ , но и от способа ее параметризации.

представляющую цепную линию, смещенную на расстояние  $\pi/2$  вдоль мнимой оси. Ее параметрическое уравнение имеет вид

$$w(t) = t + ia \operatorname{ch} t + i \frac{\pi}{2},$$

где  $t \in \mathcal{R}$ .

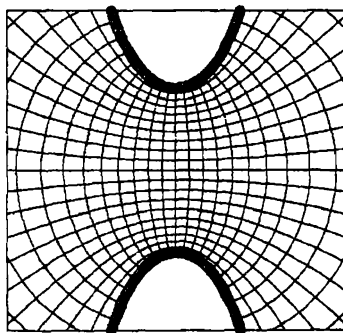
Введем новую переменную  $z = t + ia\pi/2$ , тогда

$$w = z + a \operatorname{sh} z. \quad (5.25)$$

Функция (5.25) аналитична на всей комплексной плоскости. Она отображает горизонтальную прямую  $z = t + i\pi/2$  в цепную линию (5.24), а вещественную ось  $z = t$  — в вещественную ось  $w = u$  комплексной плоскости  $w$ . Так как эта функция вещественна при вещественных значениях  $z$ , то, согласно принципу симметрии, она отображает симметричную (относительно вещественной оси) прямую  $z = t - i\pi/2$  в другую цепную линию

$$v = -a \operatorname{ch} u - \pi/2,$$

симметричную кривой (5.24) относительно вещественной оси. Функция (5.25) однолистка в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  и отображает конформно эту полосу на бесконечную область, заключенную между двумя цепными линиями. Такое отображение представлено на фиг. 5.18 при  $a = 1$ .



Фиг. 5.18. Отображение области, ограниченной двумя цепными линиями

### 5.3.2 Кривая $v = a \operatorname{sh} u$

Представим кривую плоскости  $(u, v)$ , определяемую уравнением

$$v = a \operatorname{sh} u,$$

в параметрической форме

$$w(t) = t + ia \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathcal{R}.$$

Эта функция, определенная сначала на вещественной оси плоскости  $z$ , имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость:

$$w(z) = z + ia \operatorname{sh} z, \quad z \in \mathcal{C}. \quad (5.26)$$

Функция (5.26) является локально-однолистной во всех точках плоскости  $z$ , в которых

$$w' = 1 + ia \operatorname{ch} z \neq 0.$$

Необходимое условие однолистности нарушено в точках

$$z = \pm \left[ \operatorname{arsh}(1/a) + i \frac{\pi}{2} \right] + 2\pi in.$$

В полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  функция (5.26) является однолистной. Верхняя граница этой полосы, т.е. прямая  $z = t + i\pi/2$ , отображается функцией (5.26) в линию

$$w = t - a \operatorname{ch} t + \frac{i\pi}{2}, \quad (5.27)$$

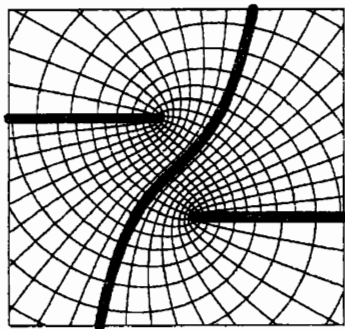
представляющую прямолинейный разрез — луч

$$\operatorname{Im} w = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} w < \operatorname{arsh}(1/a) - \sqrt{a^2 + 1},$$

пробегаемый дважды.

Функция (5.26) является нечетной, поэтому прямая  $z = t - i\pi/2$  отображается в разрез вдоль луча, симметричного разрезу (5.27) относительно начала координат. Вся полоса  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  отображается конформно на плоскость  $w$  с двумя разрезами вдоль противоположно направленных лучей коллинеарных прямых.

Отображение декартовой сети в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ , реализуемое функцией (5.26) при  $a = 1$ , представлено на фиг. 5.19. Жирной линией на фиг. 5.19 выделена кривая  $v = \operatorname{sh} u$ .

Фиг. 5.19. Отображение кривой  $v = a \operatorname{sh} u$ 

### 5.3.3 Экспоненциальная кривая и кривые Кирхгофа

Рассмотрим кривую

$$v = e^u + \frac{\pi}{2} \quad (5.28)$$

на плоскости  $w = u + iv$ , представляющую обычную экспоненциальную кривую, смещенную вдоль мнимой оси. Параметрическое уравнение кривой (5.28) запишем в виде

$$w = t + i e^t + \frac{\pi i}{2}, \quad t \in \mathcal{R}.$$

Введем новую переменную  $z = t + \pi i/2$ , тогда

$$w = z + e^z. \quad (5.29)$$

Функция (5.29) аналитична на всей комплексной плоскости. Она отображает прямую  $z = t + i\pi/2$  в кривую (5.28), а вещественную ось  $z = t$  в вещественную ось  $w = u$  комплексной плоскости  $w$ . Согласно принципу симметрии, эта функция отображает симметричную (относительно вещественной оси) прямую  $z = t - i\pi/2$  в линию  $v = -e^u - \pi/2$ , симметричную кривой (5.28) относительно вещественной оси.

В полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  функция однолистка и отображает эту полосу конформно на область, заключенную между двумя экспоненциальными кривыми:

$$|v| < e^u + \pi/2. \quad (5.30)$$

Можно указать более широкую область однолистности функции (5.29). Реализуемое ею отображение не является локально конформным в тех точках, в которых

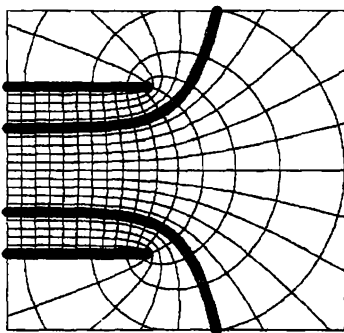
$$w' = 1 + e^z = 0,$$

т.е. в точках  $z = i\pi(2n + 1)$ . Например, функция (5.29) однолистка в полосе  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ , не содержащей указанных точек. Граничная прямая этой полосы  $z = t + i\pi$  отображается этой функцией в кривую

$$w = t - e^t + \pi i.$$

Мнимая часть этой функции постоянна, а вещественная часть возрастает от  $-\infty$  до  $-1$  (при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $0$ ) и при дальнейшем росте  $t$  убывает от  $-1$  до  $-\infty$ . Таким образом, прямая  $z = t + i\pi$  отображается в разрез (дважды пробегаемый луч  $\operatorname{Im} w = \pi$ ,  $\operatorname{Re} z \leq -1$ ). Симметричная прямая  $z = t - i\pi$  отображается функцией (5.29) в разрез  $\operatorname{Im} w = -\pi$ ,  $\operatorname{Re} w < -1$ . Вся полоса  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  отображается функцией (5.29) конформно на бесконечную плоскость  $w$  с указанными разрезами вдоль лучей параллельных прямых.

Отображение декартовой сети линий в указанной полосе представлено на фиг. 5.20.



Фиг. 5.20. Электрическое поле вблизи края плоского конденсатора

Функция (5.29) была впервые найдена Г. Кирхгофом при решении задачи об электрическом поле в полубесконечном конденсаторе, образованном двумя параллельными полуплоскостями. Сеть линий на фиг.

5.20 представляет сеть силовых линий и эквипотенциалей в таком электрическом конденсаторе.

В частности, прямые  $z = t + iC$  отображаются в эквипотенциальные кривые, для которых параметрическое уравнение имеет вид

$$w = t + iC + e^{t+iC}.$$

Эти линии мы будем называть кривыми Кирхгофа. Экспоненциальные кривые

$$v = \pm(e^u + \pi/2) \quad (5.31)$$

представляют две кривые Кирхгофа, получаемые при  $C = \pm\pi/2$ . Они изображены на фиг. 5.20 жирными линиями.

### 5.3.4 Циклоида и трохойды

Трохойдой называется бесконечная кривая с параметрическим уравнением

$$u = t - \lambda \sin t, \quad v = \lambda \cos t - 1$$

или

$$w(t) = t + i\lambda e^{it} - i, \quad (5.32)$$

где  $\lambda > 0$ ,  $t \in \mathcal{R}$ .

При  $0 < \lambda < 1$  она представляет гладкую бесконечную кривую, называемую укороченной циклоидой. При  $\lambda = 1$  кривая является обыкновенной циклоидой – негладкой кривой с точками возврата  $z = 2\pi n$ . Наконец, при  $\lambda > 1$  кривая представляет линию с самопересечениями, называемую удлинненной циклоидой.

При  $\lambda \leq 1$  функция (5.32) отображает вещественную ось на циклоиду или трохойду (укороченную циклоиду) взаимно-однозначно. Функция (5.32) имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость:

$$w(z) = z + i\lambda e^{iz} - i, \quad z \in \mathcal{C}. \quad (5.33)$$

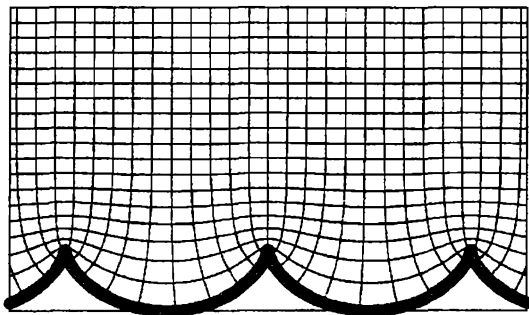
Продолженная функция имеет в бесконечно удаленной точке существенную особенность, поэтому принцип соответствия границ в обычной форме здесь неприменим.

Производная функции (5.33)

$$w' = 1 - \lambda e^{iz}$$

при  $\lambda \leq 1$  не обращается в нуль ни в одной точке верхней полуплоскости, т.е. отображение, реализуемое этой функцией, является в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  локально конформным.

Функция (5.33) однолистка (при  $\lambda \leq 1$ ) в верхней полуплоскости. Она реализует конформное отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на бесконечную область, ограниченную циклоидой или трохоидой. Отображение декартовой сети линий, осуществляемое этой функцией при  $\lambda = 1$ , приведено на фиг. 5.21. Построенная изотермическая сеть представляет сеть эквипотенциалей и линий тока для потока идеальной жидкости в криволинейной полуплоскости, ограниченной циклоидой. Отметим, что все линии тока представляют укороченные трохоиды.



Фиг. 5.21. Поток в криволинейной полуплоскости, ограниченной циклоидой

Можно указать другую область однолиственности функции (5.33) – полосу  $0 < \text{Re } z < 2\pi$ . Функция (5.33) отображает эту область конформно на бесконечную плоскость  $w$  с двумя разрезами вдоль лучей параллельных прямых, т.е. на область, рассмотренную в предыдущем параграфе.

Функция (5.33) сводится к (5.29) линейными преобразованиями переменных  $z$  и  $w$ . Таким образом, задача о потенциальном обтекании бесконечной циклоиды и задача Кирхгофа об электрическом поле вблизи края плоского конденсатора оказываются эквивалентными. Отсюда следует, что эквипотенциали поля скоростей в задаче об обтекании циклоиды суть линии Кирхгофа, а каждая силовая линия в задаче Кирхгофа представляет арку трохоиды – укороченную циклоиду вну-



три конденсатора и удлиненную циклоиду – снаружи.

### 5.3.5 Отображение, осуществляемое функцией $w = z + a \operatorname{th} z$

Функция  $w = x + p^2 \operatorname{th} x$  ( $x \in \mathcal{R}$ ) отображает вещественную ось в себя взаимно - однозначно и непрерывно. Ее аналитическое продолжение на комплексную плоскость

$$w = z + p^2 \operatorname{th} z \quad (z \in \mathcal{C}) \quad (5.34)$$

представляет мероморфную функцию с полюсами в точках  $z_k = \pi i(k + 1/2)$  ( $k \in \mathcal{Z}$ ). Критические точки функции (5.34) определяются уравнением

$$w' = 1 + \frac{p^2}{\operatorname{ch}^2 z} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \operatorname{ch} z = \pm ip,$$

откуда  $z_k^* = \pi i(k + 1/2) \pm \operatorname{arsh} p$ . В полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  функция (5.34) аналитична и не имеет критических точек.

Прямая  $z = t + i\pi/2$  отображается функцией (5.34) в два луча прямой:

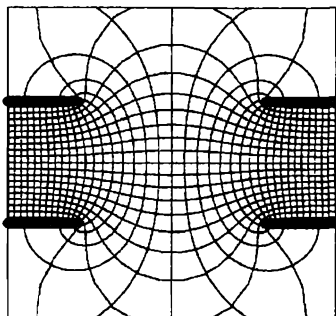
$$\operatorname{Im} w = \pi/2, \quad |\operatorname{Re} w| > \operatorname{arsh} p + p\sqrt{p^2 + 1},$$

причем каждый луч проходится дважды. Функция (5.34) оказывается однолистной в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ . Она отображает эту полосу на полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$  с разрезами вдоль указанных лучей. В силу принципа симметрии полоса  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < 0$  отображается функцией (5.34) в полуплоскость  $\operatorname{Im} w < 0$  с разрезами вдоль лучей  $\operatorname{Im} w = -\pi/2$ ,  $|\operatorname{Re} z| > \operatorname{arsh} p + p\sqrt{p^2 + 1}$ .

Отображение декартовой сети линий в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2$  функцией (5.34) при  $p = 1$  представлено на фиг. 5.22. Физически эта картина интерпретируется как сеть эквипотенциалов и силовых линий двух параллельных плоскостей со щелями, имеющих разные электрические потенциалы. В электронной оптике такая конструкция называется иммерсионной электростатической электронной линзой.

## 5.4 Построение конформных отображений с использованием принципа симметрии

Принцип симметрии Римана-Шварца для конформных отображений был сформулирован в гл. I. В настоящем разделе приводятся при-



Фиг. 5.22. Электрическое поле в иммерсионной электронной линзе

меры использования принципа симметрии для построения конформных отображений симметричных областей на канонические области (круг, внешность круга, полуплоскость).

Пусть на плоскости  $w$  задана односвязная область  $D_0$ , имеющая ось симметрии – прямую, разбивающую область  $D_0$  на две симметричные части. Не ограничивая общности, будем предполагать, что осью симметрии является вещественная ось. Обозначим через  $D$  часть области  $D_0$ , лежащую в верхней полуплоскости, через  $D^*$  – ее зеркальное отражение, через  $\Gamma$  – часть вещественной оси, принадлежащую области  $D_0$ , которая может представлять конечный отрезок, луч или два луча вещественной оси.

В приложениях конформных отображений часто встречаются такие задачи:

- 1) Известно отображение области  $D$  на какую-либо каноническую область; требуется построить отображение "удвоенной" области  $D_0$ ;
- 2) Известно отображение области  $D_0$  на какую-либо каноническую область; требуется построить отображение "половинной" области  $D$ .

Если одна из областей ( $D$  или  $D_0$ ) отображается на канонические области элементарными функциями, то и другая также отображается на канонические области элементарными функциями.

### 5.4.1 Построение отображения "половинной" области

**Конечные симметричные области**

Пусть  $D_0$  – конечная область плоскости  $w$ , симметричная относительно вещественной оси. Пусть известна функция  $\zeta = F(w)$ , отображающая ее на круг  $|\zeta| < 1$ , причем верхняя половина  $D$  области  $D_0$  отображается на верхний полукруг

$$\Delta: \{\zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| < 1, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0\}.$$

Функция Жуковского

$$t = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

отображает полукруг  $\Delta$  на нижнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} t < 0$ , которая отображается на круг  $|z| < 1$  с помощью дробно-линейного преобразования

$$z = \frac{t + ia}{t - ia},$$

где  $a$  – любое положительное вещественное число.

Обратное отображение круга  $|z| < 1$  на "половинную" область  $D$  осуществляется цепочкой преобразований

$$t = ia \frac{z + 1}{z - 1}, \quad \zeta = t - \sqrt{t^2 - 1}, \quad w = f(\zeta), \quad (5.35)$$

где  $f(\zeta)$  – функция, обратная к функции  $\zeta = F(w)$ .

По формулам (5.35) можно построить отображающую функцию для половины любой симметричной области из каталога 1 Атласа конформных отображений.

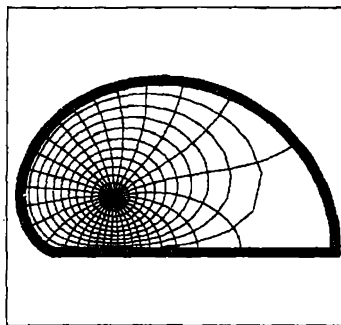
#### Пример 5.6.

На фиг. 5.23. представлено отображение круга  $|z| < 1$  на верхнюю половину кардиоиды, построенное с помощью функции

$$t = i \frac{z + 1}{z - 1}, \quad \zeta = t - \sqrt{t^2 - 1}, \quad w = \zeta + \frac{\zeta^2}{2}.$$

**Внешности конечных контуров**

Пусть  $D_0$  – бесконечная область плоскости  $w$ , представляющая внешность конечного контура, симметричного относительно вещественной



Фиг. 5.23. Отображение круга на область, ограниченную половиной кардиониды

оси. Ее верхняя половина  $D$  представляет полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$  с конечным вырезом. Пусть известна функция  $\zeta = F(w)$ , отображающая область  $D_0$  на внешность круга  $|\zeta| > 1$ , а область  $D$  – на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta > 0$  с выброшенным полукругом:

$$\Delta : \{ \zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \zeta > 0, |\zeta| > 1 \}.$$

Область  $\Delta$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  функцией Жуковского:  $z = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$ .

Обратное отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на полуплоскость с вырезом  $D$  осуществляется композицией функций

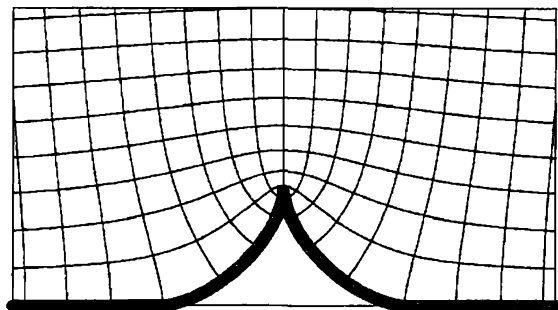
$$\zeta = z + \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}, \quad w = f(\zeta), \quad (5.36)$$

где  $f(\zeta)$  – функция, обратная к функции  $\zeta = F(w)$ . По формулам (5.36) можно построить каноническое конформное отображение для половины любой симметричной области из каталога 2 Атласа конформных отображений.

### Пример 5.7.

На фиг. 5.24. представлено отображение декартовой сети в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , осуществляемое функцией

$$\zeta = z + \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}, \quad w = \zeta + \frac{1}{3\zeta^3}.$$



Фиг. 5.24. Обтекание препятствия в форме астроида

Физически это отображение интерпретируется как сеть линий тока и эквипотенциалей при обтекании препятствия в виде половины цилиндра астроида сечения.

#### Криволинейные угловые области

Пусть  $D_0$  – криволинейная угловая область плоскости  $w$ , симметричная относительно вещественной оси,  $D$  – ее верхняя половина, также представляющая криволинейную угловую область. Пусть известна функция  $\zeta = F(w)$ , конформно отображающая область  $D_0$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$ , а ее верхнюю половину  $D$  – в первый квадрант плоскости  $\zeta$ . Функция  $z = \zeta^2$  отображает этот квадрант в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ . Обратное отображение полуплоскости на область  $D$  осуществляется функцией

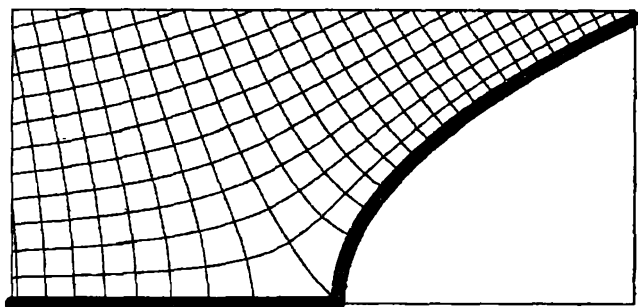
$$\zeta = \sqrt{z}, \quad w = f(\zeta),$$

где  $f(\zeta)$  – функция, обратная к функции  $\zeta = F(w)$ .

#### Пример 5.8.

В гл. I была рассмотрена квадратичная функция  $w = (\zeta + i)^2$ , отображающая полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  на внешность параболы. Подставив сюда  $\zeta = \sqrt{z}$ , получим функцию  $w = (\sqrt{z} + i)^2$ , отображающую верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на криволинейную полуплоскость,

ограниченную ветвью параболы и лучом вещественной оси (фиг. 5.25 ).



Фиг. 5.25. Обтекание ветви параболы

#### 5.4.2 Построение отображения "удвоенной" области

##### Конечные области

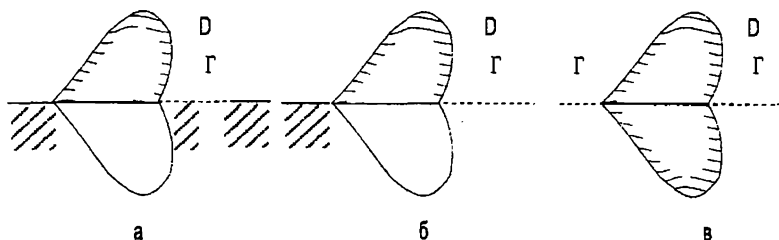
Пусть  $D_0$  – конечная односвязная область плоскости  $w$ , симметричная относительно вещественной оси;  $D$  – ее половина, расположенная в полуплоскости  $\text{Im } w > 0$ ;  $\Gamma$  – отрезок вещественной оси, принадлежащий  $D_0$ . Выберем на отрезке  $\Gamma$  какую-нибудь точку  $M$ .

Пусть известна функция  $\zeta = F(w)$ , отображающая область  $D$  на полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$ . Предположим, что точка  $w = M$  отображается функцией  $F(w)$  в бесконечно-удаленную (этого всегда можно добиться дробно-линейным преобразованием плоскости  $\zeta$ ).

Функция  $\zeta = F(w)$  отображает отрезок  $\Gamma$  в два луча вещественной оси  $\zeta : (-\infty, p)$  и  $(q, \infty)$ , где  $q > p$ . Обратная функция  $w = f(\zeta)$ , определенная в полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$ , допускает аналитическое продолжение на всю плоскость  $\zeta$  с разрезом вдоль отрезка  $(p, q)$ .

Для построения отображения плоскости с разрезом на круг (адекватную каноническую область для области  $D_0$ ) произведем линейное преобразование

$$t = \frac{2\zeta - p - q}{q - p},$$



Фиг. 5.26. Три задачи об аналитическом продолжении функции через участок вещественной оси

а затем плоскость  $t$  с разрезом вдоль отрезка  $(-1, 1)$  отобразим на круг с помощью обратной функции Жуковского:  $z = t - \sqrt{t^2 - 1}$ .

Обратное отображение круга  $|z| < 1$  на область  $D_0$  осуществляется последовательностью преобразований

$$t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} [t(q-p) + p + q], \quad w = f(\zeta),$$

где  $f(\zeta)$  — функция, обратная к функции  $\zeta = F(w)$ .

#### Пример 5.9.

Отображение круга  $|z| < 1$  на круг с разрезами вдоль отрезков вещественной оси  $(-1, a)$  и  $(b, 1)$  приводится в каталоге 1, область 5. В этом случае  $F(w) = 1/2(w + w^{-1})$ , обратная функция  $f(\zeta) = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$ . Изображение построено для  $p = -1.193$ ,  $q = 1.493$ , при этом  $a = p + \sqrt{p^2 - 1}$ ,  $b = q - \sqrt{q^2 - 1}$ .

#### Бесконечные симметричные области

Из бесконечных областей мы рассмотрим только тот случай, когда "половинная" область  $D$  представляет полуплоскость с конечным вырезом. В этом случае тип области  $D_0$  (и соответствующей ей адекватной канонической области) зависит от вида участка вещественной оси  $\Gamma$ , через который строится аналитическое продолжение отображающей функции:

1. Если  $\Gamma$  представляет конечный отрезок вещественной оси (фиг. 5.26, а), то область  $D_0$  является криволинейной полосой.

Адекватной канонической областью является прямолинейная полоса.

2. Если  $\Gamma$  представляет луч вещественной оси (фиг. 5.26, б), то область  $D_0$  является криволинейной угловой областью с раствором  $2\pi$ . Адекватной канонической областью является полуплоскость.
3. Если  $\Gamma$  представляет два луча вещественной оси (фиг. 5.26, в), то область  $D_0$  является внешностью конечного контура. Адекватной канонической областью является внешность круга.

В настоящем параграфе предполагается, что известна функция  $\zeta = F(w)$ , конформно отображающая область  $D$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  и удовлетворяющая условию  $F(\infty) = \infty$ . Эта функция сохраняет тип участка  $\Gamma$ : отрезок отображается в отрезок вещественной оси  $\zeta$ , луч — в луч, два луча — в два луча вещественной оси. Приемы построения функций, отображающих область  $D_0$  на соответствующие адекватные канонические области, мы рассмотрим на конкретном примере функции  $\zeta = F(w) = \sqrt{w^2 + 1}$ . Эта функция конформно отображает полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  с разрезом вдоль отрезка мнимой оси  $[0, i]$  (область  $D$ ) на полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$ , причем разрез отображается в отрезок вещественной оси  $[-1, 1]$ . Функция  $F(w)$  удовлетворяет условию  $F(\infty) = \infty$ . Обратное отображение полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$  на область  $D$  осуществляется функцией  $w = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

**а) Аналитическое продолжение через конечный отрезок вещественной оси**

Пусть образом отрезка  $\Gamma$  на плоскости  $\zeta$  является отрезок  $[p, q]$ , где  $1 \leq p < q$ . Согласно принципу симметрии, функция  $w = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ , заданная в полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$ , может быть аналитически продолжена через отрезок  $[p, q]$  на всю плоскость  $\zeta$  с разрезами вдоль лучей вещественной оси  $(-\infty, p)$  и  $(q, \infty)$ . Для отображения этой плоскости с разрезами на каноническую область надо сначала произвести линейное преобразование

$$t = \frac{2\zeta - q - p}{q - p},$$

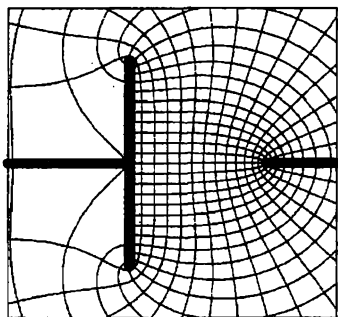
а затем плоскость  $t$  с разрезами вдоль лучей  $(-\infty, -1)$  и  $(1, \infty)$  отобразить на адекватную каноническую область — полосу  $-\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2$  — с помощью функции  $z = \arcsin t$ .



Обратное отображение полосы  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$  на область  $D_0$  осуществляется последовательностью преобразований

$$t = \sin z, \quad \zeta = \frac{1}{2}[t(q-p) + p + q], \quad w = \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1}. \quad (5.37)$$

Отображение, построенное по формулам (5.37) при  $p = 1$ ,  $q = 1.6$ , представлено на фиг. 5.27.



Фиг. 5.27. Поток в криволинейной полосе

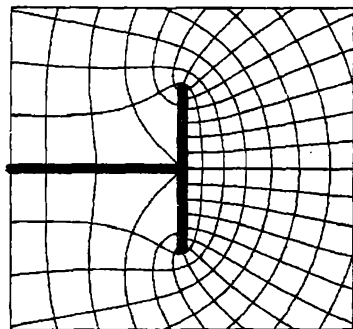
#### б) Аналитическое продолжение через луч вещественной оси

Пусть образом луча  $\Gamma$  на плоскости  $\zeta$  является луч вещественной оси  $(q, \infty)$ , где  $q \geq 1$ . Образом области  $D_0$  является плоскость  $\zeta$  с разрезом вдоль луча  $(-\infty, q)$ . Эта плоскость отображается на адекватную каноническую область – полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  функцией  $z = i\sqrt{\zeta - q}$ .

Обратное отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на область  $D_0$  осуществляется последовательностью функций

$$\zeta = q - z^2, \quad w = \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\zeta+1} \quad (5.38)$$

Отображение, осуществляемое функцией (5.38) при  $q = 1$ , представлено на фиг. 5.28.



Фиг. 5.28. Поток в криволинейной угловой области

**в) Аналитическое продолжение через два луча  
вещественной оси**

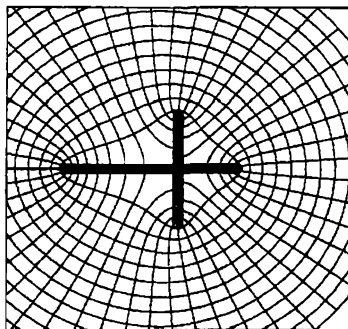
Пусть образом двух лучей  $\Gamma$  при отображении  $\zeta = \sqrt{w^2 + 1}$  являются два луча вещественной оси  $\zeta$ :  $(-\infty, p)$  и  $(q, \infty)$ , где  $p \leq -1$ ,  $q \geq 1$ . В данном случае рассматриваемая ветвь функции  $w = f(\zeta) = \sqrt{\zeta - 1} \sqrt{\zeta + 1}$ , заданная в верхней полуплоскости, имеет аналитическое продолжение на всю плоскость  $\zeta$  с разрезом вдоль отрезка  $(p, q)$ . Для отображения плоскости с разрезом на адекватную каноническую область — внешность круга  $|z| > 1$  — следует сначала совершить линейное преобразование

$$t = \frac{2\zeta - q - p}{q - p},$$

а затем полученную плоскость  $t$  с разрезом  $(-1, 1)$  отобразить на внешность круга  $|z| > 1$  с помощью обратной функции Жуковского:  $z = t + \sqrt{t^2 - 1}$ . Обратное отображение внешности круга  $|z| > 1$  на область  $D_0$  осуществляется последовательностью функций

$$t = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} [(q - p)t + q + p], \quad w = \sqrt{\zeta + 1} \sqrt{\zeta - 1}. \quad (5.39)$$

Отображение, осуществляемое функцией (5.39) при  $p = -2.2376$ ,  $q = 1.4172$  представлено на фиг. 5.29.



Фиг. 5.29. Электрическое поле заряженного цилиндра крестообразного сечения

## 5.5 Конформные отображения конических сечений и их инверсий

Коническими сечениями мы будем называть области, ограниченные кривыми второго порядка – эллипсом, гиперболой или параболой. В курсе аналитической геометрии исследуются канонические уравнения кривых второго порядка. Для центральных кривых второго порядка канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.40)$$

где знак  $+$  определяет эллипс, а знак  $-$  – гиперболу.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \quad (5.41)$$

Наряду с каноническими уравнениями, в курсе аналитической геометрии рассматриваются полярные уравнения кривых второго порядка. Если поместить полюс полярной системы координат в одном из фокусов соответствующей кривой и направить полярную ось к ее ближайшей вершине, то полярное уравнение любой кривой второго порядка примет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (5.42)$$

Здесь  $p$  обозначает длину половины хорды, проходящей через фокус кривой перпендикулярно оси кривой, а  $e$  – эксцентриситет кривой. Для эллипса  $0 < e < 1$ , для параболы  $e = 1$ , для гиперболы  $e > 1$ . При инверсии кривой относительно какой-либо точки следует в полярном уравнении кривой (с полюсом в данной точке) заменить  $\rho$  на  $1/\rho$ . Производя такую замену в уравнении (5.42), получим уравнение инверсий кривых второго порядка относительно фокуса:

$$\rho = l(1 + e \cos \varphi),$$

где  $l = 1/p$ . Инверсия эллипса ( $0 < e < 1$ ) относительно фокуса называется эллиптической улиткой Паскаля, инверсия гиперболы ( $e > 1$ ) – гиперболической улиткой Паскаля, инверсия параболы ( $e = 1$ ) – кардиоидой.

Для построения инверсий центральных кривых второго порядка относительно их центра введем полярные координаты с полюсом в начале координат:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Полярное уравнение центральных кривых (5.40) примет вид

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi \pm a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Заменяя здесь  $\rho$  на  $1/\rho$ , получим полярное уравнение инверсий кривых второго порядка относительно центра:

$$\rho = \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} \pm \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right)^{1/2}.$$

Инверсии эллипсов относительно центра называются эллиптическими лемнискатами Бута, а инверсии гипербол – гиперболическими лемнискатами Бута.

Для построения инверсии параболы относительно ее вершины запишем уравнение параболы (5.41) в полярных координатах:

$$\rho = 2p \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Заменяя здесь  $\rho$  на  $1/\rho$ , получим уравнение инверсии параболы:

$$\rho = l \sin^2 \varphi / \cos \varphi = l(\sec \varphi - \cos \varphi),$$

где  $l = 1/(2p)$ . Эта кривая называется циссоидой. Она представляет бесконечную жорданову кривую с точкой возврата в начале координат.

## 5.5.1 Эллипс

Эллипс с полуосями  $a, b$  определяется параметрическим уравнением

$$u = a \cos t, \quad v = b \sin t,$$

или

$$w = \frac{a}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{b}{2}(e^{it} - e^{-it}).$$

Обозначая  $z = \exp(it)$ , получим взаимно-однозначное отображение единичной окружности на эллипс:

$$w = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2z}. \quad (5.43)$$

Аналитическое продолжение функции (5.43) называется *модифицированной функцией Жуковского*. Вне единичного круга модифицированная функция Жуковского аналитична и имеет полюс первого порядка в бесконечно удаленной точке. Так как функция (5.43) отображает окружность  $|z| = 1$  на эллипс с сохранением направления обхода, то по принципу соответствия границ она отображает конформно внешность круга на внешность рассматриваемого эллипса.

Внутри единичного круга функция (5.43) не является аналитической — она имеет полюс в начале координат. Внутри круга эта функция не является и однолистной. Действительно, необходимое условие однолистности

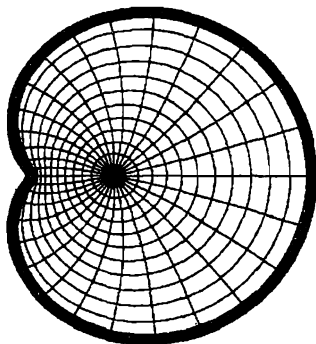
$$w' = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2z^2} \neq 0$$

нарушено в точках  $z = \pm \sqrt{(a-b)/(a+b)}$ . Однако в кольце  $\sqrt{(a-b)/(a+b)} < |z| < 1$  функция (5.43) однолистка. Она отображает конформно это кольцо на двусвязную область — внутренность эллипса с выброшенным отрезком между фокусами эллипса  $(-c, c)$ , где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Внутренность эллипса (без разрезв) не может быть конформно отображена на круг с помощью элементарных функций.

## Инверсия эллипса

Конформное отображение круга  $|z| < 1$  на внутренность эллиптической улитки Паскаля осуществляется квадратичной функцией



Фиг. 5.30. Отображение круга на внутренность эллиптической улитки Паскаля

$w = z_1^2 + 2z_1$ , где  $z_1 = z/p$ ,  $p > 1$ . Пример такого отображения при  $p = 1.2$  представлен на фиг. 5.30.

Конформное отображение круга  $|z| < 1$  на внутренность эллиптической лемнискаты Бута осуществляется инверсной функцией Жуковского:

$$w = \frac{2z_1}{z_1^2 + 1}, \quad \text{где } z_1 = z/p, \quad p > 1.$$

Пример такого отображения при  $p = 1.4$  представлен на фиг. 5.31.

Конформные отображения круга на внешность эллиптической улитки Паскаля или внешность эллиптической лемнискаты Бута не могут быть осуществлены элементарными функциями.

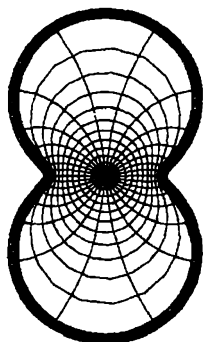
### 5.5.2 Парабола

Рассмотрим на комплексной плоскости  $w = u + iv$  параболу, определяемую уравнением  $v^2 = 4(u + 1)$  или иначе  $w = (v^2/4 - 1) + iv$ . Вводя параметр  $t = v/2$ , запишем уравнение данной параболы в параметрической форме

$$w(t) = (t^2 - 1) + 2it = (t + i)^2 \quad (t \in \mathcal{R}). \quad (5.44)$$

Возрастанию параметра  $t$  соответствует обход параболы в направлении возрастания координаты  $v$ .

Парабола разбивает плоскость  $w$  на две криволинейные угловые области: слева от нее находится внешность параболы – криволиней-



Фиг. 5.31. Отображение круга на внутренность эллиптической лемнискаты Бута

ная угловая область с раствором  $2\pi$ , справа – внутренность параболы – криволинейная угловая область с раствором 0.

#### Внешность параболы

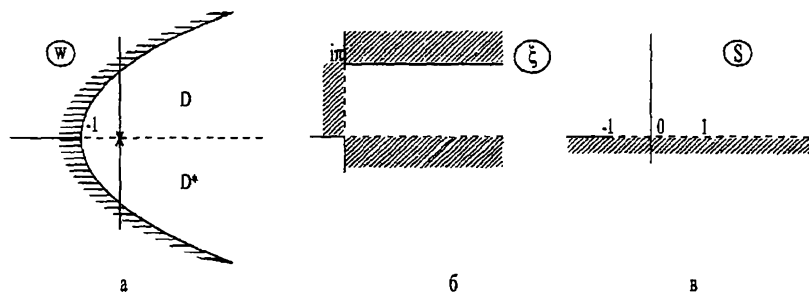
Отображение полуплоскости на внешность параболы осуществляется квадратичной функцией, рассмотренной в гл. III. Ранее в гл. I (параграф 1.6.5) был рассмотрен пример функции  $w(z) = (z + i)^2$ , представляющей аналитическое продолжение функции (5.44), заданной на вещественной оси  $\mathcal{R}$ , на комплексную плоскость  $\mathcal{C}$ . Эта функция конформно отображает верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на внешность параболы  $u < v^2/4 - 1$ .

#### Внутренность параболы

Обозначим через  $D_0$  внутренность параболы (5.44), т.е. область  $u > v^2/4 - 1$ , через  $D$  – ее верхнюю половину ( $v > 0$ ), через  $D^*$  – нижнюю половину ( $v < 0$ , фиг. 5.32, а). Для построения отображения области  $D_0$  на полуплоскость следует сначала построить отображение области  $D$ , а затем использовать принцип симметрии.

Функция  $\zeta = \pi\sqrt{w}$  отображает параболу (5.44) в прямую  $\text{Im } \zeta = \pi$ , а всю область  $D$  – в полуполосу  $\text{Re } \zeta > 0$ ,  $0 < \text{Im } \zeta < \pi$  (фиг. 5.32, б).

<sup>2</sup>Здесь и далее символ  $\sqrt{\cdot}$  обозначает главную ветвь двузначной функции, для которой  $-\pi/2 < \arg f \leq \pi/2$ .



Фиг. 5.32. Отображение внутренности параболы на полуплоскость

Эта полуплоскость отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } s > 0$  функцией  $s = \text{ch } \zeta$  (фиг. 5.32, в).

Таким образом, область  $D$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } s > 0$  последовательностью преобразований

$$\zeta = \pi\sqrt{w}, \quad s = \text{ch } \zeta.$$

При этом ось симметрии параболы (штриховая линия на фиг. 5.32) отображается в луч вещественной оси  $\text{Im } s = 0, \text{Re } s > -1$ . По принципу симметрии функция  $s(\zeta(w))$  может быть аналитически продолжена через этот луч в нижнюю полуплоскость, при этом вся область  $D_0$  отобразится в плоскость  $s$  с разрезом вдоль луча  $(-\infty, -1)$ . Для того, чтобы построить отображение области  $D_0$  на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , следует определить функцию  $z$  так:  $z = i\sqrt{s+1}$ . Таким образом, последовательность преобразований

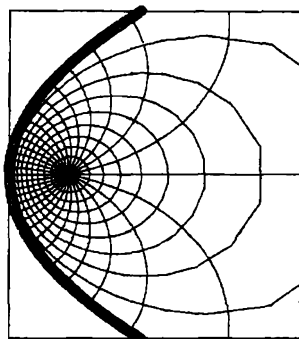
$$\zeta = \pi\sqrt{w}, \quad s = \text{ch } \zeta, \quad z = i\sqrt{s+1} \quad (5.45)$$

отображает внутренность параболы  $D_0$  на адекватную каноническую область – верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ . Обратное отображение полуплоскости на внутренность параболы  $D_0$  осуществляется последовательностью функций

$$s = -1 - z^2, \quad \zeta = \text{arch } s, \quad w = (\zeta/\pi)^2.$$

Такое отображение представлено в Атласе конформных отображений (каталог 3, область 24).





Фиг. 5.33. Отображение круга на внутренность параболы

Неканоническое отображение внутренности параболы на круг  $|z_1| < 1$  получим, добавив к цепочке преобразований (5.45) дробно-линейное преобразование

$$z_1 = \frac{z - i\sqrt{2}}{z + i\sqrt{2}}.$$

Обратное отображение круга  $|z_1| < 1$  на внутренность параболы, осуществляемое функцией

$$w = \left( \frac{4}{\pi} \operatorname{arth} \sqrt{z_1} \right)^2, \quad (5.46)$$

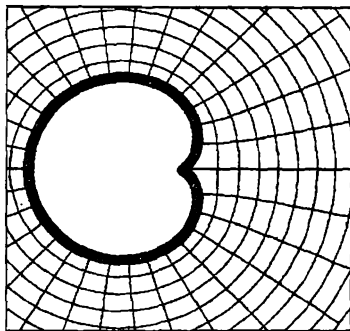
представлено на фиг. 5.33.

### Инверсии параболы

При инверсии параболы относительно фокуса внутренность параболы отображается на внешность кардиоиды. Для построения конформного отображения внешности круга на внешность кардиоиды следует в формуле (5.46) произвести инверсию дважды – по переменной  $z_1$  и переменной  $w$ :

$$w = \left( \frac{4}{\pi} \operatorname{arth} \frac{1}{\sqrt{z_1}} \right)^{-2}.$$

Отображение внешности круга  $|z_1| > 1$  на внешность кардиоиды представлено на фиг. 5.34. При инверсии параболы (5.44) относительно вер-



Фиг. 5.34. Электрическое поле заряженного цилиндра кардиоидального сечения

шины внешность параболы отображается в криволинейную полуплоскость, расположенную слева от циссоиды. Каноническое отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на область, расположенную слева от циссоиды, осуществляемое последовательностью преобразований

$$z_1 = i - \frac{1}{z}, \quad t = z_1^2, \quad w = \frac{4}{t+1},$$

представлено на фиг. 5.35.

При инверсии параболы (5.44) относительно вершины внутренность параболы отображается в криволинейную полуплоскость, расположенную справа от циссоиды. Каноническое отображение верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на область, расположенную справа от циссоиды, осуществляется композицией функций

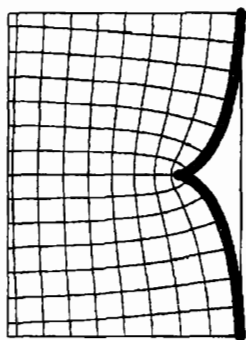
$$z_1 = \frac{i}{z\sqrt{2}}, \quad t = \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arch} z_1 \right)^2, \quad w = \frac{4}{t+1}.$$

Это отображение представлено на фиг. 5.36.

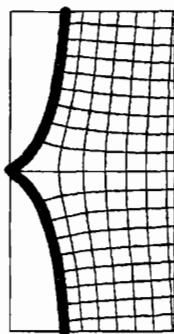
### 5.5.3 Гипербола

**Криволинейная полоса между двумя ветвями гиперболы**

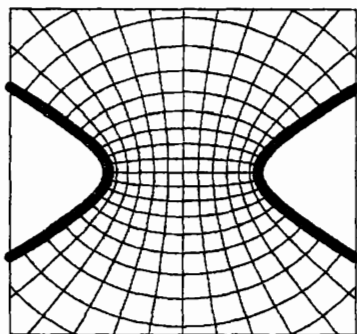
В гл. III было установлено, что тригонометрическая функция  $w = \sin z$  конформно отображает декартову сеть в полосе  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$  в сеть софокусных эллипсов и гипербол. В частности, полоса



Фиг. 5.35. Обтекание выступа циссоиды



Фиг. 5.36. Обтекание впадины циссоиды



Фиг. 5.37. Отображение полосы на криволинейную полосу между ветвями гиперболы

$-\beta < \operatorname{Re} z < \beta$  (где  $0 < \beta < \pi/2$ ) отображается в криволинейную полосу между двумя ветвями гиперболы

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1, \quad (5.47)$$

где  $a = \cos \alpha$ ,  $b = \sin \alpha$  — полуоси гиперболы,  $\alpha = \pi/2 - \beta$  — угол наклона асимптот гиперболы к вещественной оси.

Отображение декартовой сети в полосе  $-\beta < \operatorname{Re} z < \beta$  при  $\beta = \pi/3$  представлено на фиг. 5.37. Оно интерпретируется как магнитное поле между полюсами магнита в форме гиперболического цилиндра.

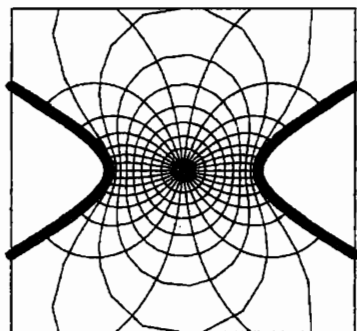
Неканоническое отображение круга на криволинейную полосу между двумя ветвями гиперболы осуществляется функцией

$$w = \sin \left( \frac{4\beta}{\pi} \operatorname{arctg} z \right). \quad (5.48)$$

Такое отображение при  $\beta = \pi/3$  приведено на фиг. 5.38.

**Криволинейная угловая область, ограниченная одной ветвью гиперболы**  
Пусть на плоскости  $w = u + iv$  задана область  $D_0$  — внутренность правой ветви гиперболы

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1$$



Фиг. 5.38. Отображение круга на полосу между ветвями гиперболы

с полуосями  $a = \cos \alpha$ ,  $b = \sin \alpha$ , где  $\alpha = \pi r$  — угол наклона асимптоты гиперболы. Обозначим через  $D$  верхнюю половину области  $D_0$ :

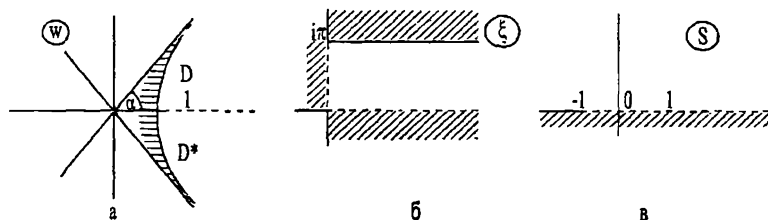
$$D : \left\{ w = u + iv; u > a \sqrt{1 + \frac{v^2}{b^2}}, v > 0 \right\}.$$

Конформное отображение области  $D_0$  на полуплоскость строится по той же схеме, что и отображение внутренности параболы: сначала отображается на полуплоскость область  $D$ , а затем используется принцип симметрии.

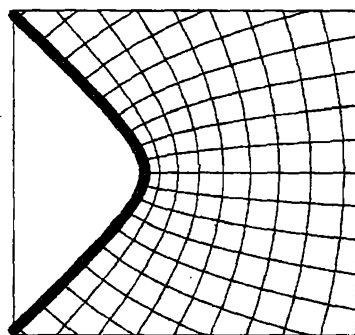
Функция  $\zeta = p^{-1} \operatorname{arch} w$  отображает область  $D$  на полуполосу  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ ,  $0 < \operatorname{Im} \zeta < \pi$  (фиг. 5.39, б). Далее функция  $s = \operatorname{ch} \zeta$  отображает эту полуполосу на полуплоскость  $\operatorname{Im} s > 0$  (фиг. 5.39, в).

Таким образом, функция  $s(\zeta(w))$  отображает область  $D$  на полуплоскость  $\operatorname{Im} s > 0$ , причем ось симметрии гиперболы (штриховая линия на фиг. 5.39, а) отображается в луч вещественной оси  $\operatorname{Re} z > -1$ ,  $\operatorname{Im} s = 0$ . Согласно принципу симметрии, функция  $s(\zeta(w))$  может быть аналитически продолжена через этот луч в нижнюю полуплоскость; при этом вся область  $D_0$  отобразится в плоскость  $s$  с разрезом вдоль луча вещественной оси  $(-\infty, -1)$ . Для отображения плоскости  $s$  с разрезом на верхнюю полуплоскость  $z$  следует положить  $z = i\sqrt{s+1}$ . Обратное отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на внутренность гиперболы осуществляется композицией функций

$$s = -1 - z^2, \quad \zeta = \operatorname{arch} s, \quad w = \operatorname{ch}(p\zeta). \quad (5.49)$$



Фиг. 5.39. Отображение внутренней гиперболы на полуплоскость

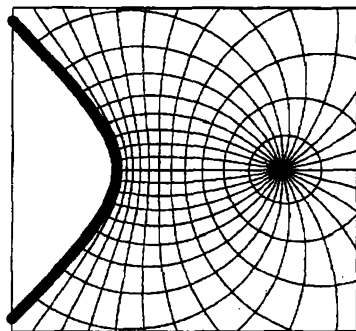


Фиг. 5.40. Отображение полуплоскости на криволинейную угловую область, ограниченную ветвью равнобочной гиперболы

Функция (5.49), полученная в предположении  $0 < p < 1/2$ , остается пригодной и в случае  $1/2 < p < 1$ . В этом случае она отображает верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на внешность левой ветви гиперболы (5.47).

Отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  по формулам (5.49) при  $p = 0.75$  представлено на фиг. 5.40. Физически это отображение интерпретируется как картина обтекания внешности левой ветви равнобочной гиперболы.

Для того, чтобы отобразить круг  $|z_1| < 1$  на внутренность (или внешность) гиперболы, следует отобразить его посредством дробно-



Фиг. 5.41. Отображение круга на внешность ветви равнобочной гиперболы

линейного преобразования на верхнюю полуплоскость, а затем совершить отображение (5.49). После преобразований можно представить функцию, отображающую круг на внутренность (внешность) гиперболы в виде

$$w = \operatorname{ch} (4p \operatorname{arth} \sqrt{z}). \quad (5.50)$$

Отображение, совершаемое функцией (5.50) при  $p=0.75$ , представлено на фиг. 5.41.

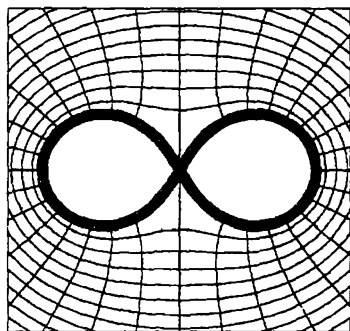
#### Инверсии гиперболы

При инверсии гиперболы относительно центра криволинейная полоса между ветвями гиперболы отображается во внешность гиперболической лемнискаты Бута. Для построения отображения внешности круга на внешность гиперболической лемнискаты Бута следует в формулах (5.48) заменить  $z$  и  $w$  соответственно на  $1/z$  и  $1/w$ :

$$w = \operatorname{cosec} \left( \frac{4\beta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{z} \right).$$

На фиг. 5.42. представлено это отображение при  $\alpha = \pi/3$ .

При инверсии относительно фокуса внутренность ветви гиперболы отображается во внешность внешней петли гиперболической улитки Паскаля. Отображение внешности единичного круга  $|z| > 1$  на внешность гиперболической улитки Паскаля, осуществляемое последова-

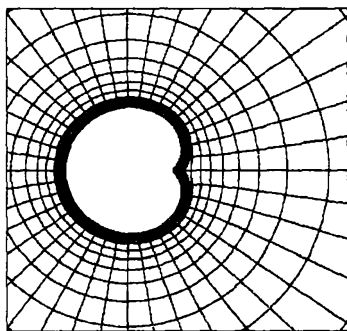


Фиг. 5.42. Электрическое поле заряженного цилиндра с сечением в форме гиперболической лемнискаты Бута

тельностью функций

$$t = 4p \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} \right), \quad w = \frac{1}{\cos t - 1}$$

при  $p = 0.25$ , представлено на фиг. 5.43.



Фиг. 5.43. Отображение внешности круга на внешность гиперболической улитки Паскаля



# Глава 6

## Отображения многоугольных областей

### 6.1 Классификация многоугольных областей

Многоугольной областью называется односвязная область полной комплексной плоскости, ограниченная ломаной. Все многоугольные области естественно разбиваются на четыре типа:

1. Конечные многоугольники, т.е. области, заключенные внутри замкнутых конечных ломаных. Для таких областей бесконечно удаленная точка является внешней.
2. Бесконечные многоугольные области, у которых одна "вершина" лежит в бесконечно удаленной точке. Для таких областей точка  $w = \infty$  является однократной граничной точкой. Такие области мы будем называть полигональными угловыми областями.
3. Бесконечные многоугольные области, у которых несколько вершин находятся в бесконечно удаленной точке. Такие области мы назовем полигональными полосами. Для них точка  $w = \infty$  является кратной граничной точкой.
4. Внешности конечных замкнутых ломаных, для которых бесконечно удаленная точка является внутренней. Такие области мы будем называть внешностями многоугольников.

Будем обозначать вершины  $n$  - угольной области через  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , нумеруя их в порядке положительного обхода границы многоугольной области. Величины углов многоугольной области в

этих точках обозначим  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$  соответственно. Будем называть такую многоугольную область для краткости "многоугольником  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ".

Можно считать, не ограничивая общности, что все  $\alpha_k \neq 1$  (если какой-то угол многоугольника равен  $\pi$ , то его можно не считать вершиной). Углы многоугольной области в конечных точках  $A_k$  считаются положительными; они удовлетворяют условию  $0 < \alpha_k \leq 2$ . Углы в бесконечно удаленной точке считаются отрицательными; они удовлетворяют условию  $-2 \leq \alpha_k \leq 0$ .

Сумма внутренних углов конечного  $n$ -угольника (тип 1) равна  $\pi(n-2)$ , т.е.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2.$$

Эта формула справедлива и для бесконечных многоугольников (типов 2 и 3). Если же многоугольная область является внешностью конечного  $n$ -угольника (тип 4), то

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n + 2.$$

## 6.2 Прямая задача Кристоффеля – Шварца

Пусть задано два набора из  $n$  вещественных чисел: числа  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), расположенные в порядке возрастания

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n,$$

и числа  $\alpha_k$ , удовлетворяющие условиям

$$0 < \alpha_k < 1, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2.$$

Построим функцию

$$h(z) = (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1}, \quad (6.1)$$

представляющую произведение  $n$  степенных функций. Будем рассматривать эту функцию в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , выделяя однозначную ветвь каждого сомножителя условиями  $0 < \arg(z - a_k) < \pi$ .

Функция  $h(z)$  неограниченно растет при  $z \rightarrow a_k$ :

$$h(z) \sim \frac{C_k}{(z - a_k)^{1-\alpha_k}}. \quad (6.2)$$

Полагая  $h(a_k) = \infty$ , получим функцию, аналитическую в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  и непрерывную (в обобщенном смысле) в замкнутой области  $\text{Im } z \geq 0$ .

При  $z \rightarrow \infty$  функция  $h(z)$  убывает как  $1/z^2$ :

$$h(z) \sim z^{\sum \alpha_k - n} = z^{-2}. \quad (6.3)$$

Рассмотрим далее функцию

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z h(\zeta) d\zeta, \quad (6.4)$$

где интегрирование ведется по любой кривой, лежащей в полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$ ,  $z_0$  - любое комплексное число,  $\text{Im } z_0 \geq 0$ .

Прежде всего отметим, что функция  $\varphi(z)$  имеет конечные пределы при  $z \rightarrow a_k$  и при  $z \rightarrow \infty$ . Сходимость интегралов

$$\int_{z_0}^{a_k} h(\zeta) d\zeta \quad \text{и} \quad \int_{z_0}^{\infty} h(\zeta) d\zeta$$

следует из оценок порядка роста функции  $h(z)$  (6.2) и (6.3). Пользуясь этим обстоятельством, положим  $z_0 = a_1$  и введем обозначения

$$\varphi(a_k) = \int_{a_1}^{a_k} h(\zeta) d\zeta = A_k, \quad \int_{a_1}^{\infty} h(\zeta) d\zeta = A_{\infty}.$$

Функция (6.4) называется *интегралом Кристоффеля - Шварца*, а задача построения отображения верхней полуплоскости функцией (6.4) - прямой задачей Кристоффеля - Шварца. Для ее решения найдем сначала, во что отображает функция (6.4) вещественную ось, а затем применим принцип соответствия границ.

Функция  $w = \varphi(x)$  отображает вещественную ось  $z = x$  в некоторую замкнутую кривую  $\Gamma$ . Величина  $\arg \varphi'(x)$  представляет, по геометрическому смыслу производной аналитической функции, угол наклона касательной к этой кривой. По определению функции  $\varphi(x)$  получаем

$$\arg \varphi'(x) = \arg h(x) = \sum_{k=1}^n \arg(x - a_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Для каждого слагаемого этой суммы по свойству степенной функции имеем

$$\arg(x - a_k)^{\alpha_k - 1} = \begin{cases} \pi(\alpha_k - 1), & x < a_k, \\ 0, & x > a_k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что на интервале  $a_k < x < a_{k+1}$  функция  $\arg \varphi'(x)$  сохраняет постоянное значение, равное

$$\arg \varphi'(x) = \pi \sum_{j=k+1}^n (\alpha_j - 1) = \pi \sum_{j=1}^k (1 - \alpha_j) - 2\pi.$$

Это значит, что отрезок вещественной оси  $(a_k, a_{k+1})$  отображается функцией  $w = \varphi(x)$  в отрезок прямой, соединяющей точки  $A_k$  и  $A_{k+1}$ , длина которого равна

$$|A_{k+1} - A_k| = \int_{a_k}^{a_{k+1}} |h(x)| dx.$$

Отметим, что  $\varphi(a_1) = A_1 = 0$ . На полубесконечном интервале  $-\infty < x < a_1$  имеем  $\arg \varphi'(x) = -2\pi$ . Это значит, что угол наклона отрезка  $[A_\infty, A_1]$  равен нулю, т.е. точка  $A_\infty$  лежит на отрицательной вещественной полуоси.

При переходе через точку  $a_k$  угол наклона касательной к кривой  $\Gamma$  увеличивается на величину  $\pi(1 - \alpha_k)$ , т.е. при  $\alpha_k < 1$  вектор касательной поворачивается на угол  $\pi - \pi\alpha_k$  *против часовой стрелки*.

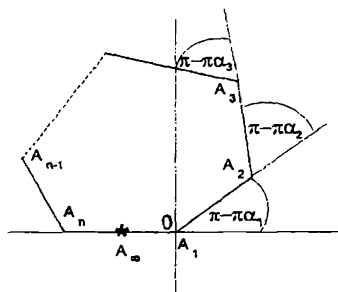
На полубесконечном интервале  $(a_n, \infty)$  имеем  $\arg \varphi'(x) = 0$ . Это значит, что последний отрезок  $(A_n, A_\infty)$  лежит на вещественной оси, причем отрезки  $(A_n, A_\infty)$  и  $(A_\infty, A_1)$  сливаются в один отрезок (фиг. 6.2). Точка  $A_\infty$  не является вершиной ломаной.

Сумма всех углов поворота касательной при обходе ломаной  $\Gamma$  равна

$$\pi \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) = 2\pi,$$

т.е. вектор касательной к замкнутой ломаной  $\Gamma$  совершает при обходе ломаной *один полный поворот против часовой стрелки*. Как легко заключить, такая ломаная не имеет точек самопересечения.

Таким образом, функция  $w = \varphi(z)$  отображает вещественную ось  $z = x$  в замкнутую ломаную, ограничивающую  $n$ -угольник с вершинами в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и углами  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ . В силу условий  $0 < \alpha_k < 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) полученный многоугольник является выпуклым. Согласно принципу соответствия границ, функция  $w = \varphi(z)$  отображает конформно верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на внутренность этого  $n$ -угольника.



Фиг. 6.1. Прямая задача Кристоффеля - Шварца

**Обобщения формулы (6.4)**

1. В предыдущем параграфе предполагалось, что все числа  $\alpha_k$  удовлетворяют условиям  $0 < \alpha_k < 1$ . При этом предположении образом вещественной оси  $z = x$  явилась выпуклая замкнутая ломаная, ограничивающая конечный выпуклый  $n$ -угольник. Рассмотрим более общий случай, когда числа  $\alpha_k$  удовлетворяют условиям

$$0 < \alpha_k \leq 2, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2.$$

В этом случае образом вещественной оси является невыпуклая замкнутая ломаная, которая в зависимости от длин ее звеньев (в конечном счете – от величин параметров  $\alpha_k$ ) может иметь самопересечения. Если же самопересечений у этой ломаной нет, то функция (6.4) отображает конформно полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на невыпуклый  $n$ -угольник с углами  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ . Некоторые углы этого многоугольника превосходят  $\pi$ , т.е. являются входящими углами.

2. Выше рассматривались случаи, когда все числа  $\alpha_k$  положительны. Предположим теперь, что среди чисел  $\alpha_k$  есть и неположительные, причем все числа удовлетворяют условиям

$$-2 \leq \alpha_k \leq 2, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2.$$

Пусть некоторое число  $\alpha_k$  удовлетворяет условиям  $-2 \leq \alpha_k < 0$ . В этом случае функция  $w = \varphi(z)$  (6.4), в силу оценки (6.2), неограниченно

растет при  $z \rightarrow a_k$ , причем имеет в точке  $a_k$  степенной порядок роста:

$$w \sim \frac{C}{(z - a_k)^{|\alpha_k|}}.$$

При этом точка  $x = a_k$  отображается в бесконечно-удаленную точку; отрезки вещественной оси  $a_{k-1} < x < a_k$  и  $a_k < x < a_{k+1}$  отображаются в лучи, угол между продолжениями которых равен  $\pi|\alpha_k|$ .

Если некоторое число  $\alpha_k$  равно нулю, то функция  $w = \varphi(z)$  имеет в точке  $z = a_k$  логарифмическую особенность:

$$w \sim C \ln(z - a_k).$$

В этом случае точка  $z = a_k$  также отображается в бесконечно-удаленную точку, а отрезки  $a_{k-1} < x < a_k$  и  $a_k < x < a_{k+1}$  отображаются в лучи параллельных прямых.

В общем случае, когда числа  $\alpha_k$  удовлетворяют условиям

$$-2 \leq \alpha_k \leq 2, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2,$$

функция  $w = \varphi(z)$  отображает вещественную ось  $z = x$  в замкнутую ломаную, у которой одна или несколько вершин (соответственно количеству неположительных чисел  $\alpha_k$ ) лежат в бесконечно-удаленной точке. Если у этой ломаной нет точек самопересечения (кроме бесконечно-удаленной точки), то отображение вещественной оси  $z = x$  на рассматриваемую ломаную является взаимно-однозначным. В этом случае, согласно принципу соответствия границ, функция (6.4) отображает конформно верхнюю полуплоскость на бесконечную многоугольную область, ограниченную данной ломаной. Заметим, что для однолистности отображения необходимо, чтобы сумма всех отрицательных чисел  $\alpha_k$  не превосходила по абсолютному значению 2.

3. В общем случае интегралом Кристоффеля – Шварца называется функция

$$w = C \int_{z_0}^z h(\zeta) d\zeta + C_1, \quad (6.5)$$

где  $C$  и  $C_1$  - комплексные константы,  $C \neq 0$ .

Константа  $z_0$  в интеграле (6.5) не существенна (при ее изменении меняется константа  $C_1$ ). В большинстве случаев можно положить  $z_0 = 0$

(если это не приведет к расходящемуся интегралу). Таким образом, в интеграл (6.5) при заданных числах  $\alpha_k$ , определяющих углы многоугольника, входят  $n$  вещественных параметров  $a_k$  и две комплексные константы  $C$  и  $C_1$ .

#### Замены переменных в интеграле Кристоффеля - Шварца

1. Произведем в интеграле Кристоффеля - Шварца (6.5) дробно-линейную замену переменных интегрирования  $z$ :

$$t = \frac{z-i}{z+i}; \quad z = i \frac{1+t}{1-t}, \quad dz = \frac{2i dt}{(1-t)^2}.$$

При этом верхняя полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  отображается на круг  $|t| < 1$ ; точки вещественной оси  $z = a_k$  отображаются в точки единичной окружности

$$t = b_k = \frac{a_k - i}{a_k + i}, \quad |b_k| = 1.$$

Разности  $z - a_k$  представляются в виде

$$z - a_k = \frac{a_k - i}{t - 1} \left( 1 - \frac{t}{b_k} \right),$$

а все подынтегральное выражение в (6.5) принимает вид

$$h(z) dz = A \prod_{k=1}^n \left( \frac{1 - t/b_k}{t - 1} \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{dt}{(t - 1)^2}, \quad (6.6)$$

$$\text{где } A = 2i \prod_{k=1}^n (a_k - i)^{\alpha_k - 1}.$$

В выражении (6.6) суммарный показатель степени  $K$  у множителя  $(t - 1)^K$  равен

$$K = - \sum_{k=1}^n \alpha_k + n - 2.$$

В силу соотношения между параметрами  $\alpha_k$  он обращается в нуль. Окончательно интеграл Кристоффеля - Шварца принимает вид

$$w = C' \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau + C_1, \quad (6.7)$$

$$\text{где } C' = AC, \quad H(\tau) = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\tau}{b_k} \right)^{\alpha_k - 1}.$$

Таким образом, функция, отображающая внутренность круга  $|t| < 1$  на многоугольник, имеет вид (6.7), где числа  $b_k$  обозначают точки единичной окружности (прообразы вершин многоугольника), а  $H(\tau)$  представляет главную ветвь многозначной функции, аналитическую в круге  $|\tau| < 1$  и удовлетворяющую условию  $H(0) = 1$ .

2. При дробно-линейном преобразовании с вещественными коэффициентами

$$t = \frac{az + b}{cz + d} \quad (\text{где } ad - bc > 0)$$

верхняя полуплоскость  $z$  отображается в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t > 0$ . Можно подобрать коэффициенты преобразования так, чтобы одна из точек  $a_k$  (прообразов вершин многоугольника), например, точка  $a_n$ , отобразилась в точку  $t = \infty$ . Возьмем, к примеру, такое преобразование

$$t = -\frac{1}{z - a_n}, \quad \text{т.е. } z = a_n - \frac{1}{t}, \quad dz = \frac{dt}{t^2}.$$

Точки  $z = a_k$  при этом преобразовании отображаются в точки

$$t = \frac{1}{a_n - a_k} = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Учитывая, что

$$z - a_k = (a_n - a_k) \frac{t - c_k}{t}, \quad z - a_n = -\frac{1}{t},$$

представим подынтегральное выражение (6.5) в виде

$$h(z)dz = A \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{t - c_k}{t} \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{dt}{t^{\alpha_n + 1}}, \quad (6.8)$$

$$\text{где } A = (-1)^{\alpha_n - 1} \prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Суммарный показатель  $K$  у множителя  $t^K$  в формуле (6.8) равен

$$K = -\sum_{k=1}^n \alpha_k + n - 2.$$

В силу условия на числа  $\alpha_k$  этот показатель равен нулю. Окончательно интеграл Кристоффеля - Шварца после указанной замены переменной интегрирования принимает вид

$$w = C' \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau + C_1,$$



$$\text{где } C' = AC, \quad H(t) = \prod_{k=1}^{n-1} (t - c_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Итак, в том случае, когда прообразом одной из вершин  $n$  - угольника  $(A_n)$  является точка  $t = \infty$ , отображение полуплоскости  $\text{Im } t > 0$  на данный  $n$  - угольник осуществляется интегралом Кристоффеля - Шварца, в подынтегральном выражении которого опущен множитель, соответствующий данной вершине  $(A_n)$ . Это обстоятельство часто используется на практике для упрощения интеграла Кристоффеля - Шварца.

### 6.3 Обратная задача Кристоффеля-Шварца

Обратной задачей Кристоффеля-Шварца называется задача нахождения функции, отображающей полуплоскость на заданный многоугольник.

Пусть на плоскости  $W$  задан конечный  $n$  - угольник  $P$  с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и углами  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ . Этот многоугольник можно конформно отобразить, согласно теореме Римана, на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ . Пусть функция  $z = F(W)$  реализует такое конформное отображение, при котором вершины  $n$  - угольника отображаются в конечные точки вещественной оси  $z = a_1, a_2, \dots, a_n$ . Пусть обратное отображение полуплоскости на многоугольник  $P$  осуществляется функцией  $W = f(z)$ , где  $f(z)$  - обратная к  $F$  функция.

Используя эти значения параметров, построим функцию, рассмотренную в предыдущем разделе

$$w = \varphi(z) = \int_{a_1}^z \prod_{k=1}^n (t - a_k)^{\alpha_k - 1} dt,$$

реализующую отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на некоторый  $n$  - угольник  $Q$  комплексной плоскости  $w$ . Можно доказать, что многоугольник  $P$  подобен многоугольнику  $Q$ , и, следовательно, он может быть получен из многоугольника  $Q$  линейным преобразованием:

$$W = C\varphi(z) + C_1.$$

Приведем схему доказательства этого утверждения. Функция  $W = W(w)$ , отображающая многоугольник  $Q$  на многоугольник  $P$ , рассматривается как функция, заданная параметрически

$$w = \varphi(z), \quad W = f(z),$$

где параметр  $z$  пробегает полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ . По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, имеем

$$\frac{dW}{dw} = \frac{f'(z)}{\varphi'(z)}, \quad \text{причем} \quad \frac{dW}{dw} \neq 0.$$

Далее рассматривается гармоническая функция

$$v = \arg \frac{dW}{dw} = \arg f'(z) - \arg \varphi'(z).$$

При вещественных значениях  $z = x$  величины  $\arg f'(x)$  и  $\arg \varphi'(x)$  представляют углы наклона сторон многоугольников  $P$  и  $Q$  и являются постоянными на интервалах  $a_k < x < a_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). При переходе через точку  $a_k$  величины  $\arg f'(x)$  и  $\arg \varphi'(x)$  получают одинаковые приращения  $\pi - \pi\alpha_k$ , а разность их не изменяется. Следовательно, на всей границе многоугольника  $Q$  гармоническая функция  $v$  постоянна, значит, и внутри многоугольника  $Q$  эта функция постоянна:

$$v = \arg \frac{dW}{dw} \equiv A.$$

Ее гармонически-сопряженная функция  $u = \ln \left| \frac{dW}{dw} \right|$ , в силу условий Коши-Римана, тоже постоянна внутри многоугольника:  $u \equiv B$ . Следовательно

$$\ln \frac{dW}{dw} = u + iv = B + iA = \text{const}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dW}{dw} = C.$$

Интегрирование этого соотношения дает

$$W = Cw + C_1. \quad (6.9)$$

Подробности этого доказательства см. в [5].

Таким образом, справедлива следующая

Теорема (Э.Б. Кристоффель, Г.А. Шварц):

Если функция  $W = f(z)$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на внутренность конечного  $n$ -угольника с углами  $\pi\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) при вершинах, причем известны точки вещественной оси  $a_k$  ( $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$ ), соответствующие вершинам этого  $n$ -угольника, то  $f(z)$  представляется интегралом

$$f(z) = C \int_{a_1}^z \prod_{k=1}^n (t - a_k)^{\alpha_k - 1} dt + C_1, \quad (6.10)$$

где  $C$  и  $C_1$  — некоторые комплексные константы.

**Видоизменения формулы Кристоффеля — Шварца**

1. Если образом вершины многоугольника  $A_n$  является бесконечно-удаленная точка  $z = \infty$ , то формула для функции, отображающей полуплоскость на  $n$ -угольник (6.10) принимает вид

$$f(z) = C \int_{a_1}^z \prod_{k=1}^{n-1} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} dt + C_1, \quad (6.11)$$

(исчезает множитель, соответствующий вершине  $A_n$ ).

2. Для функции, отображающей круг на многоугольник, теорема Кристоффеля – Шварца формулируется следующим образом:

Если функция  $W = f(z)$  реализует конформное отображение круга  $|z| < 1$  на внутренность конечного  $n$  – угольника с углами  $\pi\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) при вершинах, причем известны точки единичной окружности  $b_k = e^{i\varphi_k}$ , соответствующие вершинам этого  $n$  – угольника, то  $f(z)$  представляется интегралом

$$f(z) = C \int_{b_1}^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t}{b_k}\right)^{\alpha_k-1} dt + C_1, \quad (6.12)$$

где  $C$  и  $C_1$  – некоторые комплексные константы.

3. Формулы (6.10) – (6.12) распространяются и на случай бесконечных многоугольников, у которых одна или несколько вершин находятся в бесконечно удаленной точке.

#### Определение параметров интеграла Кристоффеля-Шварца

В формулу (6.10) входят два комплексных параметра  $C$  и  $C_1$  и  $n$  вещественных параметров  $\alpha_k$ . Теорема Кристоффеля-Шварца устанавливает лишь существование набора этих параметров, при которых функция (6.10) отображает полуплоскость на заданный многоугольник  $P$ , но не дает рецепта их нахождения. Определение параметров отображающей функции представляет главную трудность при решении обратной задачи Кристоффеля-Шварца.

Согласно теореме единственности конформного отображения (см. гл. I) отображающая функция определяется однозначно, если задать отображения трех граничных точек многоугольника. Поэтому образы трех вершин многоугольника можно задавать произвольно, сохраняя лишь порядок их следования. Если задать, например, числа  $a_1, a_2, a_3$ , расположенные в порядке возрастания, то остальные параметры в формуле (6.10) определяются однозначно.

Комплексная константа  $C_1$  в линейном преобразовании (6.9) определяет сдвиг многоугольника  $P$ , величины  $|C|$  и  $\arg C$  определяют соответственно коэффициент растяжения и угол поворота многоугольника  $P$  относительно многоугольника  $Q$ . Полагая в формуле (6.10)  $z = a_1$ , получим

$$C_1 = f(a_1) = A_1.$$

Величина  $\arg C$  определяется как угол наклона стороны  $[A_n, A_1]$  многоугольника  $P$  (поскольку соответствующая сторона многоугольника  $Q$  направлена горизонтально). В результате в формуле (6.10) остаются неизвестными  $n - 2$  вещественных констант:  $|C|$  и  $a_4, a_5, \dots, a_n$ .

При геометрическом построении  $n$ -угольника с заданными углами можно произвольно задавать длины  $n - 2$  его сторон (при заданных углах длины двух последних сторон определяются однозначно). Таким образом, для определения  $n - 2$  вещественных констант  $a_4, a_5, \dots, a_n$  и  $|C|$  имеется система из  $n - 2$  вещественных уравнений

$$|C| \int_{a_m}^{a_{m+1}} \left| \prod_{k=1}^n (t - a_k)^{\alpha_k - 1} \right| dt = l_m, \quad (6.13)$$

где  $m = 1, 2, \dots, n - 2$ .

Система (6.13) имеет единственное решение. Однако найти это решение аналитически, как правило, не удастся. В этих случаях применяется метод подбора параметров для получения нужной формы многоугольника.

## 6.4 Отображение внешности многоугольника

Пусть на плоскости  $W$  задана конечная замкнутая выпуклая ломаная  $\Gamma$  с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , занумерованными в порядке обхода ломаной *по часовой стрелке*. Пусть внешние углы этой ломаной равны соответственно  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ , причем

$$1 < \alpha_k < 2, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = n + 2.$$

Согласно теореме Римана, бесконечная область, расположенная вне ломаной  $\Gamma$ , может быть конформно отображена на полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ . Пусть образами вершин ломаной при таком отображении являются точки вещественной оси  $z = a_1, a_2, \dots, a_n$ , а образом бесконечно-удаленной точки  $W = \infty$  — точка  $z = \beta$  ( $\operatorname{Im} \beta > 0$ ). Функция  $W = f(z)$ , совершающая обратное отображение полуплоскости на внешность ломаной  $\Gamma$ , является аналитической в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  всюду, кроме точки  $z = \beta$ , в которой эта функция имеет полюс первого порядка. Согласно принципу симметрии, функция  $f(z)$

может быть аналитически продолжена через любой интервал вещественной оси  $(a_k, a_{k+1})$  в нижнюю полуплоскость, причем продолженная функция имеет полюс первого порядка в точке  $z = \bar{\beta}$ . Производная  $f'(z)$  имеет в точках  $z = \beta$  и  $z = \bar{\beta}$  полюсы второго порядка.

Построим функцию

$$H(z) = \frac{1}{(z - \beta)^2(z - \bar{\beta})^2} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1}. \quad (6.14)$$

Эта функция является многозначной с точками ветвления  $z = a_k$ . Мы будем рассматривать эту функцию в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , выделяя главную ее ветвь условиями  $0 < \arg(z - a_k) < \pi$ . Функция (6.14) аналитична в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  всюду, кроме точки  $z = \beta$ , в которой эта функция имеет полюс второго порядка. При  $z \rightarrow \infty$  функция (6.14) имеет порядок убывания

$$H(z) \sim \frac{C}{z^K}, \quad \text{где } K = -\sum_{k=1}^n \alpha_k + n + 4 = 2. \quad (6.15)$$

Рассмотрим далее функцию

$$\varphi(z) = \int_{a_1}^z H(\zeta) d\zeta. \quad (6.16)$$

В силу оценки (6.15) функция (6.16) имеет конечный предел при  $z \rightarrow \infty$  независимо от способа стремления  $z$  к  $\infty$ . Интеграл по контуру, составленному из верхней полуокружности  $|z| = R$  и ее диаметра (отрезка  $[-R, R]$ ) равен нулю. Таким образом, функция (6.16) однозначна и аналитична в верхней полуплоскости всюду, кроме точки  $z = \beta$ , в которой она имеет полюс первого порядка.

Обозначим через  $\gamma$  кривую, в которую отображает вещественную ось  $z = x$  функция

$$w = \varphi(x) = \int_{a_1}^x H(t) dt.$$

Величина  $\arg \varphi'(x) = \arg H(x)$ , представляющая угол наклона касательной к кривой  $\gamma$ , выражается так:

$$\arg H(x) = \sum_{k=1}^n \arg(x - a_k)^{\alpha_k - 1} - \arg X,$$

где  $X = (x - \beta)^2(x - \bar{\beta})^2$  — знаменатель функции (6.14). Функция  $X(x)$  вещественна и положительна, поэтому  $\arg X = 0$ . Функция

$$\arg \varphi'(x) = \sum_{k=1}^n \arg(x - a_k)^{\alpha_k - 1}$$

является кусочно-постоянной с разрывами в точках  $x = a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), поэтому кривая  $\gamma$  представляет замкнутую  $n$ -звенную ломаную. Приращение величины  $\arg \varphi'(x)$  при переходе через точку  $x = a_k$  равно  $\pi(1 - \alpha_k) < 0$ , т.е. вектор касательной к кривой  $\gamma$  поворачивается по часовой стрелке на угол  $\pi|1 - \alpha_k|$ . Ломаная  $\gamma$  обходится по часовой стрелке.

Согласно принципу соответствия границ, функция  $w = \varphi(z)$  конформно отображает верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на внешность ломаной  $\gamma$ . Так же, как в предыдущем разделе, доказывается, что ломаные  $\Gamma$  и  $\gamma$  геометрически подобны, поэтому отображение ломаной  $\gamma$  на ломаную  $\Gamma$  осуществляется линейным преобразованием:  $W = Cw + C_1$ . Окончательно отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на внешность ломаной  $\Gamma$  осуществляется функцией

$$W = C \int_{a_1}^z H(\zeta) d\zeta + C_1. \quad (6.17)$$

**Отображение внешности круга на внешность многоугольника**

Рассмотрим отображение внешности многоугольника на адекватную каноническую область – внешность круга. Для этого произведем в интеграле (6.17) дробно-линейное преобразование переменной интегрирования  $z$ , переводящее полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  во внешность круга  $|t| > 1$ , а точку  $z = \beta$  – в бесконечно-удаленную точку  $t = \infty$ :

$$t = \frac{z - \bar{\beta}}{z - \beta}, \quad z = \frac{t\beta - \bar{\beta}}{t - 1}, \quad dz = -\frac{\beta - \bar{\beta}}{(t - 1)^2} dt.$$

При этом точки вещественной оси  $z = a_k$  отображаются в точки единичной окружности

$$t = b_k = \frac{a_k - \bar{\beta}}{a_k - \beta},$$

разности  $z - a_k$  преобразуются в

$$z - a_k = \frac{\beta t - \bar{\beta}}{t - 1} - a_k = (\beta - a_k) \frac{t - b_k}{t - 1}.$$

Для остальных сомножителей получаем

$$z - \beta = \frac{\beta - \bar{\beta}}{t - 1}, \quad z - \bar{\beta} = (\beta - \bar{\beta}) \frac{t}{t - 1}.$$

Подынтегральное выражение в (6.17) принимает вид

$$H(z) dz = A \left( \frac{t-1}{t} \right)^2 \prod_{k=1}^n \left( \frac{t}{t-1} \right)^{\alpha_k-1} \left( 1 - \frac{b_k}{t} \right)^{\alpha_k-1} dt, \quad (6.18)$$

$$\text{где } A = -\frac{1}{(\beta - \bar{\beta})^3} \prod_{k=1}^n (\beta - a_k)^{\alpha_k-1}.$$

Суммарный показатель степени  $K$  у множителя  $(t/(t-1))^K$  равен нулю:

$$K = \sum_{k=1}^n \alpha_k - n - 2 = 0.$$

Окончательно функция, отображающая внешность круга  $|t| > 1$  на внешность многоугольника, принимает вид

$$W = \bar{C} \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau + C_1, \quad (6.19)$$

$$\text{где } G(t) = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{b_k}{t} \right)^{\alpha_k-1}, \quad \bar{C} = AC.$$

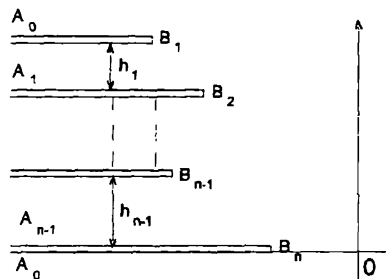
Здесь  $G(t)$  обозначает главную ветвь многозначной функции, аналитическую вне круга  $|t| > 1$  и удовлетворяющую условию  $G(\infty) = 1$ .

## 6.5 Многоугольники, ограниченные разрезами по лучам параллельных прямых

В тех случаях, когда граница односвязной многоугольной области состоит из параллельных лучей и, возможно, из одной или двух параллельных им прямых, интеграл Кристоффеля–Шварца вычисляется в элементарных функциях. При этом часть параметров в формуле Кристоффеля–Шварца выражается через геометрические характеристики области. Все рассматриваемые в настоящем разделе области представляют полосы с несколькими рукавами.

### 6.5.1 Плоскость с разрезами вдоль параллельных лучей, направленных в одну сторону

Пусть граница области  $G$  (на плоскости  $w$ ) состоит из  $n$  разрезов вдоль лучей, параллельных вещественной оси и направленных в сторону отрицательной вещественной полуоси (фиг. 6.2).



Фиг. 6.2. Разрезы вдоль сонаправленных лучей параллельных прямых

Через  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  обозначим расстояния между соседними разрезами, через  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — концы лучей (в порядке положительного обхода границы области), через  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  — точки границы области, лежащие в бесконечности. Предположим, что нижний разрез  $A_{n-1}B_nA_n$  лежит на вещественной оси.

Рассматриваемую область  $G$  можно отобразить, согласно теореме Римана, на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  так, чтобы точка  $A_0$  отобразилась в точку  $z = \infty$ . Пусть при этом точки  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  отобразятся в точки вещественной оси  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , точки  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — соответственно в точки  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Обратное отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на область  $G$  реализуется функцией (6.10)

$$w = \overline{C_1} \int_{z_0}^z h(\xi) d\xi + \overline{C_2},$$

где

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - a_k)}. \quad (6.20)$$

Дробь (6.20) является неправильной. Выделяя из нее целую часть и разлагая ее на простейшие дроби, имеем

$$h(\xi) = \xi + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\xi - a_k},$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  — вещественные коэффициенты.



Интеграл Кристоффеля–Шварца принимает вид

$$w = \overline{C}_1 \left[ \frac{z^2}{2} + \alpha_0 z + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \ln(z - a_k) \right] + \overline{C}_2. \quad (6.21)$$

Для того, чтобы функция (6.21) была вещественной при  $z = x > a_n$ , необходимо, чтобы коэффициенты  $\overline{C}_1$  и  $\overline{C}_2$  были вещественными.

При обходе точки  $z = a_k$  по малой полуокружности в верхней полуплоскости мнимая часть функции  $\ln(z - a_k)$  получает приращение  $-\pi$ . При этом приращение функции  $w$  должно быть равным  $-ih_k$ , следовательно  $\overline{C}_1 \alpha_k = h_k/\pi$ . Обозначим  $\overline{C}_1 \alpha_0 = B$ ,  $\overline{C}_1/2 = -A$ ,  $\overline{C}_2 = C$ . Окончательно формула (6.21) принимает вид

$$w = -Az^2 + Bz + C + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \ln(z - a_k). \quad (6.22)$$

Все параметры в формуле (6.22) вещественны, причем  $A > 0$ ,  $h_k > 0$ . Из параметров  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  два можно задавать произвольно. Остальные  $n - 3$  параметра и коэффициенты  $A, B, C$  определяются из  $n$  условий

$$w(b_k) = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $b_k$  — нули производной функции (6.22):

$$w' = -2Az + B + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{z - a_k} = 0.$$

Практически параметры  $a_k$  (в случае  $n > 3$ ) определяются подбором.

#### Пример 6.1.

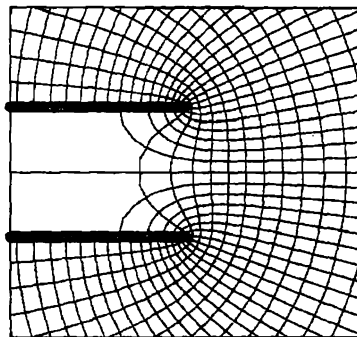
При  $n = 2$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $h = 2\pi$ ,  $C = 1 - i\pi$ ,  $a_1 = 0$  функция (6.22) имеет вид

$$w = -z^2 + 2 \ln z - i\pi + 1.$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , реализуемое этой функцией, представлено на фиг. 6.3.

При  $n = 2$  область, изображенная на фиг. 6.2, представляет криволинейную полосу. Конформное отображение адекватной ей канонической области (прямолинейной полосы  $0 < \text{Im } \xi < \pi$ ) на рассматриваемую область реализуется функцией

$$w = -Az^2 + Bz + C + \frac{h}{\pi} \ln z, \quad (6.23)$$



Фиг. 6.3. Обтекание двух параллельных полуплоскостей

где  $z = e^\xi$ .

При  $B = 0$  функция (6.23) отличается от функции Кирхгофа (5.29) лишь линейным преобразованием независимого переменного.

#### Пример 6.2.

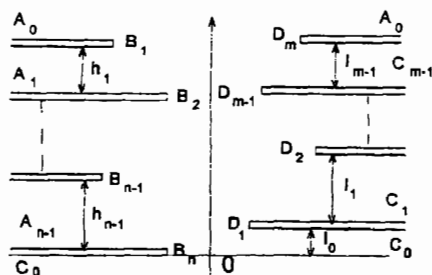
Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$ , реализуемое функцией (6.23) при  $A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = 1 - i\pi$ ,  $h = 2\pi$ , представлено в Атласе конформных отображений (каталог 4, область 9).

### 6.5.2 Плоскость с разрезами вдоль параллельных лучей, направленных в противоположные стороны

Пусть область  $G$  представляет бесконечную плоскость  $w$  с  $n + m$  разрезами вдоль лучей, параллельных вещественной оси, из которых  $n$  лучей направлены в сторону отрицательных значений  $x$ , а  $m$  лучей – в сторону положительных  $x$  (фиг. 6.4). Пусть разрез  $C_{m-1}D_mA_0$  лежит на вещественной оси.

Обозначим концы лучей через  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ;  $D_1, D_2, \dots, D_m$ , граничные точки в бесконечности (в порядке положительного обхода границы) – через  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ ;  $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$ .

Область  $G$  можно конформно отобразить на полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  так, чтобы точка  $A_0$  отобразилась в точку  $z = \infty$ . Пусть при этом точки  $A_k, B_k, C_j, D_j$  отобразятся соответственно в точки вещественной оси  $a_k, b_k, c_j, d_j$ . Интеграл Кристоффеля-Шварца для рассматриваемой



Фиг. 6.4. Разрезы вдоль параллельных лучей, направленных в разные стороны

области имеет вид

$$w(z) = \overline{C_1} \int_{x_0}^z h(\xi) d\xi + \overline{C_2},$$

где

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k) \prod_{j=1}^m (\xi - d_j)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - a_k) \prod_{j=1}^{m-1} (\xi - c_j)} \frac{1}{(\xi - c_0)^2}. \quad (6.24)$$

Дробь  $h(\xi)$  является неправильной. Выделяя из нее целую часть и разлагая на простейшие дроби, получим

$$h(\xi) = 1 + \frac{\alpha_0}{(\xi - c_0)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\xi - a_k} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\beta_j}{\xi - c_j},$$

где  $\alpha_0, \alpha_k, \beta_0, \beta_j$  — вещественные коэффициенты. Функция, отображающая полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на рассматриваемую область, имеет вид

$$w = \overline{C_1} \left[ z - \frac{\alpha_0}{z - c_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \ln(z - a_k) + \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \ln(z - c_j) \right] + \overline{C_2}.$$

Так как функция  $\ln(z - a_k)$  получает приращение  $-i\pi$  при обходе точки  $z = a_k$  по малой полуокружности сверху, то коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\alpha_k \overline{C_1} = \frac{h_k}{\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты  $\beta_j$ :  
 $\beta_j \overline{C_1} = -l_j/\pi$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ). Обозначая, наконец,  $\overline{C_1} \alpha_0 = -B$ ,  
 $\overline{C_1} = A$ ,  $\overline{C_2} = C$ , представим отображающую функцию  $w(z)$  в виде

$$w(z) = Az + \frac{B}{z - c_0} + C + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{m-1} l_j \ln(z - c_j). \quad (6.25)$$

Входящие сюда параметры  $A$ ,  $B$ ,  $h_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) и  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) должны быть положительными, коэффициенты  $l_0$  и  $C$  могут быть любыми вещественными числами. Вещественные параметры  $a_k$  и  $c_j$  составляют возрастающую последовательность

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < c_0 < c_1 < \dots < c_{m-1}.$$

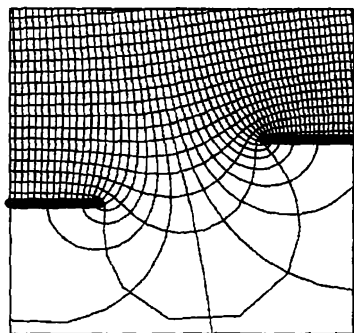
Два из этих параметров можно выбирать произвольно.

### Пример 6.3.

При  $n = 1$ ,  $m = 1$ ,  $c_0 = 0$  функция (6.25) имеет вид

$$w = Az + \frac{B}{z} + C - \frac{l_0}{\pi} \ln z. \quad (6.26)$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , реализуемое функцией (6.26) при  $A = B = 1$ ,  $l_0 = \pi/2$ ,  $C = i\pi/4$ , представлено на фиг. 6.5.



Фиг. 6.5. Обтекание щели между параллельными полуплоскостями

Как и в примерах 1 и 2, область, изображенная на фиг. 6.5, представляет криволинейную полосу. Отображение адекватной канонической

области – полосы  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$  на рассматриваемую область осуществляется функцией (6.26), где следует положить  $z = e^\xi$ .

#### Пример 6.4.

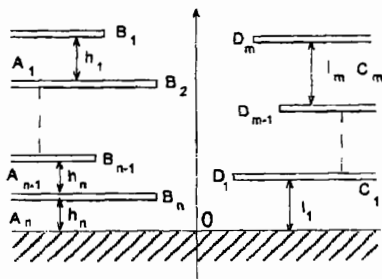
При  $z = e^\xi$ ,  $A = B = 1$ ,  $l_0 = -\pi$ ,  $C = -i\pi/2$  функция (6.26) принимает вид

$$w = 2 \operatorname{ch} \xi + \xi - \frac{i\pi}{2}.$$

Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$ , реализуемое этой функцией, приведено в Атласе конформных отображений (каталог 4, область 9). Другое решение рассматриваемой задачи приведено выше в параграфе 5.3.2.

#### 6.5.3 Полу плоскость с разрезами вдоль параллельных лучей

Пусть область  $G$  на плоскости  $w$  представляет полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ , на которой проведено  $n$  разрезов вдоль лучей, идущих параллельно вещественной оси из точек  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) влево и  $m$  разрезов, идущих из точек  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) вправо (фиг. 6.6).



Фиг. 6.6. Полу плоскость с разрезами вдоль параллельных лучей

Обозначим граничные точки, лежащие в бесконечности, через  $A_0$ ,  $A_1, \dots, A_n$ ;  $C_1, C_2, \dots, C_m$  (в порядке положительного обхода границы). Рассматриваемую область можно конформно отобразить на полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  так, чтобы точка  $A_0$  отобразилась в точку  $z = \infty$ . Пусть при этом точки  $A_k, B_k, C_j, D_j$  отобразятся в точки вещественной оси  $a_k, b_k, c_j, d_j$  соответственно. Обратное отображение полуплоскости

$\operatorname{Im} z > 0$  на рассматриваемую многоугольную область осуществляется функцией (6.10), в которой

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k) \prod_{j=1}^m (\xi - d_j)}{\prod_{k=1}^n (\xi - a_k) \prod_{j=1}^m (\xi - c_j)}. \quad (6.27)$$

Выделяя из дроби  $h(\xi)$  целую часть и разлагая ее на простейшие дроби, имеем

$$h(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\xi - a_k} + \sum_{j=0}^m \frac{\beta_j}{\xi - c_j},$$

где  $\alpha_k, \beta_j$  — вещественные коэффициенты.

Интеграл Кристоффеля-Шварца имеет вид

$$w = A \left[ z + \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(z - a_k) + \sum_{j=0}^m \beta_j \ln(z - c_j) \right] + C.$$

Функции  $\ln(z - a_k)$  и  $\ln(z - c_k)$  получают приращение  $-i\pi$  при обходе точек  $z = a_k$  и  $z = c_k$  по малым полуокружностям. Отсюда определяем

$$\alpha_k A = \frac{h_k}{\pi}, \quad \beta_j C = -\frac{l_j}{\pi}.$$

Отображающая функция имеет вид

$$w = Az + C + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n h_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m l_j \ln(z - c_j). \quad (6.28)$$

Коэффициенты  $A, h_k, l_j$  в формуле (6.28) положительны. Коэффициент  $C$  удовлетворяет условию  $\operatorname{Im} C = \sum l_j$ . Параметры  $a_k$  и  $c_j$  удовлетворяют условиям

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < c_1 < c_2 < \dots < c_m.$$

Два из этих параметров можно задавать произвольно.

#### Пример 6.5.

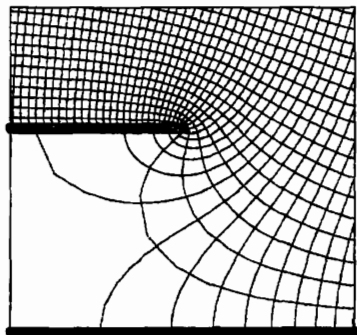
В простейшем случае ( $n = 1, m = 0$ ) область  $G$  представляет полуплоскость с одним разрезом. В этом случае формула (6.28) имеет вид

$$w = Az + \frac{h}{\pi} \ln z + C. \quad (6.29)$$

Заменой переменной  $\pi Az/h = e^\xi$  эта функция превращается в функцию Кирхгофа (5.29)

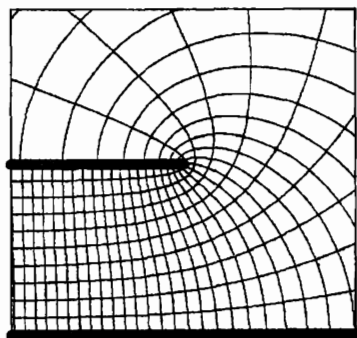
$$w = \frac{h}{\pi}(\xi + e^\xi) + \bar{C}. \quad (6.30)$$

На фиг. 6.7 приведено отображение декартовой сети в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , осуществляемое функцией (6.29) при  $A = 1$ ,  $h = \pi$ ,  $C = 1$ .



Фиг. 6.7. Отображение полуплоскости на полуплоскость с разрезом

На фиг. 6.8 приведено отображение декартовой сети в полосе  $0 < \text{Im } \xi < \pi$ , реализуемое функцией (6.30) при  $h = \pi$ ,  $\bar{C} = 1$  (ср. фиг. 5.20).



Фиг. 6.8. Отображение полосы на полуплоскость с разрезом

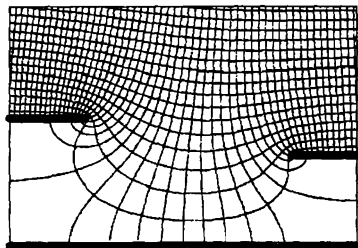
В следующих примерах рассматриваются полосы с тремя рукавами, для которых  $n + m = 2$ .

**Пример 6.6.**

При  $n = 1, m = 1$  можно положить  $a_1 = -1, c_1 = 1$  в формуле (6.28). Функция, отображающая полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на рассматриваемую область, принимает вид

$$w = Az + C + \frac{h}{\pi} \ln(z+1) - \frac{l}{\pi} \ln(z-1). \quad (6.31)$$

Отображение декартовой сети в верхней полуплоскости, реализуемое функцией (6.31) при  $h = 1.4\pi, l = \pi, A = 1, C = 0$ , представлено на фиг. 6.9.



Фиг. 6.9. Отображение полуплоскости на полуплоскость с двумя разрезами

Другое отображение рассматриваемой области можно получить, построив отображение полосы  $0 < \text{Im } \xi < \pi$  на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , при котором точки  $\xi = \pm\infty$  отображаются в точки  $z = \pm 1$ . Такое отображение осуществляется функцией  $z = \text{th}(\xi/2)$ .

Особенно простой вид функция (6.31) принимает при  $h = l = \pi, C = i\pi$ :

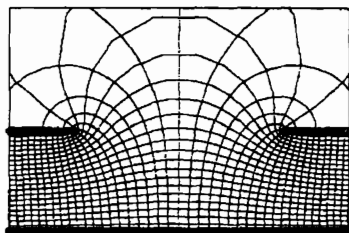
$$w = Az + \ln \frac{1+z}{1-z} = Az + 2 \text{arth } z.$$

Если здесь подставить  $z = \text{th}(\xi/2)$ , то функция примет вид

$$w = A \text{th}(\xi/2) + \xi. \quad (6.32)$$

При  $A > 0$  функция (6.32) отображает полосу  $0 < \text{Im } \xi < \pi$  на полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  с двумя разрезами вдоль симметричных лучей (фиг. 6.10, ср. также фиг. 5.22).





Фиг. 6.10. Отображение полосы на полуплоскость с двумя разрезами вдоль противоположенных лучей

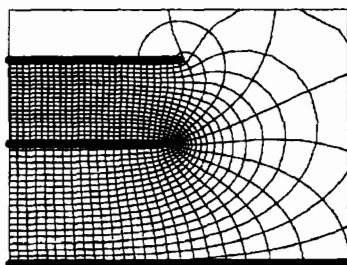
Попутно отметим, что при  $A = -1$  функция (6.32) отображает полосу  $-\pi/2 < \operatorname{Im} \xi < \pi/2$  на область между двумя трактрисами (см. параграф 5.2.6).

#### Пример 6.7.

При  $n = 2$ ,  $m = 0$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $C = -ih_2$  функция (6.32) принимает вид

$$w = Az + \frac{h_1}{\pi} \ln(1+z) + \frac{h_2}{\pi} \ln(1-z). \quad (6.33)$$

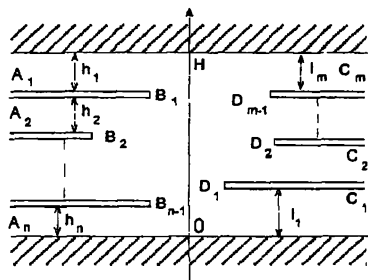
Полагая здесь  $z = \operatorname{th}(\xi/2)$ , получим функцию, отображающую полосу  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$  на полосу с тремя рукавами. Отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$ , реализуемое функцией (6.33) при  $A = 0.9$ ,  $h_1 = \pi$ ,  $h_2 = 1.5\pi$ , представлено на фиг. 6.11.



Фиг. 6.11. Отображение полосы на полуплоскость с двумя разрезами вдоль сонаправленных лучей

## 6.5.4 Полоса с разрезами вдоль лучей

Пусть область  $G$  представляет горизонтальную полосу  $0 < \operatorname{Im} w < H$  с  $n + m - 2$  разрезами вдоль лучей, идущих из точек  $B_k$  влево ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) и из точек  $D_j$  вправо ( $j = 1, 2, \dots, m - 1$ ) (фиг. 6.12). Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n; C_1, C_2, \dots, C_m$  граничные точки, ле-



Фиг. 6.12. Полоса с разрезами вдоль лучей

жащие в бесконечности, занумерованные в порядке положительного обхода границы области  $G$ . Область  $G$  можно конформно отобразить на полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ . Пусть при этом граничные точки  $A_k, B_k, C_j, D_j$  отображаются в точки вещественной оси  $a_k, b_k, c_j, d_j$ . Предположим, что ни одна из точек  $a_k, b_k, c_j, d_j$  не является бесконечно удаленной. Функция, реализующая обратное отображение полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на область  $G$ , выражается по формуле Кристоффеля-Шварца

$$w = \overline{C_1} \int_{z_0}^z h(\xi) d\xi + \overline{C_2},$$

где

$$h(\xi) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (\xi - b_k) \prod_{j=1}^{m-1} (\xi - d_j)}{\prod_{k=1}^n (\xi - a_k) \prod_{j=1}^m (\xi - c_j)}.$$

Правильная дробь  $h(\xi)$  разлагается на простейшие дроби

$$h(\xi) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\xi - a_k} + \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j}{\xi - c_j},$$

где  $\alpha_k, \beta_j$  - вещественные коэффициенты. После интегрирования получается

$$w = \overline{C}_1 \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(z - a_k) + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(z - c_j) \right] + \overline{C}_2.$$

Приращение функции  $w(z)$  при обходе точек  $a_k$  и  $c_j$  должны равняться  $-ih_k$  и  $il_j$  соответственно. Так как приращение функции  $\ln(z - a_k)$  при обходе точки  $a_k$  по полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, равно  $-i\pi$ , то

$$\overline{C}_1 \alpha_k = \frac{h_k}{\pi}, \quad \overline{C}_1 \beta_j = -\frac{l_j}{\pi}.$$

Таким образом, функция, отображающая полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на область  $G$ , имеет вид

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n h_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m l_j \ln(z - c_j), \quad (6.34)$$

где  $\text{Im } \overline{C}_2 = H = \sum l_j$ . Если один из параметров  $a_k$  или  $c_j$  равен  $\infty$ , то соответствующее ему слагаемое в формуле (6.34) опускается.

#### Пример 6.8.

При  $n = 2, m = 1$  область  $G$  представляет полосу  $0 < \text{Im } w < H$  с разрезом вдоль луча. Полагая в формуле (6.34)  $a_1 = -1, a_2 = 1, c_1 = \infty, \overline{C}_2 = -ih_2; z = \text{th}(\xi/2)$ , получим функцию, отображающую полосу  $0 < \text{Im } \xi < \pi$  на рассматриваемую криволинейную полосу:

$$\begin{aligned} z &= \text{th}(\xi/2), \\ w &= \frac{h_1}{\pi} \ln(1+z) + \frac{h_2}{\pi} \ln(1-z). \end{aligned} \quad (6.35)$$

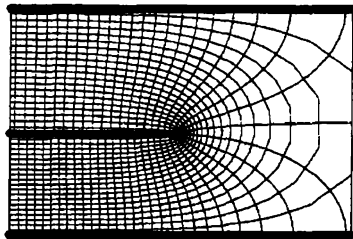
Отображение декартовой сети в полосе  $0 < \text{Im } \xi < \pi$ , реализованное функцией (6.35) при  $h_1 = \pi, h_2 = 0.8\pi$ , представлено на фиг. 6.13.

#### Упражнения.

1. Отображение полосы  $0 < \text{Im } z < \pi$  на плоскость с тремя разрезами вдоль сонаправленных лучей, параллельных вещественной оси, осуществляется композицией функций

$$t = \text{th}(z/2), \quad (6.36)$$

$$w = \ln(1+t) + \ln(1-t) - At^2. \quad (6.37)$$



Фиг. 6.13. Отображение полосы на полосу с разрезом

Функция (6.37) представляет частный случай функции (6.22) при  $n = 3$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $h_1 = h_2 = \pi$ ,  $B = 0$ ,  $C = -i\pi$ . Постройте отображение декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.36–6.37) при  $A = 0.1, 0.2785, 0.5$ .

### 2. Функция

$$w(t) = t + 1/t + 2\ln(1+t) - \ln t \quad (6.38)$$

представляет частный случай функции (6.25) при  $A = B = 1$ ,  $C = 0$ ,  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $h_1 = 2\pi$ ,  $l_0 = \pi$ ,  $a_1 = -1$ ,  $c_0 = 0$ . Постройте отображение декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.38), где  $t = e^z$ .

### 3. Функция

$$w = A/(t^2 - 1) + \ln t - i\pi/2,$$

где  $t = e^z$ ,  $A > 0$  отображает полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на плоскость  $w$  с четырьмя разрезами вдоль лучей, параллельных вещественной оси и расположенных симметрично относительно координатных осей. Постройте отображение декартовой сети, осуществляемое этой функцией.

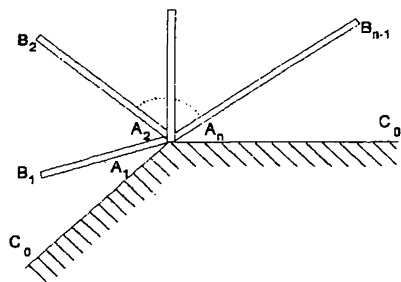
## 6.6 Звездообразные многоугольные области

Звездообразными разрезами мы будем называть разрезы, состоящие из отрезков и (или) лучей прямых, проходящих через одну точку плоскости, в качестве которой мы будем рассматривать начало координат. Односвязную область, ограниченную звездообразным разрезом, мы будем называть звездообразной многоугольной областью или короче – *звездообразным многоугольником*. Аналитическая функция, отобра-

жающая полуплоскость или круг на звездообразный многоугольник, является элементарной, причем она может быть найдена без интегрирования по формуле Кристоффеля-Шварца.

### 6.6.1 Угловые звездообразные области

Пусть граница угловой звездообразной области плоскости  $w$  состоит из двух лучей и  $n - 1$  отрезков, выходящих из начала координат (фиг. 6.14).



Фиг. 6.14. Звездообразная угловая область

Начало координат является  $n$ -кратной граничной точкой. Обозначим вершины многоугольной области в начале координат (в порядке положительного обхода границы) через  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , а соответствующие углы через  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ . Бесконечно удаленная точка является однократной граничной точкой, угол в бесконечно удаленной точке  $C_0$  равен

$$-\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Обозначим концы отрезков через  $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ , а длины отрезков  $A_k B_k$  через  $l_k$  ( $l_k = |A_k B_k|$ ). Сторону  $A_n C_0$  направим вдоль положительной вещественной полуоси.

Рассматриваемую угловую звездообразную область можно отобразить конформно на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  так, чтобы точка  $C_0$  отобразилась в точку  $z = \infty$ . Пусть при этом точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  отобразятся в точки вещественной оси  $a_1, a_2, \dots, a_n$  соответственно. Обратное отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на угловую звездообразную

область осуществляется функцией

$$f(z) = C \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}. \quad (6.39)$$

Приведем схему доказательства формулы (6.39).

Отображающая функция  $f(z)$ , согласно принципу симметрии, может быть аналитически продолжена через какой-либо отрезок  $(a_k, a_{k+1})$  в нижнюю полуплоскость, а затем через другой отрезок  $(a_m, a_{m+1})$  снова в верхнюю полуплоскость. Аналитически продолженная функция отображает рассматриваемый звездообразный многоугольник на точно такой же многоугольник, повернутый относительно начала координат на некоторый угол. Следовательно, аналитическое продолжение функции  $f(z)$  имеет вид  $Cf(z)$ , где  $|C| = 1$ .

Функция  $f'(z)/f(z)$  (логарифмическая производная функции  $f(z)$ ) при этом продолжении не изменяется, т.е. она является однозначной функцией с особенностями в точках  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Для функции  $f(z)$  точки  $a_k$  являются точками ветвления, в которых функция ведет себя как  $f(z) \sim A(z - a_k)^{\alpha_k}$ . Ее логарифмическая производная ведет себя в этих точках как  $\alpha_k/(z - a_k)$ , т.е. функция  $f'(z)/f(z)$  имеет в точках  $a_1, a_2, \dots, a_n$  полюсы первого порядка с вычетами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Образует разность функции  $f'(z)/f(z)$  и главных частей рядов Лорана в ее полюсах:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} = G(z).$$

Функция  $G(z)$  является аналитической на всей комплексной плоскости, она стремится к 0 при  $z \rightarrow \infty$ . По теореме Лиувилля функция  $G(z)$  тождественно равна 0, откуда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k}.$$

Интегрирование этого равенства приводит к формуле (6.39).

Точки  $b_k$  (прообразы концов лучей звезды  $B_k$ ) представляют нули производной функции  $f(z)$ , они определяются как корни уравнения

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} = 0. \quad (6.40)$$

Уравнение (6.40) имеет ровно  $n - 1$  вещественных корней, причем

$$a_k < b_k < a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1).$$

При отыскании отображения заданной области параметры  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $C$  являются неизвестными. Для их определения имеется  $n - 1$  условие

$$|f(b_k)| = l_k \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (6.41)$$

Два из параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$  можно задать произвольно; остальные параметры (и коэффициент  $C$ ) определяются из условий (6.41).

**Пример 6.9.**

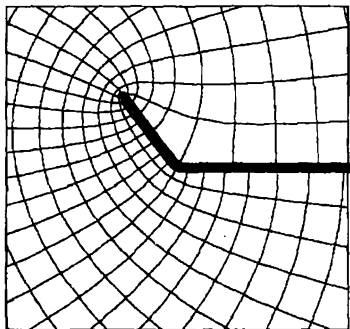
Для звездообразной угловой области с углами в начале координат  $\pi\theta$  and  $2\pi - \pi\theta$  ( $n = 2$ ) можно положить

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad \alpha_1 = 2 - \theta, \quad \alpha_2 = \theta.$$

Формула (6.39) принимает вид

$$w = Cz^{2-\theta}(z-1)^\theta. \quad (6.42)$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , реализуемое функцией (6.42) при  $\theta = 0.7$ , приведено на фиг. 6.15.

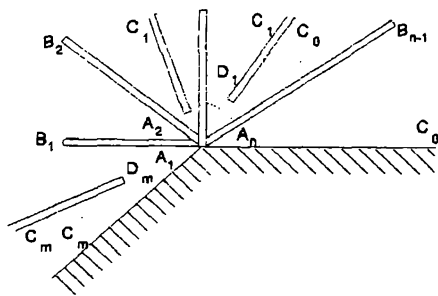


Фиг. 6.15. Электрическое поле заряженной полуплоскости с козырьком

### 6.6.2 Звездообразные полосы, для которых начало координат является граничной точкой

Рассмотрим звездообразную многоугольную полосу, для которой начало координат является  $n$ -кратной граничной точкой, а бесконечно удаленная точка  $m+1$ -кратной граничной точкой (фиг. 6.16).

Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n$  граничные точки звездообразной области в начале координат, соответствующие углы  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$ . Далее обозначим через  $C_0, C_1, \dots, C_m$  граничные точки в бесконечности (тоже в порядке положительного обхода границы области), а соответствующие углы — через  $-\pi\gamma_0, -\pi\gamma_1, \dots, -\pi\gamma_m$ . Углы звездообразной



Фиг. 6.16. Звездообразная полоса с  $m+1$  рукавами (начало координат – граничная точка)

полосы удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \sum_{j=0}^m \gamma_j.$$

Сторону  $A_n C_0$  направим вдоль положительной вещественной полуоси.

Рассматриваемую полосу можно конформно отобразить на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  так, чтобы точка  $C_0$  отобразилась в бесконечно удаленную точку. Пусть при этом точки  $C_1, C_2, \dots, C_m$  отобразятся в точки вещественной оси  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , а точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  соответственно в точки  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Очевидно, что точки  $c_j$  и  $a_k$  будут расположены в таком порядке:

$$c_1 < c_2 < \dots < c_m < a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Функция, реализующая обратное конформное отображение полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  на рассматриваемую звездообразную полосу, имеет вид

$$w = C \frac{\prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}}{\prod_{j=1}^m (z - c_j)^{\gamma_j}}, \quad (6.43)$$

где  $C > 0$ .

Доказательство формулы (6.43) проводится по той же схеме, что и доказательство формулы (6.39) предыдущего параграфа. Сначала доказывается, что логарифмическая производная отображающей функции  $f'(z)/f(z)$  однозначна на всей комплексной плоскости и имеет в точках  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) полюсы первого порядка с вычетами  $\alpha_k$  и  $-\gamma_j$  соответственно. Далее рассматривается разность функции  $f'(z)/f(z)$  и суммы главных частей рядов Лорана в ее



особых точках:

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{z - c_j}.$$

Функция  $G(z)$  аналитична на всей комплексной плоскости  $z$  и стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ . По теореме Ляувилля она тождественно равна нулю, откуда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{z - c_j}.$$

Интегрирование последнего равенства приводит к формуле (6.43).

При решении задачи об отображении полуплоскости на заданный многоугольник параметры  $a_k$ ,  $c_j$  неизвестны. Два из них можно задавать произвольно, а остальные параметры и коэффициент  $C$  (всего  $n + m - 1$  параметр) находятся из системы  $n + m - 1$  уравнений, определяющих положение точек  $B_1, \dots, B_{n-1}$ ;  $D_1, \dots, D_m$  (фиг. 6.16). На практике вместо решения сложной системы уравнений используют метод подбора параметров для получения нужной формы области.

Особенно важным является случай полосы с двумя рукавами ( $m = 1$ ). Такие полосы мы будем отображать на адекватную каноническую область — полосу  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$  — таким образом, чтобы граничные точки  $C_1$  и  $C_0$  звездообразной полосы отображались в точки  $\xi = -\infty$  и  $\xi = \infty$  соответственно. Это достигается посредством преобразования  $\xi = \ln(z - c_1)$ . Обратное отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} \xi < \pi$  на звездообразную полосу реализуется композицией функций

$$\begin{aligned} z &= c_1 + e^\xi, \\ w &= \frac{C}{(z - c_1)^{\gamma_1}} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

### Пример 6.10.

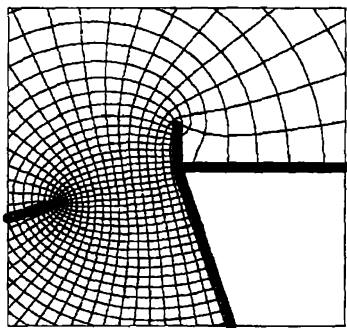
На фиг. 6.17 представлено отображение декартовой сети в полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией

$$w = \frac{(z_1 - 1)^{\alpha_1} (z_1 - p)^{\alpha_2}}{z_1^\gamma}$$

при  $\alpha_1 = 1.1$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $p = 5$ ,  $z_1 = e^z$ .

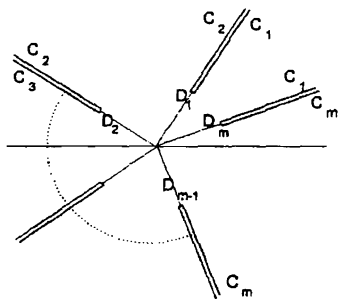
### 6.6.3 Звездообразные многоугольные полосы, для которых начало координат является внутренней точкой

Пусть граница звездообразной области представляет  $m$  разрезов вдоль прямолинейных лучей, продолжение которых проходит через начало



Фиг. 6.17. Поток в звездообразной полосе (пример 6.10)

координат. Точка  $w = 0$  является для такой области внутренней точкой, а бесконечность  $m$ -кратной граничной точкой. Обозначим граничные точки в бесконечности через  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , а углы в этих точках — соответственно через  $-\pi\gamma_1, -\pi\gamma_2, \dots, -\pi\gamma_m$  (все  $\gamma_j > 0$ ,  $\sum_{j=1}^m \gamma_j = 2$ ) (фиг. 6.18).

Фиг. 6.18. Звездообразная полоса с  $m$  рукавами (начало координат — внутренняя точка)

Рассмотрим конформное отображение данной звездообразной полосы с  $m$  рукавами на единичный круг  $|z| < 1$ , при котором точка  $w = 0$  отображается в центр круга. Пусть при этом точки  $C_1, C_2, \dots, C_m$  отобразятся в точки единичной окружности  $c_1 = e^{i\varphi_1}$ ,

$c_2 = e^{i\varphi_2}, \dots, c_m = e^{i\varphi_m}$ . Функция, реализующая обратное отображение единичного круга на рассматриваемую звездообразную область, имеет вид

$$w = \overline{C} z \prod_{j=1}^m (z - c_j)^{-\gamma_j}, \quad (6.44)$$

где  $\overline{C}$  — некоторая константа.

Доказательство формулы (6.44) проводится по той же схеме, которая использовалась в двух предыдущих параграфах.

Функция  $w = f(z)$ , отображающая круг  $|z| < 1$  на рассматриваемую звездообразную область, имеет нуль первого порядка в точке  $z = 0$  и особенности вида  $B_j(z - c_j)^{-\gamma_j}$  в точках  $z = c_j$ . Ее логарифмическая производная  $f'(z)/f(z)$  однозначна на всей комплексной плоскости и имеет в точке  $z = 0$  особенность вида  $1/z$ , а в точках  $z = c_j$  — особенности вида  $-\gamma_j/(z - c_j)$ . Разность функции  $f'(z)/f(z)$  и ее главных частей рядов Лорана в точках  $z = 0$  и  $z = c_j$

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{z - c_j}$$

является аналитической на всей комплексной плоскости функцией, стремящейся к нулю при  $z \rightarrow \infty$ . По теореме Лиувилля  $G(z) \equiv 0$ , откуда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{z - c_j}.$$

Интегрирование последнего равенства приводит к формуле (6.44).

Функция (6.44) является многозначной, и при выделении главных ветвей ее сомножителей появляются разрывы в точках некоторых разрезов, лежащих внутри круга. Для того, чтобы избавиться от этих разрывов, следует представить отображающую функцию в виде

$$w = Cz \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{z}{c_j}\right)^{-\gamma_j}. \quad (6.45)$$

При отыскании отображения единичного круга на заданную звездообразную область параметры  $c_1, c_2, \dots, c_m$  неизвестны. Их них только один можно задавать произвольно (например, можно положить  $c_1 = 1$ ).

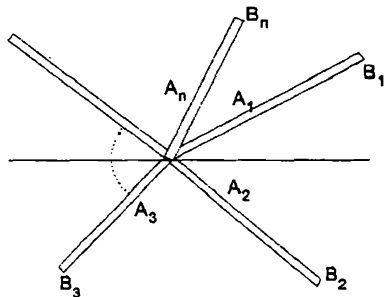
Частным случаем формулы (6.45) является формула (5.17). Она получается, если в (6.45) положить

$$\gamma_j = 2\pi/m, \quad c_j = e^{i\pi(2j+1)/m}, \quad C = 2^{2/m},$$

где  $j = 1, 2, \dots, m$ .

## 6.6.4 Внешности конечных звездообразных разрезов

Пусть бесконечная звездообразная область представляет внешность звезды, состоящей из  $n$  отрезков, выходящих из точки  $w = 0$  (фиг. 6.19). Обозначим вершины в начале координат (в порядке положитель-



Фиг. 6.19. Звездообразный разрез из  $n$  отрезков

ного обхода границы бесконечной области) через  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , а углы в этих вершинах через  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_n$  соответственно ( $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$ ).

Рассматриваемую внешность звездообразного разреза можно конформно отобразить на адекватную каноническую область (внешность единичного круга  $|z| > 1$ ) так, чтобы точка  $w = \infty$  отобразилась в точку  $z = \infty$ . Пусть при этом точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  отобразятся в точки единичной окружности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  соответственно.

Функция, совершающая обратное отображение внешности единичного круга на внешность звездообразного разреза, имеет вид

$$w = \frac{C}{z} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k}. \quad (6.46)$$

Для того, чтобы выделить ветвь этой многозначной функции, непрерывную вне круга  $|z| > 1$ , выражение (6.46) следует представить в виде

$$w = Cz \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_k}{z}\right)^{\alpha_k}. \quad (6.47)$$

Формулу (6.47) можно получить из (6.45) инверсиями по  $z$  и  $w$ .

При отыскании отображения внешности круга на заданный звездообразный многоугольник параметры  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $C$  неизвестны.

Один из этих параметров можно задать произвольно, например, положив  $a_1 = 1$ . Остальные параметры  $a_k = e^{i\varphi_k}$  требуется определить (или подобрать) так, чтобы получить требуемый звездообразный разрез.

Частным случаем формулы (6.47) является формула (5.16) из параграфа 5.2.4. Она получается, если в формуле (6.47) положить

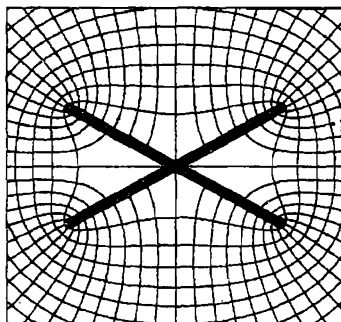
$$\alpha_k = 2\pi/n, \quad a_k = e^{i\pi(2k+1)/n}, \quad C = 2^{-2/n}.$$

### Пример 6.11.

Рассмотрим звездообразный разрез, состоящий из четырех отрезков, выходящих из начала координат и расположенных симметрично относительно координатных осей. Пусть углы между отрезками равны  $\pi r$ ,  $\pi(1-r)$ ,  $\pi r$ ,  $\pi(1-r)$ . В качестве точек  $a_k$  на единичной окружности естественно взять симметричные точки  $1, -i, -1, i$ . По формуле (6.47) имеем

$$w = \frac{C}{z} (z-1)^p (z+i)^{1-p} (z+1)^p (z-i)^{1-p} = C \left( z + \frac{1}{z} \right) \left( \frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^p.$$

Отображение внешности круга  $|z| > 1$ , реализуемое этой функцией при  $p = 1/3$ , представлено на фиг. 6.20.



Фиг. 6.20. Отображение симметричного звездообразного разреза (пример 6.11)

## Упражнения.

1. Постройте отображения декартовой сети верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , реализуемое функцией

$$w = i(a^2 - z^2)^p(1 - z^2)^{1/2-p}$$

при  $a = 2$ ,  $p = 0.3$ . Исследуйте экспериментально, как будет изменяться отношение длин разрезов при изменении параметра  $a$  ( $a > 1$ ).

2. Для звездообразной области, ограниченной четырьмя лучами, симметричными относительно координатных осей, функция (6.45) после подстановки

$$\begin{aligned} c_1 = 1, \quad c_2 = i, \quad c_3 = -1, \quad c_4 = -i; \\ \gamma_1 = p, \quad \gamma_2 = 1 - p, \quad \gamma_3 = p, \quad \gamma_4 = 1 - p \end{aligned}$$

принимает вид

$$w = \frac{Cz}{(1 - z^2)^p(1 + z^2)^{1-p}}. \quad (6.48)$$

Постройте отображение единичного круга, реализуемое функцией (6.48) при  $p = 0.6$ .

3. Постройте отображение декартовой сети в полосе  $-\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2$ , реализуемое функцией

$$w = \sin z (\cos z)^{-p} \quad (6.49)$$

при  $p = 0.6$ .

*Примечание.* Функция (6.49) получается из (6.48), если в ней заменить  $z$  на  $\text{tg}(z/2)$  и положить  $C = 2$ .

## 6.7 Отображения треугольных областей

В соответствии с общей классификацией все треугольные области можно разбить на четыре типа:

1. конечные треугольники,
2. треугольные угловые области, для которых бесконечно удаленная точка является однократной граничной точкой,
3. треугольные полосы, для которых точка  $z = \infty$  является двукратной граничной точкой,

## 4. внешности треугольников.

Пусть  $A_1, A_2, A_3$  – вершины треугольной области, занумерованные в порядке положительного обхода границы области,  $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$  – величины углов в точках  $A_1, A_2, A_3$  соответственно. Хотя бы одна из точек  $A_k$  является конечной, предположим, что конечной точкой является  $A_1$ , следовательно,  $\alpha > 0$ .

Для отображения конечных и бесконечных треугольников (типа 1, 2, 3) справедливы формулы (6.10), (6.11). Воспользовавшись свободой выбора двух параметров в формуле (6.11), положим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \infty.$$

Формула (6.11) принимает вид

$$w = C_1 \int_0^z \xi^{\alpha-1} (\xi - 1)^{\beta-1} d\xi + C_2. \quad (6.50)$$

Выражение  $\xi^{\alpha-1} (\xi - 1)^{\beta-1} d\xi$  называется *биномиальным дифференциалом*. Русским математиком П.Л. Чебышевым доказана следующая теорема о биномиальных дифференциалах:<sup>1</sup>

Теорема Чебышева. Если  $\alpha$  и  $\beta$  – рациональные числа, то интеграл (6.50) выражается через элементарные функции только тогда, когда либо  $\alpha$ , либо  $\beta$ , либо  $\alpha + \beta$  является целым числом.

К теореме П.Л. Чебышева мы сделаем следующее дополнение:

Интеграл (6.50) выражается в элементарных функциях еще и тогда, когда один из параметров  $\alpha$  или  $\beta$  является натуральным, другой – иррациональным числом.

Угол многоугольной области, кратный  $\pi$ , мы будем называть *целочисленным*. Углы вида  $\pi p/q$  ( $p, q$  – целые числа) назовем *рациональными*.

Так как углы многоугольной области удовлетворяют условию  $-2 \leq \alpha_k \leq 2$ , то целочисленный угол может иметь значение  $2\pi$  (в конечной точке) или  $0, -\pi$  или  $-2\pi$  (в бесконечно удаленной точке). Углы конечного или бесконечного треугольника (типов 1–3) удовлетворяют условию  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , откуда  $\gamma = 1 - (\alpha + \beta)$ . Теореме Чебышева и дополнение к ней можно переформулировать для треугольной области так:

<sup>1</sup>П.Л. Чебышев рассматривал биномиальный дифференциал более общего вида  $x^m(ax^n - b)^p dx$ , который сводится к рассматриваемому случаю заменой  $z = ax^n/b$ ,  $\alpha = (m+1)/n$ ,  $\beta = p+1$ .

Интеграл Кристоффеля-Шварца (6.50) выражается через элементарные функции только тогда, когда хотя бы один из углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  является целочисленным. При этом если целочисленный угол равен  $2\pi$ , то другие углы могут быть любыми вещественными числами, если же целочисленный угол равен  $0$ ,  $-\pi$  или  $-2\pi$ , то другие углы должны быть вида  $\pi r/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа. Теорема Чебышева и дополнение к ней позволяют рассмотреть все возможные случаи, в которых интеграл (6.50) выражается в элементарных функциях.

Прежде всего отметим наиболее простой случай, когда все углы треугольной области являются целочисленными. Это возможно только при одном сочетании углов:  $(2\pi, 0, -\pi)$ . В этом случае область представляет полуплоскость с разрезом вдоль луча, параллельного краю полуплоскости. Конформное отображение такой области было рассмотрено выше в разделе 6.5.

### 6.7.1 Конечные треугольники

Углы конечных треугольников удовлетворяют условиям  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Условиям теоремы Чебышева они не удовлетворяют, следовательно, полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  не может быть конформно отображена на конечный треугольник с помощью элементарных функций.

Для нахождения параметров неэлементарной функции, определяемой интегралом Кристоффеля-Шварца, поместим вершины треугольника в точки  $w_1 = 0$  и  $w_2 = h$ . Так как  $w(0) = 0$ , то константа  $C_2$  в формуле (6.50) обращается в 0.

Преобразуя выражение  $C_1(\xi - 1)^{\beta-1}$  в  $C(1 - \xi)^{\beta-1}$  (где  $C = C_1 e^{i\pi(\beta-1)}$ ) представим отображающую функцию в виде

$$w = C \int_0^z \xi^{\alpha-1} (1 - \xi)^{\beta-1} d\xi. \quad (6.51)$$

Функция  $B_z(\alpha, \beta) = \int_0^z \xi^{\alpha-1} (1 - \xi)^{\beta-1} d\xi$  называется *неполной бета-функцией*. Она является неэлементарной функцией, аналитической в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ . Полагая в равенстве (6.51)  $z = 1$  и учитывая, что  $w(1) = h$ , найдем значение константы  $C$ :

$$C = \frac{h}{B(\alpha, \beta)},$$

где  $B(\alpha, \beta) = B_1(\alpha, \beta) = \int_0^1 \xi^{\alpha-1} (1 - \xi)^{\beta-1} d\xi$  — обычная бета-функция.



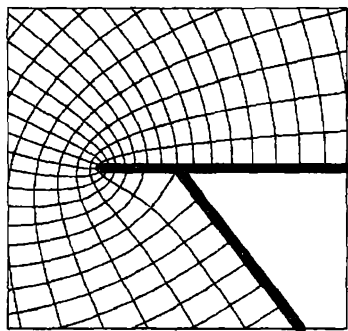
### 6.7.2 Угловые треугольные области

В треугольной угловой области целочисленным углом может быть  $2\pi$ ,  $0$ ,  $-\pi$ ,  $-2\pi$ . Соответственно этому существует 4 вида угловых областей с одним целочисленным углом, на которые можно конформно отобразить полуплоскость посредством элементарных функций.

**Целочисленный угол равен  $2\pi$ .** В этом случае углы рассматриваемой области суть  $2\pi$ ,  $\pi\theta$ ,  $-\pi - \pi\theta$ , где  $0 < \theta < 1$ . Область представляет угол со звездообразным разрезом, для которого отображающая функция была построена в разделе 6.6:

$$w = Cz^\theta(z-1). \quad (6.52)$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , осуществляемое функцией (6.52) при  $\theta = 0.7$  представлено на фиг. 6.21.



Фиг. 6.21. Треугольник  $(2, \theta, -1 - \theta)$

**б) Целочисленный угол равен 0.** Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & a_2 &= 1, & a_3 &= \infty; \\ \alpha &= \theta, & \beta &= 1 - \theta, & \gamma &= 0, \end{aligned}$$

где  $\theta$  — рациональное число,  $0 < \theta < 1$ .

При условии  $w(0) = 0$  интеграл (6.11) имеет вид

$$w = C_1 \int_0^z (\xi + 1)^{\theta-1} (\xi - 1)^{-\theta} d\xi. \quad (6.53)$$

Если  $\theta = p/q$  — рациональное число, то интеграл (6.53) приводится заменой переменной интегрирования к интегралу от рациональной функции и, следовательно, выражается в элементарных функциях. Это можно сделать, например, с помощью замены

$$t = \left( \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{1/q}, \quad (6.54)$$

т.е.

$$\xi = \frac{1 + t^q}{1 - t^q}.$$

**Пример 6.12.**

При  $\theta = 1/2$  интеграл (6.53) можно записать в виде

$$w = iC_1 \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = iC_1 \arcsin z.$$

Эта элементарная функция, рассмотренная выше в гл. III, отображает полуплоскость на полуокружность.

**Пример 6.13.**

При  $\theta = 3/4$  интеграл (6.53) имеет вид

$$w = C_1 \int_0^z \left( \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{1/4} \frac{d\xi}{\xi - 1}.$$

Заменой переменной (6.54)  $\xi = (1 + t^4)/(1 - t^4)$  он приводится к виду

$$w = 4C_1 \int \frac{dt}{1 - t^4} = 2C_1 (\arctg t + \operatorname{arth} t).$$

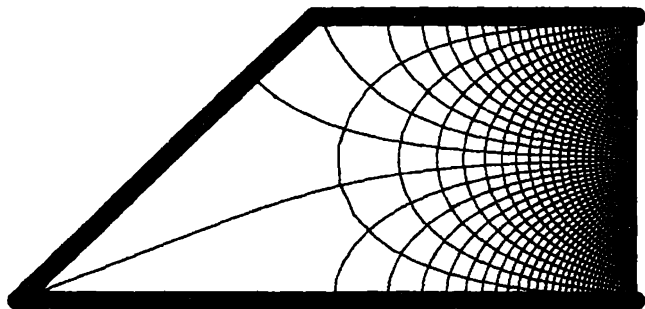
Отображение декартовой сети верхней полуплоскости, реализуемое функцией

$$\begin{aligned} t &= \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^{1/4}, \\ w &= 2 \arctg t + 2 \operatorname{arth} t - i \frac{\pi}{2} - \pi, \end{aligned}$$

представлено на фиг. 6.22.

**с) Целочисленный угол равен  $-\pi$ . Положим**

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & a_2 &= 1, & a_3 &= \infty; \\ \alpha &= 1 - \theta, & \beta &= 1 + \theta, & \gamma &= -1, \end{aligned}$$

Фиг. 6.22. Треугольник  $(0, 3/4, 1/4)$ 

где  $\theta$  – рациональное число,  $-1 < \theta < 1$ ,  $\theta \neq 0$ . При условии  $w(1) = 0$  интеграл Кристоффеля-Шварца принимает вид

$$w = C_1 \int_1^z \left( \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^\theta d\xi. \quad (6.55)$$

Если  $\theta = p/q$ , где  $p$  и  $q$  целые числа, то заменой переменной (6.54) этот интеграл приводится к рациональному виду.

**Пример 6.14.**

При  $\theta = 1/2$  интеграл (6.55) можно представить так

$$w = C_1 \int_1^z \frac{1 - \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = iC_1 \left( \arcsin z + \sqrt{1 - z^2} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Отображение декартовой сети верхней полуплоскости, реализуемое этой функцией при  $C_1 = 1$ , представлено на фиг. 6.23.

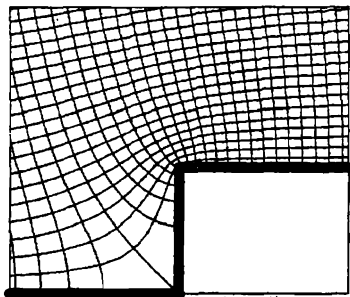
**д) Целочисленный угол равен  $-2\pi$ .** Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & a_2 &= 1, & a_3 &= \infty; \\ \alpha &= 1 + \theta, & \beta &= 2 - \theta, & \gamma &= -2, \end{aligned}$$

где  $\theta$  – рациональное число,  $0 < \theta < 1$ . Интеграл Кристоффеля-Шварца имеет вид

$$w = C_1 \int_{z_0}^z (\xi + 1)^\theta (\xi - 1)^{1-\theta} d\xi + C_2. \quad (6.56)$$

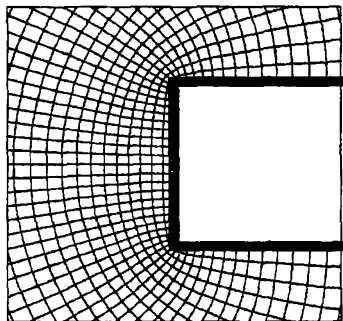
Заменой (6.54) этот интеграл рационализируется.

Фиг. 6.23. Треугольник  $(-1, 1/2, 3/2)$ **Пример 6.15.**

При  $\theta = 1/2$  при условии  $w(0) = 0$  интеграл (6.56) можно представить так

$$w = iC_1 \int_0^z \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = C_1 \frac{i}{2} (z\sqrt{1 - z^2} + \arcsin z). \quad (6.57)$$

Отображение декартовой сети верхней полуплоскости, реализуемое этой функцией при  $C_1 = 2$ , представлено на фиг. 6.24.

Фиг. 6.24. Треугольник  $(-2, 3/2, 3/2)$

### 6.7.3 Треугольные полосы

Адекватной канонической областью для криволинейных полос является полоса  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ . Для того, чтобы построить конформное отображение канонической области на рассматриваемую треугольную полосу, следует отобразить каноническую полосу на полуплоскость  $\operatorname{Im} z_1 > 0$  с помощью функции  $z_1 = e^z$ , а затем с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца отобразить полуплоскость на рассматриваемую треугольную полосу так, чтобы точки  $z_1 = 0$  и  $z_1 = \infty$  отобразились в двукратную граничную точку  $w = \infty$ .

В треугольной полосе целочисленный угол может иметь величины либо  $2\pi$  либо  $0$ .<sup>2</sup> Соответственно этому существует два вида треугольных полос, на которые можно отобразить каноническую область с помощью элементарных функций.

#### а) Целочисленный угол равен $2\pi$ .

Пусть углы треугольной полосы суть  $2\pi$ ,  $-\pi\theta$ ,  $-\pi+\pi\theta$ , где  $0 < \theta < 1$ . Такая область представляет полуплоскость с разрезом вдоль луча. Можно рассматривать ее как звездообразную область. Согласно формулам раздела (6.6), функция, отображающая полуплоскость  $\operatorname{Im} z_1 > 0$  на рассматриваемую звездообразную полосу, имеет вид

$$w = C z_1^{-\theta} (z_1 - 1). \quad (6.58)$$

Для отображения полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на рассматриваемую треугольную полосу следует сделать замену переменной  $z_1 = e^z$  в функции (6.58). Отображение декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.58) при  $\theta = 0.43$ ,  $z_1 = e^z$ , представлено на фиг. 6.25.

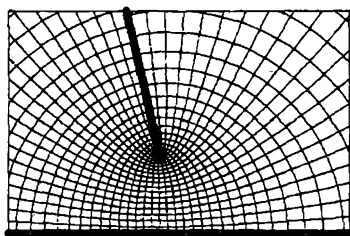
#### б) Целочисленный угол равен 0. Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= -1, & a_2 &= 0, & a_3 &= \infty; \\ \alpha &= 1 + \theta, & \beta &= 0, & \gamma &= -\theta, \end{aligned}$$

где  $\theta = p/q$  — рациональное число из интервала  $0 < \theta < 1$ . Интеграл Кристоффеля-Шварца при условии  $w(-1) = 0$  имеет вид

$$w = C_1 \int_{-1}^{z_1} (\xi + 1)^\theta \frac{d\xi}{\xi}. \quad (6.59)$$

<sup>2</sup>Угол  $-\pi$  в треугольной полосе возможен только в сочетании с углами 0 и  $2\pi$ , т.е. только в том случае, когда все углы треугольной области являются целочисленными. Этот случай был рассмотрен выше.

Фиг. 6.25. Треугольник  $(2, -\theta, -1 + \theta)$ 

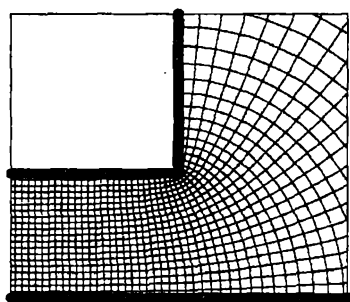
При  $\theta = p/q$  интеграл (6.59) рационализируется подстановкой  $\xi = t^q - 1$ .

**Пример 6.16.**

При  $\theta = 1/2$  интеграл (6.59) равен

$$w = C_1 \left( 2t - \ln \frac{1+t}{1-t} \right) = 2C_1 (t - \operatorname{arth} t), \quad (6.60)$$

где  $t = \sqrt{z_1 + 1} = \sqrt{e^z + 1}$ . Отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.60) при  $C_1 = 1$  представлено на фиг. 6.26.

Фиг. 6.26. Треугольник  $(0, -1/2, 3/2)$ 

#### 6.7.4 Внешности треугольников

Пусть  $D$  – треугольная область плоскости  $w$ , представляющая внешность треугольника с вершинами  $A_1, A_2, A_3$ . Пусть углы области  $D$  в

вершинах (т.е. внешние углы треугольника) равны  $\pi\alpha$ ,  $\pi\beta$ ,  $\pi\gamma$ , соответственно. Эти углы удовлетворяют условиям  $1 < \alpha < 2$ ,  $1 < \beta < 2$ ,  $1 < \gamma < 2$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 5$ . Адекватной канонической областью для области  $D$  является внешность единичного круга.

Пусть функция  $z = F(w)$  реализует конформное отображение области на внешность круга  $|z| > 1$ , при котором точка  $w = \infty$  отображается в точку  $z = \infty$ , а точки  $A_1, A_2, A_3$  - соответственно в некоторые точки единичной окружности  $a_1, a_2, a_3$ . Функция  $w = f(z)$ , реализующая обратное отображение внешности круга  $|z| > 1$  на внешность треугольника, имеет, согласно формуле (6.19), вид:

$$w = C_1 \int_{z_0}^z (\xi - a_1)^{\alpha-1} (\xi - a_2)^{\beta-1} (\xi - a_3)^{\gamma-1} \frac{d\xi}{\xi^2} + C_2.$$

Эта функция не является элементарной ни при каких допустимых значениях параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ .

### Упражнения.

1. При  $\theta = 1/4$ ,  $C_1 = 1$  интеграл (6.55) равен

$$w = \frac{2t}{1-t^4} - \operatorname{arctg} t - \operatorname{arth} t, \quad (6.61)$$

где  $t = ((z-1)/(z+1))^{1/4}$ . Постройте отображение декартовой сети верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  функцией (6.61).

2. При  $\theta = 1/4$ ,  $C_1 = 1/2$  интеграл (6.59) равен

$$w = 2t - \operatorname{arctg} t - \operatorname{arth} t. \quad (6.62)$$

Постройте отображение декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  функцией (6.62), полагая  $t = (e^z + 1)^{1/4}$ .

3. При  $\theta = 3/4$ ,  $C_1 = 1/2$  интеграл (6.59) имеет вид

$$w = \frac{2}{3} t^3 - \operatorname{arth} t + \operatorname{arctg} t. \quad (6.63)$$

Постройте отображение декартовой сети в полосе  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.63), полагая  $t = (e^z + 1)^{1/4}$ .

## 6.8 Отображения четырехугольных областей

Следуя введенной терминологии, в настоящем разделе мы будем говорить вместо "четыреугольная область с углами  $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma, \pi\delta$ "

короче – “четыреугольник  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ”. В случае конечного или бесконечного четырехугольника числа  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  удовлетворяют соотношениям  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2$ , в случае внешности четырехугольника – условию  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 6$ .

Конформное отображение полуплоскости на заданный конечный или бесконечный четырехугольник осуществляется по формуле Кристоффеля - Шварца (6.10-6.11), в которой вещественные параметры  $a_1, a_2, a_3, a_4$  заранее неизвестны. Три из них можно задать произвольно, четвертый параметр подлежит определению. Таким образом, переходя от треугольников к четырехугольникам, мы сталкиваемся с проблемой определения параметров интеграла Кристоффеля - Шварца. Эта проблема не имеет аналитического решения. Вместо решения обратной задачи Кристоффеля - Шварца (определение параметров для получения нужного четырехугольника) мы будем исследовать зависимость интеграла Кристоффеля - Шварца от параметров и подбирать параметры экспериментально для получения нужной формы области.

Далее возникает вопрос о вычислении функции, отображающей полуплоскость на четырехугольник. В некоторых случаях интеграл Кристоффеля - Шварца выражается в элементарных функциях. Это относится прежде всего к четырехугольникам с четырьмя целочисленными углами – для них подынтегральная функция является рациональной. В тех случаях, когда четырехугольник имеет два целочисленных и два рациональных угла, можно с помощью замены переменной интегрирования привести интеграл Кристоффеля - Шварца к интегралу от рациональной функции.

Естественно возникает вопрос о том, можно ли выразить интеграл Кристоффеля - Шварца в элементарных функциях в случае четырехугольника с одним целочисленным углом. Вообще говоря, ответ на этот вопрос является отрицательным. Действительно, пусть целочисленный угол четырехугольника равен  $2\pi$  (скажем  $\delta = 2$ ). Положим

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= \infty, & a_4 &= -p; \\ \alpha_1 &= \alpha, & \alpha_2 &= \beta, & \alpha_3 &= \gamma, & \alpha_4 &= 2. \end{aligned}$$

Интеграл Кристоффеля - Шварца для такого четырехугольника, имеющий вид

$$w = C_1 \int_{z_0}^z \xi^{\alpha-1} (\xi - 1)^{\beta-1} (\xi + p) d\xi + C_2, \quad (6.64)$$

представляет сумму двух дифференциальных биномов. Согласно те-



ореме П.Л. Чебышева, интеграл от дифференциального бинома выражается в элементарных функциях только в тех случаях, когда либо  $\alpha$ , либо  $\beta$ , либо  $\alpha + \beta$  является целым числом. Применительно к четырехугольнику это означает, что хотя бы одно из чисел  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  должно быть целым, т.е. помимо целочисленного угла  $\delta = 2$  в четырехугольнике должен быть еще один целочисленный угол. Таким образом, если в четырехугольнике имеется единственный целочисленный угол  $\delta = 2$ , каждое слагаемое в интеграле (6.64) представляет неэлементарную функцию.

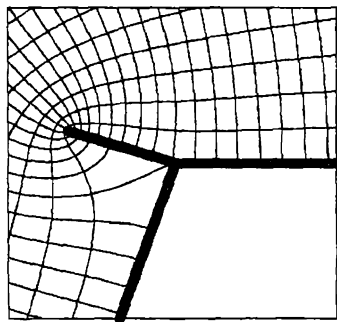
Однако для представимости в элементарных функциях всего интеграла (6.64) наличие двух целых углов не является необходимым условием. Это демонстрируется следующим примером.

### Пример 6.17.

Элементарная функция

$$w = z^{0.5}(z - 1)^{0.9}$$

отображает полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на звездообразную четырехугольную область, у которой, кроме угла  $2\pi$ , нет других целочисленных углов (фиг. 6.27).



Фиг. 6.27. Звездообразная четырехугольная область

Таким образом, в случае четырехугольника с одним целочисленным углом интеграл Кристоффеля - Шварца представляет, вообще говоря, неэлементарную функцию, но в некоторых исключительных случаях

он выражается через элементарные функции. В случае четырехугольника, не имеющего целочисленных углов (в частности, для конечного четырехугольника) интеграл Кристоффеля - Шварца не выражается в элементарных функциях. Для прямоугольников (и других четырехугольников с четырьмя прямыми углами) интеграл Кристоффеля - Шварца выражается через неэлементарные функции (эллиптические интегралы).

В настоящем параграфе рассматриваются следующие виды четырехугольников, для которых интеграл Кристоффеля - Шварца выражается в элементарных функциях:

1. Четырехугольники с четырьмя целочисленными углами.
2. Четырехугольники с двумя целочисленными и двумя рациональными углами.
3. Некоторые четырехугольники с одним целочисленным углом.

Для четырехугольников типов 1 и 2 удастся рассмотреть все возможные виды и дать их классификацию.

Для четырехугольников типа 3 мы не можем утверждать, что кроме рассмотренных нами не существует других четырехугольников с одним целочисленным углом, для которых интеграл Кристоффеля - Шварца выражается в элементарных функциях.

#### **6.8.1 Четырехугольники с четырьмя целочисленными углами**

Существует три типа четырехугольников с четырьмя целыми углами:  $(2, 0, 2, -2)$ ,  $(2, -1, 2, -1)$  и  $(0, 0, 0, 2)$ . Первые два вида представляют плоскость с двумя разрезами вдоль лучей параллельных прямых. Третий вид представляет прямолинейную полосу с разрезом вдоль луча. Отображения таких областей были рассмотрены в параграфе 6.5.

#### **6.8.2 Четырехугольники с двумя целочисленными углами**

Все возможные четырехугольники с двумя целочисленными углами можно построить, добавляя к паре целых углов два нецелых таким образом, чтобы сумма всех углов была равна  $2\pi$ , и производя различные нетривиальные перестановки четырех углов. Возможные целые

значения чисел  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  суть 2, 0, -1, -2. Из этих чисел можно составить 10 различных пар:

$$(2, 2), (2, 0), (2, -1), (2, -2), (0, 0), \\ (0, -1), (0, -2), (-1, -1), (-1, -2), (-2, -2).$$

Из этих сочетаний углов два последние невозможны, так как сумма углов в бесконечно удаленной точке не может превосходить 2. Сочетание углов (0, -2) и (-1, -1) возможны только тогда, когда все углы четырехугольника являются целочисленными. Эти случаи уже рассмотрены выше. Таким образом, остается 6 попарных сочетаний целочисленных углов, которые мы и рассмотрим отдельно для четырехугольных угловых областей, четырехугольных полос и внешностей четырехугольников.

**А. Четырехугольные угловые области.** Для четырехугольных угловых областей возможны только два сочетания целочисленных углов: (2, -1) и (2, -2).

**Целочисленные углы (2, -1).** С целочисленными углами 2 и -1 существуют четырехугольники  $(2, -1, \theta, 1 - \theta)$  и  $(2, \theta, -1, 1 - \theta)$ . Положим в формуле (6.11)

$$a_1 = p, \quad a_2 = \infty, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1; \\ \alpha = 2, \quad \beta = -1, \quad \gamma = \theta, \quad \delta = 1 - \theta; \\ w(1) = 0,$$

где  $p > 0, 0 < \theta < 1$ . Интеграл Кристоффеля - Шварца имеет вид

$$w = C_1 \int_1^z (\xi - p)(\xi + 1)^{\theta-1} (\xi - 1)^{-\theta} d\xi + C_2, \quad (6.65)$$

Если  $\theta = m/n$  - рациональное число, то интеграл (6.65) рационализируется подстановкой

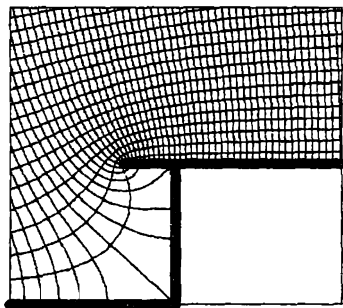
$$t = \left( \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{1/n}, \quad \xi = \frac{1 + t^n}{1 - t^n}.$$

**Пример 6.18.**

При  $\theta = 1/2$  интеграл (6.65) вычисляется без рационализации:

$$w = -i C_1 \int_1^z \frac{\xi - p}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = i C_1 \left[ \sqrt{1 - z^2} + p \arcsin z - p \frac{\pi}{2} \right] \quad (6.66)$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , производимое функцией (6.66) при  $p = 4$ , представлено на фиг. 6.28. Отображение представляет ступеньку с тонким горизонтальным выступом.



Фиг. 6.28. Четырехугольник  $(-1, 1/2, 1/2, 2)$

При  $0 < p < 1$  получается ступенька с вертикальным выступом. При  $p = 1$  выступ исчезает и область превращается в треугольник, рассмотренный в параграфе 6.7.

**Целочисленные углы  $(2, -2)$ .** С целочисленными углами 2 и  $-2$  существуют четырехугольные угловые области двух видов:  $(2, -2, 2 - \theta, \theta)$  и  $(2, \theta, -2, 2 - \theta)$ . Положим в формуле (6.11)

$$\begin{aligned} a_1 &= p, \quad a_2 = \infty, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = 1; \\ \alpha &= 2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 2 - \theta, \quad \delta = \theta, \end{aligned}$$

где  $p > 0$ ,  $0 < \theta < 1$ . Интеграл Кристоффеля - Шварца принимает вид

$$w = C_1 \int_0^z (\xi - p)(\xi + 1)^{1-\theta}(\xi - 1)^{\theta-1} d\xi + C_2. \quad (6.67)$$

При  $\theta = m/n$  этот интеграл рационализируется подстановкой

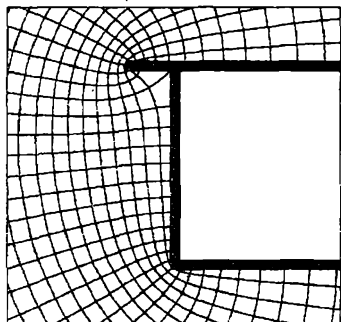
$$t = \left( \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)^{1/n}, \quad \xi = \frac{1 + t^n}{1 - t^n}.$$

**Пример 6.19.**

При  $\theta = 1/2$  интеграл (6.67) вычисляется просто:

$$\begin{aligned} w &= -i C_1 \int_0^z \frac{(\xi - p)(\xi + 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + C_2 \\ &= i C_1 \left[ \left(1 - p + \frac{z}{2}\right) \sqrt{1 - z^2} + \left(p - \frac{1}{2}\right) \arcsin z \right] + \overline{C_2}, \quad (6.68) \end{aligned}$$

где  $\overline{C_2} = C_2 - i C_1(p - 1)$ . Отображение декартовой сети верхней полуплоскости, производимое функцией (6.68) при  $p = 1.5$ ,  $C_1 = 1/(p - 1/2)$ ,  $\overline{C_2} = 0$ , представлено на фиг. 6.29.



Фиг. 6.29. Четырехугольник  $(-2, 3/2, 1/2, 2)$

Образом верхней полуплоскости при отображении (6.68) является внешность полуполосы с разрезом вдоль некоторого отрезка. При  $p > 1$  разрез направлен горизонтально, при  $1/2 \leq p < 1$  — вертикально. При  $p = 1$  разрез отсутствует, а функция (6.68) совпадает с (6.57).

При  $p = 1/2$  граница области представляет звездообразный разрез. При  $p < 1/2$  функция (6.68) не является однолистной в верхней полуплоскости.

**В. Четырехугольные полосы.** Четырехугольные полосы получаются при таких сочетаниях целочисленных углов:  $(2, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(0, 0)$  и  $(0, -1)$ .

**Целочисленные углы  $(2, 2)$ .** Углы  $(2, 2)$  являются углами четырехугольника  $(2, -1 - \theta, 2, \theta - 1)$ , представляющего плоскость с двумя разрезами вдоль лучей непараллельных прямых (мы предполагаем, что  $\theta$  - любое число из интервала  $0 < \theta < 1$ ). Случаи, когда лучи принадлежат параллельным прямым, были рассмотрены выше в параграфе 6.5.

Положим в формуле (6.11)

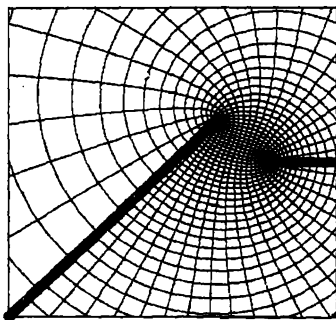
$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= \infty, & a_4 &= -p; \\ \alpha &= -1 + \theta, & \beta &= 2, & \gamma &= -1 - \theta, & \delta &= 2, \end{aligned}$$

где  $p > 0$ . Интеграл Кристоффеля - Шварца имеет вид

$$\begin{aligned} w &= C_1 \int_{z_0}^{z_1} \xi^{\theta-2} (\xi - 1)(\xi + p) d\xi + C_2 \\ &= C_1 z_1^{\theta-1} \left( \frac{z_1^2}{\theta + 1} + z_1 \frac{p-1}{\theta} - \frac{p}{\theta-1} \right) + C_2. \end{aligned} \quad (6.69)$$

### Пример 6.20.

Отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , осуществляемое функцией (6.69) при  $z_1 = e^z$ ,  $\theta = 0.25$ ,  $p = 5$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , представлено на фиг. 6.30.



Фиг. 6.30. Четырехугольник  $(2, -1 - \theta, 2, \theta - 1)$

**Целочисленные углы  $(2, 0)$ .** С целочисленными углами  $(2, 0)$  можно построить четырехугольные полосы трех видов:  $(2, 0, -\theta, \theta)$ ,  $(2, \theta, 0, -\theta)$  и  $(2, -\theta, \theta, 0)$ . В двух первых случаях предполагается  $0 < \theta < 1$ , в третьем  $0 < \theta < 2$ .

Положим в формуле (6.11)

$$\begin{aligned} a_1 &= -p, & a_2 &= 0, & a_3 &= \infty, & a_4 &= -1; \\ \alpha &= 2, & \beta &= 0, & \gamma &= -\theta & \delta &= \theta; \\ w(-1) &= 0, \end{aligned}$$

предполагая  $p \neq 0$ ,  $p \neq 1$ . Интеграл Кристоффеля - Шварца принимает вид

$$w = C_1 \int_{-1}^{z_1} \xi^{-1} (\xi + 1)^{\theta-1} (\xi + p) d\xi. \quad (6.70)$$

Если  $\theta = m/n$  - рациональное число, то заменой переменной  $\xi = t^n - 1$  этот интеграл приводится к виду

$$w = C_1 n \int_0^t \left( 1 + \frac{p}{t^n - 1} \right) t^{m-1} dt. \quad (6.71)$$

Вид четырехугольника, на который функция (6.71) отображает полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , зависит от величины параметра  $p$ . При  $0 < p < 1$  получается четырехугольник  $(2, 0, -\theta, \theta)$ , при  $p > 1$  - четырехугольник  $(2, \theta, 0, -\theta)$ , при  $p < 0$  - четырехугольник  $(2, -\theta, \theta, 0)$ .

#### Пример 6.21.

При  $\theta = 1/2$  ( $m = 1$ ,  $n = 2$ ) интеграл (6.70) имеет вид

$$w = 2C_1 (t - p \operatorname{arth} t). \quad (6.72)$$

Отображение декартовой сети в полосе  $0 < \text{Im } z < \pi$ , осуществляемое функцией (6.72) при  $z_1 = e^z$ ,  $t = \sqrt{z_1 + 1}$ ,  $p = 3$ , представлено на фиг. 6.31.

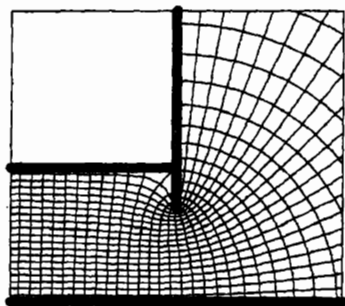
#### Пример 6.22.

При  $\theta = 3/2$  интеграл (6.70) после замены  $\xi = t^2 - 1$  принимает вид:

$$w = 2C_1 \int_0^t \left( t^2 - p + \frac{p}{1 - t^2} \right) dt = 2C_1 \left( \frac{t^3}{3} - pt + p \operatorname{arth} \frac{1}{t} \right). \quad (6.73)$$

Отображение декартовой сети в полосе  $0 < \text{Im } z < \pi$ , осуществляемое функцией (6.73) при  $z_1 = e^z$ ,  $t = \sqrt{z_1 + 1} = \sqrt{e^z + 1}$ ,  $p = 1.55$ ,  $C = 1/2p$ , представлено на фиг. 6.32.

**Целочисленные углы  $(2, -1)$ .** Четырехугольная полоса с указанными целочисленными углами представляет четырехугольник  $(-1, 2, -\theta, 1 +$

Фиг. 6.31. Четырехугольник  $(0, -1/2, 2, 1/2)$ 

$\theta$ ), где  $0 < \theta < 1$ . В этом случае положим

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= p, & a_3 &= \infty, & a_4 &= -1; \\ \alpha &= -1, & \beta &= 2, & \gamma &= -\theta, & \delta &= 1 + \theta; \\ w(-1) &= 0, & p &> 0. \end{aligned}$$

Интеграл Кристоффеля - Шварца принимает вид

$$w = C_1 \int_{-1}^{z_1} (\xi + 1)^\theta (\xi - p) \frac{d\xi}{\xi^2}. \quad (6.74)$$

Если  $\theta = m/n$  - рациональное число, то этот интеграл рационализуется подстановкой  $\xi = t^n - 1$ .

### Пример 6.23.

При  $\theta = 1/2$  замена  $\xi = t^2 - 1$  приводит интеграл к виду

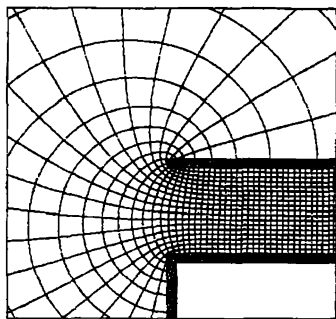
$$w = 2C \int_0^t \frac{t^2(t^2 - p - 1)}{(t^2 - 1)^2} dt = C \left[ 2t + \frac{pt}{t^2 - 1} - (2 - p) \operatorname{arth} t \right]. \quad (6.75)$$

Отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  функцией (6.75), в которой  $t = \sqrt{z_1 + 1} = \sqrt{e^z + 1}$ ,  $p = 0.15$ ,  $C = -1/2$ , приведено на фиг. 6.33.

**Целочисленные углы  $(0, 0)$ .** С целочисленными углами  $(0, 0)$  возможны четырехугольные полосы двух видов:  $(0, 0, 1 - \theta, 1 + \theta)$  и  $(0, 1 - \theta, 0, 1 + \theta)$ . Для этих четырехугольников положим

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & a_2 &= p, & a_3 &= 1, & a_4 &= \infty; \\ \alpha &= 0, & \beta &= 1 - \theta, & \gamma &= 1 + \theta, & \delta &= 0; \\ w(1) &= 0. \end{aligned}$$



Фиг. 6.32. Четырехугольник  $(-3/2, 3/2, 0, 2)$ 

Получается четырехугольник  $(0, 1 - \theta, 1 + \theta, 0)$  при  $0 < p < 1$  и четырехугольник  $(0, 1 - \theta, 0, 1 + \theta)$  при  $p < 0$ .

Интеграл Кристоффеля - Шварца имеет вид

$$w = C_1 \int_1^{z_1} \xi^{-1} (\xi - p)^{-\theta} (\xi - 1)^{\theta} d\xi. \quad (6.76)$$

Если  $\theta = m/n$  - рациональное число, то интеграл (6.76) заменой  $t = [(\xi - 1)/(\xi - p)]^{1/n}$ ,  $\xi = (1 - pt^n)/(1 - t^n)$  приводится к виду

$$\begin{aligned} w &= C_1 n (1 - p) \int_0^t \frac{t^{n+m-1} dt}{(1 - t^n)(1 - pt^n)} \\ &= C_1 n \int_0^t \left( \frac{1}{1 - t^n} - \frac{1}{1 - pt^n} \right) t^{m-1} dt. \end{aligned} \quad (6.77)$$

#### Пример 6.24.

При  $\theta = 1/2$  ( $n = 2$ ,  $m = 1$ ),  $p = q^2 > 0$  интеграл (6.77) равен

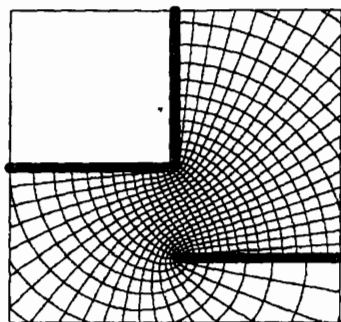
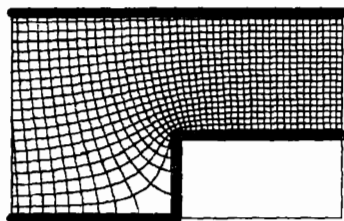
$$w = 2C_1 \left( \operatorname{arth} t - \frac{1}{q} \operatorname{arth} qt \right). \quad (6.78)$$

Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.78), где  $z_1 = e^z$ ,  $t = \sqrt{(z_1 - 1)/(z_1 - q^2)}$ ,  $q = 0.6$ ,  $C_1 = 1/2$ , представлено на фиг. 6.34.

#### Пример 6.25.

При  $\theta = 1/2$ ,  $p = -q^2 < 0$  интеграл (6.77) выражается немного иначе

$$w = A (q \operatorname{arth} t - \operatorname{arctg} qt), \quad (6.79)$$

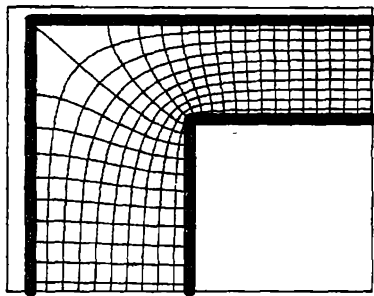
Фиг. 6.33. Четырехугольник  $(-1, 2, -1/2, 3/2)$ Фиг. 6.34. Четырехугольник  $(0, 1/2, 3/2, 0)$ 

где  $A = 2C_1/q$ . Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \text{Im } z < \pi$ , реализуемое функцией (6.79), где  $z_1 = e^z$ ,  $t = \sqrt{(z_1 - 1)/(z_1 + q^2)}$ ,  $q = 0.66$ ,  $A = 1$ , представлено на фиг. 6.35.

**Целочисленные углы  $(0, -1)$ .** Существует два вида четырехугольных полос с целочисленными углами 0 и  $-1$ :  $(-1, 0, 2 - \theta, 1 + \theta)$  и  $(-1, 2 - \theta, 0, 1 + \theta)$ . Для таких четырехугольников положим

$$\begin{aligned} a_1 = \infty, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = p, \quad a_4 = 1; \\ \alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2 - \theta, \quad \delta = 1 + \theta. \end{aligned}$$

Четырехугольник  $(-1, 0, 2 - \theta, 1 + \theta)$  получается при  $0 < p < 1$ , четырехугольник  $(-1, 2 - \theta, 0, 1 + \theta)$  - при  $p < 0$ .

Фиг. 6.35. Четырехугольник  $(0, 3/2, 0, 1/2)$ 

Интеграл Кристоффеля - Шварца для этих четырехугольников имеет вид

$$w = C_1 \int_1^z \xi^{-1} (\xi - p)^{1-\theta} (\xi - 1)^\theta d\xi + C_2. \quad (6.80)$$

Если  $\theta = m/n$  - рациональное число, то интеграл (6.80) можно рационализировать подстановкой  $t = [(\xi - 1)/(\xi - p)]^{1/n}$ ,  $\xi = (1 - pt^n)/(1 - t^n)$ :

$$w = C_1 (1 - p) \int_0^t \left[ \frac{nt^n}{(1 - t^n)^2} - \frac{npt^n}{(1 - t^n)(1 - pt^n)} \right] t^{m-1} dt + C_2. \quad (6.81)$$

Особенно просто интеграл выражается при  $m = 1$ :

$$w = C_1 \left[ \frac{1-p}{1-t^n} t + (1+pn-p) \int \frac{dt}{1-t^n} + np \int \frac{dt}{1-pt^n} \right] + C_2. \quad (6.82)$$

**Пример 6.26.**

При  $\theta = 1/2$ ,  $p = q^2 > 0$  интеграл (6.82) равен

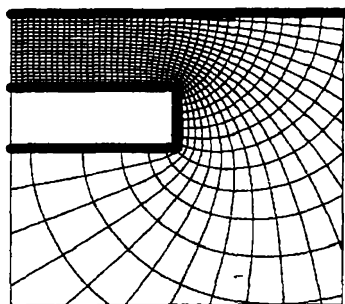
$$w = C_1 \left[ \frac{1-q^2}{1-t^2} t - (1+q^2) \operatorname{arth} t + 2q \operatorname{arth} qt \right] + C_2. \quad (6.83)$$

Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.83) при  $z_1 = e^z$ ,  $t = \sqrt{(z_1 - 1)/(z_1 - q^2)}$ ,  $q = 0.3$ ,  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 0$ , представлено на фиг. 6.36.

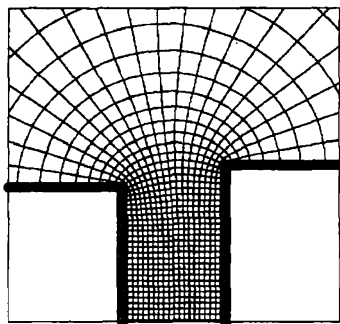
**Пример 6.27.**

При  $\theta = 1/2$ ,  $p = -q^2 < 0$  интеграл (6.82) выражается несколько иначе

$$w = C_1 \left[ \frac{1+q^2}{1-t^2} t - (1-q^2) \operatorname{arth} t - 2q \operatorname{arctg} qt \right] + C_2. \quad (6.84)$$

Фиг. 6.36. Четырехугольник  $(0, 3/2, 3/2, -1)$ 

Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.84) при  $z_1 = e^z$ ,  $t = \sqrt{(z_1 - 1)/(z_1 + q^2)}$ ,  $q = 0.8$ ,  $C_1 = 1/q$ ,  $C_2 = \pi/2$ , представлено на фиг. 6.37.

Фиг. 6.37. Четырехугольник  $(-1, 3/2, 0, 3/2)$ 

**С. Внешности четырехугольников.** Внешности конечных четырехугольников не могут быть получены конформным отображением канонической области (внешности круга) с помощью элементарных функций, за исключением того случая, когда четырехугольник является звездобразным.

**Четырехугольник**  $(1 - \theta, 2, 1 + \theta, 2)$ . Пусть бесконечная четырехугольная область представляет внешность разреза в форме двузвенной ломаной с углами  $(1 - \theta)$  и  $(1 + \theta)$  в начале координат. Положим в формуле (6.46)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= e^{ip}; \\ \alpha_1 &= 1 - \theta, & \alpha_2 &= 1 + \theta. \end{aligned}$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на рассматриваемый звездообразный многоугольник, имеет вид

$$w = C \frac{(z - 1)^{1-\theta} (z - e^{ip})^{1+\theta}}{z}. \quad (6.85)$$

Для того, чтобы ориентировать одно из звеньев ломаной вдоль вещественной оси, следует положить

$$C = A \exp \left[ i \left( \pi\theta - \frac{p}{2} - \frac{p\theta}{2} \right) \right], \quad (6.86)$$

где  $A > 0$  — масштабный множитель. Для того, чтобы выделить главную ветвь многозначной функции (6.85), непрерывную вне круга  $|z| > 1$ , следует представить ее в форме

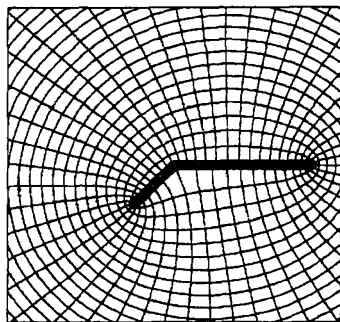
$$w = Cz \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^{1-\theta} \left( 1 - \frac{e^{ip}}{z} \right)^{1+\theta} \quad (6.87)$$

### Пример 6.28.

Отображение полярной сети во внешности единичного круга, реализуемое функцией (6.86)–(6.87) при  $\theta = 0.25$ ,  $p = 4$ , представлено на фиг. 6.38. Варьируя величину параметра  $p$  ( $0 < p < 2\pi$ ) в формуле (6.87), можно изменять отношение длин звеньев ломаной. При  $p = \pi$  длины звеньев равны.

### 6.8.3 Четырехугольники с одним целочисленным углом

Некоторые виды четырехугольников с одним целочисленным углом могут быть получены как конформные отображения канонических областей с помощью элементарных функций. Мы рассмотрим звездообразные четырехугольники и симметричные четырехугольники с одним целочисленным углом. По-видимому, эти случаи (вместе с рассмотренными выше) исчерпывают класс четырехугольных областей, отображаемых посредством элементарных функций.

Фиг. 6.38. Четырехугольник  $(2, 1 + \theta, 2, 1 - \theta)$ 

А. Звездообразный четырехугольник  $(\alpha, 2, \beta, -\alpha - \beta)$  представляет угловую звездообразную область. Функция, отображающая полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на рассматриваемый четырехугольник, имеет, согласно (6.39), вид

$$w = C z^{\alpha} (z - 1)^{\beta}. \quad (6.88)$$

Пример отображения, реализуемого функцией (6.88), приведен на фиг. 6.27 (Пример 6).

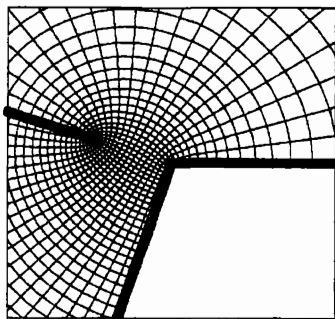
В. Звездообразный четырехугольник  $(-\alpha, 2, -\beta, \alpha + \beta)$  представляет звездообразную полосу. Функция, отображающая полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на рассматриваемую область, имеет, согласно (6.43) вид

$$w = C z^{-\alpha} (z - 1)^{\alpha + \beta}. \quad (6.89)$$

### Пример 6.29.

Отображение декартовой сети в полосу  $0 < \text{Im } \xi < \pi$ , реализуемое функцией (6.89) при  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $z = e^{\xi}$ , представлено на фиг. 6.39.

С. Симметричная угловая область с целочисленным углом 0. Для построения отображения симметричного четырехугольника  $(0, 1 - \theta, 2\theta, 1 - \theta)$  можно использовать принцип симметрии. Положим в фор-

Фиг. 6.39. Звездообразный четырехугольник  $(-\alpha, 2, -\beta, \alpha + \beta)$ 

муде (6.11)

$$\begin{aligned} a_1 &= \infty, & a_2 &= -1, & a_3 &= 0, & a_4 &= p; \\ \alpha &= 0, & \beta &= 1 - \theta, & \gamma &= 2\theta, & \delta &= 1 - \theta. \end{aligned}$$

Так как рассматриваемая область симметрична относительно биссектрисы угла  $\gamma = 2\theta$ , то точки  $a_2 = -1$  и  $a_4 = p$  должны быть симметричны относительно точки  $a_3 = 0$ , т.е. необходимо  $a_4 = p = 1$ . Интеграл Кристоффеля - Шварца принимает вид

$$w = C_1 \int_0^z \xi^{2\theta} (\xi^2 - 1)^{-\theta} \frac{d\xi}{\xi} + C_2. \quad (6.90)$$

Если  $\theta = m/n$  - рациональное число, то интеграл (6.90) рационализуется подстановкой  $t = (1 - 1/\xi^2)^{1/n}$ :

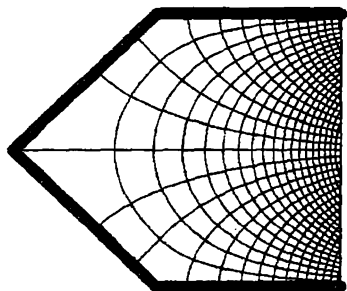
$$w = C \int_0^t \frac{t^{n-m-1} dt}{1 - t^n} + C_2. \quad (6.91)$$

### Пример 6.30.

При  $\theta = 1/4$  ( $n = 4$ ,  $m = 1$ ),  $C_2 = 0$  интеграл (6.91) имеет вид

$$w = C \left( \ln \frac{t+1}{t-1} - 2 \operatorname{arctg} t \right). \quad (6.92)$$

Отображение декартовой сети полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , реализуемое функцией (6.92), в которой  $t = (1 - 1/z^2)^{1/4}$ , представлено на фиг. 6.40.



Фиг. 6.40. Симметричный четырехугольник  $(0, 3/4, 1/2, 3/4)$

**Д. Симметричная угловая область с целочисленным углом  $-2$ .** Для симметричного четырехугольника  $(-2, 1 + \theta, 2 - 2\theta, 1 + \theta)$  положим

$$\begin{aligned} a_1 &= \infty, & a_2 &= -1, & a_3 &= 0, & a_4 &= 1; \\ \alpha &= -2, & \beta &= 1 + \theta, & \gamma &= 2 - 2\theta, & \delta &= 1 + \theta. \end{aligned}$$

Интеграл Кристоффеля - Шварца принимает вид

$$w = C_1 \int_{z_0}^z (\xi^2 - 1)^\theta \xi^{1-2\theta} d\xi + C_2. \quad (6.93)$$

Если  $\theta = m/n$  — рациональное число, то интеграл (6.93) рационализируется подстановкой  $t = (1 - 1/\xi^2)^{1/n}$ :

$$w = C_1 \frac{n}{2} \int_0^t \frac{t^{n+m-1}}{(1 - t^n)^2} dt + C_2. \quad (6.94)$$

**Пример 6.31.**

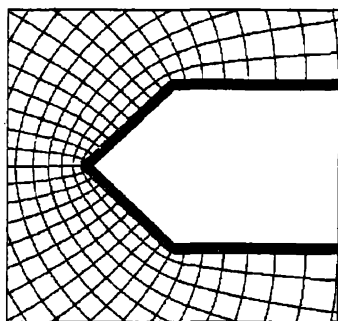
При  $\theta = 1/4$  ( $n = 4$ ,  $m = 1$ ) интеграл (6.94) равен

$$w = \frac{C_1}{8} \left( \frac{4t}{1 - t^4} - \ln \frac{t+1}{t-1} - 2 \operatorname{arctg} t \right) + C_2. \quad (6.95)$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , осуществляемое функцией (6.95) при  $t = (1 - 1/z^2)^{1/4}$ ,  $C_1 = 8$ ,  $C_2 = 0$ , представлено на фиг. 6.41.

**Е. Симметричная полоса с целочисленным углом 0.** Построить конформное отображение симметричного четырехугольника  $(0, 1 + \theta, -2\theta, 1 + \theta)$



Фиг. 6.41. Симметричный четырехугольник  $(-2, 5/4, 3/2, 5/4)$ 

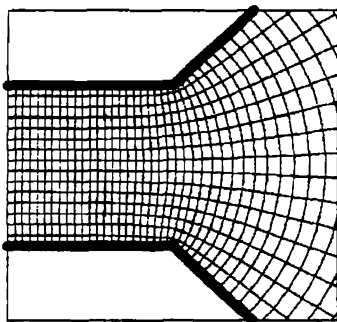
на полосу проще всего с помощью принципа симметрии. В разделе 6.7 была построена функция  $w = f(z_1) = f(e^z)$ , отображающая полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на треугольную полосу, представляющую половину рассматриваемого четырехугольника. При этом вещественная ось  $\operatorname{Im} z = 0$  отображается в ось симметрии четырехугольника. Согласно принципу симметрии, аналитическое продолжение функции  $w = f(e^z)$  на полосу  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  конформно отображает эту полосу на рассматриваемый четырехугольник.

### Пример 6.32.

Функция

$$w(t) = 4t + \ln \frac{t-1}{t+1} - 2 \operatorname{arctg} t, \quad (6.96)$$

где  $t = (e^z + 1)^{1/4}$ , отображает полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на треугольник  $(0, -1/4, 5/4)$ , причем вещественная ось  $z$  отображается в вещественную ось  $w$ . Функция (6.96) имеет аналитическое продолжение на полосу  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ , причем отображает эту полосу на симметричный четырехугольник  $(0, 5/4, -1/2, 5/4)$ . Отображение декартовой сети в полосе  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое этой функцией, представлено на фиг. 6.42.

Фиг. 6.42. Симметричный четырехугольник  $(0, 5/4, -1/2, 5/4)$ **Упражнения.**

1. При  $\theta = 3/4$  ( $m = 3, n = 4$ ) интеграл (6.91) равен

$$w = \frac{C}{2} \left( \operatorname{arctg} t + \operatorname{arth} \frac{1}{t} \right) + C_2. \quad (6.97)$$

Постройте отображение декартовой сети верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , реализуемое функцией (6.97), где  $t = (1 - 1/z^2)^{1/4}$ ,  $C = 2$ ,  $C_2 = -\pi/2$ .

2. При  $\theta = 3/4$  ( $m = 3, n = 4$ ) интеграл (6.94) равен

$$w = C \left( \frac{2t^3}{1 - t^4} - 3 \operatorname{arth} \frac{1}{t} + 3 \operatorname{arctg} t \right) + C_2. \quad (6.98)$$

Постройте отображение декартовой сети верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , осуществляемое функцией (6.98), полагая  $t = (1 - 1/z^2)^{1/4}$ ,  $C = 1$ ,  $C_2 = 0$ .

3. При  $\theta = 1/4$  ( $m = 1, n = 4$ ) интеграл (6.71) равен

$$w = A \left( \operatorname{arctg} t + \operatorname{arth} t - \frac{2t}{p} \right), \quad (6.99)$$

где  $A = -2pC_1$ . Постройте отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , реализуемое функцией (6.99), полагая  $t = (e^z + 1)^{1/4}$ ,  $A = 1$  для различных значений  $p$ :  $p = 2$ ,  $p = 0.5$ ,  $p = -2$ .

## 6.9 Отображения правильных и симметричных многоугольников

1. Для построения конформного отображения круга  $|z| < 1$  на правильный  $n$ -угольник следует использовать формулу (6.12). В случае правильного многоугольника точки  $b_k$  также располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника. Можно положить  $b_k = \exp(2\pi i k/n)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), после чего формула (6.12) принимает вид

$$h(\xi) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (\xi - b_k)^{2/n}}. \quad (6.100)$$

Числа  $b_k$  представляют корни уравнения  $\xi^n - 1 = 0$ . Согласно известной теореме алгебры, многочлен  $\xi^n - 1$  представляет произведение линейных множителей:

$$\xi^n - 1 = \prod_{k=1}^n (\xi - b_k).$$

Таким образом, функция (6.100) имеет вид

$$h(\xi) = \frac{1}{(\xi^n - 1)^{2/n}}.$$

Для того, чтобы ЭВМ вычисляла главную ветвь этой функции, непрерывную внутри круга  $|\xi| < 1$ , следует представить ее в виде

$$h(\xi) = \frac{A}{(1 - \xi^n)^{2/n}},$$

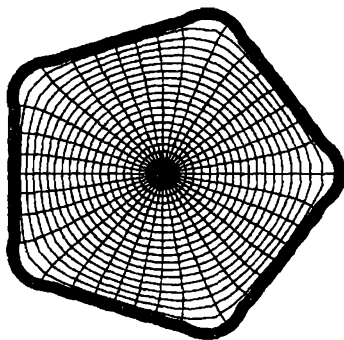
где  $A = \exp(2\pi i/n)$ . Полагая, наконец, в формуле (6.12)  $CA = C'$ ,  $C_1 = 0$ , представим отображающую функцию в виде

$$w = C' \int_0^z \frac{d\xi}{(1 - \xi^n)^{2/n}}. \quad (6.101)$$

Функция (6.101) не является элементарной. Для ее вычисления можно разложить подынтегральную функцию в ряд Тейлора и почленно его проинтегрировать. Полагая  $C' = 1$ , получаем следующий степенной ряд:

$$\begin{aligned} w = z + \frac{2}{n} \frac{z^{n+1}}{n+1} + \frac{2}{n} \left( \frac{2}{n} + 1 \right) \frac{1}{2!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \\ + \frac{2}{n} \left( \frac{2}{n} + 1 \right) \left( \frac{2}{n} + 2 \right) \frac{1}{3!} \frac{z^{3n+1}}{3n+1} + \dots \end{aligned} \quad (6.102)$$

На фиг. 6.43 представлено отображение полярной сети в круге  $|z| < 1$ , реализуемое функцией (6.102), в которой удержано 8 слагаемых, при  $n = 5$ .



Фиг. 6.43. Приближенное отображение круга на правильный пятиугольник

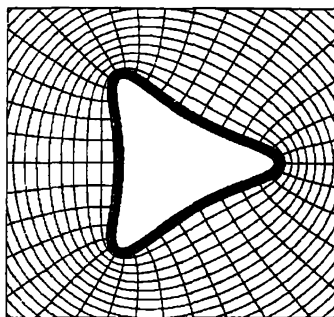
2. Для построения конформного отображения внешности круга  $|z| > 1$  на внешность правильного  $n$ -угольника следует воспользоваться формулой (6.19). В этом случае точки  $b_k$  также будут расположены на единичной окружности в вершинах правильного  $n$ -угольника; положим  $b_k = \exp(2\pi i k/n)$ . Функция (6.19) принимает вид

$$w = C \int_{z_0}^z g(\xi) d\xi + C_1, \quad (6.103)$$

где  $g(\xi) = 1/\xi^2 \prod_{k=1}^n (\xi - b_k)^{2/n} = 1/\xi^2 (\xi^n - 1)^{2/n} = (1 - 1/\xi^n)^{2/n}$ . Для вычисления неэлементарной функции (6.103) можно разложить функцию  $g(\xi)$  в ряд Лорана при  $|\xi| > 1$  и почленно его проинтегрировать. Полагая  $C = 1$ ,  $C_1 = 0$ , получим

$$w = z - \frac{2}{n} \frac{z^{1-n}}{1-n} - \frac{2}{n} \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \frac{1}{2!} \frac{z^{1-2n}}{2n-1} + \dots, \quad (6.104)$$

Отображение полярной сети во внешности круга  $|z| > 1$ , реализуемое функцией (6.104), в которой удержано три члена, при  $n = 3$  представлено на фиг. 6.44.



Фиг. 6.44. Приближенное отображение внешности круга на внешность правильного треугольника

3. Пусть область  $G$  представляет полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  с  $(n - 1)$  симметричными разрезами вдоль отрезков  $[0, h \exp(\pi i k/n)]$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ), концы которых лежат в вершинах правильного  $2n$ -угольника. Для отображения области  $G$  на полуплоскость  $\text{Im } \xi > 0$  следует использовать функцию, отображающую внешность круга  $|z| > 1$  на внешность звездообразного разреза, состоящего из  $2n$  разных отрезков (см. раздел 5.2.4):

$$w = \left[ \frac{1}{2} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) \right]^{1/n}. \quad (6.105)$$

Функция (6.105) имеет вещественные значения при вещественных значениях  $z$ , если  $|z| > 1$ . Она отображает полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  с выброшенным полукругом  $|z| < 1$  на рассматриваемую область  $G$ . Полуплоскость  $\text{Im } \xi > 0$  отображается на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  с выброшенным полукругом  $|z| < 1$  с помощью обратной функции Жуковского:

$$z = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Таким образом, отображение полуплоскости  $\text{Im } \xi > 0$  на область  $G$  реализуется композицией функций

$$\begin{aligned} z &= \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}, \\ w &= \left[ \frac{1}{2} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) \right]^{1/n}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Функцию (6.106) можно представить в виде

$$w = (T_n(\xi))^{1/n}, \quad (6.107)$$

где

$$T_n(\xi) = \frac{1}{2} [(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^n + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n]. \quad (6.108)$$

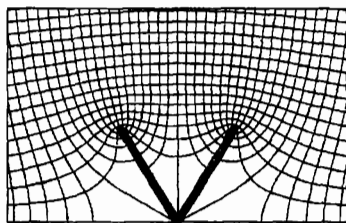
Функция  $T_n$  представляет полином Чебышева. Иначе его можно представить в виде

$$T_n(\xi) = \cos(n \arccos \xi) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} \xi).$$

Для того, чтобы ЭВМ вычисляла главную ветвь функции (6.107), непрерывную в полуплоскости  $\operatorname{Im} \xi > 0$ , следует представить ее в виде

$$w = \xi \left( \frac{T_n(\xi)}{\xi^n} \right)^{1/n} = \xi \left[ \frac{\cos(n \arccos \xi)}{\xi^n} \right]^{1/n}. \quad (6.109)$$

Отображение декартовой сети в полуплоскости  $\operatorname{Im} \xi > 0$ , реализуемое функцией (6.109) при  $n = 3$ , представлено на фиг. 6.45.



Фиг. 6.45. Поток в полуплоскости с симметричными звездообразными разрезами

4. Отображение круга  $|z| < 1$  на полосу с  $n$  симметричными прямыми рукавами производится композицией функций

$$t = z \left( \frac{2}{1 + z^n} \right)^{2/n}, \quad (6.110)$$

$$w = C_1 \int \frac{dt}{t^n - 1} + C_2. \quad (6.111)$$

Интеграл (6.111) вычисляется разложением подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\frac{1}{t^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{t - b_k},$$

где  $b_k = \exp(2\pi i k/n)$ . Интеграл (6.111) имеет вид

$$w = \overline{C}_1 \sum_{k=1}^n b_k \ln(t - b_k) + C_2.$$

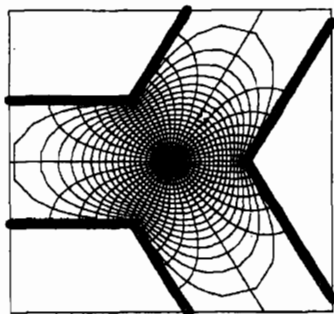
Для вычисления главной ветви этой многозначной функции, непрерывной в круге  $|z| < 1$ , ее следует представить в виде

$$w = \overline{C}_1 \sum_{k=1}^n b_k \ln\left(1 - \frac{t}{b_k}\right) + C.$$

Отображение, реализуемое композицией функций

$$\begin{aligned} t &= z \left( \frac{2}{1 + z^n} \right)^{2/n} \\ w &= \sum_{k=1}^n b_k \ln\left(1 - \frac{t}{b_k}\right) \end{aligned}$$

при  $n = 3$ , представлено на фиг. 6.46.



Фиг. 6.46. Функция источника для полосы с тремя симметричными прямыми рукавами

# Визуализация регулярных гармонических векторных полей методом конформного отображения

В главе II был рассмотрен ряд физических задач, решаемых методом конформного отображения на канонические области. В главе IV рассмотрены задачи визуализации плоских векторных полей с точечными особенностями. В настоящей главе рассматриваются задачи визуализации плоских гармонических векторных полей без особенностей, решаемые методом конформного отображения на неканонические области – например, на плоскость с разрезом вдоль отрезка или луча прямой, полуполосу или полосу с разрезом вдоль луча.

## 7.1 Поток, набегающий на бесконечную кривую и разветвляющийся на ней

Пусть  $L$  – бесконечная кривая плоскости  $w$ , ограничивающая криволинейную угловую область  $G$  с раствором  $2\pi$ ;  $w_0$  – некоторая точка кривой  $L$ . Рассмотрим поток идеальной жидкости, набегающий на кривую  $L$  и разветвляющийся в точке  $w_0$  на два потока, обтекающих кривую  $L$  с обеих сторон. Задачу визуализации такого потока с разветвлением можно решить с помощью конформного отображения области  $G$  на плоскость  $z$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси, при котором точки  $w = \infty$  и  $w = w_0$  отображаются соответственно в точки  $z = \infty$  и  $z = 0$ .

Строится такое отображение следующим образом. Пусть функция  $\xi = F(w)$  отображает область  $G$  на полуплоскость  $\text{Im } \xi > 0$  так, что



точка  $w = \infty$  отображается в точку  $\xi = \infty$ . Обозначим образ точки  $w_0$  через  $p$ :  $p = F(w_0)$ . Отображение полуплоскости  $\text{Im } \xi > 0$  на плоскость  $z$  с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси с нужным соответствием точек реализуется функцией

$$z = -(\xi - p)^2.$$

Для потока, направленного вдоль оси  $x$ , разрез вдоль отрезка или луча вещественной оси не препятствует движению жидкости, поэтому комплексный потенциал такого потока будет  $v_0 z$ , где  $v_0$  — скорость потока. Декартова сеть плоскости  $z$  представляет сеть эквипотенциалей и линий тока для такого потока.

Обратное отображение плоскости  $z$  с разрезом на область  $G$  осуществляется композицией функций

$$\begin{aligned}\xi &= i\sqrt{z} + p, \\ w &= f(\xi),\end{aligned}\tag{7.1}$$

где функция  $f(\xi)$  является обратной к функции  $\xi = F(w)$ . Функция (7.1) отображает декартову сеть в сеть эквипотенциалей и линий тока рассматриваемого потока с разветвлением.

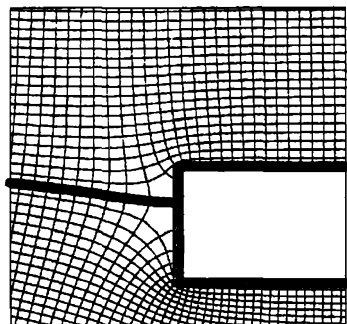
С помощью формул (7.1) можно визуализировать поле скоростей при обтекании с разветвлением любой кривой, представленной в каталоге 3 Атласа конформных отображений. Следует только учесть, что для угловых областей с раствором, меньшим чем  $2\pi$ , тоже можно построить поток с разветвлением по формулам (7.1), однако в этом случае скорость потока в бесконечно удаленной точке будет бесконечной. В таких областях поток с разветвлением не является физически реализуемым.

### Пример 7.1.

Подставляя в формулу (7.1) функцию  $w = f(\xi)$ , отображающую полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на внешность бесконечной полуполосы (каталог 3, область 22), получим

$$\begin{aligned}\tau &= i\sqrt{z} + p, \\ w &= ir\sqrt{1-\tau^2} + i\arcsin \tau.\end{aligned}$$

Отображение декартовой сети, осуществляемое этой функцией при  $p = 0.3$ , представлено на фиг. 7.1. Положение точки разветвления потока



Фиг. 7.1. Разветвление потока на полубесконечной толстой пластине

можно изменять, варьируя параметр  $p$ .

Фиг. 7.1 визуализирует также гармонически-сопряженное поле  $\vec{E} = \vec{v}^*$ . Поле  $\vec{E}$  можно интерпретировать как электрическое поле вблизи края заряженной проводящей полубесконечной плиты, внесенной в однородное электрическое поле.

## 7.2 Бесциркуляционное обтекание произвольного цилиндра

В настоящем разделе рассматривается плоская задача обтекания цилиндра произвольного сечения с направляющей кривой  $L$ . Пусть плоская область  $G$  представляет внешность контура  $L$ . Рассмотрим задачу обтекания контура  $L$  потоком, имеющим в бесконечности скорость  $\vec{v}_0$ , составляющую угол  $\alpha$  с осью  $x$ .

Поле скоростей идеальной жидкости при бесциркуляционном обтекании контура  $L$  представляет гармоническое плоское векторное поле  $\vec{v}$ , удовлетворяющее условиям

$$\vec{v}|_{\infty} = \vec{v}_0, \quad (7.2)$$

$$v_n|_L = 0, \quad (7.3)$$

$$\Gamma = \int_L (\vec{v} \cdot \vec{t}) ds = 0, \quad (7.4)$$

где  $v_n$  означает нормальную компоненту скорости:  $v_n = (\vec{v} \cdot \vec{n})$ ,

а  $(\vec{v} \cdot \vec{t})$  представляет касательную компоненту.

Векторному полю, определяемому условиями (7.2)-(7.4), можно дать иную физическую интерпретацию: оно представляет, например, магнитное поле в окрестности сверхпроводящего цилиндра  $L$ , помещенного в однородное внешнее магнитное поле  $\vec{v}_0$ . Условие (7.4) в этом случае означает, что вдоль цилиндра не течет электрический ток.

Можно визуализировать векторное поле  $\vec{v}$ , построив конформное отображение области  $G$  на внешность отрезка вещественной оси. Строится оно следующим образом.

Область  $G$  можно отобразить некоторой функцией  $\xi = F(w)$  на внешность единичного круга  $|\xi| > 1$  так, что  $F(\infty) = \infty$ ,  $F'(\infty) > 0$ . При этом направление потока в бесконечности сохраняется. Поворотом  $s = e^{-i\alpha}\xi$  получим поток, направленный вдоль оси  $x$ . Функция Жуковского  $z = 1/2(s + 1/s)$  отображает рассматриваемую область на внешность отрезка  $[-1, 1]$ .

Отрезок вещественной оси не оказывает никакого воздействия на поток, направленный вдоль вещественной оси. Поэтому на плоскости  $z$  сетью эквипотенциалей и линий тока рассматриваемого потока является декартова сеть.

Обратное отображение плоскости  $z$  с разрезом вдоль отрезка  $[-1, 1]$  на область  $G$  осуществляется последовательностью преобразований

$$\begin{aligned} s &= z + \sqrt{z^2 - 1}, \\ \xi &= e^{i\alpha} s, \\ w &= f(\xi), \end{aligned} \quad (7.5)$$

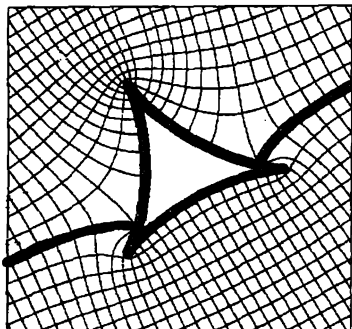
где  $f(\xi)$  представляет функцию, обратную к функции  $\xi = F(w)$ .

С помощью формул (7.5), используя программу CONFORMAL пакета Maple, можно визуализировать поле скоростей при бесциркуляционном обтекании любой кривой, представленной в каталоге 2 Атласа конформных отображений.

### Пример 7.2.

На фиг. 7.2 представлена картина бесциркуляционного обтекания трехзаходной эпициклоиды (иногда называемой кривой Штейнера), для которой  $f(\xi) = \xi + 0.5/\xi^2$ , при  $\alpha = 0.5$ . Направление набегающего потока можно изменять, варьируя параметр  $\alpha$ .

Наряду с полем  $\vec{v}$  на фиг. 7.2 представлено также гармонически сопряженное поле  $\vec{A} = \vec{v}^*$ . Поле  $\vec{A}$  можно интерпретировать как элек-



Фиг. 7.2. Беспорядочное обтекание кривой Штейнера

трическое поле незаряженного проводящего цилиндра  $L$ , помещенного в однородное внешнее электрическое поле  $\vec{A}_0 = [\vec{k} \times \vec{v}_0]$ . Иначе его можно интерпретировать как магнитное поле в окрестности цилиндра  $L$ , изготовленного из идеального магнетика и помещенного в однородное магнитное поле  $\vec{A}_0$ .

В заключение отметим, что комплексный потенциал потока, направленного вдоль вещественной оси и обтекающего (без циркуляции) окружность единичного радиуса, представляет функцию Жуковского. Изотермическая сеть функции Жуковского, изображенная выше на фиг. 3.13, представляет сеть эквипотенциалей и линий тока для такого потока.

### 7.3 Общая задача обтекания цилиндра

Пусть область  $G$  плоскости  $w$  представляет внешность контура  $L$ . Общая задача обтекания контура  $L$  представляет задачу определения гармонического векторного поля, имеющего заданную циркуляцию  $\Gamma$  и скорость в бесконечно удаленной точке  $\vec{v}_0$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{v}|_{\infty} &= \vec{v}_0, \\ v_n|_L &= 0, \\ \Gamma &= \int_L (\vec{v} \cdot \vec{t}) ds \neq 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Поле  $\vec{v}$  определяется условиями (7.6) однозначно.

Векторное поле  $\vec{v}$  имеет, наряду с гидродинамической, и другую физическую интерпретацию. Его можно трактовать, например, как магнитное поле в окрестности сверхпроводящего цилиндра  $L$ , вдоль которого течет электрический ток  $\Gamma$ , при наличии однородного внешнего магнитного поля  $\vec{v}_0$ .

Гармонически-сопряженное векторное поле  $\vec{E} = \vec{v}^*$  имеет смысл электростатического поля проводящего цилиндра  $L$ , помещенного в однородное внешнее электрическое поле  $\vec{E}_0 = [\vec{k} \times \vec{v}_0]$  и несущего электрический заряд на единицу длины  $\Gamma$ .

Движение жидкости с циркуляцией можно представить как наложение двух движений – чисто циркуляционного движения с циркуляцией  $\Gamma$  и нулевой скоростью в бесконечности, и бесциркуляционного движения. Рассмотрим сначала общую задачу обтекания круглого цилиндра.

### 7.3.1 Обтекание круглого цилиндра

Пусть область  $D$  комплексной плоскости  $z$  представляет внешность круга радиуса  $R$ :  $|z| > R$ . Комплексный потенциал чисто циркуляционного обтекания круга с циркуляцией  $\Gamma$  является бесконечно-значной функцией

$$\Phi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z.$$

Для вычисления комплексного потенциала бесциркуляционного обтекания круга потоком со скоростью  $v_0 = |v_0| e^{i\alpha}$  произведем сначала поворот:  $\zeta = e^{-i\alpha} z$ . На плоскости  $\zeta$  получим задачу бесциркуляционного обтекания круга радиуса  $R$  потоком, имеющим в бесконечности скорость  $|v_0|$ , направленную вдоль вещественной оси. С помощью функции

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}$$

внешность круга отображается конформно на внешность отрезка вещественной оси  $(-2R, 2R)$  так, что  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\varphi'(\infty) = 1$ .<sup>1</sup>

Отрезок вещественной оси не возмущает потока, направленного вдоль вещественной оси. Комплексный потенциал такого потока равен

<sup>1</sup>Последнее условие потребовалось для того, чтобы не пересчитывать скорость потока в бесконечно удаленной точке.

$|v_0|\varphi(\zeta)$ . Возвращаясь к переменной  $z$ , запишем комплексный потенциал в виде

$$\Phi_2 = |v_0| \left( e^{-i\alpha} z + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) = \bar{v}_0 z + v_0 \frac{R^2}{z}.$$

Комплексный потенциал циркуляционного обтекания круга имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \bar{v}_0 z + v_0 \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z. \quad (7.7)$$

Линии тока представляют изолинии (линии уровня) функции тока  $V = \operatorname{Im} \Phi$ . Такое семейство линий можно построить с помощью программы CONTOURPLOT пакета MAPLE.

Картина линий тока при циркуляционном обтекании круга имеет различный вид для различных значений  $\Gamma$ . Скорость потока определяется по формуле (2.13):

$$\overline{v(z)} = \Phi'(z) = \bar{v}_0 - v_0 \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z}.$$

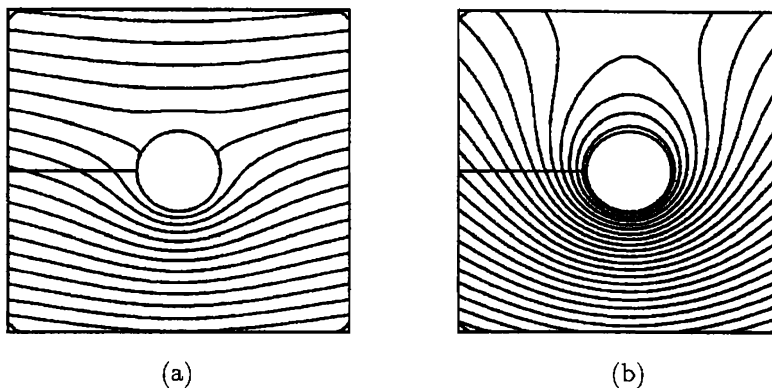
Критическими точками потока являются корни квадратного уравнения

$$\bar{v}_0 z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - v_0 R^2 = 0. \quad (7.8)$$

В случае, когда  $v_0$  вещественно ( $v_0 = |v_0| > 0$ ), уравнение (7.8) имеет корни

$$z_{1,2} = -\frac{\Gamma}{4\pi i v_0} \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2}}.$$

Если  $|\Gamma| < 4\pi R v_0$ , то оба корня уравнения (7.8) комплексны, причем  $|z_{1,2}| = R$ . Одна из критических точек в этом случае является точкой разветвления потока, другая – точкой схода потока. При  $|\Gamma| < 4\pi R v_0$  окружность  $|z| = R$  представляет часть разветвляющейся линии тока. Картина линий тока в этом случае изображена на фиг. 7.3, а.



Фиг. 7.3. Обтекание круглого цилиндра при малой (а) и большой (б) циркуляции

При  $|\Gamma| > 4\pi Rv_0$  обе критические точки  $z_{1,2}$  являются чисто мнимыми:

$$z_{1,2} = -\frac{\Gamma}{4\pi i v_0} \pm i \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 v_0^2} - R^2}.$$

Одна из точек  $Z_{1,2}$  лежит вне круга, другая – внутри круга  $|z| < R$ , т.е. вне области течения. В этом случае около круга существует область, в которой траектории частиц жидкости являются замкнутыми. Картина линий тока в этом случае изображена на фиг. 7.3, б.

### 7.3.2 Циркуляционное обтекание произвольного цилиндра

Плоская задача обтекания цилиндра произвольного сечения (7.6) может быть сведена с помощью конформного отображения к задаче обтекания круглого цилиндра.

Пусть функция  $z = F(w)$  отображает внешность контура  $L$  на внешность единичного круга  $|z| > 1$  так, что  $F(\infty) = \infty$ ,  $F'(\infty) > 0$ . Функция  $F(w)$  имеет в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка:  $F(w) = Cw + \psi(w)$ , где  $\psi(w)$  – функция, регулярная в бесконечно удаленной точке,  $C = F'(\infty) > 0$ . Функция  $\xi = \varphi(w) = F(w)/C$  отображает область  $G$  на внешность круга  $|\xi| > R$  (где  $R = 1/C = 1/F'(\infty)$ )

так, что  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\varphi'(\infty) = 1$ .<sup>2</sup>

На плоскости  $\xi$  мы имеем задачу обтекания круга радиуса  $R$  потоком, имеющим скорость  $v_0 = |\vec{v}_0|e^{i\alpha}$  и циркуляцию  $\Gamma$ . Ее решение выражается формулой (7.7):

$$\Phi = \vec{v}_0 \left( e^{-i\alpha}\xi + \frac{e^{i\alpha}R^2}{\xi} \right) - iQ \ln \xi,$$

где  $Q = \Gamma/2\pi$ .

Возвращаясь к переменной  $w$  и опуская несущественное постоянное слагаемое, получим комплексный потенциал обтекания произвольного контура  $L$  в виде

$$\Phi = \frac{|v_0|}{F'(\infty)} \left( e^{-i\alpha}F(w) + \frac{e^{i\alpha}}{F(w)} \right) - iQ \ln F(w). \quad (7.9)$$

Функцию (7.9) удобнее представить в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{-i\alpha}z + \frac{e^{i\alpha}}{z} - iQ \ln z, \\ w &= f(z), \end{aligned} \quad (7.10)$$

где  $f(z)$  — функция, обратная к функции  $z = F(w)$ , а  $z$  — параметр, принимающий всевозможные значения из области  $|z| > 1$ .

При  $|Q| < 2$  получается картина с двумя критическими точками на кривой  $L$ . При  $|Q| > 2$  поток имеет одну критическую точку вне контура  $L$ . В этом случае в окрестности кривой  $L$  существует область, заполненная замкнутыми траекториями.

Следует отметить, что при циркуляционном обтекании цилиндра комплексный потенциал (7.9) является многозначной функцией. При выделении однозначной ветви функции  $\ln z$  у скалярного потенциала  $U = \operatorname{Re} \Phi$  появляются разрывы. Однако ни поле скорости, ни функция тока  $V = \operatorname{Im} \Phi$ , ни линии тока никаких разрывов не имеют.

Уравнение (7.9) невозможно разрешить в элементарных функциях относительно координат точек потока  $w$ . Поэтому для построения картины циркуляционного обтекания цилиндра программа CONFORMAL пакета Maple неприменима. Линии тока циркуляционного потока можно строить как изолинии функции тока  $V = \operatorname{Im} \Phi$ , используя любую программу построения изолиний функции двух переменных, например, программу CONTOURPLOT пакета Maple.

<sup>2</sup>Величина  $R = 1/C$  называется конформным радиусом области  $G$ .



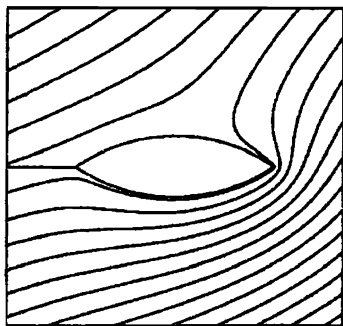
**Пример 7.3.**

Линии тока при обтекании кругового двуугольника (линзы), построенные с помощью отображающей функции

$$s = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2p},$$

$$w = \frac{1+s}{1-s}$$

при  $p = 0.8$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $Q = 1$ , изображены на фиг. 7.4.



Фиг. 7.4. Циркуляционное обтекание линзы

В заключение отметим, что формулы (7.9)–(7.10) справедливы в той системе отсчета, в которой цилиндр покоится, а жидкость движется. При этом слагаемое

$$\Phi_0 = \bar{v}_0 z = \bar{v}_0 F(w)$$

в выражении (7.9) представляет потенциал невозмущенного движения жидкости. Если же жидкость в бесконечности покоится, а цилиндр движется со скоростью  $-\bar{v}_0$ , то слагаемое  $\Phi_0$  в выражении (7.9) отсутствует. В этой системе отсчета (связанной с жидкостью) комплексный потенциал циркуляционного движения равен

$$\Phi = v_0 \frac{R^2}{F(w)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} F(w).$$

Визуализировать поток в этой системе отсчета можно, используя параметрическое задание комплексного потенциала

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{e^{i\alpha}}{z} - iQ \ln z, \\ w &= f(z)\end{aligned}\tag{7.11}$$

### 7.3.3 Обтекание аэродинамических профилей

В некоторых задачах аэродинамики малых скоростей (при расчетах движения самолета со скоростью, значительно меньшей скорости звука) воздух можно рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость. При расчетах обтекания крыла большого размаха можно рассматривать крыло как бесконечно длинный цилиндр, а поток воздуха – как плоско - параллельный. В этом случае для расчета полей скоростей частиц воздуха, обтекающего крыло бесконечного размаха, можно использовать формулы (7.9)–(7.10).

Аэродинамическими профилями называются плоские кривые, используемые для аппроксимации сечения крыла самолета. Как правило, аэродинамические профили имеют одну острую кромку (точку излома или точку возврата).

При обтекании аэродинамического профиля потоком с заданной скоростью и углом атаки и произвольной циркуляцией скорость воздуха на острой кромке, вообще говоря, бесконечна.<sup>3</sup> Однако всегда можно подобрать циркуляцию так, чтобы точка схода совпала с острой кромкой. В этом случае скорость воздуха на кромке будет конечной. Такую циркуляцию мы будем называть предпочтительной.<sup>4</sup>

Простейшей кривой, аппроксимирующей профиль крыла самолета, является профиль Жуковского, представляющий отображение окружности с помощью функции Жуковского (см. раздел 3.4). Профиль Жуковского имеет точку возврата, т.е. угол в точке его заострения равен 0. Такие профили не реализуются технологически.

Лучшую аппроксимацию к реальным профилям дает профиль, представляющий отображение окружности посредством обобщенной функ-

<sup>3</sup>Углом атаки называется угол между направлением набегающего потока и какой-либо хордой профиля.

<sup>4</sup>Утверждение о том, что в реальном потоке точка схода перемещается под влиянием конечной вязкости и сжимаемости воздуха на острую кромку, называется в аэродинамике постулатом Жуковского - Чаплыгина. Этот постулат позволяет определять циркуляцию, возникающую при обтекании заданного профиля, и связанную с ней подъемную силу крыла.

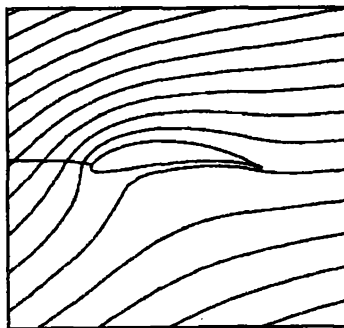
ции Жуковского (см. раздел 5.1.1). В иностранной литературе такие профили называются профилями Кармана – Треффтца, что исторически неверно.

#### Пример 7.4.

На фиг.7.5 представлена картина обтекания обобщенного профиля Жуковского. Изображение построено по формулам (7.10), где функция  $w = f(z)$  задавалась как последовательность преобразований

$$\begin{aligned} s &= i \operatorname{tg} a - d e^{-i\alpha}, \\ t &= z(1/\cos a + d) + s, \\ r &= \left( \frac{t-1}{t+1} \right)^{2-p}, \\ w &= \frac{1+r}{1-r} \end{aligned}$$

при  $a = 0.2$ ,  $d = 0.1$ ,  $p = 0.05$ .

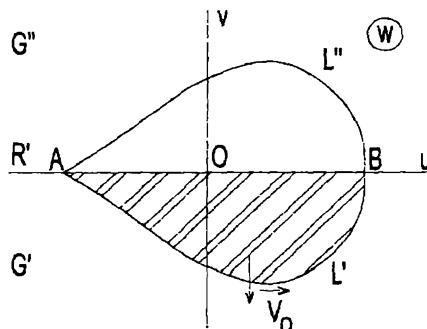


Фиг. 7.5. Обтекание обобщенного профиля Жуковского

Угол атаки был задан равным 0.4, циркуляция  $Q$  подбиралась так, чтобы точка схода потока находилась на кромке профиля. При заданных параметрах предпочтительная величина циркуляции оказалась равной  $Q = -1.11$ .

## 7.4 Задача об ударе твердого цилиндра о поверхность несжимаемой жидкости

Пусть  $L'$  – незамкнутая конечная кривая, расположенная в полуплоскости  $\text{Im } w < 0$ , концы которой – точки  $A$  и  $B$  – лежат на вещественной оси (фиг. 7.6). Обозначим через  $\mathcal{R}'$  часть вещественной оси, распо-



Фиг. 7.6. Удар цилиндра о поверхность несжимаемой жидкости

женную вне отрезка  $[A, B]$ . Через  $G'$  обозначим часть полуплоскости  $\text{Im } w < 0$ , лежащую вне кривой  $L'$ . Будем рассматривать кривую  $L'$  как направляющую линию бесконечного твердого цилиндра, который тоже обозначим  $L'$ . Предположим, что область  $G'$  заполнена идеальной несжимаемой жидкостью, которая до момента  $t = 0$  находится в покое.

Пусть в момент  $t = 0$  цилиндру  $L'$  сообщается (например, в результате удара) скорость  $\vec{V}_0$ , направленная вертикально вниз:  $\vec{V}_0 = -V_0 \vec{j}$ . Рассмотрим задачу об определении скоростей частиц жидкости сразу после удара. В момент удара в жидкости образуется напряженное состояние, характеризующееся ударным (импульсным) давлением  $p(u, v)$ . После удара в жидкости возникает плоское гармоническое поле скоростей  $\vec{V}$  с потенциалом  $U(u, v) = p(u, v)/\rho$ , где  $\rho$  – плотность жидкости. На свободной поверхности  $\mathcal{R}'$  давление  $p$ , а значит, и потенциал  $U$ , равны нулю. На поверхности цилиндра  $L'$  нормальная компонента скорости  $V_n$  равна  $(\vec{V}_0 \cdot \vec{n})$ , где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к кривой  $L'$ .

Таким образом, задача об определении поля скоростей жидкости  $\vec{V} = \text{grad } U$  сразу после удара сводится к смешанной граничной за-

даче для потенциала  $U(u, v)$ :

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0 \quad \text{в области } G', \\ \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{L'} &= (\vec{V}_0 \cdot \vec{n}), \\ U|_{\mathcal{R}'} &= 0, \\ U|_{\infty} &= 0.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Задача (7.12) может быть сведена с помощью принципа симметрии к задаче о движении цилиндра в неограниченной среде, рассмотренной в разделе (7.3)

Рассмотрим область  $G''$ , симметричную области  $G'$  относительно вещественной оси  $\mathcal{R}$ , и кривую  $L''$ , симметричную кривой  $L'$ . Объединение кривых  $L'$  и  $L''$  обозначим  $L$ , а объединение областей  $G'$  и  $G''$  обозначим  $G$ . Аналитически продолжая функцию  $U$  из области  $G'$  в область  $G''$ , получим задачу о движении симметричного цилиндра  $L$  со скоростью  $\vec{V}_0$  и нулевой циркуляцией в покоящейся неограниченной среде. Действительно, в таком случае вещественная ось  $\mathcal{R}$  является эквипотенциалю. Комплексный потенциал скоростей жидкости был получен в разделе 7.3.2. Полагая в формуле (7.11)  $v_0 = i$ ,  $Q = 0$ , имеем

$$\Phi = \frac{i}{z} = \frac{i}{F(w)},\tag{7.13}$$

где  $F(w)$  — функция, реализующая конформное отображение области  $G$  на внешность единичного круга  $|z| > 1$  и удовлетворяющая условиям  $F(\infty) = \infty$ ,  $F'(\infty) > 0$ . Сеть линий тока и эквипотенциалей (ударных изобар) представляет изотермическую сеть функции (7.13). Для визуализации поля скоростей удобнее представить зависимость функции  $\Phi$  от координат точки  $w$  в параметрической форме

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{i}{z}, \\ w &= f(z),\end{aligned}\tag{7.14}$$

где  $f(z)$  представляет функцию, обратную к функции  $z = F(w)$ , а комплексный параметр  $z$  принимает любое значение из области  $\text{Im } z < 0$ ,  $|z| > 1$ .

Используя программу CONTOURPLOT пакета Maple, можно с помощью формул (7.14) визуализировать решение задачи удара для некоторых симметричных (относительно вещественной оси) областей, представленных в каталоге 2 Атласа конформных отображений.

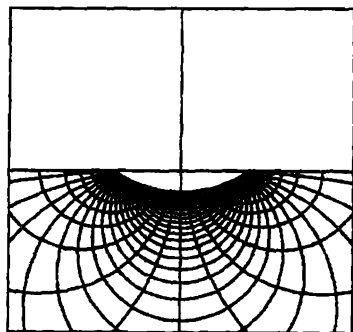
Следует иметь в виду, что движение реальной жидкости после удара описывается формулой (7.14) только в том случае, если нормаль к кривой  $L'$  составляет острый угол с вектором  $\vec{V}_0$ , т.е. если жидкость при ударе подвергается сжатию. Если на части кривой  $L'$  условие  $(\vec{n}, \vec{V}_0) > 0$  нарушено, то движение реальной жидкости будет значительно отличаться от рассматриваемой модели безотрывного движения, т.к. на этой части кривой  $L'$  произойдет отрыв жидкости от стенки (кавитация).

### Пример 7.5.

На **фиг. 7.7** изображены линии тока и ударные изобары при ударе сегмента круга о поверхность несжимаемой жидкости. Вычисления проводились по формулам (7.14), причем функция  $w = f(z)$  задавалась последовательностью преобразований

$$t = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^{2p}, \quad w = \frac{1+t}{1-t},$$

а  $p$  полагалось равным 0.8.



Фиг. 7.7. Удар сегмента круга о поверхность жидкости

### 7.5 Смешанная граничная задача в криволинейной угловой области. Простейшая задача теории фильтрации

Пусть  $G$  – криволинейная угловая область комплексной плоскости  $w$ , граница  $L$  которой разбита точками  $w_1$  и  $w_2$  на три части  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , из которых  $L_1$  и  $L_3$  бесконечны. Рассмотрим задачу о распределении электрического тока  $\vec{J}$  в области  $G$  в том случае, когда участок  $L_2$  электрически изолирован, а участки  $L_1$  и  $L_3$  являются эквипотенциалами с заданными значениями потенциалов  $U_1$  и  $U_3$ .

Гармоническое векторное поле  $\vec{J}$  имеет потенциал  $U(u, v)$ , представляющий решение смешанной граничной задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0, \\ U|_{L_1} &= U_1, \\ \frac{\partial U}{\partial n}|_{L_2} &= 0, \\ U|_{L_3} &= U_3.\end{aligned}\tag{7.15}$$

К граничной задаче (7.15) сводится, также, простейшая плоская задача о фильтрации грунтовых вод под плотиной. В этом случае область  $G$  представляет криволинейную полуплоскость (водоупорный слой отсутствует), кривая  $L_2$  представляет непроницаемую поверхность сооружения (флютбет), а кривые  $L_1$  и  $L_3$  представляют изобары – лучи горизонтальных прямых:  $L_1$  – дно верхнего бьефа плотины, а  $L_3$  – дно нижнего бьефа.

Наряду с гармоническим полем  $\vec{J} = \text{grad } U$  мы будем рассматривать гармонически-сопряженное поле  $\vec{A} = \vec{J}^*$ . Векторное поле  $\vec{A}$  представляет плотность электрического тока в области  $G$  в том случае, когда участок ее границы  $L_2$  представляет электрод, через который в пластинку подается ток  $I = U_2 - U_1$ . Другой электрод предполагается помещенным в бесконечно удаленной точке, а участки  $L_1$  и  $L_3$  электрически изолированы (они представляют линии тока для поля  $\vec{A}$ ).

Поля  $\vec{J}$  и  $\vec{A}$  можно визуализировать одновременно, построив конформное отображение области  $G$  на адекватную область – полуполосу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$ . Точнее, следует конформно отобразить область  $G$  на указанную полуполосу так, чтобы точка  $w = \infty$  отобра-

зилась в точку  $z = \infty$ , а точки  $w_1$  и  $w_2$  — соответственно в точки  $z_1 = i\pi$  и  $z_2 = 0$ .

Построить такое отображение можно следующим образом. Пусть функция  $t = F(w)$  отображает конформно область  $G$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  так, что точка  $w = \infty$  отображается в точку  $t = \infty$ . Обозначим  $p_1 = F(w_1)$ ,  $p_2 = F(w_2)$ . Кривая  $L_2$  отображается функцией  $F(w)$  в отрезок вещественной оси  $[p_1, p_2]$ . В результате линейного преобразования

$$s = \frac{2t - p_1 - p_2}{p_2 - p_1}$$

рассматриваемая область отображается в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } s > 0$ , кривая  $L_2$  — в отрезок  $[-1, 1]$ . Наконец, функция

$$z = \text{arch } s$$

отображает полуплоскость  $\text{Im } s > 0$  на полуполосу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$  с нужным соответствием границ.

Обратное отображение полуполосы на область  $G$  осуществляется последовательностью преобразований

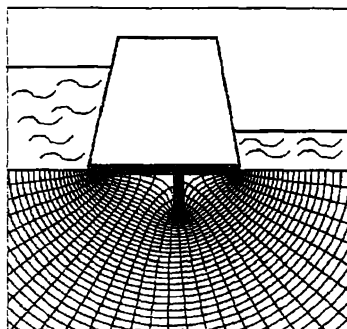
$$\begin{aligned} s &= \text{ch } z, \\ t &= \frac{s(p_2 - p_1) + p_1 + p_2}{2}, \\ w &= f(t), \end{aligned} \quad (7.16)$$

где  $f(t)$  представляет функцию, обратную к функции  $t = F(w)$ . Функция (7.16) отображает декартову сеть в полуполосу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$  в сеть эквипотенциалей и линий тока для гармонических векторных полей  $\vec{J}$  и  $\vec{A}$ . С помощью функции (7.16) можно визуализировать решение смешанной граничной задачи для любой области, представленной в каталоге 3 Атласа конформных отображений. Положение границы  $L_2$  можно изменять, варьируя вещественные параметры  $p_1$  и  $p_2$  (предполагая  $p_2 > p_1$ ).

#### Пример 7.6.

Отображение декартовой сети в полуполосу  $0 < \text{Im } z < \pi$ ,  $\text{Re } z > 0$ , реализуемое функцией (7.16) при  $f(t) = -i\sqrt{1-t^2}$ ,  $p_1 = -1.5$ ,  $p_2 = 2$ , представлено на фиг. 7.8. Сеть линий на фиг. 7.8 можно интерпретировать как картину движения грунтовых вод под плотиной, непроницаемое основание которой представляет некоторый отрезок вещественной оси (флютбет) и разрез вдоль отрезка мнимой оси  $[0, -i]$  (шпунт).





Фиг. 7.8. Фильтрация под флютбетом плотины со шпунтом

Образами отрезков прямых  $\operatorname{Re} z = \text{const}$ ,  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  являются линии тока, а образами лучей  $\operatorname{Im} z = \text{const}$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$  — линии постоянного давления (изобары).

## 7.6 Плоское электрическое поле в многоэлектродной системе.

### Поток в криволинейной полосе с $N$ рукавами

Рассмотрим на плоскости  $w$  криволинейную полосу  $G$  с  $N$  рукавами, ограниченную бесконечными кривыми  $L_1, L_2, \dots, L_N$ , занумерованными в порядке положительного обхода границы области  $G$ . Обозначим граничные точки области  $G$ , лежащие в бесконечности (рукава полосы) через  $A_1, A_2, \dots, A_N$ ,

Пусть кривые  $L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) представляют электроды многоэлектродной системы с электрическими потенциалами  $U_k$  соответственно. Задача нахождения плоского электростатического поля  $\vec{E}$ , создаваемого в области  $G$  этими электродами, сводится к задаче Дирихле для потенциала электрического поля  $U$ :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \quad \text{в области } G, \\ U|_{L_k} &= U_k. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Обозначим разность потенциалов между электродами  $L_k$  и  $L_{k-1}$  че-

рез  $p_k$ :

$$p_1 = U_1 - U_N, \quad p_k = U_k - U_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots, N).$$

Потенциалы  $U_k$  выражаются через числа  $p_k$  следующим образом:

$$U_m = U_N + \sum_{k=1}^m p_k, \quad \text{причем} \quad \sum_{k=1}^N p_k = 0.$$

Задачу Дирихле (7.17) можно решить с помощью конформного отображения области  $G$  на полуплоскость. Пусть функция  $z = F(w)$  отображает криволинейную полосу  $G$  на полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , причем рукава полосы  $A_k$  отображаются в точки вещественной оси  $a_k$ . Не ограничивая общности, можно считать

$$-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_N < \infty.$$

Функция  $U$  имеет на интервалах  $(a_k, a_{k+1})$  постоянные значения  $U_k$ . Нетрудно проверить, что гармоническая в полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  функция, принимающая кусочно-постоянные граничные значения на вещественной оси, выражается формулой

$$U = U_N - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N p_k \arg(z - a_k). \quad (7.18)$$

Действительно, при  $z = x$  для каждого слагаемого суммы (7.18) имеем

$$\arg(x - a_k) = \begin{cases} \pi, & x < a_k \\ 0, & x > a_k. \end{cases}$$

Функция (7.18) принимает на отрезке вещественной оси  $(a_m, a_{m+1})$  значение

$$U_N - \sum_{k=m+1}^N p_k = U_N + \sum_{k=1}^m p_k = U_m.$$

Потенциал электрического поля  $U$  представляет вещественную часть комплексного потенциала

$$\Phi(z) = U_N + \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^N p_k \ln(z - a_k).$$

Несущественную константу  $U_N$  мы в дальнейшем писать не будем.

Для визуализации рассматриваемого поля  $\vec{E}$  следует построить в области  $G$  изотермическую сеть функции  $\Phi(F(w))$ , которую удобнее

представить в параметрической форме

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^N p_k \ln(z - a_k) \\ w &= f(z),\end{aligned}\tag{7.19}$$

где комплексный параметр  $z$  пробегает полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , а  $f(z)$  представляет функцию, обратную к функции  $z = F(w)$ .

Изотермическая сеть функции (7.19) может быть также интерпретирована как сеть силовых линий и эквипотенциалей плоского магнитного поля, создаваемого в области  $G$   $N$  - полюсным электромагнитом, полюсы которого (кривые  $L_k$ ) изготовлены из идеального магнетика и имеют магнитные потенциалы  $U_k$  соответственно.

Гармонически сопряженное векторное поле  $\vec{v} = \vec{E}^*$  интерпретируется как поле скоростей идеальной жидкости в криволинейной полосе с  $N$  рукавами, создаваемое источниками и стоками интенсивности  $p_k$ , помещенными в рукавах полосы  $A_k$ . Для этого потока кривые  $L_k$  представляют линии тока.

#### Преобразование формул (7.19)

С помощью дробно-линейного преобразования

$$\zeta = \frac{z - i}{z + i}, \quad z = i \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}$$

верхняя полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  конформно отображается на круг  $|\zeta| < 1$ . При этом точки  $z = a_k$  отображаются в некоторые точки единичной окружности  $\zeta = b_k = (a_k - i)/(a_k + i)$ , а разности  $z - a_k$  преобразуются следующим образом:

$$z - a_k = \frac{a_k - i}{\zeta - 1} \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right).$$

В результате комплексный потенциал  $\Phi$  принимает вид

$$\Phi = \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^N p_k \ln \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right) - K \ln(\zeta - 1) + C_1,$$

$$\text{где } K = \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^N p_k = 0, \quad C_1 = \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^N p_k \ln(a_k - i).$$

Опуская несущественную константу  $C_1$ , получим зависимость комплексного потенциала  $\Phi$  от координат  $w$  в параметрическом виде

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{k=1}^N p_k \ln \left(1 - \frac{\zeta}{b_k}\right) \\ w &= f_1(\zeta),\end{aligned}\tag{7.20}$$

$$\text{где} \quad f_1(\zeta) = f\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) -$$

функция, отображающая круг  $|\zeta| < 1$  на область  $G$ , а  $\zeta$  – комплексный параметр, принимающий всевозможные значения в круге  $|\zeta| < 1$ .

### 7.6.1 Визуализация вращающегося магнитного поля в асинхронных электродвигателях трехфазного тока

Для создания вращающегося магнитного поля в асинхронных электрических двигателях используются три электромагнита, на обмотки которых подаются три фазы электрического тока. Токи в обмотках электромагнитов (и их магнитные потоки) изменяются во времени синусоидально со сдвигом фаз  $2\pi/3$ :

$$I_1 = I \sin(\omega t), \quad I_2 = I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad I_3 = I \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

где  $\omega$  – круговая частота переменного тока,  $I$  – амплитуда тока.

Магниты располагаются в пространстве симметрично с осью симметрии третьего порядка, так что углы между осями любых двух магнитов составляют  $120^\circ$ . В области между полюсами магнитов создается вращающееся магнитное поле: вектор напряженности магнитного поля в центре системы непрерывно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , сохраняя абсолютную величину.

Конструктивно три электромагнита асинхронного двигателя выполняются как один магнит с тремя или шестью полюсами. В настоящем параграфе рассматривается плоское магнитное поле, создаваемое в симметричной криволинейной полосе с тремя или (шестью) рукавами. Бесконечные кривые  $L_k$ , ограничивающие криволинейную полосу, рассматриваются как полюсы электромагнита, изготовленного из идеального магнетика. В каждый момент времени кривые  $L_k$  представляют эквипотенциалы магнитного поля. Комплексный потенциал магнитного поля вычисляется по формулам (7.20).

**Электромагнит с тремя полюсами**

Пусть полюсы электромагнита имеет форму обобщенной гиперболы — инверсии обобщенной лемнискаты третьего порядка (см. раздел 5.2.3). Конформное отображение круга  $|z| < 1$  на такую криволинейную полосу с тремя рукавами осуществляется функцией

$$w = \frac{z}{(1 - z^3)^{1/3}}.$$

Преобразами рукавов криволинейной полосы являются точки

$$b_k = e^{i2\pi k/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Магнитные потенциалы полюсов  $U_k$ , а значит, и интенсивности источников  $p_k = U_{k-1} - U_k$  в рукавах полосы изменяются периодически с круговой частотой  $\omega$  и со сдвигом фаз в  $2\pi/3$ :

$$p_k = p \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}k\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, комплексный потенциал магнитного поля, создаваемого в рассматриваемой криволинейной полосе с тремя рукавами, представляется в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=0}^2 p_k \ln\left(1 - \frac{z}{b_k}\right) \\ w &= \frac{z}{(1 - z^3)^{1/3}}, \end{aligned}$$

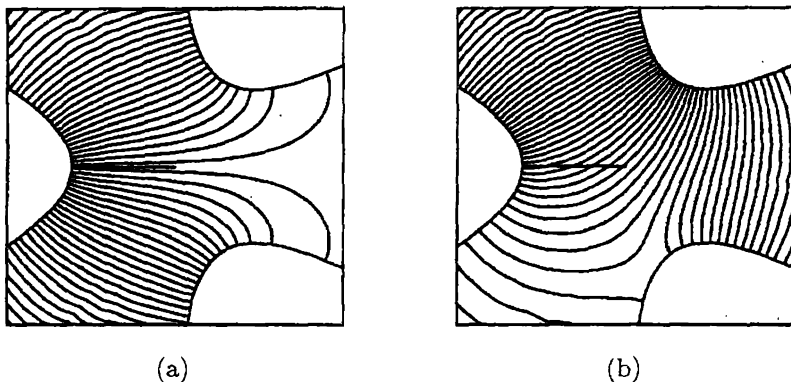
где  $z$  — параметр, принимающий всевозможные значения в круге  $|z| < 1$ . Вектор напряженности магнитного поля в центре системы составляет угол  $\omega t$  с направлением вещественной оси, т.е. этот вектор вращается с угловой скоростью  $\omega$ .

На фигуре 7.9  $a, b$  изображены силовые линии такого магнитного поля в моменты  $\omega t = 0$  и  $\omega t = \pi/4$  соответственно.

**Электромагнит с шестью полюсами**

Пусть межполюсное пространство электромагнита асинхронного двигателя представляет криволинейную полосу с шестью рукавами, ограниченную обобщенной гиперболой 6-го порядка (см. раздел 5.2.3). Отображение круга  $|z| < 1$  на такую полосу осуществляется функцией

$$w = \frac{z}{(1 - z^6)^{1/6}}.$$



Фиг. 7.9. Магнитные силовые линии в асинхронном электродвигателе с тремя полюсами в моменты  $\omega t = 0$  (a) и  $\omega t = \pi/4$  (b)

Прообразами рукавов полосы являются точки единичной окружности

$$c_m = e^{i\pi m/3}, \quad m = 0, 1, 2 \dots 5.$$

Интенсивности источников  $q_m$  в рукавах полосы изменяются периодически с круговой частотой  $\omega$  и со сдвигами фаз  $\pi/3$ :

$$q_m = q \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}m\right), \quad q = 0, 1, 2 \dots 5.$$

Комплексный потенциал магнитного поля такого электромагнита представляется в параметрической форме

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{m=0}^5 q_m \ln\left(1 - \frac{z}{c_m}\right) \\ w &= \frac{z}{(1 - z^6)^{1/6}}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Сгруппируем члены суммы (7.21) попарно, объединяя слагаемые с индексами  $m$  и  $m+3$ . Учитывая, что  $c_{m+3} = -c_m$  и  $q_{m+3} = -q_m$ , получим

$$\begin{aligned} q_m \ln\left(1 - \frac{z}{c_m}\right) + q_{m+3} \ln\left(1 - \frac{z}{c_{m+3}}\right) &= \\ = -q_m \ln \frac{1 + z/c_m}{1 - z/c_m} &= -2q_m \operatorname{arth}(z/c_m). \end{aligned}$$

Оставим в сумме (7.21) только члены с четными индексами, для которых, используя обозначения предыдущего параграфа, имеем:

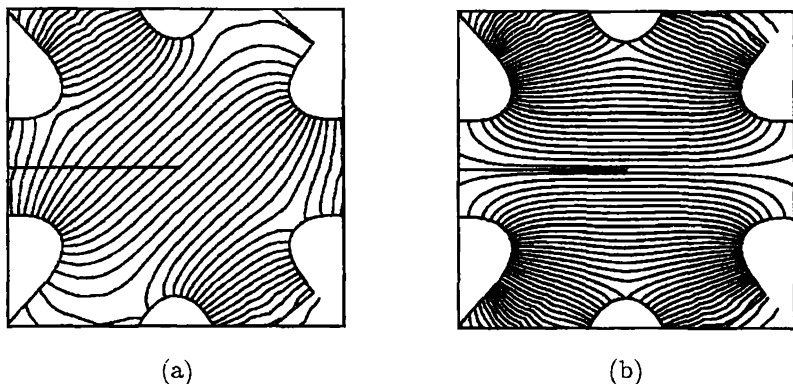
$$c_{2k} = e^{i2\pi k/3} = b_k, \quad q_{2k} = -2q \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}k\right) = p_k.$$

Окончательно комплексный потенциал магнитного поля в момент  $t$  представляется в параметрической форме:

$$\Phi = \sum_{k=0}^2 p_k \operatorname{arth}(z/b_k)$$

$$w = \frac{z}{(1 - z^6)^{1/6}}.$$

Силовые линии в электромагните с шестью полюсами представлены на фиг. 7.10  $a, b$  для моментов  $\omega t = 0$  и  $\omega t = \pi/4$  соответственно.



Фиг. 7.10. Силовые линии магнитного поля в шестиполюсном электромагните асинхронного двигателя в моменты  $\omega t = 0$  (а) и  $\omega t = \pi/4$  (б).

### 7.6.2 Визуализация электрического поля в плоской квадрупольной электронной линзе

В электронной оптике (в частности, в технике ускорителей) широко используются квадрупольные линзы. Так называются устройства создающие плоское электрическое (или магнитное) поле с двумя взаимно

перпендикулярными плоскостями симметрии. Электроды квадрупольной линзы имеют ось симметрии четвертого порядка, причем потенциалы противоположащих электродов совпадают:

$$U_1 = U_3 = V, \quad U_2 = U_4 = -V,$$

а разности потенциалов  $p_k = U_k - U_{k-1}$  соответственно равны

$$p_1 = p_3 = 2V, \quad p_2 = p_4 = -2V.$$

В качестве электродов квадрупольной линзы рассмотрим бесконечные кривые  $L_k$ , ограничивающие симметричную криволинейную полосу с четырьмя рукавами. Электрическое поле в такой области можно вычислить по формулам (7.20) настоящего раздела.

Пусть криволинейная полоса ограничена четырьмя ветвями обобщенной гиперболы, представляющей инверсию обобщенной лемнискаты 4-го порядка (см. раздел 5.2.3). Отображение круга  $|z| < 1$  на такую полосу осуществляется функцией

$$w = \frac{z}{(1 - z^4)^{1/4}}.$$

Прообразами рукавов полосы являются точки единичной окружности  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = i$ ,  $b_3 = -1$ ,  $b_4 = -i$ . Выражение комплексного потенциала (7.20) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\Phi = 2V \ln(1 - z^2) - 2V \ln(1 + z^2) = -4V \operatorname{arth} z^2.$$

Таким образом, сеть эквипотенциалов и силовых линий рассматриваемой квадрупольной линзы представляет изотермическую сеть функций  $\Phi(w)$ , заданной в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \Phi &= -4V \operatorname{arth} z^2 \\ w &= \frac{z}{(1 - z^4)^{1/4}}, \end{aligned}$$

где  $z$  — комплексный параметр, принимающий всевозможные значения в круге  $|z| < 1$ . Изотермическая сеть этой функции изображена на фиг. 7.11, а.

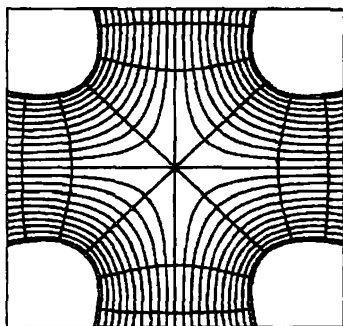
На фиг. 7.11, б представлена картина электрического поля в квадрупольной линзе с расстроенными потенциалами на электродах. Картина построена по формулам (7.20) при

$$p_1 = p_3 = 2, \quad p_2 = -2.6, \quad p_4 = -1.4,$$

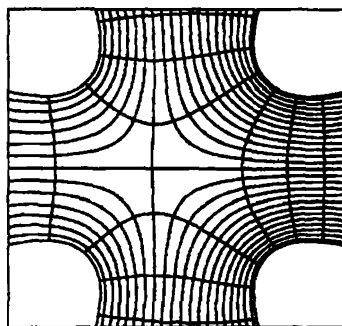


что соответствует потенциалам электродов

$$U_1 = 1.3, \quad U_2 = -1.3, \quad U_3 = 0.7, \quad U_4 = -0.7.$$



(a)



(b)

Фиг. 7.11. Электрическое поле в квадрупольной линзе с настроенными (а) и расстроенными (б) потенциалами электродов

# Атлас конформных отображений

Настоящая глава содержит Атлас основных конформных отображений односвязных областей, осуществляемых элементарными функциями. Атлас состоит из пяти каталогов соответственно классификации односвязных областей:

1. Конечные области
2. Внешности конечных контуров
3. Криволинейные угловые области
4. Криволинейные полосы
5. Криволинейные полосы с несколькими рукавами.

В первом столбце каждого каталога приводится отображающая функция  $w = f(z)$  с конкретными значениями параметров. Во втором столбце указаны допустимые значения параметров и приведены некоторые комментарии. В третьем столбце приводится отображение адекватной канонической области, построенное с помощью заданной функции.

## Каталог 1. Конечные области

В данном каталоге для каждой конечной области приводится функция  $w = f(z)$ , отображающая круг  $|z| < 1$  на рассматриваемую область. Для областей, симметричных относительно начала координат, функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$ . Этими условиями функция  $f(z)$  определяется однозначно.

$$p = 1.5$$

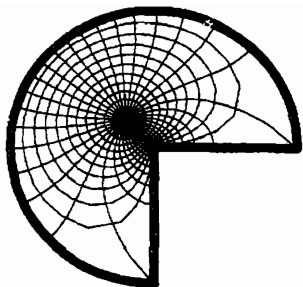
$$s = i \frac{1+z}{1-z}$$

$$t = -s + i\sqrt{1-s^2}$$

$$w = t^p$$

$$0 < p < 2$$

сектор  
круга  
раствором  $\pi p$



$$p = 3$$

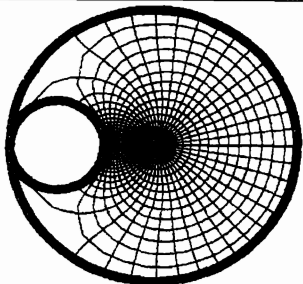
$$s = 2/\pi \operatorname{arctg} z$$

$$t = s(p-1) + (p+1)/2$$

$$w = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}$$

$$p > 1$$

лунка между  
двумя  
касающимися  
окружностями



$$a = 0.1$$

$$p = 1.5$$

$$r = \frac{z + i \sin a}{\cos a}$$

$$s = \frac{r+1}{1-r}$$

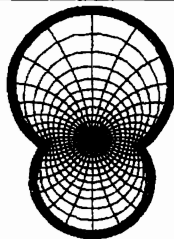
$$t = s^p$$

$$w = \frac{t-1}{1+t}$$

$$|a| < \pi/2$$

$$0 < p < 2$$

конечная кру-  
говая лунка



$$p_1 = 1.193$$

$$p_2 = 1.493$$

$$s = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

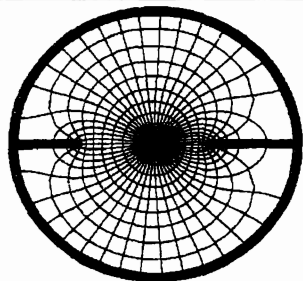
$$t =$$

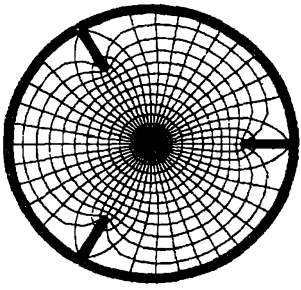
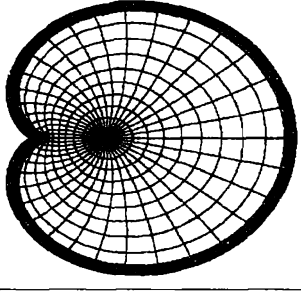
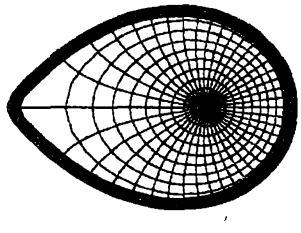
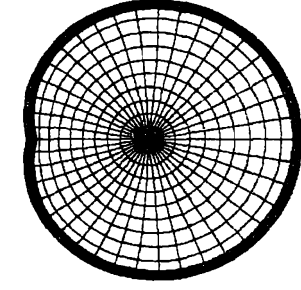
$$\frac{1}{2} [s(p_1 + p_2) + p_2 - p_1]$$

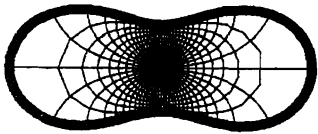
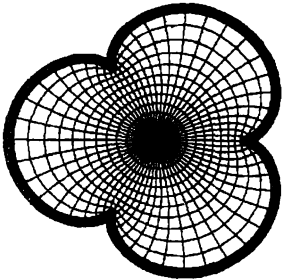
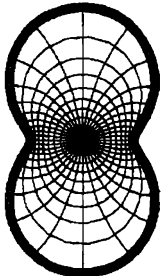
$$w = t - \sqrt{t-1}\sqrt{t+1}$$

$$p_1, p_2 \geq 1$$

круг с двумя  
несиммет-  
ричными раз-  
резами

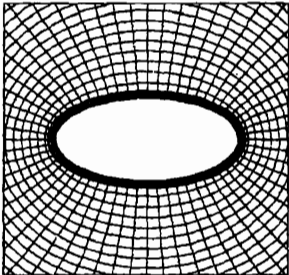
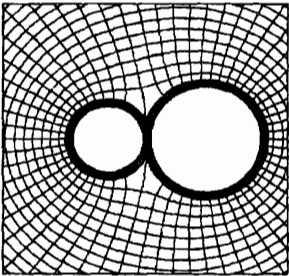
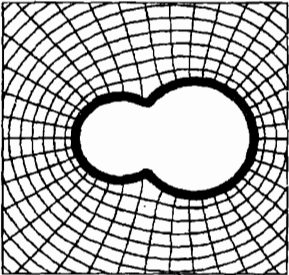
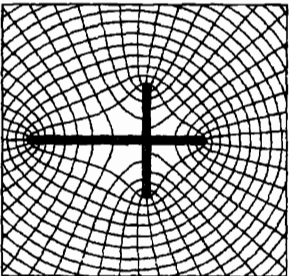


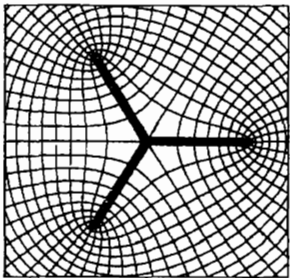
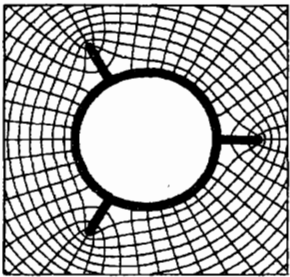
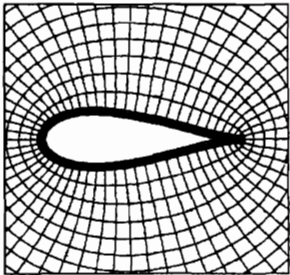
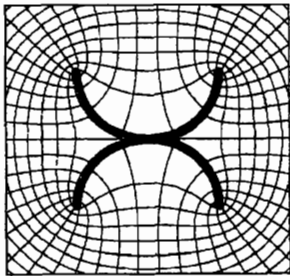
| Функция                                                                                                 | Пояснения                                                                                               | Фигура                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $n = 3$<br>$p = 1.2029$<br>$r = \frac{p}{2}(1 + z^n)$<br>$t = r + \sqrt{r^2 - z^n}$<br>$w = z t^{-2/n}$ | $p > 1$ ,<br>$n > 1$ ,<br>целое $n$ ,<br>круг с $n$ сим-<br>метричными<br>радиальными<br>разрезами      |    |
| $p = 1$<br>$t = z/p$<br>$w = t^2 + 2t$                                                                  | $p = 1$ –<br>кардиоида,<br>$p > 1$ –<br>улитка<br>Паскаля                                               |    |
| $p = 1.005$<br>$t = z/p$<br>$w = \sqrt{1+t} - 1$                                                        | $p = 1$ –<br>петля лемнис-<br>каты<br>Бернулли,<br>$p > 1$ –<br>петля двух-<br>контурного<br>кассиниана |   |
| $p = 1.2$<br>$w = (1+z)^p - 1$                                                                          | $1 < p < 2$ –<br>обобщенная<br>кардиоида,<br>$0 < p < 1$ –<br>петля<br>обобщенной<br>лемнискаты         |  |

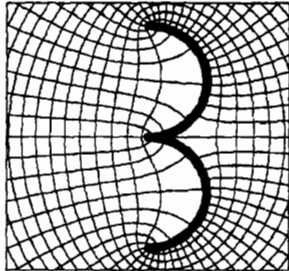
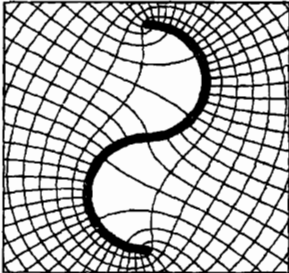
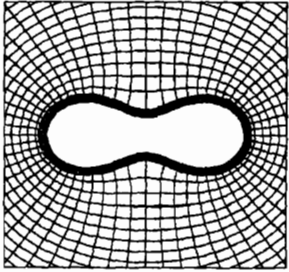
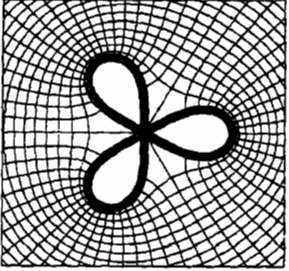
| #  | Функция                                                                                                                         | Пояснения                                                                           | Фигура                                                                             |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 9  | $p = 1.2$<br>$t = z^2$<br>$s = \frac{1 - pt}{t - p}$<br>$r = ps$<br>$w = \sqrt{r + 1} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} z)$ | $p > 1$ ,<br>одноконтур-<br>ный кассини-<br>ан                                      |   |
| 10 | $n = 3$<br>$p = 1.0$<br>$s = z/p$<br>$w = s - \frac{s^{n+1}}{n+1}$                                                              | целое $n$ ,<br>$p = 1$ –<br>эпициклоида,<br>$p > 1$ –<br>укороченная<br>эпитрохоида |   |
| 11 | $p = 1.5$<br>$s = z/p$<br>$w = \frac{2s}{s^2 + 1}$                                                                              | $p > 1$<br>эллип-<br>тическая лем-<br>ниската Бута                                  |  |

## Каталог 2. Внешности конечных контуров

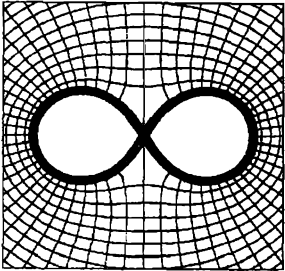
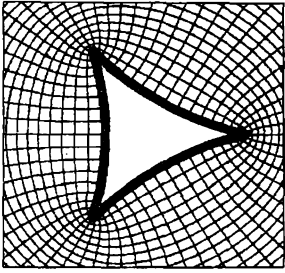
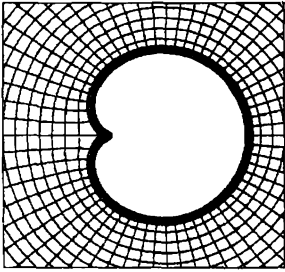
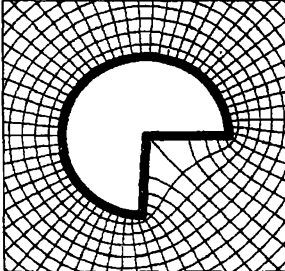
В данном каталоге для каждой заданной области приводится функция  $w = f(z)$ , отображающая внешность круга  $|z| > 1$  на рассматриваемую область и удовлетворяющая условиям  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) > 0$ . Эти условия определяют отображающую функцию  $f(z)$  однозначно.

| Функция                                                                                                                                                  | Пояснения                                                   | Фигура                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 1$<br>$b = 0.5$<br>$w = \frac{a+b}{2}z + \frac{a-b}{2z}$                                                                                            | $a, b \geq 0$<br>внешность эллипса с полуосями $a$ и $b$    |    |
| $p = 1.5$<br>$r_0 = e^{i\pi p/(1+p)}$<br>$r = \frac{z - 1/r_0}{z - r_0}$<br>$s = \ln r$<br>$w = \frac{\pi i}{s(1+p)}$                                    | $p > 0$<br>внешность двух касающихся кругов                 |    |
| $a = 0.3$<br>$p = 0.5$<br>$r = i \frac{z + \sin a}{\cos a}$<br>$s = \frac{r-1}{r+1}$<br>$t = s^p$<br>$w = -i \frac{1+t}{1-t}$                            | $ a  < \pi/2$<br>$0 < p \leq 2$<br>внешность круговой лунки |   |
| $p_1 = 1.4172$<br>$p_2 = 2.2376$<br>$s = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$<br>$t = 0.5[s(p_1 + p_2) + p_1 - p_2]$<br>$w = t \sqrt{1 - t^{-2}}$ | $p_1, p_2 \geq 1$<br>симметричный крестообразный разрез     |  |

| Функция                                                                                                                                         | Пояснения                                                                                                                   | Фигура                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $n = 3$<br>$w = z \left(1 + \frac{1}{z^n}\right)^{2/n}$                                                                                         | <p>целое <math>n \geq 3</math>,<br/> симметрич-<br/> ный звездооб-<br/> разный разрез</p>                                   |    |
| $n = 3$<br>$p = 1.2451$<br>$s = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{z^n}\right)$<br>$t = s + \sqrt{s^2 - \frac{1}{z^n}}$<br>$w = z t^{2/n}$          | <p><math>p &gt; 1</math><br/> целое <math>n &gt; 2</math>,<br/> круг и <math>n</math> сим-<br/> метричных<br/> разрезов</p> |    |
| $p = 0.3$<br>$t = z(p+1) - p$<br>$w = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right)$                                                                 | <p><math>p &gt; 0</math><br/> симметрич-<br/> ный профиль<br/> Жуковского</p>                                               |   |
| $p = 1.0539$<br>$s = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$<br>$t = \frac{p}{s} + 2 \operatorname{arth} \frac{1}{s}$<br>$w = \frac{2\pi}{t}$ | <p><math>p &gt; 0</math><br/> две<br/> касающиеся<br/> дуги<br/> окружности</p>                                             |  |

| Функция                                                                                                                                                                | Пояснения                                                                | Фигура                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $p = 0.27847$<br>$s = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$<br>$t = p \frac{s-1}{s+1}$<br>$r = t + \ln t + 1$<br>$r_0 = p + \ln p + 1$<br>$w = -\pi / (r - r_0)$ | $p > 0$<br>две<br>касающиеся<br>дуги<br>окружности                       |    |
| $p = 1.509$<br>$s = 2i \operatorname{arctg} (1/z)$<br>$t = s + i/p \operatorname{sh} s$<br>$w = 1.5707/t$                                                              | $p > 0$<br>две<br>касающиеся<br>дуги<br>окружности                       |    |
| $p = 1.05$<br>$t = pz$<br>$w = t \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$                                                                                                             | $p = 1$ –<br>лемниската,<br>$p > 1$ –<br>одноконтур-<br>ный<br>кассиовид |   |
| $n = 3$<br>$w = z \left( 1 + \frac{1}{z^n} \right)^{1/n}$                                                                                                              | $n > 2$ целое,<br>лемниската<br>$n$ -го порядка                          |  |

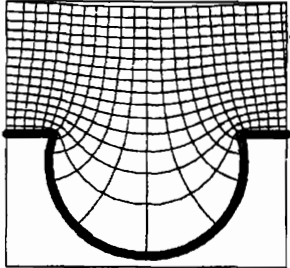
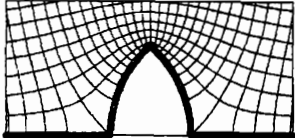
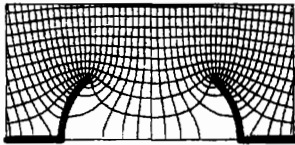
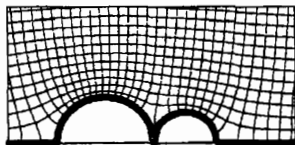


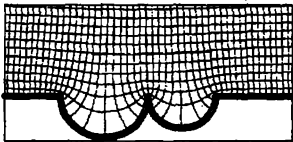
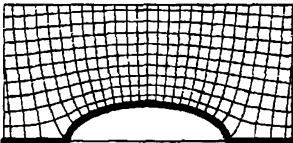
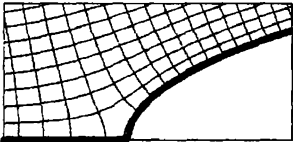
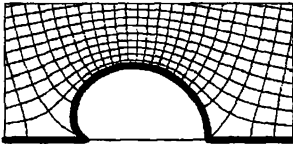
| Функция                                                                                                                                                                                                                                      | Пояснения                                                                                  | Фигура                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $p = 0.17$<br>$s = \operatorname{arctg}(1/z)$<br>$t = 4ps$<br>$w = 1/\sin t$                                                                                                                                                                 | $0 < p < \frac{1}{2}$<br>гиперболическая<br>лемниската<br>Бута                             |    |
| $p = 1.1$<br>$n = 2$<br>$w = z + \frac{1}{pnz^n}$                                                                                                                                                                                            | целое $n \geq 2$ ,<br>$p > 1$ –<br>укороченная<br>гипотрохида<br>$p = 1$ –<br>гипоциклоида |    |
| $s = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{z-1}{z+1}$<br>$w = s^{-2} - 1$                                                                                                                                                                              | внешность<br>кардиоиды                                                                     |   |
| $p = 0.5175$<br>$s_0 = \left( \frac{p}{2} + i\sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} \right)^2$<br>$s = \frac{z s_0 - \bar{s}_0}{z - 1}$<br>$r = \left( \frac{1 - \sqrt{s}}{1 + \sqrt{s}} \right)^p$<br>$w = r \frac{1 + p\sqrt{s} + s}{1 - p\sqrt{s} + s}$ | $0 < p < 2$<br>внешность<br>сектора<br>круга                                               |  |

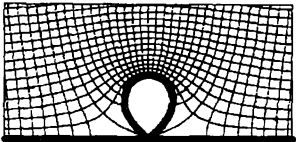
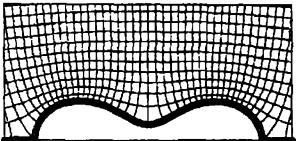
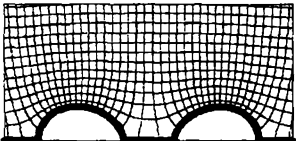
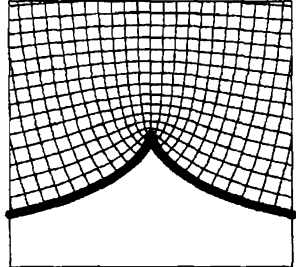
### Каталог 3. Криволинейные угловые области

В настоящем каталоге для каждой криволинейной угловой области приводится функция  $w = f(z)$ , отображающая полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на рассматриваемую область и удовлетворяющая условию  $f(\infty) = \infty$ .

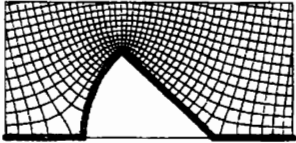
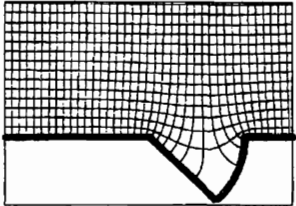
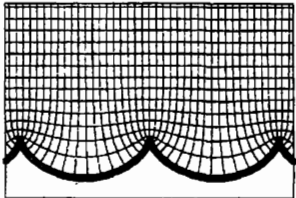
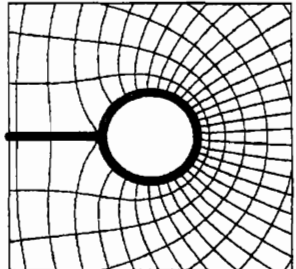
Функция  $f(z)$  определена с точностью до линейного преобразования аргумента  $z$ . Действительно, функция  $w = f(C_1 z + C_2)$  (где  $C_1, C_2$  — вещественные константы,  $C_1 > 0$ ) производит то же отображение.

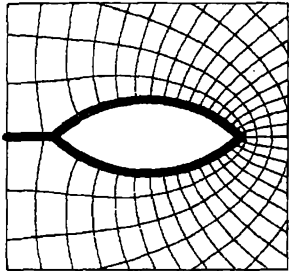
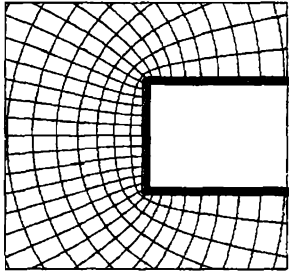
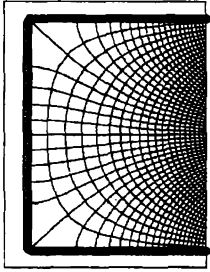
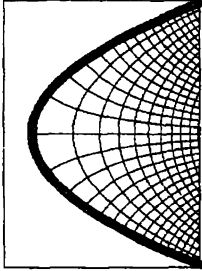
| # | Функция                                                                                                                                                            | Пояснения                                                                               | Фигура                                                                              |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $p = 1.6$<br>$r = \frac{z-1}{z+1}$<br>$s = r^p$<br>$w = \frac{1+s}{1-s}$                                                                                           | обтекание<br>сегмента<br>круга:<br>$0 < p < 1$ —<br>выступ,<br>$1 < p < 2$ —<br>впадина |    |
| 2 | $p = 0.75$<br>$r = z + i\sqrt{1-z^2}$<br>$s = \frac{r-i}{r+i}$<br>$t = s^{2p}$<br>$w = i\frac{1+t}{1-t}$                                                           | $0 < p < 1$<br>обтекание<br>симметрич-<br>ной<br>круговой<br>лунки                      |    |
| 3 | $q = 0.7$<br>$p = -0.7$<br>$s = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$<br>$t = \frac{s(q-p)}{2} + \frac{q+p}{2}$<br>$w = t + i\sqrt{1-t^2}$                   | $-1 \leq p < q \leq 1$<br>обтекание<br>двух дуг<br>окружности                           |    |
| 4 | $p = 1.5$<br>$a = \frac{\pi}{2} \frac{p-1}{p+1}$<br>$r = \sin a - \frac{1}{z}$<br>$s = \arcsin r$<br>$t = \frac{1+p}{\pi} s + \frac{1-p}{2}$<br>$w = -\frac{1}{t}$ | $p > 0$<br>два<br>касающихся<br>полукруга<br>(выступы)                                  |  |

| # | Функция                                                                                                                               | Пояснения                                                            | Фигура                                                                              |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 | $p = 0.1$<br>$a = p + 0.5 \sin(2p)$<br>$r = \sin p - \frac{1}{z}$<br>$s =$<br>$\arcsin r + r \sqrt{1 - r^2}$<br>$w = \frac{1}{a - s}$ | $ p  < \frac{\pi}{2}$<br>два<br>касающихся<br>полукруга<br>(впадины) |    |
| 6 | $b = 0.5$<br>$a = 1$<br>$w = az + ib \sqrt{1 - z^2}$                                                                                  | $a, b \geq 0$<br>обтекание эл-<br>липса                              |    |
| 7 | $w = (\sqrt{z} + i)^2$                                                                                                                | обтекание<br>ветви<br>параболы                                       |    |
| 8 | $r = 1 - \frac{1}{z}$<br>$s = \operatorname{arch} r$<br>$w = -\left(\frac{\pi}{s}\right)^2 - \frac{1}{2}$                             | обтекание<br>половины<br>кардиоиды                                   |  |

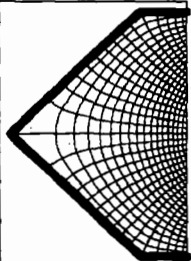
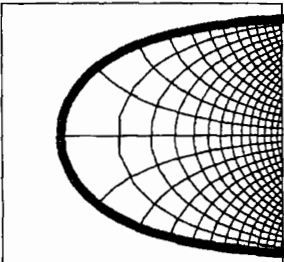
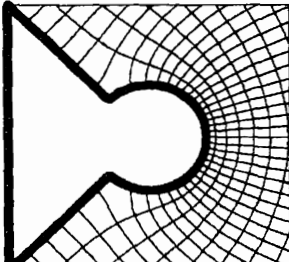
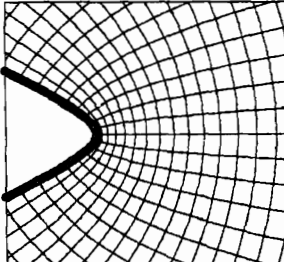
| #  | Функция                                                                                                                                                   | Пояснения                                                                           | Фигура                                                                              |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 9  | $r = 1 - z^2$ $s = r + r \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}$ $w = i \sqrt{s + 1}$                                                                                   | обтекание<br>петли<br>лемнискаты<br>Бернулли                                        |    |
| 10 | $p = 1.02$ $u = z + i \sqrt{1 - z^2}$ $t = pu$ $w = t \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$                                                                           | $p = 1 -$<br>лемниската<br>Бернулли<br>$p > 1 -$<br>одно-<br>контурный<br>кассиниан |    |
| 11 | $p = 0.95$ $h = \frac{1}{2} \left( p - \frac{1}{p} \right)$ $v = i \sqrt{h^2 - z^2}$ $u = v + i \sqrt{1 - v^2}$ $t = pu$ $w = t \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$ | $0 < p < 1$<br>обтекание<br>двухконтур-<br>ного<br>кассиниана                       |    |
| 12 | $t = 1 - iz$ $w = i \left( t + \frac{1}{t} - 2 \right)$                                                                                                   | обтекание<br>острия<br>циссоиды                                                     |  |

| #  | Функция                                                                                                               | Пояснения                        | Фигура |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------|
| 13 | $r = \frac{i}{z\sqrt{2}}$ $s = \operatorname{arch} r$ $t = \left(\frac{2s}{\pi}\right)^2$ $w = \frac{4i}{t+1} - i$    | обтекание<br>впадины<br>циссоиды |        |
| 14 | $w = i\sqrt{1-z^2} + \operatorname{arch} z - i\pi$                                                                    | обтекание<br>ступеньки           |        |
| 15 | $t = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{1/4}$ $w = 2tz + \operatorname{arth} t - \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$         | обтекание<br>пологого<br>склона  |        |
| 16 | $t = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{1/4}$ $w = \frac{2t^3}{3(t^4-1)} + \operatorname{arth} t - \operatorname{arctg} t$ | обтекание<br>нависшего<br>обрыва |        |

| #  | Функция                                                                                                                   | Пояснения                                                                             | Фигура                                                                              |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 17 | $a = 0.75$<br>$t = \sqrt{\frac{z}{a^2 z + 1}}$<br>$u = \frac{1 + at}{1 - at}$<br>$w = u \left( \frac{t-1}{t+1} \right)^a$ | $0 < a < 1$<br>обтекание<br>секторного<br>выступа                                     |    |
| 18 | $a = 1.25$<br>$t = \sqrt{\frac{z}{a^2 z + 1}}$<br>$u = \frac{1 + at}{1 - at}$<br>$w = u \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^a$ | $1 < a < 2$<br>обтекание<br>секторной<br>впадины                                      |    |
| 19 | $p = 0$<br>$s = z + ip$<br>$w = s + ie^{is} - i$                                                                          | $p = 0$<br>обтекание<br>циклоиды $p > 0$<br>0<br>обтекание<br>укороченной<br>трохоиды |    |
| 20 | $t = 1 - z^2$<br>$w = t + \sqrt{t-1}\sqrt{t+1}$                                                                           | обтекание<br>полуплос-<br>кости с<br>закругленным<br>краем                            |  |

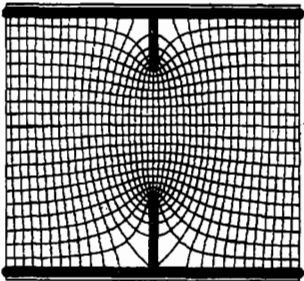
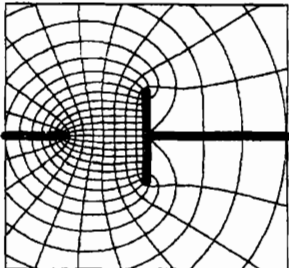
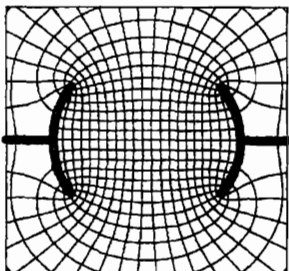
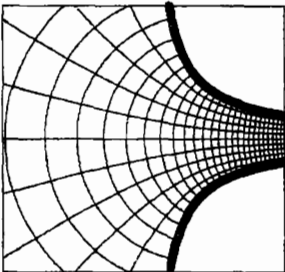
| #  | Функция                                                                                                                                      | Пояснения                                                              | Фигура                                                                              |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 21 | $p = 0.75$<br>$u = 1 - z^2$<br>$r = u + \sqrt{u - 1} \sqrt{u + 1}$<br>$s = \frac{r - 1}{r + 1}$<br>$t = s^{2p}$<br>$w = \frac{1 + t}{1 - t}$ | $0 < p < 1$<br>обтекание<br>полуплос-<br>кости с<br>оперенным<br>краем |    |
| 22 | $w = \frac{i z}{\sqrt{1 - z^2}} + i \arcsin z$                                                                                               | обтекание<br>толстой<br>полубес-<br>конечной<br>пластины               |    |
| 23 | $w = -i \arcsin z - 1.5$                                                                                                                     | полуполоса                                                             |   |
| 24 | $s = -1 - z^2$<br>$t = \operatorname{arch} s$<br>$w = \left( \frac{t}{\pi} \right)^2$                                                        | внутренность<br>параболы                                               |  |

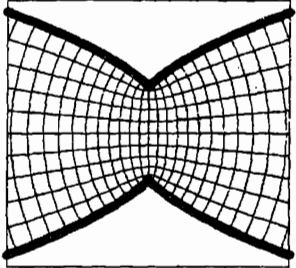
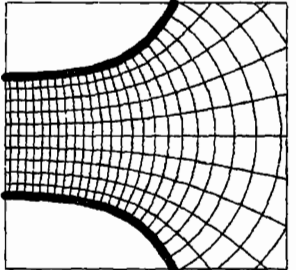
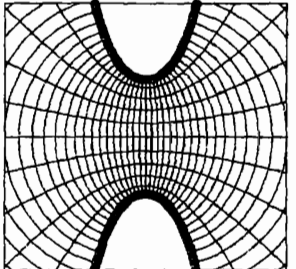
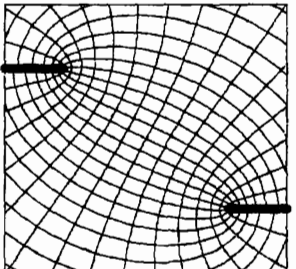


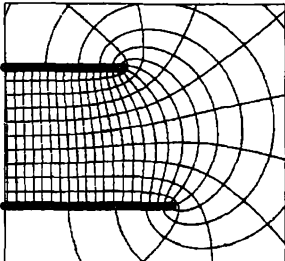
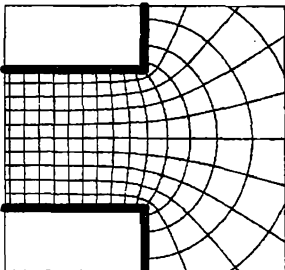
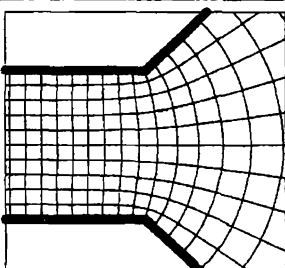
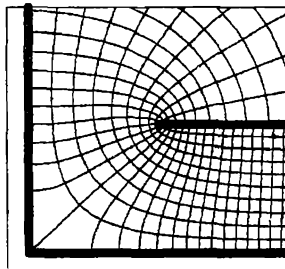
| #  | Функция                                                                                                                | Пояснения                                                      | Фигура                                                                              |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 25 | $s = -z^2$<br>$t = \left(\frac{s}{s+1}\right)^{1/4}$<br>$w = \operatorname{arth} t - \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$ |                                                                |    |
| 26 | $t = 1 - iz$<br>$w = \ln t - 1$                                                                                        | цепная<br>линия<br>постоянной<br>прочности                     |    |
| 27 | $p = 0.75$<br>$t = \sqrt{1 - z^2} - iz$<br>$w = t^{2p}$                                                                | $0 < p < 1$<br>обтекание<br>угла с<br>закругленной<br>вершиной |   |
| 28 | $p = 0.85$<br>$s = -iz$<br>$t = 2p \operatorname{arccos} s$<br>$w = \cos t$                                            | $0 < p < 1$<br>обтекание<br>ветви<br>гиперболы                 |  |

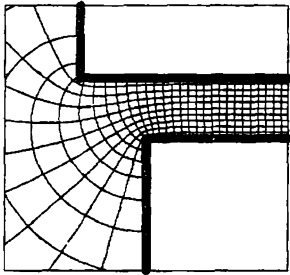
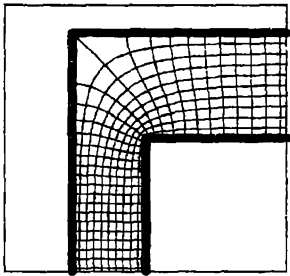
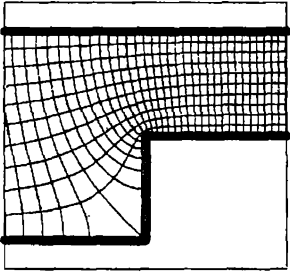
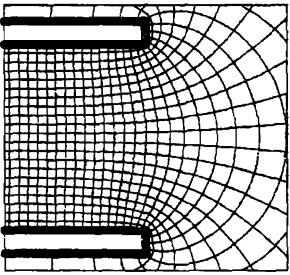
## Каталог 4. Криволинейные полосы

В данном каталоге для каждой области приводится функция  $w = f(z)$ , отображающая полосу  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$  на рассматриваемую криволинейную полосу таким образом, что точки  $z = -\infty$  и  $z = \infty$  отображаются в рукава полосы. Функция  $f(z)$  определяется с точностью до сдвига аргумента. Действительно, функция  $w = f(z + c)$ , где  $c$  — любая вещественная константа, осуществляет то же отображение.

| # | Функция                                                                                                                                                                                         | Пояснения                                                                                    | Фигура                                                                              |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $a = -0.6$<br>$b = 0.8$<br>$s = \operatorname{ch} z$<br>$t = \frac{1}{2}[s(b-a) + b + a]$<br>$w = i \arcsin t$                                                                                  | $-1 \leq a < b \leq 1$<br>течение<br>в прямом<br>канале с<br>перегородками                   |    |
| 2 | $p = 0.5$<br>$s = \operatorname{ch} z$<br>$t = p(s-1) - 1$<br>$w = t\sqrt{1-1/t^2}$                                                                                                             | $p > 0$<br>два луча и<br>перпендику-<br>лярный<br>отрезок                                    |    |
| 3 | $p = 0.5$<br>$u = \cos iz$<br>$r = pu$<br>$s = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$<br>$t = \frac{2ps}{1+p^2}$<br>$w = t + \frac{i}{\sqrt{1-t^2}} \operatorname{sign}(\operatorname{Im} u)$ | $0 < p < 1$<br>две симме-<br>тричные дуги<br>окружности и<br>два луча<br>вещественной<br>оси |   |
| 4 | $s = e^z$<br>$t = 1 + s^2 - \ln(-1/s^2)$<br>$w = i\sqrt{t} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} s)$                                                                                            | две ветви<br>равнобочной<br>гиперболы                                                        |  |

| # | Функция                                                                                                                                                        | Пояснения                                                                | Фигура                                                                              |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 5 | $r = e^z$ $s = \frac{1+r}{1-r}$ $u = \frac{1}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right)$ $v = \sqrt{u}$ $t = \operatorname{arth} v + \operatorname{arctg} v$ $w = t^2$ | четыре дуги конфокальных парабол                                         |    |
| 6 | $t = z - i \frac{\pi}{2}$ $w = t + e^t$                                                                                                                        | две экспоненциальные кривые-электрическое поле в конденсаторе Роговского |    |
| 7 | $t = z - i \frac{\pi}{2}$ $w = t + \operatorname{sh} t$                                                                                                        | две цепные линии                                                         |   |
| 8 | $a = 2$ $w = z + a \operatorname{ch} z - i \frac{\pi}{2}$                                                                                                      | $a > 0$<br>два параллельных противоположных луча                         |  |

| #  | Функция                                                                                                         | Пояснения                                                                            | Фигура                                                                              |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 9  | $b = 1$<br>$t = e^z$<br>$w = -t^2 + 2 \ln t + b t + 1 - i \pi$                                                  | <p>электрическое поле вблизи края плоского конденсатора со сдвинутыми пластинами</p> |    |
| 10 | $s = 2z - i\pi$<br>$t = \sqrt{e^s + 1}$<br>$w = t - \operatorname{arth} \frac{1}{t}$                            | <p>магнитное поле вблизи края зазора электромагнита</p>                              |    |
| 11 | $s = 2z - i\pi$<br>$t = (e^s + 1)^{1/4}$<br>$w = 2t - \operatorname{arth} \frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t$ | <p>течение жидкости в расширяющемся канале</p>                                       |    |
| 12 | $p = 1$<br>$s = e^z$<br>$t = \sqrt{s + 1}$<br>$w = t/p + 2 \operatorname{arth} t$                               | <p><math>p &gt; 0</math></p>                                                         |  |

| #  | Функция                                                                                                                                                                                                                       | Пояснения                                                                                                | Фигура                                                                              |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 13 | $p = 0.4$<br>$s = e^z$<br>$r = \sqrt{\frac{s-1}{s+p^2}}$<br>$t = i p r$<br>$u = 2 \operatorname{arth} r$<br>$v = i(1/p - p) \operatorname{arth} t$<br>$w = u + v - r \left(1 + \frac{p^2}{s}\right)$                          | $p > 0$<br>поле электро-<br>магнита со<br>смещенными<br>полюсами                                         |    |
| 14 | $p = 1.5$<br>$s = e^z$<br>$t = \sqrt{\frac{s-1}{s+p^2}}$<br>$w =$<br>$p \operatorname{arth} t - \operatorname{arctg} p t$                                                                                                     | $p > 0$<br>изотермы и<br>линии потока<br>тепла в стене<br>здания вблизи<br>угла                          |    |
| 15 | $p = 0.5$<br>$s = e^z$<br>$t = \sqrt{\frac{s-1}{s-p^2}}$<br>$w =$<br>$p \operatorname{arctg} t - \operatorname{arth} p t$                                                                                                     | $0 < p < 1$<br>течение<br>в резком<br>сужении<br>канала                                                  |   |
| 16 | $p = 0.5$<br>$s = e^z$<br>$t = \sqrt{\frac{s+p^2}{s+1}}$<br>$u = \left(p + \frac{1}{p}\right) \operatorname{arth} t$<br>$v = \left(\frac{1}{p} - p\right) \frac{t}{1-t^2}$<br>$w = -2 \operatorname{arth} (p/t) +$<br>$u + v$ | $0 < p < 1$<br>электрическое<br>поле вблизи<br>края плоского<br>конденсатора<br>с толстыми<br>пластинами |  |

## Каталог 5. Криволинейные полосы с $N$ рукавами

В настоящем каталоге приводятся конформные отображения криволинейных полос с тремя (области 1–7) и четырьмя (области 8–12) рукавами. Для областей 1–3 приводятся функции, отображающие полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на рассматриваемую область. В комментариях приводятся точки вещественной оси  $a_1, a_2, a_3$  – прообразы рукавов криволинейной полосы.

Для областей 4–9 в каталоге также приводятся функции, отображающие полуплоскость  $\operatorname{Im} s > 0$  на рассматриваемую область. Однако для этих областей отображение полуплоскости не имеет физического смысла. Для областей 4–9 в каталоге представлены отображения полосы  $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ , при которых точки  $z = -\infty$  и  $z = \infty$  отображаются в два рукава полосы (поток без разветвления). Переменная  $s$ , принадлежащая полуплоскости  $\operatorname{Im} s > 0$ , рассматривается как вспомогательная переменная. В комментариях приведены точки вещественной оси  $s_k$  – прообразы рукавов криволинейной полосы.

Для областей 11–12 в каталоге приведены функции, отображающие круг  $|z| < 1$  на рассматриваемые симметричные области. В комментариях приведены точки единичной окружности  $z_k$  – прообразы рукавов криволинейной полосы.

| # | Функция                                                                                       | Пояснения                                               | Фигура |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------|
| 1 | $p = 0.2785$<br>$q = 0$<br>$h = 1$<br>$t =$<br>$h \ln(z+1) + \ln(1-z)$<br>$w = t - pz^2 + qz$ | $p, h > 0$<br>$a_1 = -1$<br>$a_2 = 1$<br>$a_3 = \infty$ |        |
| 2 | $c = 1$<br>$h = 1.4$<br>$w = cz + h \ln(z+1) - \ln(z-1)$                                      | $c, h > 0$<br>$a_1 = -1$<br>$a_2 = 1$<br>$a_3 = \infty$ |        |
| 3 | $c = 2$<br>$h = 0.6$<br>$w = cz + h \ln z + \ln(1-z)$                                         | $c, h > 0$<br>$a_1 = 0$<br>$a_2 = 1$<br>$a_3 = \infty$  |        |
| 4 | $h = 0.8$<br>$s = \operatorname{th}(z/2)$<br>$w = \ln(s+1) + h \ln(1-s)$                      | $h > 0$<br>$s_1 = -1$<br>$s_2 = 1$<br>$s_3 = \infty$    |        |



| # | Функция                                                                                                                                                                                       | Пояснения                                                            | Фигура |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------|
| 5 | $a = 0.4$<br>$b = 0.7$<br>$s = e^{z/2}$<br>$w = a s + \frac{b}{s} + \operatorname{arth} s - i\pi/4$                                                                                           | $a, b > 0$<br>$s_1 = 0$<br>$s_2 = 1$<br>$s_3 = \infty$               |        |
| 6 | $c = 0.8$<br>$s = \operatorname{th}(z/2)$<br>$t = \sqrt{1 - (1 + c^2)/s^2}$<br>$w = i \operatorname{arth}(1/t) - i c \operatorname{arctg}(t/c)$                                               | $c > 0$<br>$s_1 = -1$<br>$s_2 = 1$<br>$s_3 = \infty$                 |        |
| 7 | $p = 1.3$<br>$c = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}$<br>$s = p \operatorname{th}(z/2)$<br>$t = \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}$<br>$w = c \operatorname{arth} \frac{1}{t} - \operatorname{arth} \frac{1}{ct}$ | $p > 1$<br>$s_1 = -p$<br>$s_2 = p$<br>$s_3 = \infty$                 |        |
| 8 | $p = 1$<br>$h = 0.7$<br>$s = e^z$<br>$w = \ln(s + 1) + h \ln s - \ln(s - p)$                                                                                                                  | $p, h > 0$<br>$s_1 = -1$<br>$s_2 = 0$<br>$s_3 = 1$<br>$s_4 = \infty$ |        |

| #  | Функция                                                                                                                           | Пояснения                                                                                                                  | Фигура |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 9  | $a = 2$<br>$h = 0.3$<br>$s = e^z$<br>$u = \frac{a}{s^2 - 1} + \ln s$<br>$v = h [\ln(1 - s) + \ln(1 + s)]$<br>$w = u + v - i\pi/2$ | $a, h > 0$<br>$s_1 = -1$<br>$s_2 = 0$<br>$s_3 = 1$<br>$s_4 = \infty$                                                       |        |
| 10 | $r = z - i \cdot 1.5707$<br>$s = \operatorname{th}(r/2)$<br>$w = \frac{s}{\sqrt{1 - s^4}}$                                        | отображение<br>полосы<br>$0 < \operatorname{Im} z < \pi$                                                                   |        |
| 11 | $t = z \sqrt{\frac{2}{1 + z^4}}$<br>$w = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arth} t$                                          | отображение<br>круга $ z  < 1$<br>$z_1 = -1$<br>$z_2 = -i$<br>$z_3 = 1$<br>$z_4 = i$                                       |        |
| 12 | $r = iz^2$<br>$s = -i \operatorname{arctg} r$<br>$w = \sqrt{s} \operatorname{sign}(\operatorname{Re} z)$                          | отображение<br>круга $ z  < 1$<br>$z_1 = -1$<br>$z_2 = -i$<br>$z_3 = 1$<br>$z_4 = i$<br>4 ветви<br>равнобочных<br>гипербол |        |

# Приложение.

## Комплексная графика в Maple

### Процедуры `complexplot` и `conformal`

Большинство рисунков книги было выполнено при помощи функции `conformal` пакета **Maple**. **Maple** - это система для аналитического и численного решения широкого класса математических задач, возникающих в самых различных областях науки. Развитая система команд, дружелюбный интерфейс и широкие графические возможности позволяют успешно применять **Maple** для математического моделирования и визуализации сложных объектов – результатов исследований. **Maple** имеет подробный, хорошо структурированный **Help**, снабженный большим числом примеров и позволяющий в интерактивном режиме обучиться работать в этой системе. Кроме того, достаточно подробное описание основных возможностей, библиотек и команд **Maple** приведено в литературе [20-23]. Однако процедура `conformal`, которая визуализирует конформные отображения областей, описана в этой литературе недостаточно полно. Опишем эту процедуру, а также элементарные функции комплексной переменной, используемые в **Maple**.

В пакете **Maple** имеется большой набор команд и процедур для работы с комплексными числами и функциями комплексной переменной. Процедуры, позволяющие визуализировать некоторые комплексные объекты, находятся в графической библиотеке `plots`. Для их использования эту библиотеку необходимо подключить при помощи команды `with(plots)` или использовать полный вызов процедуры: `plots[имя процедуры](параметры)`.

Процедура **complexplot** позволяет изображать на комплексной плоскости параметрически заданную кривую:

**complexplot**( $f(t)$ ,  $t=a..b$ , **params**);

или набор точек :

**complexplot**( $[zpoint1, \dots, zpointn]$ ,  $t=a..b$ , **style=point**, **params**);

Процедура **conformal** визуализирует конформное отображение декартовой или полярной сети, осуществляемое однолистной аналитической функцией:

**conformal**( $f(z)$ ,  $Zmin..Zmax$ , **params**);

Опишем основные параметры этой процедуры.

$f(z)$  – функция комплексной переменной, осуществляющая конформное отображение двумерной ортогональной сети области комплексной плоскости  $(U, V)$  :

$Umin \leq U \leq Umax$ ,  $Vmin \leq V \leq Vmax$ .

В качестве переменных  $(U, V)$  обычно выбираются декартовы переменные  $(x, y)$ , либо полярные переменные  $(\rho, \varphi)$ . При этом  $Zmin = Umin + I * Vmin$ ,  $Zmax = Umax + I * Vmax$ , где символ  $I$  в Maple обозначает мнимую единицу  $i$ .

Размер исходной ортогональной сети (число линий по каждой координате) задается пользователем. Результатом работы программы является набор плоских кривых – конформное отображение исходной ортогональной сети.

**params** – список параметров, позволяющих пользователю контролировать качество графика. Каждый параметр задается в виде **param=value**.

Наиболее часто используются следующие параметры:

- **grid**=[ $n, m$ ], где  $n$  и  $m$  целые числа, задает число линий исходной сети по каждой координате. По умолчанию размер исходной сети равен  $11 \times 11$ .
- **coords** задает систему координат. Если **coords=polar**, то **conformal** работает в полярной системе координат. Если параметр **coords** не задан, то по умолчанию используется декартова система координат.
- **numxy**=[ $m, n$ ], где  $n$  и  $m$  целые числа определяет число точек на линии сети по каждой координате. По умолчанию на каждой линии берется 15 точек. Увеличение  $m$  и  $n$  делает кривые более

гладкими, но увеличивает время вычислений. Для рисунков книги использовались значения  $m=n=64$ .

- **view=[Xmin..Xmax,Ymin..Ymax]** задает прямоугольную область на комплексной плоскости, которая будет изображаться на экране.
- **axes=normal** – тип выводимых осей координат. Возможные значения: **normal** – оси с центром в начале координат, **boxed** – график заключается в рамку с нанесенной шкалой, **frame** – оси с центром в левом нижнем углу, **none** – вывод без нанесения осей.
- **xtickmarks=n, ytickmarks=m** – число меток по горизонтальной и вертикальной оси соответственно. Если какое-либо из значений равно 0, то соответствующая ось выводится без меток.
- **scaling=constrained** задает тип масштабирования. **constrained** – график выводится с одинаковым масштабом по осям, **unconstrained** – график масштабируется по размеру графического окна, задаваемого параметром **view**.
- **style=line** – вывод графика линией (**line**) или точками (**point**).
- **thickness=1** – толщина линии : 1 – тонкая (**thin**), 2 – средняя (**medium**), 3 – толстая (**thick**).
- **color=red** – цвет графика. Возможные значения: **black, blue, brown, green, grey, magenta, white, yellow, red,...**

Пример использования процедуры **conformal** для создания фиг. 3.1 :  
`with(plots): conformal(z^2, z=-1-I*0..1+I*1, grid=[21,11],  
numxy=[64,64], view=[-1..1,-1..1], axes=boxed, xtickmarks=0,  
ytickmarks=0, scaling=constrained, style=line, thickness=1,  
color=black);`

Пример использования процедуры **conformal** для создания фиг. 3.2 :  
`with(plots): conformal((z+1)^2, z=0-I*Pi..1+I*Pi, grid=[6,41],  
coords=polar, numxy=[64,64], view=[-1..4,-3..3], axes=boxed,  
xtickmarks=0, ytickmarks=0, scaling=constrained, style=line,  
thickness=1, color=black);`

Константа  $Pi$  в Maple задает число  $\pi$ .

## Комплексные числа и функции в Maple

Комплексное число в Maple задается в виде  $a + I * b$ , где символ  $I$  означает мнимую единицу  $i$ . Например, команда  $z := 2.3 + I * 0.8$ ; задает число  $z = 2.3 + 0.8i$ . Для записи различных выражений с комплексными числами используются арифметические операторы  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ ; оператор возведения в степень  $^$  и встроенные функции комплексной переменной. При возведении  $z$  в вещественную или комплексную степень  $p$  результатом является главное значение многозначной функции  $z^p$ . Приведем формат записи основных элементарных функций комплексной переменной в Maple:

**Re(z)**– вещественная часть комплексного числа  $\operatorname{Re} z$ ;

**Im(z)**– мнимая часть комплексного числа  $\operatorname{Im} z$ ;

**abs(z)**– модуль комплексного числа  $|z|$ ;

**argument(z)**– главное значение аргумента комплексного числа  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ;

**conjugate(z)**– комплексное сопряжение  $\bar{z}$ ;

**sqrt(z)**– главное значение комплексного  $\sqrt{z}$ ;

**exp(z)**–  $e^z$ ;

**ln(z)**– главное значение комплексного  $\ln z$ ;

**sin(z)**–  $\sin z$ ;

**cos(z)**–  $\cos z$ ;

**tan(z)**–  $\operatorname{tg} z$ ;

**arcsin(z)**–  $\arcsin z$ ;

**arccos(z)**–  $\arccos z$ ;

**arctan(z)**–  $\operatorname{arctg} z$ ;

**sinh(z)**–  $\operatorname{sh} z$ ;

**cosh(z)**–  $\operatorname{ch} z$ ;

**tanh(z)**–  $\operatorname{th} z$ ;

**arcsinh(z)**–  $\operatorname{arsh} z$ ;

**arccosh(z)**–  $\operatorname{arch} z$ ;

**arctanh(z)**–  $\operatorname{arth} z$ ;

Подчеркнем, что для многозначных функций Maple вычисляет главное значение.

# Литература

## Учебники.

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука-Физматлит, 1999.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
3. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
4. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

## Задачники.

6. Волковський Л.И., Лунп Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
7. Сборник задач по теории аналитических функций. Под редакцией М.А. Евграфова. М.: Наука, 1972.
8. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1992.

## Справочники.

9. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970.
10. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. Перевод с немецкого. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

11. Ivanov V.I., Trubetskov M.K. Handbook of Conformal Mapping with Computer-Aided Visualization. Boca Raton a.o., CRC Press, 1995.

### **Приложения конформных отображений.**

12. Лаврентьев М.А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. М.: Гостехиздат, 1946.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
14. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.
15. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980.
16. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
17. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Перевод с английского. М.: Наука, 1964.
18. Смайт В. Электростатика и электродинамика. Перевод с английского. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
19. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. Перевод с английского. М.: Энергия, 1970.

### **Литература по Maple V.**

20. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. М: Информационно-издательский дом Филинь", 1998.
21. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. М: Мир, 1997.
22. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5. М.: Солон, 1998.
23. Прохоров Г.В., Леденев М.А., Колбеев В.В. Пакет символьных вычислений Maple V. М.: Петит, 1997.



# Предметный указатель

## Аргумент

- комплексного числа, 10
- главное значение, 10

Ангармоническое отношение, 80

Астроида, 148

Аэродинамический профиль, 272

## Векторное поле

- анти-плоское, 47
- гармоническое, 47
- сопряженное, 48
- плоское, 46
- потенциальное, 47
- силовые линии, 54
- соленоидальное, 47

Граница области, 13

Гармоничекая функция, 22

- сопряженная функция, 22

Гармоническое поле, 47

- сопряженное поле, 48

Гипотрохоида, 147

Гипоциклоида, 147

- удлиненная, 147
- укороченная, 147

Гладкая кривая, 15

Жорданова кривая, 14

- бесконечная, 15
- замкнутая, 14

## Закон

Дарси, 49

Ома, 51

Фурье, 49

## Звездообразный

- многоугольник, 218
- разрез, 218

## Инверсия, 79

относительно окружности, 79

## Краевая задача

- Дирихле, 55
- Неймана, 56
- Робена, 61
- смешанная, 56

Квадрупольная линза, 285

Комплексная плоскость, 12

- полная, 12

Комплексное сопряжение, 10

Комплексное число, 9

- аргумент, 10
- модуль, 10

Комплексный потенциал, 53

Контур, 19

внешность, 19

Конформное отображение, 28

Конформный радиус, 270

Коэффициент растяжения, 25

Кривая Штейнера, 265

Криволинейная полоса, 18, 19

- с  $K$  рукавами, 18

Кривые Кирхгофа, 165

Лемниската, 71

Бернулли, 71

Бута, 103

гиперболическая, 103

обобщенная, 157

эллиптическая, 103

обобщенная, 94, 149

Логарифмическая спираль, 88

Локсодромы, 102

Неполная бета-функция, 230

Область, 13

граница, 13

замкнутая, 13

криволинейная угловая, 16

конечная, 15

многоугольная, 191

звездобразная, 218

односвязная, 16

вырожденная, 19

невыврожденная, 19

полигональная угловая, 191

порядок связности, 16

свойство сохранения, 24

Овалы Кассини, 121, 122

Обобщенная гипербола, 93

Обобщенная кардиоиды, 95

Обобщенный овал Кассини, 149

одноконтурный, 149

$n$ -контурный, 149

Обобщенная парабола, 93

Окрестность

точки, 13

бесконечно удаленной точки,

13

Окружности Апполония, 101

Окружности Штейнера, 101

Отображение

изогональное, 25

конформное, 28

второго рода, 28

локально-конформное, 28

Профиль

Жуковского, 84

Кармана – Треффтпа, 272

Полиномы Чебышева, 260

Полоса

криволинейная, 18, 19

с  $K$  рукавами, 18

полигональная, 191

Поперечная электромагнитная

волна, 52

Постулат Жуковского – Чаплы-

гина, 272

Потенциал

векторный, 53

комплексный, 53

скалярный, 53

Поток вектора, 48

Работа вектора, 48

Рельеф функции, 23

карта рельефа, 23

Руль Жуковского, 87

Связное множество, 12

Сеть

биполярная, 75, 101

изотермическая, 22

униполярная, 76

Трактрисса, 157

Трохоида, 165

Точка

- бесконечно удаленная, 11
- внешняя, 13
- внутренняя, 13
- границная, 13
- изолированная границная, 13
- критическая, 29
- Уравнения Максвелла, 50
- Угол
  - атаки, 272
  - входящий, 93
  - выступающий, 93
  - поворота, 25
  - рациональный, 229
  - целочисленный, 229
- Улитка Паскаля, 69
- Условия Коши–Римана, 21
- Формула Эйлера, 10
- Функция
  - аналитическая, 21
  - в точке, 25
  - в бесконечно удаленной точке, 25
  - гармоничекая, 22
  - гармонически сопряженная, 22
  - дифференцируемая
    - в области, 21
    - в точке, 21
- Жуковского, 82
  - модифицированная, 179
  - обобщенная, 138
- источника
  - задачи Дирихле, 62
  - задачи Неймана, 114
  - смешанной задачи, 117
- силовая, 53
- тока, 53
- Цепная линия, 90, 160
  - постоянной прочности, 90
- Циркуляция, 48
- Циклоида, 165
  - удлиненная, 165
  - укороченная, 165
- Циссоида, 178
- Эквипотенциали, 54
- Эпитрохоида, 146
- Эпициклоида, 146
  - удлиненная, 146
  - укороченная, 146
- Эффект Мейснера, 51