УДК 517.5
ББК 22.162
Т66

Треногин В. А. **Функциональный анализ**: Учебник. — 3-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 488 с. — ISBN 5-9221-0272-9.

Содержит изложение первоначальных основ функционального анализа и тех его направлений, которые непосредственно примыкают к прикладным задачам. Изложены: метод малого параметра, метод продолжения по параметру, приближенные (в частности, разностные) методы решения уравнений, метод Галеркина и метод конечных элементов (приближение сплайнами), элементы выпуклого анализа, метод монотонных операторов и другие вопросы.

Второе издание — 1993 г.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика», для преподавателей и лиц, интересующихся приложениями функционального анализа.

Рецензенты:
кафедра вычислительной математики МЭИ;
академик РАН *Н.С. Бахвалов*

Учебное издание

ТРЕНОГИН Владилен Александрович,

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *Т.В. Шароватова*
Оригинал-макет *В.И. Шутова*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 19.08.02.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 30,5. Уч.-изд. л. 31,76. Тираж 3000 экз. Заказ №

ISBN 5-9221-0272-9

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

9785922102728

ISBN 5-9221-0272-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Линейные, нормированные и банаховы пространства** . . . 9

§ 1. Линейные пространства 9
§ 2. Нормированные пространства 17
§ 3. Анализ в нормированных пространствах 26
§ 4. Пространства со скалярным произведением 36
§ 5. Банаховы пространства 42
§ 6. Гильбертовы пространства 50

Глава II. **Пространства Лебега и Соболева** 61

§ 7. Пополнение нормированных пространств и пространств со скалярным произведением. Пространства Лебега 61
§ 8. Интеграл Лебега 71
§ 9. Пространства Соболева 92

Глава III. **Линейные опрераторы** 109

§ 10. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность 109
§ 11. Пространства линейных операторов 117
§ 12. Обратные операторы 126
§ 13. Абстрактные функции числовой переменной. Степенные ряды. Метод малого параметра 135
§ 14. Метод продолжения по параметру 146
§ 15. График оператора. Замкнутые операторы 153

Глава IV. **Пространства Лебега и Соболева** 163

§ 16. Теорема Хана–Банаха и ее следствия 163
§ 17. Сопряженные пространства 169
§ 18. Сопряженные и самосопряженные операторы 178

Глава V. **Компактные множества и вполне непрерывные операторы** 192

§ 19. Компактные множества в нормированных пространствах 192
§ 20. Линейные вполне непрерывные операторы 203
§ 21. Нормально разрешимые операторы 216
§ 22. Линейные уравнения с точки зрения вычислений 229

Глава VI. **Элементы спектральной теории линейных операторов** . 238

§ 23. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов 238
§ 24. Резольвентное множество и спектр линейного оператора 247
§ 25. Интегрирование абстрактных функций в банаховом пространстве 253

§ 26. Спектральные разложения самосопряженных операторов 264

Глава VII. **Абстрактные приближенные схемы** 281

§ 27. Аппроксимация, устойчивость и сходимость 281
§ 28. Простейшие разностные схемы 291
§ 29. Интерполяция сплайнами 310
§ 30. Метод Галеркина 323
§ 31. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и методы их решения 340

Глава VIII. **Теоремы о неподвижных точках нелинейных операторов** 363

§ 32. Дифференцироваиние нелинейных операторов. Степенные ряды 363
§ 33. Принцип сжимающих отображений 380
§ 34. Итерационный процесс Ньютона 391
§ 35. Принцип Шаудера 398

Глава IX. **Неявные операторы** 408

§ 36. Теоремы о неявных операторах 408
§ 37. Диаграмма Ньютона и ветвление решений нелинейных уравнений 421

Глава X. **Нелинейные приближенные схемы и элементы анализа** . . 433

§ 38. Нелинейные приближенные схемы 433
§ 39. Монотонные операторы 445
§ 40. Элементы теории экстремумов и выпуклого анализа 460

Дополнение 478

Список литературы 482

Предметный указатель 484

ПРЕДИСЛОВИЕ

Функциональный анализ возник в результате взаимодействия и последующего обобщения на бесконечномерный случай идей и методов математического анализа, геометрии и линейной алгебры. Современная математика немыслима без функционального анализа. Сегодня идеи, концепции, методы, терминология, обозначения и стиль функционального анализа пронизывают чуть ли не все области математики, объединяя их в единое целое. Сравнительно недавно функциональный анализ был преимущественно линейным. Его развитие, обусловленное, прежде всего, потребностями дифференциальных уравнений, численных методов, математического программирования и других разделов математики, вызвало к жизни новые нетривиальные ветви нелинейного функционального анализа. Возрастающая прикладная направленность функционального анализа делает его необходимым для прикладников и инженеров, использующих в своей практике современные математические методы.

Возникновение и развитие функционального анализа связано с именами таких крупнейших ученых, как Д. Гильберт, Э. Шмидт, Ф. Рисс, М. Фреше, Ф. Хаусдорф, С. Банах, Ю. Шаудер, Л. А. Люстерник, А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, А. Н. Тихонов, С. М. Никольский, А. А. Самарский.

Основу данной книги составили курсы лекций по функциональному анализу, читавшиеся автором в течение ряда лет сначала студентам факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института, а затем — студентам Московского института стали и сплавов, специализирующимся в области кибернетики металлургических процессов. Это в значительной мере предопределило содержание книги и характер изложения.

В прошлом было издано немало первоклассных книг по функциональному анализу и его приложениям. Все они косвенно подразумевают, что читатель имеет математическое образование по меньшей мере в объеме двух первых курсов университета; это делает их труднодоступными для широкого круга читателей, интересующихся функциональным анализом с точки зрения его приложений. Нашей целью было по возможности устранить имеющийся пробел и предложить книгу, не предполагающую у читателя специальных знаний, например в топологии и в теории функций действительного переменного, и опирающуюся лишь на обычный курс высшей математики технического вуза объемом около 500 часов.

Приводя наиболее употребительные сегодня понятия и факты функционального анализа почти всегда с полными доказательствами (только так и можно изучать математику), мы старались при этом сохранить живую связь с математическим анализом и другими вузовскими разделами математики.

Почти каждое новое понятие иллюстрируется примером, задачей или упражнением. Упражнения иногда вклиниваются в доказательства, примеры, рассуждения. Это сделано, чтобы побудить читателя задумываться над связью излагаемого материала с уже известными ему математическими фактами и понятиями, понимать их прикладное значение.

Остановимся теперь на содержании книги. Мы ограничились изложением функционального анализа в банаховых пространствах, хотя большая часть понятий и фактов допускает непосредственное перенесение на метрические или линейные топологические пространства. Сделано это для того, чтобы читатель не был вынужден следить за чересчур большими разветвлениями теории и мог сосредоточить внимание на сущности излагаемых идей и методов. В то же время в ряде случаев построения достигают серьезной степени абстракции. Это делается обычно в случаях, важных для приложений. Заметим, однако, что приложениям функционального анализа посвящены специальные книги и приводимые нами примеры обычно носят иллюстративный характер. В сравнительно небольшой по объему книге нельзя было, разумеется, охватить все направления функционального анализа, имеющие важные приложения. Мы не затронули, например, теорию обобщенных функций, хорошо освещенную в литературе, а также теорию степени отображения Лере–Шаудера, изложение которой потребовало бы привлечения сведений из топологии.

Книга состоит из десяти глав, в каждой из которых освещены как теоретические, так и прикладные вопросы.

Глава I посвящена общим вопросам теории линейных, нормированных, банаховых и гильбертовых пространств. Здесь обсуждаются, например, элементы теории приближений, теорема Бэра–Хаусдорфа о категориях, ряды Фурье в гильбертовых и в банаховых пространствах.

Глава II содержит теорию пространств Лебега и Соболева. Доказаны теоремы о пополнении нормированных пространств и пространств со скалярным произведением. В отдельном параграфе (§ 8), в написании которого принимала участие доцент Т. Н. Сабурова, на основе теоремы о пополнении дается теория интеграла Лебега. Рассмотрены пространства Соболева, приведены простейшие теоремы вложения.

В главе III изложена теория линейных операторов. Понятия непрерывности и ограниченности рассмотрены с точки зрения общих нелинейных операторов. Большое внимание уделено важным понятиям обратного и непрерывно обратимого линейных операторов. Здесь же рассмотрены абстрактные функции числовой переменной, а также методы малого параметра и продолжения по параметру для линейных уравнений. Обсуждены понятия линейного неограниченного и замкнутого операторов. Доказана теорема Банаха о замкнутом графике, следствием которой является теорема Банаха об обратном операторе.

Глава IV посвящена изложению теоремы Хана–Банаха, понятиям сопряженных пространств и операторов, а также теории самосопряженных операторов, включая операторы ортогонального проектирования. В этой же главе приведена теорема Рисса об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве. В качестве ее приложения доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

В главе V изложены теории вполне непрерывных и нормально разрешимых линейных операторов. Приведены простейшие варианты регуляризации в смысле А. Н. Тихонова некорректных задач для линейных уравнений.

В главе VI приводятся основы спектральной теории линейных операторов. Формула спектрального разложения доказана строго только для случая ограниченного самосопряженного оператора.

Глава VII содержит изложение общей теории абстрактных приближенных схем с приложениями к разностным задачам и к методу Галеркина. Здесь же даны элементы теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и намечены методы их решения.

Глава VIII включает в себя элементы нелинейного анализа, принцип сжимающих отображений, метод касательных Ньютона и принцип Шаудера.

В главе IX рассмотрена теория неявных операторов, включая задачи о ветвлении решений.

В заключительной X главе изложены абстрактные нелинейные схемы, теория монотонных операторов и начала выпуклого анализа.

Отметим, что § 35 и § 39 написаны при участии доцента А. А. Фонарева. В книге частично использованы в переработанном виде материалы учебного пособия М. А. Наймарка и В. В. Мартынова [29]. Вообще, нужно сказать, что работа автора в МФТИ на протяжении 17 лет, общение с рядом выдающихся математиков, там работавших, а также многолетний контакт с членом-корреспондентом АН СССР Л. А. Люстерником оказали самое серьезное влияние на математическое мировоззрение автора.

В третьем издании книги сделан ряд локальных улучшений и внесены некоторые дополнения, связанные в основном с включением в книгу следующего нового материала.

Так, существенно расширен п. 21.6 об априорных оценках, исключительно важных при рассмотрении вопросов разрешимости линейных уравнений. В новом п. 21.7 рассмотрены абстрактные граничные задачи, что позволит читателю с единой точки зрения взглянуть на функционально–дифференциальные уравнения с нелокальными граничными условиями. В § 40 включены теорема Люстерника, играющая уникальную роль в экстремальных задачах и в задачах оптимального управления, а также правило множителей Лагранжа. (Автор благодарит А. В. Дмитрука за полезное обсуждение данных вопросов). Добавлено дополнение, дающее краткое введение в теорию топологических и, в частности, локально выпуклых пространств.

Если данная книга облегчит читателю пользование более специальными учебниками и монографиями, то автор будет считать свою задачу выполненной. Надеюсь также, что предлагаемые в книге материалы могут быть использованы не только в курсах функционального анализа, но и в различного рода специальных курсах.

Автор сердечно благодарен рецензенту профессору Н. С. Бахвалову, чьи многочисленные полезные замечания существенно улучшили книгу. Автор благодарен профессорам А. А. Дезину и С. И. Похожаеву за сделанные ими ценные замечания.

Автор благодарен также своим многочисленным читателям.

В. А. Треногин

Г Л А В А I

ЛИНЕЙНЫЕ, НОРМИРОВАННЫЕ И БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Линейные пространства

1.1. Определение линейного пространства. Понятие линейного пространства является одним из важнейших понятий современной математики. Множество всех векторов плоскости или трехмерного пространства и, что особенно важно, различные множества функций (функциональные пространства) можно охарактеризовать одними и теми же общими свойствами линейности. Следуя принятому в математике аксиоматическому подходу, выделяют основные из этих свойств в систему аксиом, определяющих общее понятие линейного пространства.

Определение. Множество E элементов x, y, z, ... называется *линейным пространством,* если в нем определены следующие две операции.

1. Каждым двум элементам x, $y \in E$ поставлен в соответствие определенный элемент $x + y \in E$, называемый их *суммой.*

2. Каждому элементу $x \in E$ и каждому числу (скаляру) λ поставлен в соответствие определенный элемент $\lambda x \in E$ — *произведение* элемента x на скаляр λ — так, что выполнены следующие свойства (аксиомы) для любых x, y, $z \in E$ и любых скаляров λ, μ:

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) существует элемент $0 \in E$ такой, что $x + 0 = x$;
4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
5) $1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0$ (слева 0 — скаляр, а справа элемент множества E);
6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

В качестве числовых множителей (скаляров) λ, μ, ... в линейном пространстве берутся вещественные или комплексные числа. В первом случае E называется *вещественным* (действительным) линейным пространством, во втором — *комплексным* линейным пространством. Во всяком линейном пространстве E для всякого элемента $x \in E$ можно определить *противоположный* элемент $-x$, а значит, и операцию вычитания элементов $y - x$. Положим по определению $-x = (-1)x$. Тогда, согласно аксиомам 5) и 7),

$$x + (-x) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

Далее под *разностью* $x - y$ будем понимать выражение

$$x - y = x + (-y).$$

Приведем некоторые простые следствия, вытекающие из определения линейного пространства.

С л е д с т в и е 1. *Нулевой элемент единствен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что 0_1 и 0_2 — нули в E; тогда $0_1 + 0_2 = 0_1$, $0_2 + 0_1 = 0_2$ (согласно аксиоме 3)). Отсюда, по аксиоме 1), $0_1 = 0_2$.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\lambda x = \mu x$, *где* $x \neq 0$, *то* $\lambda = \mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прибавив к обеим частям равенства $\lambda x = \mu x$ по $-\mu x$, получим $(\lambda - \mu)x = 0$. Если $\lambda \neq \mu$, то отсюда, по аксиоме 4), $(\lambda - \mu)^{-1}[(\lambda - \mu)x] = x = 0$; получено противоречие. Значит, $\lambda = \mu$.

С л е д с т в и е 3. *Если* $\lambda x = \lambda y$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* $x = y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прибавляя к обеим частям равенства $\lambda x = \lambda y$ по $-\lambda y$, получим $\lambda(x - y) = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то отсюда $x - y = \lambda^{-1}[\lambda(x - y)] = 0$, т. е. $x = y$.

1.2. Примеры линейных пространств.

П р и м е р 1. Множество всевозможных векторов (в трехмерном пространстве, на плоскости или на прямой) образует линейное пространство. Напомним, что сумма векторов определяется по правилу параллелограмма, а произведение вектора x на вещественное число λ определяется как вектор λx, длина которого есть произведение $|\lambda|$ на длину x, а направление совпадает с направлением x, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Аксиомы линейного пространства — это известные свойства операций над векторами (проверьте!).

Таким образом, элементы линейного пространства естественно рассматривать как обобщение векторов. Вместо термина «линейное пространство» употребляется также термин «векторное пространство». В дальнейшем, говоря об элементах линейного пространства, мы будем называть их также *векторами*.

П р и м е р 2. Рассмотрим множество $\mathbf{R}^m$ всевозможных упорядоченных наборов (столбцов) из m вещественных чисел

$$x = (\xi_i)_{i=1}^m, \qquad y = (\eta_i)_{i=1}^m, \qquad z = (\zeta_i)_{i=1}^m.$$

Числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$ будем называть *координатами* столбца x. Под суммой столбцов $x + y$ будем понимать столбец, координаты которого — суммы соответствующих координат столбцов x и y, т. е. $x + y = (\xi_i + \eta_i)_{i=1}^m$. Под столбцом λx, где λ — вещественное число, будем понимать столбец $(\lambda \xi_i)_{i=1}^m$. Роль нуля играет столбец $0 = (0)_{i=1}^m$. Поскольку операции над столбцами сводятся к операциям над координатами — вещественными числами, для которых аксиомы линейного пространства выполняются тривиально, то эти же аксиомы справедливы и для столбцов. Таким образом, $\mathbf{R}^m$ является линейным пространством.

Аналогично можно рассмотреть и столбцы комплексных чисел с умножением их на комплексные числа. В результате мы получим комплексное линейное пространство столбцов.

Рассмотрим теперь примеры линейных пространств функций. Сделаем сначала некоторые общие замечания. Пусть D — некоторое множество элементов t произвольной природы и пусть каждому $t \in D$ поставлен в соответствие элемент $x(t)$ линейного пространства E, т. е. задана функция $x = x(t)$ с областью определения D и с областью значений в E. Под суммой $(x + y)(t)$ двух таких функций $x(t)$ и $y(t)$ будем понимать функцию $(x + y)(t) \equiv x(t) + y(t)$. Под произведением $(\lambda x)(t)$ функции $x(t)$ на число λ будем понимать функцию $(\lambda x)(t) \equiv \lambda x(t)$.

В предлагаемых ниже примерах рассматриваются функции с вещественными или комплексными значениями, т. е. E — вещественная ось или комплексная плоскость. Как и в примере 2, операции над такими функциями сводятся к операциям над вещественными или комплексными числами. Фиксируя D и выбирая тот или иной класс функций, мы автоматически получим выполнение аксиом линейного пространства, если только $x + y$ и λx принадлежат выбранному классу функций вместе с x и y.

Пример 3. Рассмотрим множество всех многочленов степени, не превышающей k: $x(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_k t^k$ ($x_0, x_1, \ldots, x_k$ — произвольные вещественные числа, $t \in D = (-\infty, +\infty)$). Поскольку произведение многочлена на вещественное число и сумма двух многочленов являются многочленами, мы получаем линейное *пространство многочленов*.

Точно так же можно рассмотреть комплексное линейное пространство многочленов степени не выше k. Его элементы $x(t)$ имеют вид $x(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_k t^k$ ($x_0, x_1, \ldots, x_k$ — комплексные числа, t — комплексная переменная, изменяющаяся на комплексной плоскости D).

Пример 4. Пространство $C[a, b]$ — *пространство непрерывных функций*. Пусть $D = [a, b]$. Берем всевозможные непрерывные на $[a, b]$ функции $x(t)$, $y(t)$. Так как $x(t) + y(t)$ непрерывна на $[a, b]$, как сумма непрерывных функций, и $\lambda x(t)$ тоже непрерывна, то $C[a, b]$ является линейным пространством. Возможны вещественнный и комплексный случаи.

Пример 5. Пространство $C^k[a, b]$ (k — натуральное число) — *пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций*. Поскольку $\lambda x(t) \in C^k[a, b]$, если $x(t) \in C^k[a, b]$, и $x(t) + y(t) \in C^k[a, b]$, если $x(t)$ и $y(t) \in C^k[a, b]$, то $C^k[a, b]$ — линейное пространство.

Пример 6. Рассмотрим множество M_{mn} всех прямоугольных матриц порядка $m \times n$ со скалярными элементами

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

Определим в M_{mn} операции

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \quad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Поскольку операции над матрицами сводятся к операциям над числами, то справедливость аксиом очевидна. Если элементы матриц и скаляры λ вещественны (комплексны), то мы приходим к вещественному (комплексному) линейному пространству.

В дальнейшем мы встретимся и с другими примерами линейных пространств.

1.3. Линейная зависимость и линейная независимость элементов. Ниже E — линейное пространство. Пусть даны элементы $x_1, \ldots, x_l \in E$. Всякая сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k x_k$, где α_k — числа, называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, \ldots, x_l$.

Элементы $x_1, \ldots, x_l$ называются *линейно зависимыми*, если существует их линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k x_k = 0$, где не все α_k равны 0 (т. е. $\sum\limits_{k=1}^{l} |\alpha_k| > 0$). Если равенство $\sum\limits_{k=1}^{l} \alpha_k x_k = 0$ возможно только при условии $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = 0$, то элементы $x_1, \ldots, x_l$ называются *линейно независимыми*.

Упражнение 1. Покажите, что один элемент (вектор) линейного пространства линейно зависим в том и только в том случае, когда он равен нулю. Покажите, что n векторов при $n \geqslant 2$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих векторов является линейной комбинацией остальных $n-1$ векторов.

Как известно, понятие линейной зависимости обобщает понятия коллинеарности и компланарности векторов.

Упражнение 2. Найдите α, при котором векторы (1,2,3), (1,1,0) и $(\alpha, 1, 1)$ компланарны, т. е. линейно зависимы.

Упражнение 3. Покажите, что в $C[0, \pi]$ функции 1, $\cos t$, $\cos^2 t$ линейно независимы, а функции 1, $\cos 2t$, $cos^2 t$ линейно зависимы.

Упражнение 4. Пусть элементы $x_1, \ldots, x_m$ линейного пространства E линейно независимы. Покажите, что любые k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ из этих векторов также линейно независимы.

1.4. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства. Линейное пространство называется *m-мерным*, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m+1$ векторов линейно зависимы.

Упражнение 1. Покажите, что в $\mathbf{R}^m$ (см. пример 2 п.1.2) столбцы $l_k = (\delta_{kl})_{l=1}^m$ $(k = 1, \ldots, m)$ $(\delta_{kl} = 1$ при $k = l$, $\delta_{kl} = 0$ при $k \neq l$ — так называемый *символ Кронекера*) линейно независимы.

Упражнение 2. Покажите, что в $\mathbf{R}^m$ всякие $m+1$ векторов линейно зависимы. Для этого составьте матрицу из координат этих векторов и воспользуйтесь тем, что ее ранг не превосходит m.

Из упражнений 1 и 2 следует, что $\mathbf{R}^m$ m-мерно.

Определение 1. Набор любых m линейно независимых векторов в m-мерном линейном пространстве E называется *базисом* в E.

Фиксируем в m-мерном линейном пространстве E базис $\{e_k\}_{k=1}^m$. Пусть $x \in E$; вследствие m-мерности E векторы $e_1, \ldots, e_m$, x линейно зависимы. Но тогда найдутся скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ такие, что

$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} x = 0$. При этом $\alpha_{m+1} \neq 0$, иначе векторы $e_1, \ldots, e_m$ были бы линейно зависимы. Следовательно,

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_m e_m, \tag{1}$$

где $\xi_k = -\alpha_k / \alpha_{m+1}$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Представление (1) произвольного вектора m-мерного пространства E называется *разложением* вектора x по базису $\{e_k\}_{k=1}^m$. Числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$ называются *координатами* вектора x в базисе $\{e_k\}_{k=1}^m$.

Упражнение 3. Покажите, что представление (1) вектора единственно, т. е. при фиксированном базисе координаты всякого вектора x однозначно определяются вектором x.

Упражнение 4. Разложите вектор $x \in \mathbf{R}^m$ по базису $\{e_k\}_1^m$, введенному в упражнении 1.

Конечномерные линейные пространства систематически изучаются в вузовском курсе линейной алгебры. Нас здесь интересуют главным образом бесконечномерные линейные пространства.

Определение 2. Линейное пространство E называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального n в E существует n линейно независимых элементов.

Упражнение 5. Покажите, что $C[a,b]$ бесконечномерно. Рассмотрите последовательность функций $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ и покажите, что $1, t, \ldots, t^n$ линейно независимы для любого натурального n. Покажите, что $C^k[a,b]$ также бесконечномерно.

1.5. Линейные и аффинные многообразия.

Определение 1. Множество $\widetilde{E}$ в линейном пространстве E называется *линейным многообразием (линейным множеством)*, если для любых $x, y \in \tilde{E}$ и любых скаляров λ, μ линейная комбинация $\lambda x + \mu y \in \widetilde{E}$.

Заметим, что поскольку $\widetilde{E}$ является частью линейного пространства E, то из определения линейного многообразия $\widetilde{E}$ следует, что $\widetilde{E}$ также является линейным пространством.

Приведем примеры линейных многообразий.

Пример 1. Пусть $E[a,b]$ — линейное пространство всех вещественных функций, определенных на $[a,b]$. Тогда $C[a,b]$ — линейное многообразие в $E[a,b]$. Это вытекает из известного в математическом анализа факта, что линейная комбинация двух непрерывных на $[a,b]$ функций есть функция, непрерывная на этом отрезке.

Пример 2. Пространство $C^k[a,b]$, $k \geq 1$, является линейным многообразием в пространстве $C[a,b]$, так как всякая k раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция непрерывна на $[a,b]$, а линейная комбинация функций из $C^k[a,b]$ снова является функцией из $C^k[a,b]$ (почему?).

Упражнение 1. Покажите что при $k > l \geq 0$ $C^k[a,b]$ — линейное многообразие в $C^l[a,b]$.

Упражнение 2. Покажите что множество всех многочленов степени не выше m является $(m+1)$-мерным линейным многообразием в $C[a,b]$.

Упражнение 3. Покажите, что в $C[a,b]$ множество всех функций, удовлетворяющих граничным условиям $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$, является линейным многообразием тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$.

Упражнение 4. Докажите, что множество решений линейной однородной системы m уравнений с n неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \tag{1.1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \tag{1.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.3}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \tag{1.4}$$

при $n > r$ является $(n-r)$-мерным линейным многообразием в $\mathbf{R}^n$, где r — ранг матрицы системы.

Упражнение 5. Докажите, что множество решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)x = 0$$

(коэффициенты $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны на $[a, b]$) образует n-мерное линейное многообразие в $C[a, b]$.

С понятием линейного многообразия тесно связано понятие аффинного многообразия. Введем сначала следующее обозначение. Пусть M — некоторое множество в линейном пространстве E. Множество векторов из E вида $x_0 + u$, где u пробегает M, будем обозначать $x_0 + M$. Короче,

$$x_0 + M = \{x_0 + u;\ u \in M\}.$$

Определение 2. Пусть L — линейное многообразие в линейном пространстве E. Фиксируем $x_0 \notin L$. Множество $x_0 + L$ называется *аффинным многообразием* в E. Если E конечномерно, то размерность L называется *размерностью* аффинного многообразия $x_0 + L$. В трехмерном пространстве всякая прямая и всякая плоскость, не проходящие через начало координат, являются аффинными многообразиями.

Упражнение 6. Докажите, что множество решений совместной линейной неоднородной системы m уравнений с n неизвестными

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_j, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

является $(n-r)$-мерным аффинным многообразием в $\mathbf{R}^n$, где r — ранг матрицы системы.

Упражнение 7. Докажите, что множество решений линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)x = y(t),$$

где коэффициенты $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и правая часть $y(t)$ непрерывны на $[a, b]$, образует n-мерное аффинное многообразие в $C[a, b]$.

1.6. Изоморфизм линейных пространств. Рассмотрим линейные пространства X и $\widetilde{X}$; пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие определенный элемент $\widetilde{x} \in X$, т. е. задана функция $\widetilde{x} = J(x)$, определенная всюду на X, со значениями в $\widetilde{X}$. Будем говорить, что пространства X и $\widetilde{X}$ (линейно) *изоморфны*, если найдется функция $\widetilde{x} = J(x)$, осуществляющая линейное и взаимно однозначное соответствие между X и $\widetilde{X}$, т. е.

1) $J(\lambda x+\mu y) = \lambda J(x)+\mu J(y)$ для любых элементов $x,\ y \in X$ и любых скаляров λ, μ;

2) если $J(x_1) = J(x_2)$, то $x_1 = x_2$;

3) для любого $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ найдется $x \in X$ такой, что $\widetilde{x} = J(x)$.

Приведем примеры изоморфных линейных пространств.

Пример 1. Пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше m изоморфно $\mathbf{R}^{m+1}$. Действительно, пусть $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} x_k t^k$; рассмотрим функцию J, отображающую каждый такой многочлен в столбец $(x_k)_{k=0}^m \in \mathbf{R}^{m+1}$, т. е. $J\left(\sum\limits_{k=0}^{m} x_k t^k\right) = (x_k)_{k=0}^m$.

Упражнение. Проверьте, что J — линейная, взаимно однозначная функция.

Пример 2. Всякое m-мерное вещественное линейное пространство E изоморфно $\mathbf{R}^m$.

Фиксируем в E базис $\{e_k\}_1^m$. Тогда всякий $x \in E$ однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ (см. формулу (1) п. 1.4). Положим для всякого $x \in E$

$$J(x) = (\xi_k)_{k=1}^m \in \mathbf{R}^m.$$

Если $y = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k e_k$, то $\lambda x + \mu y = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda\xi_k + \mu\eta_k)e_k$, т. е. справедливо свойство линейности координат: координаты линейной комбинации векторов равны той же линейной комбинации соответствующих координат этих векторов. Следовательно,

$$J(\lambda x + \mu y) = (\lambda\xi_k + \mu\eta_k)_{k=1}^m = \lambda(\xi_k)_{k=1}^m + \mu(\eta_k)_{k=1}^m = \lambda J(x) + \mu J(y).$$

Взаимная однозначность J есть следствие единственности координат вектора (при фиксированном базисе). Итак, E изоморфно $\mathbf{R}^m$.

1.7. Выпуклые множества в линейных пространствах. Пусть E — линейное пространство. *Отрезком*, соединяющим точки $x_1,\ x_2 \in E$, называется совокупность всех точек x вида

$$x = (1-t)x_1 + tx_2, \quad t \in [0, 1].$$

Определение 1. Множество W в линейном пространстве E называется *выпуклым*, если всякий раз из того, что $x_1,\ x_2 \in W$, следует, что W принадлежит отрезок, соединяющий x_1 и x_2.

Упражнение 1. Покажите, что всякое линейное многообразие в E является выпуклым множеством.

Упражнение 2. Пусть W — выпуклое множество, а $x_0 \in E$. Покажите, что множество $x_0 + W$ — выпуклое. Отсюда, в частности, вытекает выпуклость аффинных многообразий.

Введем теперь понятие выпуклого функционала. Пусть на линейном пространстве E задана функция, ставящая всякому $x \in E$ в соответствие число $p(x)$. В этом случае говорят, что на E задан функционал $p(x)$. Если все значения $p(x)$ вещественны, то функционал $p(x)$ называется вещественным функционалом.

Определение 2. Вещественный функционал $p(x)$ называется *выпуклым*, если для любых x_1, $x_2 \in E$ и любых $t \in [0,1]$

$$p((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)p(x_1) + tp(x_2).$$

С помощью выпуклых функционалов можно строить выпуклые множества. Фиксируем элемент $x_0 \in E$ и вещественное число c.

Рассмотрим следующее множество:

$$Q = \{x \in E: \ p(x - x_0) < c\}.$$

Покажем, что Q выпукло. Действительно, пусть x_1, $x_2 \in Q$, т. е. $p(x_1 - x_0) < c$ и $p(x_2 - x_0) < c$; тогда для всех $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}p((1-t)x_1 + tx_2 - x_0) &\leqslant p((1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)) \\ &\leqslant (1-t)p(x_1 - x_0) + tp(x_2 - x_0) < (1-t)c + tc = c.\end{aligned}$$

Следовательно, вместе с x_1 и x_2 Q содержит соединяющий их отрезок, т. е. Q выпукло.

Упражнение 3. Пусть $p(x)$ — выпуклый функционал, x_0 — вектор, c — вещественное число. Докажите выпуклость множества

$$\bar{Q} = \{x \in X: \ p(x - x_0) \leqslant c\}.$$

Упражнение 4. Покажите, что пересечение произвольного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

В заключение приведем еще два полезных определения.

Определение 3. Множество $W \subset E$ называется *уравновешенным*, если $\alpha x \in W$ при любых $x \in W$ и любых $\alpha \in [-1, 1]$.

Определение 4. Множество $W \subset E$ называется *поглощающим*, если для любого $x \in W$ существует $\alpha > 0$ такое, что $\alpha^{-1}x \in W$.

1.8. Комплексификация и декомплексификация. Пусть E — вещественное линейное пространство. Покажем, что E можно включить в некоторое комплексное линейное пространство $\widetilde{E}$. Рассмотрим всевозможные формальные суммы $z = x + iy$, где x, $y \in E$, а i — мнимая единица. Если, кроме того, $z_1 = x_1 + iy_1$, то определим

$$z + z_1 = (x + x_1) + i(y + y_1),$$

$$(\alpha + \beta i)z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

(α и β — вещественные скаляры)

Множество формальных сумм z теперь, как нетрудно видеть, превратилось в комплексное линейное пространство, которое обычно называют *комплексной оболочкой* E и которое мы обозначим через $\widetilde{E}$. Наше исходное пространство E включается в $\widetilde{E}$, ибо все элементы из $\widetilde{E}$ вида $x + i \cdot 0$ с умножением на скаляры $\alpha + i \cdot 0$ составляют E. Такое включение вещественного линейного пространства E в комплексное линейное пространство $\widetilde{E}$ называется *комплексификацией* пространства E.

Декомплексификация есть процедура, обратная (в определенном смысле) комплексификации. Пусть $\widetilde{E}$ — комплексное линейное пространство. Каждый его вектор z запишем в виде $z = x + iy$, где x и y — вещественные элементы $\widetilde{E}$. Рассмотрим вещественное линейное пространство E пар (x, y), в котором по определению (λ — вещественный скаляр)

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y).\end{gathered} \tag{1}$$

Упражнение 1. Проверьте для E аксиомы линейного пространства.

Упражнение 2. Пусть $\widetilde{E}$ — m-мерное комплексное линейное пространство. Тогда E — $2m$-мерное вещественное линейное пространство.

Переход от $\widetilde{E}$ к E называется *декомплексификацией* комплексного линейного пространства $\widetilde{E}$.

Комплексификация и декомплексификация применяются тогда, когда хотят воспользоваться результатами, полученными для одного из случаев — комплексного или вещественного, — в другом случае.

§ 2. Нормированные пространства

В предыдущем параграфе мы рассмотрели линейные пространства. Следующим нашим шагом будет введение нормированных пространств. Понятие модуля вещественного числа, комплексного числа или вектора позволяет ввести расстояние, или, как принято говорить, метрику, на числовой оси, в комплексной плоскости или в пространстве векторов соответственно. Наличие метрики, в свою очередь, позволяет рассматривать важнейшие вопросы о сходимости последовательностей и рядов, о предельном переходе, о непрерывности и дифференцируемости функций и т. п.

2.1. Определение нормированного пространства.

Определение 1. Линейное пространство E называется *нормированным пространством*, если каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (*норма* x) так, что выполнены следующие три аксиомы:

1) $\|x\| = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Таким образом, норма — это определенная всюду на E функция с неотрицательными значениями и со свойствами 1)–3). Заметим, что аксиома 1) называется условием *невырожденности* нормы, аксиома 2) — условием *однородности* нормы, а аксиома 3) — *неравенством треугольника*. В случае векторов аксиома 3) означает, что длина стороны в треугольнике не превышает суммы длин двух других его сторон. Как следствие отсюда имеем: длина любой стороны треугольника больше или равна разности длин двух других его сторон. Соответствующее неравенство для нормы имеет вид

$$\|x-y\| \geqslant \big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|. \tag{1}$$

Докажем это неравенство. По неравенству треугольника имеем

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|,$$

откуда $\|x-y\| \geq \|x\|-\|y\|$; меняя ролями x и y, получим

$$\|x-y\| \geqslant \|y\|-\|x\|.$$

Оба последних неравенства в совокупности дают неравенство (1).

В нормированном пространстве можно ввести *расстояние* между любыми двумя его элементами по формуле

$$\rho(x,\,y) = \|x-y\|.$$

Упражнение 1. Показать, что расстояние $\rho(x,y)$ удовлетворяет следующим трем свойствам:

α) $\rho(x,y) \geqslant 0$, при этом $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

β) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

γ) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$.

Определение 2. Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее аксиомам α), β), γ). Таким образом, метрические пространства можно считать обобщениями нормированных пространств.

Рассмотрим в нормированном пространстве E множество $S_r(x_0) = \{x \in E:\ \|x-x_0\| < r\}$, где $x_0 \in E$ — фиксированная точка, а $r>0$. Множество $S_r(x_0)$ называется *открытым шаром* с центром в точке x_0, радиуса r. Аналогично, множество

$$\bar{S}_r(x_0) = \{x \in E:\ \|x-x_0\| \leqslant r\}$$

называется *замкнутым шаром* (с центром в x_0 радиуса r). Множество

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in E:\ \|x-x_0\| = r\}$$

называется *сферой*. Очевидно, $\bar{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$.

Упражнение 2. Покажите, что $\|x\|$ является выпуклым функционалом в E и, следовательно, согласно п. 1.7, шары $\bar{S}_r(x_0)$ и $S_r(x_0)$ выпуклы. Будет ли $\sigma_r(x_0)$ выпуклым множеством в E?

Далее будет приведено много примеров нормированных пространств. Пока же мы ограничимся простейшими примерами.

Пример 1. В вещественном линейном пространстве m-мерных столбцов $\mathbf{R}^m$ введем норму

$$\|x\|_c = \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2\right)^{1/2}.$$

Аксиомы нормы 1) и 2) выполняются тривиально. Неравенство треугольника (аксиома 3)), известное из курса линейной алгебры, будет доказано позже и в более общем случае (см. неравенство (4), п. 2.3).

Полученное нормированное пространство в линейной алгебре известно как *евклидово пространство* и обозначается E^m.

Упражнение 3. Как выглядит $S_r(x_0)$, $\bar{S}_r(x_0)$, $\sigma_r(x_0)$ в E^m при $m = 1, 2, 3$?

Пример 2. Пространство c^m. Введем в $\mathbf{R}^m$ норму

$$\|x\|_{\text{к}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi_i|.$$

Проверим аксиомы нормы.

1) $\|x\|_i \geqslant 0$ — это очевидно. Пусть $\|x\| = 0$, т.е. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\xi_i| = 0$; но тогда все $\xi_i = 0$ и $x = (0)_{i=1}^m = 0$.

2) $|\lambda\xi_i| = |\lambda| \cdot |\xi_i|$, откуда вытекает однородность нормы.

3) $|\xi_i + \eta_i| \leqslant |\xi_i| + |\eta_i| \leqslant \max\limits_i |\xi_i| + \max\limits_i |\eta_i|$, т.е. $|\xi_i + \eta_i| \leqslant \|x\|_{\text{к}} + \|y\|_{\text{к}}$. Переходя в этом неравенстве слева к max по i, получим неравенство треугольника.

Упражнение 4. Как выглядят в c^m $S_r(x_0)$, $\bar{S}_r(x_0)$, $\sigma_r(x_0)$ при $m = 1, 2, 3$?

Замечание. Множество $\{x \in \mathbf{R}^m : \|x - x_0\|_{\text{к}} < r\}$ называют обычно m-мерным кубом. Это оправдывает наше обозначение $\|x\|_{\text{к}}$ — «норма кубическая». Множество $\{x \in \mathbf{R}^m : \|x - x_0\|_c < r$ называют m-мерным шаром ($\|x\|_c$ — «норма сферическая»).

2.2. Предел последовательности. Рассмотрим в нормированном пространстве E последовательность элементов $\{x_n\}$.

Определение 1. Элемент $x_0 \in E$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если x_0 есть предел $\{x_n\}$, то будем писать $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и говорить, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 или просто сходится. Назовем *окрестностью* точки x_0 любой открытый шар $S_r(x_0)$.

Упражнение 1. Покажите, что если $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то

1) в любой окрестности точки x_0 находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, их конечного числа;

2) предел x_0 единствен;

3) любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к x_0;

4) если $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$, то $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$ при $n \to \infty$;

5) если, кроме того, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$ ($y_n \in E$, $y_0 \in E$), то $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ при $n \to \infty$.

Пользуясь неравенством (1) п. 2.1, доказать, что

6) если $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$.

Определение 2. Множество $M \subset E$ назовем *ограниченным*, если его можно заключить в некоторый шар. Точнее, M ограничено, если существует такое число $C > 0$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant C$.

Упражнение 2. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Пример 1. Рассмотрим пространство c^m (см. пример 2 п. 2.1). Какова будет сходимость в c^m?

Пусть $x_n = (\xi_{ni})_{i=1}^m$ и $x_n \to x_0 = (\xi_{0i})_{i=1}^m$ при $n \to +\infty$. Тогда

$$\|x_n - x_0\|_{\text{к}} = \max_i |\xi_{ni} - \xi_{0i}| \to 0, \quad n \to +\infty;$$

значит, $\xi_{ni} \to \xi_{0i}$ ($n \to \infty$, $i = 1, \ldots, m$). Это означает, что каждая координата вектора x_n сходится к соответствующей координате вектора x_0. Можно поэтому сказать, что сходимость в c^m — покоординатная.

Пример 2. Рассмотрим пространство E^m (см. пример 1 п. 2.1). Пусть $x_n = (\xi_{ni})_{i=1}^m \to x_0 = (\xi_{0i})_{i=1}^m$ при $n \to \infty$. Это означает, что при $n \to \infty$

$$\|x_n - x_0\|_c = \left(\sum_{i=1}^m (\xi_{ni} - \xi_{0i})^2\right)^{1/2} \to 0. \tag{1}$$

Поскольку для любого $x = (\xi_i)_1^m \in \mathbf{R}^m$

$$\|x\|_{\text{к}} = \max_i |\xi_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2\right)^{1/2} = \|x\|_c,$$

то из (1) следует, что

$$\|x_n - x_0\|_{\text{к}} \leqslant \|x_n - x_0\|_c \to 0, \ n \to \infty.$$

Согласно предыдущему примеру это означает, что сходимость в E^m — также покоординатная.

2.3. Неравенства Гёльдера и Минковского для сумм. В этом пункте мы доказываем два важных вспомогательных неравенства.

Пусть числа $p > 1$ и $q > 1$ связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$. Рассмотрим на полуоси $[0, +\infty)$ функцию

$$\varphi(t) = p^{-1}t^p + q^{-1} - t.$$

Упражнение . Докажите с помощью дифференциального исчисления, что $t = 1$ — единственная точка минимума функции $\varphi(t)$ на $[0, +\infty)$ и что, таким образом, справедливо неравенство

$$t \leqslant p^{-1}t^p + q^{-1}. \tag{1}$$

Положим в (1) $t = uv^{1/(p-1)}$ $(u \geqslant 0,\ v \geqslant 0)$ и получим следующее неравенство:

$$uv \leqslant u^p/p + v^q/q. \tag{2}$$

Исходя из неравенства (2), мы докажем неравенство Гёльдера для сумм. Для любых комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и $\eta_1, \ldots, \eta_m$ справедливо следующее *неравенство Гёльдера:*

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^q\right)^{1/q}. \tag{3}$$

Для доказательства введем обозначения

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p\right)^{1/p}, \qquad \|y\|_q = \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^q\right)^{1/q}.$$

Допустим, что оба эти выражения отличны от нуля (если это не так, то (3) очевидно).

Полагая в (2) $u = |\xi_k|/\|x\|_p$, $v = |\eta_k|/\|y\|_q$, получим

$$\frac{|\xi_k \eta_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leqslant \frac{|\xi_k|^p}{p\,\|x\|_p^p} + \frac{|\eta_k|^q}{q\|y\|_q^q}.$$

Суммируя по k от 1 до m, имеем

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\xi_k|^p}{p\,\|x\|_p^p} + \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} |\eta_k|^q}{q\|y\|_q^q} = 1.$$

Следовательно, справедливо неравенство Гёльдера

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leqslant \|x\|_p\, \|y\|_q.$$

Докажем теперь *неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^p\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Прежде всего заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p = \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k + \eta_k| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| + \sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k|.$$

К каждой из сумм в правой части неравенства применим неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\xi_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{1/p} = \\ = \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{p}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{1/p},$$

ибо $(p-1)q=p$. Точно так же

$$\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{p-1}|\eta_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{p}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Складывая два последних неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^{p}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{m}|\eta_k|^p\right)^{1/p}\right]. \tag{5}$$

Будем считать, что $\sum\limits_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^p>0$ (если эта сумма равна нулю, то неравенство Минковского (4) очевидно). Деля неравенство (5) на $\left(\sum\limits_{k=1}^{m}|\xi_k+ \right.$ $\left. + \eta_k|^p\right)^{1/q}$ и вспоминая, что $1-1/q=1/p$, получаем искомое неравенство (4).

2.4. Пространство $l_p^{(m)}$. Пусть $p\in[1,+\infty)$. Превратим $\mathbf{R}^m$ в нормированное пространство, которое мы будем обозначать $l_p^{(m)}$, вводя в нем норму по следующей формуле:

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^p\right)^{1/p}.$$

Проверка аксиом 1) и 2) нормы здесь очевидна, и мы предоставляем ее читателю.

Аксиома треугольника представляет собой доказанное в п. 2.3 при $p>1$ неравенство Минковского.

Упражнение 1. Докажите неравенство треугольника в $l_p^{(m)}$. Заметим, что при $p=2$ $l_2^{(m)}=E^m$ (см. пример 1 п. 2.1), т. е. представляет собой евклидово пространство.

Какова сходимость в $l_p^{(m)}$? Здесь можно провести рассуждение по образцу примера 2 п. 2.2.

Пусть $\|x\|_{\text{к}}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}|\xi_k|$ — норма кубическая.

Упражнение 2. Докажите следующее неравенство:

$$\|x\|_{\text{к}} \leqslant \|x\|_p \leqslant m^{1/p}\|x\|_{\text{к}}.$$

Из правой части этой оценки следует, что если $\{x_n\} \subset \mathbf{R}^m$ и если $x_n \to$ $\to x_0$ при $n \to \infty$ в c^m, то $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и в $l_p^{(m)}$, ибо $\|x_n - x_0\|_p \leqslant m^{1/p}\|x_n - x_0\|_{\text{к}}$.

Обратно, если $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ в $l_p^{(m)}$, то вследствие неравенства $\|x_n - x_0\|_{\text{к}} \leqslant \|x_n - x_0\|_p$ мы имеем $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ в c^m.

Таким образом, сходящиеся последовательности в c^m и $l_p^{(m)}$ совпадают и сходимость в $l_p^{(m)}$, как и в c^m, есть сходимость покоординатная.

2.5. Пространство ограниченных числовых последовательностей m. Рассмотрим множество последовательностей $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ таких, что $\sup\limits_i |\xi_i| < +\infty$. Это множество принято обозначать буквой m. Если $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in m$ и $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in m$, то по определению полагают

$$\lambda x = (\lambda \xi_i)_{i=1}^{\infty}, \quad x + y = (\xi_i + \eta_i)_{i=1}^{\infty}.$$

Упражнение 1. Доказать, что если $x,\ y \in m$, то $\lambda x \in m,\ x + y \in m$ и, значит, m — линейное пространство.

Превратим m в нормированное пространство, полагая

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|.$$

Упражнение 2. Проверьте справедливость аксиом нормы в пространстве m. Какова сходимость в m? Пусть $\{x_n\} \subset m$, $x_0 \in m$ и $x_n \to x_0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $n > N$ выполняется

$$\sup_i |\xi_{ni} - \xi_{0i}| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство эквивалентно условию, что $|\xi_{ni} - \xi_{0i}| < \varepsilon$ для любых номеров i.

Таким образом, сходимость в m — покоординатная, равномерная относительно номера координаты.

2.6. Пространство l_p, $p \geqslant 1$. Рассмотрим множество l_p всех числовых последовательностей $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ таких, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p$ сходится.

Упражнение 1. Покажите, что если $x \in l_p$, то и $\lambda x \in l_p$.

Норму в l_p введем по формуле

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p}.$$

Упражнение 2. Проверьте аксиомы 1) и 2) нормы.

Докажем в l_p неравенство треугольника. В неравенстве Минковского для конечных сумм (4) п. 2.3 увеличим правую часть, заменив m на любое $n > m$, и в полученном неравенстве

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right)^{1/p}$$

перейдем к пределу при $n \to \infty$. Получим неравенство (для любых m)

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p$ сходится, как ряд с неотрицательными членами, частичные суммы которого ограничены (см. [18]). Следовательно, $x+y \in l_p$, и справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k+\eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Это и есть неравенство треугольника. Итак, l_p — нормированное пространство.

2.7. Пространство непрерывных функций $C[a, b]$. Рассмотрим линейное пространство всех непрерывных на $[a, b]$ функций. Норму введем так:

$$\|x\| = \max_{[a,\, b]}|x(t)|.$$

Аксиомы 1) и 2) нормы проверяются тривиально. Проверим аксиому 3). По свойству модуля для любого $t \in [a, b]$ имеем

$$|x(t)+y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \max_{[a,\, b]}|x(t)| + \max_{[a,\, b]}|y(t)|.$$

Следовательно, $|x(t)+y(t)| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Неравенство сохранится, если взять $\max_{[a,\, b]}$ в левой его части. В результате получаем неравенство треугольника для нормы в $C[a, b]$; для полученного нормированного пространства мы сохраним прежнее обозначение.

Покажем теперь, что сходимость по норме в $C[a, b]$ есть равномерная сходимость. Пусть дана последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$, и пусть она сходится к $x_0(t) \in C[a, b]$, т. е. $\|x_n - x_0\| \to 0$, $n \to \infty$. Это означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при любых $n > N$ справедливо неравенство

$$\max_{[a,\, b]}|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$$

и тем более $|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [a, b]$. Итак, сходимость по норме $C[a, b]$ — равномерная.

Посмотрим, как выглядит в $C[a, b]$ (в вещественном случае) окрестность $S_\varepsilon(x_0) = \{x \in C[a, b\colon \|x - x_0\| < \varepsilon\}$. Для этого построим графики функций $x = x_0(t) + \varepsilon$, $x = x_0(t) - \varepsilon$. Эти два графика и отрезки прямых $t = a$ и $t = b$ ограничивают ε-полоску (полоску ширины 2ε вокруг графика $x = x_0(t)$), которая и служит ε-окрестностью точки x_0 (рис.1).

В $S_\varepsilon(x_0)$ лежат те элементы $x \in C[a,\, b]$, графики которых лежат строго между графиками элементов $x_0 - \varepsilon$ и $x_0 + \varepsilon$.

2.8. Пространство $C^k[a,\, b]$. В линейном пространстве k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,\, b]$ функций введем норму

$$\|x\|_{C^k[a,\,b]} = \sum_{i=0}^{k} \max_{[a,\,b]} |x^{(i)}(t)|,$$

где $x^{(i)}(t)$ — производная функции $x(t)$.

Упражнение . Проверьте аксиомы нормы в $C^k[a,\, b]$. Покажите, что сходимость в $C^k[a,\, b]$ — это равномерная сходимость на $[a,\, b]$ последовательностей $\{x^{(i)}(t)\}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$.

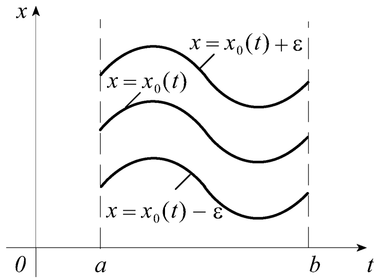


Рис. 1

2.9. Пространство $\widetilde{\mathcal{L}}_p$ $[a,\, b]$. Вернемся к линейному пространству непрерывных на $[a,\, b]$ функций. Однако теперь мы введем норму иначе:

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < +\infty$$

(интегрирование понимается в смысле Римана).

Упражнение 1. Проверьте аксиомы 1) и 2) нормы. Аксиома треугольника представляет собой неравенство Минковского для интегралов:

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\, dt\right)^{1/p}. \quad (1)$$

Доказательство неравенства Минковского при $p > 1$ основывается на неравенстве Гёльдера

$$\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \quad (2)$$

где $1/p + 1/q = 1$. Заметим сначала, что если $x(t) \equiv 0$ на $[a,\, b]$ или $y(t) \equiv \equiv 0$ на $[a,\, b]$, то неравенство (2) справедливо. Пусть $\|x\|_p > 0$, $\|y\|_q > 0$. Подставим в неравенство (см. (2) п. 2.3) $|uv| \leqslant u^p/p + v^q/q$ следующие выражения: $u = |x(t)| \,/\, \|x\|_p$, $v = |y(t)|/\|y\|_q$ и, проинтегрировав получившееся неравенство, получим

$$\frac{\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \leqslant \frac{\int_a^b |x(t)|^p\, dt}{p\|x\|_p^p} + \frac{\int_a^b |y(t)|^q\, dt}{q\|y\|_q^q} = 1.$$

Это и есть неравенство (2).

Далее, имеем, как и в случае сумм (см. п. 2.3),

$$\|x+y\|_p^p = \int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt \leqslant \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)|\,dt + \\ + \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1}|y(t)|\,dt \leqslant \|x+y\|^{p/q}(\|x\|_p + \|y\|_p).$$

После сокращения на $\|x+y\|^{p/q}$ получаем неравенство Минковского (1).

Определение 1. Пусть в линейном пространстве E введены две нормы: $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Если существует постоянная $\beta > 1$ такая, что для любых $x \in E$ выполнено неравенство

$$\|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|_2,$$

то будем говорить, что норма $\|\cdot\|_1$ *подчинена* норме $\|\cdot\|_2$.

Упражнение 2. Покажите, что если в линейном пространстве заданы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причем $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$, то из сходимости последовательности $\{x\} \subset E$ в смысле $\|\cdot\|_2$ вытекает ее сходимость в смысле $\|\cdot\|_1$, причем к тому же элементу.

Определение 2. Сходимость в $\widetilde{\mathcal{L}_p}[a, b]$ называется *сходимостью в среднем*.

Упражнение 3. Покажите, что $\|\cdot\|_p$ подчинена норме $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ и что, таким образом, из равномерной сходимости последовательности непрерывных на $[a, b]$ функций следует сходимость ее в среднем на $[a, b]$. Возникает вопрос — верно ли обратное: будут ли оба введенных вида сходимости эквивалентны? Ответ смотрите в п. 5.3.

§ 3. Анализ в нормированных пространствах

3.1. Открытые и замкнутые множества. Пусть E — нормированное пространство.

Определение 1. Множество $M \subset E$ называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую ее окрестность. Иначе, M открыто, если для любого $x_0 \in M$ найдется $r > 0$ такое, что $S_r(x_0) \subset M$.

Пустое множество $\varnothing$ считается открытым множеством в E по определению.

Упражнение 1. Докажите, что

1) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;

2) объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество;

3) все пространство E — открытое множество.

Упражнение 2. Докажите, что

1) открытый шар $S_r(x_0)$ является открытым множеством;

2) шаровой слой $\{x : r_1 < \|x - x_0\| < r_2\}$, где $r_1 \geqslant 0,\ r_2 < +\infty$, является открытым множеством;

Определение 2. Точка a называется *предельной точкой* множества $M \subset E$, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от a. Иначе, a — предельная точка M, если в любом шаре $S_r(a)$ найдется $x \in M,\ x \neq a$.

Имеет место следующее полезное предложение.

Теорема. *Для того, чтобы точка a была предельной точкой множества $M \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы существовала некоторая последовательность $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся к a, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть a — предельная точка множества M; возьмем $r = 1$ и найдем $x_1 \in M \cap S_1(a)$. Затем возьмем $r = 1/2$ и найдем $x_2 \in M \cap S_{1/2}(a)$. Продолжая это рассуждение, найдем последовательность $\{x_n\} \subset M$ такую, что $\|x_n - a\| < 1/n$, т. е. сходящуюся к a.

Достаточность. Пусть существует $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся к a. Это означает, что для любого $r > 0$ существует номер $N = N(r)$ такой, что $x_n \in S_r(a)$ для всех $n > N$.

Определение 3. Множество $M \subset E$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Пустое множество $\emptyset$ всегда считается замкнутым.

Упражнение 3. Покажите, что

1) объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

2) пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

3) все пространство E — замкнутое множество.

Пример 1. Сфера $\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$ является замкнутым множеством. Действительно, пусть a — предельная точка $\sigma_r(x_0)$. Значит, найдутся $x_n \in \sigma_r(x_0)$ (т. е. $\|x_n - x_0\| = r,\ n = 1, 2, \ldots$) такие, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$. По неравенству треугольника $\|a - x_0\| \leqslant \|a - - x_n\| + \|x_n - x_0\| = \|a - x_n\| + r,\ r = \|x_n - x_0\| \leqslant \|x_n - a\| + \|a - x_0\|$. В пределе при $n \to \infty$ получаем $\|a - x_0\| \leqslant r,\ r \leqslant \|a - x_0\|$. Следовательно, $a \in \sigma_r(x_0)$, т. е. $\sigma_r(x_0)$ замкнуто.

Определение 4. Пусть $M \subset E$, а M' — множество предельных точек M. Множество $\bar{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M.

Пример 2. $\bar{S}_r(x_0)$ есть замыкание $S_r(x_0)$.

Упражнение 4. Покажите, что

1) $\bar{M}$ — это наименьшее замкнутое множество, содержащее M;

2) $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$;

3) множество M замкнуто тогда и только тогда, когда $\bar{M} = M$.

Определение 5. Пусть $M \subset E$; множество $E \backslash M = \{x \in E\colon x \notin M\}$ называется *дополнением* к M.

Упражнение 5. Докажите, что множество $M \subset E$ является открытым тогда и только тогда, когда его дополнение $E \backslash M$ замкнуто.

Если $M \subset E$, то все точки из E можно отнести по отношению к M к одному из трех типов: внутренние точки M, граничные точки M и внешние точки M. Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней* точкой M, если существует ее окрестность $S_r(x_0) \subset M$. Точка $x_0 \notin M$ называется *внешней* точкой M, если существует шар $S_r(x_0)$ (ее окрестность), не содержащий точек из M (т. е. $M \cap S_r(x_0) = \emptyset$). Точка $x_0 \in E$ называется *граничной* точкой M, если в любом шаре $S_r(x_0)$ есть точки, принадлежащие M, и точки, не принадлежащие M.

Таким образом, открытым будет множество, состоящее только из внутренних точек.

Далее, *границей* множества M называется множество ∂M его граничных точек. Граничная точка M может принадлежать M, а может и не принадлежать. Потому возможно, что $\partial M \subset M$, что $\partial M \cap M = \emptyset$ или что $\partial M \cap M \neq \partial M$.

3.2. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.

Определение. Пусть E — линейное пространство и в E двумя способами введены нормы: $||x||^{(1)}$ и $||x||^{(2)}$. Нормы $||x||^{(1)}$ и $||x||^{(2)}$ называются *эквивалентными*, если существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для любых $x \in E$
$$\alpha||x||^{(1)} \leqslant ||x||^{(2)} \leqslant \beta||x||^{(1)}.$$

Упражнение 1. Покажите, что отношение эквивалентности норм обладает следующими свойствами:

1) $||x|| \sim ||x||$ (рефлексивность);

2) если $||x||^{(1)} \sim ||x||^{(2)}$, то $||x||^{(2)} \sim ||x||^{(1)}$ (симметричность);

3) если $||x||^{(1)} \sim ||x||^{(2)}$, а $||x||^{(2)} \sim ||x||^{(3)}$, то $||x||^{(1)} \sim ||x||^{(3)}$ (транзитивность).

Здесь значок $\sim$ означает эквивалентность норм. Заметим, что в упражнении 2 п. 2.4 устанавливается эквивалентность в $\mathbf{R}^m$ норм
$$||x||_{\text{к}} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |\xi_i| \quad \text{и} \quad ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^p\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Очевидно, две нормы в линейном пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда каждая из них подчинена другой (см. п. 2.9).

Упражнение 2. Пусть в линейном пространстве E заданы две эквивалентные нормы, и пусть E_1 и E_2 — соответствующие нормированные пространства. Докажите, что всякая последовательность, сходящаяся в одном из этих пространств, сходится также и в другом, причем к тому же пределу. Воспользуйтесь схемой п. 2.4.

Теорема. *Во всяком конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Фиксируем в m-мерном линейном пространстве E базис $\{e_k\}_1^m$, и пусть $x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$ — разложение произвольного элемента $x \in E$ по этому базису . Введем в E норму: $||x||_c = \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^2\right)^{1/2}$.

С этой нормой E можно отождествить с евклидовым пространством E^m.

Пусть $\|x\|$ — еще одна произвольная норма в E. Прежде всего, имеем оценку

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\xi_k| \, \|e_k\| \leqslant \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} \|e_k\|^2 \right)^{1/2} \leqslant \beta \|x\|_c.$$

Следовательно, $\|x\|$ подчинена $\|x\|_c$. Покажем, что $\|x\|_c$ также подчинена $\|x\|$. Для этого рассмотрим функцию $\|x\|$ на сфере $\|x\|_c = 1$.

Из неравенства (1) п. 2.1 и полученной оценки $\|x\| \leqslant \beta\|x\|_c$ имеем

$$\big| \|x'\| - \|x''\| \big| \leqslant \|x' - x''\| \leqslant \beta \|x' - x''\|_c.$$

Отсюда вытекает непрерывность функции $\|x\|$ в E^m.

Далее, сфера $\|x\|_c = 1$ является в E^m замкнутым (пример п. 3.1) и ограниченным множеством. Воспользуемся теперь следующей теоремой: функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве в E^m, ограничена на нем и достигает на нем своих точной верхней и нижней граней (см. [18]). Согласно этой теореме найдется x_0 такое, что $\lambda = \|x_0\| = \inf \|x\|$. Очевидно, что $\lambda > 0$, ибо $x_0 \neq 0$. Отсюда

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_c} \right\| \leqslant \lambda, \quad \text{откуда} \quad \|x\| \leqslant \lambda \|x\|_c.$$

Итак, $\|x\|$ эквивалентна $\|x\|_c$. Все нормы в E эквивалентны норме сферической, а значит, согласно упражнению 1 все они эквивалентны. Теорема доказана.

3.3. Подпространства нормированного пространства. Расстояние от точки до подпространства.

Определение. Замкнутое линейное многообразие L в нормированном пространстве E называется *подпространством* в E.

Упражнение. Показать, что множество многочленов степени, не превосходящей n, есть подпространство в $C[a,\, b]$. Показать, что множество всех многочленов не является подпространством в $C[a,\, b]$, ибо оно не замкнуто (рассмотреть последовательность многочленов $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k/k!$ в $C[0,1]$).

Определим расстояние $\rho(x,\, L)$ от точки x до подпространства L следующим равенством

$$\rho(x,\, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|. \tag{1}$$

Напомним читателю, что если некоторое множество $\mathfrak{M}$ вещественных чисел ограничено снизу, то существует число α_0 такое, что

1) $\alpha_0 \leqslant x$ для любых $x \in \mathfrak{M}$ (т. е. α_0 — нижняя грань $\mathfrak{M}$);

2) для любого $\alpha' > \alpha_0$ существует $x' \in \mathfrak{M}$ такое, что $x' < \alpha'$ (т. е. α_0 — наибольшая из нижних граней $\mathfrak{M}$).

При этом α_0 называется *точной нижней гранью* множества $\mathfrak{M}$ и обозначается $\alpha_0 = \inf \mathfrak{M}$ или $\alpha_0 = \inf\limits_{x \in \mathfrak{M}} x$.

Из сказанного следует, что $\rho(x,\, L)$ существует, так как множество $\mathfrak{M} = \{\|x-u\|,\ u \in L\}$ ограничено снизу (числом 0).

Выражение $\rho(x,\, L)$, таким образом, означает, что

1) $\|x-u\| \geqslant \rho(x,\, L)$ для любых $u \in L$;

2) если $r > \rho(x,\, L)$, то существует $u_r \in L$ такой, что $\|x-u_r\| < r$.

Лемма. *Если* $x \in L$, *то* $\rho(x,\, L) = 0$; *если же* $x \notin L$, *то* $\rho(x,\, L) > 0$.

Доказательство. Если $x \in L$, то, приняв $u = x$, видим, что $\|x-u\| = 0$, т. е. $\inf\limits_{u \in L} \|x-u\| = 0$. Пусть $x \notin L$. Допустим тем не менее, что $\rho(x,\, L) = 0$. Тогда по определению inf для любого натурального n найдется $u_n \in L$ такой, что $\|u_n - x\| < 1/n$. Отсюда $u_n \to x,\ n \to \infty$. Вследствие замкнутости L также $x \in L$, но по условию $x \notin L$. Полученное противоречие доказывает, что $\rho(x,\, L) > 0$.

3.4. Приближение элементами подпространства. Число $\rho(x,\, L)$ характеризует наилучшее приближение (наилучшую аппроксимацию) элемента x при помощи элементов подпространства L. Если существует элемент $u^* \in L$ такой, что $\rho(x,\, L) = \|x-u^*\|$, то u^* называется наилучшим элементом приближения x элементами подпространства L. Наилучший элемент может оказаться не единственным, а может и не существовать вовсе. Оказывается, в одном из наиболее важных практических случаев, когда L конечномерно, наилучший элемент всегда существует.

Действительно, пусть $x \notin L$, тогда $\rho(x,\, L) = d > 0$ по лемме п. 3.3. Пусть, далее, $\{e_k\}_1^m$ — базис на L, а $u = \sum_1^m \xi_k e_k$ — разложение $u \in L$ по базису. Введем на L вторую норму: $|x|_c = \left(\sum\limits_1^m |\xi_k|^2\right)^{1/2}$. Вследствие конечномерности L обе нормы эквивалентны, т. е. найдутся постоянные $\alpha > 0,\ \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\|u\|_c \leqslant \|u\| \leqslant \beta\|u\|_c. \tag{1}$$

L как линейное пространство , снабженное $\|u\|_c$, обозначим через L^m (L^m — евклидово пространство).

Рассмотрим в L^m функцию $\|x-u\|$. Она непрерывна на L^m, ибо для любых $u',\ u'' \in L^m$ (см. (1))

$$|\,\|x-u'\| - \|x-u''\|\,| < \|u'-u''\| \leqslant \beta\|u'-u''\|_c.$$

Покажем, что $\inf\limits_{u \in L} \|x-u\|$ может достигаться только в шаре

$$\|u\|_c \leqslant r, \quad \text{где} \quad r = \alpha^{-1}(d + 1 + \|x\|).$$

Действительно, если $\|u\|_c > r$, то (см. (1))

$$\|x - u\| \geqslant \|u\| - \|x\| \geqslant \alpha\|u\|_c - \|x\| > \alpha r - \|x\| = d + 1$$

и, значит, вне шара $\|u\|_c \leqslant r$ точная нижняя грань функций $\|x - u\|$ достигаться не может. Поскольку шар $\|u\|_c \leqslant r$ является в L^m замкнутым ограниченным множеством, а функция $\|x - u\|$ непрерывна, то найдется $u^* \in L$ — наилучший элемент приближения x элементами из L, на котором достигается наименьшее значение $\|x - u\|$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть L — конечномерное подпространство нормированного пространства E. Для любого $x \in E$ существует (возможно, не единственный) такой элемент $u^* \in L$, что*

$$\rho(x,\, L) = \|x - u^*\|.$$

Приведем пример, показывающий, что наилучший элемент может оказаться не единственным даже в конечномерном нормированном пространстве.

Пример. В пространстве $l_1^{(2)}$ двумерных строк $x = (\xi_1,\, \xi_2)$ с нормой $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ возьмем точку $x_0 = (1,\, -1)$ и одномерное подпространство L с базисным вектором $e = (1,\, 1)$, т. е. $L = \{\alpha e;\ \alpha \in \mathbf{R}^1\}$. Вычислим расстояние:

$$\rho(x_0,\, L) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^1} \|x_0 - \alpha e\| = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^1} (|1 - \alpha| + |1 + \alpha|) = 2.$$

Оно достигается при любых $\alpha \in [-1,\, +1]$. Следовательно, имеется бесконечное множество наилучших элементов $u^* = \alpha e$, $\alpha \in [-1,\, +1]$, приближающих x_0 с помощью элементов L.

Упражнение 1. Покажите, что в пространстве c^2 (см. пример 2 п. 2.1) множество наилучших элементов приближения элемента $x_0 = (1,\, 0)$ элементами подпространства $L = \{(0,\, \alpha);\ \alpha \in \mathbf{R}^1\}$ имеет вид $u^* = (0,\, \alpha)$, где $\alpha \in [-1,\, +1]$.

Возникает вопрос: когда можно гарантировать единственность наилучшего элемента? Мы еще не раз вернемся к вопросам теории приближения. Пока же отметим следующий результат.

Определение. Нормированное пространство E будем называть *строго нормированным*, если в нем равенство $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ возможно только при $y = \lambda x$, где $\lambda > 0$.

Теорема 2. *В строго нормированном пространстве E для каждого $x \in E$ и каждого подпространства L может существовать не более одного наилучшего элемента приближения x элементами L.*

Доказательство. Допустим, что в некотором строго нормированном пространстве E найдутся элемент x, подпространство L и элементы $u_1^*,\ u_2^* \in L$ такие, что

$$\|x - u_1^*\| = \|x - u_2^*\| = d = \inf_{u \in L} \|x - u\|.$$

Пусть $d > 0$ (если $d = 0$, то $u_1^* = u_2^*$ по 1-й аксиоме нормы). Имеем

$$\left\| x - \frac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = \left\| \frac{x - u_1^*}{2} + \frac{x - u_2^*}{2} \right\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - u_1^*\| + \frac{1}{2}\|x - u_2^*\| = d.$$

Следовательно, $\left\| x - \dfrac{u_1^* + u_2^*}{2} \right\| = d$. Но тогда

$$\|(x - u_1^*) + (x - u_2^*)\| = \|x - u_1^*\| + \|x - u_2^*\| > 0.$$

По строгой нормированности E существует $\lambda > 0$ такое, что $x - u_2^* = \lambda(x - u_1^*)$. Если $\lambda \neq 1$, то отсюда $x = (1 - \lambda)^{-1}(u_2^* - \lambda u_1^*) \in L$, что невозможно, ибо $d > 0$ (см. лемму п. 3.3). Следовательно, $\lambda = 1$, но тогда $u_2^* = u_1^*$ и теорема доказана.

Упражнение 2. Докажите, что $C[a, b]$ не является строго нормированным. Рассмотрите функции $x(t) = (t - a)(b - t)$,

$$y(t) = \frac{(b-a)^2}{4} \sin\left(\pi \frac{t-a}{b-a}\right).$$

3.5. Лемма Рисса. Начнем со следующего геометрического рассуждения. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве дана плоскость L, проходящая через начало координат O, и пусть дан вектор z единичной длины, перпендикулярный L, с началом в O. Тогда для любого вектора u, лежащего в L, имеем $|u - z| > |z| = 1$, ибо длина перпендикуляра z меньше длины любой наклонной $u - z$ (рис. 2). Такая же ситуация будет иметь место в так называемых гильбертовых пространствах, где определено понятие перпендикулярности (ортогональности). В произвольном нормированном пространстве понятия ортогональности нет, но здесь справедливо все же несколько более слабое утверждение о существовании «почти перпендикуляра», составляющее следующую важную в приложениях лемму.

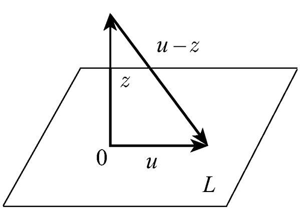


Рис. 2

Лемма Рисса. *Пусть L — подпространство в нормированном пространстве E, причем $L \neq E$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует элемент $z_\varepsilon \notin L$, $\|z_\varepsilon\| = 1$ такой, что $\rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $x \notin L$. Такое x существует, так как $L \neq E$. Положим $\inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = d$. При этом, согласно лемме п. 3.3, $d > 0$. Воспользуемся определением $\inf$. Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$ и найдем $u_\varepsilon \in L$ такой, что

$$d \leqslant \|u_\varepsilon - x\| < d/(1 - \varepsilon).$$

Теперь рассмотрим элемент

$$z_\varepsilon = (u_\varepsilon - x)/\|u_\varepsilon - x\|, \quad \|z_\varepsilon\| = 1.$$

Заметим, что z_ε — искомый элемент. Действительно, $z_\varepsilon \notin L$ (иначе $u_\varepsilon - x \in L$, откуда $x \in L$, а это не так).

Далее, расстояние от z_ε до L оценивается так:

$$\|z_\varepsilon - u\| = \left\| \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u \right\| = \frac{\|x - (u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\|)\,\|}{\|u_\varepsilon - x\|} > \frac{d(1-\varepsilon)}{d} = 1 - \varepsilon,$$

ибо $u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\| \in L$, а $\|x - u\| \geqslant d$ для $u \in L$. Лемма доказана.

3.6. Линейные многообразия, плотные в нормированном пространстве. Введем следующее понятие, играющее важную роль в теории приближений.

Определение. Линейное многообразие L, лежащее в нормированном пространстве E ($L \subset E$), называется *плотным в* E, если для любого $x \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u \in L$ такой, что $\|x - u\| < \varepsilon$.

Пусть L плотно в E и $x \in E$. Выбирая $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$, $\ldots$ $\varepsilon = 1/n$, $\ldots$, найдем $u_1 \in L$, $u_2 \in L$, $\ldots$, $u_n \in L$, $\ldots$ такие, что $\|x - u_n\| < 1/n$ ($n = 1, 2 \ldots$). Таким образом, если L плотно в E, то для любого $x \in E$ существует $\{u_n\} \subset L$ такая, что $u_n \to x$, $n \to \infty$.

Вспоминая определение операции замыкания (см. п. 3.1), мы видим, что утверждение «L плотно в E», $L \subset E$, $L \neq E$, означает: $\overline{L} = E$ — замыкание линейного многообразия L совпадает с E.

Известные теоремы Вейерштрасса (см.[21]) доставляют содержательные примеры линейных многообразий, плотных в нормированных пространствах. Согласно первой теореме линейное многообразие всех тригонометрических многочленов $A_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \cos kx$ плотно в нормированном пространстве непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих граничному условию $x(-\pi) = x(\pi)$, с нормой $\|x\| = \max\limits_{[-\pi,\, \pi]} |x(t)|$.

Согласно второй теореме Вейерштрасса линейное многообразие всех полиномов $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ плотно в $C[a, b]$.

3.7. Средние и срезывающие функции и их некоторые приложения. На $(-\infty, +\infty)$ рассмотрим функцию

$$\omega(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\, e^{-1/(1-t^2)} & \text{при } |t| < 1, \\ 0 & \text{при } |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

где $c = \int\limits_{-1}^{1} e^{-1/(1-s^2)}\, ds$.

Упражнение 1. Докажите, что $\omega(t)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty, +\infty)$.

Кроме того, очевидно, что $\omega(t)$ четная, неотрицательная и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(t)\, dt = 1$.

Введем теперь функцию $\omega_h(t) = \omega(t/h)/h$, которую далее будем называть ядром усреднения (радиуса $h > 0$); $\omega_h(t)$ также четная, неотрицательная, бесконечно дифференцируемая на $(-\infty,\ +\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(t)\,dt = 1$. Кроме того, $\omega_h(t) \equiv 0$, если $|t| \geqslant h_u$ (проверьте!)

Определим для каждой непрерывной на $[a,\ b]$ функции $x(t)$ *среднюю функцию* $x_h(t)$ следующим образом (рис. 3):

$$x_h(t) = \int\limits_a^b \omega_h(t-s)\,x(s)ds, \quad t \in (-\infty,\ +\infty).$$

Упражнение 2. Пользуясь свойствами ядра усреднения $\omega_h(t)$ и тео-

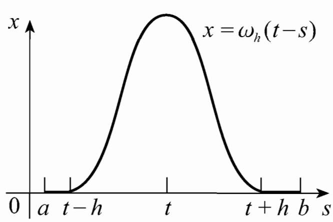


Рис. 3

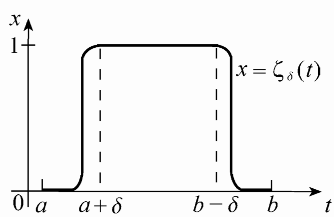


Рис. 4

ремой о дифференцировании интеграла по параметру (см. [21]], докажите, что средние функции $x_h(t)$ обладают следующими свойствами:

1) $x_h(t) \equiv 0$ вне $[a-h,\ b+h]$;

2) $x_h(t)$ бесконечно дифференцируемы на $(-\infty,\ +\infty)$.

Введем теперь *срезывающую функцию* $\zeta_\delta(t)$ (рис. 4):

$$\zeta_\delta(t) = \int\limits_{a+3\delta/4}^{b-3\delta/4} \omega_{\frac{1}{4}\delta}(t-s)\,ds.$$

Упражнение 3. Срезывающая функция $\zeta_\delta(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $\zeta_\delta(t) \equiv 0$ вне $[a,\ b]_{\delta/2}$;

2) $\zeta_\delta(t) \equiv 1$ на $[a,\ b]_\delta$;

3) $0 \leqslant \zeta_\delta \leqslant 1$;

4) $\zeta_\delta(t)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty,\ +\infty)$.

(Мы воспользовались обозначением $[a+\delta,\ b-\delta] = [a,\ b]_\delta$.)

Определение. Функция $x(t)$, определенная на $[a,\ b]$, называется *финитной*, если найдется $[a',\ b']$ $(a < a', b' < b)$, вне которого $x(t) \equiv 0$. (Функция финитна на $(-\infty,\ +\infty)$, если она равна нулю вне некоторого отрезка.)

Срезывающая функция $\zeta_\delta(t)$, где $\delta < (b-a)/2$, дает возможность срезать любую функцию $x(t)$, заданную на $[a,\, b]$: функция $x(t)\,\zeta_\delta(t)$ является финитной.

Аппарат средних и срезывающих функций находит многие применения в функциональном анализе и в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см.[32] и [23]). Приведем здесь два предложения о плотных линейных многообразиях.

Теорема 1. *Линейное многообразие непрерывных и финитных на* $[a,\, b]$ *функций плотно в* $\widetilde{\mathcal{L}}_p[a,\, b]$.

Доказательство. Пусть $\delta < (b-a)/2$. Имеем для любой непрерывной на $[a,\, b]$ функции $x(t)$

$$|x(t) - \zeta_\delta(t)\,x(t)| = (1-\zeta_\delta(t))\;|x(t)|.$$

Но $1-\zeta_\delta(t) \equiv 0$ на $[a+\delta,\, b-\delta]$ и $1-\zeta_\delta(t) \leqslant 1$ вне этого отрезка, поэтому

$$\int\limits_a^b |x(t) - \zeta_\delta(t)\,x(t)|^p\,dt \leqslant \int\limits_a^{a+\delta} |x(t)|^p\,dt + \int\limits_{b-\delta}^{b} |x(t)|^p\,dt \leqslant 2\delta M^p,$$

где $M = \|x\|_{C[a,\,b]}$. Следовательно, $\|x - x\cdot\zeta_\delta\|_{\widetilde{\mathcal{L}}_p[a,\,b]} \leqslant M\sqrt[p]{2\delta}$.

Если теперь возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, то при $\delta < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^p$ финитная функция $x\zeta_\delta$ будет отличаться от x по норме меньше чем на ε. Теорема доказана.

Теорема 2. *В нормированном пространстве финитных и непрерывных на* $[a,\, b]$ *функций с нормой* $\|x\|_{C[a,\,b]}$ *плотно линейное многообразие финитных, бесконечно дифференцируемых на* $[a,\, b]$ *функций.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ непрерывна на $[a,\, b]$ и финитна, т.е. $x(t) \equiv 0$ вне некоторого $[a',\, b']$, где $a < a' < b' < b$. Пусть $h > 0$ и $h < \min\,(a'-a,\; b-b')$. Рассмотрим среднюю функцию $x_h(t)$ для $x(t)$. Согласно упражнению 2 функция $x_h(t)$ бесконечно дифференцируема и вне $[a,\, b]$ $x_h(t) \equiv 0$.

Далее, поскольку $\omega_h(|t-s|) \equiv 0$ при $|t-s| \geqslant h$, а $\int\limits_a^b \omega_h(|t-s|)\,ds = 1$, то имеем следующую оценку

$$|x(t) - x_h(t)| = \left| \int\limits_{|t-s|\leqslant h} \omega_h(|t-s|)\,x(s)\,ds - \int\limits_{|t-s|\leqslant h} \omega_h(|t-s|)\,ds\cdot x(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|t-s|\leqslant h} |x(s)-x(t)| \times \int\limits_{|t-s|\leqslant h} \omega_h(|t-s|)\,ds = \max_{|t-s|\leqslant h} |x(s)-x(t)|.$$

Вследствие равномерной непрерывности функции $x(t)$ на $[a, b]$ (см. [18]) $\|x(t) - x_h(t)\|_{C[a,b]} \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, теорема 2 доказана.

3.8. Изометричные нормированные пространства.

Определение. Два нормированных пространства E и $\widetilde{E}$ называются *линейно изометричными*, если существует функция $\widetilde{x} = J(x)$, осуществляющая изоморфизм E и $\widetilde{E}$ как линейных пространств и такая, что

$$\|J(x)\| = \|x\|.$$

С точки зрения своих алгебраических и метрических свойств изометричные пространства E и $\widetilde{E}$ ничем не отличаются и поэтому обычно отождествляются. Приведем пример. Пусть E — m-мерное нормированное пространство. Фиксируем в E базис $\{e_k\}_i^m$, и пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ — разложение x по базису. Рассмотрим $\widetilde{E}$ — нормированное пространство столбцов $\widetilde{x} = (\xi_k)_1^m$ с нормой $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{E}} = \left\|\sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k\right\|_E$. Нетрудно показать, что соответствие $J(x) = \widetilde{x}$ есть изометрия E на $\widetilde{E}$.

§ 4. Пространства со скалярным произведением

При изучении аналитической геометрии и линейной алгебры вводятся важные понятия скалярного произведения векторов и, соответственно, элементов линейного пространства. Эти понятия позволяют развить многие практически важные вопросы евклидовой трехмерной и n-мерной геометрии. Центральное место занимает здесь понятие ортогональности, отсутствующее, между прочим, в нормированном пространстве. Это понятие позволяет ввести в рассмотрение ортогональные системы элементов — прямое обобщение понятия ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.

4.1. Евклидовы пространства. Определение. Вещественное линейное пространство E называется *евклидовым*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое (x, y) и называемое *скалярным произведением*, так что выполнены следующие аксиомы:

1) $(x, x) \geqslant 0$, при этом $(x, x) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Понятие скалярного произведения естественным образом обобщает понятие скалярного произведения векторов. Всякое евклидово пространство можно превратить в нормированное пространство, определив в нем норму по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1}$$

Упражнение. Проверить аксиомы 1) и 2) нормы, определяемой по формуле 1.

Для проверки аксиомы треугольника — 3-й аксиомы нормы — мы воспользуемся следующим неравенством

$$|(x,\, y) \leqslant ||x||\,||y||, \tag{2}$$

известным как *неравенство Коши–Буняковского*, которое получается из следующих элементарных соображений: согласно первому свойству скалярного произведения для любого вещественного λ имеем

$$(x - \lambda y,\, x - \lambda y) \geqslant 0.$$

Раскрывая левую часть последнего неравенства, по свойствам скалярного произведения 2), 3) и 4) получим

$$(x,\, x) - 2\lambda(x,\, y) + \lambda^2(y,\, y) \geqslant 0.$$

Квадратный трехчлен неотрицателен при любых λ. Отсюда следует, что его дискриминант неположителен:

$$(x,\, y)^2 - (x,\, x)(y,\, y) \leqslant 0.$$

Это неравенство равносильно (2).

Докажем теперь аксиому треугольника. Имеем

$$||x + y||^2 = (x + y,\, x + y) = (x,\, x) + 2(x,\, y) + (y,\, y) \leqslant$$
$$\leqslant ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

Извлекая корень, получим неравенство треугольника.

4.2. Унитарные пространства.

Определение. Комплексное линейное пространство U называется *унитарным*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие комлексное число $(x,\, y)$ — скалярное произведение x на y — и если при этом выполняются следующие аксиомы:

1) $(x,\, x) \geqslant 0$, $(x,\, x) = 0$ при $x = 0$ и только в этом случае;

2) $(x,\, y) = \overline{(y,\, x)}$ (черта означает комплексное сопряжение);

3) $(\lambda x,\, y) = \lambda(x,\, y)$;

4) $(x + y,\, z) = (x,\, z) + (y,\, z)$.

Приведем два элементарных следствия, опирающиеся на аксиомы 1)–4) и свойства комплексных чисел.

Следствие 1. *В унитарном пространстве*

$$(x,\, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,\, y).$$

Действительно,

$$(x,\, \lambda y) = \overline{(\lambda y,\, x)} = \overline{\lambda(y,\, x)} = \bar{\lambda}\overline{(y,\, x)} = \bar{\lambda}(x,\, y).$$

С л е д с т в и е 2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Действительно,

$$(x, y+z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x) + (z, x)} = \overline{(y, x)}+\overline{(z, x)} = (x, y)+(x, z).$$

В унитарном пространстве можно ввести норму, как и в евклидовом: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Аксиомы 1) и 2) нормы, очевидно, выполнены. Аксиома 3) вытекает из неравенства Коши–Буняковского:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

Для доказательства этого неравенства снова рассмотрим неравенство с произвольным комплексным параметром λ:

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0.$$

Раскрывая его левую часть, получим неравенство

$$(x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y) \geqslant 0.$$

Пусть $y \neq 0$ (при $y = 0$ неравенство Коши–Буняковского выполняется). Положим $\lambda = -(x, y)/(y, y)$; тогда $\bar{\lambda} = -(y, x)/(y, y)$, и мы получим

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$

т. е. доказываемое неравенство.

4.3. Ортогональность элементов. Ортогональные и ортонормированные системы. Пусть E — пространство со скалярным произведением. Если $(x, y) = 0$, то элементы x и y будем называть ортогональными и писать $x \perp y$. Очевидно, нуль пространства E ортогонален любому элементу. Рассмотрим в E элементы $x_1, \ldots, x_m$, все не равные 0. Если $(x_k, x_l) = 0$ при любых $k, l = 1, \ldots, m$ $(k \neq l)$, то система элементов $x_1, \ldots, x_m$ называется ортогональной системой.

Т е о р е м а. *Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — ортогональная система; тогда $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = 0.$$

Умножив это равенство на x_k скалярно, получим $\lambda_k(x_k, x_k) = 0$, но $(x_k, x_k) = \|x_k\|^2 > 0$. Значит, $\lambda_k = 0$. Это верно для любого $k = 1, \ldots, m$ Значит, все $\lambda_k = 0$, т. е. элементы $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы.

Если дана система элементов $x_1, \ldots, x_m$ такая, что

$$(x_k, x_l) = \delta_{kl}, \ k, l = 1, \ldots, m, \quad \delta_{kl} = 1 \text{ при } k = l, \ \delta_{kl} = 0 \text{ при } k \neq l$$

(здесь δ_{kl} — символ Кронекера), то система элементов $x_1, \ldots, x_m$ называется ортонормированной.

4.4. Примеры пространств со скалярным произведением.

Пример 1. *Евклидово пространство* E^m. Введем в вещественном линейном пространстве E^m скалярное произведение по формуле

$$(x,\, y) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k.$$

Упражнение 1. Проверьте аксиомы скалярного произведения.

Соответствующая норма имеет вид

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \xi_k^2}.$$

Неравенство Коши–Буняковского выглядит так:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \xi_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \eta_k^2},$$

и представляет собой в этом виде частный случай неравенства Минковского.

Ортогональность элементов $x = (\xi_k)_{k=1}^{m}$ и $y = (\eta_k)_{k=1}^{m}$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k \eta_k = 0.$$

Пример 2. Пространство l_2.

В линейном пространстве вещественных последовательностей $x = (\xi_k)_1^\infty$, $y = (\eta_k)_1^\infty$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < +\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k^2 < +\infty$, введем скалярное произведение по формуле

$$(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k.$$

Упражнение 2. Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k$ сходится и что выполнены аксиомы скалярного произведения.

Упражнение 3. Напишите в l_2 неравенство Коши–Буняковского. Как выглядит в l_2 условие ортогональности элементов x и y?

Пример 3. Пространство $\widetilde{\mathcal{L}}_2[a,\, b]$.

В линейном пространстве комплекснозначных, непрерывных на $[a,\, b]$ функций скалярное произведение зададим так:

$$(x,\, y) = \int\limits_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

Упражнение 4. Проверьте аксиомы нормы, запишите неравенство Коши–Буняковского, выпишите условие ортогональности элементов.

4.5. Пространство кусочно непрерывных функций $Q[a, b]$. Рассмотрим линейное пространство комплекснозначных функций, непрерывных на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (для каждой функции могут быть свои точки разрыва). Введем скалярное произведение обычным способом:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

Упражнение. Проверить аксиомы 2)–4) скалярного произведения.

Трудности возникают с аксиомой 1). Если функция $x(t) = 0$, за исключением конечного числа точек, то $(x, x) = 0$, хотя $x(t) \not\equiv 0$. Для того чтобы выйти из этого противоречия и удовлетворить аксиоме 1), условимся считать две функции равными, если они отличаются друг от друга не более чем в конечном числе точек. Полученное пространство со скалярным произведением обозначается $Q[a, b]$. Его элементами являются не отдельные функции, а классы функций. Две функции попадают в один класс, если они равны на $[a, b]$, за исключением конечного числа точек.

4.6. Процесс ортогонализации Шмидта. Будем рассматривать системы, состоящие из бесконечного числа элементов пространства E (со скалярным произведением), $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ или, короче, $\{x_k\}$. Систему $\{x_k\}$ будем называть линейно независимой, если при любом $n = 1, 2, \ldots$ система $x_1, \ldots, x_n$ линейно независима.

Систему $\{e_k\}$ будем называть ортогональной, если все $e_k \neq 0$ и $(e_k, e_l) = 0$, если $k \neq l$. Систему $\{f_k\}$ будем называть ортонормированной, если $(f_k, f_l) = \delta_{kl}$ $(k, l = 1, 2 \ldots)$.

Оказывается, по любой линейно независимой системе $\{x_k\}$ можно построить ортогональную систему $\{e_k\}$, а также ортонормированную систему $\{f_k\}$ с помощью следующего *процесса ортогонализации Шмидта*.

Положим $e_1 = x_1$ и заметим, что $e_1 \neq 0$, так как система из одного элемента x_1 линейно независима, как часть $\{x_k\}$. Далее, e_2 ищем в виде $e_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1$, где скаляр λ_{21} подберем так, чтобы было $e_2 \perp e_1$. Отсюда $0 = (x_2 - \lambda_{21} e_1, e_1)$, т. е. $\lambda_{21} = (x_2, e_1)/(e_1, e_1)$. Итак, e_2 найдено, причем $e_2 \neq 0$ (проверьте!).

Далее рассуждаем согласно методу полной математической индукции. Пусть $e_1, \ldots, e_{k-1}$ уже построены; e_k ищем в виде

$$e_k = x_k - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl} e_l.$$

Скаляры λ_{kl} найдем из требования $e_k \perp e_l$ $(l = 1, \ldots, k-1)$. Отсюда $\lambda_{kl} = (x_k, e_l)/(e_l, e_l)$. При этом $e_k \neq 0$. Итак, ортогональная система $\{e_k\}$ построена. Полагая $f_k = e_k/\|e_k\|$, получаем ортонормированную систему $\{f_k\}$.

Упражнение 1. Покажите, что тригонометрическая система $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots$ ортогональна в $Q[-\pi, \pi]$. Какой будет соответствующая ортонормированная система?

Рассмотрим теперь процесс ортогонализации в одном конкретном случае. В пространстве $\widetilde{\mathcal{L}}_2[-1,\,1]$ рассмотрим систему элементов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $x_k(t) = t^k$, т. е. систему $1,\, t,\, t^2,\, \ldots,\, t^n,\, \ldots$ В результате процесса ее ортогонализации приходим к ортогональной системе $\{f_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$.

Упражнение 2. Покажите, что

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad f_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}\,t.$$

Многочлены $f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ были введены в математическую практику Лежандром. Обычно используется ортогональная система из функций

$$p_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}[(t^2-1)^k],\ k = 1,\, 2,\, \ldots,$$

которые называются *многочленами Лежандра*. Многочлен $p_k(t)$ отличается от многочлена $f_k(t)$ лишь числовым множителем. Многочлены Лежандра возникают в ряде задач математической физики. Подробнее о многочленах Лежандра смотрите в [18] и [35].

Заметим в заключение, что процесс ортогонализации при его реализации на ЭВМ обычно оказывается численно неустойчивым. В частности, так обстоит дело с ортогонализацией систему $\{t^k\}$ по общему алгоритму. Это обстоятельство существенно ограничивает возможности практического применения метода ортогонализации (см. [1]).

4.7. Два свойства скалярного произведения. 1. Непрерывность скалярного произведения. *Пусть $x_n \to x$, а $y_n \to y$ при $n \to \infty$; тогда $(x_n,\, y_n) \to (x,\, y)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. $(x_n,\, y_n) - (x,\, y) = (x_n - x,\, y_n) + (x,\, y_n - y)$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$|(x_n,\, y_n) - (x,\, y)| \leqslant |(x_n - x,\, y_n) + (x,\, y_n - y)| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

так как $\{\|y_n\|\}$ ограничена (почему?).

2. Равенство параллелограмма. *Во всяком пространстве со скалярным произведением справедливо следующее равенство, которое можно трактовать как известное в геометрии (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон):*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Действительно,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y,\, x+y) + (x-y,\, x-y) =$$
$$= (x,\, x) + (x,\, y) + (y,\, x) + (y,\, y) + (x,\, x) - (x,\, y) - (y,\, x) + (y,\, y) =$$
$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Заметим, что в нормированных пространствах равенство параллелограмма, вообще говоря, не имеет места.

§ 5. Банаховы пространства

Представление о числовой оси как о множестве полном (на ней нет «дыр», она вся заполнена вещественными числами) выражается в математическом анализе удобнее всего с помощью известного критерия Коши, дающего необходимое и достаточное условие существования предела последовательности. Эти же идея и методика лежат в основе понятия полноты нормированного пространства. В результате глубже удается изучить вопросы анализа в нормированных пространствах. Например, лишь в полном пространстве могут быть, по существу, решены вопросы о сходимости рядов (см. п. 5.6).

5.1. Фундаментальные последовательности. Начнем со следующего важного определения. Пусть X — нормированное пространство.

О п р е д е л е н и е. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых номеров $n > N$ и любых натуральных p выполняется неравенство $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е. Пусть дана $\{x_n\} \subset X$, и пусть существует число $k > 0$, так что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N = N(\varepsilon)$, обладающий тем свойством, что для всех номеров $n > N$ и всех натуральных p выполняется неравенство $\|x_{n+p} - x_n\| < k\varepsilon$; тогда $\{x_n\}$ фундаментальна.

Для доказательства заметим, что для всех $n > N(\varepsilon/k)$ и для всех p (натуральных) $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$, т. е. $\{x_n\}$ фундаментальна.

У п р а ж н е н и е 1. Всякая фундаментальная последовательность ограничена. Докажите.

У п р а ж н е н и е 2. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна, тогда и $\{\lambda x_n\}$ фундаментальна.

У п р а ж н е н и е 3. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны в X, тогда $\{x_n + y_n\}$ фундаментальна.

У п р а ж н е н и е 4. Докажите, что если подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к x, то и сама последовательность сходится к x.

Л е м м а. *Всякая сходящаяся в X последовательность является фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$. По неравенству треугольника

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_0\| + \|x_0 - x_n\| < 2\varepsilon,$$

т. е. $\{x_n\}$ фундаментальна. Лемма доказана.

Верно ли обратное? Всякая ли фундаментальная последовательность сходится? Ниже мы увидим, что не всегда. Тем не менее очень важным является случай, когда это так.

5.2. Определение банахова пространства.

О п р е д е л е н и е. Нормированное пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Приведем некоторые примеры банаховых пространств.

1. Пространство E^1 банахово. Действительно, на вещественной числовой оси имеет место критерий Коши: для того чтобы последовательность $\{x_n\} \subset E^1$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной (см.[21]). Справедливость критерия Коши в E^1 означает, что вся вещественная ось E^1 заполнена точками — вещественными числами, на ней нет «дыр», т. е. что она полна.

Если бы мы ограничились только рациональными числами, это было бы не так. Например, последовательность десятичных приближений к $\sqrt{2}$ с недостатком: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,4;\ x_3 = 1,41,\ \ldots$ — фундаментальная, однако во множестве рациональных чисел она не является сходящейся (предел у нее есть и равен $\sqrt{2}$, но это число иррациональное).

2. Пространство E^m $(m > 1)$ также банахово, так как в E^m тоже справедлив критерий Коши.

3. Пространство $C[a,\,b]$ является банаховым пространством. Пусть $\{x_n(t)\} \subset C[a,\,b]$. Справедлив следующий критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций: для того чтобы $\{x_n(t)\}$ сходилась в $C[a,\,b]$, т. е. равномерно на $[a,\,b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна в $C[a,\,b]$, т. е. чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех номерах $n > N$ и любых натуральных p имело место неравенство $\|x_{n+p} - x_n\|_{C[a,\,b]} < \varepsilon$, или, иначе, $|x_{n+p}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [a,\,b]$ (см. [21]).

Полнота $C[a,\,b]$ отчетливо проступает также в следующей теореме: если последовательность непрерывных на $[a,\,b]$ функций $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно на $[a,\,b]$ к некоторой функции $x(t)$, то $x(t)$ непрерывна на $[a,\,b]$ (см. [21]).

5.3. Пример неполного нормированного пространства. Покажем, что пространство $\widetilde{\mathcal{L}}_2[-1,\,+1]$ не является полным.

Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1,\,+1]$ функций $\{x_n(t)\}$, которая задается следующим образом:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1,\,-1/n], \\ nt & \text{при } t \in [-1/n,\,1/n], \\ +1 & \text{при } t \in [1/n,\,1]. \end{cases}$$

Полезно изобразить $x_n(t)$ графически (рис. 5).

Из графика видно, что $|x_n(t)| \leqslant 1$ для любых n, но тогда $|x_{n+p}(t) - x(t)| \leqslant 2$ и следовательно,

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \int_{-1}^{1} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|^2\,dt =$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|^2\,dt \leqslant 4\int_{-1/n}^{1/n} dt = \frac{8}{n} \to 0 \ \text{при} \ n \to \infty.$$

Итак, $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в смысле сходимости в среднем.

Заметим теперь, что в каждой точке $t \in [-1, +1]$ при $n \to \infty$ последовательность $x_n(t)$ имеет предел:

$$x_n(t) \to x(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \in [-1, 0), \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ +1 & \text{при } t \in (0, +1]. \end{cases}$$

При этом $|x(t)| \leqslant 1$ и $|x_n(t) - x(t)| \leqslant 2$. Но тогда, как и выше,

$$\|x_n(t) - x(t)\|^2 \leqslant 8/n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Итак, при $n \to \infty$ $x_n(t) \to x(t)$ в среднем на $[-1, +1]$, причем $x(t)$ — разрывная на $[-1, +1]$ функция, т.е. $x(t) \notin \widetilde{\mathcal{L}}_2[-1, +1]$, так как это нормированное пространство состоит из функций, непрерывных на $[-1, 1]$. Может ли все же $\{x_n(t)\}$ сходиться в среднем к некоторой непрерывной функции? Ответ здесь отрицательный. Действительно, наши рассуждения с $\{x_n(t)\}$ мы могли проводить в пространстве $Q[-1, +1]$ (см. п. 4.5). Очевидно, этому пространству принадлежат и все $x_n(t)$ и $x(t)$. В силу единственности предела, $\{x_n(t)\}$ сходится в $Q[-1, 1]$ только к классу, содержащему $x(t)$. Изменение $x(t)$ в конечном числе точек не может привести к непрерывной на $[-1, +1]$ функции, и, таким образом, $\{x_n(t)\}$ не может сходиться и в $\widetilde{\mathcal{L}}_2[-1, +1]$, как части $Q[-1, +1]$, к непрерывной функции. Таким образом, $\{x_n(t)\}$ не сходится в $\widetilde{\mathcal{L}}_2[-1, +1]$, и потому это пространство не является полным. Разумеется, небольшое изменение нашего примера позволит доказать, что все пространства $\widetilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, не являются банаховыми.

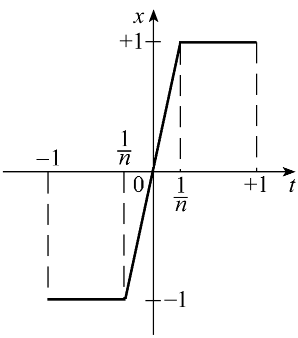


Рис. 5

Упражнение. Покажите, что $\widetilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$, $p \geqslant 1$, не является полным.

5.4. Банахово пространство $C(\bar{G})$ и нормированное пространство $\widetilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$. Пусть G — ограниченная область в E^m, т.е. ограниченное, открытое, связное множество. Напомним, что множество $G \subset E^m$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой $l \subset G$, т.е. если для любых точек $x_0, x_1 \in G$ найдется непрерывная на $[0, 1]$ функция $x(t)$ со значениями в G такая, что $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$ (см. [21]).

Рассмотрим замкнутую область $\bar{G}$ — замыкание области G. Ниже будут введены два пространства функций m переменных, непрерывных на $\bar{G}$.

Пусть $C(\bar{G})$ — линейное пространство всех непрерывных на $\bar{G}$ функций $u(x)$, $x \in \bar{G}$, с числовыми значениями и с нормой

$$\|u\|_{C(\bar G)} = \max_{x\in\bar G} |u(x)|.$$

$C(\bar G)$ является нормированным пространством, естественным обобщением пространства $C[a, b]$. Пространство непрерывных функций $C(\bar G)$ является банаховым пространством вследствие справедливости на нем критерия Коши равномерной сходимости.

Теперь введем нормированное пространство $\mathcal{L}_p(\bar G)$ ($p \geqslant 1$). Предположим дополнительно, что область G кубируема, т. е. определен m-кратный интеграл Римана по $\bar G$. В линейном пространстве функций, непрерывных на $\bar G$, введем норму так:

$$\|u\|_p = \left(\int\limits_{\bar G} |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Упражнение. Проверьте аксиомы нормы. Воспользуйтесь обобщением неравенства Минковского для кратных интегралов.

Полученное нормированное пространство обозначается $\mathcal{L}(\bar G)$. Оно не является полным (см п. 5.3).

5.5. Банаховы пространства $C^k(\bar G)$, $k \geqslant 1$. Мы рассмотрим теперь пространства дифференцируемых функций. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$. Воспользуемся для краткости следующими обозначениями. Набор индексов $\alpha_s \geqslant 0$ ($s = 1, \ldots, m$), $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ называется *мультииндексом*. Число $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ называется *длиной мультииндекса*. Для обозначения частных производных примем

$$D_i = \partial/\partial x_i, \quad D_i^{\alpha_i} = \partial^{\alpha_i}/\partial x_i^{\alpha_i}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots D_m^{\alpha_m}.$$

Пусть G — ограниченная область в E^m, а $\bar G$ — замкнутая область, полученная замыканием G. Будем говорить, что функция $u(x)$, определенная и непрерывная на $\bar G$, k раз непрерывно дифференцируема в $\bar G$, если для всех α таких, что $|\alpha| \leqslant k$:

1) $D^\alpha u$ существует и непрерывна во всех точках G;

2) $D^\alpha u$ имеет предельные значения при стремлении x к границе ∂G области G (по точкам G);

3) доопределим $D^\alpha u$ на ∂G, приняв в качестве значений $D^\alpha u$ на ∂G ее предельные значения; мы получим функцию $D^\alpha u$, непрерывную на $\bar G$.

Рассмотрим теперь $C^k(\bar G)$ — нормированное пространство функций, имеющих на $\bar G$ все непрерывные частные производные до порядка k включительно ($k \geqslant 1$). Норму в $C^k(\bar G)$ вводим по формуле

$$\|u\|_{C^k(\bar G)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar G)},$$

или, подробнее,

$$\|u\|_{C^k(\bar G)} = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in\bar G} |D^\alpha u(x)|.$$

Пример. Пусть $S_R \subset E^2$ — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Пространство $C^1(S_R)$ состоит из непрерывно дифференцируемых в S_R функций $u(x, y)$ с нормой

$$\|u\| = \max_{x,\, y \in S_R} |u(x, y)| + \max_{x,\, y \in S_R} \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right| + \max_{x,\, y \in S_R} \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|.$$

Можно показать, что все пространства $C^k(\bar{G})$ являются полными и, значит, банаховыми.

5.6. Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Пусть X — нормированное пространство и $x_k \in X$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Формальная сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *рядом* в X. Введем элементы $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ — частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ называется *сходящимся*, если в X сходится последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то $s_n \to s$ при $n \to \infty$. Элемент s называется *суммой ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$. Запись $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = s$ означает, что ряд сходится и сумма его равна s.

Упражнение 1. Покажите, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = s$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{x}_k = \widetilde{s}$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k + \widetilde{x}_k) = s + \widetilde{s}$.

Приведем критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 1. *Пусть X — нормированное пространство. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходился, необходимо, а если X банахово, то и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер N такой, что при всех $n > N$ и при всех натуральных p выполнялось неравенство*

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство следует из определения сходимости ряда и связи между понятиями сходящейся и фундаментальной последовательностей в применении к последовательности частичных сумм.

Упражнение 2. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то $x_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение 2. Если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится абсолютно.*

Упражнение 3. Покажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda x_k + \mu y_k)$ сходится абсолютно, если сходятся абсолютно в X ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство. Тогда всякий абсолютно сходящийся в X ряд сходится.*

Доказательство. $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|$. Отсюда следует по теореме 1 сходимость ряда. В дальнейшем теорему 2 будем называть *признаком Вейерштрасса.* Оказывается, верно и обратное утверждение.

Теорема 3. *Если в нормированном пространстве каждый абсолютно сходящийся ряд сходится, то X банахово.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна. Покажем, что она сходится к некоторому $x \in X$. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ так, чтобы $\|x_{n_1}\| < \alpha/2$ и для всех $k \geqslant 2$ $\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \alpha/2^k$. Составим ряд

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1} + \ldots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \ldots$$

Этот ряд сходится абсолютно, ибо мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$. Но тогда существует элемент $x \in X$, к которому сходится последовательность его частичных сумм $\{s_k\}$. Легко проверить, что $s_k = x_{n_k}$, Значит, $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$. Получилось, что подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится к x. Но тогда по упражнению 4 п. 5.1, и сама $\{x_n\}$ сходится к x, Теорема доказана.

5.7. Банаховы пространства со счетным базисом и сепарабельные пространства. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Последовательность $\{e_k\}_1^{\infty} \subset X$ называется *базисом* в X, если любой элемент $x \in X$ может быть однозначно представлен в виде сходящегося ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k. \tag{1}$$

При этом скаляры $\xi_1, \xi_2, \ldots$ называются *координатами* элемента x в базисе $\{e_k\}$. Из однозначности представления (разложения) x по базису вытекает линейная независимость всякого конечного набора векторов базиса. Таким образом, понятие базиса в бесконечномерном пространстве является естественным обобщением этого же понятия в конечномерном случае.

Банаховыми пространствами со счетным базисом являются многие пространства. Например, (см. [21]), таковым является пространство $C[a, b]$. Ограничимся здесь одним примером.

В пространстве l_p $(p \geqslant 1)$ рассмотрим элементы $e_k = (\delta_{kl})_{l=1}^{\infty}$, где δ_{kl} — символ Кронекера ($\delta_{kl} = 1$ при $l = k$, $\delta_{kl} = 0$ при $l \neq k$). Покажем, что $\{e_k\}$ — базис в l_p.

Всякий элемент

$$x = (\xi_l)_{l=1}^{\infty} \in l_p, \qquad \left(\sum_{l=1}^{\infty} |\xi_l|^p = \|x\|^p < +\infty\right)$$

можно представить в виде (1). Это следует из того, что ряд (1) сходится к x, ибо $\left\|x - \sum\limits_{l=1}^{n} \xi_l e_l\right\|^p = \sum\limits_{l=n+1}^{+\infty} |\xi_l|^p \to 0$ при $n \to \infty$, как остаток сходящегося ряда $\|x\|^p$.

Единственность представления вытекает из равенства

$$(\xi_l)_{l=1}^{\infty} = \sum_{l=1}^{\infty} \xi_l e_l = \sum_{l=1}^{\infty} \xi'_l e_l = (\xi'_l)_{l=1}^{\infty}.$$

Переходим к рассмотрению сепарабельных пространств.

Определение. Нормированное пространство X называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное, плотное в X множество.

Приведем примеры сепарабельных пространств.

1. E^1 сепарабельно, так как совокупность рациональных чисел образует счетное (рациональные числа можно занумеровать в последовательность), плотное в E^1 множество (в любой окрестности вещественного числа найдется рациональное число).

2. Любое конечномерное пространство сепарабельно. Достаточно фиксировать в нем базис и рассмотреть множество элементов с рациональными координатами.

3. $C[a, b]$ сепарабельно, так как в нем плотно множество многочленов с рациональными коэффициентами.

Можно показать также, что пространства $C^k(\bar{G})$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$ сепарабельны, а пространство m ограниченных последовательностей несепарабельно (см. [25]).

Предложение 1. *Банахово пространство со счетным базисом сепарабельно.*

Для доказательства достаточно заметить, что множество всевозможных линейных комбинаций $\sum_{l=1}^{n} r_l e_l$, где r_l — рациональное, n — любое натуральное число, а $\{e_l\}$ — базис в X, образует счетное, плотное в X множество.

Предложение 2. *Всякое бесконечное множество M в сепарабельном пространстве сепарабельно.*

Сепарабельность множества M понимается так: в M существует не более чем счетное множество, замыкание которого в пространстве X содержит M.

Упражнение. Докажите предложение 2.

5.8. Принцип вложенных шаров. Множества I и II категорий. В банаховом пространстве справедлив следующий аналог известного принципа вложенных отрезков (см. [21]).

Теорема 1. *Пусть в банаховом пространстве X дана последовательность шаров $\{\overline{S_{r_n}}(x_n)\}$, вложенных друг в друга, т. е. $\overline{S_{r_{n+1}}}(x_{n+1}) \subset \subset \overline{S_{r_n}}(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причем $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в X существует единственная точка x, принадлежащая всем шарам.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ центров шаров. Так как $x_n, x_{n+1}, \ldots$ лежат в шаре $S_{r_n}(x_n)$, то $\|x_{n+p} - - x_n\| \leqslant r_n \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому $\{x_n\}$ — фундаментальная. Так как X полно, то $x_n \to x \in X$ при $n \to \infty$. При этом $\{x_n\}_{n=k}^{\infty} \subset \overline{S_{r_k}}(x_k)_0$ и, значит, $x \in \overline{S_{r_k}}(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Если x' — еще одна точка, принадлежащая всем шарам $\overline{S_{r_k}}(x_k)$, то

$$\|x - x'\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - x'\| \leqslant 2r_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда $x = x'$, и теорема доказана.

Упражнение 1. Докажите, что нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Определение 1. Множество M в нормированном пространстве X называется *нигде не плотным в X*, если в каждом шаре $S \subset X$ содержится другой шар S_1, не содержащий точек M.

Упражнение 2. Покажите, что в определении 1 можно взять замкнутые шары $\bar{S}$ и $\bar{S}_1$.

Определение 2. Множество в нормированном пространстве называется *множеством I категории*, если оно есть объединение счетного числа нигде не плотных множеств. Если M нельзя представить в виде объединения счетного числа нигда не плотных множеств, то M называется *множеством II категории*.

Упражнение 3. Покажите, что нигде не плотное в X множество является множеством I категории.

Упражнение 4. Покажите, что в E^3 любая плоскость — нигде не плотное множество, а множество всех точек E^3 с рациональными координатами есть множество I-й категории, плотное в E^3.

Теорема 2 (Бэр–Хаусдорф). *Всякое банахово пространство является множеством II-й категории.*

Доказательство. Допустим противное, что банахово пространство X представимо в виде

$$X = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots ,$$

где каждое M_i нигде не плотно в X. Возьмем какой-либо шар $\bar{S}_r(x_0)$. Так как M_1 нигде не плотно, то существует шар $\overline{S_{r_1}}(x_1) \subset \bar{S}_r(x_0)$, в котором нет точек M_1. Можно считать, что $r_1 < 1$. Тогда M_2 нигде не плотно; поэтому в $\overline{S_{r_1}}(x_1)$ содержится шар $\overline{S_{r_2}}(x_2)$, не содержащий точек из M_2, так что $r_2 < 1/2$. Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность $\{\overline{S_{r_n}}(x_n)\}$ вложенных друг в друга шаров с $r_n \to 0$, $n \to \infty$.

В силу теоремы 1 о вложенных шарах существует точка x_0, принадлежащая всем шарам. Но $x_0 \notin M_k$, ибо $x_0 \in \bar{S}_k(x_k)$, в котором нет точек из M_k. Это верно при $k = 1, 2, \ldots$ Значит, $x_0 \notin X$, но $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ и X полно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Упражнение 5. Докажите, что в банаховом пространстве

1) всякое непустое открытое множество есть множество II-й категории;

2) множество, дополнительное к множеству I-й категории, всегда II-й категории;

3) в $C[a, b]$ функции, обладающие конечной производной хоть в одной точке, составляют множество I-й категории и, значит, в $C[a, b]$ существует всюду недифференцируемая функция.

§ 6. Гильбертовы пространства

6.1. Определение гильбертова пространства. Пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением. Гильбертовы пространства обычно обозначают буквой H.

Простейший пример гильбертова пространства дает евклидово пространство E^m.

Покажем, что пространство l_2 (пример 2 п. 4.4) является полным и, значит, гильбертовым. Возьмем в l_2 фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$. Так как

$$|\xi_k^{(n+p)} - \xi_k^{(n)}| \leqslant \left\{\sum_{l=1}^{\infty} |\xi_l^{(n+p)} - \xi_l^{(n)}|^2\right\}^{1/2} = \|x_{n+p} - x_n\|,$$

то при каждом фиксированном k числовая последовательность $(\xi_k^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в E^m и, следовательно, сходящейся. Пусть $\xi_k^{(0)} = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_k^{(n)}$. Рассмотрим последовательность вещественных чисел $\{\xi_k^{(0)}\}_{k=1}^{\infty} = x_0$ и покажем, что $x_0 \in L_2$ и что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ в l_2. Из фундаментальности $\{x_n\} \subset l_2$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N такой, что при всех номерах $n > N$ и при любом натуральном p будет выполняться неравенство

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \left\{\sum_{l=1}^{\infty} |\xi_l^{(n+p)} - \xi_l^{(n)}|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Но тогда для всякого номера m

$$\left\{\sum_{l=1}^{m} |\xi_l^{(n+p)} - \xi_l^{(n)}|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $p \to +\infty$ и получим при всех $n > N$

$$\left\{\sum_{l=1}^{m} |\xi_l^{(0)} - \xi_l^{(n)}|^2\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Теперь перейдем к пределу при $m \to \infty$ и найдем

$$\left\{\sum_{l=1}^{\infty} |\xi_l^{(0)} - \xi_l^{(n)}|^2\right\}^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Полученное неравенство означает, что при $n > N$ $x_0 - x_n \in l_2$ и что $\|x_0 - x_n\| \leqslant \varepsilon$. Но тогда $x_0 = x_n + (x_0 - x_n) \in l_2$ вследствие линейности l_2. Кроме того, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

Упражнение. Докажите тем же способом, что пространство l_p, $p \geqslant 1$ (см. п. 2.6), является полным и, значит, банаховым.

6.2. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества. Вернемся к задаче наилучшего приближения, рассматривавшейся нами в пп. 3.3–3.5. В гильбертовом пространстве, вследствие его полноты и наличия понятия ортогональности элементов, удается полностью решить эту задачу. Сначала, в данном пункте, рассматривается общий случай, затем, в следующем пункте, изучается важный частный случай линейного приближения.

Пусть в гильбертовом пространстве H задано множество M и точка $x \in H$. Определим расстояние от точки x до множества M по формуле

$$\rho(x, M) = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

Лемма. *Если $x \in M$, то $\rho(x, M) = 0$. Если $x \notin M$ и M замкнуто, то $\rho(x, M) > 0$.*

Доказательство. Если $x \in M$, то при $u = x$ имеем $\|x - u\| = 0$, откуда $\rho(x, M) = 0$. Пусть теперь M замкнуто, а $x \notin M$. Допустим, что $\rho(x, M) = 0$. По определению точной нижней грани для любого n найдется $u_n \in M$ такое, что $\|x - u_n\| < 1/n$. Отсюда $u_n \to x$ при $n \to \infty$. Вследствие замкнутости M $x \in M$, но по условию $x \notin M$. Полученное противоречие приводит к выводу о том, что допущение $\rho(x, M) = 0$ неверно. Значит, $\rho(x, M) > 0$ и лемма доказана.

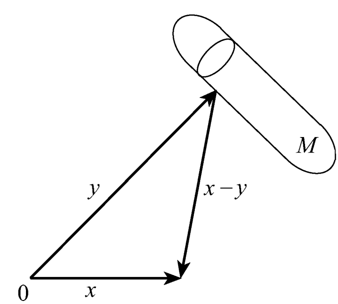


Рис. 6

Теорема. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H и точка $x \notin M$. Тогда существует единственный элемент $y \in M$ такой, что* (рис. 6)

$$\rho(x, M) = \|x - y\|.$$

Доказательство. Согласно лемме $d = \rho(x, M) > 0$. Снова воспользуемся определением inf: для любого n найдется $u_n \in M$ такое, что

$$d \leqslant \|x - u_n\| < d + 1/n. \tag{1}$$

Покажем, что последовательность $\{u_n\}$ — фундаментальная. Для этого воспользуемся равенством параллелограмма, приняв $x - u_n$ и $x - u_m$ в качестве его сторон. Диагонали параллелограмма будут тогда $2x - u_n - u_m$ и $u_m - u_n$. Равенство параллелограмма имеет вид

$$2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 = \|u_n - u_m\|^2 + \|2x - u_n - u_m\|^2.$$

Заметим теперь, что $(u_n + u_m)/2 \in M$ вследствие выпуклости M; поэтому

$$\|2x - u_n - u_m\|^2 = 4\left\|x - \frac{u_n + u_m)}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Далее, согласно неравенству (1)

$$\|x - u_n\|^2 < \left(d + \frac{1}{n}\right)^2, \quad \|x - u_m\|^2 < \left(d + \frac{1}{m}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\|u_n - u_m\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 <$$
$$< 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} < \frac{8d + 4}{N},$$

если $m, n > N$, откуда и вытекает фундаментальность $\{u_n\}$. Вследствие полноты H $\{u_n\}$ сходится к некоторому элементу $y \in M$, ибо M замкнуто. Переходя к пределу в неравенстве (1) при $n \to \infty$, получим $\|x - y\| = d$.

Осталось доказать, что элемент y, на котором достигается точная нижняя грань $\|x - u\|$, единственен. Пусть для некоторого $y^* \in M$ также $\|x - y^*\| = d$. По равенству параллелограмма

$$4d^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y^*\|^2 = \|y - y^*\|^2 + 4\left\|x - \frac{y + y^*}{2}\right\|^2 \geqslant \|y - y^*\|^2 + 4d^2.$$

Следовательно, $\|y - y^*\| = 0$ и $y^* = y$. Теорема доказана.

6.3. Расстояние от точки до подпространства. Если в трехмерном евклидовом пространстве задана плоскость L, проходящая через начало координат O, и точка P, не лежащая на L, то существует точка $P' \in L$ такая, что $|PP'|$ реализует расстояние от точки P до плоскости L. При этом прямая PP' перпендикулярна плоскости L.

Эти факты справедливы в произвольном гильбертовом пространстве H. Пусть L — подпространство в H, т. е. замкнутое линейное многообразие.

Пусть, далее, $x \in H$, но $x \notin L$. Как в п. 6.2, расстояние от точки x до подпространства L определяется формулой

$$\rho(x,\, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|.$$

Далее заметим, что всякое подпространство гильбертова (или банахова) пространства является замкнутым выпуклым множеством. Поэтому имеем следующее следствие из теоремы п. 6.2.

Следствие 1. *Существует единственный элемент $y \in L$, реализующий расстояние от точки x до подпространства L:*

$$\rho(x,\, L) = \|x - y\|.$$

Отсюда вытекает еще один важный вывод.

Теорема. *Пусть $\|x - y\| = \rho(x,\, L)$; тогда $(x - y) \perp L$.*

Доказательство. Докажем, что для любого $h \in L$ имеет место равенство $(x-y,\, h) = 0$. Пусть λ — произвольный комплексный (вещественный, если H вещественно) параметр. Имеем $\|x-y+\lambda h\| \geqslant \|x-y\|$, значит,

$$(x - y + \lambda h,\, x - y + \lambda h) \geqslant (x - y,\, x - y).$$

Производя упрощения, получим

$$\lambda(h,\, x - y) + \bar{\lambda}(x - y,\, h) + \lambda\bar{\lambda}\|h\|^2 \geqslant 0.$$

Полагая здесь $\lambda = -(x - y,\, h) \;/\; \|h\|^2$, получим $-|(x - y,\, h)|^2 \;/\; \|h\|^2 \geqslant 0$, откуда $(x - y,\, h) = 0$.

Следствие 2. *Пусть L — подпространство в H; тогда для любого $x \in H$ справедливо разложение* (рис. 7)

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \perp L, \tag{1}$$

причем это разложение единственное. Для доказательства достаточно взять y, определяемый по x на основе теоремы (если $x \in L$, то $y = 0$), и положить $x = y + (x - y)$, где $z = (x - y) \perp L$ по теореме.

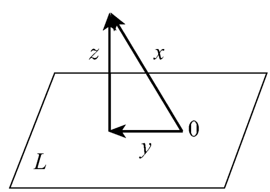


Рис. 7

Элемент y в разложении (1) принято называть *проекцией* x (*ортогональной*) на подпространство L.

Упражнение. Пусть имеет место ортогональное разложение (1). Докажите теорему Пифагора: $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

6.4. Ортогональные дополнения. Определение. Пусть L — линейное многообразие в H. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к L, называется *ортогональным дополнением* к L и обозначается $L^\perp$.

Теорема 1. *$L^\perp$ — подпространство в H.*

Доказательство. Докажем линейность $L^\perp$. Пусть $z_1,\, z_2 \in L^\perp$, т.е. $(z_1,\, y) = 0$, $(z_2,\, y) = 0$ для любых $y \in L$. Тогда для любых скаляров λ_1 и λ_2

$$(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2,\, y) = \lambda_1(z_1,\, y) + \lambda_2(z_2,\, y) = 0$$

для любых $y \in L$, т.е. $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L^\perp$.

Докажем замкнутость $L^{\perp}$. Пусть дана $\{z_n\} \subset L^{\perp}$ и $z_n \to z,\ n \to \infty$. Для любых $y \in L$ имеем $(z_n,\, y) = 0$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ по свойству непрерывности скалярного произведения, получим $(z,\, y) = 0$ для любого $y \in L$, т. е. $z \in L^{\perp}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть L — линейное многообразие в гильбертовом пространстве H. L плотно в H тогда и только тогда, когда $L^{\perp} = \{0\}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $L^{\perp} = \{0\}$, т. е. если $(z,\, y) = 0$ для любого $y =\in L$, то $z = 0$. Допустим, что L не плотно в H. Это означает, что существует $x_0 \notin \bar{L}$. $\bar{L}$ — подпространство, и $x_0 \notin \bar{L}$. Тогда справедливо ортогональное разложение $x_0 = y_0 + z_0$, где $y_0 \in \bar{L}$, а $z_0 \in (\bar{L})^{\perp} = (L)^{\perp}$. При этом $z_0 \neq 0$; иначе, $x_0 \in \bar{L}$, $(z_0,\, y) = 0$ для любых $y \in \bar{L}$ и, в частности, для любых $y \in L$. По условию такой z_0 равен 0. Мы получили противоречие, которое доказывает, что допущение о неплотности L в H неверно.

Необходимость. Пусть L плотно в H, т. е. $\bar{L} = H$. Допустим, что существует $z_0 \in H,\ z_0 \perp L$. Пусть $\{y_n\} \subset L$ и $y_n \to y \in H,\ n \to \infty$. Тогда $0 = (y_n,\, z_0) \to (y,\, z_0)$ при $n \to \infty$ вследствие непрерывности скалярного произведения. Значит, $(y,\, z_0) = 0$ для любого $y \in H$ (плотность L в H). Полагая, в частности, $y = z_0$, получим $(z_0,\, z_0) = 0$, откуда $z_0 = 0$. Теорема доказана.

6.5. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Пусть в бесконечномерном пространстве E со скалярным произведением дана ортогональная система $\{\varphi_k\}$, т. е. $\varphi_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $(\varphi_k,\, \varphi_l) = 0$ при $l \neq k$. Ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$ называется *рядом по ортогональной системе* $\{\varphi_k\}$. Пусть $x \in E$. Числа $c_k = (x,\, \varphi_k) \,/\, \|\varphi_k\|^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ называется *рядом Фурье* (по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$), составленным для элемента x (ряд Фурье элемента x). Многочлен $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ — частичная сумма ряда Фурье — называется *многочленом Фурье* элемента x.

Мы пока оставляем открытыми вопросы: сходится ли ряд Фурье элемента x? Если сходится, то к x или к другому элементу?

Возьмем теперь первые n векторов ортогональной системы $\{\varphi_k\}$: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Образуем всевозможные их линейные комбинации вида $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$. В результате мы получаем n-мерное подпространство L_n в E. Иногда говорят, что L_n *натянуто* на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, или что L_n является *линейной оболочкой* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Возьмем теперь элемент $x \in E$ и вычислим квадрат расстояния между x и u_n:

$$\Delta_n^2 = \|x - u_n\|^2.$$

Рассуждения ведутся для случая комплексного E. В вещественном случае все выкладки тоже справедливы, но несколько упрощаются. Пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем

$$\Delta_n^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) =$$

$$= (x,\, x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_k,\, x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k (x,\, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_k (\varphi_k,\, \varphi_k).$$

Заметим теперь, что

$$(x,\, \varphi_k) = c_k \|\varphi_k\|^2, \quad (\varphi_k,\, x) = \overline{(x,\, \varphi_k)} = \bar{c}_k \|\varphi_k\|^2,$$

где c_k — коэффициенты Фурье элемента x. Следовательно,

$$\Delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{c}_k \|\varphi_k\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bar{\alpha}_k \|\varphi_k\|^2.$$

Далее,

$$|\alpha_k - c_k|^2 = (\alpha_k - c_k)(\bar{\alpha}_k - \bar{c}_k) = \alpha_k \bar{\alpha}_k - \alpha_k \bar{c}_k - c_k \bar{\alpha}_k + |c_k|^2,$$

и мы получаем

$$\Delta_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2.$$

Теперь мы можем вычислить

$$d_n = \rho(x,\, L_n) = \inf_{u_n \in L_n} \|x - u_n\| = \inf_{\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n} \Delta_n,$$

где Δ_n зависит от $u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, т. е. от n комплексных переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Явная формула, полученная для Δ_n^2, показывает, что d_n достигается при $\alpha_k = c_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Это свойство коэффициентов Фурье $c_1, \ldots, c_n$ называется *минимальным свойством* коэффициентов Фурье. Итак, мы имеем следующее предложение.

Теорема. *Пусть* $\{\varphi_k\}$ *ортогональна в пространстве со* скалярным произведением E, пусть L_n — подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. *Тогда* $d_n = \rho(x,\, L_n),\ x \in E$, *дается следующими формулами*:

$$d_n = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|, \tag{1}$$

$$d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2, \tag{2}$$

где c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — *коэффициенты Фурье элемента* x *по системе* $\{\varphi_k\}$.

Из доказанной теоремы легко выводится

Следствие. *Если $m > n$, то*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} c_k\varphi_k \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\|.$$

Действительно, по формуле (2)

$$d_m^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 = d_n^2.$$

Осталось воспользоваться формулой (1).

Упражнение 1. Доказать формулы (1) и (2) в случае вещественного пространства.

Итак, наилучшее приближение элемента x посредством элементов из L_n есть многочлен Фурье элемента x:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k.$$

Упражнение 2. Найти наилучшее приближение функции e^t в метрике $\widetilde{\mathcal{L}}_2[-1,\,1]$ с помощью многочлена третьей степени. Воспользоваться многочленами Лежандра.

6.6. Неравенство Бесселя. Полные ортогональные системы. Так как $d_n^2 \geqslant 0$, то из формулы (2) п. 6.5 имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{1}$$

Слева стоит частичная сумма числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2$ с неотрицательными членами, причем оценка (1) верна для любого n.

Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена. Следовательно, из (1) вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2$ и неравенство для его суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{2}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*. Его справедливость доказана нами для любой ортогональной системы в любом бесконечномерном пространстве со скалярным произведением.

Из неравенства Бесселя вытекает следующее важное следствие.

Следствие. *Если $\|\varphi_k\| \geqslant \alpha > 0$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$, то коэффициенты Фурье c_k любого элемента $x \in H$ стремятся к нулю при $k \to \infty$.*

Для доказательства заметим, что теперь $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}\|x\|^2$ и $|c_k|^2 \to 0$ при $k \to \infty$, как члены сходящегося ряда.

Переходим к вопросу о сходимости ряда Фурье.

Определение 1. Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ из гильбертова пространства H называется *полной*, если для любого $x \in H$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = x$$

(ряд Фурье, составленный для x, сходится к x).

Полная ортогональная система называется *ортогональным базисом гильбертова пространства* H.

Из формул (1), (2) п. 6.5 имеем

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2. \qquad (3)$$

Отсюда приходим к следующему заключению:

Для того чтобы $\{\varphi_k\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \, \|\varphi_k\|^2 = \|x\|^2. \qquad (4)$$

Таким образом, в случае полной системы и только в этом случае неравенство Бесселя превращается в равенство. Равенство это называется *равенством Парсеваля–Стеклова*.

Заметим, что полнота ортогональной системы означает, что ее нельзя дополнить до более широкой ортогональной системы путем присоединения новых элементов.

Приведем еще один критерий полноты ортогональной системы. Для этой цели нам будет полезно следующее определение.

Определение 2. Пусть в линейном пространстве E задана конечная или бесконечная система элементов $\{x_k\}$. Множество L всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$ при различных n будем называть *линейной оболочкой системы* $\{x_k\}$.

Упражнение. Покажите, что L — линейное многообразие в E.

Теорема. *Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ из гильбертова пространства H полна в том и только в том случае, когда ее линейная оболочка L плотна в H (т. е. $\bar{L} = H$).*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ полна. Если $\bar{L} \neq H$, то найдется $x_0 \in (\bar{L})^{\perp}$, $x_0 \neq 0$. Но тогда $(x_0, \varphi_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Значит, $c_k = (x_0, \varphi_k) \,/\, \|\varphi_k\|^2 = 0$. Вследствие полноты системы $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\bar{L} = H$.

Пусть теперь $\bar{L} = H$. По определению плотности L в H для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in L$ такое, что $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Так как $x_\varepsilon \in L$, то x_ε — конечная линейная комбинация по $\{\varphi_k\}$. Значит, существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что $x_\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k$.

По минимальному свойству коэффициентов Фурье

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \|x - x_\varepsilon\|.$$

Далее, по следствию п. 6.5 для любых $n > N$ последовательность d_n (см. (1) п. 6.5) убывает с ростом n. Следовательно, для любых $n > N$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\| \leqslant \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n > N$ имеем

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = x$. Так как $x \in H$ произволен, полнота $\{\varphi_k\}$ доказана.

6.7. Ряды Фурье в оснащенном банаховом пространстве. Пусть X — банахово пространство, а $\|x\|$ — норма элемента $x \in X$. Иногда наряду с нормой $\|\cdot\|$ в X (как в линейной пространстве) можно еще ввести скалярное произведение (оснастить банахово пространство скалярным произведением) $(x,\, y)$.

Скалярное произведение порождает в X еще одну норму: $\|x\|_c = \sqrt{(x,\, x)}$, не совпадающую, вообще говоря, с $\|\cdot\|$. Если при этом существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\|x\|_c \leqslant \gamma \|x\|$ для любых $x \in X$ (т. е. $\|\cdot\|_c$ подчинена норме $\|\cdot\|$, см. п. 2.9), то говорят, что X — *оснащенное банахово пространство*.

Если $\|\cdot\|_c$ не эквивалентна норме $\|\cdot\|$ (см. п. 3.2), то в X возникает два вида сходимости: сходимость по норме $\|\cdot\|$, которую мы будем называть *равномерной сходимостью*, и сходимость по $\|\cdot\|_c$, которую мы будем называть *сходимостью в среднем*. Из сходимости $x_n \to x$, $n \to \infty$, равномерной следует сходимость $x_n \to x$, $n \to \infty$, в среднем (проверьте!).

Пример 1. В $C[a,\, b]$ введем, кроме нормы $\|x\| = \max_{[a,\, b]} |x(t)|$, еще и скалярное произведение

$$(x,\, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

Тогда

$$\|x\|_c = \left(\int_a^b x^2(t)\, dt \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{b-a}\, \|x\|$$

и, значит, $C[a,\, b]$ превращено в оснащенное банахово пространство. Иначе можно сказать, что оснащенное банахово пространство X *погружено* в некоторое гильбертово пространство.

Целью наших рассмотрений является следующее предложение.

Теорема. *Пусть X — оснащенное банахово пространство, и пусть $\widehat{X}$ — линейное многообразие в X, плотное в X в метрике $\|\cdot\|_c$. Пусть, далее, ряд Фурье всякого элемента $\widehat{x} \in \widehat{X}$ по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$ сходится к $\widehat{x}$ в метрике $\|\cdot\|$. Тогда $\{\varphi_k\}$ полна в X в метрике $\|\cdot\|_c$.*

Доказательство. Зададим произвольные $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Вследствие плотности $\widehat{X}$ в X найдется $\widehat{x} \in \widehat{X}$ такой, что

$$\|x - \widehat{x}\|_c < \varepsilon. \tag{1}$$

Далее, по условию теоремы ряд Фурье по $\{\varphi_k\}$ для $\widehat{x}$ сходится к нему. Значит, по $\varepsilon > 0$ можно найти $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$

$$\left\|\widehat{x} - \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k\varphi_k\right\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Здесь $\widehat{c}_k$ — коэффициенты Фурье элемента $\widehat{x}$. Используя неравенства (1) и (2), получаем при любых $n > N$

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k\varphi_k\right\|_c \leqslant \|x - \widehat{x}\|_c + \left\|\widehat{x} - \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k\varphi_k\right\|_c < (1+\gamma)\varepsilon.$$

По минимальному свойству коэффициентов Фурье получаем при любых $n > N$

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|_c \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{c}_k\varphi_k\right\|_c < (1+\gamma)\varepsilon.$$

Здесь c_k — коэффициенты Фурье элемента x. Это и означает сходимость ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$ к x. Теорема доказана.

Пример 2. Пусть $X = C[-\pi, \pi]$. В качестве линейного многообразия $\widehat{X}$ возьмем класс функций $x(t)$, непрерывных на $[-\pi, \pi]$, кусочно непрерывно дифференцируемых на этом отрезке и таких, что $x(-\pi) = x(\pi)$. В математическом анализе доказывается теорема о том, что ряд Фурье, составленный для $\widehat{x} \in \widehat{X}$, по тригонометрической системе сходится к $\widehat{x}$ равномерно. Кроме того, нетрудно проверить, что $\widehat{X}$ плотно в X в среднем, аппроксимируя непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию ломаной $\widehat{x}(t) \in X$ и разбив $[-\pi, \pi]$ достаточно мелко (рис. 8).

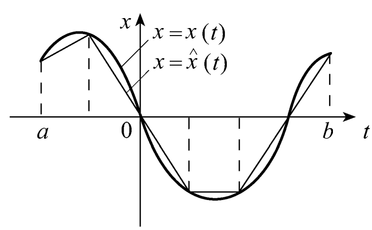


Рис. 8

Из доказанной теоремы следует сходимость ряда Фурье, составленного для непрерывной функции, в среднем к ней же.

6.8. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве.

Теорема 1. *Во всяком сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортогональный базис из конечного или счетного числа элементов.*

Доказательство. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда в H найдется счетное, всюду плотное множество $\{x_n\}$ (см. определение п. 5.7).

Пусть x_k — первый не равный нулю элемент в $\{x_n\}$; обозначим его через e_1. Рассмотрим последовательность $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$, и пусть x_l — первый ее элемент, линейно независимый с e_1. Обозначим $x_l = e_2$. Рассмотрим последовательность $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots$ и обозначим через e_3 первый ее элемент, не являющийся линейной комбинацией e_1 и e_2. Продолжая эти рассуждения, получим конечную или бесконечную систему элементов $\{e_n\}$. Поскольку линейная оболочка (см. определение 2 п. 6.6) L системы $\{e_n\}$ содержит систему $\{x_n\}$, то L плотна в H. Ортогонализируя систему $\{e_n\}$ (см. п. 4.6), придем к ортогональной системе $\{f_n\}$. Так как линейные оболочки систем $\{f_n\}$ и $\{e_n\}$ совпадают, а L плотна в H, то система $\{f_n\}$ и образует искомый базис.

Теорема 2. *Если в гильбертовом пространстве H существует конечный или счетный ортогональный базис $\{f_n\}$, то H сепарабельно.*

Доказательство. Множество всех конечных линейных комбинаций векторов системы $\{f_k\}$ с коэффициентами вида $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, где α_k и β_k рациональны, образует счетное множество, плотное в H.

Приведем теперь используемое в дальнейшем определение ортогональной суммы подпространств гильбертова пространства. Пусть в гильбертовом пространстве H заданы подпространства $L_1, \ldots, L_m$, причем $L_i \neq 0$, $L_i \neq H$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Будем говорить, что подпространства $L_1, \ldots, L_m$ попарно ортогональны, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ для любых элементов $x_i \in L_i$, $x_j \in L_j$.

Определение. Будем говорить, что подпространство L гильбертова пространства H *разлагается в ортогональную сумму подпространств* $L_1, \ldots, L_m$, и писать $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$, если:

1) $L_1, \ldots, L_m$ попарно ортогональны;

2) каждый элемент $x \in L$ представим в виде $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i$, где $x_i \in L_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Упражнение. Покажите, что указанное разложение x единственно и докажите теорему Пифагора:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2.$$

ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА

§ 7. Пополнение нормированных пространств и пространств со скалярным произведением. Пространства Лебега

7.1. Теорема о пополнении нормированного пространства. Ниже приводится важнейшая конструкция замыкания произвольного нормированного пространства, в результате чего получается банахово пространство. Идея этой конструкции восходит к Коши, осуществившему ее в своей теории вещественных чисел, рассматривавшихся им как классы эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Теорема. *Всякое нормированное пространство E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\widehat{E}$.*

Пространство $\widehat{E}$ при этом называется *пополнением* пространства E.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ пространства E. Две такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ будем называть *эквивалентными*, если

$$\|x_n - x'_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ эквивалентны, то будем писать

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\}.$$

Множество всех фундаментальных последовательностей разобьем на непересекающиеся классы: две такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ включаем в один класс в том и только в том случае, когда $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$. Множество всех классов обозначим через $\widehat{E}$, а сами классы — через $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, ... Если $\{x_n\}$ содержится в классе $\widehat{x}$, то будем писать $\{x_n\} \in \widehat{x}$ и называть $\{x_n\}$ *представителем* класса $\widehat{x}$.

Превратим $\widehat{E}$ в нормированное пространство. Операцию сложения классов $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$ определим так: если $\{x_n\} \in \widehat{x}$ и $\{y_n\} \in \widehat{y}$, то суммой $\widehat{x} + \widehat{y}$ будем называть класс, содержащий $\{x_n + y_n\}$.

Упражнение 1. Покажите, что $\{x_n + y_n\}$ фундаментальна, если фундаментальны $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Наше определение $\widehat{x} + \widehat{y}$ не зависит от выбора представителей классов $\widehat{x}$ и $\widehat{y}$. Если $\{x'_n\} \in \widehat{x}$ и $\{y'_n\} \in \widehat{y}$, то $\{x'_n + y'_n\} \sim \{x_n + y_n\}$ и, значит, $\{x'_n + y'_n\} \in \widehat{x} + \widehat{y}$.

Упражнение 2. Покажите, что если $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$, а $\{y'_n\} \sim \{y_n\}$, то $\{x'_n + y'_n\} \sim \{x_n + y_n\}$.

Введем теперь в $\widehat{E}$ операцию умножения класса на число: классом $\lambda\widehat{x}$ будем называть класс, содержащий $\{\lambda x_n\}$, если $\{x_n\} \in \widehat{x}$.

Упражнение 3. Покажите, что если $\{x_n\}$ фундаментальна, то $\{\lambda x_n\}$ тоже фундаментальна.

Упражнение 4. Покажите, что если $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$, то $\{\lambda x'_n\} \sim$ $\sim \{\lambda x_n\}$.

Упражнение 5. Покажите, что определение класса $\lambda\widehat{x}$ не зависит от выбора представителя класса $\widehat{x}$.

Поскольку наше определение операций в $\widehat{E}$ сводится к операциям над элементами из линейного пространства E, то $\widehat{E}$ также является линейным пространством. Роль нуля в $\widehat{E}$ играет класс 0 с представителем $\{0\}$.

Введем теперь в $\widehat{E}$ норму. Пусть $\{x_n\} \in \widehat{x}$. Полагаем

$$\|\widehat{x}\|_{\widehat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_E.$$

Заметим, что предел этот существует, ибо $\{\|x_n\|\}$ фундаментальная (так как $|\,\|x_n\| - \|x_m\|\,| \leqslant \|x_n - x_m\|$), а значит, и сходящаяся в силу критерия Коши для числовых последовательностей.

Кроме того, предел не зависит от выбора представителя класса $\widehat{x}$. Если также $\{x'_n\} \in \widehat{x}$, то

$$|\,\|x'_n\| - \|x_n\|\,| \leqslant \|x'_n - x_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \|x'_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Упражнение 6. Проверьте аксиомы нормы в $\widehat{E}$. Итак, $\widehat{E}$ — нормированное пространство.

Докажем следующие предложения:

α) E можно отождествить с некоторым линейным многообразием в $\widehat{E}$;

β) E плотно в $\widehat{E}$ (в смысле отождествления, указанного в α);

γ) $\widehat{E}$ — банахово пространство.

Этим теорема о пополнении будет доказана.

Доказательство предложения α. Элемент $x \in E$ отождествим с классом, содержащим стационарную последовательность $\{x\}$, т.е. $x, x, x, \ldots$ Такой класс будем обозначать через x. Ясно, что λx — это класс, содержащий $\{\lambda x\}$, а $x + y$ — класс, содержащий $\{x + y\}$. Таким образом, множество всех классов, содержащих стационарные последовательности, является линейным многообразием в $\widehat{E}$. Для этого линейного многообразия мы сохраняем обозначение E.

Доказательство предложения β. Пусть класс $x \in E$, тогда $\|x\|_{\widehat{E}} = \|x\|$ (как предел постоянной).

Пусть $\widehat{x} \in \widehat{E}$. Покажем, что существует $\{x_n\} \subset E$ такая, что $\|\widehat{x} - x_n\|_{\widehat{E}} \to 0$, $n \to \infty$. Этим будет доказана плотность E в $\widehat{E}$ (см. п. 3.6).

Пусть $\{x_n\} \in \widehat{x}$. Из фундаментальности $\{x_n\}$ имеем: для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любых $n, m > N$, справедливо неравенство

$$\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Фиксируем $n > N$ и заметим, что

$$\lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_E = \|x_n - \widehat{x}\|_{\widehat{E}}, \tag{2}$$

где $\{x_n\}_{m=1}^{\infty} \in x_n$, как стационарная последовательность. Переходя в (1) к пределу при $m \to \infty$, используя (2), получим

$$\|x_n - \widehat{x}\|_{\widehat{E}} \leqslant \varepsilon/2.$$

Это и означает, что $x_n \to \widehat{x}$, $n \to \infty$.

Доказательство предложения γ. Пусть дана $\{\widehat{x}_n\}$, фундаментальная в $\widehat{E}$. Вследствие справедливости условия β) найдем $\{x_n\} \subset E$ такую, что

$$\|\widehat{x}_n - x_n\|_{\widehat{E}} < 1/n.$$

Докажем, что $\{x_n\}$ сама фундаментальна: это вытекает из неравенства

$$\|x_n - x_m\|_{\widehat{E}} \leqslant \|x_n - \widehat{x}_n\|_{\widehat{E}} + \|\widehat{x}_n + \widehat{x}_m\|_{\widehat{E}} + \|\widehat{x}_m - x_m\|_{\widehat{E}} < \\ < \frac{1}{n} + \|\widehat{x}_n - \widehat{x}_m\|_{\widehat{E}} + \frac{1}{m} \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Так как $\{x_n\}$ фундаментальна в $\widehat{E}$, то она фундаментальна и в E, ибо

$$\|x_n - x_m\|_E = \|x_n - x_m\|_{\widehat{E}}.$$

Но тогда существует класс $\widehat{x}$, содержащий $\{x_n\}$. Докажем, что $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$, $n \to \infty$. Действительно, $\|\widehat{x}_n - \widehat{x}\|_{\widehat{E}} \leqslant \|\widehat{x}_n - x_n\|_{\widehat{E}} + \|\widehat{x} - x_n\|_{\widehat{E}} < \dfrac{1}{n} + \|\widehat{x} - x_n\|_{\widehat{E}}$. Тогда при $n \to \infty$ $\|\widehat{x} - x_n\|_{\widehat{E}} \to 0$ вследствие β). Теорема доказана.

7.2. Пополнение пространств со скалярным произведением. Пусть теперь исходное пространство E является пространством со скалярным произведением (x, y). Пополняя E как нормированное пространство с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

мы приходим к банахову пространству $\widehat{E}$, элементами которого служат классы $\widehat{x}$ эквивалентных фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$. Покажем, что $\widehat{E}$ является само пространством со скалярным произведением, а значит, вследствие своей полноты, и гильбертовым пространством. Пусть $\widehat{x}, \widehat{y} \in E$, а $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — представители этих классов. Определим в $\widehat{E}$ скалярное произведение

$$(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n).$$

При этом оказывается, что

$$(\widehat{x}, \widehat{x}) = \lim_{n\to\infty} (x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 = \|\widehat{x}\|^2.$$

Упражнение. Проверьте аксиомы скалярного произведения в $\widehat{E}$.

Итак, пополнение пространства со скалярным произведением является гильбертовым пространством.

7.3. Пространство Лебега $\mathcal{L}[a, b]$. Определим банахово пространство $\mathcal{L}[a, b]$ как пополнение нормированного пространства $\tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$ (см. п. 2.9). Напомним, что элементы $\tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$ — это непрерывные на $[a, b]$ функции $x(t)$ с нормой

$$\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

Пусть $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n^*(t)\}$ — две последовательности непрерывных на $[a, b]$ функций. Если последовательность $\{x_n(t) - x_n^*(t)\}$ является бесконечно малой в $\tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$, т. е. при $n \to \infty$

$$\|x_n - x_n^*\| = \int_a^b |x_n(t) - x_n^*(t)|\, dt \to 0,$$

то последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$ будем называть *эквивалентными в* $\tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$ или *эквивалентными в среднем*.

Далее, последовательность $\{x_n(t)\}$ непрерывных на $[a, b]$ функций будем называть *фундаментальной в* $\tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$ или, короче, *фундаментальной в среднем*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех номеров $n > N$ и всех натуральных p выполняется неравенство

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \int_a^b |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Согласно теореме о пополнении пространство Лебега $\mathcal{L}[a, b]$ состоит из элементов $\widehat{x}(t)$, являющихся классами эквивалентных в среднем и фундаментальных в среднем последовательностей непрерывных функций. Две фундаментальные в среднем последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{x_n^*(t)\}$ являются представителями одного класса $\widehat{x}(t)$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны в среднем. Если $\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t)$, то, по определению,

$$\|\widehat{x}\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1[a,\,b]}. \tag{1}$$

Подобно тому, как иррациональные числа можно трактовать как некоторые идеальные элементы, сколь угодно хорошие приближения к которым получаются с помощью рациональных чисел, так и элементы пространства $\mathcal{L}[a,\,b]$ мы можем рассматривать как некоторые идеальные функции, приблизиться к которым практически всегда возможно с помощью непрерывных функций. Более того, будем называть интегралом Лебега от функции $|\widehat{x}(t)|$, где $\widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a,\,b]$, выражение (1), т. е., по определению,

$$\int\limits_a^b |\widehat{x}(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt$$

(слева — интеграл Лебега, а справа — интегралы Римана).

Оказывается, что некоторые идеальные элементы (классы) пространства $\mathcal{L}[a,\,b]$ можно отождествить с некоторыми конкретными, вообще говоря, разрывными функциями.

Прежде всего отметим, что согласно теореме о пополнении (п. 7.1) пространство $\mathcal{L}[a,\,b]$ содержит все непрерывные на $[a,\,b]$ функции. Понимать это нужно в следующем смысле. Рассмотрим класс, содержащий своим представителем стационарную последовательность $\{x(t)\}$, где $x(t)$ непрерывна на $[a,\,b]$. Этот класс мы отождествляем с функцией $x(t)$ и обозначаем также $x(t)$. Помимо функции $x(t)$ класс $x(t)$ содержит и разрывные функции, например, отличающиеся от функции $x(t)$ в конечном числе точек.

Эту идею можно развить дальше в следующем направлении: некоторые разрывные функции можно трактовать как пределы в метрике $\tilde{\mathcal{L}}_1[a,\,b]$ фундаментальных последовательностей непрерывных функций. Каждую такую разрывную функцию можно отождествить с некоторым классом из $\mathcal{L}[a,\,b]$. В § 8 этот путь будет реализован полностью. Будет показано, что всякий элемент пространства $\mathcal{L}[a,\,b]$ можно отождествить с некоторой обычной, вообще говоря, разрывной функцией (точнее, с некоторым классом таких функций). В основе этих рассуждений лежит основанная на теореме о пополнении конструкция интеграла Лебега.

Пока же мы ограничимся следующими двумя примерами.

Пример 1. Пусть функция $x(t)$ непрерывна на $[a,\,b]$, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода. Покажем, что тогда существует фундаментальная в среднем последовательность непрерывных на $[a,\,b]$ функций $\{x_n(t)\}$, сходящаяся к $x(t)$ в среднем.

Идея построения такой фундаментальной последовательности может быть позаимствована в п. 5.3, где был приведен пример фундаментальной в $\tilde{\mathcal{L}}_2[-1,\,1]$ последовательности непрерывных функций, сходящейся в среднем к разрывной функции. Пусть $x(t)$ имеет точки разрыва $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < b$, причем $x(t_k) = \big(x_+(t_k) + x_-(t_k)\big)/2$ $(k = 1,\, \ldots,\, l)$, где $x_+(t_k)$ и $x_-(t_k)$ — пределы $x(t)$ в точке t_k соответственно справа и слева.

Окружим каждую точку разрыва t_k окрестностью $]t_k - \delta,\, t_k + \delta[$, где δ выбираем настолько малым, чтобы $a < t_1 - \delta,\ t_l + \delta < b$ и сами окрестно-

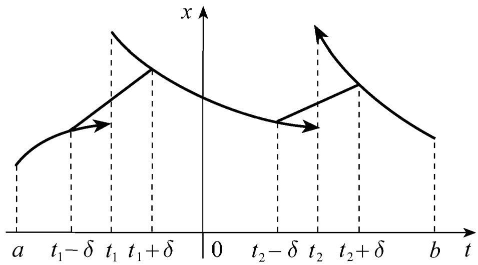


Рис. 9

сти не пересекались. Определим теперь последовательность непрерывных функций так (рис. 9):

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), \quad \text{если}\, t \in [a,\, b] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{l} (t_k - \delta/n,\, t_k + \delta/n)\,, \\ x\,(t_k + \delta/n) - x\,(t_k - \delta/n)\,(t - t_k + \delta/n) + x\,(t_k - \delta/n)\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если}\ t \in (t_k - \delta/n,\, t + \delta/n), \\ \qquad\qquad\qquad k = 1,\, \ldots,\, l. \end{cases}$$

Докажем, что $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в $\mathcal{L}_1[a,\, b]$. Пусть $M = \sup_{[a,\,b]} |x(t)|$ (почему $\sup$ существует?). Тогда $\sup_{[a,\,b]} |x_n(t)| \leqslant M$,

$$||x_{n+p} - x_n|| = \int\limits_a^b |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{t_k - \delta/n}^{t_k + \delta/n} |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\, dt \leqslant 2Ml\, \frac{2\delta}{n} = \frac{4Ml\delta}{n} \to 0 \ \text{при}\ n \to \infty.$$

Итак, $\{x_n(t)\}$ фундаментальна. Аналогично можно показать, что в той же норме $x_n(t) \to x(t),\ n \to \infty$. Поэтому класс, содержащий своим представителем $\{x_n(t)\}$, можно отождествить с разрывной функцией $x(t)$.

Пример 2. До сих пор речь шла о функциях, имеющих разрывы 1-го рода. Покажем теперь, что $1/\sqrt{t} \in \mathcal{L}[0,\, 2]$. Для этого рассмотрим следующую последовательность функций:

$$x_n(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{при}\ t \in [1/n,\, 2], \\ \sqrt{n} & \text{при}\ t \in [0,\, 1/n]. \end{cases}$$

Предоставляем читателю рассмотреть поведение $x_n(t)$ на графике.

Имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \int_0^2 |x_{n+p}(t) - x_n(t)|\,dt =$$

$$= \int_0^{1/(n+p)} (\sqrt{n+p} - \sqrt{n})\,dt + \int_{1/n+p}^{1/n} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{n}\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{p+n} - \sqrt{n}}{n+p} + \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{n}\right) dt =$$

$$= \frac{p}{(n+p)(\sqrt{n+p} + \sqrt{n})} + (2\sqrt{t} - t\sqrt{n})\Big|_0^{1/n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Итак, $\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant 2/\sqrt{n}$, т. е. $\{x_n(t)\}$ фундаментальна. Кроме того,

$$\int_0^2 x_n(t)\,dt \to \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt, \quad n \to \infty,$$

где интеграл справа нужно понимать как несобственный.

Объединяя рассуждения примеров 1 и 2, можно доказать следующее предложение.

Теорема. *Пусть $x(t)$ определена на $[a,\, b]$ и имеет на $[a,\, b]$ конечное число точек разрыва, причем сходится интеграл*

$$\int_a^b |x(t)|\,dt.$$

Тогда существует фундаментальная на $[a,\, b]$ в среднем последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ такая, что

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|\,dt \to 0, \quad n \to \infty$$

(*интегралы понимаются как несобственные*), *и, следовательно,* $x(t) \in \in \mathcal{L}[a,\, b]$.

7.4. Пространства Лебега $\mathcal{L}_p(G)$, $p \geqslant 1$. Рассмотрения предыдущего пункта переносятся на более общие случаи. Пусть G — ограниченная область в E^m, а $\bar{G}$ — ее замыкание. Пространство Лебега $\mathcal{L}_p(G)$, по определению, является пополнением пространства $\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$, рассмотренного в п. 5.4.

Элементами $\mathcal{L}_p(G)$ являются, как и в случае пространства $\mathcal{L}[a, b]$, некоторые «функции», приблизиться к которым с любой степенью точности (в среднем) можно с помощью непрерывных на $\bar{G}$ функций, так как $\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$ плотно в $\mathcal{L}_p(G)$. Более подробно это означает следующее.

Последовательность непрерывных функций $\{u_n(x)\},\ x \in \bar{G}$, является фундаментальной в $\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$, или, как говорят, фундаментальной в среднем на $\bar{G}$ с показателем p, если

$$||u_n - u_m||^p_{\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})} = \int\limits_{\bar{G}} |u_n(x) - u_m(x)|^p \, dx \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Две последовательности непрерывных функций $\{u_n(x)\}$ и $\{u_n^*(x)\}$, $x \in \bar{G}$, являются эквивалентными по норме $\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$, или, как говорят, эквивалентными в среднем на $\bar{G}$ с показателем p, если

$$||u_n - u_n^*||^p_{\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})} = \int\limits_{\bar{G}} |u_n(x) - u_n^*(x)|^p \, dx \to 0,\ n \to \infty$$

(в обеих формулах имеются в виду m-мерные интегралы Римана по области $\bar{G}$).

В соответствии с теоремой о пополнении элементы $\mathcal{L}_p(G)$ — это классы $\widehat{u}(x)$ фундаментальных в среднем последовательностей. Две такие последовательности включаются в один класс в том и только в том случае, когда они эквивалентны в среднем.

Как и в п. 7.3, все непрерывные и некоторые разрывные на $\bar{G}$ функции можно отождествить с некоторыми классами в $\mathcal{L}_p(G)$. Заметим далее, что все пространства $\mathcal{L}_p(G)$ являются сепарабельными (см. п. 5.7). В самом деле, всякую функцию из $\mathcal{L}_p(G)$ можно приблизить в метрике $C(\bar{G})$ и тем более в метрике $\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$ множеством многочленов с рациональными коэффициентами. Вследствие плотности $\tilde{\mathcal{L}}_p(\bar{G})$ это же множество многочленов будет плотно в $\mathcal{L}_p(G)$.

Отметим особо пространство $\mathcal{L}_2(G)$ — пополнение пространства со скалярным произведением $\tilde{\mathcal{L}}_2(\bar{G})$. Согласно п. 7.2 $\mathcal{L}_2(G)$ является гильбертовым пространством. Скалярное произведение в $\mathcal{L}_2(G)$ определяется как предел

$$(u, v) = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{G}} u_n(x)\, \overline{v_n(x)}\, dx,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — классы, а $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ — их представители, т. е. фундаментальные в среднем последовательности непрерывных функций. Примем по определению: для $u, v \in \mathcal{L}_2(G)$ назовем (u, v) m-кратным интегралом Лебега от произведения $u\bar{v}$ по области G, т. е.

$$\int\limits_G u(x)\, \overline{v(x)}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{G}} u_n(x)\, \overline{v_n(x)}\, dx.$$

Выбирая, в частности, $v(x) = 1$ — класс, представителем которого является последовательность $\{1\}$, $x \in \bar{G}$, получим для $u \in \mathcal{L}_2(G)$

$$\int\limits_G u(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\bar{G}} u_n(x)\,dx.$$

Мы определили для всех классов $u(x) \in \mathcal{L}_2(G)$ интеграл Лебега как предел римановских интегралов от представителей. Нетрудно убедиться, что введенный интеграл Лебега обладает рядом известных свойств интеграла Римана. Теория интеграла Лебега по области $\bar{G}$ может быть построена аналогично тому, как это делается в следующем параграфе для случая отрезка.

7.5. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств.

Определение 1. Нормированные пространства X и $\widehat{X}$ называются *изоморфными*, если всюду на X определена линейная функция $\widehat{x} = J(x)$ со значениями в $\widehat{X}$, осуществляющая изоморфизм X и $\widehat{X}$ как линейных пространств и такая, что существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что неравенство

$$\alpha\|x\| \leqslant \|J(x)\| \leqslant \beta\|x\|$$

справедливо для всех $x \in X$. Если $\|J(x)\| = \|x\|$, то X и $\widehat{X}$ будем называть (линейно) изометричными.

Пример. Любое m-мерное вещественное нормированное пространство изоморфно E^m, и, значит, все такие пространства изоморфны друг другу.

Если в определении 1 пространства X и $\widehat{X}$ получены введением в одном и том же линейном пространстве E различных норм, то иногда в качестве J можно выбрать соответствие, отождествляющее элементы X и $\widehat{X}$, являющиеся одним и тем же элементом E. При этом говорят, что J — естественный изоморфизм.

Более общим понятием по сравнению с понятием изоморфизма является понятие вложения нормированных пространств, из которых одно или оба могут быть банаховыми.

Определение 2. Говорят, что нормированное пространство X *вложено* в нормированное пространство $\widehat{X}$, если всюду на X задана линейная функция $J(x)$, причем существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$\|J(x)\| \leqslant \beta\|x\|$$

для всех $x \in X$. Если, в частности, $\widehat{X}$ и X получены введением различных норм соответственно в линейном пространстве E и в его линейном многообразии D и в качестве J выбирают соответствие, отождествляющее элементы X и $\widehat{X}$ как элементы E, то говорят о естественном вложении X в $\widehat{X}$. Если $\|J(x)\| = \|x\|$, то говорят, что вложение X в $\widehat{X}$ изометрично.

З а м е ч а н и е. Чаще всего вложение X в $\widehat{X}$ понимается как естественное вложение, когда элементы пространства X отождествляются с соответствующими элементами $\widehat{X}$. Функция J, ставящая в соответствие элементу $x \in X$ этот же x как элемент $\widehat{X}$, называется оператором вложения X в $\widehat{X}$.

Приведем несколько примеров.

1. E^k вложено в E^m при $k < m$.

2. $l_2^{(m)}$ вложено в l_2. Действительно, можно принять

$$J((x_i)_{i=1}^m) = (y_i)_{i=1}^\infty,$$

где $y_i = \begin{cases} x_i & \text{при} \quad i = 1, \ldots, m; \\ 0 & \text{при} \quad i > m. \end{cases}$

3. Согласно теореме о пополнении всякое (неполное) нормированное пространство может быть изометрично и плотно вложено в банахово пространство — свое пополнение.

В § 9 мы познакомимся с важными в приложениях теоремами вложения акад. С. Л. Соболева.

У п р а ж н е н и е. Покажите, что $C[a, b]$ вложено в $\tilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$ при всяком $p \geqslant 1$.

7.6. Фактор-пространства. Пусть X — нормированное пространство, а M — подпространство в X. Элементы пространства X разобьем на непересекающиеся классы $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, … Элементы x_1 и x_2 отнесем в класс $\widetilde{x}$ в том и только в том случае, когда $x_1 - x_2 \in M$. Элемент $x \in \widetilde{x}$ будем называть представителем класса $\widetilde{x}$. Если x — представитель класса $\widetilde{x}$, то любой другой представитель $\widetilde{x}$ будет иметь вид $x + z$, где $z \in M$. Множество всех таких классов называется фактор-пространством пространства X по подпространству M и обозначается $\widetilde{X} = X/M$.

Введем в $\widetilde{X}$ операции сложения классов и умножения класса на число. Пусть $x \in \widetilde{x}$, $\quad y \in \widetilde{y}$, тогда класс $\widetilde{x}+\widetilde{y}$ определим как класс, представителем которого является элемент $x+y$. Далее, класс $\alpha\widetilde{x}$, где α — число, определим как класс, содержащий αx.

У п р а ж н е н и е. Проверьте, что определение этих операций корректно, т. е. не зависит от выбора представителей классов. Проверьте, что $\widetilde{X}$ является теперь линейным пространством.

Введем в $\widetilde{X}$ норму по формуле

$$\|\widetilde{x}\| = \inf_{x \in \widetilde{x}} \|x\|.$$

У п р а ж н е н и е. Проверьте аксиомы нормы.

Итак, $\widetilde{X}$ — нормированное пространство.

Т е о р е м а. *Если X полное, то и $\widetilde{X}$ полное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что если последовательность $\{x_n\} \subset \widetilde{X}$ фундаментальна в $\widetilde{X}$, то найдется последовательность номеров $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что соответствующая ей подпоследовательность представителей $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ $(x_{n_k} \in \widetilde{x}_{n_k})$ сходится в X.

Действительно, возьмем n_k такими, чтобы $\|\widetilde{x}_{n_{k+1}} - \widetilde{x}_{n_k}\| < 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Из определения нормы в $\widetilde{X}$ следует существование $z_{n_k} \in \widetilde{x}_{n_{k+1}} - \widetilde{x}_{n_k}$ таких, что $\|z_{n_k}\| < 1/2^k$, $\quad k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим в X сходящийся ряд $x_{n_1} + z_1 + z_2 + \ldots$ и пусть x — его сумма. По построению $x_{n_k} \to x$, $\quad k \to \infty$ и

$$x_{n_k} \in \widetilde{X}_{n_1} + \sum_{l=1}^{k} \left(\widetilde{X}_{n_{l+1}} - \widetilde{X}_{n_l}\right) = \widetilde{X}_{n_k}.$$

Отсюда и из фундаментальности $\{\widetilde{x}_n\}$ заключаем, что $\widetilde{x}_{n_k} \to \widetilde{x}$, $n \to \infty$, где $\widetilde{x}$ — класс, содержащий x. Теорема доказана.

§ 8. Интеграл Лебега

В § 7 было введено банахово пространство $\mathcal{L}[a, b]$ — пополнение нормированного пространства $\tilde{\mathcal{L}}^1[a, b]$. При этом непрерывные и некоторые разрывные функции $x(t)$ на $[a, b]$ оказалось возможным отождествить с определенными классами из $\mathcal{L}[a, b]$. Здесь будет установлено, что каждый класс $\widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ можно отождествить с некоторым классом обычных, вообще говоря, разрывных на $[a, b]$ функций, причем это соответствие классов окажется взаимно однозначным.

8.1. Множества меры нуль. Эквивалентные функции.

Определение 1. Множество $M \subset [a, b]$ называется *множеством меры нуль*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная или счетная система отрезков $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ такая, что:

1) множество M покрывается отрезками этой системы, т. е.

$$M \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n];$$

2) сумма длин отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$ меньше ε, т. е.

$$\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon.$$

Упражнение 1. Докажите, что конечное число точек $t_1, \ldots, t_k \in [a, b]$ — множество меры нуль.

Другой пример множества меры нуль — множество рациональных чисел. В самом деле, вспомним, что рациональные числа отрезка $[a, b]$ образуют счетное множество, т. е. их можно занумеровать: $r_1, \ldots, r_n, \ldots \ldots = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для данного $\varepsilon > 0$ и каждого рационального числа r_n построим отрезок $\left[r_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right] = [\alpha_n, \beta_n]$.

1) Очевидно, что $r_n \in [\alpha_n,\, \beta_n]$, и, следовательно,

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n,\, \beta_n];$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т. е., согласно определению, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество меры нуль.

Заметим, что наше рассуждение применимо к любому счетному множеству точек, и, значит, любое счетное множество есть множество меры нуль. Обратное неверно, т. е. существуют множества меры нуль, которые не являются счетными.

Упражнение 2. Докажите, что объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль и пересечение любого числа множеств меры нуль есть множества меры нуль.

Если какое-то утверждение справедливо для всех точек t отрезка $[a,\, b]$ за исключением, быть может, множества точек меры нуль, то будем далее говорить, что это утверждение верно *почти всюду*.

Определение 2. Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ равны почти всюду, то они называются *эквивалентными*. Записывают:

$$x_1(t) \sim x_2(t).$$

Пример. Рассмотрим на $[0,\, 1]$ функцию Дирихле:

$$D(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } t \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Она эквивалентна функции, тождественно равной нулю на $[0,\, 1]$, так как $D(t) \neq 0$ на множестве рациональных чисел, которое, как мы убедились, имеет меру нуль.

Упражнение 3. Докажите, что если $x_1(t) \sim x_2(t)$ и $y_1(t) \sim y_2(t)$, то $x_1(t) + y_1(t) \sim x_2(t) + y_2(t)$, $x_1(t)\, y_1(t) \sim x_2(t)\, y_2(t)$.

8.2. Сходимость почти всюду и сходимость в среднем. Пусть теперь для последовательности $\{x_n(t)\}$ почти всюду существует предел, равный $x(t)$. Этот факт мы будем записывать так

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п. в}}{=} x(t),$$

и говорить, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ почти всюду. Совершенно ясно, что если $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в каждой точке $[a,\, b]$, то она сходится к $x(t)$ почти всюду; обратное неверно.

Упражнение 1. Докажите, что последовательность $\{x_n(t)\}$, сходящаяся в среднем, является фундаментальной в среднем.

Обратное неверно, т. е. для фундаментальной в среднем последовательности непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ может не существовать интегрируемой функции $x(t)$, к которой $\{x_n(t)\}$ сходилась бы в среднем.

Следующая теорема устанавливает связь между сходимостью почти всюду и сходимостью в среднем. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$m_0 = [\,|\log_2(b-a)|\,] + 2 \quad (\text{здесь } [\alpha] \text{ — целая часть}).$$

Далее, если A — конечная или счетная система отрезков, то $|A|$ будет обозначать сумму длин этих отрезков; если же множество B покрыто системой отрезков A, т. е. $B \subset A$, причем $|A| < \alpha$, то будем писать $|B| < \alpha$.

Теорема. *Если* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1[a,\,b]$ *и* $\lim_{n\to\infty} x_n(t)^{\text{в. ср.}} = 0$, *то существует подпоследовательность* $\{x_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что*:

1) $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t)\ ^{\text{п.в.}} = 0$;

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k}(t)|$ *сходится почти всюду на* $[a,\,b]$;

3) *для любого натурального* $m > m_0$ *существует множество* $B_m \subset \subset [a,\,b]$, *на котором* $|x_{n_k}(t)| < 1/2^k$ *при всех* $k \geqslant m$, *причем* $|[a,\,b]\backslash B_m| < < 1/2^m$ *и* $B_m \subset B_{m+1}$.

Доказательство. Так как по условию $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t)|\,dt = 0$, то найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ для членов которой справедливы неравенства

$$\int_a^b |x_{n_k}(t)|\,dt < \frac{1}{2^{5k}}. \tag{1}$$

Чтобы в дальнейшем избежать двойных индексов, положим $x_{n_k}(t) \equiv \equiv y_k(t)$ и покажем, что для полученной последовательности будут выполнены условия 1), 2) и 3). Для этого воспользуемся теоремой Вейерштрасса (см. [18]) о равномерном приближении многочленами функции, непрерывной на отрезке, и найдем для каждой $y_k(t) \in \tilde{\mathcal{L}}_1[a,\,b]$ многочлен $p_k(t)$ такой, что

$$|y_k(t) - p_k(t)| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} \tag{2}$$

для всех $t \in [a,\,b]$.

Тогда из (1) и (2) получаем

$$\int_a^b |p_k(t)|\,dt \leqslant \int_a^b |y_k(t)|\,dt + \int_a^b |p_k(t) - y_k(t)|\,dt <$$

$$< \frac{1}{2^{5k}} + \frac{b-a}{2^{5k}(b-a+1)} < \frac{1}{2^{4k}}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь множество

$$A_k = \{t \in [a,\, b] : |p_k(t)| \geqslant 1/2^{2k}\}.$$

A_k, очевидно, представляет собой конечную систему неперекрывающихся отрезков и точек, либо пустое множество. Поэтому в любом случае имеет смысл рассматривать интеграл Римана по множеству A_k от $|p_k(t)|$ и, учитывая (3), получим

$$|A_k|\frac{1}{2^{2k}} \leqslant \int\limits_{A_k} |p_k(t)|\,dt \leqslant \int\limits_a^b |p_k(t)|\,dt < \frac{1}{2^{4k}}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что $|A_k| < 1/2^{2k}$, а потому для множества $\widehat{A}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ справедлива оценка

$$|\widehat{A}_m| = \left|\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right| < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4^m}\cdot\frac{4}{3} < \frac{1}{2^m}.$$

Пусть теперь $B_m = [a,\, b]\backslash\widehat{A}_m$; тогда, если $m \geqslant m_0$, то множества B_m не пусты,

$$|\,[a,\, b]\backslash B_m| = |\widehat{A}_m| < 1/2^m, \quad B_m \subset B_{m+1},$$

и для любого $t \in B_m = [a,\, b]\backslash\widehat{A}_m = [a,\, b]\backslash\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=m}^{\infty}\{[a,\, b]\backslash A_k\}$ при $k \geqslant m$ справедливо неравенство

$$|p_k(t)| < 1/2^{2k}. \tag{5}$$

Из (2) и (5) вытекает, во-первых, что

$$|y_k(t)| \leqslant |p_k(t)| + |y_k(t) - p_k(t)| < \frac{1}{2^{5k}(b-a+1)} + \frac{1}{2^{2k}} < \frac{1}{2^k}$$

для всех $t \in B_m$ и $k \geqslant m$ (тем самым 3) доказано), а во-вторых, сходимость на B_m ряда

$$\sum_{k=m}^{\infty} |y_k(t)|, \tag{6}$$

причем равномерная.

Пусть теперь

$$u = \left\{t \in [a,\, b] : \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t)| = +\infty\right\},$$

тогда для любого натурального $m \geqslant m_0$ справедливо вложение $u \subseteq \{[a,\, b]\backslash B_m\}$; поэтому для данного $\varepsilon > 0$, выбирая m так, чтобы $1/2^m < \varepsilon$, получим

$$|u| \leqslant |A_m| < 1/2^m < \varepsilon,$$

т. е. ряд (6) сходится почти всюду, и, следовательно, $\lim_{k\to\infty} y_k(t) \overset{\text{п. в}}{=} 0$. Теорема доказана.

Упражнение 2. Приведите пример $\{x_n(t)\} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1[a,\, b]$, для которой $\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{в ср.}}{=} 0$, но $\{x_n(t)\}$ расходится в каждой точке отрезка $[a,\, b]$.

8.3. Интеграл Лебега и функции, интегрируемые по Лебегу. Теперь докажем ряд теорем, помогающих установить соответствие между некоторыми классами эквивалентных функций и элементами $\widehat{x}(t)$ пространства Лебега $\mathcal{L}[a,\, b]$.

Теорема 1. *Если* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1[a,\, b]$ *и* $\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$, *то найдется подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что*:

1) $\{x_{n_k}(t)\}$ *сходится почти всюду к некоторой функции* $f(t)$, *определенной на отрезке* $[a,\, b]$;

2) *для любого натурального* $m \geqslant m_0$ *существует* $B_m \subset [a,\, b]$, *на котором*

$$|f(t) - x_{n_k}(t)| < 1/2^{k-1} \quad \textit{при всех } k \geqslant m,$$

причем $|\,[a,\, b]\backslash B_m| < 1/2^m$ *и* $B_m \subset B_{m+1}$.

Доказательство. Так как по условию $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в среднем ($\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$), то найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что

$$\int_a^b |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|\, dt < \frac{1}{2^{5k}};$$

тогда, как следует из процесса доказательства теоремы п. 8.2, для последовательности $\{(x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))\}$ справедливы 2) и 3) теоремы п. 8.2, т. е., во-первых, для любого $m \geqslant m_0$ существует $B_m \subset [a,\, b]$, на котором

$$|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)| < 1/2^k \tag{1}$$

при всех $k \geqslant m$, причем

$$|\,[a,\, b]\backslash B_m| < 1/2^m \quad \text{и} \quad B_m \subset B_{m+1},$$

во-вторых, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)|$$

сходится почти всюду. Но тогда почти всюду сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)). \tag{2}$$

Пусть теперь $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t))$ в точках сходимости ряда (2) и равна нулю в остальных точках отрезка $[a,\, b]$. Следовательно,

$$\varphi(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} (x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)) = \lim_{j\to\infty} (x_{n_{j+1}}(t) - x_{n_1}(t)),$$

а $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} \varphi(t) + x_{n_1}(t) = f(t)$. Тем самым доказано 1).

Для того чтобы убедиться в справедливости 2), примем во внимание (1) и заметим, что

$$|f(t) - x_{n_k}(t)| = \left|\varphi(t) + x_{n_1}(t) - \left(x_{n_1}(t) + \sum_{l=1}^{k-1} (x_{n_{j+1}}(t) - x_{n_j}(t))\right)\right| \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} |x_{n_{j+1}}(t) - x_{n_j}(t)| < \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

для всех $t \in B_m$ и $k \geqslant m$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$ *и* $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1[a, b]$, *причем* $\{x_n(t)\} \sim \{y_n(t)\}$ *и* $\lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$, *а* $\lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \varphi(t)$, *то* $f(t) \sim \varphi(t)$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n(t) - y_n(t)|\, dt = 0;$$

тогда, в силу теоремы п. 8.2, существует подпоследовательность $\{(x_{n_k}(t) - y_{n_k}(t))\}$ такая, что $\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}(t) - y_{n_k}(t)) \overset{\text{п.в}}{=} 0$. Сопоставляя это равенство с условиями теоремы, приходим к выводу, что

$$\varphi(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{k\to\infty} y_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t).$$

Теорема 2 доказана.

Из этой теоремы следует важный результат: каждому классу эквивалентных в среднем фундаментальных в среднем последовательностей $\widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ можно поставить в соответствие класс эквивалентных функций $\widehat{f}(t)$ таких, что для любой функции $f(t) \in \widehat{f}(t)$ существует $\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t)$, для которой $f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, причем если $\{y_n(t)\} \in \widehat{x}(t)$ и $\lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \varphi(t)$, то $\varphi(t)$ тоже принадлежит $\widehat{f}(t)$.

Теперь покажем, что если $\widehat{x}_1(t) \neq \widehat{x}_2(t)$, то и соответствующие им классы эквивалентных функций $\widehat{f}_1(t)$ и $\widehat{f}_2(t)$ не равны.

Теорема 3. *Если* $\{p_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *— фундаментальная в среднем последовательность многочленов и* $\lim_{n\to\infty} p_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) \overset{\text{в ср.}}{=} 0. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что существование $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b |p_n(t)|\,dt$ следует из фундаментальности в среднем последовательности $\{p_n(t)\}$. Поэтому достаточно доказать (3) для некоторой подпоследовательности.

Применяя к $\{p_n(t)\}$ теорему 1 этого пункта, найдем подпоследовательность

$$\{p_{n_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{4}$$

для которой выполняются 1) и 2).

Зададимся теперь $\varepsilon > 0$. Так как (4) — тоже фундаментальная в среднем последовательность, то существует натуральное k_0 такое, что для любых натуральных $k \geqslant k_0$ и $m \geqslant k_0$ справедливо

$$\int\limits_a^b |p_{n_k}(t) - p_{n_m}(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Положим

$$Q = \max_{\substack{t\in[a,\, b]\\ 1\leqslant k\leqslant k_0}} |p_{n_k}(t)|;$$

тогда для конечной системы отрезков A с размерами

$$|A| < \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3Q},\ \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right\}$$

справедлива оценка

$$\int\limits_A |p_{n_k}(t)|\,dt < Q\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

при $1 \leqslant k \leqslant k_0$.

Если же $k > k_0$, то, принимая во внимание (5) и (6), получим

$$\int\limits_A |p_{n_k}(t)|\,dt \leqslant \int\limits_A |p_{n_{k_0}}(t)|\,dt + \int\limits_A |p_{n_{k_0}}(t) - p_{n_k}(t)|\,dt < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Таким образом (см. (6) и (7)),

$$\int\limits_A |p_{n_k}(t)|\,dt < \frac{2\varepsilon}{3} \tag{8}$$

для любого $k \geqslant 1$ и конечной системы отрезков A с $|A| < \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3Q},\ \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right\}$. Поскольку для (4) справедливо 1), то $\lim\limits_{k\to\infty} p_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} p_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} 0$, а, в силу 2), для любого $m \geqslant m_0$ существует $B_m \subset [a,\, b]$, на котором $|p_{n_k}(t)| < 1/2^{k-1}$ при всех $k \geqslant m$, причем $|\,[a,\, b]\backslash B_m| < 1/2^m$.

Пусть теперь i — натуральное число, $i \geqslant m_0$, и $1/2^{i-1} < \delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, тогда при $t \in B_i$ и $k \geqslant i$ справедливо неравенство

$$|p_{n_k}(t)| < \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{9}$$

Обозначим, далее,

$$A_k = \left\{ t \in [a,\, b] : |p_{n_k}(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right\}, \tag{10}$$

$$D_k = \left\{ t \in [a,\, b] : |p_{n_k}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right\}. \tag{11}$$

Как мы уже отмечали ранее, каждое из множеств A_k и D_k либо пусто, либо является конечной системой неперекрывающихся отрезков и точек. Кроме того, $A_k \cup D_k = [a,\, b]$, а $A_k \cap D_k$ состоит из конечного числа точек или пусто. Из сказанного следует, что в любом случае можно рассматривать интеграл (Римана) по этим множествам, причем (см. (9)) $A_k \subset [a,\, b]\backslash B_i$ при $k \geqslant i$ и, значит,

$$|A_k| \leqslant |\,[a,\, b]\backslash B_i| < 1/2^i < 1/2^{i-1} < \delta. \tag{12}$$

Наконец, учитывая (8), (10), (11) и (12), получим

$$\int\limits_a^b |p_{n_k}(t)|\, dt = \int\limits_{A_k} |p_{n_k}(t)|\, dt + \int\limits_{D_k} |p_{n_k}(t)|\, dt <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \int\limits_{D_k} \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\, dt \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \int\limits_a^b \frac{\varepsilon\, dt}{3(b-a)} = \varepsilon$$

для любого $k \geqslant i$, что и доказывает теорему 3.

Упражнение 1. Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса, доказать, что любой класс $\widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$ содержит фундаментальную в среднем последовательность многочленов.

Теорема 4. *Если* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{L}}_1[a,\, b]$ *и* $\{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{L}}_{11}[a,\, b]$, *причем обе эти последовательности фундаментальны в среднем и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$, *то* $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$, а $\{y_n(t)\} \in \widehat{y} \in \mathcal{L}[a,\, b]$; тогда существуют фундаментальные в среднем последовательности многочленов $\{p_n(t)\} \in \widehat{x}(t)$ и $\{q_n(t)\} \in \widehat{y}(t)$, которые, в силу теоремы 1, можно считать сходящимися почти всюду. Применяя к этим последовательностям теорему 2, получим

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} q_n(t).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n(t) - q_n(t)) \overset{\text{п.в}}{=} 0$ и (см. теорему 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b |p_n(t) - q_n(t)|\,dt = 0$, т. е. $\{p_n(t)\} \sim \{q_n(t)\}$, и, значит, $\widehat{x}(t) = \widehat{y}(t)$, а $\{x_n(t)\} \sim \{y_n(t)\}$. Теорема доказана.

Упражнение 2. Доказать, что если последовательности $\{x_n(t)\}$ и $\{y_n(t)\}$ удовлетворяют требованиям теоремы 4, то существуют и равны пределы

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b x_n(t)\,dt \text{ и } \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b y_n(t)\,dt.$$

Теперь можно дать корректное определение интеграла и описать класс функций, интегрируемых по Лебегу.

Определение. Функция $f(t)$ называется интегрируемой по Лебегу на отрезке $[a,\, b]$, если существует фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$; тогда *интегралом Лебега* на $[a,\, b]$ от функции $f(t)$ называется $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b x_n(t)\,dt$.

Будем обозначать его $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Итак, по определению,

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b x_n(t)\,dt.$$

Заметим, во-первых, что данное определение интеграла не зависит от последовательности $\{x_n(t)\}$, а зависит только от класса $\widehat{x}(t)$, которому эта последовательность принадлежит.

Во-вторых, как следует непосредственно из определения, если $f(t)$ интегрируема по Лебегу, то и $\varphi(t) \sim f(t)$ интегрируема, причем $(\mathcal{L})\int_a^b f(t)\,dt = (\mathcal{L})\int_a^b \varphi(t)\,dt$.

В-третьих, из теоремы 4 вытекает, что установленное ранее соответствие между элементами $\widehat{x}(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$ и классами $\widehat{f}(t)$ эквивалентных (интегрируемых по Лебегу) функций является взаимно однозначным.

Упражнение 3. Докажите, что если $\widehat{f_1}(t)$ соответствует $\widehat{x}_1(t)$, а $\widehat{f_2}(t)$ соответствует $\widehat{x}_2(t)$, то $\widehat{f_1}(t) + \widehat{f_2}(t)$ соответствует $\widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t)$, а $\lambda\widehat{f_1}(t)$ соответствует $\lambda\widehat{x}_1(t)$, где λ — произвольное число.

Таким образом, $\widehat{f}(t)$ — классы эквивалентных функций, интегрируемых по Лебегу, — можно рассматривать как элементы банахова пространства $\mathcal{L}[a, b]$, причем каждому $\widehat{f}(t)$ можно поставить в соответствие число $\int\limits_a^b \widehat{f}(t)\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt$, где $\widehat{f}(t) \ni f(t)$ — функция, интегрируемая по Лебегу.

Однако, в дальнейшем мы для простоты будем пользоваться не классами $\widehat{f}(t)$, а обычными функциями $f(t)$, являющимися «представителями» соответствующих классов, т. е. $f(t) \in \widehat{f}(t)$. Запись $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ будет означать, что функция $f(t)$ принадлежит $\widehat{f}(t)$ — классу эквивалентных интегрируемых функций, соответствующему некоторому $\widehat{x}(t)$ — классу фундаментальных в среднем эквивалентных в среднем последовательностей непрерывных функций, причем существует $\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t)$ такая, что

$$f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t) \quad \text{и} \quad (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b x_n(t)\,dt.$$

8.4. Основные свойства интеграла Лебега и функций, интегрируемых по Лебегу.

1. *Если функция $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то $x(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и*

$$\int\limits_a^b x(t)\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b x(t)\,dt.$$

2. *Если $f_1(t)$ и $f_2(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, то $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и*

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t))\,dt = \alpha(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_1(t)\,dt + \beta(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_2(t)\,dt,$$

где α и β — произвольные числа.

Упражнение 1. Докажите свойства 1 и 2.

3. *Если $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, то $|f(t)| \in \mathcal{L}[a, b]$ и*

$$\left|(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Доказательство. Из $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ следует, что существует фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$, но тогда последовательность $\{|x_n(t)|\}$ тоже фундаментальна в среднем, так как

$$\int\limits_a^b \Big||x_n(t)| - |x_m(t)|\Big|\,dt \leqslant \int\limits_a^b |x_n(t) - x_m(t)|\,dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n(t)| \overset{\text{п.в}}{=} |f(t)|, \quad \text{т. е.} \quad |f(t)| \in \mathcal{L}[a, b].$$

Далее, $\left|\int\limits_a^b x_n(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt$, следовательно,

$$\left|(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_a^b x_n(t)\,dt\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Свойство 3 доказано.

4. *Если $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и $f(t) \geqslant 0$, то* $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

Доказательство. Так как $f(t) \geqslant 0$, то $f(t) = |f(t)|$ и

$$0 \leqslant \left|(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b |f(t)|\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt$$

(если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ интегрируемы по Лебегу и $f_1(t) \sim f_2(t)$, то их интегралы равны, тем более они равны, если равны функции).

Упражнение 2. Докажите, что если $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и $f(t) \geqslant 0$ почти всюду, то $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.

5. *Если $f_1(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, $f_2(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и $f_1(t) \geqslant f_2(t)$ почти всюду, то*

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_1(t)\,dt \geqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b f_2(t)\,dt.$$

6. *Если $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и почти всюду $m \leqslant f(t) \leqslant M$, где m, M — некоторые числа, то*

$$m(b-a) \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a).$$

Упражнение 3. Докажите свойства 5 и 6.

7. *Если $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, $f(t) \geqslant 0$ и* $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = 0$, *то* $f(t) \sim 0$.

Доказательство. Пусть $\{x_n(t)\}$ — фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций и $f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$. Тогда, рассуждая, как и при доказательстве свойства 3, получим

$$0 = (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b |f(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt,$$

но $f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} |x_n(t)|$, поэтому, по теореме п. 8.2, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n(t)| \overset{\text{п.в}}{=} 0$, т. е. $f(t) \sim 0$, и свойство (7) доказано.

Если дана функция $f(t)$, определенная на отрезке $[a,\, b]$, то обозначим

$$f^+(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } f(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(t) < 0, \end{cases}$$

$$f^-(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(t) > 0, \\ -f(t), & \text{если } f(t) \leqslant 0, \end{cases}$$

Упражнение 4. Докажите, что

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t), \qquad |f(t)| = f^+(t) + f^-(t),$$

$$f^+(t) = \frac{f(t) + |f(t)|}{2}, \qquad f^-(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2}.$$

Упражнение 5. Докажите, что

$$\max\{f(t);\, g(t)\} = (f(t) - g(t))^+ + g(t),$$

$$\min\{f(t);\, g(t)\} = -\max\{-f(t);\, -g(t)\}.$$

8. *Если* $f(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$, *то* $f^+(t)$ *и* $f^-(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$.

9. *Если* $f_1(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ *и* $f_2(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, *то* $\max\{f_1(t);\, f_2(t)\}$ *и* $\min\{f_1(t);\, f_2(t)\} \in \mathcal{L}[a,\, b]$.

Упражнение 6. Докажите свойства 8 и 9.

10. *Если* $|f(t)| \in \mathcal{L}[a,\, b]$ *и существует последовательность непрерывных функций* $\{x_n(t)\}$ *такая, что* $f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t)$, *то* $f(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$.

Мы обратимся к доказательству свойства 10 в следующем пункте, когда предварительно докажем ряд важных теорем.

8.5. Свойства интеграла Лебега, связанные с предельным переходом. Напомним, что $\mathcal{L}[a,\, b]$ — нормированное пространство, причем если $\widehat{x} \in \mathcal{L}[a,\, b]$, то

$$\|\widehat{x}(t)\|_{\mathcal{L}[a,\, b]} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt,$$

где $\{x_n(t)\}$ — фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций и $\{x_n(t)\} \in \widehat{x}(t)$. Тогда естественно считать, что если $\widehat{f}(t)$ — класс эквивалентных функций, интегрируемых по Лебегу, соответствующий $\widehat{x}(t)$, то

$$\|\widehat{f}(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = \|\widehat{x}(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]},$$

где

$$\|\widehat{x}(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt.$$

Упражнение 1. Докажите, что если $f(t) \in \widehat{f}(t)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b |x_n(t)|\,dt = (\mathcal{L}) \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Таким образом,

$$\|\widehat{f}(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = (\mathcal{L}) \int\limits_a^b |f(t)|\,dt,$$

где $f(t) \in \widehat{f}(t)$. Будем также писать, что в этом случае

$$\|f(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = \|\widehat{f}(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = (\mathcal{L}) \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Определение. Последовательность интегрируемых по Лебегу функций $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть *фундаментальной в среднем*, если она фундаментальна по норме пространства $\mathcal{L}[a,\,b]$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что для любых $m > N$ и $n > N$ справедливо неравенство

$$\|f_n(t) - f_m(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = (\mathcal{L}) \int\limits_a^b |f_n(t) - f_m(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Однако пространство $\mathcal{L}[a,\,b]$ является полным; поэтому для любой фундаментальной последовательности $\{f_n(t)\}$ найдется функция $f(t) \in \mathcal{L}[a,\,b]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{L}) \int\limits_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt = 0.$$

В таком случае мы будем говорить, что последовательность $\{f_n(t)\}$ сходится к $f(t)$ в среднем или по норме, и писать

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \overset{\text{в ср.}}{=} f(t).$$

Теперь мы докажем теорему, аналогичную теореме 1 п. 8.3.

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \overset{\text{в ср.}}{=} f(t)$, *то существует подпоследовательность* $\{f_{n_k}(t)\}$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$.

Доказательство. Каждой функции $f_n(t)$ соответствует класс $\widehat{x}_n(t)$ фундаментальных в среднем последовательностей непрерывных функций, в который обязательно входит последовательность многочленов, из которой можно выбрать такой многочлен $p_n(t)$ (см. теорему 1 п. 8.3), что

1) $(\mathcal{L})\displaystyle\int_a^b |f_n(t) - p_n(t)|\,dt < \frac{1}{2^{2n+1}}$;

2) $|f_n(t) - p_n(t)| < 1/2^{n-1}$ на множестве B_n, для которого $|\,[a,\,b]\backslash B_n| < 1/2^n$.

Так как $\{f_n(t)\}$ фундаментальна в среднем, то для данного $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что для любых $m > N$ и $n > N$ справедливо неравенство

$$(\mathcal{L})\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3};$$

если, кроме того, $1/2^{2N+1} < \varepsilon/3$, то

$$\int_a^b |p_n(t) - p_m(t)|\,dt = (\mathcal{L})\int_a^b |p_n(t) - p_m(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant (\mathcal{L})\int_a^b |f_n(t) - p_n(t)|\,dt + (\mathcal{L})\int_a^b |f_m(t) - p_m(t)|\,dt +$$
$$+ (\mathcal{L})\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|\,dt < \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

т. е. $\{p_n(t)\}$ — фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций.

Упражнение 2. Докажите, что $\{p_n(t)\}$ входит в класс фундаментальных последовательностей $\widehat{x}(t)$, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widehat{x}(t) - \widehat{x}_n(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = 0$, и, следовательно, $f(t)$ — интегрируемая функция, входящая в класс $\widehat{f}(t)$, соответствующий $\widehat{x}(t)$. Отсюда вытекает, что существует подпоследовательность $\{p_{n_i}(t)\}$, которая почти всюду сходится к $f(t)$. Покажем, что и $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$.

В самом деле, обозначим $B = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} B_{n_i}$; тогда $\{\,[a,\,b]\backslash B\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}\{\,[a,\,b]\backslash B_{n_i}\}$ и, следовательно,

$$|\,[a,\,b]\backslash B| < \sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2^{n_i}} \leqslant \frac{1}{2^{n_k-1}} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Так как это неравенство верно для любого k, то $[a,\,b]\backslash B$ — множество меры нуль. Пусть теперь $t\in B$ и задано $\varepsilon>0$; тогда существует целое N такое, что

$$1)\ \frac{1}{2^{n_N-1}} < \varepsilon; \qquad 2)\ t \in \bigcap_{i=N}^{\infty} B_{n_i}.$$

Следовательно, при $i \geqslant N$ получим

$$|f_{n_i}(t) - p_{n_i}(t)| < \frac{1}{2^{n_i-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n_N-1}} < \varepsilon.$$

Тем самым показано, что

$$\lim_{i\to\infty}(f_{n_i}(t) - p_{n_i}(t)) \overset{\text{п.в}}{=} 0,$$

$$f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{i\to\infty} p_{n_i}(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(t).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Если* $\{f_n(t)\}\subset\mathcal{L}[a,\,b]$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int_a^b |f_n(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}\|f_n(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = 0,$$

то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(t)\}$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} 0$ *(аналог теоремы п. 8.2).*

Доказательство. Начнем со следующего упражнения.

Упражнение 3. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(t)\|_{\mathcal{L}[a,\,b]} = 0$, то $\{|f_n(t)|\}$ фундаментальна в среднем.

По доказанной теореме существует подпоследовательность $\{|f_{n_k}(t)|\}$, которая почти всюду сходится к некоторой $f(t)\in\mathcal{L}[a,\,b]$, причем

$$\lim_{k\to\infty}(\mathcal{L})\int_a^b |f(t) - |f_{n_k}(t)|\,|\,dt = \lim_{k\to\infty}(\mathcal{L})\int_a^b |\,|f(t)| - f_{n_k}(t)|\,dt = 0.$$

Упражнение 4. Докажите, что в этом случае

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(t)|\,dt.$$

Таким образом, с одной стороны, очевидно, $f(t) \geqslant 0$ почти всюду, с другой стороны, $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = 0$; поэтому, в силу свойства интеграла Лебега 7 п. 8.4, $f(t) \overset{\text{п.в}}{=} 0$.

Теорема 2 (Беппо–Леви). *Если* $\{f_n(t)\} \subset \mathcal{L}[a, b]$, *последовательность* $\{f_n(t)\}$ *не убывает и интегралы* $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt \leqslant K$, *где* K — *некоторое число, не зависящее от* n, *то*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t) \in \mathcal{L}[a, b] \ \text{ и } \ (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt.$$

Доказательство. Из свойства 5 п. 8.4 интеграла Лебега и условий теоремы следует, что последовательность $\left\{(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt\right\}$ монотонна и ограничена, а потому имеет предел.

Упражнение 5. Докажите, что последовательность $\{f_n(t)\}$ фундаментальна в среднем.

По теореме 1 существует подпоследовательность $\{f_{n_k}(t)\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$.

Упражнение 6. Докажите, что

$$f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(t) \ \text{ и } \ (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt.$$

Упражнение 7. Докажите, что теорема 2 справедлива и в том случае, когда последовательность $\{f_n(t)\}$ не возрастает и

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt \geqslant K.$$

Теорема 3. *Если* $\{f_n(t)\} \subset \mathcal{L}[a, b]$ *и* $|f_n(t)| \leqslant F(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, *то* $\sup_n f_n(t) = f_1^*(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ *и* $\inf_n f_n(t) = f_2^*(t) \in \mathcal{L}[a, b]$.

Доказательство. $\varphi_n(t) = \max\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\} \in \mathcal{L}[a, b]$ в силу свойства 9 п. 8.4. Осталось заметить, что для последовательности $\{\varphi_n(t)\}$ выполнены требования теоремы 2: $\{\varphi_n(t)\}$ не убывает и $(\mathcal{L})\int\limits_a^b \varphi_n(t)\,dt \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b F(t)\,dt$, поэтому

$$\sup_n f_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = f_1^*(t) \in \mathcal{L}[a, b].$$

Упражнение 8. Докажите, что $\inf_n f_n(t) = f_2^*(t) \in \mathcal{L}[a, b]$.

Теорема 4 (Лебега). *Если* $\{f_n(t)\} \subset \mathcal{L}[a, b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$ *и* $|f_n(t)| \leqslant F(t) \in \mathcal{L}[a, b]$, *то* $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ *и* $(\mathcal{L})\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt$.

Доказательство. Пусть $\varphi_n(t) = \inf\{f_n(t), f_{n+1}(t), \ldots\}$; тогда:

1) $\{\varphi_n(t)\}$ не убывает;

2) $\varphi_n(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ вследствие теоремы 3;

3) $\varphi_n(t) \leqslant f_n(t)$;

4) $|\varphi_n(t)| \leqslant F(t) \in \mathcal{L}[a, b]$.

Аналогичными свойствами будет обладать и последовательность $\psi_n(t) = \sup\{f_n(t), f_{n+1}(t), \ldots\}$, а именно:

1) $\{\psi_n(t)\}$ не возрастает;

2) $\psi_n(t) \in \mathcal{L}[a, b]$;

3) $f_n(t) \leqslant \psi_n(t)$;

4) $|\psi_n(t)| \leqslant F(t) \in \mathcal{L}[a, b]$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0)$; тогда для данного $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что при $n > N$ справедливо неравенство

$$f(t_0) - \varepsilon < f_n(t_0) < f(t_0) + \varepsilon,$$

а вместе с ним и соответствующие неравенства для $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$:

$$f(t_0) - \varepsilon \leqslant \psi_n(t) = \sup_{k\geqslant n>N} f_k(t) \leqslant f(t_0) + \varepsilon,$$

$$f(t_0) - \varepsilon \leqslant \varphi_n(t) = \inf_{k\geqslant n\geqslant N} f_k(t) \leqslant f(t_0) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} \psi_n(t),$$

но тогда по теореме 2

$$f(t) \in \mathcal{L}[a, b],$$

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b \varphi_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b \psi_n(t)\,dt.$$

Наконец заметим, что

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b \varphi_n(t)\,dt \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b \psi_n(t)\,dt,$$

а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt.$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Теперь займемся доказательством свойства 10 интеграла Лебега (см. п. 8.4).

Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & \text{если} \quad |x_n(t)| \leqslant |f(t)|, \\ |f(t)|, & \text{если} \quad x_n(t) > |f(t)|, \\ -|f(t)|, & \text{если} \quad x_n(t) < -|f(t)|. \end{cases}$$

Очевидно, что $|\varphi_n(t)| \leqslant |f(t)| \in \mathcal{L}[a,\, b]$.

Упражнение 9. Доказать, что

$$\varphi_n(t) = \max\{-|x_n(t)|,\ \min\{x_n(t),\ |f(t)|\}\},$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t).$$

Так как $\{\varphi_n(t)\} \subset \mathcal{L}[a,\, b]$, то, применяя к этой последовательности теорему 4, получим, что $f(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$.

В заключение этого пункта докажем теорему, часто встречающуюся в приложениях.

Теорема 5 (Фату). *Если* $\{f_n(t)\} \subset \mathcal{L}[a,\, b]$, $f_n(t) \geqslant 0$, $f(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ *и* $(\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt \leqslant k$, *где* k — *некоторое число, то* $f(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$ *и*

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt \leqslant k.$$

Доказательство. Положим снова

$$\varphi_n(t) = \inf\{f_n(t),\ f_{n+1}(t),\ \ldots\};$$

тогда $\varphi_n(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$ и, как мы установили в процессе доказательства теоремы 4, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$.

Поскольку $\varphi_n(t) \leqslant f_n(t)$, то

$$(\mathcal{L})\int\limits_a^b \varphi_n(t)\,dt \leqslant (\mathcal{L})\int\limits_a^b f_n(t)\,dt \leqslant k,$$

и осталось применить к неубывающей последовательности $\{\varphi_n(t)\}$ теорему 2:

$$f(t) \in \mathcal{L}[a,\,b], \qquad (\mathcal{L})\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b \varphi_n(t)\,dt \leqslant k.$$

8.6. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(t)$ интегрируема по Лебегу на $[a,\,b]$. Рассмотрим ее интеграл Лебега с переменным верхним пределом

$$y(t) = \int\limits_a^t f(s)\,ds, \qquad t \in (a,\,b]. \tag{1}$$

Если $f(t)$ представить в виде разности двух неотрицательных функций $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$, то $y(t) = \int\limits_a^t f_+(s)\,ds - \int\limits_a^b f_-(s)\,ds$, причем каждый из этих интегралов является возрастающей функцией t на $[a,\,b]$.

Воспользуемся теперь следующей теоремой Лебега (доказательство см. [18], гл. VI).

Теорема 1. *Всякая монотонная на отрезке функция имеет на нем почти всюду конечную производную.*

Из этой теоремы вытекает следующее предложение.

Теорема 2. *Интеграл с переменным верхним пределом* (1) *имеет на* $[a,\,b]$ *почти всюду конечную производную, причем*

$$\dot{y}(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$$

8.7. Интеграл Римана и интеграл Лебега. Ранее мы отметили (см. свойство 1 п. 8.4), что если $x(t)$ непрерывна на $[a,\,b]$, то $x(t) \in \mathcal{L}[a,\,b]$ и

$$\int\limits_a^b x(t)\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b x(t)\,dt.$$

Теперь мы докажем более общее утверждение.

Теорема. *Если $f(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и по Лебегу на этом отрезке и*

$$\int_a^b f(t)\,dt = (\mathcal{L})\int_a^b f(t)\,dt.$$

Доказательство. В п. 7.3 рассматривался пример функции, имеющей конечное число точек разрыва 1-го рода. Для этой функции была построена фундаментальная в среднем последовательность непрерывных функций $\{x_n(t)\}$.

Упражнение. Доказать, что

$$x(t) \overset{\text{п.в}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n(t), \qquad x(t) \in \mathcal{L}[a, b],$$

$$(\mathcal{L})\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt.$$

Но в п. 7.3 доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |x(t) - x_n(t)|\,dt = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt,$$

так как

$$\left|\int_a^b x(t)\,dt - \int_a^b x_n(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |x(t) - x_n(t)|\,dt.$$

Таким образом, если $x(t)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го рода, то она интегрируема по Риману и по Лебегу, причем

$$\int_a^b x(t)\,dt = (\mathcal{L})\int_a^b x(t)\,dt.$$

Пусть теперь $f(t)$ — произвольная функция, интегрируемая по Риману на $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и построим ступенчатые функции, соответствующие верхним и нижним суммам Дарбу:

$$\text{на интервалах} \quad \left(a + \frac{(b-a)(k-1)}{n};\ a + \frac{(b-a)k}{n}\right) = (\alpha_k;\ \beta_k)$$

$$M_n(t) = \sup_{[\alpha_k,\,\beta_k]} f(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

(на концах интервалов определим значение функции $M_n(t)$ как максимум из двух односторонних пределов). Аналогично определим $m_n(t)$:

$$m_n(t) = \inf_{[\alpha_k,\,\beta_k]} f(t), \ \text{ если } \ t \in (\alpha_k,\, \beta_k), \ 1 \leqslant k \leqslant n$$

(на концах интервалов значение $m_n(t)$ положим равным минимуму из двух односторонних пределов).

Тогда верхняя сумма Дарбу функции $f(t)$, соответствующая данному разбиению, $S_n^{(D)}(f) = \int\limits_a^b M_n(t)\,dt$, а нижняя сума Дарбу $s_n^{(D)}(f) = \int\limits_a^b m_n(t)\,dt$. Так как по условию функция $f(t)$ интегрируема по Риману, то

$$\lim_{n\to\infty}(S_n^{(D)}(f) - s_n^{(D)}(f)) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (M_n(t) - m_n(t))\,dt = 0. \tag{1}$$

Поскольку $M_n(t)$ и $m_n(t)$ имеют конечное число точек разрыва 1-го рода, то по доказанному выше $M_n(t), m_n(t) \in \mathcal{L}[a,\, b]$ и

$$\int\limits_a^b (M_n(t) - m_n(t))\,dt = (\mathcal{L})\int\limits_a^b (M_n(t) - m_n(t))\,dt. \tag{2}$$

Далее заметим, что, очевидно,

$$M_n(t) \geqslant f(t) \geqslant m_n(t), \tag{3}$$

и, принимая во внимание (1)–(3), получим

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b |M_n(t) - m_n(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int\limits_a^b (M_n(t) - m_n(t)) = 0.$$

В силу следствия теоремы 1 п. 8.5 существует подпоследовательность $\{(M_{n_k}(t) - m_{n_k}(t))\}$, которая почти всюду сходится к нулю, но из (3) вытекает, что $M_{n_k}(t) - m_{n_k}(t) \geqslant f(t) - m_{n_k}(t) \geqslant 0$, а потому $\lim\limits_{k\to\infty} m_{n_k}(t) \overset{\text{п.в}}{=} f(t)$.

По условию функция $f(t)$ интегрируема по Риману и, значит, ограничена, т. е. $|f(t)| \leqslant K$, где K — некоторое число, но тогда и $|m_{n_k}| \leqslant K$.

Применяя теорему 4 п. 2.5 к $\{m_{n_k}(t)\}$, получим, что $f(t) \in \mathcal{L}[a, b]$ и

$$(\mathcal{L})\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty}(\mathcal{L})\int_a^b m_{n_k}(t)\,dt =$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b m_{n_k}(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} s_{n_k}^{(D)}(f) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что класс функций, интегрируемых по Лебегу, не совпадает с классом функций, интегрируемых по Риману, а шире его. Например, функция Дирихле не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу, так как $D(t) \sim 0$.

§ 9. Пространства Соболева

9.1. Общее определение. Пусть в $\mathbf{R}^m$ задана замкнутая ограниченная область $\bar{G}$. Рассмотрим линейное пространство (для простоты вещественное) функций $u(x)$, $u : \bar{G} \to \mathbf{R}^1$, l раз непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$. Дифференцируемость на замкнутой области $\bar{G}$ можно понимать в различных смыслах. Мы будем предполагать, что в G функции $u(x)$ l раз непрерывно дифференцируемы, причем каждая частная производная функции u имеет предел при стремлении x к любой граничной точке области G, так что в результате ее продолжения на $\bar{G}$ она становится непрерывной в $\bar{G}$. Граница Γ области G предполагается достаточно гладкой. Кроме того, обычно мы будем считать область G односвязной и удовлетворяющей таким дополнительным ограничениям, которые могут понадобиться в тех или иных рассуждениях.

Введем в рассмотренном выше линейном пространстве норму $(p \geqslant 1)$

$$||u|| = \left\{\int_{\bar{G}} |u(x)|^p dx + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\int_{\bar{G}} |D^\alpha u|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{1}$$

Упражнение 1. Проверьте аксиомы нормы. Полученное нормированное пространство обозначается $\widetilde{W}_p^l(\bar{G})$. Его пополнение в норме (1) обозначается $W_p^l(G)$ и называется пространством Соболева.

В прикладных задачах довольно часто встречается случай $p = 2$. Общепринято следующее обозначение: $W_2^l(G) = H^l(G)$. Пространство Соболева $H^l(G)$ является гильбертовым пространством — пополнением пространства $\widetilde{W}_p^l(\bar{G})$ в норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\bar{G}} u(x)\,v(x)\,dx + \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant l}\int_{\bar{G}} D^\alpha u(x)\,D^\alpha v(x)\,dx.$$

Упражнение 2. Проверьте аксиомы скалярного произведения.

Пространства Соболева $W_p^l(G)$ и тесно связанное с ними понятие обобщенной производной в смысле Соболева были введены в математическую практику академиком С. Л. Соболевым и играют важнейшую роль в теоретических и прикладных вопросах математической физики и функционального анализа. Пополнение пространства гладких функций $\widetilde{W}_p^l(\bar{G})$ некоторыми идеальными элементами, которые можно с любой степенью точности вычислить с помощью элементов из $\widetilde{W}_p^l(\bar{G})$, приводит, с одной стороны, вследствие полноты $W_p^l(G)$ к точности и завершенности многих математических утверждений, а с другой стороны сохраняет все вычислительные возможности (см.[27,39]).

Ниже мы подробнее остановимся на частных случаях $m = 1$ и $m = 3$, т. е. рассмотрим соболевские пространства на вещественной оси и в трехмерном пространстве.

9.2. Пространство $\boldsymbol{H^1(a,\, b)}$. Рассмотрим на $[a,\, b]$ пространство $\widetilde{H}^1[a,\, b]$, состоящее из всевозможных функций $u(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,\, b]$, со скалярным произведением

$$(u,\, v) = \int\limits_a^b u(x)\, v(x)\, dx + \int\limits_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx \tag{1}$$

и соответствующей этому скалярному произведению нормой

$$\|u\| = \left(\int\limits_a^b u^2(x)\, dx + \int\limits_a^b {u'}^2(x)\, dx \right)^{1/2}. \tag{2}$$

$H^1(a,\, b)$ является пополнением $\widetilde{H}^1[a,\, b]$ в этой норме. Из каких же функций состоит $H^1(a,\, b)$? Элементами $H^1(a,\, b)$, согласно теореме о пополнении, являются классы, состоящие из последовательностей $\{u_n(x)\} \subset \widetilde{H}^1[a,\, b]$, фундаментальных в $\widetilde{H}^1[a,\, b]$ в среднем, точнее, таких, что

$$\int\limits_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2\, dx + \int\limits_a^b |u_n'(x) - u_m'(x)|^2\, dx \to 0$$

при $n,\ m \to \infty$. Две такие последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{\widehat{u}_n(x)\}$ принадлежат одному классу, если $\{\widehat{u}_n(x) - u_n(x)\}$ является бесконечно малой по норме $\widetilde{H}^1[a,\, b]$, т. е. если

$$\int\limits_a^b |u_n(x) - \widehat{u}_n(x)|^2\, dx + \int\limits_a^b |u_n'(x) - \widehat{u}_n'(x)|^2\, dx \to 0$$

при $n \to \infty$. Из условия фундаментальности в среднем $\{u_n(x)\}$ в $\widetilde{H}^1[a,\, b]$ следует, что отдельно при $n,\ m \to \infty$

$$\int\limits_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2\, dx \to 0, \qquad \int\limits_a^b |u'_n(x) - u'_m(x)|^2\, dx \to 0.$$

Аналогично, из условия эквивалентности $\{u_n(x)\}$ и $\{\widehat{u}_n(x)\}$ по норме $\widetilde{H}^1[a,\, b]$ следует, что при $n \to \infty$

$$\int\limits_a^b |u_n(x) - \widehat{u}_n(x)|^2\, dx \to 0, \qquad \int\limits_a^b |u'_n(x) - \widehat{u}'_n(x)|^2\, dx \to 0.$$

Согласно определению пространства $\mathcal{L}_2(a,\, b)$ существуют функции $u(x) \in \mathcal{L}_2(a,\, b)$ и $w(x) \in \mathcal{L}_2(a,\, b)$ такие, что при $n \to \infty$ $u_n(x) \to$ $\to u(x)$, а $u'_n(x) \to w(x)$ в среднем.

Мы приходим к следующему важнейшему определению. Пусть $\{u_n(x)\} \subset$ $\subset \widetilde{H}^1[a,\, b]$. Тогда в $\mathcal{L}[a,\, b]$ определены элемент $u(x)$ с представителем $\{u_n(x)\}$ и элемент $w(x)$ с представителем $\{u'_n(x)\}$. $w(x)$ называется *обобщенной производной* (в смысле Соболева) от $u(x)$. При этом пишут: $w(x) = u'(x)$.

Упражнение. Докажите, что если $u_1(x),\ u_2(x) \in H^1(a,\, b)$, то $\lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) \in H^1(a,\, b)$ и

$$(\lambda u_1 + \lambda u_2)'(x) = \lambda_1 u'_1(x) + \lambda_2 u'_2(x).$$

Докажите, что обобщенная производная постоянной равна нулю.

Из определения обобщенной производной $u'(x)$ видно, что она определяется не локально, в отдельных точках, а глобально — сразу на всем $[a,\, b]$. Пусть $u_n(x),\ v_n(x) \in \widetilde{H}^1[a,\, b]$ $(n = 1,\, 2,\, \ldots)$, так что $\{u_n(x)\} \in u(x) \in$ $\in H^1(a,\, b)$, $\{v_n(x)\} \in v(x) \in H^1(a,\, b)$. Перейдем к пределу при $n \to \infty$ в равенствах

$$(u_n,\, v_n) = \int\limits_a^b u_n(x)\, v_n(x)\, dx + \int\limits_a^b u'_n(x)\, v'_n(x)\, dx, \tag{3}$$

$$\|u_n\| = \left\{ \int\limits_a^b u_n^2(x)\, dx + \int\limits_a^b {u'}_n^2(x)\, dx \right\}^{1/2} \tag{4}$$

и, согласно теореме о пополнении и определению интеграла Лебега, придем к формулам (1), (2), где теперь производные понимаются в обобщенном смысле, а интеграл — в смысле Лебега. Для конкретных вычислений, разумеется, можно и нужно пользоваться формулами (3), (4), взяв достаточно большое n, т. е. вместо идеальных элементов $u,\ v,\ u',\ v'$ пользоваться их гладкими приближениями $u_n,\ v_n,\ u'_n,\ v'_n$.

9.3. Другое определение обобщенной производной. Пусть $\overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ – множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a,\ b]$ финитных функций $v(x)$ (см. п. 3.7). Если теперь $u(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,\ b]$, то для произвольной функции $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ справедливо следующее интегральное тождество:

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = -\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx, \tag{1}$$

проверяемое интегрированием по частям. Этим тождеством производная $u'(x)$ полностью определяется.

Допустим, что, кроме того, для любых $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ и некоторой непрерывной на $[a,\ b]$ функции на $w(x)$

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = -\int_a^b w(x)\, v(x)\, dx. \tag{2}$$

Вычитая эти тождества, получим, что для любых $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$

$$\int_a^b [u'(x) - w(x)]\, v(x)\, dx = 0.$$

Отсюда, вследствие плотности $\overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ в $\tilde{\mathcal{L}}[a,\ b]$ (см. п. 3.7), $w(x) = u'(x)$ на $[a,\ b]$. Оказывается интегральное тождество (2) можно принять за определение обобщенной производной. Прежде всего справедлива следующая лемма.

Лемма 1.*Если* $u \in H^1(a,\ b)$, *то для любых* $v \in \overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ *справедливо тождество* (1).

Доказательство. Пусть $\{u_n(x)\} \in u(x)$, тогда для всех $v \in \overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ имеем (1):

$$\int_a^b u_n(x)\, v'(x)\, dx = -\int_a^b u_n'(x)\, v(x)\, dx.$$

Вследствие свойства непрерывности скалярного произведения (см. п. 4.7) в последнем равенстве можно перейти к пределу при $n \to \infty$. В результате мы получим тождество (1) для любой функции $u \in H^1(a,\ b)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть даны* $u(x) \in H^1(a,\ b)$, $w \in \mathcal{L}_2(a,\ b)$ *такие, что для всех* $v(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1\ [a,\ b]$ *справедливо тождество* (2). *Тогда* $u'(x) = w(x)$ (*обобщенная производная*).

Доказательство. Пусть $\{u_n(x)\} \in u(x)$, а $w_n(x) \in w(x)$. Тогда

$$\int_a^b u_n(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b w_n(x)\,v(x)\,dx = \int_a^b [-u_n'(x) + w_n(x)]\,v(x)\,dx \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого $v \in \overset{\circ}{C}{}^1\,[a,\,b]$.

Пусть $z(x) \in \mathcal{L}_2[a,\,b]$ — класс, представителем которого является $\{-u_n'(x) + w_n(x)\}$. Тогда

$$\int_a^b z(x)\,v(x)\,dx = 0$$

для любых $v \in \overset{\circ}{C}{}^1\,[a,\,b]$. Отсюда $z(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

9.4. Простейшая теорема вложения. Абсолютная непрерывность функций из $H^1(a,\,b)$ (см. п. 9.7).

Теорема 1. *$H^1(a,\,b)$ вложено в $C[a,\,b]$.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,\,b]$. Согласно теореме о среднем (см. [18]), вследствие непрерывности $u(x)$, найдется точка $\xi \in [a,\,b]$ такая, что $u(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int u(s)\,ds$. Поэтому на $[a,\,b]$ справедливо следующее тождество:

$$u(x) = \int_\xi^x u'(s)\,ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b u(s)\,ds.$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского имеем

$$|u(x)| \leqslant \int_a^b |u'(s)|\,ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{b-a}\left(\int_a^b {u'}^2(s)\,ds\right)^{1/2} + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u^2(s)\,ds\right)^{1/2} \leqslant k\|u\|_{\widetilde{W}_2^1[a,\,b]},$$

где $k = \max\,(\sqrt{b-a},\, 1/\sqrt{b-a})$. Следовательно, для любой непрерывной дифференцируемой на $[a,\,b]$ функции $u(x)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{C[a,\,b]} \leqslant k\|u\|_{\widetilde{W}_2^1[a,\,b]}. \tag{1}$$

Пусть теперь последовательность $\{u_n(x)\} \subset \widetilde{W}_2^1[a,\,b]$ — фундаментальная по норме $\widetilde{W}_2^1[a,\,b]$. Тогда

$$\|u_n - u_m\|_{C[a,\,b]} \leqslant k\|u_n - u_m\|_{\widetilde{W}_2^1[a,\,b]} \to 0$$

при $n,\ m \to \infty$. Следовательно, $\{u_n(x)\}$ фундаментальна в смысле равномерной сходимости и, по критерию Коши равномерной сходимости, сходится к $u(x) \in C[a,\,b]$. Тем более $u_n(x) \to u(x),\ n \to \infty$, в среднем. Таким образом, в классе из $\mathcal{L}_2[a,\,b]$, содержащем $\{u_n(x)\}$ в качестве представителя, содержится непрерывная функция $u(x)$, и, значит, этот класс можно отождествить с $u(x)$. Отождествим элементы $H^1(a,\,b)$ с непрерывными функциями. Пусть $\{u_n(x)\} \in u(x)$. Переходя в неравенстве $\|u_n\|_{C[a,\,b]} \leqslant \leqslant k\|u_n\|_{\widetilde{W}_2^1[a,\,b]}$ к пределу при $n \to \infty$, придем к неравенству (1).

Итак, вложение $H^1(a,\,b)$ в $C[a,\,b]$ доказано. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 2.*Для любой функции из $H^1(a,\,b)$ справедлива формула*

$$u(x) = \int\limits_a^x u'(s)\,ds + u(a). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\{u_n(x)\} \in u(x) \in H^1(a,\,b)$. Рассмотрим тождество

$$u_n(x) = \int\limits_a^x u_n'(s)\,ds + u_n(a).$$

Поскольку $u_n(x) \to u(x)$, $u_n(a) \to u(a)$ при $n \to \infty$,

$$\int\limits_a^x u_n'(s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b u'(s)\,ds,$$

где $u'(x) \in \mathcal{L}_2(a,\,b)$ — обобщенная производная функции $u(x)$, то справедлива формула (2).

Теорема доказана.

9.5. Пространства Соболева $H^1(G)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1\,(G)$. Пусть $G \subset \mathbf{R}^3$ — односвязная область с достаточно гладкой границей ∂G. В замкнутой области $\widetilde{G} = G + \partial G$ рассмотрим линейное пространство всевозможных непрерывно дифференцируемых функций $u(x,\,y,\,z)$ со скалярным произведением

$$(u,\,v) = \iiint\limits_{\bar{G}} uv\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} dx\,dy\,dz.$$

При этом

$$\|u\|^2 = \iiint\limits_{\bar{G}} u^2\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

Полученное пространство со скалярным произведением обозначается $\widetilde{H}^1(\bar{G})$, а его пополнение — это, по определению, соболевское пространство $H^1(G)$.

Пусть $\{u_n(x,\, y,\, z)\}$ — фундаментальная последовательность в $\widetilde{H}^1(\bar{G})$, т.е. $\|u_n - u_m\|_{\widetilde{H}^1(\bar{G})} \to 0$ при $n,\ m \to \infty$. Отсюда следует, что в $\mathcal{L}_2(G)$ будут фундаментальными последовательности

$$\{u_n\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}\right\}, \quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}\right\} \text{ и } \left\{\frac{\partial u_n}{\partial z}\right\}.$$

Вследствие полноты $\mathcal{L}_2(\bar{G})$ в $\mathcal{L}_2(\bar{G})$ имеются элементы, которые мы обозначим

$$u(x,\, y,\, z), \quad \frac{\partial u(x,\, y,\, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x,\, y,\, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,\, y,\, z)}{\partial z},$$

так что при $n \to \infty$ в среднем

$$u_n \to u, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} \to \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial z} \to \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Элементы $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial y/\partial z$ называются *обобщенными частными производными* элемента u.

Скалярное произведение и норма задаются в $H^1(G)$ теми же формулами, что и в $\widetilde{H}^1(\bar{G})$, в которых теперь производные обобщенные, а интегрирование понимается в смысле Лебега. Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$. Это пространство является пополнением в норме

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(G)} = \iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dx\, dy\, dz \qquad (2)$$

линейного пространства функций, непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ и таких, что $u|_{\partial G} = 0$. $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,\, v) = \iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Л е м м а. *Если* $u \in H^1(G)$, *а* $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$, *то*

$$(u,\, \partial v/\partial x)_{\mathcal{L}_2(G)} = -(\partial u/\partial x,\, v)_{\mathcal{L}_2(G)},$$
$$(u,\, \partial v/\partial y)_{\mathcal{L}_2(G)} = -(\partial u/\partial y,\, v)_{\mathcal{L}_2(G)},$$
$$(u,\, \partial v/\partial z)_{\mathcal{L}_2(G)} = -(\partial u/\partial x,\, z)_{\mathcal{L}_2(G)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать первую из этих формул. Она, очевидно, справедлива, если $u \in C^1(\bar{G})$, а $v \in \overset{\circ}{C}{}^1(\bar{G})$. Пусть $\{u_n\} \subset \widetilde{H}^1(\bar{G})$ — фундаментальная в $\widetilde{H}^1(\bar{G})$ последовательность, предел которой — элемент $u \in H^1(G)$. Переходя в тождестве $(u_n,\, \partial v/\partial x) = -(\partial u_n/\partial x,\, v), v \in \overset{\circ}{C}{}^1(\bar{G})$, к пределу при $n \to \infty$, получим $(u,\, \partial v/\partial x) = -(\partial u/\partial x,\, v)$ для любой $v \in \overset{\circ}{C}{}^1(\bar{G})$. Действительно, из сходимости в $\mathcal{L}_2(G)$, $u_n \to u$, $n \to \infty$, следует, что $|(u_n, w) - (u, w)| = |(u_n - u, w)| \leqslant \|w\| \, \|u_n - u\| \to 0$, $n \to \infty$, т. е. непрерывность скалярного произведения.

Пусть теперь $\{v_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\widetilde{\overset{\circ}{H}{}^1}(\bar{G})$. Перейдем к пределу в тождестве $(u, \partial v_n/\partial x) = -(\partial u/\partial x, v_n)$ и получим исходное тождество.

Следствие. $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ *содержится строго внутри* $H^1(G)$.

Действительно, функция $1 \in H^1(G)$. Но $1 \notin \overset{\circ}{H}{}^1(G)$, иначе мы имели бы $(u, 0) = -(\partial u/\partial x, 1)$, т. е.

$$\iiint\limits_G \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy\, dz = 0$$

для любой $u \in H^1(G)$. Возьмем $u = x$ и получим противоречие.

Теорема (Фридрихс). *Существует постоянная* $c > 0$ *такая, что для любых* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ $\|u\|_{\mathcal{L}_2(G)} \leqslant c\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(G)}$.

Доказательство. По самому определению $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ всякий элемент из $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ принадлежит $\mathcal{L}_2(G)$. Пусть $\{u_n\} \subset \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ и сходится в $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ к $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$.

Построим куб $Q_a = \{x, y, z : |x| \leqslant a, |y| \leqslant a, |z| \leqslant a\}$, содержащий область $\bar{G}$. Функции u_n доопределим нулем в $Q_a \setminus \bar{G}$. Частная производная $\partial u_n/\partial x$ существует всюду в Q_a, за исключением, быть может, тех точек, в которых прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает границу ∂G области G. Для любой точки $(x, y, z) \in \bar{G}$ имеем

$$u_n(x, y, z) = \int\limits_{-a}^{x} \frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} \, d\xi.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$|u_n(x, y, z)|^2 \leqslant \left(\int\limits_{-a}^{a} \left| \frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right| d\xi \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{-a}^{a} 1 \cdot d\xi \right) \left[\int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u_n(\xi, y, z)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] = 2a \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right)^2 d\xi.$$

Интегрируя полученное неравенство по Q_a, находим

$$\|u_n\|^2_{\mathcal{L}_2(Q_a)} \leqslant 4a^2 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\|^2_{\mathcal{L}_2(Q_a)}.$$

Так как $u_n \equiv 0$ вне $\bar{G}$, то

$$\|u_n\|^2_{\mathcal{L}_2(G)} \leqslant 4a^2 \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\|^2_{\mathcal{L}_2(G)} \leqslant 4a^2 \|u_n\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, приходим к доказываемому неравенству Фридрихса.

Следствие 1. *Пространство* $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ *вложено в* $\mathcal{L}_2(G)$.

Это предложение непосредственно вытекает из определения вложения банаховых пространств и неравенства Фридрихса.

Следствие 2. *В* $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$ *нормы* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Действительно, используя неравенство Фридрихса, имеем

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(G)} \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}_2(G)} + \|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(G)} \leqslant (c+1)\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(G)}.$$

9.6. Пространства $H^{\,l}(G)$. Рассмотрим сначала нормированное пространство $\widetilde{H}^l(\bar{G})$, состоящее из l раз непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ функций $u(x,\,y,\,z)$, с нормой

$$\|u\| = \left\{ \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \iiint\limits_{\bar{G}} (D^\alpha u)^2\,dx\,dy\,dz \right\}^{1/2}.$$

Пополнение $\widetilde{H}^l(\bar{G})$ по этой норме обозначается $H^l(G)$. Пусть дана $\{u_n(x,\,y,\,z)\} \subset \widetilde{H}^l(\bar{G})$, фундаментальная в $\widetilde{H}^l(\bar{G})$, т. е. $\|u_n - u_m\|_{\widetilde{H}^l(\bar{G})} \to 0$ при $n,\,m \to \infty$. Поскольку

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^l(\bar{G})} = \sum_{0 \leqslant \alpha| \leqslant l} \iiint\limits_{\bar{G}} (D^\alpha u)^2\,dx\,dy\,dz,$$

то каждая последовательность $\{D^\alpha u_n\}$ фундаментальна в $\tilde{\mathcal{L}}_2(\bar{G})$ для всякого мультииндекса α такого, что $|\alpha| = 0,\,1,\,\ldots\,,\,l$. В силу полноты пространства $\mathcal{L}_2(G)$ в этом пространстве существуют элементы, которые мы обозначим $D^\alpha u,\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$, так что $D^\alpha u_n \to D^\alpha u,\ n \to \infty$, в среднем. Если $\alpha \neq 0$, то $D^\alpha u$ называется обобщенной частной производной. Пусть $\alpha = (\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_3)$. Тогда

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Пространство $H^l(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^l(G)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{\mathcal{L}_2(G)}.$$

Справедлива следующая теорема вложения С. Л. Соболева.

Теорема. *Пусть $G \subset \mathbf{R}^3$ — односвязная ограниченная область с l раз непрерывно дифференцируемой границей $l \geqslant 2$. Тогда имеет место вложение $H^l(G)$ в $C^{l-2}(\bar{G})$.*

Доказательство основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Если u l раз непрерывно дифференцируема на $\bar{G}$ и $D^\alpha u|_{\partial G} = 0$ для всех α таких, что $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l-1$, то справедлива оценка*

$$\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l-2} \max |D^\alpha u| \leqslant c \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \left(\iiint\limits_{\bar{G}} (D^\alpha u)^2 \, dx\, dy\, dz \right)^{1/2},$$

или, короче,

$$\|u\|_{C^{l-2}(\bar{G})} \leqslant c \|u\|_{\widetilde{H}^l(\bar{G})}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса (см. [21]):

$$\iiint\limits_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \oiint\limits_{\partial \Omega} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma)\, d\sigma.$$

Положим здесь

$$P = u\,\frac{\partial v}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = u\,\frac{\partial v}{\partial y} - v\,\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad R = u\,\frac{\partial v}{\partial z} - v\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

и получим следующую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\bar{\Omega}} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, dx\, dy\, dz = \oiint\limits_{\partial \Omega} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Нам будет удобнее переменные интегрирования обозначить теперь через ξ, η, ζ и применить формулу Грина к области (двусвязной) $\Omega_\varepsilon = G \setminus s_\varepsilon(x, y, z)$. Здесь $(x, y, z) \in G$ — некоторая фиксированная точка, а $s_\varepsilon(x, y, z)$ — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке (x, y, z), где ε настолько мало, что $s_\varepsilon(x, y, z) \subset G$.

Теперь имеем ($\sigma_\varepsilon(x,\,y,\,z)$ — сфера $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varepsilon^2$)

$$\iiint\limits_{\bar\Omega_\varepsilon}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \\ = \oiint\limits_{\partial\Omega}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma - \oiint\limits_{\sigma_\varepsilon(x,\,y,\,z)}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \quad (1)$$

Пусть теперь в этой формуле функция u удовлетворяет условию леммы, а функция v равна

$$v=\frac{1}{4\pi r}, \qquad \text{где } r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Тогда на ∂G $u=0$ и $\partial u/\partial n=0$, и, значит,

$$\oiint\limits_{\partial G}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0.$$

Далее, так как $\Delta\dfrac{1}{r}=0$, то

$$\iiint\limits_{\bar\Omega_\varepsilon}(u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\bar\Omega_\varepsilon}\frac{\Delta u}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Наконец, на $\sigma_\varepsilon(x,\,y,\,z)$ $\dfrac{\partial v}{\partial n}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}=\dfrac{1}{4\pi r^2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon^2}$,

$$v=\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r},$$

и, следовательно,

$$\oiint\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n}-v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oiint\limits_{s_\varepsilon(x,\,y,\,z)}u\,d\sigma-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint\limits_{s_\varepsilon(x,\,y,\,z)}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma= \\ =u(\xi_\varepsilon,\,\eta_\varepsilon,\,\zeta_\varepsilon)-\varepsilon\,\frac{\partial u(\tilde\xi_\varepsilon,\,\tilde\eta_\varepsilon,\,\tilde\zeta_\varepsilon)}{\partial n}=u(x,\,y,\,z)+O(\varepsilon)$$

при $\varepsilon\to 0$. (Площадь $\sigma_\varepsilon(x,\,y,\,z)$ как раз равна $4\pi\varepsilon^2$, поэтому можно воспользоваться теоремой о среднем значении). Таким образом, равенство (1) принимает вид

$$u(x,\,y,\,z)+O(\varepsilon)=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\bar\Omega_\varepsilon}\frac{\Delta u}{r}\,d\xi\,d\eta,\,d\zeta.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем следующее интегральное представление функции u:

$$u(x,\,y,\,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\bar G} \frac{\Delta u}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{2}$$

Интеграл справа несобственный, так как в точке $(x,\,y,\,z)$ функция $1/r$ неограничена, а равенство

$$\iiint\limits_{\bar G} \frac{\Delta u}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\bar G\setminus s_\varepsilon(x,\,y,\,z)} \frac{\Delta u}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

представляет собой определение этого несобственного интеграла.

Упражнение. Покажите, что $\displaystyle\iiint\limits_{\bar G} \frac{w(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{r^\alpha}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ сходится, если $\alpha < 3$. Воспользуйтесь переходом к сферической системе координат.

Из интегрального представления (2) уже нетрудно получить утверждение леммы при $l = 2$. Прежде всего имеем оценку

$$|u| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left\{\left|\left(\frac{1}{r},\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{r},\,\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{r},\,\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right)\right|\right\},$$

где скалярное произведение берется в $\mathcal{L}_2(G)$.

По неравенству Коши–Буняковского (нормы в $\tilde{\mathcal{L}}_2(\bar G)$)

$$|u| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left\|\frac{1}{r}\right\|\left\{\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\|\right\} \leqslant \mathrm{const}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 2}\|D^\alpha u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_2(\bar G)},$$

или, короче,

$$\|u\|_{C(\bar G)} \leqslant C\|u\|_{\widetilde{H}^2(\bar G)}. \tag{3}$$

Пусть теперь $u \in \widetilde{H}^3(G)$ и на ∂G обращаются в нуль вторые производные u. Дифференцируя формулу (2) по x, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\ \Delta u\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r},\ \Delta\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Дифференцирование интеграла в правой части (2) законно, так как сам он сходится равномерно, как и интеграл, полученным формальным дифференцированием по x. Оценивая $\partial u/\partial x$, получаем (нормы в $\tilde{\mathcal{L}}_2(\bar G)$)

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left\|\frac{1}{r}\right\|\left\{\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\| + \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}\right\| + \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}\right\|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{|\alpha|=3}\|D^\alpha u\| \leqslant \mathrm{const}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 3}\|D^\alpha u\|.$$

Аналогично оцениваются $\partial u/\partial y$ и $\partial u/\partial z$. В результате мы приходим к оценке

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{G})} \leqslant \text{const} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 3} \|D^\alpha u\|.$$

Складывая это неравенство с неравенством (3), получим

$$\|u\|_{C^1(\bar{G})} \leqslant c\,\|u\|_{\widetilde{H}(\bar{G})}.$$

Этим же приемом последовательно оценивается норма u в $C^2(\bar{G})$ через ее норму в $\widetilde{H}^4(\bar{G})$, затем норма u в $C^3(\bar{G})$ через ее норму в $\widetilde{H}^5(\bar{G})$ и так далее, пока мы не получим искомую оценку нормы u в $C^{l-2}(\bar{G})$ через ее норму в $\widetilde{H}^l(\bar{G})$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $G\subset\mathbf{R}^3$ — односвязная ограниченная область с $l+1$ раз непрерывно дифференцируемой границей. Всякую функцию $u(x,\,y,\,z)\in\in\widetilde{H}^l(\bar{G})$ можно продолжить в некоторую область $G'\supset\bar{G}$ так, что $u(x,\,y,\,z)\in\widetilde{H}^l(\bar{G}')$, $u(x,\,y,\,z)$ финитна в G' и существует такая постоянная $C>0$, зависящая только от области $\bar{G}$ и числа l, что для любых продолжений $u(x,\,y,\,z)$ выполняется оценка*

$$\|u\|_{\widetilde{H}^l(\bar{G}')} \leqslant C\|u\|_{\widetilde{H}^l(\bar{G})}.$$

Доказательство. Введем на $\Sigma=\partial G$ криволинейные координаты $(\xi,\,\eta)$ и запишем уравнение поверхности в параметрической форме: $r=r_0(\xi,\,\eta)$ или в координатах:

$$x=x_0(\xi,\,\eta),\quad y=y_0(\xi,\,\eta),\quad z=z_0(\xi,\,\eta),$$

причем будем считать, что $(\xi,\,\eta)\in\sigma_1(0)$, т. е. Σ является образом единичной сферы, и что функции $x,\,y,\,z$ $l+1$ раз непрерывно дифференцируемы на $\sigma_1(0)$. Пусть n — единичный вектор внешней нормали к Σ.

Пусть $\delta>0$ настолько мало, что при $(\xi,\,\eta)\in\sigma_1(0)$ векторы $r_0(\xi,\,\eta)+n\zeta$ не пересекаются и их концы лежат в G, так что в замкнутой области

$$\Sigma_{\bar{\delta}}=\{(\xi,\,\eta,\,\zeta),\ (\xi,\,\eta)\in\sigma_1(0),\ -\delta\leqslant\xi\leqslant 0\}$$

задано взаимно однозначное, $l+1$ раз непрерывно дифференцируемое отображение $r=r_0(\xi,\,\eta)+n\zeta$, которое в координатах имеет вид

$$x=x(\xi,\,\eta,\,\zeta),\quad y=y(\xi,\,\eta,\,\zeta),\quad z=z(\xi,\,\eta,\,\zeta). \tag{4}$$

Запишем в Σ_δ^- функцию $u(x,\,y,\,z)$ в переменных $(\xi,\,\eta,\,\zeta)$. Продолжим $u(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ в область

$$\Sigma_\delta^+=\{(\xi,\,\eta,\,\zeta),\ (\xi,\,\eta)\in\sigma_1(0),\ 0\leqslant\zeta\leqslant\delta\},$$

полагая при $\zeta\geqslant 0$

$$u(\xi,\,\eta,\,\zeta)=\sum_{k=1}^{l+1}\alpha_k u\left(\xi,\,\eta,\,-\frac{\zeta}{k}\right), \tag{5}$$

причем за постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1}$ возьмем решение следующей линейной системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k \left(-\frac{1}{k}\right)^s = 1, \quad s = 0, 1, \ldots, l. \tag{6}$$

Определитель этой системы , так называемый *определитель Ван-дер-Монда*, отличен от нуля, так что система (6) имеет единственное решение.

Теперь функция u определена в области $\Sigma_\delta^- \bigcup \Sigma_\delta^+$. Оказывается, u непрерывна в этой области вместе с частными производными до порядка l включительно. Достаточно проверить непрерывность u и ее производных на Σ, т. е. при $\zeta = 0$. Из формулы (5) мы видим, что вследствие первого из уравнений (6) пределы u при $\zeta \to \pm 0$ равны

$$u(\xi, \eta, +0) = \sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k u(\xi, \eta, -0) = u(\xi, \eta, -0).$$

Аналогично обстоит дело с $\partial u/\partial \xi$ и $\partial u/\partial \eta$. Далее, в силу второго из уравнений (6)

$$\frac{\partial u(\xi, \eta, +0)}{\partial \zeta} = \sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k \left(-\frac{1}{k}\right) \frac{\partial u(\xi, \eta, -0)}{\partial \zeta} = \frac{\partial u(\xi, \eta, -0)}{\partial \zeta}.$$

Точно так же проверяется непрерывность остальных частных производных.

Сделаем теперь продолженную функцию u финитной. Для этого умножим ее на срезывающую функцию (п. 3.7) $s_\delta(\zeta)$ так, чтобы $u \equiv 0$ при $\delta/2 \leqslant \zeta \leqslant \delta$, $(\xi, \eta) \in \sigma_1(0)$. Сохраним для срезанной функции обозначение u. Из формулы (5) теперь нетрудно получить оценку

$$\iiint\limits_{\Sigma_\delta^+} \sum_{k=0}^{l} (D^k u)^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \leqslant c \iiint\limits_{\Sigma_\delta^-} \sum_{k=0}^{l} (D^k u)^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{7}$$

Действительно, из (5) имеем неравенство

$$u^2 \leqslant \sum_{k=0}^{l+1} \alpha_k^2 \sum_{k=1}^{l+1} u^2 \left(\xi, \eta, -\frac{\zeta}{k}\right).$$

Интегрируя по Σ_δ^+, получим

$$\iiint\limits_{\Sigma_\delta^+} u^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \leqslant (l+1) \sum_{k=1}^{l+1} \alpha_k^2 \iiint\limits_{\Sigma_\delta^-} u^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Аналогично, дифференцируя (5), получаем такие же оценки для производных. Складывая полученные оценки, приходим к неравенству (7).

Наконец, вследствие невырожденности отображения (4) оценка (7) остается верной в переменных $(x,\ y,\ z)$.

Таким образом, доказано неравенство

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Sigma^+_\delta)} \leqslant c^2 \|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Sigma^-_\delta)}.$$

Но поскольку $\Sigma^-_\delta \subset \bar{G}$, то

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Sigma^-_\delta)} \leqslant \|u\|_{\widetilde{H}^1(\bar{G})}.$$

Следовательно, имеем оценку $(\bar{G}' = \bar{G} \bigcup \Sigma^+_\delta)$

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^l(\bar{G}')} = \|u\|^2_{\widetilde{H}^l(\bar{G})} + \|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Sigma^+_\delta)} \leqslant \\ \leqslant \|u\|^2_{\widetilde{H}^l(\bar{G})} + c^2 \|u\|_{\widetilde{H}^l(\Sigma^-_\delta)} \leqslant (1 + c^2)\|u\|^2_{\widetilde{H}^l(\bar{G})}.$$

Доказательство леммы закончено.

Теперь уже легко установить вложение $H^l(G)$ в $C^{l-2}(\bar{G})$, т. е. справедливость теоремы Соболева. Всякую функцию $u \in \widetilde{H}^l(\bar{G}),\ l \geqslant 2$, по лемме 2 можно продолжить в более широкую область $\bar{G}'$, где она будет финитна. По лемме 1 имеем тогда

$$\|u\|_{C^{l-2}(\bar{G})} \leqslant k \|u\|_{\widetilde{H}^l(\bar{G})}.$$

Поскольку это неравенство справедливо для любой фундаментальной в $\widetilde{H}^l(\bar{G})$ последовательности $\{u_n\} \in u \in H^l(G)$, то предельным переходом получаем неравенство

$$\|u\|_{C^{l-2}(\bar{G})} \leqslant k \|u\|_{\widetilde{H}^l(G)},$$

и теорема вложения Соболева доказана.

О более общих теоремах вложения см. в [39, 25, 26, 12].

9.7. Пространство абсолютно непрерывных функций. Функция $x(t)$, определенная на $[a,\ b]$, называется абсолютно непрерывной на этом отрезке, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для произвольной конечной системы взаимно непересекающихся интервалов $(a_i,\ b_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ из $[a,\ b]$, для которой сумма длин $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon.$$

Пусть $D[a,\ b]$ — множество всех абсолютно непрерывных на $[a,\ b]$ функций. Нетрудно убедиться в том, что $D[a,\ b]$ — линейное пространство.

Имеется тесная связь между абсолютно непрерывными функциями и интегралами Лебега с переменным верхним пределом. Пусть $f(t)$ интегрируема по Лебегу на $[a,\, b]$. Рассмотрим функцию $y(t) = \int_a^t f(s)\, ds$ (см. п. 8.6).

Теорема 1. *Функция $y(t)$ абсолютно непрерывна на $[a,\, b]$*

Доказательство. $\sum\limits_{i=1}^{n} |y(b_i) - y(a_i)| = \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \int\limits_a^b f(s)\, ds \right| \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i}^{b_i} |f(s)|\, ds = \int\limits_{\bigcup_i [a_i,\, b_i]} |f(s)|\, ds \to 0$, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \to 0$, вследствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Теорема 2. *Пусть $x(t)$ абсолютно непрерывна на $[a,\, b]$. Тогда $x(t)$ имеет почти всюду на $[a,\, b]$ конечную производную $\dot{x}(t)$. При этом справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$\int\limits_a^b \dot{x}(t)\, dt = x(b) - x(a).$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ — разбиение $[a,\, b]$. Рассмотрим величину

$$\bigvee_a^b [x] = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |x(t_i) - x(t_{i-1})|,$$

называемую полной вариацией функции $x(t)$ на $[a,\, b]$.

Упражнение. Если $x \in D[a,\, b]$, то $\bigvee_a^b [x] < +\infty$.

Пусть $v(t) = \bigvee_a^t [x]$ — полная вариация функции x на $[a,\, t]$.

Упражнение. Если $x \in D[a,\, b]$, то и $v \in D[a,\, b]$, причем v и $v - x$ — возрастающие на $[a,\, b]$ функции. Представим теперь функцию $x(t)$ в виде разности двух возрастающих функций

$$x(t) = v(t) - [v(t) - x(t)].$$

По теореме 1 п. 8.6 $x(t)$ имеет почти всюду на $[a,\, b]$ конечную производную $\dot{x}(t)$, причем почти всюду

$$\frac{d}{dt}\left[\int\limits_a^t \dot{x}(s)\, ds - x(t)\right] = \dot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0.$$

Далее можно доказать (см. [39], с. 345), что если $x(t) \in D[a,\, b]$ и $\dot{x}(t) = 0$ почти всюду на $[a,\, b]$, то $x(t)$ — постоянная.

Следовательно, $\int\limits_a^t \dot{x}(s)\,ds = x(t) + C$, откуда и вытекает формула Ньютона–Лейбница.

Введем теперь в $D[a,\, b]$ норму по формуле

$$\|x\| = |x(a)| + \int\limits_a^b |\dot{x}(s)|\,ds.$$

Упражнение. Проверьте аксиомы нормы.

Итак, $D[a,\, b]$ — нормированное пространство. Можно также доказать, что оно полное. Заметим в заключение, что $D[a,\, b] = W_1^1(a,\, b)$, т. е. является пространством Соболева функций $x(t)$, имеющих на $[a,\, b]$ обобщенную производную $\dot{x}(t) \in \mathcal{L}(a,\, b)$.

9.8. Пространство $L_\infty[a,\, b]$. Измеримую на $[a,\, b]$ функцию $x(t)$ будем называть существенно ограниченной, если она ограничена на $[a,\, b]$ почти всюду. Две такие функции, значения которых совпадает на $[a,\, b]$ почти всюду, будем считать эквивалентными.

Пространство $L_\infty[a,\, b]$ определим как множество классов, состоящих из эквивалентных существенно ограниченных на $[a,\, b]$ функций.

Упражнение. Проверьте, что $L_\infty[a,\, b]$ — линейное пространство.

Пусть $x(t) \in L_\infty[a,\, b]$, e — множество меры нуль на $[a,\, b]$, а E — множество всех таких множеств e. Истинным (или существенным) супремумом модуля функции $x(t)$ называется число

$$\operatorname{vrai}\sup_{[a,\, b]} |x(t)| = \inf_{e \in E} \sup_{[a,\, b]\setminus e} |x(t)|.$$

Введем в пространстве $L_\infty[a,\, b]$ норму, полагая

$$\|x\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{[a,\, b]} |x(t)|.$$

Можно показать (см. [18], стр 23), что в данном случае аксиомы нормы выполнены. При том сходимость в $L_\infty[a,\, b]$ — это равномерная почти всюду сходимость. Кроме того, $x(t) \in L_\infty[a,\, b]$ тогда и только тогда, когда $x(t) \in L_p(a,\, b)$ для всех $p \geqslant 1$. При этом (см. [18], стр. 13)

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p,$$

где $\|x\|_p$ — норма в $L_p(a,\, b)$.

Аналогично вводятся пространства $L_\infty(G)$, где G — замкнутая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Эти пространства бывают полезны в приложениях.

Г Л А В А III

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 10. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность

10.1. Общее определение оператора. Пусть X и Y — множества произвольной природы. Пусть, далее, $D \subseteq X$, т. е. в X выделено подмножество D. Если каждому элементу $x \in D$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что задан оператор $y = F(x)$. При этом множество D называется *областью определения оператора* F и обозначается обычно $D(F)$. Множество

$$R = R(F) = \{y \in Y;\ y = F(x),\ x \in D\}$$

называется *областью значений оператора* F. Схематически действие оператора F можно изобразить следующим образом:

$$X \supseteq D(F) \xrightarrow{F} R(F) \subseteq Y,$$

что кратко будем записывать так:

$$F\colon\ X \to Y.$$

В последней записи не подразумевается, что $D(F) = X$ или что $R(F) = Y$.

Если

$$y = F(x), \quad x \in D(F), \quad y \in R(F),$$

то говорят, что элемент y является *образом* элемента x, а элемент x — *прообразом* элемента y. Множество всех образов y, когда x пробегает $D = D(F)$, есть $R(F)$, так что $R(F) = F(D)$: область значений оператора есть образ его области определения.

Остановимся еще на понятиях равенства операторов, их сужения и расширения.

Два оператора $F\colon X \to Y$ и $\Phi\colon X \to Y$ называются *равными*, если совпадают их области определения ($D(F) = D(\Phi) = D$) и $F(x) = \Phi(x)$ для всех $x \in D$.

Оператор Φ называется *расширением* оператора F (а оператор F — *сужением* оператора Φ), если $D(\Phi) \supset D(F)$ и $\Phi(x) = F(x)$ для всех $x \in D(F)$.

Мы определили выше однозначные операторы F, для которых каждому прообразу x отвечает единственный образ y. В приложениях иногда встречаются многозначные операторы, когда каждому x ставится в соответствие множество $F(x) \subset Y$. Всюду ниже рассматриваются только однозначные операторы.

10.2. Взаимно однозначные операторы. Пусть $F\colon X \to Y$. Фиксируем $y \in R(F)$ и рассмотрим множество всех прообразов элемента y, которое далее обозначается $F^{-1}(y)$. Очевидно, это множество не пусто. Очень важным является случай, когда $F^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента, который мы обозначим через x.

Определение. Оператор $y = F(x)$ называется *взаимно однозначным*, если каждому образу $y \in R(F)$ отвечает единственный прообраз $x = F^{-1}(y)$. Если F взаимно однозначен, то формула $x = F^{-1}(y)$, где y пробегает R, определяет оператор $F^{-1} : Y \to X$, который называется *обратным* к F. Очевидно,

$$D(F^{-1}) = R(F), \quad R(F^{-1}) = D(F).$$

Оператор F^{-1} осуществляет, таким образом, «обратное» соответствие. Заметим, что если не предполагать, что F взаимно однозначен, то формула $x = F^{-1}(y)$ может определять «многозначный обратный оператор».

10.3. Суперпозиция операторов. Пусть даны множества X, Y, Z произвольной природы и операторы

$$F \text{ с } D(F) \subseteq X \text{ и } R(F) \subseteq Y;$$

$$\Phi \text{ с } D(\Phi) \subseteq Y \text{ и } R(\Phi) \subseteq Z.$$

Если $R(F) \subseteq D(\Phi)$, то имеет смысл оператор Φ от оператора F, или, как часто говорят, суперпозиция операторов F и Φ, т. е. оператор $z = \Phi[F(x)]$, отображающий $D(F)$ в $R(\Phi)$ (т. е. $\Phi[F(D(F))] \subseteq R(\Phi)$). Этот оператор обозначают иногда через $\Phi * F$ и называют *произведением* операторов Φ и F.

Мы не касаемся здесь свойств введенного «умножения» операторов, которые будут позднее рассмотрены для конкретных классов операторов. Отметим лишь, что если F взаимно однозначен на $D(F)$, то

$$F^{-1} * F = I_X \text{ на } D(F), \quad F * F^{-1} = I_Y \text{ на } R(F),$$

где через I_X и через I_Y обозначены тождественные операторы в X и в Y соответственно. (Оператор I_X, например, действует по формуле $I_X(x) = x$ для $x \in X$. Запись I_X на $D(F)$ обозначает, что равенство $I_X(x) = x$ справедливо только для $x \in D(F)$.)

Отметим, что если включение $R(F) \subseteq D(\Phi)$ не имеет места, то иногда все-таки удается определить суперпозицию $\Phi * F$ на более узком множестве $D' \subset D(F)$, если только $F(D') \subseteq D(\Phi)$.

10.4. Операторы в нормированных пространствах. Предел и непрерывность. Пусть теперь X и Y — нормированные пространства. Пусть дан оператор $F\colon X \to Y$ такой, что его область определения $D(F)$ содержит окрестность $S(x_0)$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Напомним, что под окрестностью точки мы понимаем любой открытый шар с центром в этой точке.

Определение 1. Элемент $y_0 \in Y$ называется *пределом* $F(x)$ при $x \to x_0$ (записывается $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ или, короче, $F(x) \to y_0$ при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in S(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $0 < \|x - x_0\| < \delta$, имеем $\|F(x) - y_0\| < \varepsilon$.

Данное определение принадлежит Коши. Для $F : E^1 \to E^1$ (т. е. для функции вещественного переменного со значениями также на вещественной оси) это — известное определение предела функции. Если $F : E^m \to \to E^1$, то мы получаем определение предела функции m переменных.

Определение 2. Пусть дан оператор $F : X \to Y$, определенный в окрестности точки x_0. Оператор F называется *непрерывным в точке* x_0, если $F(x) \to F(x_0)$ при $x \to x_0$.

Данное определение обобщает определения непрерывности функций одного или нескольких вещественных переменных, отображения, функции комплексного переменного и т. д.

Определение 3. Пусть $F(x)$ — оператор с областью определения $D(F) \subset X$ и с областью значений $R(F) \subset Y$, где X и Y — нормированные пространства. Оператор F будем называть *ограниченным*, если он переводит всякое ограниченное в X множество из $D(F)$ во множество, ограниченное в Y.

Более подробное изучение нелинейных операторов мы проведем позднее. Пока же займемся систематическим исследованием линейных операторов — случаем частным, но постоянно встречающимся в приложениях. К тому же теория линейных операторов, обладающих целым рядом хороших свойств, разработана значительно лучше, чем теория нелинейных операторов.

10.5. Определение линейного оператора. Пусть X и Y — линейные пространства, оба вещественные или оба комплексные.

Определение. Оператор A: $X \to Y$ с областью определения $D(A)$ называется *линейным*, если

1) $D(A)$ — линейное многообразие;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для любых x_1, $x_2 \in D$ и любых скаляров λ_1, λ_2.

Понятие линейного оператора обобщает понятие линейной функции $y = \alpha x$, где переменные x, $y \in \mathbb{R}$, а α — фиксированное вещественное число. Чуть более сложный пример линейного оператора дает функция комплексного переменного $w = az$, где переменные z, w и множитель a — комплексные. В линейной алгебре изучаются линейные операторы в конечномерных линейных пространствах. По аналогии с записью линейной функции при записи линейного оператора мы всюду в дальнейшем опускаем скобки и будем писать $y = Ax$. При этом A выступает как операторный коэффициент при x.

Теорема. *Область значений всякого линейного оператора является линейным многообразием.*

Доказательство. Пусть y_1, $y_2 \in R(A)$ и λ_1, λ_2 — скаляры. Возьмем элемент $x_1 \in D(A)$ — прообраз y_1 и элемент $x_2 \in D(A)$ — прообраз элемента y_2, т. е. $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. Используя линейность A (свойство 2 определения), получаем

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Это означает, что элемент $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in D(A)$ (по свойству 1 определения) является прообразом элемента $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, т. е. последний принадлежит $R(A)$. Теорема доказана.

Практически наиболее важны два случая задания линейных операторов:

а) $D(A) = X$, т. е. A задан всюду в X;

б) пусть X — нормированное пространство и пусть $\overline{D(A)} = X$ (замыкание множества $D(A)$ совпадает со всем пространством X), тогда говорят, что оператор A плотно задан в X или что область определения A плотна в X.

10.6. Непрерывные линейные операторы. Пусть X и Y — нормированные пространства и A: $X \to Y$, A — линейный оператор, всюду заданный в X (т. е. $D(A) = X$).

Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если $Ax \to \to Ax_0$ при $x \to x_0$. Оказывается, судить о непрерывности линейного оператора в различных точках $x_0 \in X$ можно по непрерывности его в нуле пространства X.

Теорема. *Пусть линейный оператор A всюду задан в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y непрерывен в точке* $0 \in X$; *тогда A непрерывен в любой точке* $x_0 \in X$.

Доказательство следует из равенства $Ax - Ax_0 = A(x - x_0)$. Если $x \to x_0$, то $z = x - x_0 \to 0$. По непрерывности в нуле $Az \to 0$, но тогда $Ax - Ax_0 \to 0$, что и требовалось доказать.

Определение. Линейный оператор A называется *непрерывным*, если он непрерывен в точке $x = 0$.

10.7. Ограниченные линейные операторы. Если $Ax = 0$ для любого $x \in X$, то оператор A называется *нулевым* оператором и обозначается 0.

Пусть A всюду задан в банаховом пространстве X и значения его лежат в банаховом же пространстве Y. Если $A \neq 0$, то его область значений $R(A)$ представляет собой неограниченное множество (покажите!).

Поэтому линейный оператор $A \neq 0$ не может быть ограниченным на всем пространстве X. Согласно определению 3 п. 10.4 линейный оператор A следовало бы назвать ограниченным, если он переводит ограниченные множества в ограниченные. Приводимое ниже определение отражает это же содержание. Пусть $\bar{S}_1(0)$ — замкнутый шар $\|x\| \leqslant 1$ в банаховом пространстве X.

Определение. Будем называть линейный оператор A с $D(A) = X$, $R(A) \subset X$ *ограниченным*, если он ограничен на единичном шаре $\bar{S}_1(0)$, т. е. если ограничено множество

$$\{\|Ax\|, \quad \|x\| \leqslant 1\}.$$

Согласно определению, если A ограничен, то существует постоянная

$c > 0$ такая, что для любых x с $\|x\| \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|Ax\| \leqslant c. \tag{1}$$

Теорема 1. *A ограничен тогда и только тогда, когда справедлива оценка*

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\| \tag{2}$$

для любых $x \in X$, где c — постоянная из (1).

Доказательство. При $x = 0$ неравенство (2) очевидно. Пусть $x \neq 0$. Положим $x' = x/\|x\|$. Поскольку $\|x'\| = 1$, то из (1) следует, что $\|Ax'\| \leqslant c$, т. е. $\|A(x/\|x\|)\| \leqslant c$. По линейности A $A(x/\|x\|) = (Ax) \ / \ \|x\|$, а по свойству однородности нормы $\big\|Ax \ / \ \|x\| \ \big\| = \|Ax\|/\|x\|$. Мы получаем неравенство $\|Ax\| \ / \ \|x\| \leqslant c$, т. е. (2).

Обратно, если верно (2), то в $\bar{S}_1(0)$ имеем $\|Ax\| \leqslant c$, т. е. A ограничен. Теорема доказана.

В определении ограниченности A мы требовали ограниченность A на единичном шаре. Оказывается, отсюда вытекает ограниченность A на любом ограниченном множестве.

Теорема 2. *Пусть A ограниченный линейный оператор. Пусть $M \subseteq X$ и M — ограниченное множество; тогда множество $\{\|Ax\|, \, x \in M\}$ ограничено.*

Доказательство. Согласно определению ограниченность M означает, что существует шар $\bar{S}_R(0) \supseteq M$. Для $x \in \bar{S}_R(0)$, вследствие (2), имеем $\|Ax\| \leqslant C\|x\| \leqslant CR$, т. е. A ограничен на $\bar{S}_R(0)$, а тем более на его части M.

Следствие. *Если A — ограниченный линейный оператор, то он ограничен на любом шаре $\bar{S}_R(x_0)$ ($x_0 \in X$ и $R > 0$ — произвольные).*

10.8. Эквивалентность понятий линейного непрерывного и линейного ограниченного операторов.

Теорема. *Пусть A: $X \to Y$, A — линейный оператор, X, Y — банаховы пространства, $D(A) = X$. Для того чтобы A был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Доказательство необходимости. Пусть A непрерывен. Допустим, что теорема неверна и A неограничен. Тогда множество $A(\bar{S}_1(0))$ неограничено. Отсюда следует, что для любого натурального n существует $x_n \in X$ с $\|x_n\| \leqslant 1$ такой, что $\|Ax_n\| \geqslant n$. Возьмем $x'_n = x_n/n$:

$$\|x'_n\| = \frac{\|x\|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

По непрерывности оператора A имеем $Ax'_n \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, $\|Ax'_n\| = \dfrac{1}{n}\|Ax_n\| \geqslant 1$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Доказательство достаточности. Пусть A ограничен. Тогда имеем неравенство (2) п. 10.7:

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Отсюда, если $x \to 0$, то и $Ax \to 0$, т. е. A непрерывен в точке 0, т. е., согласно п. 10.6, A непрерывен.

10.9. Примеры линейных операторов в конечномерных пространствах. В линейном пространстве $\mathbf{R}^m$ m-мерных столбцов $x = (\xi_i)_1^m$, $y = (\eta_i)_1^m$, ... равенство

$$y = Ax, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ — квадратная матрица порядка m, понимаемое как матричное равенство (матрица-столбец y равна произведению матрицы A на матрицу-столбец x), задает некоторый оператор A.

Упражнение 1. Покажите, что A — линейный оператор в $\mathbf{R}^m$.

В координатах равенство (1) записывается так:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Одно и то же алгебраическое выражение (1) или (2) может определять различные линейные операторы, действующие из одного конечномерного нормированного пространства в другое, причем в $\mathbf{R}^m$ одну норму мы можем задать в области определения оператора и другую — в его области значений.

Пример 1. Будем рассматривать A как оператор, действующий в пространстве c^m. Докажем, что A ограничен. Имеем оценку

$$|\eta_i| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|\,|\xi_j| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \sup_j |\xi_j| \leqslant \gamma_m \|x\|_k.$$

Следовательно,

$$\|y\|_k \leqslant \gamma_m \|x\|_k, \text{ где } \gamma_m = \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Тогда $\|Ax\|_k \leqslant \gamma_m \|x\|_k$. Согласно теореме 1 п. 10.7 A ограничен.

Пример 2. Будем рассматривать A как оператор, действующий из $l_p^{(m)}$ в $l_q^{(m)}$, где $p > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\|Ax\|^q_{l_q^{(m)}} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_j \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^p \right)^{q/p} = \sum_{i,\,j=1}^{m} |a_{ij}|^q \|x\|^q_{l_p^{(m)}}$$

согласно неравенству Минковского. Следовательно,

$$\|Ax\|_{l_q^{(m)}} \leqslant \beta_m \|x\|_{l_p^{(m)}}, \quad \text{где } \beta_m = \left(\sum_{i,\,j=1}^{m} |a_{ij}|^q \right)^{1/q}.$$

Отсюда вытекает ограниченность, а значит, и непрерывность A.

Пример 3. Будем рассматривать A как оператор, действующий в $l_p^{(m)}$, $p > 1$. Имеем следующую оценку:

$$\|Ax\|_{l_p^{(m)}}^p = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_j \right|^p \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \|x\|_{l_p^{(m)}}^p.$$

Таким образом, $\|Ax\|_{l_p^{(m)}} \leqslant \alpha_m \|x\|_{l_p^{(m)}}$, где

$$\alpha_m = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right]^{1/p}.$$

Упражнение 2. Покажите, что A можно трактовать как ограниченный линейный оператор в $l_1^{(m)}$.

10.10. Примеры линейных ограниченных операторов в пространствах последовательностей. Формальное алгебраическое выражение $y = Ax$ или, подробнее, $\eta_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где x и y — столбцы бесконечного порядка, может определять при тех или иных ограничениях на матрицу (a_{ij}) линейные операторы в нормированных пространствах последовательностей.

Пример 1. Если $\gamma = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$, то A является ограниченным линейным оператором в пространстве m ограниченных числовых последовательностей. Действительно, пусть $x = (\xi_i)_1^\infty \in m$, а x_n имеет первые n координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$, а остальные — нули. Согласно примеру 1 п. 10.9

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \right| \leqslant \gamma \|x_n\| \leqslant \gamma_m \|x\|_m.$$

Значит, $\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right| \leqslant \gamma \|x\|_m$, откуда $\|Ax\|_m \leqslant \gamma \|x\|_m$.

Пример 2. Если $\beta = \left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} < +\infty$, то A — линейный ограниченный оператор, действующий из l_p в l_q $(p > 1,\ 1/p + 1/q = 1)$.

Пример 3. Если $\alpha = \left[\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right]^{1/p} < +\infty$, то A — линейный ограниченный оператор, действующий в l_p $(p > 1)$.

Упражнение. Провести соответствующие оценки в примерах 2 и 3 по образцу примера 1.

В отличие от п. 10.9, только жесткие требования сходимости рядов α, β и γ обеспечивают ограниченность A. Позднее мы увидим, что отказ от этих требований приводит к линейным, но неограниченным операторам.

10.11. Интегральные операторы в пространствах функций. Интегральное выражение $v = Ku$, подробнее:

$$v(x) = \int\limits_a^b K(x,\, s)\, u(s)\, ds, \tag{1}$$

в котором мы предполагаем функцию $K(x,\, s)$ непрерывной в квадрате $[a,\, b] \times [a,\, b]$, может определять различные интегральные операторы.

Рассматривая K как оператор в $C[a,\, b]$, получим оценку

$$\|v\|_{C[a,\, b]} \leqslant \max_{x \in [a,\, b]} \int\limits_a^b |K(x,\, s)|\, ds\, \|u\|_{C[a,\, b]}.$$

Аналогично, если K действует из $\tilde{\mathcal{L}}_p[a,\, b]$ в $\tilde{\mathcal{L}}_q[a,\, b]$, то имеем $(p > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$

$$|v(x)| \leqslant \left| \int\limits_a^b K(x,\, s)\, u(s)\, ds \right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |K(x,\, s)|^q ds \right)^{1/q} \|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p[a,\, b]},$$

откуда

$$|v(x)|^q \leqslant \int\limits_a^b |K(x,\, s)|^q\, ds\, \|u\|^q_{\tilde{\mathcal{L}}_p[a,\, b]}.$$

Интегрируя и затем возводя в степень $1/q$, получим

$$\|v\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q[a,\, b]} \leqslant \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,\, s)|^q ds \right)^{1/q} \|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p[a,\, b]}.$$

Отсюда вытекает, что если $\{u_n\}$ фундаментальна в $\tilde{\mathcal{L}}_p[a, b]$, то $\{v_n\}$, где $v_n = Ku_n$, фундаментальна в $\tilde{\mathcal{L}}_q[a, b]$. Следовательно, предельным переходом можно получить неравенство

$$\|Ku\|_{\mathcal{L}_p[a,\, b]} \leqslant \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,\, s)|^q ds\right)^{1/q} \|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_p[a,\, b]}.$$

Таким образом, K ограничен и как линейный оператор, действующий из $\mathcal{L}_p[a,\, b]$ в $\mathcal{L}_q[a,\, b]$.

Аналогично определяются интегральные операторы, соответствующие интегральному выражению

$$v(x) = \int\limits_G K(x,\, s)\, u(s)\, ds,$$

где G — ограниченная кубируемая область в E^m.

10.12. Дифференциальные операторы. Рассмотрим линейные дифференциальные операторы, определяемые дифференциальным выражением

$$Au = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

где для простоты коэффициенты $a_\alpha(x)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области $\bar{G}$. Имеем следующую оценку

$$\|Au\|_{C(\bar{G})} \leqslant \max_{\bar{G}} \sum_{|\alpha| \leqslant l} |a_\alpha(x)|\, |D^\alpha u| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|\alpha| \leqslant l} \|a_\alpha(x)\|_{C(\bar{G})} \max_{\bar{G}} \sum_{|\alpha| \leqslant l} |D^\alpha u| \leqslant k\|u\|_{C^l(\bar{G})},$$

где $k = \max_{|\alpha| \leqslant l} \|a_\alpha(x)\|_{C(\bar{G})}$. Следовательно, A — линейный ограниченный оператор, действующий из $C^l(\bar{G})$ в $C(\bar{G})$.

Упражнение. Повторите рассуждение данного пункта для случая одной переменной ($m = 1$) на $[a,\, b]$.

§ 11. Пространства линейных операторов

11.1. Нормированное пространство $\mathcal{L}(X,\, Y)$. Норма линейного оператора. Пусть A, B, C, ... — линейные непрерывные операторы, определенные всюду в нормированном пространстве X и со значениями в нормированном пространстве Y. Определим на множестве всевозможных таких операторов операции сложения операторов и умножения оператора на число. Положим по определению

$$(A + B)x = Ax + Bx,$$
$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Упражнение 1. Доказать, что $A+B$ и λA — линейные непрерывные операторы.

Упражнение 2. Доказать, что выполнены все аксиомы линейного пространства.

Подчеркнем следующее обстоятельство: во всех наших рассуждениях пространства X и Y оба вещественные либо оба комплексные (см п. 10.5). В первом случае скаляры в линейном пространстве операторов берутся вещественными, а во втором — комплексными.

В получившемся линейном пространстве операторов норму можно задавать различными способами. Принято, однако, вводить ее вполне определенным образом. Положим

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|. \tag{1}$$

Поясним, почему существует конечное число $\|A\|$, определяемое для любого ограниченного оператора равенством (1). Согласно формуле (1) п. 10.7 существует постоянная $c > 0$ такая, что множество

$$\mathfrak{M} = \{\|Ax\| : \|x\| \leqslant 1\}$$

ограничено сверху постоянной c. По теореме о точной верхней грани $\sup \mathfrak{M} = \|A\|$ существует (единственная).

Из первого свойства определения $\sup \mathfrak{M}$ следует, что $\|Ax\| \leqslant \|A\|$ для всех $x \in S_1(0)$. Отсюда, согласно теореме 2 п. 10.7, мы имеем неравенство

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \, \|x\|, \tag{2}$$

справедливое для всех $x \in X$, включая $x = 0$. Таким образом, $\|A\|$ является наименьшей из констант в неравенстве (2) п. 10.7, и, значит, оценка (2) (п. 11.1) является наилучшей. Если установлена оценка $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, то $\|A\| \leqslant c$. Таким образом, в пп. 10.9, 10.12 получены оценки для норм различных линейных операторов. Можно показать, что, на самом деле, все эти оценки точны, т. е. полученные постоянные являются нормами соответствующих линейных операторов. Ограничимся следующим примером (см. пример 1 п. 10.9).

Пример. Покажем, что норма линейного оператора A, задаваемого алгебраическим выражением (2) п. 10.9 и рассматриваемого как оператор в c^m, равна $\gamma_m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|$.

В примере 1 п. 10.9 доказано, что $\|A\| \leqslant \gamma_m$. Докажем обратное неравенство $\|A\| \geqslant \gamma_m$, откуда и будет следовать наше утверждение. Пусть i_0 таково, что $\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| = \gamma_m$. Возьмем $x_0 = (\operatorname{sign} a_{i_0 j})_{j=1}^{m}$. Очевидно, $\|x_0\| = 1$. Имеем

$$\|A\| \geqslant \|Ax_0\| = \max_i \Big|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \operatorname{sign} a_{i_0 j}\Big| \geqslant \sum_{j=1}^{m} |a_{i_0 j}| = \gamma_m.$$

Проверим аксиомы нормы.

1) Очевидно, $\|A\| \geqslant 0$, так как $\|Ax\| \geqslant 0$ для всех x. Пусть $\|A\| = 0$, тогда по неравенству (2) $Ax \equiv 0$, следовательно, A — нулевой оператор.

2) $\|\lambda A\| = \sup \|\lambda Ax\| = |\lambda|\, \|A\|$.

3) Пусть $\|x\| \leqslant 1$. Тогда $\|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. Следовательно, при любом $x \in \bar{S}_1(0)$ $\|(A+B)x\| \leqslant \|A\| + \|B\|$. Переходя к $\sup_{\|x\| \leqslant 1}$ слева, получим неравенство треугольника.

Итак, все аксиомы нормы выполнены. Полученное нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из всего X в Y, принято обозначать $\mathcal{L}(X,\, Y)$.

11.2. Равномерная сходимость линейных операторов. Пусть дана последовательность операторов
$$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,\, Y).$$
Будем говорить, что $A_n \to A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$, $n \to \infty$, равномерно, если $\|A_n - A\| \to 0$, $n \to \infty$.

Таким образом, равномерная сходимость последовательности линейных операторов — это сходимость по норме пространства $\mathcal{L}(X,\, Y)$. Добавление прилагательного «равномерный» оправдано следующими обстоятельствами.

Теорема 1. *Для того чтобы $A_n \to A$, $n \to \infty$, равномерно $(A_n,\, A \in \mathcal{L}(X,\, Y))$, необходимо и достаточно, чтобы $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$, равномерно по x в шаре $\|x\| \leqslant 1$.*

Доказательство. Необходимость сразу же следует из неравенства
$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leqslant \|A_n - A\|\, \|x\| \leqslant \|A_n - A\|,$$
справедливого для любых x с $\|x\| \leqslant 1$. Действительно, если $\|A_n - A\| \to$

$\to 0$, $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при любых $n > N$ будет иметь место неравенство $\|A_n - A\| < \varepsilon$. Но тогда $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и любого $x \in \bar{S}_1(0) = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. Это и означает сходимость $\{A_n x\}$ к Ax равномерно в $\bar{S}_1(0)$.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что как только $n > N$, сразу же $\|A_n x - Ax\| < \varepsilon/2$ для всех $x \in \bar{S}_1(0)$. Отсюда
$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A_n - A)x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Вспоминая определение нормы линейного оператора, получаем $\|A_n - A\| < \varepsilon$ для всех $n > N$. Это и означает, что $A_n \to A$, $n \to \infty$, равномерно.

Следствие. *Пусть $A_n \to A$, $n \to \infty$, равномерно, и пусть M — произвольное ограниченное множество в X. Тогда $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$, равномерно по $x \in M$.*

Доказательство. Так как M ограничено, то существует шар $S_R(0) \supset M$. Но тогда
$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\|\, \|x\| \leqslant R\|A_n - A\| \to 0.$$

Следствие доказано (см. доказательство необходимости в предыдущей теореме).

В заключение этого пункта приведем следующее предложение.

Теорема 2. *Если X нормированное, а Y банахово, то $\mathcal{L}(X, Y)$ банахово.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная по норме $\mathcal{L}(X, Y)$ последовательность, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для любых $n > N$ и любых натуральных p выполняется неравенство $\|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon$. Пусть $x \in X$. Рассмотрим последовательность $\{A_n x\}$. Она также фундаментальна, что следует из неравенства

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| = \|(A_{n+p} - A_n)x\| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\| \, \|x\|.$$

Но Y полно, следовательно $\{A_n x\}$ сходится. Положим $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Эта формула ставит в соответствие каждому $x \in X$ определенный элемент $y \in Y$ и, следовательно, определяет оператор $y = Ax$.

Из линейности операторов A_n и свойства предела следует, что A — линейный оператор (докажите!). Покажем, что A ограничен. Для этого заметим, что $\{\|A_n\|\}$ также фундаментальна. Это следует из неравенства

$$\big|\|A_{n+p}\| - \|A_n\|\big| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\|.$$

Но тогда $\{\|A_n\|\}$ ограничена, т. е. существует $c > 0 : \|A_n\| \leqslant c$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно,

$$\|A_n x\| \leqslant c\|x\|.$$

Переходя в этом числовом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\|Ax\| \leqslant c\|x\|.$$

Итак, A ограничен, значит $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Теорема доказана.

11.3. Ряды в $\mathcal{L}(X, Y)$. Пространство $\mathcal{L}(X)$. Согласно общему определению сходимости рядов (см. п. 5.6) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ $(A_k \in \mathcal{L}(X, Y))$ сходится равномерно, если сходится равномерно последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится абсолютно, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$. Нетрудно перефразировать на случай, когда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ банахово, критерии Коши абсолютной и равномерной сходимости ряда в $\mathcal{L}(X, Y)$.

Теорема. *Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$ банахово. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится абсолютно, то он сходится и равномерно.*

Доказательство.

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A_k\|.$$

Осталось воспользоваться сначала критерием Коши абсолютной сходимости, а затем — равномерной.

Пространство $\mathcal{L}(X, X) \equiv \mathcal{L}(X)$ особенно часто встречается в приложениях. В $\mathcal{L}(X)$ можно ввести еще одну операцию — умножение операторов. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$ и $B \in \mathcal{L}(X)$. Положим, по определению, $(AB)(x) = A(Bx)$.

Упражнение 1. Показать, что $AB \in \mathcal{L}(X)$.

Далее, в $\mathcal{L}(X)$ определена степень A^k (k натурально) оператора A; полагаем

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A \quad \text{и т. д.}$$

Упражнение 2. Показать, что

$$(AB)C = A(BC), \qquad (A+B)C = AC + BC,$$

$$C(A+B) = CA + CB, \qquad IA = AI = A$$

для любых A, B, $C \in \mathcal{L}(X)$. Здесь I — тождественный (единичный) оператор, определяемый равенством $Ix = x$ для любого $x \in X$.

Заметим теперь, что умножение в $\mathcal{L}(X)$, вообще говоря, не обладает свойством перестановочности (коммутативности). Равенство $BA = AB$ выполняется даже в случае конечномерного пространства X очень редко. В алгебре множество элементов с операциями их сложения и умножения, обладающими вышеперечисленными свойствами пространства $\mathcal{L}(X)$, называют *некоммутативным кольцом с единицей.*

Пусть A, $B \in \mathcal{L}(X)$. Тогда справедливы оценки

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|, \qquad \|BA\| \leqslant \|B\| \, \|A\|. \tag{1}$$

Действительно, из определения нормы линейного оператора следует

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leqslant \|A\| \, \|Bx\| \leqslant \|A\| \, \|B\| \, \|x\|,$$

значит,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$

Аналогично доказывается и второе из неравенств (1).

Докажем теперь следующее предложение.

Лемма. *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X)$, $\{B_n\} \subset \mathcal{L}(X)$; A, $B \subset \mathcal{L}(X)$. *Если при* $n \to \infty$ $A_n \to A$, *а* $B_n \to B$, *то* $A_n B_n \to AB$.

Доказательство вытекает из неравенств (1):

$$\|A_n B_n - AB\| = \|(A_n - A)B_n + A(B_n - B)\| \leqslant \|A_n - A\| \, \|B_n\| + \|A\| \, \|B_n - B\|,$$

и ограниченности $\{\|B_n\|\}$.

Наличие умножения в $\mathcal{L}(X)$ дает возможность ввести в рассмотрение функции от операторов, определенные на $\mathcal{L}(X)$ со значениями в $\mathcal{L}(X)$.

Упражнение 3. Определим функцию оператора e^A, $A \in \mathcal{L}(X)$, по формуле

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A^0 = I.$$

Доказать, что $e^A \in \mathcal{L}(X)$ и $\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}$.

11.4. Сильная сходимость в $\mathcal{L}(X, Y)$. Наряду с равномерной сходимостью в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, можно ввести еще один вид сходимости, также часто встречающийся в приложениях.

Определение. Пусть дана последовательность $\{A_n\} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Будем говорить, что эта последовательность *сильно сходится* к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, если для любого $x \in X$

$$\|A_n x - Ax\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Заметим, что если $A_n \to A$, $n \to \infty$, равномерно, т. е. по норме $\mathcal{L}(X, Y)$, то $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ сильно. Действительно, это сразу же следует из оценки

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \, \|x\|.$$

Не будут ли в таком случае оба вида сходимости в $\mathcal{L}(X, Y)$ эквивалентны? Следующий пример показывает, что это не так. В пространстве l_2 последовательностей $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ с $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$ рассмотрим оператор $y = P_n x$, где $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$ определяется так: $\eta_i = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\eta_i = 0$ при $i > n$. Имеем

$$\|P_n x - x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

(как остаток сходящегося ряда).

Следовательно, $P_n \to I$, $n \to \infty$, сильно, где I — тождественный оператор в l_2.

Покажем, что утверждение $P_n \to I$, $n \to \infty$, равномерно, является неправильным.

Действительно, для всякого $x \in l_2$ с $\|x\| = 1$ и такого, что $P_n x = 0$, имеем $\|(P_n - I)x\| = 1$. Следовательно,

$$\|P_n - I\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(P_n - I)x\| \geqslant 1$$

и равномерная сходимость $\{P_n\}$ к I невозможна.

Упражнение. Найти общий вид тех элементов $x \in l_2$, для которых $P_n x = 0$.

Замечание. Вместо термина «сильная сходимость» иногда употребляют термин «поточечная сходимость» (или «точечная сходимость»), так как речь здесь идет о сходимости значения A_n в каждой точке x.

11.5. Принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим теперь круг вопросов, связанных с принципом равномерной ограниченности и теоремой Банаха–Штейнгауза.

Лемма. *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *и пусть существуют постоянная* $c > 0$ *и замкнутый шар* $\bar{S}_r(x_0)$ *такие, что* $\|A_n x\| \leqslant c$ *для любых* $x \in \bar{S}_r(x_0)$ *(т. е. последовательность* $\{A_n(x)\}$ *равномерно ограничена на* $\bar{S}_r(x_0)$*). Тогда* $\{\|A_n\|\}$ *ограничена.*

Доказательство. Возьмем любое $x \in X$ ($x \neq 0$); тогда элемент $x_0 + xr/\|x\| \in \bar{S}_r(x_0)$ (почему?). Следовательно,

$$c \geqslant \left\| A_n \left(\frac{xr}{\|x\|} + x_0 \right) \right\| = \left\| \frac{r}{\|x\|} A_n x + A_n x_0 \right\| \geqslant \frac{r}{\|x\|} \|A_n x\| - c.$$

Отсюда $\|A_n x\| \leqslant 2c\|x\|/r$ и, следовательно, $\|A_n\| \leqslant 2c/r$. Лемма доказана.

Теорема 1 (принцип равномерной ограниченности). *Пусть X — банахово пространство. Если $\{A_n x\}$ ограничена при каждом фиксированном $x \in X$, то $\{\|A_n x\|\}$ ограничена.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена ни в каком замкнутом шаре, иначе по лемме $\{\|A_n x\|\}$ была бы ограничена. Фиксируем шар $\bar{S}_0$. В нем $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена. Значит, найдется точка $x_1 \in S_0$ — открытому шару (почему?) и номер n_1 такие, что $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. По непрерывности A_{n_1} найдется шар $S_1 = S_{r_1}(x_1)$ такой, что $\|A_{n_1} x\| > 1$ в $\bar{S}_1$. В S_1 $\{\|A_n x\|\}$ также неограничена, и можно найти $x_2 \in S_2$ и $n_2 > n_1$, так что $\|A_{n_2} x_2\| > 2$ и т. д. В результате этих рассуждений находим $\{x_k\}$ и $\{S_k\}$, причем $x_k \in S_k$, а $\bar{S}_0 \supset \bar{S}_1 \supset \ldots \supset$ $\supset \bar{S}_n \supset \ldots$ и на $\bar{S}_k$ $\|A_{n_k} x\| \geqslant k$. По теореме о вложенных шарах найдется их общая точка: $\bar{x} \in \bar{S}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\|A_{n_k} \bar{x}\| \geqslant k$, т. е. $\{A_n \bar{x}\}$ не ограничена, а это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2 (Банах–Штейнгауз). *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, *$X$ — банахово. Для того чтобы* $A_n \to A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \to \infty$, *сильно необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\{\|A_n\|\}$ *была ограничена*;

2) $A_n \to A$, $n \to \infty$, *сильно на некотором линейном многообразии X', плотном в X.*

Доказательство. Необходимость. Из условия $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$, $x \in X$, следует, что $\|A_n x\| \to \|Ax\|$, $n \to \infty$, а потому $\{\|A_n x\|\}$ ограничена. Из принципа равномерной ограниченности получаем ограниченность $\{\|A_n\|\}$. В качестве X' можно взять X. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $x \in X$, но $x \notin X'$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $x' \in X'$ такое, что $\|x - x'\| < \varepsilon$ (определение плотности X' в

X). Пусть, далее, $c = \sup\limits_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots} \|A_n\|$, где $A_0 = A$. Покажем, что $A_n \to A$, $n \to \infty$, сильно:

$$\|A_n x - Ax\| = \|A_n(x - x') + (A_n x' - Ax') + A(x' - x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n\|\,\|x - x'\| + \|A_n x' - Ax'\| + \|A\|\,\|x' - x\| \leqslant 2c\varepsilon + \|A_n x' - Ax'\|.$$

Воспользуемся сходимостью $\{A_n x'\}$ к Ax'. Найдем номер N такой, что при любых $n > N$ будет $\|A_n x' - Ax'\| < \varepsilon$. Тогда для всех $n > N$

$$\|A_n x - Ax\| < (2c + 1)\varepsilon,$$

и достаточность доказана.

11.6. Продолжение линейного оператора по непрерывности. Пусть A — линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в нормированном пространстве X, и с областью значений в нормированном пространстве Y. На такие операторы можно перенести понятие ограниченности и нормы. Будем говорить, что A ограничен на $D(A)$, если

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A),\ \|x\| \leqslant 1} \|Ax\| < +\infty,$$

($\|A\|$ называется *нормой* оператора A).

Упражнение. Доказать, что A ограничен на $D(A)$ тогда и только тогда, когда найдется постоянная $M > 0$ такая, что для любых $x \in D(A)$

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|.$$

Справедливо следующее предложение.

Теорема (о продолжении линейного оператора по непрерывности). *Пусть X — нормированное, а Y — банахово пространства и A — линейный оператор с $D(A) \subseteq X,\ R(A) \subseteq Y$, причем $\overline{D(A)} = X$ и на $D(A)$ оператор A ограничен. Тогда существует линейный ограниченный оператор $\widehat{A}$ такой, что*

1) $\widehat{A}x = Ax$ *для любого* $x \in D(A)$;

2) $\|\widehat{A}\| = \|A\|$.

Доказательство. Если $x \in D(A)$, положим $\widehat{A}x = Ax$. Пусть $x \in X$, но $x \notin D(A)$. Вследствие плотности $D(A)$ в X найдется $\{x_n\} \subset D(A)$, сходящаяся к x. Положим

$$\widehat{A}x = \lim_{n \to \infty} Ax_n.$$

Покажем, что данное определение корректно: указанный предел существует и не зависит от выбора последовательности, стремящейся к x. Для этого заметим, что $\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|A\|\,\|x_n - x_m\|$, откуда следует, что $\{Ax_n\}$ фундаментальная, а вследствие полноты Y сходящаяся.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ существует. Пусть теперь еще и $x'_n \to x$, $n \to \infty$, где $\{x'_n\} \subset D(A)$. Положим

$$a = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} Ax'_n;$$

тогда

$$\|a - b\| \leqslant \|a - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax'_n\| + \|Ax'_n - b\| \to 0,$$

поскольку

$$\|Ax_n - Ax'_n\| \leqslant \|A\| \, \|x_n - x'_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Далее, $\|Ax_n\| \leqslant \|A\| \, \|x_n\|$, откуда при $n \to \infty$ получим $\|\widehat{A}x\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$, т. е. $\|\widehat{A}\| \leqslant \|A\|$. Но

$$\|\widehat{A}\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\widehat{A}x\| \geqslant \sup_{x\in D(A),\ \|x\|\leqslant 1} \|\widehat{A}x\| = \|A\|$$

(sup на более широком множестве может разве лишь увеличиться). Итак, $\|\widehat{A}\| = \|A\|$.

Линейность $\widehat{A}$ вытекает из линейности A и свойства линейности предела (покажите!). Теорема доказана.

Построенное продолжение оператора A и называется *продолжением A по непрерывности*. Принципиально более сложным является случай, когда $\overline{D(A)} = X$, но A неограничен, на котором мы остановимся позднее.

11.7. Умножение элементов нормированных пространств. В п. 11.3 было показано, что в $\mathcal{L}(X)$ определено умножение элементов. Ранее мы встречались со скалярным произведением. Эти два случая умножения элементов, как и многие другие, описываются следующим общим определением.

Определение. Пусть даны три нормированных пространства U, V и W (все три вещественные или все три комплексные). Будем говорить, что для элементов $u \in U$ определено *умножение справа* на элементы $v \in V$ (или что для элементов $v \in V$ определено *умножение слева* на элементы $u \in U$), если каждой упорядоченной паре элементов (u, v) поставлен в соответствие определенный элемент $w \in W$, который мы будем обозначать $w = uv$ и называть *произведением* элементов u и v, и если при этом выполнены следующие свойства (аксиомы):

1) $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)v = \alpha_1(u_1 v) + \alpha_2(u_2 v)$;

2) $u(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1(uv_1) + \beta_2(uv_2)$;

3) $\|uv\|_W \leqslant c\|u\|_U \, \|v\|_V$, где c — некоторая постоянная, не зависящая от u и v (иногда в 3) полагают $c = 1$).

Иначе можно сказать так: определение означает, что задана функция двух переменных $w = \Phi(u, v)$, где $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$, линейная по u при каждом фиксированном v, линейная по v при каждом фиксированном u и ограниченная в смысле неравенства 3):

$$\|\Phi(u, v)\| \leqslant c\|u\| \, \|v\|.$$

Такая функция (оператор) Φ называется *билинейным оператором* (см. также п. 32.3). Приведем теперь примеры.

Пример 1. $V = U = H$ — пространство со скалярным произведением, W — вещественная ось или комплексная плоскость, в зависимости от того, вещественно или комплексно H. Здесь (u, v) — скалярное произведение.

Пример 2. $U = \mathcal{L}(X, Y)$, $V = X$, $W = Y$, где X, Y — нормированные или банаховы пространства. Здесь умножение элемента $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ на элемент $x \in X$ есть применение линейного оператора A к элементу x, в результате чего получается элемент $y \in Y$, $y = Ax$.

В частном случае, когда $Y = X$, имеем $U = \mathcal{L}(X)$, $W = V = X$.

Пример 3. $U = \mathcal{L}(Y, Z)$, $V = \mathcal{L}(X, Y)$, $W = \mathcal{L}(X, Z)$, где X, Y, Z — нормированные пространства. Здесь умножение элемента $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ на элемент $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ дает элемент $C = AB \in \mathcal{L}(X, Z)$ и является умножением линейных ограниченных операторов. Частный случай $U = V = W = \mathcal{L}(X)$ был подробно изучен нами в п. 11.3.

§ 12. Обратные операторы

Системы линейных алгебраических уравнений, интегральные уравнения, а также различные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными часто могут быть записаны в виде линейного уравнения $Ax = y$. Тем самым мы отвлекаемся от специфических и частных трудностей, присущих каждой конкретной задаче, и можем сосредоточить внимание на наиболее общих закономерностях. Если существует обратный оператор A^{-1}, то решение задачи записывается в явном виде: $x = A^{-1}y$. Важное значение приобретает теперь выявление условий, при выполнении которых обратный оператор существует и обладает теми или иными свойствами. В этом параграфе мы начинаем систематическое изучение большого круга вопросов, связанных с разрешимостью линейных уравнений.

12.1. Обратные операторы в линейных и в нормированных пространствах. Множество нулей $N(A)$. Теорема Банаха. Пусть задан линейный оператор $A\colon X \to Y$, где X, Y — линейные пространства, причем его область определения $D(A) \subseteq X$, а область значений $R(A) \subseteq Y$.

Введем множество $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ — множество нулей оператора A. Заметим, что $N(A)$ не пусто, так как $0 \in N(A)$.

Упражнение. Покажите, что $N(A)$ — линейное многообразие в X.

Вопрос о том, когда A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $D(A)$ и $R(A)$, решается следующей теоремой.

Теорема 1. *Оператор A переводит $D(A)$ в $R(A)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $N(A) = \{0\}$ (т. е. множество нулей A состоит только из элемента 0).*

Доказательство. Пусть $N(A) = \{0\}$. Допустим, тем не менее, что найдется $y \in R(A)$, имеющий два прообраза: $x_1, x_2 \in D(A)$, $x_1 \neq x_2$, но $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$A(x_1 - x_2) = 0.$$

Но это означает, что $x_1 - x_2 \in N(A) = \{0\}$. Значит, $x_1 = x_2$. Полученное противоречие и доказывает взаимную однозначность A.

Пусть теперь A взаимно однозначен. Допустим, что тем не менее $N(A) \neq \{0\}$. Возьмем $z \in N(A)$, $z \neq 0$. Пусть $y \in R(A)$. Уравнение $Ax = y$ имеет тогда решение x^* (вспомните определение $R(A)$). Рассмотрим $x^* + z$. Очевидно, $A(x^* + z) = y$ и $x^* + z \neq x^*$. Это означает, что каждое $y \in R(A)$ имеет по меньшей мере два различных прообраза: x^* и $x^* + z$. Получилось противоречие с условием теоремы. Значит, допущение $N(A) \neq \{0\}$ неверно, и теорема доказана.

Пусть линейный оператор A отображает $D(A)$ на $R(A)$ взаимно однозначно. Тогда существует обратный оператор A^{-1}, отображающий $R(A)$ взаимно однозначно на $D(A)$. Докажем, что оператор A^{-1} также является линейным оператором. Напомним сначала, что $R(A)$ является линейным многообразием в Y (см. теорему п. 10.5).

Пусть $y_1, y_2 \in R(A)$, $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$ — их прообразы. Для любых скаляров λ_1 и λ_2 имеем $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, или $\lambda_1 A^{-1}y_1 + \lambda_2 A^{-1}y_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$, что и означает линейность A^{-1}.

Пусть X и Y — нормированные пространства. Мы можем теперь исследовать вопрос об ограниченности оператора A^{-1}, если, конечно, он существует.

Теорема 2. *Оператор A^{-1} существует и одновременно ограничен на $R(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $m > 0$ и любого $x \in D(A)$ выполняется неравенство*

$$||Ax|| \geqslant m||x||. \tag{1}$$

Доказательство необходимости. Пусть A^{-1} существует и ограничен на $D(A^{-1}) = R(A)$. Это означает, что найдется $c > 0$ такое, что для любого $y \in R(A)$ будет $||A^{-1}y|| \leqslant c||y||$. Полагая $y = Ax$, получим (1).

Доказательство достаточности. Если выполнено неравенство (1), то если $Ax = 0$, т. е. $x \in N(A)$, то из (1) следует $x = 0$. Значит, $N(A) = \{0\}$. По теореме 1 существует A^{-1}, отображающий $R(A)$ взаимно однозначно на $D(A)$. Полагая в (1) $x = A^{-1}y$, получим $||A^{-1}y|| \leqslant m^{-1}||y||$ для всех $y \in R(A)$, т. е. A^{-1} ограничен на $R(A)$. Теорема доказана.

Введем теперь следующее важное понятие.

Определение. Будем говорить, что линейный оператор $A:$

$X \to Y$ *непрерывно обратим*, если $R(A) = Y$, оператор A обратим и $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ (т. е. ограничен).

Обращаясь к теореме 2, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Оператор A непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $R(A) = Y$ и для некоторой постоянной $m > 0$ и для всех $x \in D(A)$ выполняется неравенство* (1).

В случае всюду определенного и ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ имеется теорема Банаха об обратном операторе. Ограничимся здесь формулировкой этой теоремы (см. п. 15.4).

Теорема 4. *Если A — ограниченный линейный оператор, отображающий взаимно однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y, то обратный оператор A^{-1} ограничен.*

Иными словами, если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, где X и Y банаховы, $R(A) = Y$ и A обратим, то A непрерывно обратим.

Взглянем на понятие непрерывно обратимого оператора с точки зрения разрешимости линейного уравнения

$$Ax = y. \tag{2}$$

Если A непрерывно обратим, то уравнение это имеет единственное решение $x = A^{-1}y$ для любой правой части y. Если при этом $\widetilde{x} = A^{-1}\widetilde{y}$ (решение того же уравнения с правой частью $\widetilde{y}$), то $\|x - \widetilde{x}\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|y - \widetilde{y}\|$. Это означает, что малое изменение правой части y влечет малое изменение решения, или, как принято говорить, задача (2) корректно разрешима.

12.2. Примеры обратных операторов.

Пример 1. В линейном пространстве m-мерных столбцов $\mathbf{R}^m$ (см. п. 10.9) рассмотрим линейный оператор $y = Ax$, записываемый в матричном виде (2) п. 10.9. Пусть $\det(a_{ij}) \neq 0$. Тогда, согласно правилу Крамера (см. [5]), систему (2) можно разрешить однозначно относительно переменных $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и найти обратный оператор $x = A^{-1}y$, причем A^{-1} задается обратной к (a_{ij}) матрицей.

Упражнение 1. Пусть линейный оператор A, действующий в $\mathbf{R}^3$, задан матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдите A^{-1}. Дайте оценку $\|A^{-1}\|$ в пространствах $\mathcal{L}(c^3)$ и $\mathcal{L}(l_2^{(3)})$ с помощью постоянных γ_3 и β_3 примеров 1 и 2 п. 10.9.

Пример 2. Рассмотрим в пространстве m (см. п. 2.5) ограниченных числовых последовательностей линейный оператор A, заданный бесконечной треугольной матрицей (a_{ij}):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots \end{bmatrix}.$$

Пусть ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{i1}|$, $\sum\limits_{i=2}^{\infty} |a_{i2}|$, ... , $\sum\limits_{i=n}^{\infty} |a_{in}|$, ... сходятся. Тогда, согласно примеру 1 п. 10.10, оператор A ограничен.

Упражнение 2. Пусть $a_{kl} = (2^{k+1-l})^{-1}$ $(k \geqslant l)$. Вычислите A^{-1}. Покажите, что A непрерывно обратим.

Пример 3. Рассмотрим в $C[0, 1]$ простейшее интегральное уравнение ($y(t) \in C[0, 1]$)

$$(Ax)(t) \equiv x(t) - \int\limits_0^1 tsx(s)\,ds = y(t).$$

Заметим, что $x(t) = y(t) + ct$, где $c = \int\limits_0^1 sx(s)\,ds$. Интегрируя равенство $tx(t) = ty(t) + ct^2$ на $[0, 1]$, находим $c = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 sy(s)\,ds$. Следовательно, при любой правой части $y(t)$ решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t) = y(t) + \frac{3}{2}\int\limits_0^1 sty(s)\,ds \equiv (A^{-1}y)(t).$$

Мы доказали непрерывную обратимость A (см. п. 10.11).

Пример 4. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Пусть функции $y(t)$ и $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны на $[0, T]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ax \equiv x^{(n)}(t) + a_1(t)\,x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,x(t) = y(t). \tag{1}$$

Будем решать для него задачу Коши, т. е. найдем его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0. \tag{2}$$

С операторной точки зрения это означает следующее: область определения $D(A)$ пусть состоит из n раз непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям (2).

Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — система из n линейно независимых решений соответствующего (1) однородного уравнения (т. е. (1) при $y(t) \equiv 0$). Составим определитель Вронского

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Известно (см. [28],[33]), что $w(t) \neq 0$ на $[0,\, T]$. Согласно методу Лагранжа вариации произвольных постоянных решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$x(t) = c_1(t)\, x_1(t) + \ldots + c_n(t)\, x_n(t),$$

причем для произвольных неизвестных функций $c_i(t)$ возникает следующая система уравнений:

$$\begin{gathered} c_1'(t)\, x_1(t) + \ldots + c_n'(t)\, x_n(t) = 0, \\ c_1'(t)\, x_1'(t) + \ldots + c_n'(t)\, x_n'(t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(t)\, x_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c_n'(t)\, x_n^{(n-1)}(t) = y(t). \end{gathered}$$

Решая ее по правилу Крамера, находим

$$c_k'(t) = \frac{w_k(t)}{w(t)}\, y(t), \quad k = 1,\, \ldots\, ,\, n,$$

где $w_k(t)$ — алгебраическое дополнение k-го элемента n-й строки определителя $w(t)$.

Учитывая начальные условия (2), находим решение задачи (1), (2) в явном виде:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \int\limits_0^t \frac{w_k(s)}{w(s)} y(s) ds. \tag{3}$$

Это решение единственно, что следует из общей теоремы существования и единственности решения задачи Коши (см.[33]).

Из формулы (3) вытекает непрерывная обратимость оператора A. Действительно (см. (1)),

$$\|x\|_{C[0,\,T]} \leqslant c\|y\|_{C[0,\,T]},$$

где

$$c = \max_{[0,\,T]} \sum_{k=1}^{n} |x_k(t)| \int\limits_0^t \left| \frac{w_k(s)}{w(s)} \right| ds.$$

П р и м е р 5. Для дифференциального уравнения (1) рассмотрим более общую задачу Коши: найти решение (1), удовлетворяющее начальным условиям ($x_0,\, x_1,\, \ldots\, ,\, x_{n-1}$ заданы)

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,\, \ldots\, , \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \tag{4}$$

Решение задачи (1), (4) также дается явной формулой:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \int\limits_0^t \frac{w_k(s)}{w(s)}\, y(s)\, ds + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k(t), \tag{5}$$

где постоянные α_k определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k^{(l)}(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1,$$

с определителем $w(0) \neq 0$.

С операторной точки зрения этот результат следует трактовать так: оператор B определен на $D(B)$, состоящем из n раз непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций $D(B) \subset C[0, T]$, и действует в пространство Y, каждый элемент которого состоит из функции $y(t) \in C[0, T]$ и вектора $(x^{(i)}(0))_{i=0}^{n-1} \in E^n$. Короче, B действует по формуле (см. (1))

$$Bx = \{Ax;\ x(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)\}.$$

Как и в примере 4, из формулы (5) вытекает непрерывная обратимость оператора B.

12.3. Левый и правый обратные операторы.
Определение 1. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ будем называть *правым обратным к* A, если $AU = I_Y$.

Определение 2. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $V \in \mathcal{L}(Y, X)$ будем называть *левым обратным к* A, если $VA = I_X$.

Здесь через I_Y обозначен тождественный оператор в пространстве Y, а через I_X — тождественный оператор в пространстве X. Ниже для правого обратного к A используем обозначение A_r^{-1}, а для левого — A_l^{-1}.

Интересно взглянуть на эти определения с точки зрения существования и единственности решения уравнения

$$Ax = y. \tag{1}$$

Лемма 1. *Если существует правый обратный A_r^{-1} к A, то уравнение* (1) *имеет решение*

$$x = A_r^{-1} y.$$

Если существует левый обратный к A, то уравнение (1) *может иметь не более одного решения.*

Замечание 1. В первом случае говорят, что для уравнения (1) справедлива теорема существования, а во втором — теорема единственности.

Доказательство леммы.

$$A(A_r^{-1} y) = (AA_r^{-1}) y = y,$$

т. е. $x = A_r^{-1} y$ обращает (1) в тождество и, значит, является решением. Далее, пусть существует A_l^{-1}. Рассмотрим $N(A)$. Пусть $x \in N(A)$, тогда $Ax = 0$. Применим к этому равенству оператор A_l^{-1}, тогда $A_l^{-1} Ax = 0$, откуда $x = 0$. Итак, всякое $x \in N(A)$ оказывается равным 0. Значит, $N(A) = \{0\}$ и, по теореме 1 п. 12.1, A взаимно однозначен, т. е. для уравнения (1) справедлива теорема единственности.

Замечание 2. Если существует A_r^{-1}, то $R(A) = Y$. Если существует A_l^{-1}, то $N(A) = \{0\}$. Это замечание является перефразировкой леммы.

Приведем примеры, иллюстрирующие понятия правого и левого обратного операторов. Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_1^\infty$.

Пример 1. Зададим линейный оператор A в H следующим образом:

$$Ae_1 = 0, \quad Ae_l = e_{l-1}, \quad l = 2, 3, \ldots$$

Элемент $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ принадлежит H тогда и только тогда, когда $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < +\infty$ (см. п. 6.5).

Упражнение 1. Показать, что $R(A) = H$, а $N(A)$ — одномерное пространство, натянутое на вектор e_1 (см. п. 12.1).

Зададим линейный оператор A_r^{-1} формулами

$$A_r^{-1} e_k = e_{k+1} + \gamma_k e_1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — некоторые постоянные такие, что сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^2$. Если $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty\right)$, то

$$A_r^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_{k+1} + e_1 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta_k$$

(по неравенству Коши–Буняковского ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k \eta_k$ сходится).

Упражнение 2. Показать, что $A_r^{-1} A = I$.

Таким образом, оператор A имеет семейство правых обратных операторов, зависящее от произвольного вектора

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k \in H.$$

Пример 2. В том же гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный оператор B, заданный формулами

$$Be_k = e_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Упражнение 3. Показать, что $N(B) = \{0\}$, а $R(A)$ состоит из векторов, ортогональных e_1.

Зададим в H линейный оператор B_l^{-1} следующим образом:

$$B_l^{-1} e_{k+1} = e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad B_l^{-1} e_1 = z,$$

где z — произвольный вектор из H.

Упражнение 4. Показать, что $BB_l^{-1} = I$.

Таким образом, оператор B имеет семейство левых обратных операторов, зависящее от произвольного элемента $z \in H$. Приведенные примеры показывают, что, в общем случае, нельзя говорить о единственности правого и левого обратных операторов.

Тем не менее справедлива

Лемма 2. *Пусть для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ существуют A_r^{-1} и A_l^{-1}. Тогда существует оператор A^{-1}, обратный к A, и*

1) $A^{-1} = A_r^{-1} = A_l^{-1}$;

2) $D(A^{-1}) = Y,\ R(A^{-1}) = X$;

3) *правый обратный к A и левый обратный к A единственны.*

Доказательство. Из существования A_r^{-1} и A_l^{-1}, согласно теореме Банаха и замечанию 1, имеем: A отображает X на Y взаимно однозначно, т. е. A всюду обратим. Пусть A^{-1} — оператор, обратный к A. Утверждение 2) леммы очевидно. Докажем единственность правого и левого обратных к A. Пусть U — еще один левый обратный к A, а V — еще один правый обратный к A. Имеем равенства

$$VA = I_X, \quad A_l^{-1}A = I_X,$$

откуда $(V - A_g^{-1})A = 0$. Применяя справа оператор A^{-1}, получим $V = A_g^{-1}$. Аналогично доказывается, что $U = A_\alpha^{-1}$. Поскольку за V и за U можно принять A^{-1}, отсюда получаем и первое утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, и пусть существует оператор $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ такой, что*

$$UA = I_X, \quad AU = I_Y;$$

тогда A непрерывно обратим и $A^{-1} = U$.

Доказательство. Поскольку U является и левым обратным, и правым обратным к A, то по лемме 2

$$A^{-1} = U \in \mathcal{L}(X, Y).$$

12.4. Существование $(I - C)^{-1}$. В этом и в следующем пунктах будут доказаны две теоремы об обратных операторах, часто используемые в последующем изложении. Очень важны также доказываемые при этом оценки обратных операторов. Среди применений отметим, в частности, метод малого параметра (см. пп. 13.5–13.7), метод продолжения по параметру (см. § 14), а также приложения к оценкам погрешностей приближенных решений линейных уравнений (см. § 22).

Пусть X — банахово пространство. Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{L}(X)$ — пространство линейных, ограниченных, всюду заданных операторов. Пусть I — тождественный оператор в $\mathcal{L}(X)$. Очевидно, I непрерывно обратим. В этом пункте доказывается, что вместе с I непрерывно обратимы все операторы $A \in S_1(I)$ — единичного шара в $\mathcal{L}(X)$, т. е. все такие A, для которых справедливо неравенство $\|A - I\| < 1$. Для краткости положим $C = I - A$.

Теорема. *Пусть $C \in \mathcal{L}(X)$ и $\|C\| < 1$; тогда оператор $I - C$ непрерывно обратим. При этом справедливы оценки*

$$\|(I - C)^{-1}\| \leqslant (1 - \|C\|)^{-1}, \tag{1}$$

$$\|I - (I - C)^{-1}\| \leqslant \|C\| \, (1 - \|C\|)^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим в $\mathcal{L}(X)$ ряд

$$I + C + C^2 + C^3 + \ldots \tag{3}$$

Так как $\|C^k\| \leqslant \|C\|^k$, то ряд (3) оценивается сходящимся числовым рядом — геометрической прогрессией

$$1 + \|C\| + \|C\|^2 + \|C\|^3 + \ldots$$

По признаку Вейерштрасса (см. теорему 2 п. 5.6) ряд (3) сходится равномерно, т. е.

$$S_n = I + C + \ldots + C^n \to S, \quad n \to \infty,$$

где S — сумма ряда (3). Далее простой проверкой убеждаемся, что

$$(I - C)S_n = I - C^{n+1},$$

$$S_n(I - C) = I - C^{n+1}.$$

Но при $n \to \infty$ $C^{n+1} \to 0$ (ибо $\|C^{n+1}\| \leqslant \|C\|^{n+1}$ и $\|C\| < 1$), а $S_n \to$ $\to S$. Поэтому в пределе имеем равенства $(I - C)S = I$ и $S(I - C) = I$. По лемме 1 п. 12.3 отсюда заключаем, что $I - C$ непрерывно обратим и $S = (I - C)^{-1}$. Далее,

$$\|S_n\| \leqslant 1 + \|C\| + \ldots + \|C\|^n = \frac{1 - \|C\|^{n+1}}{1 - \|C\|},$$

$$\|I - S_n\| \leqslant \|C\| + \ldots + \|C\|^n = \frac{\|C\| - \|C\|^{n+1}}{1 - \|C\|}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получаем оценки (1) и (2).

12.5. Существование $(A - C)^{-1}$. Рассуждение п. 12.4 мы перенесем теперь на более общий случай пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно обратим. Будет показано, что существует шар $S_r(A) \subset \mathcal{L}(X, Y)$, все операторы из которого будут непрерывно обратимы. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $A_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $A_2 \in \mathcal{L}(Y, Z)$ непрерывно обратимы. Тогда $A_2 A_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$ непрерывно обратим и $(A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \in$ $\in \mathcal{L}(Z, X)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что оператор $U = A_1^{-1}A_2^{-1} \in \mathcal{L}(Z, X)$ является обратным к A_2A_1, и воспользоваться леммой 3 п. 12.3.

Теорема. *Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, A непрерывно обратим и выполнено неравенство*

$$\|(B - A)A^{-1}\| < 1. \tag{1}$$

Тогда B непрерывно обратим и справедливы оценки

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|}, \tag{2}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\| \, \|(B - A)A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|}. \tag{3}$$

Доказательство. Представим оператор B в виде $B = A-(A-B) = [I - (A - B)A^{-1}]A$. Воспользуемся леммой при $A_1 = A$, $A_2 = I - (A - B)A^{-1}$. Оператор A_1 непрерывно обратим по условию, и $A_1^{-1} = A^{-1}$.

Далее, так как $\|(A - B)A^{-1}\| < 1$, то по теореме предыдущего пункта оператор A_2 также непрерывно обратим, и, следовательно,

$$B^{-1} = A^{-1}[I - (A - B)A^{-1}]^{-1}.$$

Оценки (2) и (3) теперь очевидным образом следуют из оценок (1), (2) п. 12.4.

Следствие. *Пусть A непрерывно обратим и справедлива оценка*

$$\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}. \tag{4}$$

Тогда B непрерывно обратим, *причем*

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|B - A\| \, \|A^{-1}\|}, \tag{5}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \, \|B - A\|}{1 - \|B - A\| \, \|A^{-1}\|}. \tag{6}$$

Доказательство. Заметим, что $\|(B - A)A^{-1}\| \leqslant \|B - A\| \, \|A^{-1}\|$ и если имеет место неравенство (4), то тем более имеет место неравенство (1). Оценки (5), (6) вытекают из оценок (2), (3), так как дробь может только увеличиться, если числитель ее заменить большим числом, а знаменатель — меньшим. Упражнение. Пусть $B - A = C$. Дайте аналоги условий снществования оператора $(A-C)^{-1}$ и приведите соответствующие оценки.

§ 13. Абстрактные функции числовой переменной. Степенные ряды. Метод малого параметра

13.1. Предел и непрерывность. Пусть Λ — некоторое множество на числовой оси или в комплексной плоскости, а X — нормированное пространство.

Рассмотрим функцию $x(\lambda)$ с областью определения Λ и с областью значений в X. Такие функции принято называть *абстрактными функциями числовой переменной* или *векторными функциями числовой переменной*, поскольку элементы линейного (иначе — векторного) пространства мы называем также векторами. На абстрактные функции числовой переменной без особого труда переносятся многие понятия и факты математического анализа, из которых мы ограничимся пока сведениями о пределах и непрерывности, о разложении в степенные ряды, а также о понятии аналитичности абстрактной функции. Эти сведения понадобятся нам в связи с предлагаемыми ниже приложениями теорем об обратных операторах.

Пусть $x(\lambda)$ определена в окрестности точки λ_0, за исключением, быть может, самой точки λ_0. Элемент $a \in X$ будем называть *пределом функции* $x(\lambda)$ при $\lambda \to \lambda_0$ и записывать

$$a = \lim_{\lambda \to \lambda_0} x(\lambda) \quad \text{или} \quad x(\lambda) \to a \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0,$$

если $\|x(\lambda) - a\| \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Упражнение 1. Пусть при $\lambda \to \lambda_0$ $x(\lambda) \to a$, а $\varphi(\lambda) \to \alpha$ ($\varphi(\lambda)$ — скалярная функция); тогда $\varphi(\lambda)x(\lambda) \to \alpha a$ при $\lambda \to \lambda_0$. Если при $\lambda \to \lambda_0$ $x(\lambda) \to a$, $y(\lambda) \to b$, то $x(\lambda) + y(\lambda) \to a + b$, $\lambda \to \lambda_0$.

Упражнение 2. Если $x(\lambda) \to a$, $\lambda \to \lambda_0$, то $\|x(\lambda)\| \to \|a\|$, $\lambda \to \lambda_0$. Отсюда: $x(\lambda)$ ограничена в некоторой окрестности точки λ_0 с выброшенной точкой λ_0.

Замечание. В случае вещественного переменного λ аналогично определяются односторонние пределы абстрактной функции.

Пусть $x(\lambda)$ определена в окрестности точки λ_0. Назовем $x(\lambda)$ *непрерывной в точке* λ_0, если $x(\lambda) \to x(\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$.

Упражнение 3. Пусть абстрактные функции $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ и скалярная функция $\varphi(\lambda)$ непрерывны в точке λ_0; тогда $\varphi(\lambda)x(\lambda)$ и $x(\lambda) + y(\lambda)$ непрерывны в λ_0 (воспользоваться упражнением 1).

Упражнение 4. Пусть $x(\lambda)$ непрерывна в точке λ_0, тогда $\|x(\lambda)\|$ непрерывна в λ_0. Найдется окрестность точки λ_0, в которой $x(\lambda)$ ограничена.

Важный частный случай абстрактных функций представляют собой оператор-функции. Пусть X, Y — банаховы пространства. В пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ будем рассматривать операторные функции $A(\lambda)$ числового переменного λ (при каждом $\lambda \in \Lambda$ $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$). Все изложенное выше справедливо, разумеется, и для оператор-функций.

Упражнение 5. Дайте определение предела оператор-функции $A(\lambda)$ в точке λ_0 и ее непрерывности в этой точке.

Упражнение 6. Пусть даны абстрактная функция $x(\lambda)$ со значениями в банаховом пространстве X и оператор-функция $A(\lambda)$ со значениями в $\mathcal{L}(X, Y)$, где Y банахово. Если $x(\lambda) \to a$, а $A(\lambda) \to A$ при $\lambda \to \lambda_0$, то $A(\lambda)\,x(\lambda) \to Aa$ при $\lambda \to \lambda_0$. Если $x(\lambda)$ и $A(\lambda)$ непрерывны в точке λ_0, то $A(\lambda)\,x(\lambda)$ непрерывна в этой точке.

Пусть теперь абстрактная функция $x(\lambda)$ определена на $[\alpha, \beta]$. Будем говорить, что $x(\lambda)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, если она непрерывна в каждой точке (α, β), непрерывна справа в точке α (т. е. $x(\lambda) \to x(\alpha)$ при $\lambda \to \alpha + + 0$) и непрерывна слева в точке β (т. е. $x(\lambda) \to x(\beta)$ при $\lambda \to \beta - 0$).

Справедливо следующее утверждение: если $x(\lambda)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то она ограничена на нем. Доказательство проводится по известной схеме (см. [21]).

13.2. Дифференцирование абстрактных функций. Пусть функция $x(\lambda)$ числового переменного λ со значениями в банаховом пространстве X определена в окрестности точки λ_0.

По определению производной $x'(\lambda_0)$ функции $x(\lambda)$ в точке λ_0 называется предел

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0},$$

если этот предел существует (и конечен). Если $x(\lambda)$ имеет производную в точке λ_0, то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Предлагаем читателю доказать ряд свойств производной по схеме, известной из курса математического анализа.

Упражнение 1. Если $x(\lambda)$ дифференцируема в точке λ_0, то она непрерывна в этой точке.

Упражнение 2. Если $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ дифференцируемы в точке λ_0, то $x(\lambda) + y(\lambda)$ дифференцируема в точке λ_0 и

$$(x + y)'(\lambda_0) = x'(\lambda_0) + y'(\lambda_0).$$

Упражнение 3. Если абстрактная функция $x(\lambda)$ и скалярная функция $\varphi(\lambda)$ дифференцируемы в точке λ_0, то $\varphi(\lambda)\, x(\lambda)$ также дифференцируема в λ_0 и

$$(\varphi x)'(\lambda_0) = \varphi'(\lambda_0)\, x(\lambda_0) + \varphi(\lambda_0)\, x'(\lambda_0).$$

Упражнение 4. Если абстрактная функция $x(\lambda) \in X$ и оператор-функция $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ дифференцируемы в λ_0, то $A(\lambda)x(\lambda)$ тоже дифференцируема в λ_0, причем

$$(Ax)'(\lambda_0) = A'(\lambda_0)\, x(\lambda_0) + A(\lambda_0)\, x'(\lambda_0).$$

Упражнение 5. Пусть оператор-функция $A(\lambda)$ дифференцируема в точке λ_0 и непрерывно обратима в окрестности точки λ_0; тогда $A^{-1}(\lambda)$ дифференцируема в точке λ_0, причем

$$(A^{-1})'(\lambda_0) = -A^{-1}(\lambda_0)A'(\lambda_0)A^{-1}(\lambda_0).$$

Производные $x(\lambda)$ высших порядков определяются последовательно. Пусть $x'(\lambda)$ существует в точках некоторого открытого множества $\mathfrak{M}$. Если эта абстрактная функция снова дифференцируема в точках $\mathfrak{M}$, то полагают $x''(\lambda) = [x']'(\lambda)$. По индукции, если $x^{(k)}(\lambda)$ уже определена и дифференцируема, то полагают $x^{(k+1)}(\lambda) = [x^{(k)}]'(\lambda)$. Используя для обозначения производной символ $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$, можно написать $x^{(k)}(\lambda) = \mathrm{d}^k x/\mathrm{d}\lambda^k$.

Если абстрактная функция $x(\lambda)$ имеет в точке λ_0 производные любых порядков, то в этом случае говорят, что $x(\lambda)$ бесконечно дифференцируема в точке λ_0.

13.3. Степенные ряды. Рассмотрим в нормированном пространстве X ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k(\lambda-\lambda_0)^k$, где $x_k \in X$, а λ — вещественная или комплексная переменная. Поскольку можно ввести новую переменную $\lambda - \lambda_0 = \mu$, то в дальнейшем мы полагаем $\lambda_0 = 0$ и рассматриваем степенные ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k. \tag{1}$$

Степенные ряды — это специальный случай рядов в нормированном пространстве, когда члены ряда зависят от параметра λ. Конечная сумма $s_n(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k\lambda^k$ называется *частичной суммой* степенного ряда (1).

Пусть Ω — множество всех точек λ, для которых ряд (1) сходится. Ω называется *областью сходимости* ряда (1).

Сумму ряда (1) при $\lambda \in \Omega$ обозначим через $s(\lambda)$ (это абстрактная функция, определенная на Ω со значениями в X), при этом будем писать

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k = s(\lambda), \quad \lambda \in \Omega.$$

Последнее равенство означает, что $s_n(\lambda) \to s(\lambda)$ при $n \to \infty$ для всех $\lambda \in \Omega$.

Очевидно, область сходимости любого степенного ряда (1) не пуста, так как $0 \in \Omega$. Как и в случае скалярных функций, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (Абель). *Пусть $\lambda_0 \neq 0$ и $\lambda_0 \in \Omega$; тогда круг $S_{|\lambda_0|}(0)$ содержится в Ω. Во всяком круге $\bar{S}_r(0)$, где $r < |\lambda_0|$, ряд (1) сходится абсолютно и равномерно относительно λ.*

Доказательство. Так как $\lambda_0 \in \Omega$, то $x_n\lambda_0^n \to 0$, $n \to \infty$ (общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю!). Следовательно, последовательность $\{x_n\lambda_0^n\}$ ограничена, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $\|x_n\lambda_0^n\| \leqslant M$ для $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $|\lambda| < |\lambda_0|$. Имеем оценку

$$\|x_n\lambda^n\| = \left\|x_n\lambda_0^n\,\frac{\lambda^n}{\lambda_0^n}\right\| = \|x_n\lambda_0^n\|\left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|^n \leqslant M\left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|^n.$$

Поскольку $|\lambda/\lambda_0| < 1$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\lambda/\lambda_0|^n$ сходится (как геометрическая прогрессия), то сходится и ряд (1) (при данном λ). Итак, круг $|\lambda| < |\lambda_0|$ лежит в Ω. Если же $|\lambda| \leqslant r < |\lambda_0|$, то имеем более сильную оценку

$$\|x_n\lambda^n\| \leqslant M(r/|\lambda_0|)^n$$

и, по признаку Вейерштрасса, сходимость абсолютная и равномерная по λ.

Введем теперь радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \sup_{\lambda \in \Omega} |\lambda|.$$

Из определения R и теоремы Абеля вытекает следующее:

1) Если $R = 0$, то $\Omega = \{0\}$ и ряд сходится в единственной точке $\lambda = 0$.

2) Если $0 < R < +\infty$, то круг в вещественном случае — интервал $S_R(0) \subset \Omega$. Граница $S_R(0)$ может содержать точки из Ω или не содержать их.

3) Если $R = +\infty$, то ряд сходится при любых значениях λ (Ω — вся комплексная плоскость или вся вещественная ось).

$S_R(0)$ называется кругом (интервалом) сходимости ряда (1).

Отметим без доказательства, что справедлива формула Коши–Адамара:

$$R = \left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} \right)^{-1}.$$

Здесь $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ — верхний предел a_n, т.е. самая правая предельная точка $\{a_n\}$. Если существует (конечный или бесконечный) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x_n\|} = l$, то $R = 1/l$.

Иногда полезно иметь оценку для R снизу.

Следующая элементарная лемма может служить этой цели.

Лемма. *Пусть существуют постоянные $M > 0$ и $k > 0$ такие, что $\|x_n\| \leqslant Mk^n$, начиная с некоторого номера; тогда для радиуса сходимости ряда* (1) *справедлива оценка $R \geqslant 1/k$.*

Доказательство. Достаточно показать, что в круге $|\lambda| < k^{-1}$ ряд (1) сходится. Пусть $|\lambda/k| = q < 1$. Тогда, начиная с некоторого номера,

$$\|x_n \lambda^n\| = \|x_n\| \, |\lambda|^n \leqslant M(|\lambda/k|)^n = Mq^n.$$

Ряд (1) оценивается сходящимся рядом и, значит, сам сходится. Лемма доказана.

В приложениях степенных рядов важную роль играет следующая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть два степенных ряда равны в круге $S_R(0)$, $R > 0$:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{x}_k \lambda^k; \tag{2}$$

тогда равны все их коэффициенты: $\widetilde{x}_k = x_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Так как $\lambda = 0 \in S_R(0)$, то, полагая в (2) $\lambda = 0$, получим $\widetilde{x}_0 = x_0$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x}_k \lambda^{k-1},$$

откуда $x_1 = \widetilde{x}_1$. По индукции получаем равенство всех коэффициентов.

13.4. Аналитические абстрактные функции и ряды Тейлора.

Определение 1. Абстрактную функцию $x(\lambda)$ будем называть *аналитической* при $\lambda = 0$, если она представима в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ сходящимся степенным рядом

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \tag{1}$$

с ненулевым радиусом сходимости.

Теорема 1. *Если $x(\lambda)$ — аналитическая абстрактная функция при $\lambda = 0$, то $x(\lambda)$ непрерывна в круге $S_R(0)$, где R — радиус сходимости степенного разложения* (1).

Доказательство. Заметим сначала, что если $\rho \in (0, R)$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|\rho^{k-1}$ сходится. Действительно, пусть $\tilde{\rho} \in (\rho, R)$. Тогда $\|x_k\|\tilde{\rho}^k \leqslant M$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (см. доказательство теоремы Абеля). Далее,

$$k\|x_k\|\rho^{k-1} = \|x_k\|\tilde{\rho}^k \frac{k}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{k-1} \leqslant \frac{M}{\tilde{\rho}} k q^{k-1},$$

где $q = \rho/\tilde{\rho} < 1$. Осталось заметить, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$ сходится (почему?). Положим

$$c_1(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|\rho^{k-1}.$$

Пусть теперь $\lambda,\ \lambda_0 \in S_\rho(0)$. Тогда

$$x(\lambda) - x(\lambda_0) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}\lambda_0 + \ldots + \lambda_0^{k-1})(\lambda - \lambda_0),$$

откуда $\|x(\lambda) - x(\lambda_0)\| \leqslant c_1(\rho)|\lambda - \lambda_0|$, и непрерывность $x(\lambda)$ в любой точке $\lambda_0 \in S_R(0)$ доказана.

Следствие 1. *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx_k\lambda^{k-1}$ сходится в $S_R(0)$.*

Для доказательства достаточно взять $\rho \in (|\lambda|, R)$ и воспользоваться сходимостью мажорантного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\|x_k\|\rho^{k-1}$, полученной в ходе доказательства теоремы 1.

Теорема 2. *Если $x(\lambda)$ — абстрактная аналитическая функция при $\lambda = 0$, то $x(\lambda)$ дифференцируема в круге $S_R(0)$ сходимости своего степенного разложения.*

Доказательство. Заметим сначала, что при $\rho \in (0, R)$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)\|x_k\|\rho^{k-2}$ (доказательство этого факта мы предоставляем читателю). Пусть $c_2(\rho)$ — сумма этого ряда. Далее воспользуемся элементарным тождеством

$$\frac{\mu^k-\lambda^k}{\mu-\lambda}-k\lambda^{k-1}=k(k-1)\int\limits_0^1(1-\theta)[(1-\theta)\lambda+\theta\mu]^{k-2}\,d\theta(\mu-\lambda),\ \mu\neq\lambda.$$

Отсюда при $\mu,\ \lambda\in S_\rho(0)$ имеем

$$\left|\frac{\mu^k-\lambda^k}{\mu-\lambda}-k\lambda^{k-1}\right|\leqslant k(k-1)\rho^{k-2}|\mu-\lambda|.$$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx_k\lambda^{k-1}=u(\lambda)$ (см. следствие 1). Имеем следующую оценку:

$$\left\|\frac{x(\mu)-x(\lambda)}{\mu-\lambda}-u(\lambda)\right\|=\left\|\sum_{k=2}^{\infty}x_k\left[\frac{\mu^k-\lambda^k}{\mu-\lambda}-k\lambda^{k-1}\right]\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\|x_k\|\rho^{k-2}|\mu-\lambda|\leqslant c_2(\rho)|\mu-\lambda|.$$

Отсюда видно, что функция $x(\lambda)$ дифференцируема в $S_R(0)$ и $x'(\lambda)=u(\lambda)$.

Следствие 2. *Аналитическая абстрактная функция бесконечно дифференцируема в круге сходимости своего степенного ряда, причем*

$$x^{(l)}(\lambda)=\sum_{k=l}^{+\infty}k(k-1)\dots(k-l+1)x_k\lambda^{k-1}.$$

Доказательство получается многократным применением теоремы 2.

Определение 2. Пусть $x(\lambda)$ бесконечно дифференцируема в точке 0. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(k)}(0)}{k!}\lambda^k$$

называется *рядом Тейлора* функции $x(\lambda)$.

Из изложенного выше следует, что если $x(\lambda)$ аналитична при $\lambda=0$, то ее ряд Тейлора, в силу теоремы единственности п. 13.3, является ее степенным разложением и, значит, сходится к ней в $S_R(0)$.

В заключение заметим, что если абстрактная функция $x(\lambda)$ комплексного переменного λ со значениями в комплексном банаховом пространстве X непрерывно дифференцируема, то она аналитична. Этот факт доказывается как и в теории функций комплексного переменного (см. [19]) на основе интегральной формулы Коши для абстрактной функции (см. [8]).

Понятие абстрактной аналитической функции используется в широко применяемом на практике методе малого параметра (см. пп. 13.5–13.7, а также п. 36.5).

13.5. Метод малого параметра в простейшем случае. Рассмотрим сначала следующее уравнение:

$$Ax-\lambda Cx=y. \tag{1}$$

Здесь $A,\,C \in \mathcal{L}(X,\,Y)$ и $y \in Y$ заданы, A — непрерывно обратим, λ — скалярный параметр, $|\lambda| < \rho$, а неизвестное x разыскивается в X. Если $\|\lambda CA^{-1}\| < 1$, т. е.

$$|\lambda| < \|CA^{-1}\|^{-1}, \tag{2}$$

то, согласно п. 12.5, оператор $A - \lambda C$ непрерывно обратим, и тогда решение уравнения (1) существует, единственно и задается явной формулой

$$x(\lambda) = (A - \lambda C)^{-1}y. \tag{3}$$

Отсюда видно, что в круге (2) решение является аналитической функцией параметра λ и, следовательно, может быть найдено в виде

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k. \tag{4}$$

На этой идее основывается метод малого параметра для уравнения (1). Подставим ряд (4) в уравнение (1) и, согласно теореме единственности разложения в степенной ряд, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ в правой и левой частях получившегося тождества:

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ax_k\lambda^k = y + \sum_{k=0}^{\infty} Cx_k\lambda^{k+1}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей рекуррентной системе уравнений для определения $x_0,\,x_1,\,\ldots$:

$$Ax_0 = y, \quad Ax_1 = Cx_0,\,\ldots,\,Ax_k = Cx_{k-1},\,\ldots$$

Так как A непрерывно обратим, то отсюда последовательно находим

$$x_0 = A^{-1}y, \quad x_1 = A^{-1}(CA^{-1})y,\,\ldots,\,x_k = A^{-1}(CA^{-1})^k y,\,\ldots$$

Следовательно,

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-1}(CA^{-1})^k y\lambda^k. \tag{5}$$

Читатель легко убедится, что мы получили решение (3), разложенное в степенной ряд. Если мы хотим оборвать степенной ряд и ограничиться приближенным решением

$$x_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} A^{-1}(CA^{-1})^k y\lambda^k, \tag{6}$$

то можно оценить ошибку. Вычитая из ряда (5) его частичную сумму (6) и оценивая разность по норме, получим

$$\|x(\lambda) - x_n(\lambda)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-1}(CA^{-1})^k\, y\, \lambda^k \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A^{-1}\|\,\|CA^{-1}\|^k\,\|y\|\,|\lambda|^k = \frac{\|A^{-1}\|\,(\|CA^{-1}\|\,|\lambda|)^{n+1}}{1 - |\lambda|\,\|CA^{-1}\|}\,\|y\|.$$

13.6. Метод малого параметра в общем случае. Приведенные выше рассуждения являются наводящими при изучении следующего общего случая. Пусть дано уравнение

$$A(\lambda)x = y(\lambda). \tag{1}$$

Здесь $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X, Y)$ задана при каждом λ, $|\lambda| < \rho$, или, как говорят, $A(\lambda)$ — оператор-функция. Пусть $A(\lambda)$ аналитична при $\lambda = 0$, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим, $y(\lambda)$ — заданная аналитическая функция λ при $\lambda = 0$ со значениями в Y. Неизвестное x разыскивается в X.

Аналитичность $A(\lambda)$ и $y(\lambda)$ в точке 0 означает, что они разлагаются в следующие степенные ряды с ненулевыми радиусами сходимости, которые равны ρ' и ρ соответственно:

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \quad y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \lambda^k. \tag{2}$$

Из аналитичности $A(\lambda)$ следует непрерывность $A(\lambda)$ при $\lambda = 0$. Следовательно, найдется число $r > 0$ такое, что в круге $|\lambda| < r$

$$\big\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\big\| < 1.$$

Отсюда вытекает, что в круге $|\lambda| < r$ оператор-функция $A(\lambda)$ непрерывно обратима (см. п. 12.1) и, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение

$$x(\lambda) = A^{-1}(\lambda)\, y(\lambda);$$

при этом $x(\lambda)$ аналитична в точке $\lambda = 0$ и радиус сходимости соответствующего степенного ряда равен $\min(\rho, r)$. Для фактического построения $x(\lambda)$ удобно воспользоваться методом малого параметра. Будем разыскивать $x(\lambda)$ в виде

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k. \tag{3}$$

Подставляя ряд (3) в уравнение (1) и учитывая разложения (2), приходим к следующей системе для неопределенных коэффициентов $x_0, x_1, x_2, \ldots$:

$$\begin{gathered} A_0 x_0 = y_0, \quad A_0 x_1 + A_1 x_0 = y_1, \\ A_0 x_2 + A_1 x_1 + A_2 x_0 = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=0}^{n} A_k x_{n-k} = y_n, \ \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $A_0 = A(0)$ непрерывно обратим. Решая последовательно уравнения получившейся системы, находим

$$x_0 = A_0^{-1} y_0, \quad x_1 = A_0^{-1} y_1 - A_0^{-1} A_1 A_0^{-1} y_0, \ \ldots \tag{5}$$

Возникающие здесь формулы довольно громоздки, однако этим путем можно найти решение уравнения с любой степенью точности.

Как уже было отмечено выше, радиус сходимости ряда, полученного методом малого параметра, равен $R = \min(\rho, r)$, причем R не зависит от ρ' — радиуса сходимости степенного разложения оператора $A(\lambda)$. Дело в том, что метод малого параметра применим, как мы увидим ниже, и в случае неограниченной оператор-функции $A(\lambda)$.

Для оценки радиуса сходимости R ряда (3) снизу можно воспользоваться леммой из п. 13.3. Пусть нам удалось получить оценки

$$\|y_n\| \leqslant M_1\alpha^n, \quad \|A_nA_0^{-1}\| \leqslant M\beta^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда, согласно лемме, $\rho \geqslant \alpha^{-1}$. Кроме того,

$$\|[A(\lambda) - A(0)] \times A^{-1}(0)\| = \left\|\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} A_nA_0^{-1}\lambda^n\right\| \leqslant$$

$$\leqslant M|\lambda|\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(|\lambda|\beta)^{n-1} = \frac{M|\lambda|}{1-|\lambda|\beta} < 1, \quad \text{если } |\lambda| < 1/(M+\beta).$$

В результате мы получаем оценку R снизу:

$$R \geqslant \min(\alpha^{-1}, (M+\beta)^{-1}). \tag{6}$$

Упражнение. Показать, что если $A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1$ и $\|y_n\| \leqslant M_1\alpha^n$, $\|A_1A_0^{-1}\| \leqslant M$, то оценку (6) можно заменить более точной:

$$R \geqslant \min(\alpha^{-1}, M^{-1}).$$

Метод малого параметра особенно удобен в тех случаях, когда обращение оператора $A(0)$ — задача более простая, чем задача обращения оператора $A(\lambda)$.

13.7. Пример к методу малого параметра. В качестве примера на применение метода малого параметра рассмотрим следующее интегральное уравнение с малым вещественным параметром λ:

$$x(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\,(t - s + \lambda ts)\,x(s)\,ds = y(t), \tag{1}$$

которое мы можем интерпретировать как линейное операторное уравнение в $C[-\pi, \pi]$ вида (1) п. 13.6.

Заметим сначала, что

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\cos\,(t - s + \lambda ts) = (ts)^k\cos\left(t - s + \lambda ts + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\cos\,(t - s + \lambda ts) = \sum_{k=0}^{+\infty}(ts)^k\cos\left(t - s + k\frac{\pi}{2}\right)\lambda^k.$$

Таким образом, операторные коэффициенты A_k имеют здесь вид

$$A_0x \equiv x(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\,(t - s)\,x(s)\,ds, \tag{2}$$

$$A_k x \equiv -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (ts)^k \cos\left(t - s + k\frac{\pi}{2}\right) x(s)\, ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Начнем с уравнения $A_0 x_0 = y$ системы (4) п. 13.6, где у нас теперь $y_0 = y,\ y_k = 0,\ k \geqslant 1$. Это уравнение представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром

$$x_0(t) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t - s)\, x_0(s)\, ds = y(t). \tag{3}$$

Действительно, $\cos\,(t - s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s$, поэтому

$$x_0(t) = y(t) + A\cos t + B\sin t, \tag{4}$$

где

$$A = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x_0(s) \cos s\, ds, \quad B = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x_0(s) \sin s\, ds. \tag{5}$$

Умножим равенство (4) на $\cos t$ и, интегрируя по t от $-\pi$ до π, пользуясь (5), найдем

$$A = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(s) \cos s\, ds.$$

Аналогично

$$B = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(s) \sin s\, ds.$$

Следовательно, (4) принимает вид

$$x_0(t) = y(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\,(t - s)\, y(s)\, ds. \tag{6}$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что уравнение $A_0 x_0 = y$ имеет в $C[-\pi, \pi]$ единственное решение и это решение дается формулой (6). Следовательно, существует оператор A_0^{-1}, определенный всюду на $C[-\pi, \pi]$. Далее (все нормы — в $C[-\pi, \pi]$),

$$\|x_0\| = \|A_0^{-1} y\| \leqslant \|y\| + \frac{1}{\pi} \max_{t \in [-\pi, \pi]} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |cos(t - s)|\, ds\, \|y\| \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\right) \|y\|.$$

Следовательно, $\|A_0^{-1}\| \leqslant 1 + 4/\pi$.

Второе уравнение системы (4) п. 13.6 имеет вид $A_0x_1 = -A_1x_0$, или, подробней,

$$x_1(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)\, x_1(s)\, ds = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} ts\sin(t-s)\, x_0(s)\, ds,$$

где $x_0(s)$ уже определено формулой (6).

Это снова уравнение вида (3), и его решение также можно найти явной формулой. Так, последовательно, определяются все коэффициенты ряда (3) п. 13.6.

Дадим грубую оценку его радиуса сходимости R.

Нетрудно убедиться, что

$$\|A_k\| \leqslant \frac{2}{\pi}(\pi^2)^k = 2\pi(\pi^2)^{k-1} \text{ и, значит, } \|A_kA_0^{-1}\| \leqslant (2\pi+8)(\pi^2)^{k-1}.$$

Согласно формуле (6) п. 13.6 $R \geqslant 1/(\pi^2+2\pi+8)$.

§ 14. Метод продолжения по параметру

14.1. Формулировка основной теоремы. В качестве еще одного приложения теорем об обратных операторах рассмотрим один из вариантов метода продолжения по параметру. Пусть $A,\ B \in \mathcal{L}(X,\ Y)$ и A непрерывно обратим. Если $\|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, то, согласно теореме п. 12.5, B также непрерывно обратим. Оказывается, при определенных условиях можно доказать, что B будет непрерывно обратим и в том случае, когда он очень далек от A. Идея заключается в следующем. Рассмотрим непрерывную на отрезке $[0,\ 1]$ оператор-функцию $A(\lambda)$ такую, что $A(0) = A,\ A(1) = B$. Иначе говоря, в $\mathcal{L}(X,\ Y)$ рассматривается непрерывная кривая, соединяющая точки A и B. Будем предполагать, что для оператор-функции $A(\lambda)$ выполняется следующее условие:

I. Существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $\lambda \in [0,\ 1]$ и при любых $x \in X$ справедливо неравенство

$$\|A(\lambda)x\| \geqslant \gamma\|x\|. \tag{1}$$

Ниже будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $A(\lambda)$ — непрерывная на $[0,\ 1]$ оператор-функция (при каждом $\lambda \in [0,\ 1]$ $A(\lambda) \in \mathcal{L}(X,\ Y)$), оператор $A(0)$ непрерывно обратим. Если для $A(\lambda)$ выполняется условие I, то $A(1)$ непрерывно обратим, причем $\|A^{-1}(1)\| \leqslant \gamma^{-1}$.*

Доказательство этой теоремы мы проведем в двух случаях: в частном случае, когда $A(\lambda) = (1-\lambda)A + \lambda B$, т. е. $A(\lambda)$ — отрезок, соединяющий A и B, и в общем случае. Будут приведены также некоторые приложения метода к дифференциальным уравнениям. Заметим сначала, что из условия I вытекает следующий факт.

З а м е ч а н и е. Если выполнено условие I при $\lambda = \lambda_0 \in [0, 1]$ и оператор $A(\lambda_0)$ непрерывно обратим, то

$$\|A^{-1}(\lambda_0)\| \leqslant \gamma^{-1}. \tag{2}$$

Действительно, пусть $x \in X$, а $y = A(\lambda_0)x$, т. е. $x = A^{-1}(\lambda_0)y$. Тогда условие 1 дает $\|y\| \geqslant \gamma\|A^{-1}(\lambda_0)y\|$ или $\|A^{-1}(\lambda_0)y\| \leqslant \gamma^{-1}\|y\|$, что означает справедливость неравенства (2).

14.2. Простейший случай продолжения по параметру. Приведем здесь доказательство теоремы п. 14.1 для случая, когда $A(\lambda) = (1-\lambda)A + \lambda B$. Согласно условию этой теоремы $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. По замечанию п. 14.1 $\|A^{-1}\| \leqslant \gamma^{-1}$. Имеем следующую оценку:

$$\big\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\big\| = \|\lambda(B - A)A^{-1}\| \leqslant \lambda\gamma^{-1}\|B - A\|.$$

Пусть $\lambda \in [0, \delta]$, где $\delta = \gamma/(2\|B - A\|)$. На $[0, \delta]$ имеем $\big\|[A(\lambda) - A(0)]A^{-1}(0)\big\| \leqslant 1/2$, и, следовательно, по теореме п. 12.5 $A(\lambda)$ при всяком $\lambda \in [0, \delta]$ непрерывно обратим. Если окажется, что $\delta \geqslant 1$, то теорема доказана.

Пусть $\delta < 1$. Возьмем $A(\delta)$. Согласно замечанию п. 14.1 $\|A^{-1}(\delta)\| \leqslant \gamma$. Повторяем наши рассуждения при $\lambda > \delta$. Имеем оценку

$$\big\|[A(\lambda) - A(\delta)]A^{-1}(\delta)\big\| \leqslant \gamma^{-1}\|A(\lambda) - A(\delta)\| = \gamma^{-1}(\lambda - \delta)\|B - A\| \leqslant 1/2,$$

если $\lambda \in [\delta, 2\delta]$, откуда $A(\lambda)$ непрерывно обратим при каждом $\lambda \in [\delta, 2\delta]$. Если $2\delta \geqslant 1$, то теорема доказана. Если же $2\delta < 1$, то $\|A^{-1}(2\delta)\| \leqslant \gamma^{-1}$ и рассуждение можно повторить. После конечного числа шагов мы достигаем точки $\lambda = 1$, и, следовательно, $A(1)$ непрерывно обратим.

14.3. Доказательство теоремы в общем случае. Рассмотренный выше частный случай отрезка в $\mathcal{L}(X, Y)$ не всегда удобен в приложениях. Общий случай основывается на следующем элементарном предложении.

Л е м м а. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— некоторое непустое множество на* $[0, 1]$, *одновременно открытое и замкнутое на* $[0, 1]$. *Тогда* $\mathfrak{M} = [0, 1]$.

З а м е ч а н и е 1. Условие открытости $\mathfrak{M}$ на $[0, 1]$ понимается так: для любого $x_0 \in \mathfrak{M}$ существует $\delta > 0$ такое, что $S_\delta(x_0) \cap [0, 1] \subset \mathfrak{M} \cap [0, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Пусть $\mathfrak{N} = [0, 1] \setminus \mathfrak{M}$ (дополнение к $\mathfrak{M}$ на $[0, 1]$). Нужно доказать, что $\mathfrak{N} = \varnothing$ — пустое множество. Допустим противное, что $\mathfrak{N} \neq \varnothing$. Поскольку $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и ограничено сверху, то существует $b = \sup \mathfrak{M}$, причем $b \in \mathfrak{M}$ вследствие замкнутости. Покажем, что $b = 1$. Если $b < 1$, то вследствие открытости $\mathfrak{M}$ на $[0, 1]$ найдется $x > b$, $x \in \mathfrak{M}$. Это противоречит определению $\sup \mathfrak{M}$. Следовательно, $b < 1$ невозможно. Итак, $1 \in \mathfrak{M}$.

Теперь рассмотрим множество $\mathfrak{N}$. Как дополнение к $\mathfrak{M}$, оно также открыто и замкнуто на $[0, 1]$, и, значит, к нему применимо рассуждение с $\sup \mathfrak{M}$. Мы получаем, что $1 \in \mathfrak{N}$. Это невозможно, ибо $\mathfrak{N}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие доказывает, что допущение $\mathfrak{N} \neq \varnothing$ неверно. Итак, $\mathfrak{N} = \varnothing$, т. е. $\mathfrak{M} = [0, 1]$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество тех точек $\lambda \in [0, 1]$, для которых оператор $A(\lambda)$ непрерывно обратим. Согласно замечанию 1 $\|A^{-1}(\lambda)\| \leqslant \gamma^{-1}$ для всех $\lambda \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ не пусто, поскольку $0 \in \mathfrak{M}$.

Докажем, что $\mathfrak{M}$ открыто на $[0,\,1]$. Пусть $\lambda_0 \in \mathfrak{M}$, тогда для всех $\lambda \in \in [0,\,1]$

$$\|[A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0)\| \leqslant \gamma^{-1}\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\|.$$

Воспользуемся непрерывностью оператор-функции $A(\lambda)$ в метрике $\mathcal{L}(X,\,Y)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при всех $\lambda \in [0,\,1]$ таких, что $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, выполняется неравенство $\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| < \varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon = \gamma$, тогда при $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\gamma),\ \lambda \in [0,\,1]$

$$\big\|[A(\lambda) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_0)\big\| < 1.$$

По теореме п. 12.5 $A(\lambda)$ непрерывно обратим для всех таких λ. Итак, вместе с λ_0 $\mathfrak{M}$ содержит $S_{\delta(\gamma)}(\lambda_0) \cap [0,\,1]$, т. е. $\mathfrak{M}$ открыто на $[0,\,1]$.

Докажем, что $\mathfrak{M}$ замкнуто на $[0,\,1]$. Пусть $\{\lambda_n\} \subset \mathfrak{M}$ и $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$. Надо доказать, что $\lambda_0 \in \mathfrak{M}$. Воспользуемся неравенством $\|A^{-1}(\lambda_n) \leqslant \gamma^{-1}$ и получим

$$\big\|[A(\lambda_n) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_n)\big\| \leqslant \gamma^{-1}\|A(\lambda_n) - A(\lambda_0)\|.$$

Вследствие непрерывности $A(\lambda)$ по λ для любого $\varepsilon > 0$ находим номер $N = = N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N$ будет $\|A(\lambda_n) - A(\lambda_0)\| < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \gamma$, тогда для $n = N(\gamma) + 1$ $\|[A(\lambda_n) - A(\lambda_0)]A^{-1}(\lambda_n)\| < 1$.

По теореме п. 12.5 $A(\lambda_0)$ непрерывно обратим, т. е. $\lambda_0 \in \mathfrak{M}$, и, значит, $\mathfrak{M}$ замкнуто на $[0,\,1]$. По лемме $\mathfrak{M} = [0,\,1]$. В частности, $1 \in \mathfrak{M}$ и $\|A^{-1}(1) \leqslant \gamma^{-1}$. Теорема полностью доказана.

Замечание 2. Рассмотрим уравнение с параметром:

$$A(\lambda)x = y, \quad \lambda \in [0,\,1]. \tag{1}$$

Пусть для всех возможных решений этого уравнения при всяком $\lambda \in [0,\,1]$ справедлива оценка

$$\|x\| \leqslant c\|y\|, \tag{2}$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от x, y и λ. Оценка такого рода называется априорной оценкой для решения уравнения (1). Очевидно, априорная оценка (2) представляет собой лишь иначе записанное условие 1 п. 14.1.

$$\|A(\lambda)x\| \geqslant c^{-1}\|x\|.$$

Доказанная выше теорема свидетельствует о важности априорных оценок для доказательства теорем существования и единственности решений.

14.4. Примеры применения метода продолжения по параметру. Изложенный выше метод продолжения по параметру является упрощенным вариантом известного метода Шаудера, нашедшего широкие применения в теории краевых задач для уравнений с частными производными эллиптического типа. Мы ограничимся здесь примерами чисто иллюстративного характера.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка:

$$-x'' + b(t)x' + c(t)x = y(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $c(t)$ непрерывна на $[0,\ 1]$, $b(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\ 1]$. Предположим еще, что на $[0,\ 1]$ $c(t) - b'(t)/2 \geqslant \alpha > -8/\pi$.

Ниже будет показано методом продолжения по параметру, что в этих условиях при всякой правой части $y \in Y = C[0,\ 1]$ существует единственное решение задачи $x \in X = C^2[0,\ 1]$ — пространству, состоящему из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,\ 1]$ функций $x(t)$, удовлетворяющих граничным условиям (2), и с нормой $\|x\| = \|x\|_k + \|x'\|_k + \|x''\|_k$, где $\|x\|_k = \max\limits_{[0,\,1]} |x(t)|$.

Запишем задачу (1)–(2) в операторном виде:

$$Bx = y.$$

Здесь $B = -\dfrac{d^2}{dt^2} + b(t)\dfrac{d}{dt} + c(t)$ определен всюду на X со значениями в Y. В качестве оператора A примем $A = -d^2/\,dt^2 \in \mathcal{L}(X,\ Y)$.

Упражнение 1. Покажите, что при каждом $y \in Y$ краевая задача $-x'' = y, \quad x(0) = x(1) = 0$ имеет единственное решение $x \in X$ и что A непрерывно обратим.

Соединим операторы A и B отрезком

$$A(\lambda) = -\frac{d^2}{dt^2} + \lambda b(t)\frac{d}{dt} + \lambda c(t), \quad \lambda \in [0,\ 1].$$

Упражнение 2. Покажите, что $A(\lambda)$ — непрерывная оператор-функция на $[0,\ 1]$.

Наша цель — установить априорную оценку для решения краевой задачи

$$-x'' + \lambda b(t)x' + \lambda c(t)x = y(t), \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{4}$$

Как только такая оценка будет получена, из теоремы п. 14.1 сразу же будет следовать однозначная разрешимость краевой задачи (3), (4).

Умножим уравнение (3) на $x(t)$ и проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до 1. Замечая, что с учетом граничных условий (4)

$$-\int_0^1 x''x\,dt = \int_0^1 {x'}^2(t)\,dt,$$

а

$$\int_0^1 b(t)\,x(t)\,x'(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(t)\,x^2(t)\,dt,$$

получим

$$\int_0^1 {x'}^2(t)\,dt + \lambda\int_0^1 \left[c(t) - \frac{1}{2}\,b'(t)\right] x^2(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\,x(t)\,dt. \tag{5}$$

Произведем оценку всех трех слагаемых в этом равенстве. Докажем, что

$$\int_0^1 {x'}^2(t)\,dt \geqslant \frac{8}{\pi}\int_0^1 x^2(t)\,dt, \tag{6}$$

$$\int_0^1 \left[c(t) - \frac{1}{2}\,b'(t)\right] x^2(t)\,dt \geqslant \alpha\int_0^1 x^2(t)\,dt, \tag{7}$$

для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^1 y(t)x(t)\,dt \leqslant \varepsilon\int_0^1 x^2(t)\,dt + \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^1 y^2(t)\,dt. \tag{8}$$

Для доказательства неравенства (6) заметим, что $x(s) = \int\limits_0^s x'(t)\,dt$, и, значит, по неравенству Коши–Буняковского

$$|x(s)| \leqslant \left|\int_0^s x'(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_0^s dt\right)^{1/2}\left(\int_0^s {x'}^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{s}\left(\int_0^1 {x'}^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Точно так же

$$|x(s)| \leqslant \left|\int_s^1 x'(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{1-s}\left(\int_0^1 {x'}^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$x^2(s) \leqslant \sqrt{s(1-s)}\int_0^1 {x'}^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Отсюда, замечая, что $\int\limits_0^1 \sqrt{s(1-s)}\,ds = \pi/8$, получим

$$\int_0^1 x^2(s)\,ds \leqslant \frac{\pi}{8}\int_0^1 {x'}^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Неравенство (7) есть следствие предположения $c - b'/2 \geqslant \alpha$. Наконец, неравенство (8) доказывается из рассмотрения скалярного квадрата

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, x - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\, y,\, \sqrt{\varepsilon}\, x - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\, y\right) \geqslant 0, \quad \text{где} \quad (u,\, v) = \int_0^1 u(t)\, v(t)\, dt.$$

Подобные неравенства принято называть ε-*неравенствами*. Такие неравенства часто бывают полезны при получении априорных оценок в задачах математической физики.

Упражнение 3. Докажите справедливость ε-неравенства (8).

Используя неравенства (6), (7) и (8) и равенство (5), получим

$$\left(\frac{8}{\pi} + \alpha - \varepsilon\right) \int_0^1 x^2(t)\, dt \leqslant \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^1 y^2(t)\, dt$$

или, считая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, имеем

$$\int_0^1 x^2(t)\, dt \leqslant \frac{1}{4(8/\pi + \alpha - \varepsilon)\varepsilon} \int_0^1 y^2(t)\, dt.$$

Выберем $\varepsilon = \varepsilon_0 = 4/\pi + \alpha/2$ и получим

$$\int_0^1 x^2(t)\, dt \leqslant c_1 \int_0^1 y^2(t)\, dt, \quad \text{где} \quad c_1 = \frac{1}{(8/\pi + \alpha)^2}.$$

Возвращаясь теперь к равенству (5), получим из него следующую оценку:

$$\int_0^1 x^2(t)\, dt \leqslant (c_1 c_2 + c_3) \int_0^1 y^2(t)\, dt,$$

где $c_2 = \left\| c(t) - \frac{1}{2} b'(t) - \varepsilon_0 \right\|_k$, а $c_3 = \frac{1}{4\varepsilon_0}$.

Далее, из оценки (9) имеем $|x(s) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 {x'}^2(t)\, dt\right)^{1/2}$ и, значит, учитывая, что $\left(\int_0^1 y^2(t)\, dt\right)^{1/2} \leqslant \|y\|_k$, получим

$$\|x\|_k \leqslant \sqrt{\frac{c_1 c_2 + c_3}{2}}\, \|y\|_k. \tag{11}$$

Теперь уже легко получить оценки для $\|x''\|_k$ и $\|x'\|_k$. Из уравнения (3) имеем

$$\|x''\|_k \leqslant \|b\|_k\, \|x'\|_k + \|c\|_k\, \|x\|_k + \|y\|_k. \tag{12}$$

Но $\|x'\|_k$ оценивается через $\|x\|_k$ и $\|y\|_k$. Действительно, $x(0) = x(1) = 0$. По теореме Ролля на $(0,\ 1)$ найдется ξ — точка, в которой $x'(\xi) = 0$. Тогда, записывая уравнение (3) в виде

$$\left[x' \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t b(s)\,ds\right\}\right]' = [\lambda c(t)\,x(t) - y(t)] \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t b(s)\,ds\right\}$$

и интегрируя его от ξ до s, получим

$$x'(t) = \int\limits_\xi^t \exp\left\{-\lambda \int\limits_s^\theta b(s)\,ds\right\} [\lambda c(\theta)\,x(\theta) - y(\theta)]\,dt.$$

Отсюда имеем оценку

$$\|x'\|_k \leqslant m(\|c\|_k\,\|x\|_k + \|y\|_k), \tag{13}$$

где

$$m = \max_{\lambda,\, s,\, \theta \in [0,\, 1]} \exp\left\{-\lambda \int\limits_s^\theta b(s)\,ds\right\}.$$

Теперь (11), (12) и (13) дают

$$\|x\|_k + \|x'\|_k + \|x''\|_k \leqslant c_4\|y\|_k$$

(постоянную c_4 нетрудно подсчитать). Искомая априорная оценка получена.

Замечание. Оценку (6) методами вариационного исчисления можно уточнить и показать, что

$$\int\limits_0^1 {x'}^2(t)\,dt \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt. \tag{14}$$

Упражнение 4. Опираясь на оценку (14), докажите, что задача (1), (2) однозначно разрешима при условии

$$c(t) - b'(t)/2 > -\pi^2 \ \text{ на } \ [0,\ 1].$$

Упражнение 5. Покажите, что если $c(t) \equiv -\pi^2, \quad b(t) \equiv 0$, то оператор B не является непрерывно обратимым.

Пример 2. Рассмотрим снова краевую задачу (1), (2) в тех же пространствах X и Y, однако предположим, что $c(t) \geqslant \gamma > 0$ на $[0,\ 1]$.

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу с параметром $\lambda \in [0,\ 1]$:

$$-x'' + b(\lambda t)x' + c(\lambda t)x = y(t), \tag{15}$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

(Предлагаемый прием иногда называют методом замораживания коэффициентов). При $\lambda = 1$ получаем нашу задачу (1), (2). При $\lambda = 0$ получаем задачу с постоянными коэффициентами:

$$-x'' + b(0)x' + c(0)x = y(t), \tag{16}$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Пусть X и Y — банаховы пространства, введенные в примере 1. Запишем задачу (15) в операторном виде $A(\lambda)x = y$, где

$$A(\lambda) = -\frac{d^2}{dt^2} + b(\lambda t)\frac{d}{dt} + c(\lambda t)$$

оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(X,\, Y)$.

Упражнение 6. Методом вариации произвольных постоянных покажите, что краевая задача (16) имеет единственное решение и, таким образом, оператор $A(0)$ непрерывно обратим.

Чтобы воспользоваться теоремой о продолжении по параметру и доказать однозначную разрешимость задачи (1), (2), нужно еще получить априорную оценку решений задачи (15). Для этого воспользуемся принципом максимума. Так как $x(0) = x(1) = 0$, то в точке t^0 положительного максимума $x(t)$ на $[0,\, 1]$, если она существует, $x'(t^0) = 0, \quad x''(t^0) \leqslant 0$, и потому (см. [6,27]) справедлива оценка

$$x(t^0) \leqslant \frac{y(t^0)}{c(\lambda t^0)} \leqslant \gamma^{-1}\|y\|_k.$$

Аналогично, в точке t_0 отрицательного минимума $x(t)$ на $[0,\, 1]$, если она существует, имеем

$$-\gamma^{-1}\|y\|_k \leqslant x(t_0).$$

Объединяя эти оценки, получим

$$\|x\|_k \leqslant \gamma^{-1}\|y\|_k.$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в примере 1.

§ 15. График оператора. Замкнутые операторы

15.1. Прямая сумма банаховых пространств.

Определение. *Прямой суммой* $Z = X \oplus Y$ двух линейных пространств X и Y называется совокупность пар $z = (x,\, y)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, для которых операции сложения пар и умножения пары на число определяются следующим образом: если $z_1 = (x_1,\, y_1)$, а $z_2 = (x_2,\, y_2)$ и $\alpha_1,\ \alpha_2$ — скаляры, то

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Если X и Y — нормированные пространства, то норма в $X \oplus Y$ вводится по формуле $\|z\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Упражнение 1. Проверить аксиомы нормы. При этом, если X и Y банаховы, то $X \oplus Y$ банахово (почему?).

Упражнение 2. Показать, что в $X \oplus Y$ можно ввести норму также следующими способами:

$$\|z\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}, \quad \|z\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

$$\|z\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

Показать, что все эти нормы эквивалентны.

15.2. График оператора. Пусть $y = F(x)$ — оператор (вообще говоря, нелинейный) с областью определения $D(F)$ в банаховом пространстве X и с областью значений в банаховом пространстве Y. *Графиком* оператора F называется совокупность пар $(x, F(x))$, где $x \in D(F)$. График оператора является подмножеством пространства $X \oplus Y$. Определение графика оператора хорошо согласуется с определением графика функции. Пусть ниже $F \equiv A$ — линейный оператор.

Определение. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *замкнутым*, если его график является замкнутым множеством $X \oplus Y$.

Замкнутость графика оператора A означает, что если $x_n \in D(A)$ и $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, то $x \in D(A)$ и $y = Ax$.

Так как $\|z\| = \|x\| + \|y\|$, то определение замкнутости оператора A можно записать так: если $x_n \in D(A)$, $\quad x_n \to x$, а $Ax_n \to y$, то $x \in D(A)$ и $y = Ax$.

Теорема 1. *Если $D(A) = X$ и A ограничен (т.е. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$), то A замкнут.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ при $n \to \infty$. Вследствие непрерывности A $Ax_n \to Ax$, $\quad n \to \infty$. Но предел единственен и, значит, $y = Ax$.

Теорема 2. *Если A замкнут и A^{-1} существует, то A^{-1} также замкнут.*

Доказательство. Рассмотрим графики операторов A и A^{-1}:

$$\{(x, Ax)\}, \quad x \in D(A),$$

$$\{(y, A^{-1}y)\}, \quad y \in R(A).$$

Но график оператора A^{-1} можно записать в виде $\{(Ax, x)\}$, $\quad x \in D(A)$, т. е. он получается из графика оператора A перестановкой x и Ax и, значит, также является замкнутым множеством в $Y \oplus X$. Это и означает замкнутость A^{-1}.

Следствие. *Если $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и A^{-1} существует, то A^{-1} замкнут.*

Действительно, по теореме 1 A замкнут, тогда по теореме 2 A^{-1} замкнут.

15.3. Примеры замкнутых неограниченных операторов.

Пример 1. В гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_k\}_1^\infty$ зададим линейный оператор A следующими формулами:

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где λ_k — некоторые скаляры.

Если $x \in H$, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, где ряд $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ сходится. Тогда $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k e_k$. Этот ряд сходится ($Ax \in H$) тогда и только тогда, когда

$$\|Ax\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \, |\xi_k|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Возможны следующие два случая:

а) $\{|\lambda_k|\}$ ограничена. Пусть $c_A = \sup_k |\lambda_k|$. Тогда $\|Ax\|^2 \leqslant c_A^2 \|x\|^2$, откуда — A ограничен, а значит, и замкнут.

б) $\{|\lambda_k|\}$ неограничена. Оператор A неограничен, и его область определения $D(A)$ состоит из элементов x, удовлетворяющих неравенству (1). Неограниченность A усматривается из того, что $\|Ae_k\| = |\lambda_k|$ при $k \to \infty$ неограничены, хотя $\|e_k\| = 1$. Если $\inf_k |\lambda_k| = c_A > 0$ (т. е. λ_k отделены от нуля положительным числом), то существует A^{-1}, определяемый на элементах

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty,$$

формулой

$$A^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \eta_k e_k.$$

Поскольку $\sup_k |\lambda_k^{-1}| = c_A^{-1} < \infty$, то A^{-1} ограничен ($D(A^{-1}) = H$). Таким образом, условие $\inf_k |\lambda_k| > 0$, согласно теореме 2 п. 15.2 обеспечивает замкнутость A.

Пример 2. Пусть $X = Y = C[0, +\infty)$ — банахово пространство функций $x(t)$, непрерывных на полуоси $[0, +\infty)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{[0, +\infty)} |x(t)|$.

Зададим в X оператор A по формуле $Ax = tx(t)$. Оператор A линеен, и его область определения $D(A)$ состоит из функций, удовлетворяющих неравенству

$$|x(t)| \leqslant c/(1+t),$$

где постоянная c — своя для каждой функции из $D(A)$.

Оператор A неограничен. Действительно, рассмотрим последовательность функций $x_n(t) = n/(n+t) \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Заметим, что $x_n(t) \in D(A)$, так как $|x_n(t)| = n/(n+t) \leqslant n/(1+t)$. Кроме того, ясно, что $\|x_n\| = 1$. Теперь имеем

$$\|Ax_n\| = \sup_{[0,+\infty)} \frac{nt}{n+t} = n,$$

следовательно,

$$\sup_{x \in D(A),\, \|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = +\infty.$$

Покажем, что A замкнут. Пусть в X $x_n(t) \to x(t)$, $t\,x_n(t) \to y(t)$ при $n \to \infty$. Тогда $(1+t)x_n(t) \to x(t) + y(t)$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что если $n > N$, то

$$|(1+t)x_n(t) - [x(t) + y(t)]| < \varepsilon \text{ для всех } t \in [0,\, +\infty),$$

или

$$\left| x_n(t) - \frac{x(t)+y(t)}{1+t} \right| < \frac{\varepsilon}{1+t} < \varepsilon.$$

Следовательно, $x_n(t) \to \dfrac{x(t)+y(t)}{1+t}$ при $n \to \infty$, но $x_n(t) \to x(t)$, поэтому $\dfrac{x(t)+y(t)}{1+t} = x(t)$, откуда $y(t) = tx(t)$, т.е. $y = Ax \quad (x \in D(A))$, ибо $|x(t)| \leqslant \|y\|/(1+t)$.

Упражнение. Показать, что обратный оператор $A^{-1}y = y(t)/t$ также неограничен и замкнут.

Пример 3. В пространстве $C[a,\, b]$ рассмотрим оператор дифференцирования $Dx = dx(t)/dt$ с областью определения $G(D)$, состоящей из непрерывно дифференцируемых на $[a,\, b]$ функций. Оператор D неограничен.

Для доказательства его неограниченности возьмем последовательность $x_n(t) = \sin nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x_n \in G(D)$ и $\|x_n\| = 1$, однако $\|Dx_n\| = n$, если n достаточно велико, и потому

$$\sup_{x \in G(D),\, \|x\| \leqslant 1} \|Dx\| = +\infty$$

и D неограничен.

Покажем, что D замкнут. Сходимость в $C[a,\, b]$ равномерная. Пусть $x_n(t) \in G(D)$, и пусть при $n \to \infty$

$$x_n(t) \to x(t) \text{ равномерно на } [a,\, b],$$

$$x_n'(t) \to y(t) \text{ равномерно на } [a,\, b].$$

Согласно известной теореме о дифференцировании функциональной последовательности (см [18]) функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема (т.е. $x(t) \in G(D)$) и $x'(t) = y(t)$. Итак, D замкнут.

Пример 4. Снова рассмотрим в $\mathrm{C}[a,\, b]$ оператор дифференцирования D, но на этот раз в качестве его области определения $G(D)$ возьмем множество всех непрерывно дифференцируемых на $(a, b]$ функций, удовлетворяющих граничному условию $x(a) = 0$. Теперь оператор D имеет обратный

$$D^{-1}y = \int_a^t y(s)\,ds,$$

определенный всюду в $C[a, b]$ и ограниченный ($\|D^{-1}y\| \leqslant (b-a)\|y\|$). По теореме 2 п. 15.2 оператор D замкнут.

15.4. Теорема Банаха о замкнутом графике и ее следствия. С. Банаху принадлежит следующая важная в приложениях теорема.

Теорема 1 (Банаха о замкнутом графике). *Пусть A — замкнутый линейный оператор, определенный всюду в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y. Тогда оператор A ограничен.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Пусть A — замкнутый линейный оператор, определенный всюду в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y. Пусть, далее, существует плотное в X множество M и постоянная $c > 0$, так что $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$ для всех $x \in M$. Тогда оператор A ограничен.*

Доказательство леммы. Выберем элемент $x_0 \in X$. Покажем, что найдется элемент $x_1 \in M$ такой, что

$$\|x_1\| \leqslant \|x_0\|, \quad \|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_0\|. \tag{1}$$

Действительно, вследствие плотности M в X для $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)x_0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, найдется элемент $x_1 \in M$ такой, что $\|x_\varepsilon - x_1\| \leqslant \varepsilon\|x_0\|$.

Оказывается, ε можно подобрать так, чтобы элемент x_1 удовлетворял условиям (1). Имеем

$$\|x_1\| \leqslant \|x_1 - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon\|x_0\| + (1-\varepsilon)\|x_0\| = \|x_0\|,$$

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1 - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - x_0\| \leqslant \varepsilon\|x_0\| + \varepsilon\|x_0\| = 2\varepsilon\|x_0\|.$$

Возьмем $\varepsilon = 1/4$ и получим неравенства (1).

Точно так же можно показать (проверьте!), что для элемента $x_0 - x_1$ найдется элемент $x_2 \in M$ такой, что

$$\|x_0 - x_1 - x_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\| \leqslant \frac{1}{2^2}\|x_0\|,$$

$$\|x_2\| \leqslant \|x_0 - x_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_0\|.$$

Повторяя эти построения, можно доказать, что для каждого натурального n найдутся $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ такие, что

$$\|x_0 - (x_1 + \ldots + x_n)\| \leqslant \frac{1}{2^n}\|x_0\|,$$

$$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\|x_0\|.$$

Отсюда вытекает, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Далее, так как

$$\|Ax_k\| \leqslant c\|x_k\| \leqslant \frac{c}{2^{k-1}}\|x_0\|,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Ax_k$ сходится абсолютно. Пусть y — его сумма. Поскольку при $n \to \infty$

$$As_n \to y, \quad s_n \to x_0,$$

то, вследствие замкнутости оператора A,

$$Ax_0 = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k.$$

Но тогда имеем оценку

$$\|Ax_0\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|Ax_k\| \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leqslant 2c\|x_0\|.$$

Вследствие произвольности x_0 доказана ограниченность оператора A, а значит, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для каждого натурального числа n рассмотрим множество

$$X_n = \{x \in X : \|Ax\| \leqslant n\|x\|\}. \tag{2}$$

Далее, очевидно,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n. \tag{3}$$

По теореме Бэра–Хаусдорфа (см. п. 5.8) пространство X, вследствие его полноты, является множеством II категории. Но тогда по (3) существует X_n, плотное в некотором шаре $S \subset X$. (В противном случае X оказалось бы объединением счетного числа нигде не плотных множеств X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. множеством I категории). Следовательно, имеем

$$\overline{S \cap X_n} = \bar{S}.$$

Пусть, далее, $x_0 \in S \cap X_{n_0}$, а S_0 — шар с центром в x_0, радиуса r_0 настолько малого, что $S_0 \subset S$. Тогда

$$\overline{S_0 \cap X_{n_0}} = \bar{S}_0. \tag{4}$$

Выберем теперь элемент $u_0 \in X$ с $\|u_0\| = r_0$ и рассмотрим элемент $y_0 = x_0 + u_0$. Так как $\|y_0 - x_0\| = \|u_0\| = r_0$, то $y_0 \in \bar{S}_0$.

Вследствие соотношения (4) найдется последовательность

$$\{y_n\} \subset S_0 \cap X_{n_0} \tag{5}$$

такая, что при $n \to \infty$

$$y_n \to y_0 = x_0 + u_0. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$\{u_n\} = \{y_n - x_0\}. \tag{7}$$

Заметим, что вследствие (5)

$$\|u_n\| = \|y_n - x_0\| \leqslant r_0. \tag{8}$$

Вспоминая определение X_n (см. (2)) и пользуясь тем, что $y_n \in X_{n_0}$, $x_0 \in X_{n_0}$, получаем следующую оценку (см (7) и (8)):

$$\begin{aligned} \|Au_n\| = \|A(y_n - x_0)\| \leqslant \|Ay_n\| + \|Ax_0\| \leqslant n_0(\|y_n\| + \|x_0\|) = \\ = n_0(\|u_n + x_0\| + \|x_0\|) \leqslant n_0(\|u_n\| + 2\|x_0\|) \leqslant n_0(r_0 + 2\|x_0\|). \end{aligned} \tag{9}$$

Далее, так как при $n \to \infty$

$$\|u_n\| = \|y_n - x_0\| \to r_0,$$

то найдется номер N такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\|u_n\| > \frac{1}{2} r_0 \quad \text{или} \quad 1 < \frac{2}{r_0} \|u_n\|.$$

Продолжая оценку (9) при $n > N$, приходим к оценке

$$\|Au_n\| \leqslant \frac{2n_0}{r_0} \|u_n\| (r_0 + 2\|x_0\|). \tag{10}$$

Отсюда получаем следующий вывод: при всех $n > N$ (см. определение X_n (2)) $u_n \in X_{n_1}$, где $n_1 = 2n_0 + 4n_0\|x_0\|/r_0$.

При $n \to \infty$ из неравенства (10) получаем $u_n \to u_0$, где u_0 — любой элемент X с $\|u_0\| = r_0$. Но из (2) следует, что X_{n_1} содержит вместе с каждым x и λx при любом λ. Таким образом, X_{n_1} плотно в X, и так как на X_{n_1} $\|Ax\| \leqslant n_1\|x\|$, то по лемме оператор ограничен, и теорема полностью доказана.

Теорема Банаха о замкнутом графике имеет интересные следствия. Приведем некоторые из них. Это прежде всего более сильный вариант теоремы Банаха об обратном операторе (см. п. 12.1).

Теорема 2. *Если A — замкнутый оператор, отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y взаимно однозначно, т. е. $R(A) = Y$, то оператор A^{-1} ограничен.*

Доказательство. По условию теоремы $D(A) = X$ и A замкнут. По теореме о замкнутом графике A ограничен. По теореме Банаха $A^{-1} \in \in \mathcal{L}(Y, X)$. Теорема доказана.

Приведем теперь еще одно следствие теоремы о замкнутом графике.

Теорема 3 (об эквивалентных нормах). *Пусть на некотором линейном пространстве E заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$, по отношению к каждой из которых E — банахово пространство. Если одна из норм подчинена другой* (см. п. 2.9)*, то эти нормы эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через X_1 пространство E с нормой $\|x\|_1$, а через X_2 — пространство E с нормой $\|x\|_2$.

Пусть, например, $\|\cdot\|_1$ подчинена $\|\cdot\|_2$. Это означает, что существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех x

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2. \tag{11}$$

Определим оператор A, отображающий X_1 на X_2, по формуле $Ax = = x$ (слева $x \in X$ как элемент из X_1, а справа он же как элемент из X_2). Очевидно, $D(A) = X_1$, A линеен и отображает X_1 взаимно однозначно на $R(A) = X_2$. Неравенство (11) означает, что $\|A\| \leqslant c$, т. е. A ограничен. По теореме 2 $A^{-1} \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$, т. е.

$$\|x\|_2 \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|x\|_1.$$

Итак, $c_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$, где $c_1 = \|A^{-1}\|^{-1}$. Это и означает эквивалентность норм. Теорема доказана.

15.5. Норма графика и эквивалентные ей нормы. Замкнутые линейные операторы, как мы видели, по ряду свойств близки к непрерывным (т. е. ограниченным) линейным операторам.

Фридрихсу принадлежит идея, позволяющая в ряде случаев свести изучение замкнутых линейных операторов к изучению ограниченных линейных операторов. Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения $D(A)$ и с областью значений в банаховом пространстве Y. Введем на $D(A)$ новую норму, которая называется *нормой графика*:

$$\|x\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

(вспомните определения графика оператора A и нормы в $X \oplus Y$). Линейное многообразие $D(A)$ в новой норме превращается в нормированное пространство, которое обозначается X_A. Если $\{x_n\}$ фундаментальна в X_A, т. е. при $n,\ m \to \infty$

$$\|x_n - x_m\|_X + \|Ax_n - Ax_m\|_Y \to 0,$$

то тем более при $n,\ m \to \infty$

$$\|x_n - x_m\|_X \to 0, \quad \|Ax_n - Ax_m\|_Y \to 0.$$

Вследствие полноты X и Y найдутся $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что при $n \to \to \infty \quad x_n \to x, \quad Ax_n \to y$.

Вследствие замкнутости A имеем $x \in D(A)$ и $y = Ax$. Это означает, что $\{x_n\}$ сходится в X_A, и, значит X_A — банахово пространство. Будем теперь рассматривать A как оператор, действующий из X_A в Y. Очевидно, $\|Ax\|_Y \leqslant \|x\|$. Следовательно, A ограничен. Иногда вместо нормы графика в $D(A)$ удобнее ввести другую, эквивалентную ей норму.

Пусть A — замкнутый линейный оператор с $D(A)$, плотной в X, и со значениями в Y.

Теорема. *Пусть в $D(A)$ введена норма $\|\cdot\|_1$ такая, что $\|x\|_X \leqslant c_1\|x\|_1, \quad \|Ax\|_Y \leqslant c_2\|x\|_1$. Тогда $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме графика.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — норма графика. Тогда для любого $x \in D(A)$

$$\|x\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y \leqslant c_1\|x\|_1 + c_2\|x\|_1 = (c_1 + c_2)\|x\|_1.$$

Следовательно, норма графика подчинена $\|\cdot\|_1$. Но тогда, по теореме об эквивалентных нормах, эти две нормы эквивалентны. Теорема доказана.

15.6. Теорема об открытом отображении. Отображение, осуществляемое оператором $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ назовем открытым, если A отображает каждое открытое в X множество во множество, открытое в Y.

С теоремой Банаха об обратном операторе тесно связано следующее также принадлежащее Банаху утверждение.

Теорема. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $R(A) = Y$. Тогда отображение, осуществляемое оператором A, является открытым.*

Доказательство. Согласно определению открытого множества достаточно доказать, что для всякого открытого шара $S_\rho(x_0) \subset X$ найдется открытый шар $S_r(y_0) \subset Y, \quad y_0 = Ax_0$ такой, что $S_r(y_0) \subset AS_\rho(x_0)$. Вследствие линейности A можно принять $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$ и $\rho = 1$.

а) Пусть сначала $N(A) = \{0\}$. Тогда по теореме об обратном операторе A непрерывно обратим. Если $\|y\| < r = \|A^{-1}\|^{-1}$, то для $x = A^{-1}y$ имеем оценку $\|x\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|y\| < 1$ и теорема доказана.

б) Пусть теперь $N(A) \neq \{0\}$. $N(A)$ — замкнуто и, следовательно, является подпространством в X. Введем фактор-пространство $\widetilde{X} = X/N(A)$, также являющееся банаховым пространством (см. п 7.6) с нормой $\|\widetilde{x}\| = = \inf_{z \in N(A)} \|x - z\|$.

В $\widetilde{X}$ определим линейный оператор $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, действующий по формуле $\widetilde{A}\widetilde{x} = Ax$, где $x \in \widetilde{x}$.

Упражнение. Проверьте корректность определения оператора $\widetilde{A}$, его ограниченность. Убедитесь, что $R(\widetilde{A}) = Y, \quad N(\widetilde{A}) = \{0\}$.

По теореме Банаха об обратном операторе $\widetilde{A}$ непрерывно обратим. В соответствии с а) при $\widetilde{r} = \|\widetilde{A}^{-1}\|^{-1} \quad S_{\widetilde{r}}(0) \subset \widetilde{A}\widetilde{S}_1(\widetilde{0})$, где $\widetilde{S}_1(\widetilde{0})$ — открытый шар в $\widetilde{X}$ радиуса 1 с центром в нуле пространства $\widetilde{X}$. Это означает, что если $\|y\| < \widetilde{r}$, то $y = \widetilde{A}\widetilde{x}$, где $\|\widetilde{x}\| < 1$. Но по определению нормы в $\widetilde{X}$ найдется $x \in \widetilde{x}$ такое, что

$$\|\widetilde{x}\| \leqslant \|x\| \leqslant 2\|\widetilde{x}\|.$$

Следовательно, если $\|y\| < r = \widetilde{r}/2$, то $y = Ax$ с $\|x\| < 1$. Теорема полностью доказана.

Следующая лемма дополняет теорему об открытом отображении.

Обозначим для краткости шары радиуса 1 (с центрами в началах координат) в пространствах X и Y через U и V соответственно. Тогда ρU и rV — это аналогичные шары радиусов $\rho > 0$ и $r > 0$ соответственно.

Лемма. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $c > 0$. Пусть $\overline{A(U)} \supset cV$. Тогда*

1) $A(U) \supset \dfrac{c}{2}V$;

2) $R(A) = Y$;

3) *существует $l > 0$ такое, что для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $Ax = y$ и $\|x\| \leqslant l\|y\|$.*

Доказательство. 1) Шары U и V можно считать замкнутыми. Фиксируем $y \in cV$. По условию леммы найдется $x_1 \in U$ такой, что $\|y - Ax_1\| \leqslant c/2$. Положим $y_1 = Ax_1$. Далее, $y - y_1 \in cV/2$ и по условию леммы найдется $x_2 \in U/2$ такой, что $\|y - Ax_1 - Ax_2\| \leqslant c/4$. Положим $y_2 = Ax_2$. Продолжая этот процесс, найдем последовательности $\{x_n\} \subset X$ и $\{y_n\} \subset Y$ такие, что

$$x_n \in \frac{1}{2^{n-1}}U, \quad y_n = Ax_n, \quad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| < \frac{c}{2^n}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в X, причем его сумма $x \in 2U$ (проверьте!). Далее, $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Ax_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k = y$. Доказано, что $A(2U) \supset cV$, т. е. $A(U) \supset cV/2$.

2) Из 1) следует, что $A(nU) \supset \dfrac{nc}{2}V$. Но тогда $R(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nU) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{nc}{2}V\right) = Y$.

3) Пусть $y \neq 0$, $y \in Y$. Тогда $\dfrac{cy}{2\|y\|} \in \dfrac{c}{2}V$ и, значит, найдется $x' \in U$ такой, что $Ax' = y$. Возьмем $x = \dfrac{2\|y\|}{c}x'$. Очевидно, $Ax = y$ и $\|x\| \leqslant \dfrac{2}{c}\,\|y\|$. Лемма доказана.

Заметим, что используя данную лемму, можно иначе доказать теоремы 1, 2 из п. 15.4 (см [14]) На эту связь указывает и близость доказательств леммы и теоремы о замкнутом графике.

ГЛАВА IV

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

§ 16. Теорема Хана–Банаха и ее следствия

16.1. Теорема Хана–Банаха. Пусть X — вещественное нормированное пространство, а E — вещественная ось. Всякий оператор $f\colon X \to E$ называется функционалом. Здесь мы ограничимся изучением линейных функционалов. Значение линейного функционала f на элементе $x \in X$ будем обозначать $\langle x,\, f\rangle$. Напомним, что линейность функционала f означает, что его область определения $D(f)$ является линейным многообразием, причем для любых $x, y \in D(f)$ и любых $\alpha, \beta \in E$

$$\langle \alpha x + \beta y,\, f\rangle = \alpha\langle x,\, f\rangle + \langle y,\, f\rangle.$$

Кроме того, мы будем рассматривать здесь только ограниченные линейные функционалы, т. е. такие, для которых конечна величина

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f),\ \|x\| \geqslant 1} |\langle x,\, f\rangle|.$$

Сформулируем теперь следующее предложение — одно из центральных в функциональном анализе.

Теорема (Хан, Банах). *Пусть в вещественном нормированном пространстве X задан линейный ограниченный функционал f с $D(f) \subset X$. Тогда существует всюду определенный в X линейный ограниченный функционал $\widetilde{f}$ такой, что $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$ и $\langle x,\, \widetilde{f}\rangle = \langle x,\, f\rangle$ для любых $x \in D(f)$.*

(Иначе: всякий линейный ограниченный функционал, определенный на некотором линейном многообразии, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.)

Замечание. Если $\overline{D(A)} = X$, то утверждение теоремы Хана–Банаха вытекает из теоремы о продолжении линейного оператора (см. п. 11.6), в которой надо принять $Y = E$.

Доказательство теоремы Хана–Банаха мы дадим ниже в частном случае сепарабельного пространства. Но сначала докажем следующую лемму.

Лемма (об элементарном продолжении). *Пусть X — вещественное нормированное пространство, а L — линейное многообразие в X, и пусть на L задан линейный ограниченный функционал f. Пусть $x_0 \notin L$ и L_1 — линейное многообразие всевозможных элементов вида $y + tx_0$, где $y \in L$, $t \in E$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f_1 на L_1, совпадающий с f на L и такой, что $\|f_1\| = \|f\|$.*

Доказательство леммы. Заметим сначала, что каждый $x \in L_1$ представим в виде $x = y + tx_0$, $y \in L$, $t \in E$, единственным образом.

Действительно, если $y + tx_0 = y' + t'x_0$, то $y - y' = (t' - t)x_0$. Если $t' = t$, то $y' = y$ и представление x единственно. Пусть $t' \neq t$; тогда получаем, что $x_0 \in L$, что невозможно.

Рассмотрим теперь $y_1,\ y_2 \in L$, тогда, вследствие ограниченности f на L, имеем

$$\langle y_1,\, f\rangle - \langle y_2,\, f\rangle = \langle y_1 - y_2,\, f\rangle \leqslant \|f\|\,\|y_1 - y_2\| \leqslant \\ \leqslant \|f\|\,\|y_1 + x_0\| + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|.$$

Полученное неравенство можно записать в виде

$$\langle y_1,\, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\| \leqslant \langle y_2,\, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|.$$

Если зафиксировать y_2, а y_1 менять, то мы видим, что левая часть ограничена сверху. Если же зафиксировать y_1, а менять y_2, то мы видим, что правая часть ограничена снизу. Положим

$$\alpha = \sup_{y_1 \in L}\{\langle y_1,\, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\|\},$$

$$\beta = \inf_{y_2 \in L}\{\langle y_2,\, f\rangle - \|f\|\,\|y_2 + x_0\|\}.$$

Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\langle y_1,\, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\| \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \langle y_2,\, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|.$$

Возьмем число γ такое, что $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Теперь для любых $y_1, y_2 \in L$ имеем

$$\langle y_1,\, f\rangle - \|f\|\,\|y_1 + x_0\| \leqslant \gamma \leqslant \langle y_2,\, f\rangle + \|f\|\,\|y_2 + x_0\|. \tag{1}$$

Определим линейный функционал f_1 по формуле (для $x \in L_1$)

$$\langle x,\, f_1\rangle = \langle y + tx_0,\, f_1\rangle = \langle y,\, f\rangle - \gamma t.$$

Линейность f_1 проверяется просто (проверьте!).

Если $x \in L$, то $t = 0$ и $\langle x,\, f_1\rangle = \langle x,\, f\rangle$, т. е. на L $f_1 = f$. Покажем теперь, что $\|f_1\| = \|f\|$. Заметим сначала, что

$$\|f_1\| = \sup_{x \in L_1,\ \|x\| \geqslant 1} |\langle x,\, f_1\rangle| \geqslant \sup_{x \in L,\ \|x\| \geqslant 1} |\langle x,\, f\rangle| = \|f\|, \tag{2}$$

так как на более широком множестве $\sup$ может разве лишь увеличиться. Таким образом, нам достаточно доказать неравенство

$$|\langle x,\, f_1\rangle| \leqslant \|f\|\,\|x\| \tag{3}$$

для $x = y + tx_0$, $y \in L$, $t \in E$, причем при $t = 0$ это неравенство справедливо.

Из неравенства (1) для любого $y_1 \in L$ имеем

$$\langle y_1,\, f\rangle - \gamma \leqslant \|f\|\,\|y_1 + x_0\|.$$

Полагая здесь $y_1 = y/t$, приходим к

$$\left\langle \frac{y}{t}, f \right\rangle - \gamma \leqslant \|f\| \left\| \frac{y}{t} + x_0 \right\|.$$

С помощью этой оценки получаем

$$|\langle x,\, f_1\rangle| = |\langle y,\, f\rangle - \gamma t| = |t| \left| \left\langle \frac{y}{t}, f \right\rangle - \gamma \right| \leqslant |t|\, \|f\| \left\| \frac{y}{t}, x_0 \right\|.$$

Рассмотрим теперь два случая: $t > 0$ и $t < 0$.

Если $t > 0$, то $|t| = t$ и, следовательно,

$$|\langle x,\, f_1\rangle| \leqslant t\|f\| \left\| \frac{y}{t} + x_0 \right\| = \|f\|\, \|y + tx_0\| = \|f\|\, \|x\|.$$

Если $t < 0$, то $|t| = -t$ и

$$|\langle x,\, f_1\rangle| \leqslant \|f\| \left\| y\, \frac{|t|}{t} + |t| x_0 \right\| = \|f\|\, \| - y - tx_0\| = \|f\|\, \|x\|.$$

Итак, доказано неравенство (3): $\|f_1\| \leqslant \|f\|$, что вместе с (2) дает $\|f_1\| = \|f\|$. Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы Хана–Банаха в сепарабельном случае. Так как X сепарабельно, то существует X' — счетное, плотное в X множество. Занумеруем в последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ те элементы X', которые не попали в $D(f)$. Затем, согласно лемме об элементарном продолжении, последовательно продолжаем f на $X_1 = X_0 + \{x_0\}$, затем на $X_2 = X_1 + \{x_1\}$ и так далее. В результате мы получим линейный ограниченный функционал $\widetilde{f}$, определенный на $\widetilde{X} = \bigcup X_k$ — плотном в X линейном многообразии. Доказательство завершается использованием замечания к теореме Хана–Банаха.

В общем случае теорема Хана–Банаха доказывается с использованием известной леммы Цорна (см. [25], с. 176).

16.2. Теорема Сухомлинова — комплексный вариант теоремы Хана–Банаха. Пусть теперь X — комплексное нормированное пространство, а C — комплексная плоскость. Линейные операторы $f\colon X \to C$ называются *линейными функционалами*. Речь пойдет здесь, как и в п. 16.1, о продолжении линейного функционала f, заданного и ограниченного на линейном многообразии X, на все пространство X с сохранением нормы.

В комплексном случае следует различать линейные многообразия L комплескно-линейные и вещественно-линейные в зависимости от того, принадлежат ли L любые линейные комбинации $\alpha x + \beta y$ элементов x, $y \in L$ (с любыми комплексными коэффициентами α и β) или только линейные комбинации с вещественными коэффициентами α, β.

Теорема (Сухомлинов). *Пусть X — комплексное нормированное пространство, L — комплексно-линейное многообразие в X и f — заданный* *на L линейный ограниченный функционал $\widetilde{f}$ такой, что $\langle x,\, \widetilde{f}\rangle = \langle x,\, f\rangle$ для всех $x \in L$ и $\|\widetilde{f}\| = \|f\|$.*

Доказательство. Положим

$$\langle x,\, f\rangle = \langle x,\, f_1\rangle + i\langle x,\, f_2\rangle, \tag{1}$$

где $\langle x,\, f_1\rangle = \Re\langle x,\, f\rangle$, а $\langle x,\, f_2\rangle = \Im\langle x,\, f\rangle$. Введенные таким путем функционалы f_1 и f_2 являются вещественными линейными функционалами на L, рассматриваемом как вещественное линейное многообразие. Действительно, для любых $x, y \in L$ справедливы, как нетрудно вывести из (1), равенства

$$\langle \alpha x + \beta y,\, f_1\rangle = \alpha\langle x,\, f_1\rangle + \beta\langle y,\, f_1\rangle,$$
$$\langle \alpha x + \beta y,\, f_2\rangle = \alpha\langle x,\, f_2\rangle + \beta\langle y,\, f_2\rangle.$$

Далее, $\langle ix,\, f\rangle = i\langle x,\, f\rangle$, а с другой стороны (см. (1)), $\langle ix,\, f\rangle = \langle ix,\, f_1\rangle + i\langle ix,\, f_2\rangle$, $i\langle x,\, f\rangle = i\langle x,\, f_1\rangle - \langle x,\, f_2\rangle$. Сравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\langle ix,\, f_1\rangle = -\langle x,\, f_2\rangle, \tag{2}$$
$$\langle ix,\, f_2\rangle = \langle x,\, f_1\rangle, \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) эквивалентны комплексной линейности функционала.

Упражнение. Покажите, что (2) и (3) являются следствиями друг друга.

Из (1), (2), (3) следует ограниченность f_1 и f_2 и равенство $\|f_1\| = \|f_2\| = \|f\|/\sqrt{2}$. Будем рассматривать f_1 как вещественный линейный функционал на L. По теореме Хана–Банаха его можно продолжить на X с сохранением нормы. Пусть $\widetilde{f}_1$ — такое продолжение. Определим $\widetilde{f}_2$ в соответствии с формулой (2):

$$\langle x,\, \widetilde{f}_2\rangle = -\langle ix,\, \widetilde{f}_1\rangle, \quad x \in X. \tag{4}$$

Наконец, $\widetilde{f}$ опреределим следующим образом (см. (1)):

$$\langle x,\, \widetilde{f}\rangle = \langle x,\, \widetilde{f}_1\rangle + i\langle x,\, \widetilde{f}_2\rangle.$$

По построению $\widetilde{f}$ вещественно линеен. Далее,

$$\langle ix,\, \widetilde{f}\rangle = \langle ix,\, \widetilde{f}_1\rangle + i\langle ix,\, \widetilde{f}_2\rangle = -\langle x,\, \widetilde{f}_2\rangle + i\langle x,\, \widetilde{f}_1\rangle = i\langle x,\, \widetilde{f}\rangle.$$

Итак, $\widetilde{f}$ комплексно линеен. Далее, если $x \in L$, то $\langle x,\, \widetilde{f}_1\rangle = \langle x,\, f_1\rangle$. Кроме того, $\langle x,\, f_2\rangle = -\langle ix,\, \widetilde{f}_1\rangle = -\langle ix,\, f_1\rangle = \langle x,\, f_2\rangle$ (см. формулы (4) и (2)). Значит, на L $\widetilde{f} = f$. Наконец, учитывая, что $|\langle x,\, \widetilde{f}_k\rangle| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\|f\|\,\|x\|$ $(k = 1,\, 2)$, получим

$$\|\widetilde{f}\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x,\, \widetilde{f}\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sqrt{|\langle x,\, \widetilde{f}_1\rangle|^2 + |\langle x,\, \widetilde{f}_2\rangle|^2} \leqslant \|f\|.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема неверна, если L — вещественно-линейное многообразие, в любом бесконечномерном комплексном банаховом пространстве существует вещественно-линейное многообразие, на котором можно определить комплексно-линейный функционал, не имеющий ограниченного продолжения на X (Боненблуст и Собчик).

16.3. Следствия из теоремы Хана–Банаха. Теорема Хана–Банаха–Сухомлинова представляет собой один из фундаментальных результатов функционального анализа и имеет целый ряд глубоких следствий. Приведем некоторые из них.

Следствие 1. *Пусть X — нормированное пространство и $x \in X$, $x \neq 0$. Тогда существует всюду заданный в X линейный ограниченный функционал f такой, что $\|f\| = 1$, $\langle x,\, f\rangle = \|x\|$.*

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие $L = \{tx\}$, где t пробегает E. На L определим f так:

$$\langle tx,\, f\rangle = t\|x\|.$$

Имеем $\langle x,\, f\rangle = \|x\|$. Далее, для $y = tx$

$$|\langle y,\, f\rangle| = |t|\,\|x\| = \|tx\| = \|y\|, \quad \text{т. е.}\ \ \|f\| = 1.$$

Осталось применить теорему Хана–Банаха и продолжить с сохранением нормы f на все X.

Следствие 2. *Пусть в нормированном пространстве X задано линейное многообразие L и элемент $x_0 \notin L$ на расстоянии $d > 0$ от L ($d = \inf\limits_{x\in L} \|x_0 - x\|$). Тогда существует всюду определенный в X линейный функционал f такой, что*

1) $\langle x,\, f\rangle = 0$ *для любых* $x \in L$;
2) $\langle x_0,\, f\rangle = 1$;
3) $\|f\| = 1/d$.

Доказательство. Возьмем $L_1 = L + \{x_0\}$. Любой элемент $y \in L_1$ однозначно представляется в виде $y = x + tx_0$, где $x \in L$, $t \in E$ (см. лемму об элементарном продолжении). Определим f на L_1 следующей формулой:

$$\langle y,\, f\rangle = t.$$

Если $y \in L$, то $t = 0$ и $\langle y,\, f\rangle = 0$, т. е. выполняется условие 1). Далее, если $y = x_0$, то $t = 1$ и, значит, $\langle x_0,\, f\rangle = 1$, т. е. выполняется условие 2). Наконец,

$$|\langle y,\, f\rangle| = |t| = \frac{|t|\,\|y\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|x/t + x_0\|} \leqslant \frac{\|y\|}{d},$$

так как $\|x/t + x_0\| = \|x_0 - (-x/t)\| \geqslant d$, ибо $-x/t \in L$. Отсюда следует, что $\|f\| \leqslant 1/d$.

Для доказательства неравенства $\|f\| \geqslant 1/d$ воспользуемся определением inf и найдем $\{x_n\} \subset L$ такую, что $d = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\|$. Имеем

$$1 = \langle x_0 - x_n,\ f\rangle \leqslant \|x_0 - x_n\|\,\|f\|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $1 \leqslant d\|f\|$. Итак, $\|f\| = 1/d$. Осталось продолжить f с L_1 на все X.

Следствие 3. *Линейное многообразие L не является плотным в банаховом пространстве X тогда и только тогда, когда найдется линейный ограниченный функционал f, $f \neq 0$, такой, что $\langle x,\ f\rangle = 0$ для любых $x \in L$.*

Доказательство необходимости. Пусть $\bar{L} \neq X$. Тогда найдется $x_0 \in X$ такой, что $\rho(x_0,\ L) = d > 0$. По следствию 2 найдется f такой, что $< x_0,\ f >= 1$ (т. е. $f \neq 0$) и $\langle x,\ f\rangle = 0$ для всех $x \in L$.

Доказательство достаточности. Пусть $\bar{L} = X$. Тогда для любого $x \in X$, вследствие плотности L в X, найдется $\{x_n\} \subset L$, $x_n \to x$, $n \to \infty$. По условию существует $f \neq 0$ и обращающийся в 0 на L. Но тогда $\langle x,\ f\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n,\ f\rangle = 0$. Вследствие произвольности x отсюда $f = 0$. Но $f \neq 0$ по условию. Полученное противоречие показывает, что $\bar{L} \neq X$.

Следствие 4. *Пусть $\{x_k\}_1^n$ — линейно независимая система элементов в нормированном пространстве X. Тогда найдется система линейных, всюду на X определенных, ограниченных функционалов $\{f_l\}_1^n$ такая, что $\langle x_k,\ f_l\rangle = \delta_{kl}$ $(k, l = 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. Возьмем x_1 и через L_1 обозначим линейную оболочку векторов $x_2, x_3, \ldots, x_n$. $\rho(x_1,\ L_1) > 0$ вследствие линейной независимости вектров системы $\{x_k\}_1^n$. По следствию 2 найдем всюду на X заданный линейный ограниченный функционал f_1 такой, что $\langle x_1,\ f_1\rangle = 1$, $\langle x,\ f_1\rangle = 0$ на L_1 и, в частности, $\langle x_k,\ f_1\rangle = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$. Точно также возьмем x_2 и найдем $f_2\colon$ $\langle x_2,\ f_2\rangle = 1$, $\langle x_k,\ f_2\rangle = 0$ и т. д.

Определение. Система элементов $\{x_k\}_1^n$ и система функционалов $\{f_l\}_1^n$ называются *биортогональными*, если

$$\langle x_k,\ f_l\rangle = \delta_{kl}, \qquad k, l = 1, \ldots, n.$$

Докажем в заключении данного пункта лемму, примыкающую к следствию 4.

Лемма. *Пусть дана линейно независимая система линейных всюду на нормированном пространстве X определенных и ограниченных функционалов $\{f_l\}_1^n$. Тогда в X найдется система элементов $\{x_k\}_1^n$, биортогональная с системой $\{f_l\}_1^n$.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы справедливо. Если $f_1 \neq 0$, то найдется и $y_1 \in X$ такой, что $\langle y_1,\ f_1\rangle \neq 0$. Тогда, очевидно, $x_1 = y_1/\langle y_1,\ f_1\rangle$. Согласно методу математической индукции, пусть утверждение леммы имеет место для всякой системы из $n-1$ линейно независимых функционалов. Возьмем линейно независимую систему $\{f_l\}_1^n$ и пусть системы $\{f_l\}_1^{n-1}$ и $\{x_k\}_1^{n-1}$ биортогональны. Для произвольного $x \in X$ рассмотрим элемент $y = x - \sum\limits_{l=1}^{n-1} \langle x,\, f_l\rangle x_l$. Заметим, что всегда $\langle y,\, f_i\rangle = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. С другой стороны равенство $\langle y,\, f_n\rangle = 0$ не может выполняться для всех $x \in X$, иначе оказалось бы, что $\langle x,\, f_n\rangle = \sum\limits_{l=1}^{n-1} \langle x,\, f_l\rangle\langle x_l,\, f_n\rangle$, т. е. $f_n = \sum\limits_{l=1}^{n-1} \langle x_l,\, f_n\rangle f_l$, что противоречит линейной независимости системы $\{f_l\}_1^n$. Следовательно, найдется y_n такой, что $\langle y_n,\, f_n\rangle \neq 0$. Тогда $x_n = y_n/\langle y_n,\, f_n\rangle$ и системы $\{x_k\}_1^n$ и $\{f_l\}_1^n$ биортогональны. Лемма доказана.

§ 17. Сопряженные пространства

17.1. Два вида сходимости в сопряженном пространстве. Пусть X — банахово пространство, а X^1 — вещественная ось, если X вещественно, и комплексная плоскость, если X комплексно.

Рассмотрим $\mathcal{L}(X,\, X^1)$ — банахово пространство линейных ограниченных функционалов, заданных на X. Это пространство называется сопряженным к X и обозначается X^*. Итак, $X^* = \mathcal{L}(X,\, X^1)$. Значение линейного функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$ будем, как и выше, обозначать $\langle x,\, f\rangle$ (используется также обозначение $f(x)$).

Обозначение $\langle x,\, f\rangle$ аналогично обозначению скалярного произведения и очень удобно в вычислениях. В частности, вследствие линейности X и X^* справедливы равенства (для любых скаляров α_1, α_2, β_1, β_2, элементов x_1, x_2, x, функционалов f, f_1, f_2)

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\, f\rangle = \alpha_1\langle x_1,\, f\rangle + \alpha_2\langle x_2,\, f\rangle,$$

$$\langle x,\, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2\rangle = \bar\beta_1\langle x,\, f_1\rangle + \bar\beta_2\langle x,\, f_2\rangle.$$

(Черта означает комплексное сопряжение, в вещественном случае она опускается.)

Если $\langle x,\, f\rangle = 0$ для любого $x \in X$, то $f = 0$. Это свойство есть лишь определение нулевого функционала. Менее тривиальным является следующее свойство: если $\langle x,\, f\rangle = 0$ для любых $f \in X^*$, то $x = 0$. Оно вытекает из следствия 1 теоремы Хана–Банаха. Если допустить, что $x \neq 0$, то найдется $f \in X^*$ такой, что $f \neq 0$ и $\langle x,\, f\rangle = \|x\| \neq 0$. Это противоречит равенству $\langle x,\, f\rangle = 0$ для любых $f \in X^*$. Следовательно, $x = 0$.

Наконец, напомним, что норма линейного функционала f определяется по формуле

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x,\, f\rangle|$$

(это частный случай определения нормы линейного оператора, см. п. 11.1).

В X^*, как и в любом пространстве линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(X,\, Y)$, можно ввести два вида сходимости последовательностей. Это, прежде всего, сходимость по норме X^*: $f_n \to f$, $n \to \infty$ $(f_n,\, f \in X^*)$, если $\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$. Этот вид сходимости называется сильной сходимостью.

Далее, в X^* можно ввести следующий вид сходимости: $f_n \to f, n \to \infty$ $*$-слабо, если для всех $x \in X$ $\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle$, $n \to \infty$. Если элементы X^* рассматривать как линейные операторы из X в X^1, то первый вид сходимости соответствует равномерной сходимости операторов, а второй — их сильной сходимости, так что принятая терминология, конечно, условна.

Принцип равномерной ограниченности (см. п. 11.5) в случае функционалов принимает следующий вид:

Если $\{\langle x, f_n\rangle\}$ ограничена при каждом $x \in X$, то $\{f_n\}$ ограничена.

Теорема Банаха–Штейнгауза перефразируется для линейных функционалов так:

Для того чтобы $f_n \to f$, $n \to \infty$, $*$-слабо, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\{\|f_n\|\}$ *была ограничена;*

2) $\langle x, f_n\rangle \to \langle x, f\rangle$ *на плотном в X линейном многообразии.*

Упражнение 1. Показать, что если $f_n \to f$, $n \to \infty$, сильно, то $f_n \to f$, $n \to \infty$, $*$-слабо.

Пример. Пусть c_0 — линейное пространство бесконечно малых последовательностей $x = \{\xi_n\}$ ($\xi_n \to 0$, $n \to \infty$). Норму в c_0 введем по формуле $\|x\| = \sup\limits_n |\xi_n|$.

Упражнение 2. Показать, что c_0 полно и что $c_0 \subset m$ — пространство ограниченных последовательностей.

Покажем, что $(c_0)^* = l_1$ — пространство последовательностей $a = \{\alpha_n\}$ таких, что $\|a\|_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$.

Действительно, если $a = \{\alpha_n\} \in l_1$, то определим функционал f по формуле

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n.$$

Этот ряд сходится, ибо $|\alpha_n \xi_n| \leqslant \|x\|\,|\alpha_n|$. Очевидно, f — линейный функционал. Далее, $|\langle x, f\rangle| \leqslant \|x\|_{c_0} \|a\|_{l_1}$, откуда f ограничен: $\|f\| \leqslant \|a\|_{l_1}$.

Если $e_k = \{\delta_{nk}\} \in c_0$ (δ_{nk} — символ Кронекера) (система $\{e_k\}$ образует базис в c_0), то $\langle e_k, f\rangle = \alpha_k$. Возьмем теперь

$$x = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{sign} \alpha_k e_k \in c_0.$$

Очевидно, $\|x\|_{c_0} \leqslant 1$, тогда $\sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| = \langle x, f\rangle \leqslant \|f\|$. Следовательно, $l_1 \subset (c_0)^*$.

Обратно, пусть $f \in (c_0)^*$. Положим $\alpha_k = \langle e_k, f\rangle$. Пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{m} (\operatorname{sign} \alpha_k) e_k$, тогда $\|x\|_c \leqslant 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| = \langle x, f\rangle \leqslant \|f\|$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ сходится, и, значит, функционалу f отвечает $a = \{\alpha_n\} \in l_1$, причем $\|a\| \leqslant \|f\|$.

С другой стороны,

$$\langle x,\, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \alpha_k \leqslant \|x\|_{c_0}\, \|a\|_{l_1},$$

откуда $\|f\| \leqslant \|a\|$, т. е. $\|f\| = \|a\|$. Мы доказали, что $(c_0)^* \subset l_1$. Окончательно: $(c_0)^* = l_1$.

Упражнение 3. Показать, что $(l_1)^* = m$ — пространство ограниченных последовательностей.

17.2. Теорема Ф. Рисса об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве. Следующая теорема является одной из основных теорем функционального анализа, поскольку она имеет многочисленные полезные приложения (см., например, п. 17.3). Теорема эта принадлежит Ф. Риссу и дает явное выражение произвольного линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве через скалярное произведение. Другие теоремы подобного рода, например теорему об общем виде линейного функционала в пространстве $C[a,\, b]$ читатель может найти в книгах [25, 10].

Теорема (Ф. Рисс). *Пусть H — гильбертово пространство (комплексное или вещественное). Для любого линейного ограниченного функционала f, заданного всюду на H, существует единственный элемент $y \in H$ такой, что для всех $x \in H$*

$$\langle x,\, f\rangle = (x,\, y).$$

При этом $\|f\| = \|y\|$.

Доказательство. Рассмотрим L — множество всех элементов $z \in H$ таких, что $\langle z,\, f\rangle = 0$.

Упражнение 1. Показать, что L — подпространство в H.

Если $L = H$, то $f = 0$, можно взять $y = 0$, и теорема доказана.

Пусть $L \neq H$. Тогда найдется $z_0 \perp L$, $z_0 \neq 0$, причем можно считать, что $\langle z_0,\, f\rangle = 1$ (взяв, если потребуется, вместо z_0 $z_0' = z_0/\langle z_0,\, f\rangle$). Пусть теперь $x \in H$, тогда $x - \langle x,\, f\rangle z_0 \in L$, так как

$$\langle x - \langle x,\, f\rangle z_0,\, f\rangle = \langle x,\, f\rangle - \langle x,\, f\rangle = 0.$$

Следовательно, $x - \langle x,\, f\rangle z_0 \perp z_0$, откуда

$$0 = (x - \langle x,\, f\rangle z_0,\, z_0) = (x,\, z_0) - \langle x,\, f\rangle \|z_0\|^2.$$

Отсюда $\langle x,\, f\rangle = (x,\; z_0/\|z_0\|^2)$. Итак, можно принять $y = z_0/\|z_0\|^2$.

Покажем, что $\|f\| = \|y\|$. Действительно,

$$|\langle x,\, f\rangle| = |(x,\, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\|$$

по неравенству Коши–Буняковского. Из определения нормы f имеем $\|f\| \leqslant \|y\|$. Но, кроме того,

$$\langle y,\, f\rangle = (y,\, y) \leqslant \|f\|\,\|y\|,$$

откуда $\|y\| \leqslant \|f\|$. Итак, $\|f\| = \|y\|$.

Осталось доказать единственность y. Если $\langle x,\, f\rangle = (x,\, y) = (x,\, \widetilde{y})$, то $(x,\; y - \widetilde{y}) = 0$ для любых $x \in H$. Возьмем $x = y - \widetilde{y}$ и получим $\widetilde{y} = y$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Рисса указывает на возможность установления взаимно однозначного соответствия между пространствами H и H^*, сохраняющего норму. В вещественном случае это соответствие линейно. В комплексном случае это соответствие является «полулинейным» в следующем смысле:

$$\text{если } f_1 \leftrightarrow y_1, \quad \text{а } f_2 \leftrightarrow y_2, \quad \text{то } \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 \leftrightarrow \bar{\beta}_1 y_1 + \bar{\beta}_2 y_2.$$

С точностью до этого взаимно однозначного соответствия можно принять $H^* = H$, т. е. пространство, сопряженное к гильбертову пространству H, «совпадает» с H. В этом смысле можно говорить о самосопряженности гильбертова пространства.

Упражнение 2. В l_2 рассмотрим последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$, определяемую так: если $x = \{\xi_k\}$, то положим $\langle x,\, f_n\rangle = \xi_n$. Доказать, что $f_n \to 0$, $n \to \infty$, $*$-слабо, но не сходится в $l_2^* = l_2$.

17.3. Существование и единственность обобщенного решения эллиптического уравнения. Теорема Рисса эффективно применяется в теории разрешимости граничных задач для уравнений с частными производными. Будем говорить, что гильбертово пространство $\widehat{H}$ *вложено* в гильбертово пространство H, если из $x \in \widehat{H}$ следует, что $x \in H$, причем существует постоянная $k > 0$ такая, что для всех $x \in \widehat{H}$

$$\|x\|_H \geqslant k\|x\|_{\widehat{H}}. \tag{1}$$

Имеет место следующее следствие из теоремы Рисса.

Теорема. *Если гильбертово пространство $\widehat{H}$ вложено в гильбертово пространство H, то для каждого элемента $y \in H$ найдется единственный элемент $x \in \widehat{H}$ такой, что для всех $z \in \widehat{H}$ имеет место тождество*

$$(x,\, z)_{\widehat{H}} = (y,\, z)_H.$$

Тождество это определяет оператор $A \in \mathcal{L}(H,\, \widehat{H})$ такой, что $x = Ay$, при этом $\|A\| \geqslant k$.

Доказательство. При каждом фиксированном $y \in H$ выражение $(y,\, z)_H$ при всевозможных $z \in \widehat{H}$ определяет линейный ограниченный функционал на $\widehat{H}$. Линейность функционала очевидна. Его ограниченность вытекает из оценки

$$|(y,\, z)_H| \geqslant \|y\|_H \|z\|_H \geqslant \|y\|_H k \|z\|_{\widehat{H}}.$$

По теореме Рисса существует единственный элемент $x \in \widehat{H}$ такой, что $(y,\, z)_H = (x,\, z)_{\widehat{H}}$. Тем самым всюду на H задан оператор $x = Ay$. Проверку линейности A предоставляем читателю. Далее, из доказанного выше неравенства следует, что

$$|(Ay,\, z)_{\widehat{H}}| \geqslant k \|y\|_H \|z\|_{\widehat{H}}.$$

Полагая здесь $z = Ay$, получим $\|Ay\|_{\widehat{H}} \geqslant k\|y\|_H$, т. е. $\|A\| \geqslant k$, и, значит, A ограничен. Теорема доказана.

В качестве простейшего приложения доказанной теоремы докажем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В замкнутой ограниченной односвязной области $\bar{G} \subset \mathbf{R}^3$ с достаточно гладкой границей S рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(x,\, y,\, z), \qquad (x,\, y,\, z) \in G, \tag{2}$$

$$u|_S = 0. \tag{3}$$

Предположим, что правая часть $h(x,\, y,\, z)$ непрерывна в $\bar{G}$ по совокупности переменных. Функция $u(x,\, y,\, z)$ называется классическим решением задачи (2), (3), если u непрерывна как функция трех переменных в $\bar{G}$, имеет в G непрерывные производные, входящие в левую часть (2), удовлетворяет в G уравнению (2) и равна нулю на S, т. е. удовлетворяет граничному условию (3).

Пусть u — классическое решение задачи (2), (3), а $v(x,\, y,\, z)$ непрерывна в $\bar{G}$, равна нулю на S и непрерывно дифференцируема в G; тогда для любой такой v справедливо следующее интегральное тождество:

$$\iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = -\iiint\limits_{\bar{G}} hv\, dx\, dy\, dz. \tag{4}$$

Для доказательства этого тождества воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса:

$$\iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = = \oiint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Примем $P = v\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = v\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R = v\dfrac{\partial u}{\partial z}$ и получим

$$\iiint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$\oint\!\!\!\oint\limits_S v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\right) dS = \oint\!\!\!\oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.$$

Поскольку

$$v|_S = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = v\,\Delta u + (\operatorname{grad} v,\ \operatorname{grad} u),$$

а $\Delta u = h$, то получаем (4). Пусть теперь $h \in \mathcal{L}_2(\bar{G})$, $u,\ v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$, а интегралы в (4) понимаются в смысле Лебега.

Определение. Функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (2), (3), если для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$ выполняется интегральное тождество (4).

Докажем, что для любой правой части $h \in \mathcal{L}_2(\bar{G})$ обобщенное решение краевой задачи (2), (3) существует и единственно.

Для этого заметим, что гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$ вложено в гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\bar{G})$, ибо, по определению $\overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$, всякая функция $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$ принадлежит также и $\mathcal{L}_2(\bar{G})$ и справедлива оценка: для любой $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$ (см. п. 9.5)

$$\|v\|^2_{\mathcal{L}_2(\bar{G})} = \iiint\limits_{\bar{G}} v^2\,dx\,dy\,dz \leqslant$$

$$\leqslant k^2 \iiint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dx\,dy\,dz = k^2\|v\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})}.$$

Следовательно, по теореме для всякой функции $h \in \mathcal{L}_2(\bar{G})$ существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\bar{G})$ такая, что для всех $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$

$$(u,\ v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(G)} = -(h,\ v)_{\mathcal{L}_2(\bar{G})},$$

а это и есть интегральное тождество (4).

17.4. Рефлексивные пространства. Пусть X — банахово пространство. Сопряженное к нему пространство X^* также банахово. Но тогда можно ввести второе сопряженное к X пространство $X^{**} = (X^*)^*$, затем третье сопряженное $X^{***} = (X^{**})^*$ и так далее. В результате мы получаем цепочку банаховых пространств: X, X^*, X^{**}, X^{***}, $\ldots$ Если X гильбертово, то $X^* = X$ и все пространства цепочки совпадают. Пусть $X^* \neq X$. Рассмотрим поподробнее X^{**}. Это пространство состоит из линейных ограниченных функционалов, определенных на пространстве $X^* = \mathcal{L}(X,\, X^1)$, где X^1 — вещественная ось или комплексная плоскость. Пусть $f \in X^*$, а $x \in X$.

Рассмотрим число $\overline{\langle x,\, f\rangle}$, комплексно сопряженное к числу $\langle x,\, f\rangle$ — значению функционала f на элементе x. Пусть здесь x фиксирован, а f меняется. Тогда каждому $f \in X^*$ ставится в соответствие определенное число $\overline{\langle x,\, f\rangle} \in X^1$. При этом функционалу $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ ставится в соответствие число

$$\overline{\langle x,\, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\rangle} = \overline{\bar\lambda_1 \langle x,\, f_1\rangle + \bar\lambda_2 \langle x,\, f_2\rangle} = \lambda_1 \overline{\langle x,\, f_1\rangle} + \lambda_2 \overline{\langle x,\, f_2\rangle}.$$

Далее, $|\overline{\langle x,\, f\rangle}| \geqslant \|x\|\, \|f\|$. Это означает, что $\overline{\langle x,\, f\rangle}$ определяет заданный всюду на X^* линейный ограниченный функционал, который мы обозначим через x^{**}. Согласно неравенству

$$|\langle f,\, x^{**}\rangle| = |\overline{\langle x,\, f\rangle}| \geqslant \|x\|\, \|f\|$$

имеем $\|x^{**}\| = \|x\|$. По следствию 1 из теоремы Хана–Банаха для всякого $x \in X$ найдется $f_0 \in X^*$ с $\|f_0\| = 1$ такое, что $\langle x,\, f_0\rangle = \|x\|$. Тогда

$$|\langle f_0,\, x^{**}\rangle| = |\overline{\langle x,\, f_0\rangle}| = \|x\|\, \|f_0\|.$$

Следовательно $\|x^{**}\| = \|x\|$. Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если X — банахово пространство, то X изометрично вложено в X^{**}.* (Определение изометричного вложения см. в п. 7.5.)

Итак, установлено, что $X \subset X^{**}$.

Определение 1. Если $(X^*)^* = X$, то банахово пространство X называется *рефлексивным.*

Рефлексивные банаховы пространства играют важную роль в приложениях, поскольку они обладают многими хорошими свойствами гильбертовых пространств. Оказывается, что если X не рефлексивно, то все пространства X, X^*, $(X^*)^*$, $((X^*)^*)^*$, $\ldots$ различны.

Доказательство этого факта выходит за рамки нашей книги. Справедливы также следующие теоремы о рефлексивных пространствах.

Теорема 2. *Всякое подпространство рафлексивного банахова пространства само рефлексивно.*

Теорема 3. *Банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно сопряженное к нему пространство.*

Теорема 4. *Для того чтобы банахово пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякая ограниченная (по норме) последовательность его элементов содержала подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X* (см. п. 17.5).

Доказательства теорем 2 и 3 приведены в [10]. Доказательство необходимости условия теоремы 4 см. в [14]. Доказательство практически важной части теоремы 4 — достаточности ее условия — будет приведено в п. 19.7.

Приведем некоторые примеры. Помимо гильбертовых пространств рефлексивными являются пространства E^n, $l_p^{(n)}$, а также l_p и $\mathcal{L}_p(\bar{G})$ при $p > 1$.

Рефлексивность банаховых пространств встречается на так уж часто. В примере п. 17.1 было показано, что $(c_0)^* = l_1$, а в следующем за ним упражнении предлагалось показать, что $(l_1)^* = m$. Напомним, что c_0 — пространство бесконечно малых последовательностей, а m — пространство ограниченных последовательностей. Таким образом, c_0 не является рефлексивным ($c_0 \subset m$).

Определение 2. Банахово пространство X называется *равномерно выпуклым*, если для любых $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X$ таких, что $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| = 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$, $n \to \infty$, имеем $\|x_n - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$.

Упражнение. Пользуясь равенством параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

показать, что гильбертово пространство равномерно выпукло.

Теорема 5. *Всякое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно.*

Доказательство можно найти в [10].

17.5. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Пусть дана $\{x_n\} \subset X$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *слабо сходящейся к элементу* $x \in X$, если $\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$ для любого $f \in X^*$.

Если $x_n \to x$ слабо, то x называется *слабым пределом* $\{x_n\}$.

Докажем единственность слабого предела. Если существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся слабо к x и к $\widetilde{x}$, то для любого $f \in X^*$ имеем $\langle x, f\rangle = \langle \widetilde{x}, f\rangle$, откуда $\langle x - \widetilde{x}, f\rangle = 0$. Отсюда, по следствию 1 из теоремы Хана–Банаха, имеем $\widetilde{x} = x$. В отличие от слабо сходящихся последовательностей, последовательности, сходящиеся в X (т. е. сходящиеся по норме X), иногда называют *сильно сходящимися*.

Теорема 1. *Если последовательность $x_n \to x$, $n \to \infty$, сильно, то $x_n \to x$, $n \to \infty$, слабо.*

Доказательство вытекает из оценки

$$|\langle x_n, f\rangle - \langle x, f\rangle| = |\langle x_n - x, f\rangle| \leqslant \|x_n - x\| \, \|f\|.$$

Обратное утверждение неверно. Приведем пример последовательности, сходящейся слабо и не сходящейся сильно. В гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_k\}$ рассмотрим последовательность $\{e_k\}$ векторов базиса.

Для любого $x \in H$ $(e_k, x) \to 0$, $k \to \infty$, как коэффициенты Фурье вектора x. В силу самосопряженности H это означает, что $e_k \to 0$, $k \to \infty$, слабо.

С другой стороны, при $n \neq m$

$$\|e_n - e_m\|^2 = (e_n - e_m, \, e_n - e_m) = 2.$$

Следовательно, $\{e_n\}$ не является фундаментальной, а значит, и сходящейся в H.

Теорема 2. *Если $\{x_n\}$ слабо сходится, то она ограничена.*

Доказательство. $\{\langle x_n,\, f\rangle\}$ ограничена на каждом $f \in X^*$. Но $x_n \in X$ можно рассматривать как элемент пространства X^{**}, т. е. линейный функционал. Согласно принципу равномерной ограниченности $\{\|x_n\|\}$ ограничена, что и требовалось доказать.

Упражнение 1. Пусть $\{x_n\} \subset H$, $\{y_n\} \subset H$, $x_n \to x$ сильно, а $y_n \to y$ слабо при $n \to \infty$. Тогда $(x_n,\, y_n) \to (x,\, y)$.

Теорема 3. *Если X конечномерно и $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, слабо, то $x_n \to x_0$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_i^m$ — базис в X. Тогда $x_n = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^{(n)} e_i$, а $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^0 e_i$. Возьмем в X^* линейный функционал f_l такой, что $\langle e_i,\, f_l\rangle = \delta_{il}$ ($i,\, l = 1,\, \ldots,\, m$, δ_{il} — символ Кронекера). Тогда по условию теоремы

$$\langle x_n,\, f_l\rangle = \xi_l^{(n)} \to \langle x_0,\, f_l\rangle = \xi_l^{(0)}, \qquad n \to \infty.$$

Это верно при $l = 1,\, \ldots,\, m$. Но сходимость в X покоординатная, следовательно, $x_n \to x_0$, $n \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$. Если $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, слабо, то $Ax_n \to Ax_0$, $n \to \infty$, слабо.*

Доказательство. Для любого $f \in Y^*$ имеем

$$\langle Ax_n - Ax_0,\; f\rangle = \langle A(x_n - x_0),\; f\rangle = \langle x_n - x_0,\; A^* f\rangle \to 0$$

при $n \to \infty$, ибо $A^* f \in X^*$ (определение A^* см. в п. 18.1).

Теорема 5. *Для того чтобы последовательнось $\{x_n\}$ сходилась слабо к x_0, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\{\|x_n\|\}$ *была ограничена*;

2) $\langle x_n,\, f\rangle \to \langle x_0,\, f\rangle$, $n \to \infty$, *для любого f из плотного в X^* множества.*

Доказательство сразу же следует из теоремы Банаха– Штейнгауза, если x_n рассматривать как линейные функционалы над X^*.

Определение. Множество $M \subset X$ называется *слабо ограниченным*, если для каждого $f \in X^*$ числовое множество $\{\langle x,\, f\rangle,\; x \in M\}$ ограничено.

Упражнение 2. Покажите, что ограниченное множество слабо ограничено.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 6. *В банаховом пространстве всякое слабо ограниченное множество является ограниченным.*

Доказательство. Допустим, что M слабо ограничено, но не ограничено. Тогда найдется $\{x_n\} \subset M$ такая, что $\|x_n\| > n^2$. Рассмотрим $\{x_n/n\}$.

Для любого $f \in X^*$

$$\left|\left\langle \frac{x_n}{n},\, f\right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{n} \sup_{x\in M} |\langle x,\, f\rangle| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Это означает, что $x_n/n \to 0$, $n \to \infty$, слабо. Из теоремы 5 тогда следует, что $\{x_n/n\}$ ограничена, а это противоречит неравенству $\|x_n/n\| > n$. Теорема доказана.

Теорема 7 (Мазур). *Если $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, слабо в банаховом пространстве X, то существует такая последовательность выпуклых линейных комбинаций точек x_k*

$$\widetilde{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{nk} x_k \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} = 1,\ \alpha_{nk} \geqslant 0\right),$$

что $\widetilde{x}_n \to x_0$, $n \to \infty$, сильно.

Доказательство этой теоремы читатель может найти, например, в [14]. Более слабый вариант теоремы, без требования выпуклости линейных комбинаций, доказывается так. Пусть L — линейная оболочка системы $\{x_k\}$ (определение 2 п. 6.6). Если утверждение теоремы неверно, то $x_0 \notin \bar{L}$. Тогда по следствию 2 из теоремы Хана–Банаха (см. п. 16.3), найдется $f \in X^*$ такой, что $\langle x_0,\, f\rangle = 1$, $\langle x_k,\, f\rangle = 0$. Следовательно, $\langle x_n,\, f\rangle \nrightarrow$ $\nrightarrow \langle x_0,\, f\rangle$ при $n \to \infty$, и, значит, $x_n \nrightarrow x_0$ слабо при $n \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $x_0 \in \bar{L}$, т. е. наше утверждение.

Справедлив также следующий факт, доказательство которого можно найти в [10].

Теорема 8. *Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и $\{x_n\} \subset X$. Если при $n \to \infty$ $x_n \to x_0$ слабо и $\|x_n\| \to \|x_0\|$, то $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ сильно.*

§ 18. Сопряженные и самосопряженные операторы

В линейной алгебре изучаются сопряженные и самосопряженные линейные операторы в евклидовых и в унитарных пространствах. В бесконечномерном случае эти понятия обогащаются новым содержанием. Самосопряженными оказываются, например, многие операторы математической физики, а квантовая механика описывается на языке теории самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве.

18.1. Определение сопряженного оператора. Пусть $A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$. Составим выражение

$$\langle Ax,\, f\rangle, \quad \text{где } x \in X, \quad f \in Y^*.$$

Определим теперь функционал φ формулой

$$\varphi(x) = \langle x,\, \varphi\rangle = \langle Ax,\, f\rangle. \tag{1}$$

Отметим некоторые свойства φ:

1) $D(\varphi) = X$;

2) φ линеен, ибо

$$\varphi(\alpha_1 x + \alpha_2 x_2) = \langle A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2),\ f\rangle = \\ = \alpha_1\langle Ax_1,\ f\rangle + \alpha_2\langle Ax_2,\ f\rangle = \alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2);$$

3) φ ограничен, так как

$$|\varphi(x)| = |\langle Ax,\ f\rangle| \leqslant \|Ax\|\ \|f\| \leqslant \|A\|\ \|f\|\ \|x\|.$$

Следовательно, $\varphi \in X^*$. Итак, каждому $f \in Y^*$ поставлен в соответствие по формуле (1) элемент $\varphi \in X^*$. Таким образом, задан линейный непрерывный оператор $\varphi = A^* f$. Оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^*,\ X^*)$ и называется сопряженным к оператору A.

Лемма. *Если* $A \in \mathcal{L}(X,\ Y)$, *то* $\|A^*\| = \|A\|$.

Доказательство. Из свойства 3) имеем, согласно определению нормы линейного функционала,

$$\|\varphi\| \leqslant \|A\|\ \|f\|, \quad \text{т. е.}\ \ \|A^*\| \leqslant \|A\|.$$

Далее, согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха, для каждого x_0 такого, что $Ax_0 \neq 0$, существует функционал $f_0 \in Y^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $\langle Ax_0,\ f_0\rangle = \|Ax_0\|$. Отсюда имеем

$$\|Ax_0\| = |\langle Ax_0,\ f_0\rangle| = |\langle x_0,\ A^* f_0\rangle| \leqslant \|A^*\|\ \|f_0\|\ \|x_0\| = \|A^*\|\ \|x_0\|.$$

откуда $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Значит, $\|A^*\| = \|A\|$.

Приведем примеры самосопряженных операторов.

Пример 1. Пусть $X = Y = E^n$ — n-мерное евклидово пространство. Рассмотрим линейный оператор

$$\begin{gathered} y = Ax \quad (x = (\xi_j)_1^n,\ y = (\eta_i)_1^n), \\ \eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j, \qquad i = 1,\ \ldots,\ n. \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть $z = (\zeta_k)_1^n \in (E^n)^* = E^n$. Тогда, поскольку в гильбертовом пространстве действие функционала z на элемент Ax выражается их скалярным произведением, имеем

$$\langle Ax,\ z\rangle = \sum_{j=1}^n \eta_i\zeta_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right)\zeta_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}\zeta_i\right)\xi_j = (x,\ A^* z),$$

где оператор $w = A^* z$ определяется равенствами

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\zeta_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

т. е. A^* задается матрицей, транспонированной к матрице A.

Пример 2. Пусть $X = Y = U^n$ — n-мерное унитарное пространство комплексных столбцов и A — линейный оператор, заданный формулами (2), где теперь a_{ij} — комплексные числа.

Как и в примере 1, имеем (черта — комплексное сопряжение)

$$\langle Ax,\, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\bar{\zeta}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\right)\bar{\zeta}_i = \sum_{j=1}^{n}\xi_j \sum_{i=1}^{n}\overline{\bar{a}_{ij}\zeta_i} = \langle x,\, A^* z\rangle.$$

Теперь оператор $w = A^* z$ определяется так:

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}\zeta_i, \quad j = 1, \ldots, n,$$

и, следовательно, A^* задается матрицей, эрмитово-сопряженной к матрице A (элементы матрицы заменяются сопряженными числами и матрица транспонируется).

Пример 3. Пусть $X = Y = \mathcal{L}_2[a,\, b]$. Рассмотрим интегральный оператор $y = Kx$:

$$y(t) = \int_a^b K(t,\, s)\, x(s)\, ds,$$

с непрерывным в квадрате $[a,\, b] \times [a,\, b]$ ядром $K(t,\, s)$. Ограничимся вещественным случаем. Имеем равенство

$$\langle Kx,\, z\rangle = \int_a^b \left\{\int_a^b K(t,\, s)\, x(s)\, ds\right\} z(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left\{\int_a^b K(t,\, s)\, z(t)\right\} x(s)\, ds = \langle x,\, K^* z\rangle.$$

Следовательно, сопряженный оператор $\omega = K^* z$ также является интегральным оператором:

$$\omega(t) = \int_a^b K(s,\, t)\, z(s)\, ds,$$

и его ядро транспонировано к ядру оператора $K(t, s)$. Нашей ближайшей целью является изучение самосопряженных операторов. Поэтому мы пока ограничимся приведенными примерами.

18.2. Самосопряженные операторы. Пусть H — гильбертово комплексное пространство. Вещественный случай сводится к рассматриваемому посредством комплексификации.

Определение. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ называется *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если $A^* = A$, т. е. если A совпадает со своим сопряженным.

Согласно этому определению A — самосопряженный, если для любых $x, y \in H$

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{1}$$

Возможность «перебрасывать» A с одного множителя на другой множитель позволяет детально изучить класс самосопряженных операторов. Это тем более важно, так как самосопряженные операторы находят самые широкие приложения, например, в квантовой механике. Примеры 1–3 п. 18.1 позволяют дать простейшие образцы самосопряженных операторов.

Пример 1 (см. пример 1 п. 18.1). В E^n рассмотрим линейный оператор A, заданный равенствами (2). Оператор A будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $a_{ij} = a_{ji}$, т. е. когда матрица (a_{ij}) симметрична.

Пример 2 (см. пример 2 п. 18.1). Оператор A, определяемый равенствами (2), в унитарном пространстве U^n будет самосопряжен (эрмитов) тогда и только тогда, когда $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Пример 3 (см. пример 3 п. 18.1). Интегральный оператор K будет самосопряжен в $\mathcal{L}_2[a, b]$ в том и только в том случае, когда его ядро симметрично, т. е. $K(t, s) = K(s, t)$.

Докажем теперь ряд теорем о свойствах самосопряженных операторов.

Теорема 1. *Пусть A и B — самосопряженные операторы в H, а α и β — вещественные числа; тогда $\alpha A + \beta B$ — самосопряженный оператор в H.*

Доказательство. Пользуясь определением оператора $\alpha A + \beta B$, линейностью скалярного произведения и самосопряженностью A и B, получаем

$$((\alpha A + \beta B)x, y) = (\alpha Ax + \beta Bx, y) = \alpha(Ax, y) + \beta(Bx, y) =$$
$$= \alpha(x, Ay) + \beta(x, By) = (x, \alpha Ay + \beta By) = (x, (\alpha A + \beta B)y).$$

Теорема 2. *Пусть операторы A и B — самосопряженные. Оператор AB является самосопряженным в том и только в том случае, когда A и B перестановочны.*

Доказательство вытекает из равенства

$$(ABx, y) = (Bx, Ay) = (x, BAy).$$

Теорема 3. *Если A самосопряжен, то число (Ax, x) вещественно для любых $x \in H$.*

Доказательство. $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$. Комплексное число (Ax, x) совпадает со своим комлексно сопряженным и, значит, вещественно.

Теорема 4. *Если оператор A — самосопряженный, то*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|.$$

Доказательство. Пусть $c_A = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|$. По неравенству Коши–Буняковского и по свойству нормы линейного оператора имеем $c_A = |(Ax, x)| \leqslant \|Ax\|\,\|x\| \leqslant \|A\|$. Итак,

$$c_A \leqslant \|A\|. \tag{2}$$

Докажем теперь противоположное неравенство $\|A\| \geqslant c_A$, откуда и будет следовать утверждение теоремы.

Заметим сначала, что для любого $x \in H$, $x \neq 0$

$$|(Ax, x)| \leqslant c_A \|x\|^2. \tag{3}$$

Дествительно, если $\|x\| \leqslant 1$, то

$$|(Ax, x)| \leqslant c_A.$$

Если $x \neq 0$, $\left(A\dfrac{x}{\|x\|}, \dfrac{x}{\|x\|}\right) \leqslant c_A$, откуда, по линейности A и свойству 3 скалярного произведения, получаем (3).

Теперь рассмотрим следующие тождества:

$$(A(x+y),\ x+y) = (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) = \\ = (Ax, x) + 2\,\mathrm{Re}\,(Ax, y) + (Ay, y),$$

$$(A(x-y),\ x-y) = (Ax, x) - 2\,\mathrm{Re}\,(Ax, y) + (Ay, y).$$

Мы воспользовались тем, что

$$(Ax, y) + (Ay, x) = (Ax, y) + (y, Ax) = \\ = (Ax, y) + \overline{(Ax, y)} = 2\,\mathrm{Re}\,(Ax, y),$$

где $\mathrm{Re}\,\lambda$ — действительная часть комплексного числа λ; $\bar{\lambda}$ — число, комплексно сопряженное с λ. Вычитая из первого тождества второе, получим

$$4\,\mathrm{Re}\,(Ax, y) = (A(x+y),\ x+y) - (A(x-y),\ x-y).$$

Оценивая по модулю и используя неравенство (3) и равенство параллелограмма, находим

$$4\,|\,\mathrm{Re}\,(Ax, y)| \leqslant |(A(x+y),\ x+y)| + |(A(x-y),\ x-y)| \leqslant \\ \leqslant c_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2c_A(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Пусть теперь $\|x\| = \|y\| = 1$, тогда

$$|\operatorname{Re}(Ax,\, y)| \leqslant c_A.$$

Пусть x, $\|x\| \leqslant 1$, таково, что $Ax \neq 0$. Положим в (4) $y = Ax/\|Ax\|$ и получим

$$|(Ax,\, Ax)|/\|Ax\| \leqslant c_A, \quad \text{т. е. } \|Ax\| \leqslant c_A.$$

Это тем более верно, если $Ax = 0$. Переходя в неравенстве $\|Ax\| \geqslant c_A$ к $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}$ и пользуясь определением нормы линейного оператора, получим $\|A\| \leqslant c_A$. Вместе с неравенством (2) это дает $\|A\| = c_A$, что и требовалось доказать.

18.3. Неотрицательные операторы. Неравенства. Покажем, что по множестве самосопряженных операторов из $\mathcal{L}(H)$ можно ввести частичную упорядоченность: для некоторых пар самосопряженных операторов будет установлено отношение «больше или равно».

Определение 1. Будем говорить, что самосопряженный оператор A *неотрицателен*, и писать $A \geqslant 0$, если $(Ax,\, x) \geqslant 0$ для любых $x \in H$.

Упражнение 1. Показать, что если даны операторы $A_1 \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 0$ и скаляры $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, то $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \geqslant 0$.

Лемма 1. *Всякий многочлен от неотрицательного оператора с неотрицательными числовыми коэффициентами является неотрицательным оператором.*

Доказательство. Пусть $A \geqslant 0$. Рассмотрим оператор вида $F_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A^k$, где все $\alpha_k \geqslant 0$. $A^0 = I$ по определению, так что $A^0 \geqslant 0$. Далее, $A^{2m} \geqslant 0$ даже для любого самосопряженного оператора A, так как $(A^{2m}x,\; x) = (A^m x,\; A^m x) \geqslant 0$, $(A^{2m+1}x,\; x) = (Ay,\, y) \geqslant 0$ (здесь $y = A^m x$), значит, $A^{2m+1} \geqslant 0$. Итак, все $A^k \geqslant 0$.

Применяя упражнение 1, получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $A \geqslant 0$; тогда справедливо обобщенное неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(Ax,\, y)| \leqslant \sqrt{(Ax,\, x)}\sqrt{(Ay,\, y)}.$$

Доказательство. Пусть $[x,\, y] = (Ax,\, y)$; тогда имеют место следующие свойства $[x,\, y]$:

1) $[x,\, x] \geqslant 0$;
2) $[x,\, y] = \overline{[y,\, x]}$;
3) $[\lambda x,\, y] = \lambda[x,\, y]$ (для любого комплексного числа λ);
4) $[x_1 + x_2,\, y] = [x_1,\, y] + [x_2,\, y]$.

Это обычные свойства скалярного произведения, за одним исключением: $[0,\, 0] = 0$, но из $[x,\, x] = 0$ может не следовать, что $x = 0$. Предоставляем читателю проверить, что доказательство неравенства Коши–Буняковского (см. п. 5.2) использует только свойства 1)–4).

Таким образом, утверждение леммы, записанное в виде $\big|[x, y]\big| \leqslant \sqrt{[x, x]}\sqrt{[y, y]}$, доказано.

Определим теперь неравенство $A \leqslant B$ для некоторых пар самосопряженных операторов A и B, пользуясь определением неотрицательных операторов.

Определение 2. Пусть A и B — самосопряженные операторы из $\mathcal{L}(H)$. Будем писать $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$, если $A - B \geqslant 0$ (т.е. $(Ax, x) \geqslant (Bx, x)$ для всех $x \in H$).

Элементарные свойства неравенств мы предлагаем проверить читателю.

Упражнение 2. Пусть A, B и C — самосопряженные операторы из $\mathcal{L}(H)$. Покажите, что

1) $A \geqslant A$;

2) если $A \geqslant B$ и $B \geqslant C$, то $A \geqslant C$;

3) если $A \geqslant B$, а $B \geqslant A$, то $A = B$;

4) пусть $A \geqslant B$; тогда, если $\alpha \geqslant 0$, то $\alpha A \geqslant \alpha B$; если $\alpha \geqslant 0$, то $\alpha A \geqslant \alpha B$.

18.4. Общее определение сопряженного оператора. В этом и в следующем пунктах показано, каким образом понятия сопряженного и самосопряженного операторов обобщаются на случай неограниченных операторов. Неограниченные самосопряженные операторы встречаются, например, в квантовой механике. Подробнее с этим кругом вопросов читатель может познакомиться в монографии [28].

Пусть X и Y — нормированные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Рассмотрим линейный оператор A (возможно, неограниченный) с областью определения $D(A) \subset X$ и со значениями в Y.

Фиксируем $f \in Y^*$ и при всевозможных $x \in D(A)$ получим выражение $\langle Ax, f\rangle$. Вследствие его линейности по x на $D(A)$ возникает вопрос, при каких условиях оно определяет единственный функционал $\varphi \in X^*$.

Начнем с вопроса о единственности.

Лемма. *Для того чтобы представление*

$$\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi\rangle \tag{1}$$

при всех $x \in D(A)$ было единственным ($\varphi \in X^*$), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{D(A)} = X$.

Доказательство необходимости. Допустим, что $\overline{D(A)} \neq X$. По следствию 3 из теоремы Хана–Банаха найдется $\varphi_0 \in X^*$, $\varphi_0 \neq 0$ и такой, что $(x, \varphi_0) = 0$ для всех $x \in \overline{D(A)}$. Но тогда, наряду с представлением (1), имеет место представление $\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi + \varphi_0\rangle$ (для всех $x \in D(A)$), что противоречит единственности представления (1). Это означает, что допущение $\overline{D(A)} \neq X$ неверно, и $\overline{D(A)} = X$.

Доказательство достаточности. Пусть $\overline{D(A)} = X$. Если $\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi_1\rangle = \langle x, \varphi_2\rangle$, то $\langle x, \varphi_1 - \varphi_2\rangle = 0$ для всех $x \in D(A)$, плотному в X. По тому же следствию 3 из теоремы Хана–Банаха $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, т.е. представление (1) единственно. Лемма доказана.

Ниже предполагается, что $\overline{D(A)} = X$. Пусть $f \in Y^*$. Будет ли существовать $\varphi \in X^*$? Если, например, $f = 0$, то $\varphi = 0$. Выражение $\langle Ax,\, f\rangle$ для каждого $f \in Y^*$ определяет линейный функционал φ, однако φ может оказаться неограниченным, т. е. не принадлежать X^*. Введем множество $D^* \subset Y^*$ тех $f \in Y^*$, для которых имеет место представление (1) (при $\varphi \in X^*$).

Упражнение 1. Покажите, что D^* — линейное многообразие в Y^*.

Теперь каждому $f \in D^* \subset Y^*$ поставлен в соответствие определенный элемент $\varphi \in X^*$ (в силу представления (1)). Тем самым задан оператор $\varphi = A^* f$ с областью определения $D(A^*) = D^* \subset Y^*$ и со значениями в X^*; оператор A^* называется *сопряженным к* A.

Упражнение 2. Покажите, что A^* — линейный оператор.

Имеет место следующее равенство:

$$\langle Ax,\, f\rangle = \langle x,\, A^* f\rangle, \tag{2}$$

справедливое для любых $x \in D(A)$ и любых $f \in D(A^*)$. Все вышеизложенное можно подытожить следующим образом.

Теорема 1. *Пусть A — линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и с областью значений в Y. Если $D(A)$ плотна в X и только в этом случае, существует (однозначный) сопряженный к A линейный оператор A^* с областью определения $D(A^*) \subset Y^*$, со значениями в X^*. При этом для любых $x \in D(A)$, $f \in D(A^*)$ справедливо равенство* (2).

Докажем еще две теоремы о сопряженных операторах.

Теорема 2. *Пусть A — линейный оператор с плотной в нормированном пространстве X областью определения $D(A)$ и с областью значений в нормированном пространстве Y. Тогда оператор A^*, сопряженный к A, замкнут.*

Доказательство. Пусть $f_n \in D(A^*)$ и $f_n \to f_0$ при $n \to \infty$ (в Y^*). Пусть, далее, $A^* f_n = \varphi_n \to \varphi_0$ при $n \to \infty$ (в X^*). Имеем $\langle x,\, \varphi_n\rangle \to \langle x,\, \varphi_0\rangle$, а $\langle Ax,\, f_n\rangle \to \langle Ax,\, f_0\rangle$ при $n \to \infty$ для всех $x \in D(A)$. Но $\langle Ax,\, f_n\rangle = \langle x,\, \varphi_n\rangle$, и, значит, $\langle Ax,\, f_0\rangle = \langle x,\, \varphi_0\rangle$. Это означает, что $f_0 \in D(A^*)$ и $A^* f_0 = \varphi_0$, т. е. A^* замкнут. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\overline{D(A)} = X$. Равенство $D(A^*) = Y^*$ имеет место тогда и только тогда, когда A ограничен на $D(A)$. В этом случае $A^* \in \mathcal{L}(Y^*,\, X^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.*

Доказательство необходимости. Пусть $D(A^*) = Y^*$, т. е. выражение $\langle Ax,\, f\rangle$ определяет при любом $f \in Y^*$ ограниченный в X^* функционал. Это означает, что множество $M = A\{D(A) \bigcap \overline{S_l(0)}\}$ (образ при отображении A пересечения $D(A)$ с единичным шаром) слабо ограничено. Но тогда (см. теорему 6 п. 17.5) оно ограничено, т. е. найдется постоянная $c > 0$ такая, что $\|Ax\| \geqslant c$ для всех $x \in D(A) \bigcap \overline{S_1(0)}$. Это означает, что A ограничен на $D(A)$ (см. п. 10.5).

Доказательство достаточности. Пусть A ограничен на $D(A)$; тогда $\langle Ax,\ f\rangle$ ограничено по $x \in D(A)$ на каждом ограниченном множестве при любом $f \in Y^*$, т. е. $D(A^*) = Y^*$. Кроме того,

$$|\langle x,\ A^* f\rangle| = |\langle Ax,\ f\rangle| \leqslant \|A\|\,\|x\|\,\|f\|.$$

Согласно определению нормы линейного функционала

$$\|A^* f\| \leqslant \|A\|\,\|f\|, \quad \text{т. е.} \quad \|A^*\| \leqslant \|A\|.$$

Покажем, что верно обратное неравенство. Согласно определению нормы линейного оператора, для каждого $\varepsilon > 0$ существует x_ε с $\|x_\varepsilon\| = 1$ такой, что $\|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon$. Далее, по следствию 1 из теоремы Хана–Банаха найдется $f_\varepsilon \in Y^*$ такой, что $\|f_\varepsilon\| = 1$ и $\langle Ax_\varepsilon,\ f_\varepsilon\rangle = \|Ax_\varepsilon\|$. Следовательно, имеем

$$\|A^*\| \geqslant \|A^* f_\varepsilon\| \geqslant |\langle x_\varepsilon,\ A^* f_\varepsilon\rangle| = \|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon.$$

Отсюда $\|A^*\| \geqslant \|A\|$, и, значит, $\|A^*\| = \|A\|$. Теорема полностью доказана.

18.5. Определение симметрического и самосопряженного операторов. В гильбертовом пространстве H рассмотрим линейный оператор A с плотной в H областью определения $D(A)$. Пусть A^* — сопряженный к A оператор.

Определение 1. Если $D(A^*) \supset D(A)$ и на $D(A)$ $A^* x = Ax$, т. е. A^* является расширением A, то оператор A будем называть *симметрическим.*

Замечание. Так как $\overline{D(A)} = H$ и $D(A^*) \supset D(A)$, то и $\overline{D(A^*)} = H$, и, следовательно, существует (см. теорему 1 п. 18.4) оператор $(A^*)^* = A^{**}$, который замкнут (см. теорему 2 п. 18.4).

Теория самосопряженных расширений симметрических операторов здесь не рассматривается. Она находит важное приложение в теории дифференциальных операторов (см. [28]).

Определение 2. Если $A = A^*$, то линейный оператор A называется *самосопряженным.*

Согласно вышеизложенному самосопряженный оператор A всегда замкнут, а $\overline{D(A)} = H$ для любых $x, y \in D(A)$ имеет место равенство

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay). \tag{1}$$

Свойства ограниченных самосопряженных операторов, отмеченные в п. 18.2, частично переносятся на рассматриваемый общий случай.

Упражнение 1. Пусть A и B — симметрические (самосопряженные) операторы в H с общей областью определения D, а α и β — вещественные числа; тогда $\alpha A + \beta B$ — симметрический (самосопряженный) оператор (см. теорему 1 п. 18.2).

Упражнение 2. Пусть A — симметрический оператор в H. Тогда для любых $x \in D(A)$ число $(Ax,\ x)$ вещественно (см. теорему 3 п. 18.2).

На симметрические и самосопряженные операторы переносится также понятие неотрицательного оператора, и понятие неравенства (для операторов с общей областью определения).

18.6. Операторы ортогонального проектирования (см. [25]). Остановимся подробнее на одном частном случае ограниченных самосопряженных операторов. Речь здесь идет об операторах ортогонального проектирования, или ортопроекторах, которые мы будем здесь для краткости называть проекторами.

Пусть в гильбертовом пространстве H задано подпространство M. Согласно теореме Рисса (см. п. 6.3) каждому $x \in H$ можно поставить в соответствие элемент $y \in M$ — ортогональную проекцию x на M. Тем самым в H определен оператор $y = Px$.

Упражнение 1. Покажите, что $x \in M$ в том и только в том случае, когда $Px = x$.

Пусть теперь $M^{\perp}$ — ортогональное дополнение к M ($M^{\perp} = \{z \in \in H\colon\ z \perp M\}$), а z — ортогональная проекция x на $M^{\perp}$. Тогда определен проектор H на $M^{\perp}$, равный $I - P$, так что $z = (I - P)x$ (вспомним, что $x = y + z$, где $y \in M$, $z \in M^{\perp}$).

Упражнение 2. Покажите, что $x \in M^{\perp}$ (т. е. $x \perp M$) тогда и только тогда, когда $Px = 0$.

Перечислим основные свойства проекторов.

1. Каждый проектор P является всюду определенным в H линейным оператором со значениями в H. Действительно, пусть $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, λ_1 и λ_2 — скаляры. Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} x &= y + z, \quad &\text{где} \quad y &\in M, \quad & z &\in M^{\perp}, \\ x_1 &= y_1 + z_1, \quad &\text{где} \quad y_1 &\in M, \quad & z_1 &\in M^{\perp}, \\ x_2 &= y_2 + z_2, \quad &\text{где} \quad y_2 &\in M, \quad & z_2 &\in M^{\perp}. \end{aligned}$$

Тогда $y + z = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$, где $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in M$, а $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in M^{\perp}$. Следовательно, $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, т. е.

$$P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P x_1 + \lambda_2 P x_2.$$

Линейность проектора P доказана.

2. $P \in \mathcal{L}(H)$, причем $\|P\| = 1$, если $M \neq \{0\}$. Воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2.$$

Отсюда $\|Px\|^2 \leqslant \|x\|^2$, т. е. $\|Px\| \leqslant \|x\|$, и, значит, $\|P\| \leqslant 1$. Пусть теперь $M \neq \{0\}$. Возьмем $x_0 \in M$ с $\|x_0\| = 1$. Тогда $1 = \|x_0\| = \|Px_0\| \leqslant \leqslant \|P\|\,\|x_0\| = \|P\|$. Неравенства $\|P\| \geqslant 1$ и $\|P\| \leqslant 1$ дают $\|P\| = 1$.

3. $P^2 = P$. Действительно, возьмем любой $x \in H$; тогда $Px \in M$, и, значит, $P(Px) = P^2 x = Px$.

4. P самосопряжен. Действительно, пусть $x_1, x_2 \in H$, $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$; $y_1, y_2 \in M$; $z_1, z_2 \in M^{\perp}$; тогда

$$\begin{aligned} (Px_1,\, x_2) = (y_1,\, y_2 + z_2) = (y_1,\, y_2) + (y_1,\, z_2) = \\ = (y_1,\, y_2) = (y_1 + z_1,\, y_2) = (x_1,\, Px_2). \end{aligned}$$

Здесь $(y_1, z_2) = 0$, ибо $y_1 \in M$, $z_2 \in M^\perp$; аналогично $(z_1, y_2) = 0$.

5. Для любого $x \in H$ имеем $(Px, x) = \|Px\|^2$, откуда $(Px, x) \geqslant 0$. Действительно, по свойствам 3 и 4

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geqslant 0.$$

6. $x \in M$ тогда и только тогда, когда $\|Px\| = \|x\|$. Это свойство вытекает из теоремы Пифагора (см. 2).

7. $(Px, x) \leqslant \|x\|^2$ для любого $x \in H$. Равенство достигается, когда $Px = x$ (т. е. $x \in M$), и только в этом случае.

Доказательство. $(Px, x) \leqslant \|Px\|\,\|x\| \leqslant \|P\|\,\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2$. Если же $(Px, x) = (x, x)$, то, согласно 5, $\|Px\|^2 = \|x\|^2$, т. е. $\|Px\| = \|x\|$, откуда (см. 6) $x \in M$.

В заключение докажем следующее предложение.

Теорема. *Пусть A — самосопряженный оператор в H, причем $A^2 = A$; тогда A — проектор на некоторое подпространство $M \subset H$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$M = \{x\colon\ Ax = x\}.$$

Так как A ограничен, то M замкнуто. Покажем, что A — проектор на M. Возьмем любой $x \in H$ и представим его в виде $x = Ax + (x - Ax)$.

Докажем, что $Ax \in M$, а $x - Ax \in M^\perp$. Первое включение очевидно, так как $A(Ax) = A^2x = Ax$. Далее, для произвольного $u \in M$ имеем

$$(x - Ax,\ u) = (x, u) - (Ax, u) = (x, u) - (x, Au) = (x, u) - (x, u) = 0,$$

т. е.

$$x - Ax \in M^\perp.$$

Теорема доказана.

18.7. Отношения между подпространствами и ортопроекторы (см. [29]). Сначала посмотрим, как интерпретируется на языке проекторов отношение включения двух подпространств.

Теорема 1. *Пусть P_1 — проектор на подпространство M_1, а P_2 — проектор на подпространство M_2. Следующие пять условий эквивалентны:*

1) $M_2 \subset M_1$;
2) $P_1P_2 = P_2$;
3) $P_2P_1 = P_2$;
4) $\|P_2x\| \leqslant \|P_1x\|$ *для любого* $x \in H$;
5) $(P_2x, x) \leqslant (P_1x, x)$ *для любого* $x \in H$.

Доказательство. Так как $(Px, x) = \|Px\|^2$ (см. свойство 5 проекторов), то условия 4) и 5) эквивалентны. Поэтому доказательство теоремы можно провести по следующей схеме: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

Пусть справедливо 1). Тогда для любого $x \in H$ имеем $P_2x \in M_2$ и, значит, $P_2x \in M_1$, но тогда $P_1P_2x = P_2x$, т. е. $P_1P_2 = P_2$.

Пусть справедливо 2), тогда $P_2 P_1 = P_2^* P_1^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* = P_2$.

Пусть справедливо 3), тогда для любого $x \in H$

$$\|P_2 x\| = \|P_2 P_1 x\| \leqslant \|P_2\| \, \|P_1 x\| \leqslant \|P_1 x\|.$$

Пусть справедливо 4). Если $x \in M_2$, то

$$\|x\| = \|P_2 x\| \leqslant \|P_1 x\| \leqslant \|x\|,$$

откуда $\|P_1 x\| = \|x\|$. По свойству 6 проектора тогда $x \in M_1$, т. е. 1) доказано. Теорема полностью доказана.

Посмотрим теперь, как на языке проекторов выглядит отношение ортогональности двух подпространств.

Определение. Проекторы P_1 и P_2 называются *ортогональными* (краткая запись: $P_1 \perp P_2$), если $P_1 P_2 = 0$.

Следствие. *Если $P_1 \perp P_2$, то и $P_2 \perp P_1$.*

Действительно, если $0 = P_1 P_2$, $0 = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$, т.е. $P_2 \perp P_1$.

Теорема 2. *Пусть P_1 — проектор на подпространство M_1, а P_2 — проектор на подпространство M_2; $M_1 \perp M_2$ тогда и только тогда, когда $P_1 \perp P_2$.*

Доказательство. Если $P_1 P_2 = 0$, то для любых $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$ имеем

$$(x_1, \, x_2) = (P_1 x_1, \, P_2 x_2) = 0,$$

т. е. $M_1 \perp M_2$.

Обратно, пусть $M_1 \perp M_2$. Тогда для любого $x \in H$ имеем $P_2 x \in M_2$ и, значит, $P_1 P_2 x = 0$, т. е. $P_1 P_2 = 0$. Теорема доказана.

Теперь мы переведем на язык проекторов операции пересечения подпространств, ортогональной суммы подпространств и ортогональной разности подпространств.

Лемма 1. *Произведение двух проекторов является проектором в том и только в том случае, когда они перестановочны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть P_1 и P_2 — проекторы, тогда они самосопряжены. $P_1 P_2$ — проектор и, значит, также самосопряжен. По теореме 2 п. 18.2 тогда $P_1 P_2 = P_2 P_1$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $P_1 P_2 = P_2 P_1$. Тогда $P_1 P_2$ самосопряжен (по той же теореме 2). Кроме того,

$$(P_1 P_2)^2 = (P_1 P_2)(P_1 P_2) = P_1 (P_1 P_2) P_2 = \\ = P_1 (P_1 P_2) P_2 = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2.$$

По теореме п. 18.6 $P_1 P_2$ — проектор. Лемма 1 доказана.

Теорема 3. *Пусть P_i — проектор на подпространство M_i ($i = 1, 2$). Пусть P_1 и P_2 перестановочны. Тогда $P_1 P_2$ — проектор на $M_1 \bigcap M_2$.*

Доказательство. Пусть P_1P_2 — проектор на M, и пусть $x \in M$. Тогда $x = P_1P_2x = P_1(P_2x) \in M_1$, т.е. $x \in M_1$. Далее, $x = P_2P_1x = P_2(P_1x) \in M_2$, т.е. $x \in M_2$. Следовательно $x \in M_1 \bigcap M_2$. Доказано включение $M \subset M_1 \bigcap M_2$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть $x \in M_1 \bigcap M_2$. Рассмотрим P_1P_2x. Так как $x \in M_2$, то $P_2x = x$ и потому $P_1P_2x = P_1x$, но $x \in M_1$, откуда $P_1x = x$. Следовательно, $P_1P_2x = x$, т.е. $x \in M$. Значит, $M_1 \bigcap M_2 \subset M$.

Из доказанных включений имеем $M = M_1 \bigcap M_2$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Сумма конечного числа операторов проектирования $P_1 + \ldots + P_n$ является оператором проектирования тогда и только тогда, когда эти операторы попарно ортогональны, т. е. $P_kP_l = 0$ при $k \neq l$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P_1 + \ldots + P_n = P$ — проектор H на подпространство M. Пользуясь свойствами проекторов, имеем

$$\|Px\|^2 = (Px,\, Px) = (P^2x,\, x) = (Px,\, x) = \sum_{k=1}^{n}(P_kx,\, x) = \\ = \sum_{k=1}^{n}(P_k^2x,\, x) = \sum_{k=1}^{n}(P_kx,\, P_kx) = \sum_{k=1}^{n}\|P_kx\|^2.$$

Следовательно, для любого $x \in H$

$$\sum_{k=1}^{n}\|P_kx\|^2 = \|Px\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Положим здесь $x = P_ly$, где $y \in H$; тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\|P_kP_ly\|^2 \leqslant \|P_ly\|^2, \quad \text{или} \quad \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n} k = 1\|P_kP_ly\|^2 + \|P_l^2y\|^2 \leqslant \|P_ly\|^2.$$

Так как $\|P_l^2y\|^2 \leqslant \|P_ly\|^2$, то $\|P_kP_ly\| = 0$ при $k \neq l$.

Вследствие произвольности y отсюда получаем $P_kP_l = 0$, $k \neq l$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ попарно ортогональны. Отсюда имеем

$$P^2 = (P_1 + \ldots + P_n)^2 = P_1^2 + \ldots + P_n^2 = P_1 + \ldots + P_n = P.$$

Но, как сумма самосопряженных операторов, P самосопряжен (см. теорему 1 п. 18.2); следовательно, по теореме п. 18.6 P — проектор. Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $P_1, \ldots, P_n$ — *попарно ортогональные проекторы, причем* P_i *проектирует* H *на подпространство* M_i. *Тогда* $P_1 + \ldots + P_n$ *проектирует* H *на ортогональную сумму подпространств* $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

Доказательство. Пусть $P = P_1 + \ldots + P_n$ проектирует H на некоторое подпространство M. Возьмем $x \in M$, тогда $x = Px = P_1x + \ldots + P_nx$, где $P_kx \in M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. (Согласно теореме 2 $M_k \perp M_l$ при $k \neq l$.) По определению ортогональной суммы подпространств последнее равенство означает, что $x \in M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$. Доказано включение $M \subset M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

Для доказательства обратного включения возьмем $x \in M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, т. е. $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_k \in M_k$, и покажем, что $Px = x$, что равносильно $x \in M$. В самом деле,

$$Px = (P_1 + \ldots + P_2)(x_1 + \ldots + x_n) = x,$$

так как $P_kx_k = x_k$, (ведь $x_k \in M_k$), а $P_kx_l = 0$ при $k \neq l$, так как $x_l \perp M_k$ при $k \neq l$. Теорема доказана.

Лемма 3. *Разность* $P_1 - P_2$ *проекторов* P_1 *и* P_2 *является проектором тогда и только тогда, когда* $P_1 \geqslant P_2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $P = P_1 - P_2$ — проектор, тогда $P_1 = P + P_2$ и по лемме 2 $PP_2 = 0$, т. е.

$$0 = (P_1 - P_2)P_2 = P_1P_2 - P_2^2 = P_1P_2 - P_2,$$

или $P_1P_2 = P_2$. По теореме 1 это равносильно $P_1 \geqslant P_2$.

Достаточность. Пусть $P_1 \geqslant P_2$. Тогда по теореме 1 $P_1P_2 = P_2$, $P_2P_1 = P_2$. Оператор $P = P_1 - P_2$ самосопряжен, как разность двух самосопряженных операторов (см. теорему 1). Далее,

$$P^2 = (P_1 - P_2)^2 = P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 - P_2 - P_2 + P_2 = P.$$

Но тогда по теореме п. 18.6 P — проектор.

Теорема 5. *Пусть* P_i — *проектор* H *на подпространство* M_i, $i = 1, 2$, *причем* $P_1 \geqslant P_2$. *Тогда оператор* $P_1 - P_2$ — *проектор* H *на ортогональную разность* $M_1 \ominus M_2$.

Доказательство. Пусть $P_1 - P_2$ — проектор H на подпространство M. Так как

$$P_2(P_1 - P_2) = P_2P_1 - P_2^2 = P_2P_1 - P_2 = P_2 - P_2 = 0,$$

то $P_2 \perp P_1 - P_2$. Но тогда по теореме 4 оператор $P_1 = P_2 + (P_1 - P_2)$ проектирует H на $M_1 = M_2 \oplus M$. По определению ортогональной разности $M = M_1 \ominus M_2$.

Замечание. Если $P_1 = I$, то, так как $I \geqslant P_2$ для любого проектора P_2, получаем уже известный факт: проектор $I - P_2$ проектирует H на $M_2^{\perp} = H \ominus M_2$.

Г Л А В А V

КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА И ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 19. Компактные множества в нормированных пространствах

19.1. Бикомпактные множества. В математическом анализе существенную роль играет известная теорема Больцано–Вейерштрасса, в которой утверждается: из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Напомним, что *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ называется ее подмножество $\{x_{n_k}\}$, если $n_{k+1} > n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, т.е. если в $\{x_{n_k}\}$ сохраняется порядок следования элементов $\{x_n\}$.

Теорема Больцано–Вейерштрасса легко переносится на любое конечномерное банахово пространство X. Достаточно фиксировать в X базис и рассмотреть соответствующее банахово пространство координат, которое, вследствие эквивалентности норм, можно отождествить с евклидовым пространством E^n. Из теоремы Больцано–Вейерштрасса в E^n (см.[21]) теперь следует ее справедливость в X.

В бесконечномерном банаховом пространстве теорема Больцано–Вейерштрасса не имеет места. Действительно, возьмем гильбертово пространство, и пусть в нем задана ортонормированная система векторов $\{e_n\}$.

Последовательность векторов этой системы ограничена, но не сходится ни она сама, ни какая-либо ее подпоследовательность. (Покажите это с помощью критерия Коши.)

И все же свойство, выражаемое теоремой Больцано–Вейерштрасса, настолько важно, что представляет смысл выделить случаи, когда эта теорема справедлива. Дадим следующее важное определение.

О п р е д е л е н и е. Множество $\mathfrak{M}$ банахова пространства X называется *бикомпактным*, если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит $\mathfrak{M}$.

Из этого определения вытекает ряд следствий.

С л е д с т в и е 1. *Всякое бикомпактное множество ограничено.*

Допустим, что это не так. Тогда найдется $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ такая, что $\|x_n\| > n$. Очевидно, что это противоречит бикомпактности $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{M}$ ограничено.

С л е д с т в и е 2. *Всякое бикомпактное множество замкнуто.*

Действительно, если $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}$ и $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, то, так как сама $\{x_n\}$ является своей подпоследовательностью по бикомпактности $\mathfrak{M}$, $x_0 \in \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ замкнуто.

Возникает естественный вопрос: не является ли всякое ограниченное и замкнутое множество $\mathfrak{M}$ бикомпактным? Ясно, что в общем случае это не так. В рассмотренном выше примере множество $\{e_n\}$ векторов некоторой ортонормированной системы гильбертова пространства ограничено и замкнуто, но не бикомпактно.

Во всяком конечномерном банаховом пространстве всякое ограниченное замкнутое бесконечное множество бикомпактно.

Это утверждение представляет собой чуть усиленный вариант теоремы Больцано–Вейерштрасса. Если $\{x_n\}$ — некоторая последовательность элементов такого множества, то она ограничена и все ее предельные точки (пределы ее подпоследовательностей) принадлежат этому множеству вследствие его замкнутости.

19.2. Бикомпактные множества и задачи вариационного исчисления. В математическом анализе устанавливаются теоремы о том, что всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке и достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений. При этом существенно используется бикомпактность отрезка.

Такие же теоремы справедливы в произвольном банаховом (и даже в метрическом) пространстве, причем роль отрезка играет бикомпактное множество.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — вещественный нелинейный непрерывный функционал, определенный на бикомпактном множестве Q; тогда $f(x)$ ограничен на Q.*

Доказательство. Покажем, что $f(x)$ ограничен сверху, т. е. найдется постоянная c такая, что $f(x) \leqslant c$ для любых $x \in Q$.

Допустим противное. Тогда найдется $x_1 \in Q$ такое, что $f(x_1) > 1$. Далее, существует $x_2 \in Q$, для которого $f(x_2) > 2$. Повторяя это рассуждение, получим $\{x_n\} \subset Q$ такую, что $f(x_n) > n$. Вследствие бикомпактности Q существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$: $x_0 \in Q$ вследствие той же бикомпактности Q. По непрерывности функционала f, $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$. Значит, $\{f(x_{n_k})\}$ ограничена. Но, с другой стороны, $f(x_{n_k}) > n_k$, т. е. $f(x_{n_k}) \to \infty$ при $k \to \infty$. Мы пришли к противоречию. Значит, предположение о том, что $f(x)$ неограничен сверху, неверно, т.е. $f(x)$ ограничен сверху.

Аналогично доказывается ограниченность $f(x)$ снизу. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — вещественный нелинейный непрерывный функционал, определенный на бикомпактном множестве Q. Тогда существуют $x_0 \in Q$ и $x^0 \in Q$, такие, что*

$$f(x_0) = \inf_{x\in Q} f(x), \quad f(x^0) = \sup_{x\in Q} f(x).$$

(Иначе говоря, $f(x)$ достигает на Q своих наименьшего и наибольшего значений.)

Доказательство. Обозначим $\sup\limits_{x\in Q} f(x) = m$. Надо доказать, что эта точная верхняя грань достигается. Из определения $\sup$ имеем: для любого n существует $x_n \in Q$ такое, что $m - 1/n < f(x_n) \leqslant m$. Отсюда следует, что $f(x_n) \to m$. Вследствие бикомпактности Q существует последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому $x_0 \in Q$. По непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$. Но, с другой стороны, $f(x_{n_k}) \to m$ при $k \to \infty$. Из единственности предела $m = f(x_0)$. Мы показали, что $f(x)$ достигает на Q своего наибольшего значения. Аналогично доказывается, что $f(x)$ достигает на Q своего наименьшего значения. Теорема доказана.

Пользуясь теоремой 2, приведем пример замкнутого, ограниченного, но не являющегося бикомпактным множества.

Пример. Пусть дано вещественное пространство $X = C[0,\,1]$. Рассмотрим множество

$$M = \{x(t) \in C[0,\,1]\colon\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ |x(t)| \leqslant 1\}.$$

Это множество ограничено и замкнуто (проверьте!). Рассмотрим на M функционал $f(x) = \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt$. Он непрерывен, ибо если $x_n(t) \to \widehat{x}_0(t)$, $n \to \infty$, равномерно, то $f(x_n) \to f(\widehat{x}_0)$, $n \to \infty$. Но $f(x)$ не достигает на M своей точной нижней грани. Действительно, рассмотрим функции $x_n(t) = t^n$. Тогда $f(x_n) = \int\limits_0^1 t^{2n}\,dt = \dfrac{1}{2n+1}$ и, значит, $\inf\limits_M f(x) = 0$. Если допустить, что $\int\limits_0^1 x_0^2(t)\,dt = 0$, то $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,\,1]$. (Если $x_0(t) \neq 0$ хоть в одной точке, то вследствие ее непрерывности $\int\limits_0^1 x_0^2(t)dt > 0$.) Но тогда $x_0(1) = 0 \neq 1$ и, следовательно, $x_0(t) \notin M$. Итак, M не является бикомпактным.

19.3. Компактные множества в нормированных пространствах. Критерий компактности Хаусдорфа.

Определение. Множество M нормированного пространства X называется *компактным,* если из каждой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Заметим, что если X банахово, то указанная фундаментальная последовательность, вследствие полноты X, сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$, однако не обязательно $x_0 \in M$. Таким образом, понятие компактного множества слабее понятия бикомпактного множества. Имеет место следующий факт.

Теорема 1. *Компактное множество в нормированном пространстве бикомпактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.*

Доказательство достаточности. Пусть компактное множество M замкнуто. Возьмем $\{x_n\} \subset M$. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — ее фундаментальная подпоследовательность. Ее предел $x_0 \in M$, так как M замкнуто. Следовательно, M бикомпактно.

Доказательство необходимости вытекает из замкнутости бикомпактного множества.

Приведем теперь критерий компактности Хаусдорфа. Он основывается на следующем важном определении.

Определение. Пусть X — нормированное пространство и множество $M \subset X$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Множество M_ε называется *ε-сетью множества M*, если для любой точки $x \in M$ найдется точка $\widehat{x} \in M_\varepsilon$ такая, что $\|x - \widehat{x}\| < \varepsilon$.

Понятие ε-сети множества M допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть M_ε — ε-сеть M, а $\widehat{x} \in M_\varepsilon$. Возьмем шар $S_\varepsilon(\widehat{x})$. Тогда $M \subset \bigcup\limits_{\widehat{x} \subset M_\varepsilon} S_\varepsilon(\widehat{x})$ (M содержится в объединении шаров радиуса ε с центрами в точках множества M_ε. Иначе говоря, совокупность этих шаров покрывает M).

Будем говорить, что ε-сеть конечна, если M_ε — конечное множество (т. е. M_ε состоит из конечного числа элементов).

Теорема 2 (Хаусдорф). *Множество M в нормированном пространстве X компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть.*

Доказательство необходимости. Пусть M компактно. Возьмем $\varepsilon > 0$. Нужно доказать, что существует конечная ε-сеть.

Возьмем $x_1 \in M$. Если окажется, что $\|x - x_1\| < \varepsilon$ для остальных $x \in M$, то $M_\varepsilon = \{x_1\}$ (ε-сеть состоит из одного элемента x_1). Пусть это не так. Тогда должен существовать элемент $x_2 \in M$ такой, что $\|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon$. Если окажется, что $\|x - x_1\| < \varepsilon$ или $\|x - x_2\| < \varepsilon$ для любых $x \in M$, то $\{x_1, x_2\}$ — ε-сеть.

Повторяя это рассуждение, мы видим, что либо процесс оборвется на некотором n-м шагу и мы получим конечную ε-сеть $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$, либо процесс будет продолжаться бесконечно. В последнем случае мы получим $\{x_n\} \subset M$ такую, что $\|x_n - x_m\| \geqslant \varepsilon$ для любых $n, m, n \neq m$. Такая последовательность не фундаментальна, и никакая ее подпоследовательность также не фундаментальна, а это противоречит компактности M. Это означает, что наш процесс не может быть бесконечным. Значит, конечная ε-сеть существует и, более того, она состоит из элементов M.

Доказательство достаточности. Пусть теперь известно, что у множества M для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть M_ε. Возьмем $\{\varepsilon_n\}$, стремящуюся к нулю. Для каждого ε_n существует конечная ε_n-сеть множества M. Положим

$$M_{\varepsilon_n} = \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k_n}}\}$$

(M_{ε_n} состоит из k_n элементов).

Для доказательства компактности M возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset M$. Нужно показать, что из нее можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. Возьмем M_{ε_1}. Тогда $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k_1} S_{\varepsilon_1}(x_{1_i})$, т. е. покрыто k_1 шарами радиуса ε_1 с центрами в точках ε_1-сети M_{ε_1}. Так как $\{x_n\}$ состоит из бесконечного числа элементов, то хотя бы в одном из шаров $S_{\varepsilon_1}(x_{1_i})$ содержится бесконечное число членов $\{x_n\}$. Обозначим один из таких шаров через S_1, а через X_1 — содержащуюся в S_1 бесконечную часть данной последовательности $\{x_n\}$.

Выберем $x_{n_1} \in X_1$. Возьмем теперь M_{ε_2} — ε_2-сеть множества M. Теперь M покрыто совокупностью шаров радиуса ε_2 с центрами в точках x_{2_i} $(i = 1, \ldots, k_2)$, составляющих ε_2-сеть. Тем более эти шары покрывают множество X_1. Так как X_1 бесконечно, а число шаров конечно, то существует шар S_2, содержащий бесконечную часть X_1, которую мы обозначим X_2. Выберем в X_2 x_{n_2} с условием $n_2 > n_1$, сохраняя порядок следования элементов $\{x_n\}$. Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность вложенных шаров $\{S_k\}$ радиусов ε_k и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, причем не только $x_{n_k} \in S_k$, но и $x_{n_l} \in S_k$, если $l > k$. Покажем, что x_{n_k} — фундаментальная. Пусть c_k — центр шара S_k, тогда

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+p}}\| \leqslant \|x_{n_k} - c_k\| + \|c_k - x_{n_{k+p}}\| < 2\varepsilon_k.$$

Из этого неравенства вытекает фундаментальность $\{x_{n_k}\}$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Пусть X банахово, а $M \subset X$ замкнуто. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть множества M, то M бикомпактно.

19.4. Следствия из теоремы Хаусдорфа. Приведем несколько простых результатов, вытекающих из теоремы Хаусдорфа.

Следствие 1. *Если для любого $\varepsilon > 0$ для множества M существует компактная ε-сеть в X, то M компактно.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$, и пусть M_ε — компактная ε-сеть для M. По теореме Хаусдорфа существует конечная ε-сеть для M_ε, которую мы обозначим M'_ε. Покажем, что M'_ε — конечная 2ε-сеть для M. Действительно, пусть $x \in M$, тогда существует $x' \in M_\varepsilon$ такой, что $\|x - x'\| < \varepsilon$. Но M'_ε — ε-сеть для M_ε, и, значит, существует $x'' \in M'_\varepsilon$, для которого $\|x' - x''\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\|x - x''\| \leqslant \|x - x'\| + \|x' - x''\| < 2\varepsilon.$$

Итак, M'_ε — конечная 2ε-сеть для M. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Компактное множество ограничено.*

Доказательство. Пусть M компактно. Пусть $\varepsilon = 1$; построим конечную 1-сеть для M: $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Теперь для любого $x \in M$ найдем x_s

такой, что $\|x - x_s\| < 1$, и получаем оценку

$$\|x\| \leqslant \|x - x_s\| + \|x_s\| < 1 + \|x_s\| \leqslant 1 + \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \|x_s\|,$$

т. е. M ограничено.

Мы уже встречались с сепарабельными пространствами (см. п. 5.7). Будем говорить, что множество M банахова пространства X сепарабельно, если существует счетное, плотное в M множество.

Следствие 3. *Всякое компактное множество сепарабельно.*

Доказательство. Пусть M компактно. Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и для каждого ε_n построим конечную ε_n-сеть множества M, которую обозначим через M_n. Положим $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Очевидно, множество $\widetilde{M}$ счетно. Докажем, что оно плотно в M. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n такой, что $\varepsilon_n < \varepsilon$, и элемент $x_n \in M_n \subset \widetilde{M}$ такой, что $\|x - x_n\| < \varepsilon_n < \varepsilon$. Это и означает плотность $\widetilde{M}$ в M.

19.5. Теорема Рисса.

Определение 1. Неограниченное множество M элементов нормированного пространства X называется *локально компактным* (*локально бикомпактным*), если пересечение M с любым замкнутым шаром в X компактно (бикомпактно).

Наиболее интересным в приложениях является случай, когда M — линейное многообразие или подпространство в X. Имеет место следующее важное утверждение.

Теорема (Ф. Рисс). *Для того чтобы линейное многообразие L нормированного пространства X было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы L было конечномерным.*

Доказательство. Достаточность. Пусть L конечномерно. Возьмем в X произвольный замкнутый шар S. Множество $L \bigcap S$ ограничено в L, поэтому всякая последовательность $\{x_n\} \subset L \bigcap S$ компактна, так как по теореме Больцано–Вейерштрасса она содержит сходящуюся в L подпоследовательность. Этим доказана локальная компактность L.

Пусть L локально компактно, т. е. $L \bigcap S$ компактно в X. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е. L бесконечномерно. Будем рассматривать L как самостоятельное нормированное пространство. Тогда $L \bigcap S$ компактно в L. Пусть $S = \bar{S}_r(a)$. Возьмем любой элемент $x_1 \in L$ с $\|x_1\| = 1$ и положим $z_1 = a + rx_1$. Обозначим через M_1 линейную оболочку $\mathcal{L}(x_1)$, т. е. множество элементов вида λx_1.

По лемме Рисса о почти перпендикуляре существует $x_2 \in L$ с $\|x_2\| = 1$ такой, что $\rho(x_2, M_1) > 1/2$ и, в частности $\|x_2 - x_1\| > 1/2$. Положим $z_2 = a + rx_2$. Очевидно, $z_2 \in S$ и $\|z_2 - z_1\| = r\|x_2 - x_1\| > r/2$.

Продолжим эти построения. Если $x_1, \ldots, x_n$ и, соответственно, $z_n = a + rx_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ уже определены, то через M_n обозначим подпространство натянутое на $x_1, \ldots, x_n$; M_n замкнуто, так как оно конечномерно. Так как L бесконечномерно, то $M_n \neq L$, и снова можно воспользоваться леммой Рисса: найдется вектор x_{n+1} с $\|x_{n+1}\| = 1$ и такой, что $\rho(x_{n+1}, M_n) > 1/2$, в частности, $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$ $(k = 1, \ldots, n)$. Положим $z_{n+1} = a + rx_{n+1}$. Очевидно, $z_{n+1} \in S$ и $\|z_{n+1} - z_k\| > r/2$ $(k = 1, \ldots, n)$. Продолжая эти рассуждения, получим $\{z_n\} \subset S \bigcap L$ и не содержащую фундаментальной подпоследовательности. А это противоречит компактности $S \bigcap L$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для того чтобы нормированное пространство было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было конечномерным.*

Для доказательства достаточно взять $L = X$.

Определение 2 (см п. 5.8). Множество M в нормированном пространстве X называется *нигде не плотным в* X, если в каждом шаре $S \subset X$ содержится шар S_1, не содержащий точек M.

Следствие 2. *В бесконечномерном нормированном пространстве любое компактное множество нигде не плотно.*

Доказательство. Пусть M — компактное множество в бесконечномерном нормированном пространстве X. Допустим, что утверждение следствия неверно. Тогда в X найдется шар $S_r(a)$ такой, что любой шар, содержащийся в нем, пересекается с M. Покажем, что в таком случае $\bar{M} \supset S_r(a)$. В самом деле, пусть $x_0 \in S_r(a)$. Рассмотрим последовательность шаров $S_{r_n}(x_0)$, где $r_n = (r - \|x_0 - a\|)/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если $\|x - x_0\| < r_n$, то

$$\|x - a\| \leqslant \|x - x_0\| + \|x_0 - a\| < r_n + \|x_0 - a\| \leqslant r.$$

Поэтому $S_{r_n}(x_0) \subset S_r(a)$, а тогда, по предположению, каждый шар $S_{r_n}(x_0)$ пересекается с M. Пусть x_n — их общая точка. Очевидно, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, а поскольку $x_n \in M$, то $x_0 \in \bar{M}$. Итак, каждая точка $x_0 \in S_r(a)$ принадлежит $\bar{M}$. Значит, $S_r(a) \subset \bar{M}$, но тогда и $\bar{S}_r(a) \subset \bar{M}$. Так как M компактно, то отсюда — компактны $\bar{M}$ и $\bar{S}_r(a)$. Из компактности $\bar{S}_r(a)$ по следствию 1 получаем конечномерность X. Полученное противоречие завершает доказательство следствия 2.

19.6. Теорема Арцела. Пусть $\bar{G}$ — замкнутая ограниченная область в евклидовом пространстве E^n. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C(\bar{G})$. Пусть M — некоторое множество функций из $C(\bar{G})$. Какие условия обеспечивают компактность множества M? Каковы необходимые условия компактности множества? Эти вопросы решаются теоремой Арцела.

Принято говорить, что функции множества M *равномерно ограничены*, если существует постоянная $c > 0$, общая для всех функций из M, такая, что для любых $x \in M$ $|x(t)| \leqslant c$ $(t \in \bar{G})$. Иначе можно записать: $\|x\| \leqslant c$ $(x \in M)$. Таким образом, равномерная ограниченность функций множества M означает ограниченность множества M в $C(\bar{G})$.

Введем теперь понятие равностепенной непрерывности функций множества M. Будем говорить, что функции из M *равностепенно непрерывны*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых t', $t'' \in \bar{G}$, удовлетворяющих неравенству $\|t' - t''\| < \delta$ (здесь норма — в E^n), имеет место следующее неравенство, выполняющееся сразу для всех $x \in M$:

$$|x(t') - x(t'')| < \varepsilon.$$

Теперь мы можем сформулировать теорему Арцела.

Теорема 1 (Арцел). *Для того чтобы множество $M \subset C(\bar{G})$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были*

1) *равномерно ограничены;*

2) *равностепенно непрерывны.*

Доказательство необходимости. Равномерная ограниченность функций из M очевидна, так как всякое компактное множество ограничено. Покажем, что функции из M равностепенно непрерывны. Возьмем $\varepsilon > 0$, и пусть $M_\varepsilon = \{x_1(t), \ldots, x_{k(\varepsilon)}(t)\}$ — ε-сеть в M. Функции из M_ε непрерывны на $\bar{G}$, а значит, и равномерно непрерывны (см. [18]). Следовательно, для каждого x_i $(i = 1, \ldots, k(\varepsilon))$ найдется $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|x_i(t') - x_i(t'')| < \varepsilon, \tag{1}$$

если только $\|t' - t''\| < \delta_i$.

Возьмем $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k(\varepsilon)} \delta_i$, тогда для всех t', $t'' \in \bar{G}$, удовлетворяющих неравенству $\|t' - t''\| < \delta$, имеем неравенство (1) сразу для всех $i = 1, \ldots, k(\varepsilon)$. Воспользуемся теперь тем, что M_ε — это ε-сеть для M: для любого $x \in M$ найдем $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$, так что $\|x - x_s\| < \varepsilon$. Если теперь $\|t' - t''\| < \delta$, то сразу для всех $x \in M$ имеем (см. (1))

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant |x(t') - x_s(t')| + |x_s(t') - x_s(t'')| + \\ + |x_s(t'') - x(t'')| \leqslant 2\|x - x_s\| + |x_s(t') - x_s(t'')| < 3\varepsilon.$$

Это и означает равностепенную непрерывность функций из M.

Доказательство достаточности. Пусть $\{x_n(t)\}$ — произвольная последовательность функций из M. Покажем, что из нее можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по свойству равностепенной непрерывности функций из M найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Поскольку $\bar{G}$ бикомпактно, то по теореме Хаусдорфа в $\bar{G}$ найдется конечная $\delta(\varepsilon)$-сеть, т. е. набор точек $\bar{G}_\varepsilon = \{t_1, \ldots, t_{l(\varepsilon)}\}$ таких, что всякая точка $t \in \bar{G}$ удалена от одной из точек $\bar{G}_\varepsilon$ на расстояние, не превышающее δ.

Вернемся к $\{x_n(t)\}$. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_n(t_1)\}$. Она ограничена, так как лежит в ограниченном множестве M. По теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n'}(t_1)\}$ (n' пробегает подмножество натурального ряда). Возьмем теперь $\{x_{n'}(t)\}$ и рассмотрим ее в точке t_2. Из $\{x_{n'}(t_2)\}$ снова выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n''}(t_2)\}$. Рассмотрим теперь $\{x_{n''}(t)\}$. Продолжая эти рассуждения (всего надо сделать $l(\varepsilon)$ шагов), получим подпоследовательность $\{x_{n_k}(t)\}$ последовательности $\{x_n(t)\}$, сходящуюся во всех точках δ-сети $\bar{G}_\delta$.

Покажем, что $\{x_{n_k}(t)\}$ фундаментальна в $C(\bar{G})$. Этим теорема будет доказана.

Возьмем $t \in \bar{G}$ и найдем $t_s \in \bar{G}_\delta$ такое, что $\|t - t_s\| < \delta$. Используя равностепенную непрерывность функций множества M, теперь имеем

$$|x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_k}(t)| \leqslant |x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_{k+p}}(t_s)| + |x_{n_{k+p}}(t_s) - x_{n_k}(t_s)| + \\ + |x_{n_k}(t_s) - x_{n_k}(t)| < 2\varepsilon + |x_{n_{k+p}}(t_s) - x_{n_k}(t_s)|.$$

Но последовательность $\{x_{n_k}(t_s)\}$ сходится и тем более фундаментальна. Значит, существует такой номер $K = K(\varepsilon)$, что если $k > K$, то $|x_{n_{k+p}}(t_s) - x_{n_k}(t_s)| < \varepsilon$ для любых натуральных p. Следовательно, при любых $k > K$ имеем

$$|x_{n_{k+p}}(t) - x_{n_k}(t)| < 3\varepsilon,$$

откуда

$$\|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}\| \leqslant 3\varepsilon,$$

т.е. $\{x_{n_k}(t)\}$ фундаментальна в $C(\bar{G})$. Теорема Арцела полностью доказана.

Пример. В $C[a, b]$ рассмотрим множество M функций $x(t)$, непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и таких, что $x(a) = x_0$ и $|x'(t)| \leqslant m$ на $[a, b]$. (Числа x_0 и m одни и те же для всех $x \in M$.) Покажем с помощью теоремы Арцела, что M компактно.

Всякая функция $x(t) \in M$ представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_0^t x'(s)\, ds.$$

Отсюда $|x(t)| \leqslant |x_0| + m(b - a)$. Далее,

$$|x(t') - x(t'')| = \left| \int_{t'}^{t''} x'(s)\, ds \right| \leqslant m|t'' - t'|.$$

Эти неравенства показывают, что функции из M равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, M компактно. Согласно следствию 2 п. 19.5 M нигде не плотно в $C[a, b]$.

Заметим теперь следующее. Анализ доказательства теоремы Арцела показывает, что важно было не то, что функции были определены на $\bar{G} \subset E^n$, а то, что $\bar{G}$ было бикомпактно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Асколи, Арцел). *Пусть $\bar{G}$ — бикомпактное множество в нормированном пространстве E, и пусть $C(\bar{G})$ — банахово пространство непрерывных функций $x(t)$, $t \in \bar{G}$ (т.е. комплексных или вещественных функционалов). Для того чтобы множество $M \subset C(\bar{G})$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции из M были равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы Арцела (см. также [25, 14], где доказаны еще более общие предложения).

19.7. Слабая компактность.

Определение 1. Множество M банахова пространства X называется *слабо компактным*, если из любой (бесконечной) последовательности его элементов можно выбрать слабо фундаментальную подпоследовательность (фундаментальную в смысле слабой сходимости).

Определение 2. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *слабо фундаментальной*, если для любого $f \in X^*$ числовая последовательность $\{\langle x_n, f\rangle\}$ фундаментальна. Пространство X называется *слабо полным*, если всякая слабо фундаментальная в X последовательность является слабо сходящейся. Отсюда следует, что если X слабо полно, то в определении слабой компактности множества $M \subset X$ условие слабой фундаментальности подпоследовательности можно заменить условием ее слабой сходимости (в X). Ниже мы увидим, что всякое рефлексивное банахово пространство является слабо полным.

Теорема 1. *Всякое слабо компактное множество ограничено.*

Доказательство. Пусть M слабо компактно. Допустим, что M не ограничено. Тогда существует $\{x_n\} \subset M$ такая, что $\|x_n\| > n$. Из слабой компактности M вытекает, что найдется подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, которая слабо фундаментальна и, значит (по теореме 6 п. 17.5), ограничена. Но $\|x_{n'}\| > n' \to \infty$ при $n' \to \infty$. Полученное противоречие доказывает ограниченность M.

Докажем теперь, следующую основную теорему.

Теорема 2. *Всякое ограниченное множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно.*

Доказательство. Пусть M ограничено и $\{x_n\} \subset M$. Построим в X подпространство N, получаемое замыканием множества всевозможных конечных линейных комбинаций векторов последовательности $\{x_n\}$. Согласно предложению 1 п. 5.7 N сепарабельно, а как подпространство рефлексивного пространства X (см. теорему 2 п. 17.4) N рефлексивно. Следовательно, $N = (N^*)^*$, а тогда N^* также сепарабельно. Возьмем теперь $\{f_n\}$ — счетное, всюду плотное в N^* множество. Рассмотрим числовую последовательность $\{\langle x, f_1\rangle\}$. Она ограничена, ибо $|\langle x_n, f\rangle| \leqslant$ $\leqslant \|x_n\|\,\|f_1\| \leqslant c\|f_1\|$ ($\{x_n\} \subset M$ — ограниченное множество). По теореме Больцано–Вейерштрасса из $\{\langle x_n, f_1\rangle\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{\langle x_{n_1}, f_1\rangle\}$. Теперь возьмем $\{x_{n_1}\}$ и рассмотрим числовую последовательность $\{\langle x_{n_1}, f_2\rangle\}$, которая тоже ограничена и, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{\langle x_{n_2}, f_2\rangle\}$. Далее рассмотрим последовательность $\{\langle x_{n_2}, f_3\rangle\}$, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{\langle x_{n_3}, f_3\rangle\}$ и возьмем $\{x_{n_3}\}$ и т. д. Повторяя это рассуждение, получим последовательности

$$\{x_{n_1}\} \supset \{x_{n_2}\} \supset \ldots \supset \{x_{n_k}\} \supset \ldots,$$

причем, $\{x_{n_k}\}$ такова, что сходится последовательность $\{\langle x_{n_k}, f_i\rangle\}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Построим теперь диагональную последовательность $\{x_{n'}\}$, k-й член которой равен k-му члену последовательности $\{x_{n_k}\}$. Последовательность $\{\langle x_{n'}, f_1\rangle\}$ сходится как подпоследовательность последовательности $\{\langle x_{n_1}, f_1\rangle\}$; далее, $\{\langle x_{n'}, f_2\rangle\}$ сходится, как подпоследовательность последовательности $\{\langle x_{n_2}, f_2\rangle\}$, и т. д.; $\{\langle x_{n'}, f_k\rangle\}$ сходится как подпоследовательность последовательности $\{\langle x_{n_k}, f_k\rangle\}$. Следовательно, $\{x_{n'}\}$ слабо сходится на плотном в N^* множестве $\{f_n\}$ и, кроме того, $\{x_{n'}\}$ ограничена.

Поскольку N рефлексивно, то $\{x_{n'}\}$ можно считать последовательностью линейных функционалов в N^*. Тогда по теореме Банаха–Штейнгауза (см. п. 11.5) $\{\langle f, x_{n'}\rangle\}$ сходится для любого $f \in N^*$. Пусть $x_{n'} \to x_0$, $n' \to \infty$, слабо на N^*. Так как $x_{n'} \in N$, то и $x_0 \in N$.

Пусть теперь $\varphi \in X^*$. Его сужение на N^* обозначим через f. Теперь при $n' \to \infty$

$$\langle x_{n'}, \varphi\rangle = \langle x_{n'}, f\rangle \to \langle x_0, f\rangle = \langle x_0, \varphi\rangle.$$

Таким образом, доказана слабая сходимость $\{x_{n'}\}$, а тем самым и слабая компактность множества M. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы можно вывести ряд следствий.

Следствие 1. *Рефлексивное пространство слабо полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ слабо фундаментальна. Тогда числовая последовательность $\{\langle x_n, f\rangle\}$ сходится при любом $f \in X^*$. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, найдется подпоследовательность $x_{n'} \to x_0$, $n \to \infty$, слабо. При этом $x_0 \in X^{**} = X$, т. е. X слабо полно.

Следствие 2. *Всякое ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно.*

Следствие 3. *Пусть X сепарабельно. Для того, чтобы множество $M^* \subset X^*$ было компактно, достаточно, чтобы M^* было ограничено.*

Доказательство этого утверждения составляет часть доказательства теоремы 2.

Пусть $\{f_n\} \subset M^*$, а $\{x_m\}$ — счетное, всюду плотное множество в X. Построим, как и в доказательстве теоремы, подпоследовательность $\{f_{n'}\}$, сходящуюся на каждом из x_m $(m = 1, 2, \ldots)$. По теореме Банаха–Штейнгауза $\{f_{n'}\}$ сходится слабо на X.

Следствие 4. *В пространствах l_p и $\mathcal{L}_p(\bar{G})$ всякое ограниченное множество слабо компактно.*

Это следует из рефлексивности l_p и $\mathcal{L}_p(\bar{G})$.

Замечание 1. Вместо употребленного нами термина «бикомпактность» часто применяется термин «компактность», а вместо термина «компактность» — термин «компактность в себе», «относительная компактность».

Замечание 2. Обычно теория компактности рассматривается в метрических пространствах (см., например, [14, 25]).

В заключение настоящего параграфа предлагаем выполнить следующие упражнения.

1. Множество всех точек $x = \{\xi_n\}$ гильбертова пространства l_2, для которых $|\xi_n| \leqslant 1/n$, называется гильбертовым параллелепипедом (гильбертовым кирпичом). Покажите, что гильбертов кирпич является бикомпактным множеством в l_2.

2. Найдите необходимое и достаточное условие компактности множества в пространстве бесконечно малых последовательностей.

§ 20. Линейные вполне непрерывные операторы

20.1. Определение, множество $\sigma(X,\,Y)$. Изучение важного понятия вполне непрерывного оператора мы начнем с линейных вполне непрерывных операторов. Пусть X и Y — нормированные пространства (оба вещественные или оба комплексные). Через $\mathcal{L}(X,\,Y)$, как обычно, обозначается нормированное пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y.

Определение. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,\,Y)$ называется *вполне непрерывным* (или *компактным*), если замкнутый единичный шар пространства X он переводит в компактное множество пространства Y.

Заметим сначала, что далеко не всякий оператор из $\mathcal{L}(X,\,Y)$ будет вполне непрерывным. Например, $I \in \mathcal{L}(X,\,X)$ (I — тождественный оператор) не является вполне непрерывным, если X не конечномерно, ибо единичный шар в X $S = \overline{S_1(0)}$ является компактным множеством в X лишь в случае конечномерности X (см. п. 19.5). Из определения линейного вполне непрерывного оператора вытекает его следующее свойство.

Теорема 1. *Если $A \in \mathcal{L}(X,\,Y)$ вполне непрерывен, то любое ограниченное в X множество он переводит во множество, компактное в Y.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \subset X$ и $\mathfrak{M}$ ограничено, т. е. существует $R > 0$ такое, что $\|x\| \leqslant R$ для любых $x \in \mathfrak{M}$. Возьмем любую последовательность $\{y_n\} \subset A\mathfrak{M}$; тогда $y_n = Ax_n$, где $x_n \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим $\{x_n/R\} \subset \subset S$ — единичный шар в X. Вследствие полной непрерывности A $\{Ax_n/R\}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $\{Ax_{n'}/R\}$. Но тогда и $\{Ax_{n'}\}$ — фундаментальная подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$, т.е. $A\mathfrak{M}$ компактно.

Множество всех вполне непрерывных операторов из $\mathcal{L}(X,\,Y)$ будем в дальнейшем обозначать через $\sigma(X,\,Y)$.

Теорема 2. *$\sigma(X,\,Y)$ является подпространством в $\mathcal{L}(X,\,Y)$.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы установим, что

1) $\sigma(X,\,Y)$ — линейное многообразие в $\mathcal{L}(X,\,Y)$;

2) $\sigma(X,\,Y)$ замкнуто.

Докажем 1). Пусть $A_1,\,A_2 \in \sigma(X,\,Y)$, а λ_1 и λ_2 — скаляры. Покажем, что $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \in \sigma(X,\,Y)$. Пусть S — единичный шар в X, Линейные вполне непрерывные операторыAS — его образ при отображении A, и пусть $\{y_n\} \subset AS$, т. е.

$$y_n = \lambda_1 A_1 x_n + \lambda_2 A_2 x_n,$$

где $x_n \in S$, т. е. $\|x_n\| \leqslant 1$.

Так как A_1 вполне непрерывен, то из последовательности $\{A_1 x_n\}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\{A_1 x_{n'}\}$, где n' пробегает подмножество N' множества натуральных чисел N. Далее, так как A_2 вполне непрерывен, то из $\{A_2 x_{n'}\}$ можно выделить фундаментальную подпоследовательность $\{A_2 x_{n''}\}$, $n'' \in N'' \subset N'$. Тогда $\{A x_{n''}\}$ фундаментальна и, следовательно, AS компактно, т. е. A вполне непрерывен.

Теперь покажем, что $\sigma(X, Y)$ замкнуто. Пусть $\{A_n\} \subset \sigma(X, Y)$ и $A_n \to A$, $n \to \infty$, равномерно, т. е. по норме $\mathcal{L}(X, Y)$. Надо доказать, что $A \in \sigma(X, Y)$. Пусть S — единичный шар в X. Тогда $A_n S$ при каждом n компактно. Положим $\varepsilon_n = \|A - A_n\|$; при любом $x \in S$ имеем

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \, \|x\| \leqslant \|A_n - A\| = \varepsilon_n.$$

Это означает, что множество $A_n S$ является компактной ε_n-сетью множества AS. Поскольку $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon_n < \varepsilon$, и потому компактная ε-сеть существует для любого $\varepsilon > 0$.

По следствию 1 из теоремы Хаусдорфа (см. п. 19.4) AS компактно, а тогда A вполне непрерывен, т. е. $A \in \sigma(X, Y)$. Итак, $\sigma(X, Y)$ — подпространство в $\mathcal{L}(X, Y)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если X или Y конечномерно, то $\sigma(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$*

Доказательство. Пусть X конечномерно, а S — единичный шар в X. По теореме Больцано–Вейерштрасса S компактен. Тогда AS компактно для любого $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ вследствие непрерывности A. Пусть Y конечномерно, тогда AS ограничено и по теореме Больцано–Вейерштрасса компактно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякий линейный функционал $f \in X^*$ вполне непрерывен.* (Достаточно вспомнить, что f переводит X в одномерное пространство).

Рассмотрим теперь конечномерные линейные операторы. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in Y$, а $f_1, \ldots, f_n \in X^*$. Линейный оператор вида $P_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, f_k \rangle \varphi_k$ называется *конечномерным.*

Всякий конечномерный оператор, очевидно, является ограниченным, так как

$$\|P_n x\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\langle x, f_k \rangle| \, \|\varphi_k\| \leqslant c\|x\|,$$

где $c = \sum\limits_{k=1}^{n} \|f_k\| \, \|\varphi_k\|$.

Далее, всякий конечномерный оператор вполне непрерывен. Действительно, область значений P_n $R_n = R(P_n)$ конечномерна. Рассматривая $P_n \in \mathcal{L}(X, R_n)$, по теореме 3 получаем, что $P_n \in \sigma(X, R_n) \subset \sigma(X, Y)$. Из этого рассуждения и из теоремы 2 теперь можно получить следующее следствие.

Следствие 2. *Если* $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ *(в метрике* $\mathcal{L}(X, Y)$*), где* A_n *вполне непрерывны или конечномерны, то* A *вполне непрерывен.*

В приложениях часто оказывается полезным также следующее предложение.

Теорема 4. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Если хоть один из этих операторов вполне непрерывен, то вполне непрерывным оператором будет и их произведение* BA.

Доказательство. Пусть S — единичный шар в X. Если A вполне непрерывен, то AS компактно, но тогда и BAS компактно. Откуда BA вполне непрерывен. Если B вполне непрерывен, то AS ограничено, а BAS компактно и BA снова вполне непрерывен. Теорема доказана.

20.2. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость. Всякий оператор из $\mathcal{L}(X, Y)$ переводит сходящуюся последовательность в X в последовательность, сходящуюся в Y. Оказывается, операторы $\sigma(X, Y)$ переводят всякую слабо сходящуюся в X последовательность в сходящуюся в Y последовательность. Для доказательства этого факта нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если последовательность слабо сходится и компактна, то она сходится.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, слабо. Предположим, что $\{x_n\}$ не сходится к x_0. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n'}\}$ такие, что для всех n' $\|x_{n'} - x_0\| \geqslant \varepsilon$. Но по условию леммы $\{x_n\}$ компактна. Поэтому из $\{x_{n'}\}$ можно выделить сходящуюся последовательность $\{x_{n''}\}$, и пусть x_0' — ее предел. Тем более $x_{n''} \to x_0'$, $n'' \to \infty$, слабо. Но $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, слабо. Из единственности слабого предела мы имеем тогда $x_0' = x_0$. Получилось, что $x_{n''} \to x_0$, $n'' \to \infty$, сильно, а это противоречит условию $\|x_{n'} - x_0\| \geqslant \varepsilon$ при $n' = n''$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. *Пусть* $A \in \sigma(X, Y)$. *Если* $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, *слабо, то* $Ax_n \to Ax_0$, $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, слабо. Тогда $\{x_n\}$ ограничена (см. теорему 2 п. 17.5). Так как A вполне непрерывен, то $\{Ax_n\}$ компактна. Далее, как оператор из $\mathcal{L}(X, Y)$, A переводит слабо сходящуюся $\{x_n\}$ с пределом x_0 в слабо сходящуюся $\{Ax_n\}$ с пределом Ax_0 (см. теорему 4 п. 17.5). Применяя к $\{Ax_n\}$ лемму, получаем: $Ax_n \to Ax_0$, $n \to \infty$. Теорема доказана.

20.3. Теорема Шаудера. Оказывается, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и сопряженный к нему оператор $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ одновременно вполне непрерывны или нет. Точнее, имеет место следующая теорема Шаудера.

Теорема. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, *где* Y *— полное. Оператор* A *вполне непрерывен тогда и только тогда, когда* A^* *вполне непрерывен.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S и S^* — замкнутые единичные шары в пространствах X и Y^* соответственно. Рассмотрим $A \in \sigma(X, Y)$. Возьмем произвольную $\{f_n\} \subset S^*$ и рассмотрим функции $\varphi_n(y) = \langle y, f_n\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. На любом ограниченном в Y множестве эти функции равномерно ограничены (по n), так как

$$|\varphi_n(y)| = |\langle y, f_n\rangle| \leqslant \|y\| \, \|f_n\| \leqslant \|y\|,$$

и равностепенно непрерывны:

$$|\varphi_n(y') - \varphi_n(y'')| = |\langle y' - y'', f_n\rangle| \leqslant \|y' - y''\|.$$

Будем рассматривать $\{\varphi_n(y)\}$ на множестве AS, которое компактно (ведь A вполне непрерывен) и замкнуто, а следовательно, бикомпактно. По теореме Асколи–Арцела (см. п. 19.6) найдется подпоследовательность $\{\varphi_{n'}(Ax)\} = \{\langle x, A^*f_{n'}\rangle\}$, сходящаяся на S равномерно. Это означает, что $\{A^*f_{n'}\}$ сходится в метрике X^*. Следовательно, A^* вполне непрерывен.

Достаточность. Пусть A^* вполне непрерывен. Тогда по доказанному выше $A^{**} = (A^*)^*$ также вполне непрерывен. Пусть S^{**} — замкнутый единичный шар в X^{**}. Множество $A^{**}S^{**} \subset Y^{**}$ компактно. Так как пространство $Y \subset Y^{**}$ (см. теорему 1 п. 17.4), то в соответствии с этим вложением $AS \subset A^{**}S^{**}$ и, значит, AS компактно в Y. Это и означает, что A вполне непрерывен. Теорема доказана.

20.4. Примеры вполне непрерывных операторов.

Пример 1. Рассмотрим в l_2 оператор $A\{\xi_k\} = \{\eta_k\}$, где $\eta_k = \sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\xi_{l}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, а $\|a_{kl}\|$ — матрица, у которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 < \infty$. Оператор A такого типа называется *матричным оператором Гильберта–Шмидта*. Линейность очевидна. Докажем ограниченность A.

Пусть $y = (\eta_k)_1^\infty$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\xi_l \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \sum_{s=1}^{\infty} |\xi_l|^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \, \|x\|^2.$$

Это означает, что $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$, где $c = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2\right)^{1/2}$. Следовательно, $\|A\| \leqslant c$. Итак, A ограничен, т. е. $A \in \mathcal{L}(l_2)$.

Докажем теперь, что A вполне непрерывен. Обозначим через A_n оператор, переводящий всякий вектор $(\xi_k)_1^\infty$ в вектор $(\eta_1, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots)$. Область значений каждого из операторов A_n конечномерна; следовательно, по теореме 3 п. 20.1 операторы A_n вполне непрерывны. Так как

$$\|A_n - A\|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|^2 \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty$$

(как остаток сходящегося ряда), то по теореме 2 п. 20.1 (см. следствие 2) оператор A вполне непрерывен.

Пример 2. Пусть $X = Y = C[a, b]$. Рассмотрим линейный интегральный оператор $y = Kx$, ставящий в соответствие функции x функцию y по следующей формуле:

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{1}$$

Предположим, что функция $K(t, s)$ (ядро интегрального оператора K) непрерывна, как функция двух переменных в квадрате $Q = [a, b] \times [a, b]$. Пусть $M = \max\limits_Q |K(t, s)|$. Возьмем в $C[a, b]$ единичный шар $S = \{x \in C[a, b]\colon\ \|x\| \leqslant 1\}$. Тогда

$$\|Kx\| = \max_{t\in[a, b]} \left| \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant \max_{t\in[a, b]} \int_a^b |K(t, s)|\, |x(s)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)M \max_{t\in[a, b]} |x(t)| = (b-a)M\|x\| \leqslant (b-a)M.$$

Таким образом, функции множества KS равномерно ограничены. Докажем теперь равностепенную непрерывность функций из KS, тогда согласно теореме Арцела множество KS будет компактно и этим будет доказана полная непрерывность оператора K. Для любой функции $y(t) \in KS$ имеем

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_a^b K(t_1, s)\, x(s)\, ds - \int_a^b K(t_2, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, |x(s)|\, ds.$$

Но тогда по неравенству Коши–Буняковского получаем

$$|y(t_1) - y(t_2)|^2 = \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2\, ds \int_a^b |x(t)|^2\, ds \leqslant$$
$$\leqslant (b-a) \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2\, ds.$$

Вследствие равномерной непрерывности функции $K(t, s)$ на Q (см. [18]) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ и любого $s \in [a, b]$, как только $|t_1 - t_2| < \delta$, сразу же $|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \varepsilon$. Но тогда при $|t_1 - t_2| < \delta$ имеем $|y(t_1) - y(t_2)|^2 < (b-a)^2\varepsilon^2$, откуда получаем равностепенную непрерывность множества KS.

Пример 3. Пусть $X = Y = \mathcal{L}_2[a, b]$. Рассмотрим интегральный оператор K примера 2 с непрерывным ядром. Покажем, что K вполне непрерывен. Пусть S — единичный шар в $\mathcal{L}_2[a, b]$, т. е. множество всех элементов $x(t) \in \mathcal{L}_2[a, b]$, удовлетворяющих неравенству

$$\|x\|^2 = \int\limits_a^b |x(t)|^2\, dt \leqslant 1.$$

Пусть $\{x_n\} \subset S$. Рассмотрим $\{y_n\}$, где

$$y_n(t) = (Kx_n)(t) = \int\limits_a^b K(t, s)\, x_n(s)\, ds.$$

Функции $\{y_n(t)\}$ непрерывны на $[a, b]$:

$$|y_n(t_1) - y_n(t_2)| \leqslant \int\limits_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, |x_n(s)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int\limits_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^2\, ds\right\}^{1/2} \left(\int\limits_a^b |x_n(s)|^2\, ds\right)^{1/2} < \varepsilon\sqrt{b-a},$$

если $|t_1 - t_2| < \delta$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$ берем из примера 2). Таким образом, доказана не только непрерывность каждой $y_n(t)$ на $[a, b]$, но и равностепенная непрерывность функций $\{y_n(t)\}$.

Далее, $\{y_n(t)\}$ равномерно ограничена в $C[a, b]$:

$$|y_n(t)| \leqslant \int\limits_a^b |K(t, s)|\, |x_n(s)|\, ds \leqslant \left\{\int\limits_a^b |K(t, s)|^2\, ds\right\}^{1/2} \leqslant M\sqrt{b-a}.$$

(Мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского и тем обстоятельством, что $x_n \in S$; постоянная M взята из примера 2.) По теореме Арцела последовательность $\{y_n(t)\}$ компактна в $C[a, b]$. Пусть $\{y_{n'}(t)\}$ — ее подпоследовательность, сходящаяся на $[a, b]$ равномерно к $y_0(t) \in C[a, b]$. Тем более $y_{n'}(t) \to y_0(t)$, $n' \to \infty$, в среднем на $[a, b]$. Это означает, что $\{y_n(t)\}$ компактна в $\mathcal{L}_2[a, b]$; следовательно, оператор K вполне непрерывен в $\mathcal{L}_2[a, b]$.

Пример 4. Пусть $X = Y = \mathcal{L}_2[a, b]$. Снова рассмотрим линейный интегральный оператор K, определяемый формулой (1). Однако теперь предположим, что ядро $K(t, s) \in \mathcal{L}_2(Q)$, т. е. (двойной интеграл Лебега)

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 \, ds \, dt < \infty.$$

В этом случае оператор K принято называть *интегральным оператором Гильберта–Шмидта.*

Докажем, что K вполне непрерывен. Так как ядро $K(t, s) \in \mathcal{L}_2(Q)$, то, согласно определению этого лебегова пространства, найдется последовательность $\{K_n(t, s)\}$ непрерывных в Q ядер, сходящаяся в метрике $\mathcal{L}_2(Q)$, т. е. в среднем, к $K(t, s)$:

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 \, ds \, dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначим через K_n интегральные операторы с ядрами $K_n(t, s) \in \in \mathcal{L}_2(Q)$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$|Kx - K_n x|^2 = \left| \int_a^b [K(t, s) - K_n(t, s)] \, x(s) \, ds \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 \, ds \int_a^b |x(s)|^2 \, ds.$$

Следовательно,

$$\|Kx - K_n x\|^2 = \int_a^b |Kx - K_n x|^2 \, dt \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 \, ds \, dt \cdot \|x\|^2.$$

Отсюда

$$\|K - K_n\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(t, s) - K_n(t, s)|^2 \, ds \, dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, K является пределом в метрике $\mathcal{L}_2[a, b]$ последовательности K_n интегральных операторов с непрерывными ядрами, которые вполне непрерывны в $\mathcal{L}_2[a, b]$ согласно примеру 3. По следствию 2 к теореме 3 п. 20.1 оператор K сам вполне непрерывен.

20.5. Теория Рисса–Шаудера линейных уравнений 2-го рода. Пусть A — вполне непрерывный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X (т. е. $A \in \sigma(X) = \sigma(X, X)$). Линейное уравнение в X вида ($y \in X$)

$$x - Ax = y \tag{1}$$

будем называть *уравнением* 2*-го рода.* Этот термин заимствован из теории линейных интегральных уравнений, где *интегральным уравнением Фредгольма* 2*-го рода* называют уравнение

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

(ср. с примерами 2–4 п. 20.4). Линейное уравнение $Ax = y$ с вполне непрерывным оператором A будем называть *уравнением* 1*-го рода* по аналогии с теорией интегральных уравнений, в которой уравнение

$$\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

называют *интегральным уравнением Фредгольма* 1*-го рода.* Как ни странно, теория линейных уравнений 2-го рода (1) намного проще по сравнению с теорией уравнений 1-го рода. Теория эта принадлежит Ф. Риссу и Ю. Шаудеру.

Перейдем к ее изложению. Наряду с уравнением (1) будем рассматривать соответствующее ему однородное уравнение

$$z - Az = 0, \tag{2}$$

а также сопряженное уравнение

$$f - A^* f = \omega \tag{1*}$$

и сопряженное однородное уравнение

$$\psi - A^* \psi = 0. \tag{2*}$$

Заметим, что согласно теореме Шаудера п. 20.3 оператор A^* вполне непрерывен, так что все уравнения (1), (1*), (2), (2*) являются уравнениями 2-го рода. Докажем сначала следующее вспомогательное предложение.

Теорема 1. *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор. Тогда множества значений операторов $I - A$ и $I - A^*$ замкнуты и, значит, являются подпространствами в X и в X^* соответственно.*

Доказательство ([14]). Пусть $\{y_n\}$ принадлежит $R(I - A)$ — множеству значений оператора $I - A$. Тогда найдутся $x_n \in X$ такие, что $x_n - Ax_n = y_n$. Пусть $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $y_0 \in R(I - A)$.

Рассмотрим ряд случаев. Если $\{x_n\}$ ограничена, то $\{Ax_n\}$ компактна, откуда следует, что $\{x_n\}$ также компактна. Достаточно заметить, что $x_n = y_n + Ax_n$, где $\{y_n\}$ сходится, а $\{Ax_n\}$ компактна. Вследствие компактности из $\{x_n\}$ можно выделить $\{x_{n'}\}$ — подпоследовательность, сходящуюся к x_0; тогда, переходя к пределу при $n' \to \infty$ в равенстве $x_{n'} - Ax_{n'} = y_{n'}$, получим, вследствие непрерывности A, что $x_0 - Ax_0 = y_0$, т.е. $y_0 \in R(I - A)$.

Если $\{x_n\}$ не ограничена, то поступим следующим образом. Пусть N — подпространство нулей оператора $I - A$, т. е. множество всех решений уравнения (2). Введем расстояние

$$d_n = \rho(x_n,\, N) = \inf_{z \in N} \|x_n - z\|.$$

Согласно определению нижней грани в N найдется элемент z_n такой, что

$$d_n \leqslant \|x_n - z_n\| \leqslant (1 + 1/n)d_n. \tag{3}$$

Далее, $(I - A)(x_n - z_n) = y_n$. Если $\{d_n\}$ ограничена, то, как и выше, с заменой x_n на $x_n - z_n$ получаем, что $y_0 \in R(I - A)$.

Оказывается, случай неограниченности $\{d_n\}$ невозможен. В самом деле, если $\{d_n\}$ неограничена, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $d_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Рассмотрим элементы

$$u_n = \frac{x_n - z_n}{\|x_n - z_n\|}.$$

Тогда

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{и} \quad (I - A)u_n = \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \to 0, \quad n \to \infty,$$

так как

$$\left\| \frac{y_n}{\|x_n - z_n\|} \right\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_n - z_n\|} \leqslant \frac{\sup\limits_n \|y_n\|}{d_n} \to 0.$$

Как и выше, отсюда следует, что найдется подпоследовательность $u_{n'} \to u_0$, причем $u_0 \in N$. Но $x_{n'} - z_{n'} - \|x_{n'} - z_{n'}\|u_0 = (u_{n'} - u_0)\|x_{n'} - z_{n'}\|$. Причем, $z_{n'} + \|x_{n'} + z_{n'}\|u_0 \in N$. Следовательно, по неравенству (3) имеем

$$\|u_{n'} - u_0\| \left(1 + \frac{1}{n'}\right) d_{n'} \geqslant \big\|(u_{n'} - u_0)\|x_{n'} - z_{n'}\|\,\big\| =$$

$$= \big\|x_{n'} - \{z_{n'} + \|x_{n'} - z_{n'}\|u_0\}\big\| \geqslant d_{n'},$$

откуда $\|u_{n'} - u_0\| \geqslant n'/(n' + 1)$, а это противоречит тому, что $\|u_{n'} - u_0\| \to 0$, $n' \to \infty$. Итак, $\{d_n\}$ ограничена и замкнутость $R(I - A)$ доказана. Замкнутость $R(I - A^*)$ является следствием вышеизложенного, ибо A^* также вполне непрерывен. Теорема доказана.

Следующие теоремы составляют содержание теории Рисса–Шаудера (в упрощенном варианте), являющейся обобщением фредгольмовской теории интегральных уравнений.

Теорема 2. (первая теорема Фредгольма). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X. Следующие четыре утверждения эквивалентны*:

α) *уравнение* (1) *имеет решение при любой правой части* y;

β) *уравнение* (2) *имеет только тривиальное решение*;

γ) *уравнение* (1^*) *имеет решение при любой правой части* ω;

δ) *уравнение* (2^*) *имеет только тривиальное решение.*

Если выполнено одно из условий α), β), γ), δ), *то операторы* $I - A$ *и* $I - A^*$ *непрерывно обратимы.*

Доказательство проведем по схеме

$$\alpha) \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \delta) \Rightarrow \alpha).$$

I. $\alpha) \Rightarrow \beta)$. Дано $R(I - A) = X$, т. е. множество значений оператора $I - A$ совпадает с X. Допустим, что β) не выполнено, т. е. подпространство нулей оператора $I - A$ нетривиально:

$$N_1 = \{x \in X\colon\ x - Ax = 0\} \neq \{0\}.$$

Пусть $x_1 \in N_1$ и $x_1 \neq 0$. Рассмотрим уравнение $(I - A)x = x_1$. По условию α) оно имеет решения. Пусть x_2 — одно из них. Имеем $(I - A)^2 x_2 = (I - A)x_1 = 0$, т. е. $x_2 \in N_2 = \{x \in X\colon\ (I - A)^2 x = 0\}$, причем $N_1 \subset N_2$ и включение строгое. так как $x_2 \in N_2$, но $x_2 \notin N_1$, иначе оказалось бы, что $x_1 = 0$. Продолжая эти рассуждения, получим цепочку подпространств

$$N_1 \subset \ldots \subset N_n \subset N_{n+1} \subset \ldots ,$$

строго включенных друг в друга. По лемме Рисса о почти перпендикуляре (см. п. 3.5) в каждом N_n найдется элемент z_n такой, что $\|z_n\| = 1$ и $\|x - z_n\| \geqslant 1/2$ для всех $x \in N_{n-1}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Рассмотрим последовательность $\{Az_n\}$. Она компактна, ибо A вполне непрерывен, а $\{z_n\}$ ограничена. С другой стороны, при $m > n$

$$\|Az_m - Az_n\| = \big\|[z_n - (I - A)z_n + (I - A)z_m] - z_m\big\| \geqslant 1/2,$$

ибо

$$z_n - (I - A)z_n + (I - A)z_m \in N_{m-1},$$

так как

$$(I - A)^{m-1}[z_n + (I - A)z_n + (I - A)z_m] = \\ = (I - A)^{m-1}z_n + (I - A)^m z_n + (I - A)^m z_m = 0$$

(все слагаемые — нули, ибо $(I - A)^k z_1 = 0$ при $k \geqslant l$). Итак, с одной стороны, $\{Az_n\}$ компактна, а с другой — $\|Az_m - Az_n\| > 1/2$. Полученное противоречие показывает, что допущение $N(I - A) \neq \{0\}$ неверно, т. е. $\beta)$ доказано.

II. $\beta) \Rightarrow \gamma)$. Дано $N(I - A) = \{0\}$. Нужно доказать, что $R(I - A^*) = X^*$. Возьмем любой $f \in X^*$ и рассмотрим выражение $\langle (I-A)x,\, f\rangle$. Оно определяет линейный ограниченный функционал $\varphi \in X^*$. Действительно, это выражение определено на X, линейно по x и ограничено. Наконец, самое важное, оно однозначно по x: если $\langle (I - A)x',\, f\rangle = \langle (I - A)x'',\, f\rangle$, то $\langle (I - A)(x' - x''),\ f\rangle = 0$, откуда, вследствие произвольности f, $(I - A)(x' - x'') = 0$, но $N(I - A) = \{0\}$, и, значит, $x' = x''$. Таким образом, $\langle (I - A)x,\, f\rangle = \langle x,\, \varphi\rangle$, т. е. всякий $f \in X^*$ принадлежит также и $R(I - A^*)$, т.е. $\gamma)$ доказано.

III. $\gamma) \Rightarrow \delta)$. Эта часть доказательства совпадает с I. Нужно лишь в I A заменить на A^*.

IV. $\delta) \Rightarrow \alpha)$. Дано $N((I - A)^*) = \{0\}$. Надо доказать, что $R(I - A) = X$. Допустим противное, что $R(I - A) \neq X$. По теореме 1 $R(I - A)$ — подпространство в X. Пусть $y_0 \in X$ и $y_0 \notin R(I - A)$. По следствию 2 из теоремы Хана–Банаха найдется $f_0 \in X^*$ такой, что $\langle y_0,\, f_0\rangle = 1$ и $\langle y,\, f_0\rangle = 0$ для всех $y \in R(I - A)$. Но тогда $\langle (I - A)x,\, f_0\rangle = 0$ для всех $x \in X$, или $\langle x,\ (I - A)^* f_0\rangle = 0$ и из произвольности x имеем $(I - A)^* f_0 = 0$, т. е. $f_0 \in N((I - A)^*)$ и $f_0 \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что верно $\alpha)$.

V. Если выполнено одно из условий $\alpha), \beta), \gamma), \delta)$, то по I–IV выполнены и все остальные, но тогда $N(I - A) = \{0\}$, т. е. $I - A$ обратим; $R(I - A) = X$, и, значит, по теореме Банаха (см. теорему 4 п. 12.1) $I - A$ непрерывно обратим. То же для A^*. Теорема полностью доказана.

Т е о р е м а 3 (вторая теорема Фредгольма). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в X. Тогда уравнения* (2) *и* (2*) *имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы уже видели, что если $N(I - A) = \{0\}$, то и $N((I - A)^*) = \{0\}$, и наоборот (см. теорему 2). Пусть теперь эти под пространства не нулевые. Докажем сначала их конечномерность. Пусть M — произвольное ограниченное множество, лежащее в $N(I - A)$; тогда $M = AM$. Отсюда M компактно (см. теорему 1 п. 20.1). Получилось, что в $N(I - A)$ каждое ограниченное множество компактно. По теореме п. 19.5 $N(I - A)$ конечномерно. Аналогично дело обстоит с $N((I - A)^*)$.

Перейдем к доказательству равенства $\dim N(I - A) = \dim N(I - A)^*$ размерностей подпространств нулей операторов $I - A$ и $(I - A)^*$. Допустим противное, что, например,

$$\dim N(I - A) = n < m = \dim N((I - A)^*).$$

Пусть $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(I - A)$. По следствию 4 из теоремы Хана–Банаха существует $\{\gamma_i\}_1^n \subset X^*$, биортогональная к $\{\varphi_i\}_1^n$ система: $\langle \varphi_i,\, \gamma_i\rangle = \delta_{ij}$ $(i,\, j = 1,\, \ldots,\, n)$. Пусть, далее, $\{\psi_i\}_1^m$ — базис в $N((I - A)^*)$, а $\{z_i\}_1^m \subset X$ — биортогональная к нему система элементов $\langle z_i,\, \varphi_i\rangle = \delta_{ij}$

$(i, j = 1, \ldots, m)$, существование которой доказано в п. 16.3. Рассмотрим оператор $I - \widetilde{A}$, где

$$\widetilde{A} = A + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i. \tag{4}$$

Оператор $\widetilde{A}$ вполне непрерывен, как сумма двух вполне непрерывных операторов — оператора A и конечномерного оператора (см. теорему 1 п. 20.1).

Далее, докажем, что $N(I - \widetilde{A}) = \{0\}$. Действительно, уравнение $x - \widetilde{A}x = 0$ записывается, согласно (4), так:

$$x - Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle z_i. \tag{5}$$

Применяя к обеим его частям функционал ψ_k, получим

$$0 = \langle x, (I - A)^* \psi_k \rangle = \langle x - Ax, \psi_k \rangle = \langle x, \gamma_k \rangle. \tag{6}$$

Мы воспользовались тем, что $\psi_k \in N((I - A)^*)$, и биортогональностью систем $\{\psi_i\}_1^m$ и $\{z_i\}_1^m$. Так как k произвольно, то все $\langle x, \gamma_k \rangle = 0$ и (5) принимает вид $x - Ax = 0$. Это означает, что $x \in N(I - A)$, т. е.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i.$$

Применяя к обеим частям этого равенства функционал γ_l и, пользуясь биортогональностью систем $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\gamma_l\}_1^n$ и тем, что $\langle x, \gamma_l \rangle = 0$, получим $\xi_l = 0$. Так как l произвольно, то $x = 0$. Итак, $N(I - \widetilde{A}) = \{0\}$.

Нетрудно убедиться (проверьте!), что

$$(I - \widetilde{A})^* = I - A^* - \sum_{i=1}^{n} \langle z_i, \cdot \rangle \gamma_i.$$

Тогда $(I - \widetilde{A})^* \psi_s = (I - A^*)\psi_s - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle z_i, \psi_s \rangle \gamma_i = 0$ при $s > n$, ибо $\psi_s \in N((I - A)^*)$, и $\langle z_i, \psi_s \rangle = 0$, ибо $n < s$. Оказалось, что $N((I - \widetilde{A})^*) \neq \{0\}$, а это противоречит теореме 2. Следовательно, предположение $n < m$ неверно. Аналогичное доказательство проводится в случае $n > m$ с заменой A на A^*. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4 (третья теорема Фредгольма). *Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор в X. Для того чтобы уравнение* (1) *имело хоть одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения ψ уравнения* (2*) *выполнялось условие* $\langle y, \psi \rangle = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $N(I - A) = \{0\}$, то $N((I - A)^*) = \{0\}$ и утверждение теоремы тривиально. Пусть $N(I - A) \neq \{0\}$. Если уравнение (1) имеет решение x_0, то для всякого $\psi \in N((I - A)^*)$ имеем

$$\langle y, \psi \rangle = \langle (I - A)x_0, \psi \rangle = \langle x_0, (I - A)^* \psi \rangle = 0.$$

Обратно, пусть $\langle y,\, \psi \rangle = 0$ для всех $\psi \in N((I-A)^*)$. Допустим, что (1) при данном y решений не имеет, т. е. $y \notin R(I-A)$. Заметим, что $R(A)$ замкнуто по теореме 1. По следствию 3 из теоремы Хана–Банаха существует $f \in X^*$ такой, что $\langle y,\, f \rangle = 1$ и $\langle (I-A)x,\ f \rangle = 0$ для любых $x \in X$, но тогда $\langle x,\ (I-A)^* f \rangle = 0$ и, вследствие произвольности x, $(I-A)^* f = 0$, т.е. $f \in N((I-A)^*)$. Но тогда по условию теоремы $\langle y,\, f \rangle = 0 \neq 1$. Полученное противоречие означает, что уравнение (1) разрешимо. Теорема доказана.

Замечание. Теорему 4 можно дополнить следующим утверждением: *для того чтобы уравнение* (1*) *имело хоть одно решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений* φ *уравнения* (2) *выполнялось условие* $\langle \varphi,\, \omega \rangle = 0$ (доказательство см. [21, с. 274]).

В заключение кратко резюмируем полученные результаты. Для уравнения (1) с вполне непрерывным оператором A возможны только три следующие ситуации:

1) оператор $I - A$ непрерывно обратим, тогда (1) имеет при любой правой части y единственное решение $x = (I-A)^{-1}y$;

2) $N(I-A) \neq \{0\}$; если $\langle y,\, \psi \rangle \neq 0$ хоть для одного решения ψ сопряженного однородного уравнения (2*), то (1) решений не имеет;

3) $N(I-A) \neq \{0\}$; если $\langle y,\, \psi \rangle = 0$ для всех решений ψ уравнения (2*), то общее решение уравнения (1) имеет вид $x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i$, где x_0 — частное решение (1), $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис подпространства решений уравнения (2), а n — размерность этого подпространства.

20.6. К теории линейных уравнений 1-го рода. Кратко остановимся на свойствах линейного уравнения

$$Ax = y. \qquad (1)$$

Здесь неизвестное x разыскивается в банаховом пространстве X, правая часть y — известный элемент банахова пространства Y (X, Y оба вещественны или оба комплексны), наконец, $A \in \sigma(X,\, Y)$, т. е. является линейным вполне непрерывным оператором, действующим из пространства X в пространство Y. Такое уравнение (1) в начале п. 20.5 мы условились называть уравнением 1-го рода. Область определения $D(A) = X$; однако, оказывается здесь, как правило, область значений оператора A; $R(A)$ не замкнута, в отличие от изученного в п. 20.5 линейного уравнения 2-го рода (см. теорему 1 п. 20.5). Выделим сначала тривиальный случай уравнения (1), когда X или Y конечномерные. В этом случае теряется различие между линейными уравнениями 1-го и 2-го рода, ибо область значений $R(A)$ оказывается замкнутой вследствие своей конечномерности. Пусть, далее, X и Y бесконечномерны и A не является конечномерным, т. е. $R(A)$ также бесконечномерна.

Теорема 1. *Пусть X и Y — бесконечномерные нормированные пространства, причем Y полно. Если A — вполне непрерывный линейный оператор, $A \in \sigma(X,\, Y)$, отличный от конечномерного, то его область значений $R(A)$ не является замкнутым множеством в Y.*

Доказательство. Предположим противное, что $R(A) = \overline{R(A)}$. Поскольку Y банахово, то и $R(A)$ можно рассматривать как банахово пространство. Заметим, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(0)$, где $S_n(0)$ — шар в X радиуса n с центром в 0. Но тогда

$$R(A) = AX = \bigcup_{n=1}^{\infty} AS_n(0).$$

Так как $S_n(0)$ ограничены и A вполне непрерывен, то каждое множество $AS_n(0)$ компактно, а значит, поскольку $R(A)$ бесконечномерно, по следствию 2 п. 19.5 $AS_n(0)$ нигде не плотно в $R(A)$. Таким образом, $R(A)$ есть объединение счетного числа нигде не плотных в $R(A)$ множеств, т.е. $R(A)$ — множество I категории, что противоречит его полноте (см. теорему 2 п. 5.8).

Теорема 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор из бесконечномерного нормированного пространства X в нормированное пространство Y, причем на $R(A)$ существует обратный оператор A^{-1}. Тогда A^{-1} неограничен на $R(A)$.*

Доказательство. Допустим противное, что A^{-1} ограничен на $R(A)$. Тогда тождественный оператор в X $I = A^{-1}A$ вполне непрерывен как произведение вполне непрерывного (A) и ограниченного (A^{-1}) операторов. Но тогда X конечномерно. Противоречие. Значит, A^{-1} неограничен. Теорема доказана.

§ 21. Нормально разрешимые операторы

21.1. Некоторые общие свойства линейных операторов. Пусть X и Y — банаховы пространства, оба вещественные или оба комплексные. Рассмотрим линейный оператор A, действующий из X в Y. Через $D(A) \subset X$ обозначим, как обычно, область определения A, а через $R(A) = AD(A)$ — область значений A. Пусть, далее,

$$N(A) = \{x \in D(A):\ Ax = 0\}$$

— множество нулей (ядро) оператора A. Аналогичные обозначения $D(A^*)$, $R(A^*)$, $N(A^*)$ будут использоваться для сопряженного к A оператора A^*, если, разумеется, последний существует.

Введем теперь в банаховых пространствах два типа ортогональных дополнений. Пусть M — линейное многообразие в X. Введем множество $M^{\perp} \subset X^*$:

$$M^{\perp} = \{f \in X^*:\ \langle x,\, f\rangle = 0 \quad \text{для всех}\ \ x \in M\}.$$

Таким образом, $M^{\perp}$ — это множество элементов из X^* (т. е. линейных ограниченных функционалов, определенных на X), ортогональных к M.

Пусть, далее, N — линейное многообразие в X^*. Введем множество ${}^\perp N \subset X$:

$$ {}^\perp N = \{x \in X\colon \ \langle x, f\rangle = 0 \quad \text{для всех} \ \ f \in N\}, $$

т. е. ${}^\perp N$ — множество элементов из X, ортогональных к N.

Если $X = H$ — гильбертово пространство, то оба типа ортогональных дополнений совпадают с обычным ортогональным дополнением. Отметим также некоторую неравноправность наших определений: по аналогии с определением $M^\perp$ следовало бы в определении N брать $x \in X^{**}$.

Докажем теперь два предложения, существенно используемые в дальнейшем изложении.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{D(A)} = X$; *тогда*

$$ N(A^*) = R(A)^\perp \tag{1} $$

(ортогональное дополнение к области значений A равно множеству нулей A^*).

Доказательство. Заметим сначала, что условие теоремы — плотность $D(A)$ в X — обеспечивает существование сопряженного оператора A^*, действующего из $D(A^*) \subset Y^*$ в пространство X^*. Пусть $f \in N(A^*)$, т.е. $A^* f = 0$; тогда для всех $x \in D(A)$

$$ \langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle = 0. $$

Это означает, что $f \in R(A)^\perp$, т. е. доказано включение

$$ N(A^*) \subset R(A)^\perp. $$

Пусть теперь $f \in R(A)^\perp$, т. е. для всех $x \in D(A)$ $\langle Ax, f\rangle = 0$. Отсюда $f \in D(A^*)$ и $\langle x, A^* f\rangle = 0$ для всех $x \in D(A)$. Вследствие плотности $D(A)$ в X мы имеем $A^* f = 0$. Доказано обратное включение $R(A)^\perp \subset \subset N(A^*)$, а тем самым и теорема 1.

Теорема 2. *Пусть* $\overline{D(A)} = X$; *тогда*

$$ \overline{R(A)} = {}^\perp N(A^*) \tag{2} $$

(замыкание множества значений оператора A состоит из тех и только тех элементов $y \in Y$, которые ортогональны к каждому решению однородного сопряженного уравнения).

Доказательство. Пусть $y_0 \in \overline{R(A)}$. Тогда найдется $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $Ax_n \to y_0$. Возьмем любой элемент $f_0 \in N(A^*)$, т. е. $A^* f_0 = 0$. Тогда для любого $x \in D(A)$

$$ \langle Ax, f_0\rangle = \langle x, A^* f_0\rangle = 0. $$

В частности, $\langle Ax_n, f_0\rangle = 0$. Но тогда

$$ \langle y_0, f_0\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Ax_n, f_0\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, f_0\rangle = 0. $$

Мы доказали включение $\overline{R(A)} \subset {}^\perp N(A^*)$.

Пусть $y_0 \notin \overline{R(A)}$. Покажем теперь, что найдется элемент из $N(A^*)$, не ортогональный к y_0.

По следствию 2 из теоремы Хана–Банаха найдется $f_0 \in Y^*$ такой, что $\langle y_0, f_0 \rangle \neq 0$ и $f_0 \in \overline{R(A)}^{\perp}$. Последнее означает, что $\langle Ax, f_0 \rangle = 0$ для всех $x \in D(A)$, но тогда $\langle x, A^* f_0 \rangle = 0$ и, вследствие плотности $D(A)$ в X, $A^* f_0 = 0$, хотя $\langle y_0, f_0 \rangle \neq 0$, т. е. $y_0 \notin {}^{\perp}N(A^*)$. Таким образом, не существует элементов из ${}^{\perp}N(A^*)$, не принадлежащих $\overline{R(A)}$, т. е. $\overline{R(A)} = {}^{\perp}N(A^*)$. Теорема доказана.

У п р а ж н е н и е. Пусть $\overline{D(A)} = X$ и $N(A^*) = \{0\}$. Тогда уравнение $Ax = y$ разрешимо для плотного в Y линейного многообразия правых частей y.

21.2. Нормальная разрешимость линейных операторов. Теорема Хаусдорфа.

О п р е д е л е н и е. Оператор A с плотной в банаховом пространстве X областью определения и со значениями в банаховом пространстве Y называется *нормально разрешимым*, если

$$R(A) = {}^{\perp}N(A^*). \tag{1}$$

Более подробно условие нормальной разрешимости оператора A можно записать так:

$$R(A) = \{y \in Y\colon\ \langle y, \psi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \ \ \psi \in N(A^*)\}.$$

Заметим, что если $N(A^*) = \{0\}$, то ${}^{\perp}N(A^*) = Y$ и условие нормальной разрешимости A означает, что $R(A) = Y$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$Ax = y \tag{2}$$

и сопряженное однородное уравнение

$$A^*\psi = 0. \tag{3}$$

Пусть A нормально разрешим, тогда справедливы следующие утверждения.

Если уравнение (3) *имеет лишь тривиальное* (*т. е. нулевое*) *решение, то уравнение* (2) *имеет решение для любой правой части* $y \in Y$.

Если уравнение (3) *имеет нетривиальные решения, то уравнение* (2) *имеет хоть одно решение в том и только в том случае, когда* $\langle y, \psi \rangle = 0$ *для любого решения* ψ *уравнения* (3) (см. определение).

Докажем теперь следующее важное предложение.

Т е о р е м а (Хаусдорф). *Пусть* $\overline{D(A)} = X$. *Для нормальной разрешимости A необходимо и достаточно, чтобы* $\overline{R(A)} = R(A)$, *т.е. чтобы оператор A имел замкнутую область значений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\overline{R(A)} = R(A)$, то согласно формуле (2) п. 21.1 имеем $R(A) = {}^{\perp}N(A^*)$, а это и есть определение нормальной разрешимости A (см. (1)).

Обратно, если справедливо равенство (1), то из него в сочетании с формулой (2) п. 21.1 получаем $\overline{R(A)} = R(A)$, и теорема доказана.

Таким образом, нормально разрешимые операторы — это операторы с замкнутой областью значений. Большой класс нормально разрешимых ограниченных операторов был изучен нами в п. 20.5. Это операторы вида $A = I - T$, где T вполне непрерывен в банаховом пространстве X. Теорема 1 п. 20.5 утверждает, что $R(I - T)$ и $R(I - T^*)$ замкнуты, что, согласно, теореме Хаусдорфа, означает нормальную разрешимость $I - T$ и $I - T^*$.

21.3. Нётеровы и фредгольмовы операторы. В предыдущих пунктах были рассмотрены нормально разрешимые операторы, т. е. плотно заданные линейные с замкнутой областью значений. Особое место среди них занимают фредгольмовы и нетеровы операторы, названные так по именам И. Фредгольма и Ф. Нётера. Первый из этих авторов изучил широкий класс линейных интегральных уравнений (интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода) и доказал для них ряд основополагающих теорем (теоремы Фредгольма, см. п. 20.5). Ф. Нётер обобщил эти результаты на сингулярные интегральные уравнения, для которых ситуация оказалась принципиально более сложной (см. ниже теоремы Нётера). В настоящее время установлены нормальная разрешимость, нетеровость или фредгольмовость разнообразных классов линейных операторов, порождаемых интегральными, интегро-дифференциальными или сингулярными интегральными уравнениями, а также различными задачами теории уравнений с частными производными и теории псевдодифференциальных уравнений.

Определение 1. Нормально разрешимый оператор A называется *нётеровым* (*N-оператором*), если:

1) $N(A)$ конечномерно;

2) $N(A^*)$ конечномерно.

Заметим теперь, что в случае произвольного линейного оператора A используется следующая терминология: число $n = n(A) = \dim N(A)$ называется *числом нулей* оператора A, число $m = m(A) = \dim N(A^*)$ называется *дефектом* оператора A, а число $\chi = \chi(A) = n(A) - m(A)$ называется *индексом* оператора A.

Таким образом, нетеровы — это нормально разрешимые операторы с конечным числом нулей ($0 \leqslant n < +\infty$) и конечным дефектом ($0 \leqslant m < +\infty$).

Определение 2. Нётеровы операторы нулевого индекса называются *фредгольмовыми операторами* (*F-операторами*).

Для F-оператора $0 \leqslant n = m < +\infty$, т. е. $\chi = 0$. Рассмотрим N-операторы и F-операторы с точки зрения уравнений (2) и (3) п. 21.2, а также и однородного уравнения.

Для этих уравнений с N-оператором A справедливы вытекающие из вышеизложенного следующие свойства, иногда называемые *теоремами Нётера*.

1. *Или уравнение $Ax = y$ имеет решение при любой правой части y, или уравнение $A^*\psi = 0$ имеет нетривиальное решение.*

2. *Уравнения* $Ax = 0$ *и* $A^*\psi = 0$ *имеют по конечному числу* (n *и* m) *линейно независимых решений.*

3. *Если уравнение* $A^*\psi = 0$ *имеет нетривиальное решение, то уравнение* $Ax = y$ *имеет* (*хоть одно*) *решение для тех и только для тех правых частей* y, *которые ортогональны к любым решениям уравнения* $A^*\psi = 0$.

Для тех же уравнений с F-оператором A имеют место следующие свойства, известные под названием *теорем Фредгольма* (ср. теоремы 2–4 п. 20.5):

1. (*Альтернатива Фредгольма*). *Или* ($n = 0$) *уравнение* $Ax = y$ *имеет единственное решение при любой правой части* y, *или* ($n > 0$) *уравнение* $Ax = 0$ *имеет нетривиальные решения.*

2. *Уравнения* $Ax = 0$ *и* $A^*\psi = 0$ *имеют одинаковое конечное число* (n) *линейно независимых решений.*

3. *Если* $n > 0$, *то уравнение* $Ax = y$ *имеет решения для тех и только для тех правых частей* y, *которые ортогональны к любым решениям уравнения* $A^*\psi = 0$.

Согласно п. 20.5 операторы вида $I - T$, где T вполне непрерывен, являются ограниченными F-операторами. Приведем пример простейшего N-оператора.

Пример. Пусть E^k и E^l — k-мерное и l-мерное евклидовы пространства соответственно k-мерных и l-мерных вещественных столбцов $x = (\xi_i)_1^k \in E^k$, $y = (\eta_i)_1^l \in E^l$. Рассмотрим линейный оператор $A \in \mathcal{L}(E^k, E^l)$, определенный формулой $y = Ax$, т. е.

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{1}$$

Обозначим через r ранг матрицы (a_{ij}). Ясно, что

$$0 \leqslant r \leqslant \min(k, l).$$

Наряду с системой (1) рассмотрим соответствующую однородную систему $Ax = 0$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\xi_j = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{2}$$

а также сопряженную однородную систему $A^*\psi = 0$:

$$\sum_{i=1}^{l} a_{ij}\psi_i = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Упражнение. Покажите, что сопряженный оператор $A^* = (a_{ij})^T$ — транспонированная матрица к матрице (a_{ij}), причем $A^* \in \mathcal{L}(E^l, E^k)$.

Нормальная разрешимость A следует из теоремы Хаусдорфа, ибо $R(A)$ конечномерно, а потому замкнуто. Далее, если $r = k = \min(k, l)$, то система (2) имеет только тривиальное решение $(n = 0)$. Если же $r < k$, то система (2) имеет $n = k - r$ линейно независимых решений. Наконец, если $r = l = \min(k, l)$, то система (3) имеет только тривиальное решение $(m = 0)$. Если же $r < l$, то эта система имеет $m = l - r$ линейно независимых решений. Итак, оператор A нетеров. Его индекс $x = (k - r) - (l - r) = k - l$. Если $l = k$, то $\chi = 0$ и оператор A оказывается фредгольмовым.

Более содержательные примеры нетеровых операторов дают сингулярные интегральные операторы, а также дифференциальные операторы, порождаемые краевыми задачами для общих эллиптических уравнений и систем (см. [16], где подробно освещен весь этот круг вопросов).

21.4. Лемма Э. Шмидта. В этом пункте будет доказана лемма, установленная первоначально Э. Шмидтом для случая интегральных операторов. Ее обобщение (см. [2]) нашло полезные приложения, особенно в теории ветвления решений нелинейных уравнений (см. § 37).

Пусть A — фредгольмов оператор, причем $n = \dim N(A) \geqslant 1$. Пусть $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(A)$, $\{\gamma_i\}_1^n$ — биортогональная к нему система функционалов из X^*: $\langle \varphi_i, \gamma_i \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Пусть, далее, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(A^*)$, а $\{z_i\}_1^n$ — биортогональная к нему система элементов из Y: $\langle z_i, \psi_i \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Упражнение. Покажите, что системы $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_i\}_1^n$ линейно независимы.

Образуем конечномерный оператор K:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, y_i \rangle z_i. \tag{1}$$

Лемма Шмидта. *Пусть $\overline{D(A)} = X$ и A — фредгольмов оператор, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y. Тогда оператор $B = A + K$, где K определяется формулой* (1), *непрерывно обратим.*

Доказательство. Сначала установим, что $N(B) = \{0\}$, затем, что $N(B^*) = \{0\}$, и, наконец, что $R(B) = Y$. Этим лемма будет доказана.

1. Пусть $Bx = 0$. Это означает, что (см. (1))

$$Ax = -\sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle z_i. \tag{2}$$

Применим к обеим частям (2) функционал ψ_k и, вследствие биортогональности систем $\{z_i\}_1^n$ и $\{\psi_i\}_1^n$, а также вследствие ортогональности ψ_k к $R(A)$ (см. формулу (1) п. 21.1), получим

$$0 = \langle \psi_k, Ax \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle \langle \psi_k, z_i \rangle = -\langle x, \gamma_k \rangle,$$

т.е. $0 = \langle x, \gamma_k \rangle$ $(k = 1, \ldots, n)$. Следовательно, (2) имеет вид $Ax = 0$, откуда $x = \sum\limits_{l=1}^{n} \xi_l \varphi_l$. Но мы установили, что $\langle x, \gamma_k\rangle = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Поэтому

$$0 = \langle x, y_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_l \varphi_l, \gamma_k \right\rangle = \sum_{l=1}^{n} \xi_l \langle \varphi_l, \gamma_k\rangle = \xi_k$$

вследствие взаимной биортогональности систем $\{\varphi_i\}_1^n$ и $\{\gamma_i\}_1^n$. Итак, все $\xi_k = 0$ и, значит, $x = 0$. Следовательно, $N(B) = \{0\}$.

2. Теперь покажем, что $N(B^*) = \{0\}$. Для этой цели найдем K^*. Пусть $f \in Y^*$, тогда

$$\langle Kx, f\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i\rangle z_i, f \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i\rangle \langle z_i, f\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle z_i, f\rangle} \gamma_i \right\rangle.$$

В комплексном случае здесь принимается во внимание то обстоятельство, что умножение $\gamma \in X^*$ на комплексное число λ определяется формулой $\langle x, \lambda\gamma\rangle = \bar{\lambda}\langle x, \gamma\rangle$. Итак, $K^* = \sum\limits_{i=1}^{n\langle z_i, \cdot\rangle} \gamma_i$. Но $B^* = A^* + K^*$, и, повторяя рассуждения 1, получим, что $N(B^*) = \{0\}$. При этом нам понадобится включение $N(A) \subset {}^{\perp}R(A^*)$. Докажем его. Если $\varphi \in N(A)$, то для любого $f \in D(A^*)$ имеем

$$0 = \langle A\varphi, f\rangle = \langle \varphi, A^* f\rangle,$$

т.е. $\varphi \in {}^{\perp}R(A^*)$, и включение доказано.

3. Докажем, что $R(B) = Y$. Пусть $y \in Y$. Рассмотрим элемент

$$\widetilde{y} = y - \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i\rangle z_i. \tag{3}$$

Заметим, что $\widetilde{y} \in R(A)$, ибо $\widetilde{y} \perp \psi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и, значит, $\widetilde{y} \in {}^{\perp}N(A^*) = R(A)$ в силу нормальной разрешимости A. Но тогда найдется элемент $\widetilde{x} \in D(A)$ такой, что $A\widetilde{x} = \widetilde{y}$. Возьмем элемент

$$x = \widetilde{x} + \sum_{l=1}^{n} [\langle y, \psi_i\rangle - \langle \widetilde{x}, \gamma_i\rangle]\varphi_i.$$

Воспользуемся теперь равенством (3) и равенствами $Ax = A\widetilde{x}$, $K\widetilde{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \widetilde{x}, \gamma_i\rangle z_i$, $K\varphi_i = z_i$ и найдем

$$Bx = A\widetilde{x} + \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{x}, \gamma_i\rangle z_i + \sum_{i=1}^{n} [\langle y, \psi_i\rangle - \langle \widetilde{x}, \gamma_i\rangle] z_i =$$
$$= y - \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i\rangle z_i + \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i\rangle z_i = y.$$

Итак, доказано, что $R(B) = Y$.

21.5. Теорема С. М. Никольского. Следующая теорема дает полное описание класса ограниченных фредгольмовых операторов.

Теорема (С. М. Никольский). *Для того, чтобы оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий*:

α) $A = B+P$, *где* $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ *непрерывно обратим, а* $P \in \mathcal{L}(X, Y)$ — *конечномерный*;

β) $A = C + T$, *где* $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ *непрерывно обратим, а* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство проведем по следующей схеме: покажем, что из фредгольмовости A вытекает условие α); из условия α) вытекает условие β; из условия β) вытекает фредгольмовость A. Если A фредгольмов, то, полагая $A = (A + K) - K$, где K определяется формулой (1) п. 21.4, по лемме Шмидта получим, что $B = A + K$ непрерывно обратим, а $P = -K$ — конечномерный. Итак, условие α) выполнено. Но конечномерный оператор вполне непрерывен (см. теорему 3 п. 20.1). Поэтому условие β) также имеет место. Осталось показать, что оператор A вида $C + T$ (сумма непрерывно обратимого C и вполне непрерывного T) фредгольмов.

Рассмотрим уравнение $Ax = y$, т. е.

$$Cx + Tx = y. \tag{1}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$x + C^{-1}Tx = C^{-1}y. \tag{2}$$

Оператор $C^{-1}T$ вполне непрерывен, как произведение ограниченного и вполне непрерывного операторов (см. теорему 4 п. 20.1). Поэтому мы можем воспользоваться теоремой Рисса–Шаудера (см. п. 20.5). Если $N(I + C^{-1}T) = \{0\}$, то оператор $I+C^{-1}T$ непрерывно обратим, а вместе с ним непрерывно обратим и оператор A, причем $A^{-1} = (I + C^{-1}T)^{-1}C^{-1}$. Пусть $N(I + C^{-1}T) \neq \{0\}$. Поскольку $(I + C^{-1}T)^* = I + T^*(C^*)^{-1}$, то уравнения

$$x + C^{-1}Tx = 0, \tag{3}$$

$$\psi + T^*(C^*)^{-1}\psi = 0. \tag{4}$$

Имеют одинаковое конечное число $n > 0$ линейно независимых решений. Но тогда уравнения

$$Cx + Tx = 0, \tag{5}$$

$$C^*f + T^*f = 0 \tag{6}$$

также имеют по n линейно независимых решений. Действительно, если $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(I + C^{-1}T)$, то, как легко убедиться, $\{C^{-1}\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(C + T)$. Если же $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(I + T^*(C^*)^{-1})$, то $\{(C^*)^{-1}\psi_i\}_1^n$ служит базисом в $N(C^* + T^*)$.

Упражнение. Проверьте, что $\{C^{-1}\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(C + T)$, а $\{(C^*)^{-1}\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(C^* + T^*)$.

Осталось доказать нормальную разрешимость $A = C + T$. Условия разрешимости уравнения (2) имеют вид

$$\langle C^{-1}y,\, \psi_i\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эти условия, очевидно, равносильны условиям $\langle y,\ (C^{-1})^*\psi_i\rangle = 0$ или $\langle y,\ (C^*)^{-1}\psi_i\rangle = 0$ и заключаются в ортогональности y ко всем решениям уравнения (6), что и означает нормальную разрешимость A. Теорема доказана.

21.6. Априорные оценки и вопросы разрешимости линейных уравнений. Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения $D(A)$ и с областью значений $R(A)$ в банаховом пространстве Y.

Приведем сначала используемое ниже условие нормальной разрешимости оператора A, тесно связанное с леммой из п. 15.6.

Лемма 1. *Пусть выполнено следующее условие: для каждого $y \in R(A)$ существует $x \in D(A)$ такой, что $y = Ax$ и справедлива оценка*

$$\|x\| \leqslant \gamma\|Ax\| \tag{1}$$

с постоянной γ, не зависящей от y. Тогда $R(A)$ замкнуто в Y.

Доказательство. Пусть $y_0 \in \overline{R(A)}$. Тогда в $R(A)$ найдется последовательность $y_n \to y_0$, $n \to \infty$. Пусть $x_n \in D(A)$ выбраны по y_n в соответствии с условием леммы. Тогда $\|x_n - x_m\| \leqslant \gamma\|y_n - y_m\|$. Значит, $\{x_n\}$ фундаментальная, а так как X — полное пространство, то сходящаяся: $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Кроме того, $Ax_n = y_n \to y_0$, $n \to \infty$. Так как оператор A замкнут, то $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$. Таким образом, всякий $y_0 \in \overline{R(A)}$ принадлежит $R(A)$. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы 1 и теоремы 2 п. 12.4 является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие: существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любых $x \in D(A)$ выполняется оценка* (1). *Тогда*:

1) *$R(A)$ замкнуто*;
2) $N(A) = \{0\}$;
3) *существует обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,\, R(A))$*;
4) $\|A^{-1}\| \leqslant \gamma$.

Замечание. Рассмотрим уравнение $Ax = y$. Если для всех возможных его решений доказана априорная оценка (1), то для любых y из подпространства $R(A)$ оно имеет единственное решение x и $\|x\| \leqslant \gamma\|y\|$.

В приложениях важную роль играют также априорные оценки, более слабые по сравнению с оценкой (1). Здесь мы основываемся на следующей лемме.

Лемма 2. *Если прообраз каждого компактного подмножества из $R(A)$ является локально компактным множеством в X, то $N(A)$ конечномерно, а $R(A)$ замкнуто.*

Доказательство. $N(A)$ — это прообраз элемента $0 \in Y$ и, значит, $N(A)$ локально компактно. По теореме Рисса (п. 19.5) $N(A)$ конечномерно. Теперь докажем замкнутость $R(A)$. Заметим, что прообраз любого $y \in Ax \in R(A)$ есть множество элементов вида $x + z$, где x — фиксированный элемент $(Ax = y)$, а z — произвольный элемент из $N(A)$. Так как $N(A)$ конечномерно, то для каждого $y = Ax$ найдется элемент $\widehat{x}$ такой, что $\|\widehat{x}\| = \inf\limits_{z\in N(A)} \|x + z\|$ (см. теорему 1 п. 3.4).

Докажем теперь, что для оператора A выполнено условие леммы 1, в котором $x = \widehat{x}$.

Допустим противное. Тогда найдутся последовательности $\{y_n\}$ и $\widehat{x}_n$, $y_n = A\widehat{x}_n$, такие, что $\widehat{x}_n/\|A\widehat{x}_n\| \to \infty$, $n \to \infty$. Положим $u_n = \widehat{x}_n/\|\widehat{x}_n\|$. Теперь $\|u_n\| = 1$ и $\|Au_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Так как $\{Au_n\}$ компактна, то по условию леммы $\{u_n\}$ локально компактна и тогда найдется ее сходящаяся подпоследовательность $u_{n_k} \to u$, $k \to \infty$. Вследствие замкнутости A элемент $u \in N(A)$. Далее, нетрудно проверить, что $\|u_{n_k}\| = \inf\limits_{z\in N(A)} \|u_{n_k} + z\|$.
Используя определение inf, получим $\|u_{n_k} - u\| \geqslant \|u_{n_k}\| = 1$, что невозможно, так как $u_{n_k} \to u$, $k \to \infty$. Значит, оценка (1) верна, и из леммы 1 следует замкнутость $R(A)$.

Введем теперь следующее определение.

Определение. Пусть банахово пространство X естественно вложено в банахово пространство X_0, т. е. если $x \in X$, то $x \in X_0$ и существует постоянная $k > 0$ такая, что $\|x\|_{X_0} \leqslant k\|x\|_X$ для любых x. Говорят, что X *компактно вложено* в X_0, если всякое ограниченное в X множество является компактным в X_0.

Теорема 2. *Пусть X компактно вложено в X_0. Пусть существуют постоянные $c_0 > 0$, $c > 0$ такие, что для любых $x \in D(A)$ справедлива оценка*

$$\|x\|_X \leqslant c_0\|x\|_{X_0} + c\|Ax\|_Y. \tag{2}$$

Тогда:

1) $N(A)$ *конечномерно*;

2) $R(A)$ *замкнуто в* Y.

Доказательство. Оператор A будем рассматривать как оператор, отображающий $D(A) \subset X_0$ в $R(A) \subset Y$. Покажем, что этот оператор замкнут. Пусть $x_n \to x$ в X_0 и $Ax_n \to y$ в Y. Из (2) имеем при $n, m \to \infty$

$$\|x_n - x_m\|_X \leqslant c_0\|x_n - x_m\|_{X_0} + c\|Ax_n - Ax_m\|_Y \to 0,$$

Вследствие полноты X $x_n \to \widehat{x} \in X \subset X_0$

Так как X вложено в X_0, то

$$\|x_n - \widehat{x}\|_{X_0} \leqslant k\|x_n - \widehat{x}\|_X \to 0,$$

откуда $\widehat{x} = x$ вследствие единственности предела.

Из замкнутости A как оператора из X в Y теперь имеем $x \in D(A)$ и $Ax = y$. Итак, A замкнут также как оператор, действующий из X_0 в Y.

Теперь воспользуемся леммой 2. Пусть $M \subset R(A)$ — компактное в Y множество. Рассмотрим множество Q — объединение всех прообразов элементов $y \in M$ и пусть Q_r — пересечение Q с шаром $\|x\|_{X_0} \leqslant r$. Но M ограничено в Y, т. е. $\|y\| \leqslant c_1$ для любых $y \in M$, то из оценки (2) получаем для всех $x \in Q_r$ $\|x\|_X \leqslant c_0 r + c_1 c$. Значит, Q ограничено в X. Наконец, из компактности вложения X в X_0 следует компактность Q в X_0. Теперь заключения теоремы вытекают из леммы 2.

Замечание. Априорная оценка (2) гарантирует, что уравнение $Ax = y$ разрешимо для всех y из подпространства $R(A)$. Пусть $y \in R(A)$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $x = x_1 + z$, где z — общее решение однородного уравнения $Az = 0$. При этом $z = 0$, если $n = \dim N(A) = 0$. Если же $n > 0$, то $z = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, где $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(A)$, а c_i — произвольные постоянные.

Следующие теоремы выясняют важную роль априорных оценок для решений сопряженного уравнения.

Теорема 3. *Пусть X, Y — банаховы пространства и $A \in \mathcal{L}(X, y)$. Если существует $c > 0$ такое, что для любых $f \in Y^*$ имеет место оценка*

$$\|A^* f\| \geqslant c\|f\|, \tag{3}$$

то $R(A) = Y$.

Доказательство. Рассмотрим в Y множество $M = A(U)$ (замыкание образа шара $U \subset X$ радиуса 1 с центром в нуле при отображении A, см. лемму п. 15.6).

Упражнение. Проверьте, что M — замкнутое, выпуклое и уравновешенное множество в Y.

Пусть $y_0 \notin M$. Воспользуемся следствием к теореме отделимости (п. 40.5).

Тогда найдется функционал $f_0 \in Y^*$ такой, что $|\langle y, f_0 \rangle| \leqslant 1$ для любых $y \in M$, но $\langle y_0, f_0 \rangle > 1$. В частности, для $y \in Ax$ при любых $x \in U$ получаем

$$|\langle x, A^* f_0 \rangle| = |\langle Ax, f_0 \rangle| \leqslant 1,$$

откуда $\|A^* f_0\| \leqslant 1$. Используем оценку $\|f_0\| \leqslant c^{-1}$.

Но тогда

$$1 < \langle y_0, f_0 \rangle \leqslant c^{-1}\|y_0\|, \quad \text{т. е.} \quad \|y_0\| > c.$$

Отсюда следует, что если $y \in cV$, то $y \in M$, т. е. $\overline{A(U)} \supset cV$. По лемме п. 15.6 тогда $R(A) = Y$.

Замечание. Наличие априорной оценки (3) в применении к уравнению $Ax = y$ приводит к важнейшему заключению: оно имеет решение для любой правой части $y \in Y$.

Можно также доказать, что если $R(A^*)$ замкнуто в X^*, то $R(A)$ замкнуто. Справедлива также следующая вариация теоремы 2 (доказательство этих фактов смотрите в [20]).

Теорема 4. *Пусть Y^* компактно вложено в банахово пространство $\widetilde{Y}$. Пусть существуют постоянные $a_0 > 0$, $a > 0$ такие, что для любых $f \in D(A^*)$ выполняется оценка*

$$\|f\|_{Y^*} \leqslant a_0\|f\|_{\widetilde{Y}} + a\|A^*f\|_{X^*}. \tag{4}$$

Тогда $R(A)$ замкнуто, а $N(A^*)$ конечномерно.

Замечание. Наличие оценки (4) в применении к уравнению $Ax = y$ позволяет утверждать, что или оно разрешимо при любом $y \in Y$ (если $N(A^*) = \{0\}$) или для его разрешимости при данном $y \in Y$ необходимо и достоточно, чтобы $\langle y, \psi_i\rangle = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $m = \dim N(A^*)$ — дефект оператора A (см. в п. 21.3 теоремы Нетера 1° и 3°).

В заключение пункта заметим, что утверждения теоремы 3 и 4 справедливы, если A — замкнутый оператор с плотной областью определения.

21.7. Абстрактные граничные задачи. Рассмотрим операторное уравнение

$$Bx = f \tag{1}$$

с оператором $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ и с правой частью $f \in Y$, где X, Y — вещественные банаховы пространства.

Пусть выполнены условия

1) $R(B) = Y$,

2) $N(B)$ конечномерно с числом нулей $n \geqslant 1$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$Cx = \mathrm{g}, \tag{2}$$

где оператор $C \in \mathcal{L}(X, \mathbf{R}^n)$ и $\mathrm{g} \in \mathbf{R}^n$.

Задачу нахождения решений системы операторных уравнений (1)–(2) будем называть абстрактной граничной задачей.

При этом уравнение (1) играет роль обыкновенного дифференциального уравнения, а уравнение (2) — роль граничных условий.

Обсудим вопросы разрешимости этой задачи. Пусть $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(B)$, а $\{\gamma_i\}_1^n$ — биортогональная к нему система из X^*, т. е. $\langle\varphi_i, \gamma_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть $\widetilde{X} = \{x \in X : \langle x, \gamma_j\rangle = 0, \ \ j = 1, \ldots, n\}$.

Упражнение. Покажите, что справедливо разложение пространства X в прямую сумму его подпространств: $X = N(B) \dotplus \widetilde{X}$.

Рассмотрим оператор $\widetilde{B} = B/\widetilde{X}$ — сужение оператора B на подпространство $\widetilde{X}$. По теореме Банаха об обратном операторе $\widetilde{B}$ непрерывно обратим, причем $\Gamma = \widetilde{B}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, \widetilde{X})$. Пользуясь этим, общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$x = \widetilde{x} + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i, \tag{3}$$

где $\widetilde{x} = \Gamma f$ — частное решение уравнения (1), а $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные из $\mathbf{R}$.

Обратимся теперь к уравнению (2). Пользуясь конечномерностью оператора C, уравнение (2) запишем в виде системы

$$\langle x, l_j \rangle = \mathrm{g}_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $l_j \in X^*$, а $\mathrm{g}_j \in \mathbf{R}$.

Подставляя (3) в (2), получим линейную алгебраическую систему n уравнений с n неизвестными для определения $c_1, \ldots, c_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, l_j \rangle c_i = \mathrm{g}_j - \langle \widetilde{x}, l_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Проведенные рассуждения можно интерпретировать следующим образом. Запишем систему (1), (2) в виде одного операторного уравнения

$$Ax = y. \tag{6}$$

При этом использована «матричная форма записи»:

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

где оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y \dotplus \mathbf{R}^n)$ и $y \in Y \dotplus \mathbf{R}^n$.

Обращаясь к системе (5) (см. пример п. 21.3), мы видим, что A является фредгольмовым оператором с числом нулей $n - r$, где r — ранг матрицы $(\langle \varphi_i, l_j \rangle)_{i, j=1, \ldots, n}$. Идея записи граничной задачи в виде операторной системы (1)–(2) с последующим применением аппарата функционального анализа позволила с единой точки зрения исследовать локальные и нелокальные граничные задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами, с импульсным воздействием и т. д. (см. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина П. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М: Наука, 1991). Мы ограничимся здесь одним примером.

Пусть X — банахово пространство столбцов $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^n$, где $x_i(t) \in D[a, b]$ — пространству абсолютно непрерывных функций (см. п. 9.7), а Y — банахово пространство столбцов $f(t) = (f_i(t))_{i=1}^n$, где $f_i(t) \in \mathcal{L}(a, b)$. Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(Bx)(t) \equiv \dot{x}(t) + K(t)\, x(t) = f(t) \tag{7}$$

с матрицей $K(t) = (k_{ij}(t))_{i, j=1}^n$, элементы которой $k_{ij}(t) \in \mathcal{L}(a, b)$.

«Граничные условия» зададим в виде (4), где среди функционалов l_j над X могут присутствовать как локальные типа $x_1(a)$, $x_2(b)$, $x_3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ так и нелокальные, например, $\displaystyle\int_a^b x_1(s)\, ds$.

§ 22. Линейные уравнения с точки зрения вычислений

22.1. Абсолютная и относительная погрешности вычисления элемента и линейного оператора. Для решения любой достаточно сложной математической задачи обычно выбирается какой-либо приближенный метод, а сама исходная задача иногда заменяется приближенной задачей. Кроме того, возможны ошибки, связанные с измерением исходных данных, ошибки, возникающие при реализации численного метода, и ошибки округления.

Пусть $\widetilde{x} \in X$ — приближенное значение элемента $x \in X$, где пространство X банахово. Число $||x - \widetilde{x}||$ называется *абсолютной погрешностью.* Обычно нам известна не сама абсолютная погрешность, а лишь ее оценка

$$||x - \widetilde{x}|| \leqslant \delta. \tag{1}$$

Аналогично, пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и пусть $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ — приближенное значение оператора A. Число $||A - \widetilde{A}||$ называется *абсолютной погрешностью при вычислении оператора* A. Вместе с A абсолютная погрешность зависит от вычисления. Поэтому удобнее пользоваться оценкой вида

$$||A - \widetilde{A}|| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Абсолютные погрешности обладают следующим недостатком: они связаны с «выбором масштабов». Если в X вместо $||x||$ ввести другую норму $||x||_1 = \lambda||x||$, $\lambda > 0$, то абсолютная погрешность умножится на λ: $||x - \widetilde{x}||_1 = \lambda||x - \widetilde{x}||$. Точно так же, если «изменить масштабы» в X и в Y путем умножения нормы в X на число $\lambda > 0$, а нормы в Y на число $\mu > 0$, то абсолютная погрешность $||A - \widetilde{A}||$ уменьшится на $\mu\lambda^{-1}$ (предоставляем это проверить читателю). Поэтому чаще ошибку, получающуюся при замене x на $\widetilde{x}$ (соответственно A на $\widetilde{A}$), характеризуют числом $||x - \widetilde{x}|| \,/\, ||x||$ (соответственно числом $||A - \widetilde{A}|| \,/\, ||A||$), которое называется *относительной погрешностью вычисления элемента* x (*оператора* A).

Вместо оценок относительных погрешностей мы будем пользоваться оценками

$$||x - \widetilde{x}|| \,/\, ||x|| \leqslant \delta, \tag{3}$$

$$||A - \widetilde{A}|| \,/\, ||A|| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Упражнение. Покажите, что относительные погрешности не меняются при описанных выше «изменениях масштабов».

Заметим все же, что и относительные погрешности существенно зависят от выбора норм. Впрочем, это замечание носит общий характер. При исследовании конкретной задачи выбор линейных пространств, а затем их нормировка могут оказаться решающими и с теоретической, и с вычислительной точек зрения.

Условимся о следующей терминологии. В случае оценок (1) или (2) будем говорить, что $\widetilde{x}$ или $\widetilde{A}$ является *δ-приближением* (*ε-приближением*) элемента x или соответственно оператора A. В случае оценок (3) или (4) будем говорить об *относительных δ- или ε-приближениях*.

22.2. Мера обусловленности линейного оператора. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ непрерывно обратим. Число

$$\nu(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\| \tag{1}$$

называется *мерой обусловленности* линейного оператора A. Заметим, что всегда $\nu(A) \geqslant 1$. Действительно,

$$1 = \|I\| = \|A^{-1}A\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|A\| = \nu(A).$$

Мы увидим ниже, насколько важную роль играет понятие меры обусловленности в приближенных вычислениях. Но уже следующие леммы указывают на это обстоятельство.

Лемма 1. *Если A непрерывно обратим и $\widetilde{A}$ есть относительное ε-приближение A, то для всех $\varepsilon \in (0, \nu^{-1}(A))$ оператор $\widetilde{A}$ также непрерывно обратим и справедливы оценки*

$$\frac{\|\widetilde{A}^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{1}{1 - \varepsilon\nu(A)}, \tag{2}$$

$$\frac{\|\widetilde{A}^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\varepsilon\nu(A)}{1 - \varepsilon\nu(A)}, \tag{3}$$

$$\nu(\widetilde{A}) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)\nu(A)}{1 - \varepsilon\nu(A)}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие

$$\varepsilon\nu(A) < 1. \tag{5}$$

Тогда имеем следующую оценку (см. (4) п. 22.1):

$$\|(\widetilde{A} - A)A^{-1}\| \leqslant \|\widetilde{A} - A\| \, \|A^{-1}\| \leqslant \varepsilon\nu(A) < 1.$$

Теперь из теоремы об обратном операторе п. 12.5 следует непрерывная обратимость $\widetilde{A}$ и справедливость оценок (2) и (3) (см. оценки (1) и (2) п. 12.5). Для доказательства оценки (4) заметим, что

$$\nu(\widetilde{A}) = \|\widetilde{A}\| \, \|\widetilde{A}^{-1}\| \leqslant (\|\widetilde{A} - A\| + \|A\|) \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \varepsilon\nu(A)} \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon\|A\| + \|A\|) \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \varepsilon\nu(A)} = \frac{(1+\varepsilon)\nu(A)}{1 - \varepsilon\nu(A)}.$$

Лемма 1 доказана.

Упражнение. Покажите, что неравенства (2) и (4) являются следствиями неравенства (3).

Следующая лемма позволяет судить о непрерывной обратимости оператора A на основании информации об одном его относительном ε-приближении $\widetilde{A}$.

Лемма 2. *Пусть существует относительное ε-приближение $\widetilde{A}$ оператора A такое, что оператор $\widetilde{A}$ непрерывно обратим и $\varepsilon\nu(\widetilde{A}) < 1$. Тогда оператор A непрерывно обратим, причем*

$$\frac{\|A^{-1}\|}{\|\widetilde{A}^{-1}\|} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon\nu(A)}, \qquad \frac{\|A^{-1}-\widetilde{A}^{-1}\|}{\|\widetilde{A}^{-1}\|} \leqslant \frac{\varepsilon\nu(\widetilde{A})}{1-\varepsilon\nu(\widetilde{A})},$$

$$\nu(A) \leqslant \frac{1+\varepsilon\nu(\widetilde{A})}{1-\varepsilon\nu(\widetilde{A})}.$$

Доказательство проводится так же, как в лемме 1. Нужно лишь поменять ролями A и $\widetilde{A}$.

Приведенные леммы указывают на следующее обстоятельство. Если $\nu(A)$ или $\nu(\widetilde{A})$ велико (такие операторы называются плохо обусловленными), то лишь за счет очень малой относительной погрешности вычислений можно добиться непрерывной обратимости близких операторов. Поскольку относительные погрешности обычно бывают ограничены снизу возможностями вычислительной техники, то задачи с плохо обусловленными операторами оказываются плохо реализуемы на ЭВМ. Мы вернемся к этому вопросу в п. 22.4.

22.3. Корректность линейного уравнения с непрерывно обратимым оператором. Рассмотрим линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

которое далее будем называть точным уравнением. Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$ непрерывно обратим (X и Y — банаховы пространства). Решение уравнения (1) дается формулой

$$x = A^{-1}y. \tag{2}$$

Наряду с точным уравнением (1) рассмотрим приближенное уравнение

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{y}, \tag{3}$$

где $\widetilde{A}$ — ε-приближение оператора A, а $\widetilde{y}$ — δ-приближение элемента y (см. формулы (1), (2) п. 22.1), т. е.

$$\|\widetilde{y}-y\| \leqslant \delta, \qquad \|\widetilde{A}-A\| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Потребуем, чтобы погрешность вычисления оператора A была достаточно мала: пусть существует число $q \in (0,\, 1)$ такое, что

$$0 \leqslant \varepsilon\|A^{-1}\|q. \tag{5}$$

Последнее условие обеспечивает следующую оценку:

$$\|(\widetilde{A} - A)A^{-1}\| \leqslant \|\widetilde{A} - A\| \, \|A^{-1}\| \leqslant q. \tag{6}$$

Поэтому, согласно теореме п. 12.5, любое ε-приближение $\widetilde{A}$ является непрерывно обратимым оператором, причем

$$\|\widetilde{A}^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-q}, \tag{7}$$

$$\|\widetilde{A}^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|^2 \varepsilon}{1-q}. \tag{8}$$

При этом решение уравнения (3) дается формулой

$$\widetilde{x} = \widetilde{A}^{-1}\widetilde{y}. \tag{9}$$

Оценим абсолютную погрешность $\|\widetilde{x} - x\|$, используя оценки (7), (8) и (4):

$$\|\widetilde{x} - x\| = \|\widetilde{A}^{-1}\widetilde{y} - A^{-1}y\| = \|\widetilde{A}^{-1}(\widetilde{y} - y) + (\widetilde{A}^{-1} - A^{-1})y\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\widetilde{A}^{-1}\| \, \|\widetilde{y} - y\| + \|\widetilde{A}^{-1} - A^{-1}\| \, \|y\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\delta}{1-q} + \frac{\|A^{-1}\|^2\varepsilon\|y\|}{1-q}.$$

Полученная оценка показывает, что $\widetilde{x} \to x$, если абсолютные погрешности вычисления A и y стремятся к нулю ($\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$).

Принято называть оператор A корректным, если $R(A) = Y$ и A^{-1} ограничен. Эти требования совпадают с определением непрерывно обратимого оператора и приводят, как мы только что показали для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, к устойчивости решения по отношению к малым возмущениям (по норме) оператора A и правой части y.

22.4. Оценка относительной погрешности решения. Рассмотрим снова точное уравнение (1) с непрерывно обратимым оператором A и семейство приближенных решений (9) (п. 22.3), но предположим теперь, что $\widetilde{y}$ и $\widetilde{A}$ являются относительными δ- и ε-приближениями y и A соответственно, т.е.

$$\|y - \widetilde{y}\| \,/\, \|y\| \leqslant \delta, \quad \|\widetilde{A} - A\| \,/\, \|A\| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Пусть относительная погрешность вычисления оператора A достаточно мала, точнее,

$$\varepsilon\nu(A) < 1. \tag{2}$$

Пользуясь понятием меры обусловленности оператора A, оценками (2) и (3) п. 22.2, а также неравенством $\|y\| \leqslant \|A\| \, \|x\|$, получим оценку относительной погрешности

$$\frac{\|\widetilde{x}-x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|\widetilde{A}^{-1}\|\,\|\widetilde{y}-y\|}{\|x\|} + \frac{\|\widetilde{A}^{-1}-A^{-1}\|\,\|y\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\big\|A^{-1}\|\delta\|A\big\|}{1-\varepsilon\nu(A)} + \\ + \frac{\varepsilon\nu(A)\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1-\varepsilon\nu(A)} = \frac{\delta\nu(A)}{1-\varepsilon\nu(A)} + \frac{\varepsilon\nu^2(A)}{1-\varepsilon\nu(A)}. \quad (3)$$

Из полученной оценки видно, что при $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ относительная погрешность вычисления решения также стремится к нулю. Однако следует заметить, что числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ характеризуют гарантированную точность вычислений и практически не стремятся к нулю. Операторы A, для которых $\nu(A) \geqslant \varepsilon^{-1}$ или величина $1 - \varepsilon\nu(A)$ мала, следует считать плохо обусловленными, как и операторы, для которых оценка относительной погрешности вычисления решения выходит за допустимые границы. Таким образом, при практическом решении задач полезно следить за величиной меры обусловленности операторов.

22.5. Регуляризация вычисления приближенного решения линейного уравнения с фредгольмовым оператором. В двух предыдущих пунктах мы рассмотрели линейное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с непрерывно обратимым оператором A. Теперь изучим вырожденный случай. Под этим будем понимать следующее. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — фредгольмов оператор (см. п. 21.3) с числом нулей $n = \dim N(A) \geqslant 1$.

Пусть $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(A)$ — подпространстве нулей оператора A и $\{\gamma_i\}_1^n \subset X^*$ — биортогональная к этому базису система фукнционалов. Пусть, далее, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(A^*)$ — подпространстве нулей сопряженного оператора A^*, а $\{z_i\}_1^n \subset Y$ — система, биортогональная к $\{\psi_i\}_1^n$.

Для разрешимости уравнения (1), т. е. для того, чтобы $y \in R(A)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\langle y, \psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

Пусть эти условия выполнены. Тогда уравнение (1) имеет семейство решений

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \quad (3)$$

где x_0 — какое-либо частное решение уравнения (1), а $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные числа.

Рассмотрим приближенное уравнение

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{y}, \quad (4)$$

где $\widetilde{A}$ и $\widetilde{y}$ — относительные δ-приближения A и y соответственно, т. е.

$$\|\widetilde{A} - A\| \,/\, \|A\| \leqslant \delta, \qquad \|\widetilde{y} - y\| \,/\, \|y\| \leqslant \delta. \tag{5}$$

Для уравнения (4) может представиться ряд случаев. Пусть, например, $\widetilde{A} = A$. Поскольку $R(A) \neq Y$, то для сколь угодно малого $\delta > 0$ существует $\widetilde{y} \notin R(A)$ и удовлетворяющее второму из неравенств (5). В этом случае приближенное уравнение (4) не имеет решений. Может оказаться также, что уравнение (4) имеет единственное решение $\widetilde{x} \to \infty$ при $\delta \to 0$. Уравнение (4) может иметь бесконечное число решений, а может иметь и единственное решение $\widetilde{x}$, стремящееся при $\delta \to 0$ к одному из решений семейства (3).

Упражнение. В евклидовом пространстве E^2 зададим оператор A и элемент y следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдите $N(A)$, $N(A^*)$ и общее решение уравнения (1). Изучите решения уравнения (4) и их поведение при $\delta \to 0$ в следующих случаях:

$$1)\ \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$2)\ \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\delta^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$3)\ \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1+\delta & 1+\delta \\ 1+\delta & 1+\delta \end{bmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{bmatrix} 1+\delta \\ 1+\delta \end{bmatrix};$$

$$4)\ \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, задача (1) является неустойчивой относительно малых по норме возмущений оператора A и правой части y, или, как принято говорить, является *некорректной*. Между тем задачи подобного рода довольно часто возникают в приложениях и их решения необходимо уметь вычислять приближенно со сколь угодно высокой точностью. Кроме того, мы видели, что уравнения с плохо обусловленным оператором практически также оказываются некорректными.

Теория регуляризации некорректных задач, разработанная в трудах А. Н. Тихонова, В. К. Иванова, М. М. Лаврентьева (см. [11, 23, 41]) и других математиков, позволяет успешно справиться с различными трудностями, возникающими в некорректных задачах. Предлагаемый ниже способ регуляризации приближенного решения уравнения (1) основан на применении леммы Шмидта (п. 21.4).

Введем линейный оператор B

$$Bx = Ax + \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle z_i. \tag{6}$$

Согласно лемме Шмидта оператор B непрерывно обратим. Кроме того, общее решение уравнения (1) дается формулой (3), где можно принять

$$x_0 = \Gamma y, \quad \Gamma = B^{-1}, \tag{7}$$

если только выполнены условия (2).

Определение. Решение $x_0 = \Gamma y$ будем называть *B-нормальным решением* уравнения (1).

Покажем, что B-нормальное решение (1) — это его единственное решение, удовлетворяющее дополнительным соотношениям

$$\langle x, \gamma_i \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Действительно, $\langle \Gamma y, \gamma_i \rangle = \langle y, \Gamma^* \gamma_i \rangle = \langle y, \psi_i \rangle = 0$ (см. п. 21.4). Единственность решения x, удовлетворяющего условиям (8), вытекает из формулы (3).

Применяя к (3) функционал γ_k и пользуясь (8), найдем, что $c_k = -\langle x_0, \gamma_k \rangle$, т.е. в семействе (3) только одно решение удовлетворяет условиям (8).

Рассмотрим теперь вместо уравнения (1) следующее уравнение:

$$Bx = y. \tag{9}$$

Это уравнение является уравнением с непрерывно обратимым оператором, и, согласно п. 22.4, процесс нахождения его решения устойчив относительно малых возмущений оператора и правой части. С другой стороны, решение этого уравнения является B-нормальным решением уравнения (1). Таким образом, вместо приближенного уравнения (4) можно рассмотреть «регуляризованное приближенное уравнение»

$$\widetilde{A}\widetilde{x} + \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{x}, \widetilde{\gamma}_i \rangle \widetilde{z}_i = \widetilde{y}. \tag{10}$$

Здесь $\widetilde{A}$ и $\widetilde{y}$ суть δ-приближения A и y соответственно (см. (5)), а $\widetilde{\gamma}_i$ и $\widetilde{z}_i$ суть δ-приближения γ_i и z_i:

$$\|\widetilde{\gamma}_i - \gamma_i\| \leqslant \delta \|\gamma_i\|, \quad \|\widetilde{z}_i - z_i\| \leqslant \delta \|z_i\|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Применим к уравнению (10) оценки п. 22.4. При $\delta < \nu^{-1}(B)$, где $\nu(B)$ — мера обусловленности оператора B, это уравнение имеет единственное решение $\widetilde{x}$. Относительная погрешность вычисления B-нормального решения x_0 уравнения (1) оценивается тогда следующим образом:

$$\frac{\|\widetilde{x}-x_0\|}{\|x_0\|} \leqslant \frac{\delta\nu(B)[1+\nu(B)]}{1-\delta\nu(B)},$$

и стремится к нулю при $\delta \to 0$. Мы получили устойчивый относительно погрешностей способ вычисления B-нормального решения уравнения (1). Отметим частный случай. Пусть X — гильбертово пространство, а $\{\varphi_i\}_1^n$ — ортонормированный базис в $N(A)$. Тогда можно принять $\gamma_i = \varphi_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Поскольку теперь формулы (8) означают ортогональность $\Gamma y \perp N(A)$, то для всякого решения x уравнения (1), согласно формуле (3), имеем

$$\|x\|^2 = \|x_0\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$$

Таким образом, в этом частном случае B-нормальное решение уравнения (1) — это его решение с наименьшей нормой.

22.6. О регуляризации приближенного решения линейного уравнения 1-го рода. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с вполне непрерывным оператором $A \in \mathcal{L}(X)$. В п. 20.6 мы условились подобные уравнения называть уравнениями 1-го рода. Предположим, что $N(A) = \{0\}$. Согласно теореме 2 п. 20.6, если X бесконечномерно, обратный оператор A^{-1} хотя и существует на $R(A)$, но неограничен. Это обстоятельство приводит, как мы увидим ниже, к тому, что задача вычисления решения уравнения (1) оказывается неустойчивой. В настоящее время разработаны различные методы регуляризации для уравнений типа (1) (см. [11]). Это, например, вариационные методы: метод А. Н. Тихонова введения стабилизирующего функционала, метод квазирешений В. К. Иванова, метод невязки и другие методы. Мы коснемся здесь метода М. М. Лаврентьева сведения уравнения (1) к уравнению 2-го рода. Рассмотренная ниже задача достаточно хорошо, на наш взгляд, иллюстрирует идею регуляризации.

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{y}$ суть ε-приближения A и y соответственно. Рассмотрим приближенное уравнение

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{y}. \tag{2}$$

Если, например, $\widetilde{A} = A$, а $\widetilde{y} \notin R(A)$, то уравнение (2) не имеет решений. Если даже оно имеет решение $\widetilde{x}$, то мы не имеем гарантии, что $\widetilde{x} \to x$ при $\varepsilon \to 0$, где x — решение уравнения (1). Попытаемся регуляризовать уравнение (2). Для этой цели введем следующее вспомогательное уравнение 2-го рода:

$$(\widetilde{A} + \alpha I)x_\alpha = \widetilde{y}, \tag{3}$$

где параметр α (параметр регуляризации) подберем в зависимости от ε так, чтобы $x_\alpha \to x$ при $\varepsilon \to 0$. Это удастся сделать при некоторых дополнительных ограничениях.

Теорема. *Пусть оператор A удовлетворяет следующему условию для всех $\alpha > 0$:*

$$\|(A + \alpha I)^{-1}\| \leqslant c/\alpha. \tag{4}$$

Пусть, далее, $y \in D(A^{-2})$. Если параметр регуляризации $\alpha > 0$ согласован с ε так, что при $\varepsilon \to 0$ также $\alpha \to 0$ и $\varepsilon\alpha^{-2} \to 0$, то $x_\alpha \to x$ при $\varepsilon \to 0$. Если $\alpha = O(\varepsilon^{1/3})$ при $\varepsilon \to 0$, то $\|x_\alpha - x\| = O(\varepsilon^{1/3})$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой об обратном операторе п. 12.5. Предположим, что

$$\varepsilon c/\alpha \leqslant 1/2. \tag{5}$$

Тогда имеем следующую оценку:

$$\big\|[(\widetilde{A} + \alpha I) - (A + \alpha I)](A + \alpha I)^{-1}\big\| \leqslant \varepsilon c/\alpha \leqslant 1/2. \tag{6}$$

Следовательно, $\widetilde{A} + \alpha I$ непрерывно обратим и

$$\|(\widetilde{A} + \alpha I)^{-1} - (A + \alpha I)^{-1}\| \leqslant 2\varepsilon c^2/\alpha^2. \tag{7}$$

Теперь можно оценить абсолютную погрешность решения:

$$\|x_\alpha - x\| = \|(\widetilde{A} + \alpha I)^{-1}\widetilde{y} - A^{-1}y\| \leqslant \|(\widetilde{A} + \alpha I)^{-1} - (A + \alpha I)^{-1}\|\ \|\widetilde{y}\| +$$
$$+ \|(A + \alpha I)^{-1}\|\ \|\widetilde{y} - y\| + \|(A + \alpha I)^{-1}y - A^{-1}y\| \leqslant \frac{2\varepsilon c^2}{\alpha^2}\|\widetilde{y}\| + \frac{c\varepsilon}{\alpha} + \Delta_3.$$

Для оценки Δ_3 заметим, что

$$(A + \alpha I)^{-1}y - A^{-1}y = -(A + \alpha I)^{-1}\alpha A^{-1}y.$$

Поскольку $y \in D(A^{-2})$, это тождество сохраняется при замене y на $A^{-1}y$, т.е.

$$(A + \alpha I)^{-1}A^{-1}y - A^{-2}y = -(A + \alpha I)^{-1}\alpha A^{-2}y.$$

Следовательно, получаем

$$(A + \alpha I)^{-1}y - A^{-1}y = \alpha^2(A + \alpha I)^{-1}A^{-2}y - \alpha A^{-2}y.$$

Теперь с помощью оценки (4) имеем

$$\Delta_3 = \|(A + \alpha I)^{-1}y - A^{-1}y\| \leqslant c\alpha\|A^{-2}y\| + \alpha\|A^{-2}y\|.$$

Объединяя полученные оценки, находим

$$\|x_\alpha - x\| \leqslant 2\varepsilon\alpha^{-2}c^2\|\widetilde{y}\| + c\varepsilon\alpha^{-1} + (c+1)\alpha\|A^{-2}y\|,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ГЛАВА VI

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 23. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов

23.1. Определение и основные свойства. Пусть X — линейное пространство и A — линейный оператор, действующий в X, с областью определения $D(A)$.

Определение. Число λ называется *собственным значением* оператора A, если существует вектор $x \neq 0$, $x \in D(A)$, такой, что

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

При этом вектор x называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Собственные значения и собственные векторы линейных операторов играют важную роль во многих областях математики и ее приложений, особенно в математической физике. Ниже будут приведены различного рода примеры. Отметим пока, что не всякий линейный оператор имеет собственные значения.

Пример. В линейном пространстве $\mathbf{R}^2$ двумерных вещественных столбцов (т. е. на плоскости) рассмотрим линейный оператор A, задаваемый матрицей

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Оператор A осуществляет поворот плоскости на 45° вокруг начала координат, и геометрически ясно, что он не имеет собственных векторов. (Проверьте это утверждение аналитически.)

Пусть x — собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ. Тогда из (1) следует, что αx, где $\alpha \neq 0$, также является собственным вектором A, отвечающим λ. В развитие идеи предлагаем следующее упражнение.

Упражнение 1. Покажите, что множество всех собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, дополненное нулевым вектором 0, образует в X линейное многообразие — собственное линейное многообразие, отвечающее собственному значению λ.

Упражнение 2. Найдите собственные значения и отвечающие им собственные линейные многообразия линейного оператора A

в $\mathbf{R}^3$, заданного матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Докажем теперь следующее предложение.

Теорема. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным его собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Один собственный вектор линейного оператора x_1, отвечающий собственному значению λ_1, линейно независим, так как $x_1 \neq 0$. Проведем доказательство по индукции. Пусть известно, что любые k собственных значений оператора A линейно независимы. Допустим, что тем не менее существует линейно зависимая система из $k+1$ собственных векторов $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$, отвечающих соответственно собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j,\ i,\ j = 1, 2, \ldots, k+1)$. Тогда найдутся скаляры $c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}$, не все равные модулю одновременно и такие, что

$$c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} = 0 \tag{2}$$

Применяя к этому равенству оператор $A - \lambda_{k+1} I$, получим

$$(A - \lambda_{k+1} I) \sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} c_i A x_i - \sum_{i=1}^{k+1} c_i \lambda_{k+1} x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} c_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = \sum_{i=1}^{k} c_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) x_i = 0.$$

Но $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы по предположению индукции и следовательно,

$$c_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0, i = 1, \ldots, k.$$

Отсюда $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, так как $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ при $i \leqslant k$. Обращаясь к (2), видим, что $c_{k+1} = 0$. Оказалось, что все $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k+1)$. Это противоречит тому, что не все c_i равны нулю одновременно. Следовательно, сделанное допущение о линейной зависимости $x_1, \ldots, x_{k+1}$ неверно. Теорема доказана.

Предлагаем несколько упражнений на определение собственных значений и собственных векторов линейных операторов.

Упражнение 3. Найдите собственные значения и собственные векторы нулевого оператора 0 и тождественного оператора I.

Упражнение 4. В линейном пространстве трехмерных комплексных столбцов найдите собственные значения и собственный векторы линейного оператора A, заданного матрицей ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Упражнение 5. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найдите собственные значения и собственные векторы (собственные функции) интегрального оператора $A(D(A) = C[-\pi, \pi])$:

$$(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)x(s)ds.$$

Упражнение 6. В вещественном линейном пространстве $C[0, \pi]$ найдите собственные векторы (собственные функции) дифференциального оператора $Ax = x''(t)$ в следующих случаях:

1) $D(A) = \{x : x''(t) \in C[0, \pi], x(0) = x(\pi) = 0\}$;
2) $D(A) = \{x : x''(t) \in C[0, \pi], x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;
3) $D(A) = \{x : x''(t) \in C[0, \pi], x(0) = x(\pi), \quad x'(0) = x'(\pi)\}$.

23.2. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов в конечномерных пространствах. Исследование задачи о собственных значениях и собственных векторах линейных операторов, действующих в конечномерных линейных пространствах, составляет одну из глав линейной алгебры (см. [5]). Здесь мы ограничимся лишь беглым изложением основных результатов.

Пусть X — m-мерное пространство и A — линейный оператор $(D(A) = X;\ R(A) \subset X)$. Фиксируем в X базис $\{e_k\}_1^m$. Пусть

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, m \tag{1}$$

(разложения образов базисных векторов по базису). Матрица $\|\alpha_{ij}\|$ называется матрицей A (в базисе $\{e_k\}$). Теперь для любого $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in X$ имеем

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_j \right) e_j. \tag{2}$$

Следовательно, уравнение $Ax = \lambda x$ в координатах имеет вид (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_j = \lambda \xi_j \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \xi_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Для того, чтобы система (3) имела нетривиальное решение (ведь разыскиваются векторы $x \neq 0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(\alpha_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением* и представляет собой уравнение m-й степени относительно λ (коэффициент при λ^m равен 1). Все собственные значения A и только они являются корнями характеристического уравнения. В случае комплексного X характеристическое уравнение имеет ровно m корней с учетом их кратности. Перейдем к определению собственных векторов. Пусть λ_0 — одно из собственных значений A. Тогда система (3) определяет собственное линейное многообразие, отвечающее λ_0 (система (3) при $\lambda = \lambda_0$ имеет нетривиальные решения, так как ее детерминант при $\lambda = \lambda_0$ обращается в нуль). Согласно теореме п. 23.1 собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Пусть $\widehat{X}$ — линейное многообразие в X, натянутое на всевозможные собственные векторы A. В комплексном случае $\widehat{X} \neq \{0\}$. Важен случай, когда $\widehat{X} = X$, т. е. из собственных векторов оператора A можно набрать базис в X. В этом случае в базисе $\{f_k\}_1^m$ из собственных векторов $Af_k = \lambda_k f_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ λ_k могут частично или все совпадать, матрица оператора A (см. [5]) диагональна и

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i e_i.$$

Так, в частности, обстоит дело, когда пространство X унитарно и A самосопряжен, т. е. для всех $x,\ y \in X$ имеет место равенство

$$(Ax,\ y) = (x,\ Ay).$$

Кроме того, собственные значения самосопряженного оператора все вещественны, а базис $\{f_k\}_1^m$ из собственных векторов оператора A можно выбрать ортогональным (или ортонормированным). Для читателя, не изучавшего курс линейной алгебры, заметим, что эти факты будут доказаны независимо в более общем случае в пп. 23.3, 23.4.

В общем случае собственных векторов оператора A может оказаться недостаточно для составления из них базиса в X.

Упражнение. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, заданного в линейном пространстве двумерных комплексных столбцов формулой

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A является простейшей жордановой клеткой. Известная теорема о приведении произвольной матрицы к жордановой нормальной форме позволяет до конца разобраться в проблеме построения наиболее удобного базиса.

Определение 1. Пусть λ — собственное значение A. Линейное многообразие, порождаемое векторами собственного подпространства, отвечающего λ, и всевозможными присоединениями к ним векторами называется *корневым линейным многообразием оператора A, отвечающим λ*.

Теорема (Жордан). *Во всяком комплексном конечномерном линейном пространстве X можно набрать базис, состоящий из собственных и присоединенных векторов любого линейного оператора A.*

Доказательство см. в [5].

23.3. Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывных операторов. Пусть X — банахово пространство и $A \in \sigma(X)$, т. е. A — вполне непрерывный линейный оператор, действующий в X. Пусть, кроме того, λ — собственное значение оператора A, а X_λ — собственное подпространство, отвечающее λ.

Теорема 1. *Если A вполне непрерывен, то его собственное подпространство X_λ, отвечающее собственному значению $\lambda \neq 0$, конечномерно.*

Доказательство. Пусть $S_1(0)$ — замкнутый единичный шар в X_λ. Возьмем $\{X_n \subset S_1(0)\}$. Вследствие полной непрерывности A последовательность $\{Ax_n\}$ компактна, но $x_n = \dfrac{1}{\lambda}Ax_n$, откуда и $\{x_n\}$ компактна. Таким образом, единичный шар в X_λ компактен. Согласно п. 19.5 отсюда следует конечномерность подпространства X_λ.

Теорема 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор в X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вне круга $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ комплексной плоскости (вещественной оси) может содержаться лишь конечное число собственных значений A.*

Доказательство. Допустим противное, что $A \in \sigma(X)$, но найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что A имеет последовательность различных собственных значений $\{\lambda_n\}$ с $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon_0$. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность соответствующих собственных векторов. Согласно теореме п. 23.1 $\{x_n\}$ линейно независима.

Введем X_n — подпространство в X, натянутое на $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно,

$$X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots,$$

причем $X_{n+1} \neq X_n$ ни при каком n. Все X_n конечномерны и потому замкнуты. По теореме Рисса о почти перпендикуляре (см. п. 3.5) найдется последовательность векторов $\{y_n\}$ такая, что $y_k \in X_k$, $\|y_k\| = 1$ и $\|y_k - x\| \geqslant 1/2$ для всех $x \in X_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

Рассмотрим $\{Ay_n\}$. Так как $\{y_n\}$ ограничена и A вполне непрерывен, то $\{Ay_n\}$ компактна. Следующее ниже рассуждение покажет, что Ay_n не может быть компактной и, значит, наше допущение о наличии бесконечной последовательности собственных значений было неверным откуда и следует справедливость теоремы 2.

Итак, осталось доказать, что $\{Ay_n\}$ не компактна. Введем обозначение $A_\lambda = A - \lambda I$. Для любых натуральных m, n $(m > n)$ имеем

$$\|Ay_m - Ay_n\| = \|A_{\lambda_m} y_m + \lambda_m y_m - A_{\lambda_n} y_n - \lambda_n y_n\| =$$
$$= |\lambda_m| \left\| y_m - \left[-\frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_m} y_m + \frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_n} y_n \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n \right] \right\| = |\lambda_m| \|y_m - x_{mn}\|,$$

где

$$x_{mn} = -\frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_m} y_m + \frac{1}{\lambda_m} A_{\lambda_n} y_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_m} y_n \in X_{m-1}.$$

Действительно если $y_k \in X_k$, то $y_k = \sum_{l=1}^{k} \alpha_i^{(k)} x_i$, так как $\{x_i\}_1^k$ — базис в X_k. Поэтому

$$A_{\lambda_m} y_m = (A - \lambda_m I) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(m)} x_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^{(m)} (\lambda_i - \lambda_m) x_i \in X_{m-1},$$

$$y_n \in X_n \subset X_{n-1}, \quad A_{\lambda_n} y_n \in X_{n-1} \subset X_{m-1}.$$

Итак, $x_{mn} \in X_{m-1}$, но тогда $\|y_m - x_{mn}\| \geqslant 1/2$ и, следовательно,

$$\|Ay_m - Ay_n\| = |\lambda_m| \|y_n - x_{mn}\| \geqslant \varepsilon_0/2.$$

Отсюда вытекает некомпактность $\{Ay_n\}$, на чем доказательство теоремы 2 заканчивается.

Пример. Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Kx = \int_a^b K(t, s) x(s) ds \tag{1}$$

с непрерывным в квадрате $Q = \{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ комплекснозначным ядром $K(t, s)$. Рассуждения будем вести в комплексном пространстве $C[a, b]$. Поскольку K вполне непрерывен (п. 20.4), то можно воспользоваться теоремами 1 и 2. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\int_a^b K(t, s) x(s) ds = \lambda x(t). \tag{2}$$

Согласно теореме 2 могут представиться лишь следующие три возможности.

1. Задача (2) имеет лишь нулевое решение:

$$x(t) = 0 \text{при} \lambda \neq 0.$$

2. Существует конечное число собственных значений оператора K, отличных от нуля.

3. Существует последовательность $\{\lambda_n\}$ собственных значений оператора K, причем $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$

При этом в случаях 2 и 3 по теореме 1 собственные подпространства, отвечающие ненулевым собственным значениям, конечномерны. Эти три возможности представлены в следующем упражнении.

Упражнение. Найдите собственные значения, отличные от нуля, а также соответствующие им собственные подпространства для следующих интегральных операторов:

1) $Kx = \int\limits_0^l (t-s)x(s)ds$ в $C[0, l]$;

2) $Kx = \int\limits_0^1 ts(t-s)x(s)ds$ в $C[0, 1]$;

3) $Kx = \int\limits_0^\pi K(t, s)x(s)ds$ в $C[0, \pi]$, где $K(t, s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kt \sin ks}{k^2}$.

23.4. Собственные значения и собственные векторы линейных вполне непрерывных самосопряженных операторов. Пусть H — гильбертово пространство и A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в H. О собственных значениях и собственных векторах такого оператора A можно сказать уже довольно много. В частности, имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $A \neq 0$, то A имеет по крайней мере одно собственное значение, отличное от нуля.*

Доказательство. Так как A — самосопряженный, то $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ (см. теорему 4 п. 18.2). Но тогда найдется последовательность $\{x_n\}$, $\|x\| = 1$, такая, что $|(Ax, x)| \to \|A\|$, $n \to \infty$. Так как $A \neq 0$, то числа $(Ax_n, x_n) \neq 0$ для всех достаточно больших n, причем существует подпоследовательность $\{x_{n'}\}$ такая, что $(Ax_{n'}, x_{n'}) \to \lambda$, где $\lambda = \|A\|$ или $\lambda = -\|A\|$. Имеем следующую оценку:

$$\|Ax_{n'} - \lambda x_{n'}\|^2 = (Ax_{n'} - \lambda x_{n'}, Ax_{n'} - \lambda x_{n'}) = \\ = \|Ax_{n'}\|^2 - 2\lambda(Ax_{n'}, x_{n'}) + \lambda^2 \leqslant 2\lambda[\lambda - (Ax_{n'}, x_{n'})].$$

(Мы учли здесь, что $\|x_{n'}\| = 1$ и $\|Ax_{n'}\| \leqslant \|A\|^2 = \lambda^2$.)

При $n' \to \infty$ имеем $y_{n'} = Ax_{n'} - \lambda x_{n'} \to 0$. Но $\{x_{n'}\}$ ограничена, а тогда, вследствие полной непрерывности A, последовательность $\{Ax_{n'}\}$ компактна. Значит, существует ее сходящаяся подпоследовательность $\{Ax_{n''}\}$. Отсюда $x_{n''} = \dfrac{1}{\lambda}Ax_{n''} - \dfrac{1}{\lambda}y_{n''}$ также сходится, ибо $y_{n''} \to 0, n \to \infty$. Пусть $x = \lim\limits_{n'' \to \infty} x_{n''}$; тогда

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0, \quad \text{ибо} \quad \|x\| = \lim_{n'' \to \infty} \|x_{n''}\| = 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Все собственные значения линейного самосопряженного вполне непрерывного оператора A вещественны и расположены на $[m, M]$, где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Если $M \neq 0$, то M является наибольшим собственным значением A. Если $m \neq 0$, то m является наименьшим собственным значением A.

Доказательство. Согласно теореме 3 п. 18.2 квадратичная форма (Ax, x) вещественна. Если λ — собственное значение A и x — отвечающий λ собственный вектор, то $(Ax, x) = \lambda\|x\|^2$. Отсюда $(x \neq 0)$ λ вещественно. Далее, так как $m \leqslant (Ax, x) \leqslant M$ при $\|x\| = 1$, то для всякого собственного значения λ имеем неравенство $m \leqslant \lambda \leqslant M$. Осталось показать, что m и M, если они не нули, являются собственными значениями A. В теореме 1 было доказано, что наибольшее по модулю из этих чисел является собственным значением A. Этот результат можно уточнить следующим образом. Пусть $M \neq 0$. Оператор $B = MI - A$ также самосопряженный и, кроме того, неотрицательный (проверьте!) По обобщенному неравенству Коши–Буняковского (см. лемму 2 п. 18.3) имеем

$$(Bx, y)^2 \leqslant (Bx, x)(By, y). \tag{1}$$

Так как $M = \sup_{\|x\|=1}(Ax, x)$, то найдется $\{x_n\}$ с $\|x\| = 1$ такая, что $(Ax_n, x_n) \to M$ при $n \to \infty$. Положим в (1) $x = x_n$, $y = Bx_n$ и получим

$$\|Bx_n\|^4 \leqslant (Bx_n, x_n)(B^2x_n, Bx_n) \leqslant \\ \leqslant \|B\|^3(Bx_n, x_n) = \|B\|^3[M - (Ax_n, x_n)].$$

Следовательно, $Bx_n = Mx_n - Ax_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, как и в теореме 1, устанавливается существование вектора c такого, что $Ax = Mx$. Аналогично доказывается, что m (если $m \neq 0$) является собственным значением A. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если A — линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор, то $\|A\| = |\lambda_1|$, где λ_1 — наибольшее по модулю собственное значение A. В частности, это верно для всякого самосопряженного оператора в евклидовом (т. е. конечномерном гильбертовом) пространстве.*

Теорема 3 (Гильберт–Шмидт). *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор в H, то при всяком $x \in H$, Элемент Ax разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Пусть φ_1 — нормированный собственный вектор, отвечающий собственому значению λ_1 оператора A (см. теорему 1). Рассмотрим $H_1 = \{x \in H : (x, \varphi_1) = 0\}$. Так как $(Ax, \varphi_1) = (x, A\varphi_1) = \lambda_1(x, \varphi_1) = 0$ для $x \in H_1$, то A переводит элементы из H_1 снова в элементы из H_1. Поэтому можно рассматривать A как оператор, действующий в H_1. Далее, A в H_1 по-прежнему вполне в непрерывен и самосопряжен. По теореме 1 в H_1 вектор φ_2 (если только $A \neq 0$ в H_1), причем $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$.

Рассмотрим теперь $H_2 = \{x \in H_1 : (x, \varphi_2) = 0\}$ и снова применим теорему 1. Продолжая эти рассуждения, придем к одной из двух возможностей. Или процесс оборвется, т. е. найдется номер такой, что на H_n, определяемом условиями $(x, \varphi_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ будет $A = 0$. В этом случае для любого $x \in H$ рассмотрим элемент $y = x - \sum\limits_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)\varphi_k$. Очевидно, $y \in H$ и, значит, $Ay = 0$, т. е. $Ax = \sum\limits_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)\lambda_k\varphi_k$, и теорема доказана.

Другая возможность: процесс продолжается неограниченно. В результате мы получаем последовательность $\{\lambda_k\}$ собственных значений A и последовательность $\{\varphi_k\}$ собственных векторов A, отвечающих этим собственным значениям. Воспользуемся теперь тем, что согласно теореме 1

$$\|A\|^2_{\mathcal{L}(H_n)} = \lambda^2_{n+1}.$$

Поэтому

$$A\left\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)\varphi_k]\right\|^2 \leqslant \lambda^k_{n+1}\left\|x - \sum_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 =$$
$$= \lambda^2_{n+1}\left\{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, \varphi_k)|^2\right\} \leqslant \lambda^2_{n+1}\|x\|^2.$$

Поскольку $\lambda_k \to 0$ при $n \to \infty$ (см. теорему 2 п. 23.3), то $A\left[x - \sum\limits_{k=1}^{n}(x, \varphi_k)\varphi_k\right] \to 0, n \to \infty$, т. е.

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)\lambda_k\varphi_k, \tag{2}$$

и теорема доказана.

Приведем два следствия из теоремы 3.

С л е д с т в и е 2. *Если вполне непрерывный самосопряженный оператор A обратим, то из его собственных векторов можно набрать базис в H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя к обеим частям равенства (2) оператор A^{-1}, получим

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)\varphi_k,$$

т. е. всякий $x \in H$ разлагается в сходящийся к нему ряд Фурье по ортонормированной системе из собственных векторов A.

Следствие 3. *Если A — вполне непрерывный самосопряженный вектор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то в H существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Равенство (2) можно записать в виде $A\left[x-\sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)\varphi_k\right]=0$. Отсюда видно, что элемент $x_0=x-\sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)\varphi_k$ принадлежит $N(A)$ — собственному подпространству оператора A, отвечающему нулевому собственному значению. Так как $N(A)$ тоже сепарабельно, то в $N(A)$ можно построить ортонормированный базис $\{e'_k\}_1^\infty$. Разлагая $x_0 \in N(A)$ по этому базису, получим

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(x, \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x, e'_k)e'_k + \sum_{k=1}^{\infty}(x, e_k)e_k,$$

где одна или обе суммы могут быть и конечными.

§ 24. Резольвентное множество и спектр линейного оператора

24.1. Основные определения. Примеры. Пусть X — комплексное банахово пространство. Рассмотрим линейный оператор $A : X \to X$ с областью определения $D(A)$, плотной в X. Рассмотрим, далее, оператор $A-\lambda I$, где λ — комплексное число (точка на комплексной плоскости), I — единица в $\mathcal{L}(X)$.

Определение 1. Точка λ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Совокупность регулярных точек оператора A называется *Резольвентным множеством* оператора и обозначается $\rho(A)$. Если $\lambda \in \rho(A)$, то линейный оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ называется *резольвентой* оператора A.

Выясним некоторые свойства резольвентного множества $\rho(A)$.

Теорема 1. *Резольвентное множество $\rho(A)$ всегда открыто.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$. Это означает, что оператор $A - \lambda_0 I$ непрерывно обратим. Рассмотрим оператор $A - \lambda I$ и заметим, что справедливо следующее тождество:

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I-(\lambda-\lambda_0)I = (A-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]. \quad (1)$$

Поскольку оператор $A - \lambda_0 I$ непрерывно обратим, если непрерывно обратим оператор $I - (\lambda - \lambda_0) \times R_{\lambda_0}(A)$. Воспользуемся теоремой об обратном операторе п. 12.4. Согласно этой теореме оператор $I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)$ будет непрерывно обратим, если $|\lambda - \lambda_0|\, \|R_{\lambda_0}(A)\| < 1$. Следовательно, если $\lambda_0 \in \rho(A)$, то круг $S_r(\lambda_0)$, где $r = \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$, тоже лежит в $\rho(A)$, т. е. $\rho(A)$ открыто.

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда*

$$\{\lambda : |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$

Доказательство. Заметим, что $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$. Поэтому, если $\|\lambda^{-1}A\| \leqslant 1$, т.е. $|\lambda| > \|A\|$, то $A - \lambda I$ непрерывно обратим. Теорема доказана.

Следствие. *Если A ограничен, то $\rho(A)$ неограничено.*

Определение 2. Дополнение к $\rho(A)$ (в комплексной плоскости) называется *спектром* оператора A и обозначается $\sigma(A)$.

Из теоремы 1 следует, что спектр любого линейного оператора A является замкнутым множеством (как дополнение к открытому множеству, см. п. 3.1).

Из теоремы 2 следует, что спектр ограниченного линейного оператора $A\sigma(A) \subset \bar{S}_{\|A\|}(0)$ (спектр A лежит в круге $|\lambda| \leqslant \|A\|$) и, следовательно, является ограниченным множеством. Если точка $\lambda \in \sigma(A)$, то возможны следующие три случая:

1) оператор $A - \lambda I$ не обратим;

2) оператор $A - \lambda I$ обратим, но его область значений $R(A - \lambda I) \neq X$;

3) оператор $A - \lambda I$ обратим, $R(A - \lambda I) = X$, но оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ неограничен.

Замечание. Из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что случай 3) невозможен, если $D(A) = X$ и A ограничен.

Среди точек спектра $\sigma(A)$ важную роль играют собственные значения оператора A (см. § 23). Если λ — собственное значение A, то имеет место первый случай: оператор $A - \lambda I$ не обратим. Действительно, $(A - \lambda I)x = 0$, где x — собственный вектор, отвечающий λ. Но тогда подпространство нулей $N(A - \lambda I) \neq \{0\}$ и, согласно теореме 1 п. 12.1, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не существует. Основываясь на § 20 и 21, приведем несколько примеров.

Пример 1. Если пространство X конечномерно, то спектр любого оператора состоит только из его собственных значений. В m-мерном евклидовом или унитарном пространстве X всякий самосопряженный оператор имеет ровно m собственных значений с учетом их кратности. Все собственные значения вещественны, а из отвечающих ему собственных векторов в X можно набрать ортонормированный базис (п. 23.2).

Пример 2. Спектр $\sigma(A)$ всякого вполне непрерывного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве X состоит из не более, чем счетного множества собственных значений, единой предельной точкой которого может служить лишь точка $\lambda = 0$ (см. теорему 1 п. 23.3). Если $\lambda \neq 0$ не является собственным значением A, то λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$. Действительно, $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$, но оператор $\lambda^{-1}A$ вполне непрерывен (теорема 2 п. 20.1), и поскольку $N(I - \lambda^{-1}A) = N(A - \lambda I) = \{0\}$, то по первой теореме Фредгольма (теорема 2 п. 20.5) оператор $(I - \lambda^{-1}A)$, а с ним и $A - \lambda I$ непрерывно обратимы. Обратимся теперь к точке $\lambda = 0$. Так как область значений $R(A)$ не замкнута (см. теорему 1 п. 20.6), то $0 \in \sigma(A)$. Если даже $\lambda = 0$ не является собственным значением A, т.е. A обратим, то A^{-1} неограничен (см. теорему 2 п. 20.6).

Пример 3. Все сказанное в примере 2 справедливо для всякого вполне непрерывного линейного оператора в гильбертовом пространстве H. Дополнительно к этому A имеет хоть одно собственное значение $\lambda \neq 0$ (теорема 1 п. 23.4), все собственные значения A вещественны (теорема 2), и справедлива теорема 3 Гильберта–Шмидта о разложении по собственным векторам, а также следствия 1 и 3 (см. п. 23.4).

Предлагаем выполнить несколько упражнений, позволяющих получить представление о различных возможных ситуациях.

Упражнение 1. Пусть $X = C[0,\,1]$ и $Ax \equiv x'(t)$ (A — оператор дифференцирования). Показать, что:

а) $\sigma(A)$ пусто, если $D(A) = \{x:\ x'(t) \in C[0,\,1],\ x(0) = 0\}$;

б) $\sigma(A)$ состоит из одних собственных значений, заполняющих всю комплексную плоскость, если $D(A) = \{x:\ x'(t) \in C[0,\,1]\}$;

в) $\sigma(A)$ состоит из собственных значений $2\pi i n$ ($n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; i — мнимая единица), если

$$D(A) = \{x:\ x'(t) \in C[0,\,1],\ x(0) = x(1)\}.$$

Упражнение 2. Пусть $X = C[0,\,1]$ и $Ax = tx(t)$ (A — оператор умножения на независимую переменную). Показать, что $\sigma(A) = [0,\,1]$, причем ни одна из точек спектра не является собственным значением.

Упражнение 3. Пусть $X = C[0,\,1]$ и $Ax = \dfrac{1}{t}\,x(t)$, $D(A) = \{x:\ x'(t) \in C[0,\,1], x(0) = 0\}$. Показать, что $\sigma(A) = [1,\,+\infty]$.

Упражнение 4. Пусть $X = C[0,\,2\pi]$ и $Ax = e^{it}x(t)$. Показать, что $\sigma(A) = \{\lambda:\ |\lambda| = 1\}$, т.е. $\sigma(A)$ заполняет единичную окружность.

24.2. Спектральный радиус линейного оператора. В этом пункте будет усилена теорема об обратном операторе из п. 12.4 и затем на этой основе будет уточнена теорема 2 предыдущего пункта о резольвентном множестве линейного ограниченного оператора.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, где X — комплексное банахово пространство. Тогда существует конечный предел*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}. \tag{1}$$

Имеет место соотношение

$$\inf_{n\geqslant 1} \|A^n\|^{1/n} = r_\sigma(A) \leqslant \|A\|. \tag{2}$$

Предел (1) называется *спектральным радиусом оператора A*.

Доказательство. Положим $\inf_{n\geqslant1} \|A^n\|^{1/n} = r$. Согласно определению нижней грани для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти номер m такой, что

$$\|A^m\|^{1/m} \geqslant r + \varepsilon.$$

Далее, всякое натуральное n представимо однозначно в виде

$$n = p_n m + q_n,$$

где p_n — натуральное, а $0 \leqslant q_n \leqslant m - 1$.

Заметим теперь, что

$$\|A^n\|^{1/n} = \|A^{p_n m+q_n}\|^{1/n} \leqslant \|A^m\|^{p_n/n}\|A\|^{q_n/n} \leqslant (r+\varepsilon)^{mp_n/n}\|A\|^{q_n/n}.$$

При $nm \to \infty$ $\dfrac{p_n m}{n} = 1 - \dfrac{q_n}{n} \to 1$, $\dfrac{q_n}{n} \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (r+\varepsilon)^{mp_n/n}\|A\|^{q_n/n} = r+\varepsilon.$$

Но тогда можно найти номер N такой, что для любых номеров $n > N$

$$(r+\varepsilon)^{mp_n/n}\|A^n\|^{q_n/n} < (r+\varepsilon)+\varepsilon = r+2\varepsilon.$$

Таким образом, мы имеем неравенство

$$r \leqslant \|A^n\|^{1/n} < r+2\varepsilon,$$

справедливое для всех $n > N$. Это и означает существование предела (1) и равенство $r_\sigma(A) = r$ (см. формулу (2)). Осталось заметить, что $\|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A\|^{n/n} = \|A\|$. Значит $r_\sigma(A) \leqslant \|A\|$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$, где X — комплексное банахово пространство. Если $r_\sigma(A) < 1$, то оператор $I - A$ непрерывно обратим в ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ сходится абсолютно. Если $r_\sigma(A) > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A^k$ расходится.*

Доказательство. Воспользуемся следствием из признака Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ (см. [18]): пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_k} = l$; если $l < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$ сходится; если же $l > 1$, то этот ряд расходится.

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|A^k\|$. Согласно теореме 1 существует $\lim\limits_{k\to\infty \sqrt[k]{\|A^k\|}} = r_\sigma(A)$. Если $r_\sigma(A) < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$ сходится и, значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ сходится абсолютно. Пусть S — его сумма. Как и в доказательстве теоремы п. 12.4, убеждаемся, что S служит правым и левым обратным к $I - A$. Следовательно, $I - A$ непрерывно обратим и $S = (I-A)^{-1}$. Пусть $r_\sigma(A) > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера, $\|A^k\|^{1/k} > 1$, т. е. $\|A^k\| > 1$. Но тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Теорема доказана.

Следствие. *Если для некоторого* m $\|A^m\| < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ *сходится.*

Действительно, $r_\sigma(A) = \inf_{n\geqslant 1} \|A^n\|^{1/n} \geqslant \|A^m\|^{1/m} < 1$.

Применим теперь понятие спектрального радиуса $r_\sigma(A)$ для уточнения теоремы 2 п. 24.1 о резольвентном множестве $\rho_\sigma(A)$.

Теорема 3. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(X)$, X — *комплексное банахово пространство. Если* $|\lambda| > r_\sigma(A)$, *то* $\lambda \in \rho(A)$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathcal{L}(X)$ ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k$. Если $|\lambda| > r_\sigma(A)$, то

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda^{-k-1}A^k\|^{1/k} = |\lambda|^{-1} \lim_{k\to\infty} |\lambda^{-1}|^{1/k} \|A^k\|^{1/k} = |\lambda^{-1}| r_\sigma(A) < 1.$$

По упомянутому выше следствию из признака Коши числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\lambda^{-k-1}A^k\|$ сходится и, значит, ряд $-\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}A^k$ сходится абсолютно. Обозначим через $S(\lambda)$ его сумму (при $|\lambda| > r_\sigma(A)$),а через $S_n(\lambda)$ — его n-ю частичную сумму. Легко проверить, что

$$S_n(\lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I) S_n(\lambda) = I - \lambda^{-n-1}A^{n+1}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в предположении, что $|\lambda| > r_\sigma(A)$, получаем

$$S(\lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I) S(\lambda) = I.$$

Следовательно, $A - \lambda I$ непрерывно обратим, т. е. $\lambda \in \rho(A)$. Кроме того, $S(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(A)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $K(t, s)$ — непрерывная функция двух переменных в треугольнике $\Delta = \{t, s : \ a \leqslant t \leqslant b\}$. Рассмотрим в $C[a, b]$ интегральный оператор Вольтерра

$$y(t) = (Kx)(t) = \int\limits_a^t K(t, s) x(s) ds.$$

Найдем спектральный радиус $r_\sigma(K)$. Положим $k = \max\limits_{a\leqslant t,\, s\leqslant b} |K(t, s)|$ и рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$:

$$x_1(t) = \int\limits_a^t K(t, s) x(s) ds, \quad x_2(t) = \int\limits_a^t K(t, s) x_1(s), \ \ldots, \ x_n(t) =$$
$$= \int\limits_a^t K(t, s) x_{n-1}(s) ds, \ \ldots,$$

где $x(t) \in C[a, b]$. Последовательно получаем оценки

$$|x_1(t)| \leqslant \int_a^t |K(t, s)||x(s)|ds \leqslant k(t-a) \max_{[a, b]} |x(t)| = k(t-a)\|x\|,$$

$$|x_2(t)| \leqslant k \int_a^t k(s-a)ds\|x\| = k^2 \frac{(t-a)^2}{2}\|x\|,$$

. . . .

$$|x_n(t)| \leqslant k \int_a^t k^{n-1} \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} ds = k^n \frac{(t-a)^n}{n!}\|x\|,$$

. . . .

Замечая, что $x_n(t) = (K^n x)(t)$, получаем неравенство

$$\|K^n x\| \leqslant \frac{k^n(b-a)^n}{n!}\|x\|, \text{ т. е. } \|K^n\| \leqslant \frac{k^n(b-a)^n}{n!}.$$

Следовательно,

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{1/n} = 0,$$

так как $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Итак, все точки $\lambda \neq 0$ комплексной плоскости являются точками резольвентного множества интегрального оператора Вольтерра. Что касается точки $\lambda = 0$, то это единственная точка спектра оператора K. Описание его области значений $R(K*)$ мы здесь проводить не будем, но ясно, что $R(K) \neq X$, ибо если $y \in R(K)$, то $y(a) = 0$.

24.3. Резольвента как аналитическая оператор-функция. Напомним, что оператор-функция $A(\lambda)$ называется *аналитической в точке* λ_0 если она разлагается в некоторой окрестности точки λ_0 в степенной ряд:

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\lambda - \lambda_0)^k,$$

сходящийся (по норме $\mathcal{L}(X)$) в этой окрестности.

Пусть A — линейный оператор, действующий в X, с плотной в X областью определения $D(A)$. Рассмотрим при $\lambda \in \rho(A)$ резольвенту A:

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Согласно формуле (1) (см. доказательство теоремы 1 п. 24.1), если $\lambda_0 \in \in \rho(A)$, то ряд

$$R_\lambda(A) = [I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1} R_{\lambda_0}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}(A) \quad (1)$$

сходится в круге $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$. Следовательно, $R_{\lambda_0}(A)$ — аналитическая функция λ в любой точке $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда, в соответствии с теоремой 3 п. 24.2 при $|\lambda| > r_0(A)$ имеет место равенство

$$R_\lambda(A) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} A^k, \tag{2}$$

которое представляет собой разложение $R_\lambda(A)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $\lambda = \infty$. Отсюда, в частности, следует, что бесконечно удаленная точка также является регулярной точкой, т. е. точкой $\rho(A)$ (см. [19]).

Из теоремы п. 24.1 в сочетании с теоремой п. 12.5 вытекает более слабый результат о справедливости разложения (2) при всех λ, $|\lambda| > \|A\|$.

Формула (2) приводит к следующему интересному выводу.

Теорема. *Если $A \in \mathcal{L}(X)$, то $\sigma(A)$ — непустое множество.*

Доказательство. Допустим, что спектр $\sigma(A)$ пуст. Для всяких $x \in X$ и $f \in X*$ можно рассмотреть числовую функцию комплексного переменного λ:

$$\varphi(\lambda) = \langle R_\lambda(A)x,\ f\rangle.$$

Заметим, что

$$\left|\langle R_\lambda x,\ f\rangle + \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k-1}\langle A^k x,\ f\rangle\right| \leqslant \left\|R_\lambda(A) + \sum_{k=0}^{n} \lambda^{-k-1} A^k\right\| \|x\|\,\|f\|.$$

Следовательно, из (2) вытекает, что

$$\varphi(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1}\langle A^k x,\ f\rangle.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ аналитична на всей комплексной плоскости и $\varphi(\infty) = 0$. По теореме Лиувилля (см [19]) $\varphi(\lambda) \equiv 0$. Вследствие произвольности f $R_\lambda(A)x \equiv 0$, а вследствие произвольности $x R_\lambda(x) = (A - \lambda I)^{-1} = 0$. Это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 25. Интегрирование абстрактных функций в банаховом пространстве

25.1. Существование интеграла Римана абстрактной непрерывной функции. Перенесем известное из курса математического анализа понятие интеграла Римана на случай абстрактных непрерывных функций. Пусть $x(t)$ — функция, определенная и непрерывная на $[a,\ b]$, со значениями в банаховом пространстве X.

Определение 1. Функция $x(t)$ называется *равномерно непрерывной* на $[a,\ b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех t', $t'' \in [a,\ b]$ и таких, что $|t' - t''| < \delta$, выполняется неравенство $\|x(t') - x(t'')\| < \varepsilon$.

Упражнение. Покажите, что функция, равномерно непрерывная на отрезке непрерывна на этом отрезке.

Лемма 1. *Если абстрактная функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Рассмотрим числовую функцию двух переменных $\varphi(t, s) = \|x(t) - x(s)\|$. Она определена и непрерывна в квадрате $Q = [a, b] \times [a, b]$. На плоскости E^2 все нормы эквивалентны. Воспользуемся нормой кубической:

$$\left\| \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \right\| = \max(|t|, |s|).$$

Непрерывность функции $\varphi(t, s)$, действующей из $Q \subset E^2$ в E^1, поскольку Q — замкнутое ограниченное множество в E^2, влечет, согласно теореме Кантора (см. [18]), равномерную непрерывность $\varphi(t, s)$ на Q. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно определить $\delta > 0$ так, что если $|t' - t''| < \delta$, $|s' - s''| < \delta$, $(t', s') \in Q$, $(t'', s'') \in Q$, то $|\varphi(t', s') - \varphi(t'', s'')| < \varepsilon$. В частности, можно принять $s' = s'' = t''$. Тогда $\varphi(t'', s'') = 0$ и мы получаем, что по $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$, такое, что, как только $|t' - t''| < \delta$, сразу же $|\varphi(t', t'')| = \|x(t') - x(t'')\| < \varepsilon$. Доказана равномерная непрерывность $x(t)$ на $[a, b]$, а с ней и лемма 1.

Переходим к определению интеграла Римана. Пусть $\tau = \{\tau_i\}_0^N$ — разбиение $[a, b]$, т. е. набор точек $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$. Отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ будем называть *отрезками разбиения* τ. Пусть $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ — их длины, а $\lambda(\tau) = \max\limits_{\Delta t_i}$ — мелкость разбиения τ. На каждом отрезке разбиения $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$ выберем по точке θ_i. Эти точки $\theta_1, \ldots, \theta_N$ в дальнейшем для кратности будем называть *промежуточными точками*. Составим интегральную сумму Римана абстрактной функции $x(t)$, заданной на $[a, b]$:

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x;\ \theta_1^{(n)}, \ldots, \theta_{N_n}^{(n)}) = r.$$

При выполнении этих условий элемент r называется *интегралом Римана* функции $x(t)$ на $[a, b]$ и обозначается $r = \int\limits_a^b x_t dt$. Таким образом,

$$\int\limits_a^b x(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} x(\theta_i^{(n)})\Delta t_i^{(n)},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\tau_n) = 0$ (ср. [18]).

Ниже будет установлена интегрируемость по Риману на отрезке $[a, b]$ любой непрерывной на $[a, b]$ абстрактной функции $x(t)$. Докажем предварительно две вспомогательные леммы. Всюду ниже в этом пункте число $\delta = \delta(\varepsilon)$ берется из определения 1 равномерной непрерывности $x(t)$ (см. лемму 1) на $[a, b]$. Это гарантирует нам, что если $\lambda(\tau) < \delta$, то $\|x(t_i') - x(t_i'')\| < \varepsilon$ для любых t_i', t_i'', принадлежащих $[t_{i-1}, t_i]$ — i-му отрезку разбиения τ.

Пусть дано разбиение τ отрезка $[a,\, b]$. Составим разбиение τ' того же отрезка, которое называется *измельчением* разбиения τ. Пусть $[t_{i-1},\, t_i]$ — отрезок разбиения τ. Рассмотрим его разбиение $\tau_i = \{t_i^j\}_{j=0}^{N_i}$ $(t_{i-1} = t_i^0 < t_i^1 < \ldots < t_i^{N_i} = t_i)$:

$$\Delta t_i^j = t_i^j - t_i^{j-1}, \quad j = 1,\, \ldots,\, N_i, \quad \sum_{j=1}^{N_i} \Delta t_i^j = \Delta t_i. \tag{2}$$

Но каждом отрезке $[t_{i-1},\, t_i]$ разбиения τ_i фиксируем промежуточную точку θ_i^j. Составим интегральную сумму Римана

$$\sigma_{\tau'} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x(\theta_i^j)\Delta t_i^j. \tag{3}$$

Лемма 2. Пусть τ — разбиение $[a,\, b]$ с $\lambda(t) < \delta$, σ_τ — сумма Римана $x(t)$ на $[a,\, b]$. Пусть τ' — измельчение τ, а σ_τ — соответствующая ему сумма Римана. Тогда

$$\|\sigma_\tau - \sigma_{\tau'}\| < \varepsilon(b-a).$$

Доказательство. Заметим сначала, что интегральную сумму Римана $\sigma(\tau)$ (см. (1)) с учетом формул (2) можно записать в виде

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_i} x(\theta_i)\Delta t_i^j.$$

Вычитая отсюда равенство (3) и учитывая, что $\theta_i \in [t_{i-1},\, t_i]$ и $\theta_i^j \in [t_{i-1},\, t_i]$ $(0 \leqslant j \leqslant N_i)$, а значит, $|\theta_i - \theta_i^j| < \delta$, вследствие равномерной непрерывности $x(t)$ на $[a,\, b]$ получаем

$$\|\sigma_\tau - \sigma_{\tau'}\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_i} \|x(\theta_i) - x(\theta_i^j)\|\Delta t_i^j < \varepsilon(b-a).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть τ_1 и τ_2 — произвольные разбиения $[a,\, b]$, удовлетворяющие условиям $\lambda(\tau_1) < \delta$, $\lambda(\tau_2) < \delta$, а σ_{τ_1} и σ_{τ_2} — соответствующие им суммы Римана с произвольно выбранными промежуточными точками. Тогда $\|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}\| < 2\varepsilon(b-a)$.*

Доказательство. Составим $\tau = \tau_1 \bigcup \tau_2$. При этом $\tau \supset \tau_1$, $\tau \supset \tau_2$, и, следовательно, τ является измельчением и τ_1 и τ_2. Используя лемму 2, получаем утверждение леммы 3:

$$\|\sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2}\| \leqslant \|\sigma_{tau_1} - \sigma_\tau\| + \|\sigma_\tau - \sigma_{\tau_2}\| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon(b-a) = 2\varepsilon(b-a).$$

Теорема. *Если абстрактная функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $\{\tau_n\}$ — произвольная последовательность разбиений $[a,\, b]$ с мелкостью разбиений $\lambda(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Фиксируя при каждом n промежуточные точки, составим последовательность $\{\sigma_n\}$ интегральных сумм Римана функции $x(t)$. Так как $\lambda(\tau_n) \to 0$, $n \to \infty$, то можно найти номер $N = N(\delta)$ такой, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство $\lambda(\tau) < \delta$. (Напоминаем, что $\delta = \delta(\varepsilon)$ берем из определения 1 равномерной непрерывности $x(t)$.)

Согласно лемме 3 для всех $n > N$ и при любом натуральном p мы будем иметь $\|\sigma_{n+p} - \sigma_n\| < 2\varepsilon(b-a)$. Это означает, что $\{\sigma_n\}$ фундаментальна в X. Вследствие полноты X существует элемент $r \in X$, к которому $\{\sigma_n\}$ сходится при $n \to \infty$. Покажем, что r не зависит от точки выбора последовательности разбиений и выбора промежуточных точек. Как и выше, получаем $\sigma_{\tau'_n} \to r'$, $n \to \infty$. Образуем смешанную последовательность

$$\sigma_{\tau_1},\ \sigma_{\tau'_1},\ \sigma_{\tau_2},\ \sigma_{\tau'_2},\ \ldots,\ \sigma_{\tau_n},\ \sigma_{\tau'_n},\ \ldots$$

Она тоже сходится. Ее предел равен, с одной стороны, r, как предел ее подпоследовательности с нечетными номерами, а с другой стороны он равен r', как предел ее подпоследовательности с четными номерами. Значит, $r = r'$. Теорема доказана.

25.2. Свойства интеграла Римана. Перечислим основные свойства интеграла Римана для абстрактных, непрерывных функций на $[a, b]$.

1. *Если* $\varphi(t)$ — *скалярная, непрерывная на* $[a, b]$ *функция, а* $x_0 \in X$ — *некоторый элемент, то*

$$\int_a^b x_0\varphi(t)dt = x_0\int_a^b \varphi(t)dt.$$

Доказательство.

$$\sigma_\tau(x_0\varphi) = \sum_{k=1}^{N} x_0\varphi(\theta_k)\Delta t_k = x_0\sum_{k=1}^{N} \varphi_{k=1}^{N}\varphi(\theta_k)\Delta t_k = x_0\sigma_\tau(\varphi).$$

При $\lambda(\tau) \to 0$ получаем доказываемое равенство.

2. $\displaystyle\int_a^b \lambda x(t)dt = \lambda\int_a^b x(t)dt + \int_a^b y(t)dt.$

Действительно, $\sigma_\tau(\lambda x) = \lambda\sigma(\tau)(x)$, откуда и следует свойство 2.

3. $\displaystyle\int_a^b [x(t) + y(t)]dt = \int_a^b x(t)dt\int_a^b y(t)dt.$

Для доказательства достаточно заметить, что $\sigma_\tau(x+y) = \sigma_\tau(x)+\sigma_\tau(y)$.

4. *Для всякого* $c \in (a, b)$

$$\int_a^b x(t)dt = \int_a^c x(t)dt + \int_c^b x(t)dt.$$

Доказательство. Пусть τ_1 — разбиение $[a,\, c]$, τ_2 — разбиение $[c,\, a]$, а $\tau = \tau_1 \bigcup \tau_2$ — разбиение $[a,\, b]$. Тогда $\sigma_\tau(x) = \sigma_{\tau_1}(x) + \sigma_{\tau_2}(x)$. Если $\lambda(\tau_1) \to 0$ и $\lambda(\tau_2) \to 0$, то и $\lambda(\tau)\tau \to 0$ и в пределе получаем свойство 4.

5. $\left\| \int\limits_a^b x(t)dt \right\| \leqslant \int\limits_a^b \|x(t)\| dt.$

Для доказательства достаточно заметить, что $\|\sigma_\tau(x)\| \leqslant \sigma_\tau(\|x\|)$.

6. *Пусть для элементов $x \in X$ определено умножение справа* (см. п. 11.7) *на элементы $y \in Y$ также банахова пространства. Тогда*

$$\int\limits_a^b x(t)dty = \int\limits_a^b x(t)ydt.$$

Доказательство следует из равенства

$$\sigma_\tau(x)y = \sum_{k=1}^{N} x(\theta_k)\Delta t_k y = \sum_{k=1}^{N} x(\theta_k)y\Delta t_k = \sigma_\tau(xy).$$

Из определения умножения следует, что функция $x(t)y$ непрерывна на $[a,\, b]$ (проверьте!).

7. *Пусть для элементов $x \in X$ определено умножение слева на элементы $z \in Z$ также банахова пространства. Тогда*

$$z\int\limits_a^b x(t)dt = \int\limits_a^b zx(t)dt.$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 6.

8. *Функция $u(t) = \int\limits_a^b x(s)ds$ непрерывно дифференцируема на $[a,\, b]$, и* $u'(t) = x(t)$, $t \in [a,\, b]^a$.

Доказательство.

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - x(t) \right\| \leqslant \frac{1}{|h|} \left| \int\limits_t^{t+h} \|x(s)-x(t)\| ds \right| < \varepsilon,$$

если $|h| < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ взято из определения непрерывности $x(t)$ в точке t; $u'(t)$ непрерывна, ибо такова $x(t)$.

9. *Пусть $x(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a,\, b]$; тогда справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$\int\limits_a^b x'(t)dt = x(b) - x(a).$$

Доказательство. Для элементов пространства X определено умножение справа на элементы сопряженного пространства $X*$. Для любого $f \in X*$ имеем по свойству 6

$$\left\langle \int\limits_a^b x'(t)dt,\, f \right\rangle = \int_a^b \langle x'(t),\, f\rangle dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt}\langle x(t),\, f\rangle dt = \langle x(t),\, f\rangle|_a^b =$$
$$= \langle x(b),\, f\rangle - \langle x(b),\, f\rangle = \langle x(b) - x(a),\, f\rangle,$$

ибо 0 имеет место для скалярных функций. Следовательно, $\langle x,\, f\rangle = 0$ для любого $f \in X*$, где $z = \int_a^b x'(t)dt - x(b) + x(a)$. Это возможно только при $z = 0$, что и требовалось доказать.

Отметим в заключение частные случаи свойств 6, 7:

$$\int\limits_a^b A(t)dtx = \int\limits_a^b A(t)xdt, \quad \text{где} \quad A(t) \in \mathcal{L}(X,\, Y), \quad x \in X,$$

$$\int\limits_a^b A(t)dtB = \int\limits_a^b A(t)Bdt, \quad \text{где} \quad A(t) \in \mathcal{L}(X,\, Y), \quad B \in \mathcal{L}(Z,\, X),$$

$$C\int\limits_a^b A(t)dt = \int\limits_a^b CA(t)dt, \quad \text{где} \quad A(t) \in \mathcal{L}(X,\, Y), \quad C \in \mathcal{L}(Z,\, X).$$

Если два свойства интеграла Римана предлагаются в виде задач.

Задача 1. Пусть $x(t)$ непрерывна на $[a,\, b]$, а числовая функция $t = \varphi(\sigma)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\, \beta]$, причем $a = \varphi(\alpha) \leqslant \leqslant \varphi(\sigma) \leqslant \varphi(\beta) = b$. Докажите формулу замены переменной

$$\int\limits_a^b x(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta x[\varphi(\sigma)]\varphi'(\sigma)d\sigma.$$

Задача 2. Пусть для элементов $x \in X$ определено умножение справа на элементы $y \in Y$ (X, Y — банаховы пространства). Пусть, кроме того, абстрактные функции $x(t)$ со значениями в Y непрерывно дифференцируемы на $[a,\, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b x(t)y'(t)dt = x(t)y(t)|_a^b - \int\limits_a^b x'(t)y(t)dt.$$

25.3. Абстрактные функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса. В этом пункте понятие интеграла Римана будет расширено. Возникающее при этом понятие интеграла Стилтьеса (точнее интеграла

Римана–Стилтьеса) также находит полезные применения. Оно будет, в частности, использовано нами в следующем параграфе для построения спектральных разложений самосопряженных операторов.

Введем сначала понятие абстрактной функции ограниченной вариации. Пусть на $[a,\ b]$ задана абстрактная функция $y(t)$ со значениями в банаховом пространстве Y. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{N}$ — разбиение $[a,\ b]$. Составим следующую сумму:

$$V_\tau(y) = \sum_{i=1}^{N} \|y(t_i) - y(t_{i-1})\|.$$

Определение 1. $\bigvee_a^b = \sup_\tau V_\tau(y)$ называется *полной вариацией* функции $y(t)$ на $[a,\ b]$.

Определение 2. Если $\bigvee_a^b(y) < +\infty$, то будем называть функцию $y(t)$ *абстрактной функцией ограниченной вариации.*

Упражнение 1. Пусть абстрактная функция $y(t)$ удовлетворяет на $[a,\ b]$ условию Липшица, т. е. для любых $t',\ t'' \in [a,\ b]$ $\|y(t') - y(t'')\| \leqslant \leqslant M|t' - t''|$, где $M = const$. Докажите, что $\bigvee_a^b \leqslant M(b-a)$ и, значит, $y(t)$ есть функция ограниченной вариации.

Упражнение 2. Докажите, что если абстрактная функция $y(t)$ имеет на $[a,\ b]$ ограниченную производную, то она является функцией ограниченной вариации.

Теперь мы сможем дать определение интеграла Стилтьеса от абстрактной непрерывной функции $x(t)$ по функции $y(t)$.

Пусть X, Y и Z — банаховы пространства, причем для элементов $x \in X$ определено умножение справа на элементы $y \in Y$ (см. п. 11.7) со значениями в Z ($x \cdot y \in Z$). Пусть далее, на $[a,\ b]$ заданы две абстрактные ограниченные функции $x(t)$ со значениями в X и $y(t)$ со значениями в Y.

Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{N}$ — разбиение $[a,\ b]$, а $\theta_i \in [t_{i-1},\ t_i]$ $(i = 1,\ \ldots,\ N)$ — промежуточные точки (см. п. 25.1). Составим интегральную сумму Стилтьеса

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x;\ y;\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_N) = \sum_{i=1}^{N} x(\theta_i)[y(t_i) - y(t_{i-1})]. \tag{1}$$

Определение 3. Функция $x(t)$ называется *интегрируемой по Стилтьесу на* $[a,\ b]$ *относительно функции* $y(t)$, если существует элемент $s \in Z$ такой, что для любой последовательности разбиений

$$\tau_n = \{t_i^{(n)}\}_{i=0}^{N_n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

для которой мелкость разбиения $\lambda(\tau_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и для любого набора промежуточных точек $\theta_i^{(n)}$ $(i = 1,\ \ldots,\ N_n)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n} = s.$$

При выполнении этих условий элемент s называется *интегралом Стилтьеса функции* $x(t)$ *на* $[a, b]$ *относительно функции* $y(t)$ и обозначается

$$s = \int_a^b x(t)dy(t).$$

Заметим, что рассмотренный в пп. 25.1, 25.2 интеграл Римана представляет собой частный случай интеграла Стилтьеса при $Y = E^1$, $Z = X$ и $y(t) \equiv t$. Справедлива следующая теорема о существовании интеграла Стилтьеса.

Теорема. *Если абстрактная функция $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$, а абстрактная функция $y(t)$ является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то $x(t)$ интегрируема на $[a, b]$, то $x(t)$ интегрируема на $[a, b]$ по Стилтьесу относительно $y(t)$.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы п. 25.1 о существовании интеграла Римана. При этом вместо Δt_i в интегральных суммах появляются $y(t_i) - y(t_{i-1})$. Предлагаем читателю провести эти рассуждения самостоятельно. Отметим некоторые свойства интеграла Стилтьеса:

1) $\displaystyle\int_a^b x_0 dy(t) = x_0 y\Big|_a^b = x_0[y(b) - y(a)]$;

2) если $x(t) = x_0\varphi(t)$, где $x_0 \in X$, а $\varphi(t) \in C[a, b]$, то $\displaystyle\int_a^b x_0\varphi(t)dy(t) =$

$$= x_0 \int_a^b \varphi(t)dy(t);$$

3) если $y(t) = y_0\psi(t)$, где $y_0 \in Y$, а $\psi(t)$ — скалярная функция ограниченной вариации, то $\displaystyle\int_a^b x(t)d[y_0\psi(t)] = \left(\int_a^b x(t)d\psi(t)\right)_0$;

4) $\displaystyle\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]dy(t) = \int_a^b x_1(t)dy(t) + \int_a^b x_2(t)dy(t)$;

5) $\displaystyle\int_a^b x(t)d[y_1(t) + y_2(t)] = \int_a^b x(t)dy_1(t) + \int_a^b x(t)dy_2(t)$;

6) справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b x(t)dy(t) + \int_a^b y(t)dx(t) = x(t)y(t)|_a^b$$

(здесь предполагается, что обе абстрактные функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на $[a, b]$ и являются на $[a, b]$ функциями ограниченной вариации);

7) если $a < c < b$, то $\int\limits_a^b x(t)dy(t) = \int\limits_a^c x(t)dy(t) + \int\limits_a^b x(t)dy(t)$;

8) $\left\| \int\limits_a^b x(t)dy(t) \right\| \leqslant \int\limits_a^b \|x(t)\| d \bigvee\limits_a^b (y) \leqslant \max\limits_{[a,\, b]} \|x(t)\| \bigvee\limits_a^b (y)$.

Упражнение 3. Докажите свойства 1)–8) в предположениях, что непрерывны функции $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, а $y(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ суть функции ограниченной вариации.

Упражнение 4. Пусть $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$, функция $y(t)$ есть суть функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Пусть, далее, $t = \omega(\tau)$ — строго возрастающая, непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, причем $\omega(\alpha) = a$, $\omega(\beta) = b$. Докажите, что функция $y(\omega(\tau))$ есть функция ограниченной вариации на $[\alpha, \beta]$, и получите формулу замены переменной в интеграле Стилтьеса

$$\int\limits_a^b x(t)dy(t) = \int\limits_\alpha^\beta x(\omega(\tau))dy(\omega(\tau)).$$

Заметим, что абстрактная функция $y(t)$ в интеграле Стилтьеса может быть разрывной.

Упражнение 5. Пусть $y(t)$ кусочно постоянна: на i-м промежутке разбиения $\tau = \{t_i\}_{i=0}^N$, т. е. на $[t_{i-1}, t_i)$, пусть $y(t) = y_i \in Y$ $(i = 1, \ldots, N)$. Докажите, что $y(t)$ есть функция ограниченной вариации и для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $x(t) \in X$

$$\int\limits_a^b x(t)dy(t) = \sum_{i=1}^{N-1} x(t_i)(y_{i+1} - y_i).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл Стилтьеса сходится к конечной сумме.

25.4. Несобственные и криволинейные интегралы. Введенные выше понятия интегралов Римана и Стилтьеса, как и в математическом анализе, допускают различные обобщения.

Так, интеграл от кусочно непрерывной функции $x(t)$ (т. е. функции, имеющей конечное число точек разрывов 1-го рода) определяется как сумма интегралов по промежуткам непрерывности $x(t)$. Обсудим несколько подробнее понятие несобственного интеграла Римана от абстрактной функции $x(t)$ со значениями в банаховом пространстве X. Пусть она определена на полуоси $[c, +\infty)$ и интегрируема (по Риману) на каждом $[c, b]$. *Несобственным интегралом Римана* функции $x(t)$ на $[c, +\infty)$ называется, по определению, следующий предел, если он существует (по норме пространства X):

$$\int\limits_{c}^{+\infty} x(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} x(t)dt. \tag{1}$$

Аналогично, если $x(t)$ определена на полуоси $(-\infty,\, c]$ и интегрируема на любом $[a,\, c]$, то полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{c} x(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} x(t)dt. \tag{2}$$

Наконец, если абстрактная функция $x(t)$ определена на всей оси $(-\infty,\, +\infty)$ и интегрируема на любом $[a,\, b]$, то, согласно определению,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{c} x(t)dt + \int\limits_{c}^{+\infty} x(t)dt, \tag{3}$$

если оба интеграла справа существуют.

Легко показать, что определение (3) не зависит от выбора точки c.

Если несобственный интеграл существует, то говорят, что он сходится (в противном случае расходится). Если сходится числовой несобственный интеграл от $\|x(t)\|$, то говорят, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

Упражнение 1. Покажите, что если несобственный интеграл (любой из (1), (2), (3)) сходится абсолютно, то он сходится.

Несобственные интегралы Римана обладают теми же свойствами (см. п.25.2, где, возможно, $a = -\infty$ или $b = +\infty$), что и интегралы по $[a,\, b]$, однако следует сделать несколько замечаний. Свойства 1–7 (п. 25.2) имеют место если сходятся интегралы, стоящие в правых частях равенств (неравенства 5). В свойстве 8 нужно требовать сходимости $\int\limits_{-\infty}^{t} x(s)ds$ (при $a = -\infty$). В формуле Ньютона–Лейбница нужно требовать существования пределов $x(+\infty)$, если $b = +\infty$, и $x(-\infty)$, если $a = -\infty$. Аналогично обстоит дело с формулой интегрирования по частям (задача 2 п. 25.2) и с формулой замены переменной (задача 1).

Перейдем к определению криволинейных интегралов (1-го рода). Пусть теперь X — комплексное банахово пространство, и пусть в комплексной плоскости переменной z задана кусочно гладкая кривая Γ (см. [18]). В параметрической форме кривую Γ зададим уравнением $z = z(t)$, где вещественная переменная t пробегает отрезок $[a,\, b]$, если кривая Γ конечна, или полуоси $(-\infty,\, c]$ $[c,\, +\infty)$ или ось $(-\infty,\, +\infty)$, если кривая Γ бесконечна. Все эти типы промежутков будем записывать в виде $[a,\, b]$. Функция $z'(t)$

непрерывна всюду на $[a,\ b]$ за исключением может быть конечного числа точек разрывов 1-го рода, что следует из кусочной гладкости Г. Пусть на Г задана абстрактная функция $x(z)$. Под *криволинейным интегралом* (1-го рода) от функции $x(z)$ по кривой Г понимают следующий интеграл Римана:

$$\int_{\Gamma} x(z)dz = \int_{a}^{b} x(z(t))z'(t)dt. \tag{4}$$

(Интеграл справа будет несобственным, если хоть один из пределов a или b будет бесконечным.)

Криволинейный интеграл по кривой Г от абстрактной функции обладает обычными свойствами криволинейного интеграла 1-го рода (см. [18]). В частности, при изменении на Г интеграл меняет знак.

Можно показать, что значение интеграла (4) не зависит от способа параметрического задания кривой Г, при котором сохраняется направление на Г. Это следует из формулы замены переменной.

В последующем изложении (п. 26.6) нам понадобится несобственный интеграл Стилтьеса в следующем частном случае.

Пусть $X = Y = Z = E^1$ (см. п. 25.3) — одномерное евклидово пространство, т. е. ось $(-\infty,\ +\infty)$. Пусть, далее, на E^1 задана, возможно, неограниченная функция $x(t)$ со значениями в E^1, неубывающую, непрерывную справа и ограниченную на E^1.

Упражнение 2. Покажите, что $y(t)$ есть функция ограниченной вариации на всяком $[a,\ b]$ и, значит, существует интеграл Стилтьеса $\int_{a}^{b} x(t)dy(t)$ по любому отрезку $[a,\ b]$.

Под *несобственным интегралом Стилтьеса* функции $x(t)$ по функции $y(t)$ на $(-\infty,\ +\infty)$ будем понимать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dy(t) = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x(t)dy(t) + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x(t)dy(t). \tag{5}$$

Если несобственный интеграл (5) существует, то он называется *сходящимся* (в противном случае — расходящимся). Если же сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)dy(t)|$, то интеграл Стилтьеса (5) называется *абсолютно сходящимся.*

Упражнение 3. Покажите, что из абсолютной сходимости интеграла Стилтьеса вытекает его сходимость.

Оказывается, что при сделанных выше относительно функций $x(t)$ и $y(t)$ предположениях абсолютная сходимость интеграла Стилтьеса равносильна абсолютной сходимости некоторого ряда. Разобьем ось $(-\infty,\ +\infty)$

на частичные полуинтервалы $[t_{k-1}, t_k[$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ так, чтобы

$$\omega = \sup_k (M_k - m_k) < +\infty, \tag{6}$$

где $M_k = \sup_{[t_{k-1}, t_k[} x(t)$, $m_k = \inf_{[t_{k-1}, t_k[} x(t)$.

Упражнение 4. Покажите, что из равномерной непрерывности $x(t)$ на $(-\infty, +\infty)$ следует, что такое разбиение оси $(-\infty, +\infty)$ существует для любого $\omega > 0$.

Введем теперь промежуточные точки $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ и составим ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\theta_k)[y(t_k) - y(t_{k-1})]. \tag{7}$$

Имеет место следующая теорема (доказательство смотри в [31]).

Теорема. *Ряд* (7) *и несобственный интеграл* (5) *сходятся абсолютно одновременно. При этом, если сходится абсолютно ряд для всех* $\omega > 0$, *то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dy(t) = \lim_{\omega \to 0} \sum_{-\infty}^{+\infty} x(\theta_k)[y(t_k) - y(t_{k-1})].$$

§ 26. Спектральные разложения самосопряженных операторов

В этом параграфе для самосопряженного ограниченного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, будет получено интегральное представление в виде интеграла Стилтьеса. Такое представление называется спектральным разложением самосопряженного оператора. Важную роль при этом будет играть некоторая оператор-функция $P(\lambda)$, которая называется спектральной функцией оператора A. Значения $P(\lambda)$ суть ортопроекторы в H, они тесно связаны со спектром A. Формула спектрального разложения представляет собой гибкий аналитический аппарат для изучения самосопряженных операторов и широко используется во всех задачах, связанных с самосопряженными операторами.

26.1. Спектральная функция самосопряженного оператора. Пусть A — самосопряженный оператор из $\mathcal{L}(X)$, и пусть для каждого числа $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ задан в H ортопроектор $P(\lambda)$.

Определение 1. Оператор-функция $P(\lambda)$ называется *спектральной функцией* оператора A, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(\lambda) = 0$ при всех $\lambda < m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$,
$P(\lambda) = I$ при всех $\lambda \geqslant M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$;

2) $P(\lambda)$ — неубывающая функция λ, т. е. если $\lambda < \mu$, то $P(\lambda) \geqslant P(\mu)$;

3) $P(\lambda)$ непрерывна справа в смысле сильной сходимости в H, т. е. для всех $x \in H$

$$\lim_{\mu \to \lambda+0} P(\mu)x = P(\lambda)x;$$

4) при каждом λ оператор $P(\lambda)$ перестановочен с каждым оператором из $\mathcal{L}(H)$, перестановочным с A;

5) при всяком $\varepsilon > 0$ справедлива формула спектрального разложения в виде интеграла Стилтьеса:

$$A = \int\limits_{m-\varepsilon}^{M} \lambda dP(\lambda). \tag{1}$$

Замечание. Число ε в формуле (1) введено для того, чтобы учесть скачок функции $P(\lambda)$ в точке m.

Упражнение 1. Покажите, что $P(\lambda)$ — функция ограниченной вариации.

Приведем два простейших примера спектральной функции самосопряженного оператора.

Пример 1. Пусть A — самосопряженный оператор в конечномерном комплексном гильбертовом пространстве H размерности n. Оператор A имеет собственные значения (см. п. 23.2), и все они вещественны. Расположим собственные значения A в порядке их возрастания:

$$m = \lambda_1 < \ldots < \lambda_p = M, \quad 1 \leqslant p \leqslant n.$$

Пусть H_i — собственное пространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_i $(i = 1, \ldots, p)$. Справедливо следующее ортогональное разложение:

$$H = H_1 \bigoplus \ldots \bigoplus H_p.$$

Пусть, далее, P_i — ортопроектор H на H_i. Покажем, что спектральная функция оператора A определяется так:

$$P(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lambda < \lambda_1, \\ P_1 & \text{при} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda < \lambda_2, \\ P_1 + P_2 & \text{при} \quad \lambda_2 \leqslant \lambda < \lambda_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ P_1 + P_2 + \ldots + P_{p-1} & \text{при} \quad \lambda_{p-1} \leqslant \lambda < \lambda_p, \\ I & \text{при} \quad \lambda_p < \lambda. \end{cases} \tag{2}$$

Упражнение 2. Проверьте для $P(\lambda)$ свойства 1)–3) определения 1.

Убедимся, что в данном случае справедливо свойство 5), т. е. представление (1). Умножив равенство $I = \sum_{i=1}^{p} P_i$ слева на оператор A, получим

$A=\sum_{i=1}^{p} AP_i$. Но для любого $x \in H$ $P_i x \in H_i$, значит, $AP_i x = \lambda_i P_i x$, т. е. $AP_i = \lambda_i P_i$ $(i = 1, \ldots, p)$. Следовательно, имеет место равенство

$$A=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i. \tag{3}$$

Это и есть искомое спектральное разложение оператора A, ибо, в соответствии с упражнением 5 п. 25.3, формулу (3) можно записать в виде (1), где $P(\lambda)$ определяется формулой (2).

Перейдем к проверке свойства 4). Пусть $\{\varphi_{ik}\}_{k=1}^{l_i}$ — ортонормированный базис в H_i. Тогда

$$P_i=\sum_{k=1}^{l_i}(\cdot,\, \varphi_{ik})\varphi_{ik}.$$

Для любого $x \in H$ имеем

$$P_i Ax=\sum_{k=1}^{l_i}(Ax,\, \varphi_{ik})\varphi_{ik}=\sum_{k=1}^{l_i}(x,\, A\varphi_{ik})\varphi_{ik}=$$

$$=\lambda_i\sum_{k=1}^{l_i}(x,\, \varphi_{ik})\varphi_{ik}=\lambda_i P_i x = AP_i x.$$

Следовательно, P_i перестановочен с A, откуда и $P(\lambda)$ перестановочна с A.

Пусть теперь $C \in \mathcal{L}(H)$ — произвольный оператор, перестановочный с A. Покажем, что P_i также перестановочен с C. Для этой цели докажем следующую лемму.

Лемма. *Если C перестановочен с A, то $CH_i \subset H_i$, $C*H_i \subset H_i$, причем*

$$C\varphi_{ik}=\sum_{s=1}^{l_i}\gamma_{iks}\varphi_{iks}, \quad C*\varphi_{ik}=\sum_{s=1}^{l_i}\gamma*_{iks}\,\varphi_{is}, \tag{4}$$

где матрица $\|\gamma*_{iks}\|$ эрмитово-сопряжена к матрице $\|\gamma_{kis}\|$, т. е. $\gamma*_{iks}=\bar{\gamma}_{isk}$.

Доказательство. Так как $AC = CA$, то, значит, и $(AC)* = (CA)*$, откуда вследствие самосопряженности имеем $AC* = C*A$. Но тогда $ACP_i x = CAP_i x = \lambda_i CP_i x$, $AC*P_i x = C*AP_i x = \lambda_i C*P_i x$. Это означает, что $CH_i \subset H_i$ и $C*H_i \subset H_i$.

Далее из формул (4) имеем

$$\gamma_{ikl}=(C\varphi_{ik},\, \varphi_{il}),$$

$$\gamma*_{ikl}=(C*\varphi_{ik},\, \varphi_{il})=(\varphi_{il},\, C\varphi_{il})=(\overline{C\varphi_{il}},\, \varphi_{ik})=\bar{\gamma}_{ilk}.$$

Лемма доказана.

Теперь прямым вычислением с помощью (4), (5) проверяем перестановочность операторов P_i и C:

$$P_iCx = \sum_{k=1}^{l_i}(x,\, C * \varphi_{ik})\varphi_{ik} = \sum_{k=1}^{l_i}\left(x,\, \sum_{s=1}^{l_i}\gamma *_{iks}\,\varphi_{is}\right)\varphi_{ik} =$$
$$= \sum_{k=1}^{l_i}\sum_{s=1}^{l_i}\gamma_{iks}(x,\, \varphi_{is})\varphi_{ik} = \sum_{s=1}^{l_i}(x,\, \varphi_{is})\sum_{k=1}^{l_i}\gamma_{iks}\varphi_{ik} =$$
$$= \sum_{s=1}^{l_i}(x,\, \varphi_{is})C\varphi_{is} = CP_ix.$$

Итак, P_i перестановочны с C, откуда следует, что $P(\lambda)$ также перестановочна с C.

На этом завершается доказательство того факта, что формула (2) действительно определяет спектральную функцию $P(\lambda)$ оператора A. В рассмотренном случае $P(\lambda)$ является кусочно постоянной оператор-функцией, причем она имеет скачки в собственных значениях оператора A.

Для рассмотрения еще одного примера спектральной функции введем следующее определение, обобщающее определение собственного подпространства линейного оператора.

Определение 2. Пусть A — линейный (возможно неограниченный) оператор с областью определения $D(A)$ в банаховом пространстве X и со значениями также в X. Линейное многообразие (подпространство) M в X называется *инвариантным линейным многообразием (инвариантным подпространством)* оператора A, если $AM \subset M$.

Упражнение 3. Покажите, что всякое собственное подпространство линейного оператора является его инвариантным подпространством.

Упражнение 4. Покажите, что подпространства

$$H(0) = 0, \quad H^{(1)} = H_1, \quad H^{(2)} = H_1 \bigoplus H_2,$$
$$H^{(3)} = H_1 \bigoplus H_2 \bigoplus H_3,\; \ldots,\; H^{(p-1)} = H_1 \bigoplus H_2 \bigoplus \ldots \bigoplus H_{p-1},$$
$$H^{(p)} = H,$$

где H_i — собственные подпространства оператора A (см. пример 1), образуют возрастающую цепочку инвариантных подпространств оператора A.

Пример 2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(0,\, 1)$ функций $x(t)$ оператор A, задаваемый формулой

$$Ax = tx(t).$$

Упражнение 5. Покажите, что A — самосопряженный ограниченный оператор в $\mathcal{L}_2(0,\, 1)$.

Упражнение 6. Покажите, что спектр A заполняет весь отрезок $[0,\,1]$, причем собственных значений A не имеет.

Хотя A не имеет собственных подпространств, он имеет инвариантные подпространства. Действительно, пусть при $\lambda \leqslant 0$ $H_\lambda = 0$, при $\lambda \geqslant 1$ $H_\lambda = H$ и при $0 < \lambda < 1$ $H_\lambda = \{x \in \mathcal{L}_2(0,\,1) : \ x(t) \equiv 0, \text{ если } \lambda < t \leqslant 1\}$.

Упражнение 7. Проверьте, что H_λ, $\lambda \in (-\infty,\,+\infty)$, образуют возрастающую цепочку инвариантных подпространств оператора A.

Зададим теперь оператор-функцию $P(\lambda)$: при каждом $\lambda \in (-\infty,\,+\infty)$ $P(\lambda)$ определим как ортопроектор $\mathcal{L}_2(0,\,1)$ на H_λ.

Упражнение 8. Проверьте для $P(\lambda)$ свойства 1)–3) спектральной функции.

Упражнение 9. Докажите перестановочность A с $P(\lambda)$.

Проверку свойства 4) мы опустим. Это, впрочем, может быть сделано позднее из общих соображений. Докажем формулу (1). Пусть $\tau = \{\lambda_i\}_{i=0}^N$ — разбиение отрезка $[0,\,1]$ и $\theta_i \in [\lambda_i,\,\lambda_{i+1}]$ — промежуточные точки. Составим интегральную сумму Стилтьеса:

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{N} \theta_k [P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1})].$$

Проектор $P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1})$ действует на функцию $x(t) \in \mathcal{L}_2(0,\,1)$ следующим образом: $y_k(t) \equiv [P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1})]\ x(t) = x(t)$ на $[\lambda_{k-1},\,\lambda_k]$ и $y_k(t) \equiv 0$ вне $[\lambda_{k-1},\,\lambda_k]$. Оценим по норме $\mathcal{L}_2(0,\,1)$ разность $Ax - \sigma_\tau x = tx(t) - \sigma_\tau x(t)$:

$$\|Ax - \sigma_\tau x\|^2 = \int_0^1 |tx(t) - \sigma_\tau x(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |tx(t) - \theta_k x(t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \max_{[t_{k-1},\,t_k]} |t - \theta_k| \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x(t)|^2 dt = \lambda(\tau)\|x\|^2.$$

где $\lambda(\tau)$ — мелкость разбиения τ. Но тогда $\|A - \sigma\| \leqslant \lambda(\tau)$. Если $\lambda(\tau) \to 0$, то $\sigma_\tau \to A$ в смысле равномерной сходимости операторов. Итак, формула спектрального разложения (1) доказана и в примере 2. Здесь спектральная функция $P(\lambda)$ непрерывна на $(-\infty,\,+\infty)$.

В следующих пунктах этого параграфа будут доказаны существование и единственность спектральной функции для произвольного ограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. В п. 26.2 будет доказано существование квадратного корня из неотрицательного оператора. На этой основе в п. 26.3 будет изучен некоторый специальный ортопроектор. Наконец, в пп. 26.4, 26.5 будет доказана общая теорема о спектральной функции.

26.2. Существование квадратного корня из неотрицательного оператора. Пусть U — самосопряженный оператор. Согласно п. 18.3 оператор U^2 является неотрицательным: $U^2 \geqslant 0$.

Поставим задачу о решении простейшего квадратного уравнения

$$U^2 = A, \tag{1}$$

где A — заданный неотрицательный оператор. Ниже будет показано, что это уравнение имеет неотрицательное решение, которое мы обозначим через $\sqrt{A}$. При этом других неотрицательных решений уравнение (1) не имеет, т. е. в классе неотрицательных операторов задача определения квадратного корня из неотрицательного оператора A всегда имеет единственное решение.

Для доказательства существования $\sqrt{A}$ мы воспользуемся методами последовательных приближений. При этом важную роль будет играть обобщение на случай самосопряженных операторов известного в математическом анализе свойства Вейерштрасса вещественных последовательностей: всякая неубывающая, ограниченная сверху последовательность имеет предел. Прежде всего перенесем на самосопряженные операторы понятия неубывающей последовательности, ограниченной сверху. Для этого воспользуемся определением неравенств между самосопряженных операторов (п. 18.3).

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ самосопряженных операторов *не убывает*, если для любого натурального n справедливо неравенство $A_n \leqslant A_{n+1}$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность самосопряженных операторов $\{A_n\}$ *ограничена сверху ограниченным самосопряженным оператором* C, если для любого номера n $A_n \leqslant C$.

Сделаем теперь два элементарных замечания.

Замечание 1. Для того, чтобы последовательность самосопряженных операторов $\{A_n\}$ была ограничена сверху, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная c такая, что $A_n \leqslant cI$, где I — тождественный оператор.

Действительно, если $A_n \leqslant C$, то для любого $x \in H$

$$(A_n x, x) \leqslant (Cx, x) \leqslant \|C\|(x, x) = (\|C\|Ix, x),$$

т. е. $A \leqslant \|C\|I$. Обратное утверждение очевидно, так как достаточно взять $C = cI$.

Замечание 2. Если $\{\|A_n\|\}$ ограничена (A_n — самосопряженные), то $\{A_n\}$ ограничена сверху.

Действительно,

$$(A_n x, x) \leqslant \|A_n\|(x, x) \leqslant c(x, x) = (cIx, x).$$

Лемма 1 (свойство Вейерштрасса). *Всякая неубывающая, ограниченная сверху последовательность неотрицательных операторов сходится сильно к некоторому неотрицательному оператору.*

Доказательство. Пусть последовательность неотрицательных операторов $\{A_n\}$ не убывает, т. е. $0 \leqslant A_n \leqslant A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$, и ограничена сверху, т. е. $A_n \leqslant cI$ $(n = 1, 2, \dots)$. Рассмотрим последовательность вещественных чисел $\{(A_n x, x)\}$, где $x \in H$ фиксировано. Это последовательность не убывает и ограничена сверху. Поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} (A_n x, x)$. Покажем, что тогда сходится последовательность $\{A_n x\}$. Так как $A_{n+p} - A_n \geqslant 0$ для любых натуральных n и p, то, применяя обобщенное неравенство Коши–Буняковского (см. п. 18.3), получим для любого $y \in H$

$$|(A_{n+p}x - A_n x, y)|^2 \leqslant ((A_{n+p} - A_n)x, x)((A_{n+p} - A_n)y, y) \leqslant \\ \leqslant c\|y\|^2\{(A_{n+p}x, x) - (A_n x, x)\}. \quad (2)$$

Мы воспользовались здесь следующими неравенствами:

$$((A_{n+p} - A_n)x, x) \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant ((A_{n+p} - A_n)y, y) = (A_{n+p}y, y) - (A_n y, y) \leqslant (A_{n+p}y, y) \leqslant c\|y\|^2,$$

$$(A_n y, y) \geqslant 0.$$

В доказанном неравенстве (2) после сокращения получим

$$\|A_{n+p}x - A_n x\|^2 \leqslant c\{(A_{n+p}x, x) - (A_n x, x)\}.$$

Так как последовательность $\{(A_n x, x)\}$ фундаментальна, то отсюда следует, что и $\{A_n x\}$ фундаментальна. Вследствие полноты H существует предел $\{A_n x\}$. Положим

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Линейность оператора A очевидна. Далее, $(A_n x, y) = (x, A_n y)$, откуда при $n \to \infty$ получим $(Ax, y) = (x, Ay)$, т. е. A самосопряжен. Переходя к пределу в неравенстве $0 \leqslant (A_n x, x) \leqslant c(x, x)$, получим $0 \leqslant (Ax, x) \leqslant \leqslant c(x, x)$, откуда $0 \leqslant A \leqslant cI$. Лемма 1 доказана.

Перейдем теперь к задаче извлечения квадратного корня из неотрицательного оператора A. Заметим сначала, что достаточно ограничиться случаем, когда $\|A\| \leqslant 1$ и $A \neq 0$. Общий случай сводится к этому, ибо $A = \|A\|A\|A\|^{-1}$ и если неотрицательный квадратный корень $\sqrt{A/\|A\|}$ уже определен, то, очевидно, $\sqrt{A} = \sqrt{\|A\|}\sqrt{A/\|A\|}$. Итак, рассмотрим уравнение $U^2 = A$, где $0 \leqslant A \leqslant I$. Перейдем в этом уравнении к новой переменной $U = I - V$ и положим $A = I - B$. Для определения V получаем уравнение $I - 2V + V^2 = I - B$, которое запишем в виде

$$V = \frac{1}{2}(B + V^2), \quad (3)$$

где $0 \leqslant B \leqslant I$. Уравнение это будем решать методом последовательных приближений:

$$V_n = \frac{1}{2}(B + V_{n-1}^2), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

с начальным приближением $V_0 = 0$. Найдем несколько первых приближений. Из (4) последовательно получаем $V_1 = B/2$, $V_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V_1^2$, откуда $V_2 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2$, $V_3 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V_2^2$, откуда $V_3 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3 + \frac{1}{128}B^4$. Из этих формул видно, что $0 \leqslant V_1 \leqslant V_2 \leqslant V_3$. Кроме того, V_1, V_2, V_3 являются многочленами относительно B с неотрицательными коэффициентами. Покажем по индукции, что последовательность $\{V_n\}$ неубывающая, ограничена сверху оператором I и состоит из неотрицательных операторов. Действительно, $0 \leqslant V_1 \leqslant B \leqslant 1$. Пусть уже доказано, что $V_1, \ldots, V_{n-1}$ неотрицательны и ограничены сверху I. Тогда

$$0 \leqslant V_n = \frac{1}{2}(B + V_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}(I + I) = I.$$

Покажем теперь, что для любых номеров n $V_n \leqslant V_{n+1}$. Для этого покажем, что $V_{n+1} - V_n$ является многочленом от B с неотрицательными коэффициентами. Отметим сначала что если V_n — многочлен от B с неотрицательными коэффициентами, то таковым будет и $V_{n+1} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}V_n^2$, так как V_n^2 есть многочлен от B с неотрицательными коэффициентами. Далее, $V_2 - V_1$ — многочлен от B с неотрицательными коэффициентами. Согласно методу математической индукции пусть $V_n - V_{n-1}$ — многочлен от B с неотрицательными коэффициентами. Тогда

$$V_{n+1} - V_n = \\ = \frac{1}{2}(B+V_n^2)-\frac{1}{2}(B+V_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(V_n^2-V_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(V_n-V_{n-1})(V_n+V_{n-1}).$$

У п р а ж н е н и е. Докажите, что V_m и V_n перестановочны, пользуясь их перестановочностью с B.

Из полученного равенства вытекает, что $V_{n+1} - V_n$ есть многочлен от B с неотрицательными коэффициентами, как произведение двух таких многочленов.

Итак, $\{V_n\}$ — неубывающая последовательность, причем $0 \leqslant V_n \leqslant I$. По лемме она имеет сильный предел V_0, причем $0 \leqslant V_0 \leqslant I$.

Покажем теперь, что найденный предел V_0 является решением уравнения (3). Для этого установим сначала, что V_n перестановочны с V_0. Так как (см. упражнение) V_n и V_m перестановочны, то для любого $x \in H$ имеем

$$V_n V_m x = V_m V_n x.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$ (слева — пользуясь непрерывностью V_n, а справа — сильной сходимостью V_m на элементе $V_n x$) и получим $V_n V_0 x = V_0 V_n x$, т. е. V_n и V_0 перестановочны. Отсюда

$$V_n^2 x - V_0^2 x = (V_n - V_0)(V_n x - V_0 x)$$

и, значит,

$$\|V_n^2 x - V_0^2 x\| \leqslant \|V_n + V_0\|\, \|V_n x - V_0\| \leqslant 2\|V_n x - V_0 x\|.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ $V_n^2 \to V_0^2$ сильно. Переходя теперь в (4) к пределу при $n \to \infty$ (поточечно), получим $V_0 = \dfrac{1}{2}(B + V_0^2)$.

Возвращаясь к старым обозначениям, получаем корень квадратный из A $(0 \leqslant A \leqslant I)$ в виде

$$\sqrt{A} = I - V_0.$$

Покажем, что найденный неотрицательный корень квадратный единствен. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $A \geqslant 0$; *тогда, если* $(Ax, x) = 0$, *то* $Ax = 0$.

Доказательство. Имеем цепочку равенств

$$0 = (Ax, x) = ((\sqrt{A})^2 x, x) = (\sqrt{A}x, \sqrt{A}x),$$

откуда $\sqrt{A}x = 0$. Применяя $\sqrt{A}$, получим $Ax = 0$. Лемма 2 доказана.

Допустим теперь, что квадратное уравнение $U^2 = A$ имеет два неотрицательных решения $U_1 = \sqrt{A}$ и U_2. Заметим, что $U_2 A = U_2 U_2^2 = U_2^2 U_2 = AU_2$, т. е. U_2 перестановочен с A, а тогда U_2 перестановочен и с U_1. Следовательно,

$$0 = ((U_1^2 - U_2^2)x, (U_1 - U_2)x) = ((U_1 + U_2)y, y) = (U_1 y, y) + (U_2 y, y),$$

где $y = (U_1 - U_2)x$. Отсюда и из неотрицательности U_1 и U_2 имеем, что и $(U_1 y, y) = 0$ и $(U_2 y, y) = 0$. По лемме 2 $U_1 y = 0$ и $U_2 y = 0$, или, вспоминая, что $y = (U_1 - U_2)x$, получим вследствие произвольности x, что

$$U_1(U_1 - U_2) = 0, \quad U_2(U_1 - U_2) = 0.$$

Теперь нетрудно завершить доказательство:

$$\|(U_1 - U_2)x\|^2 = ((U_1 - U_2)x, (U_1 - U_2)x) = ((U_1 - U_2)^2 x, x) = \\ = (U_1(U_1 - U_2)x, x) + (U_2(U_1 - U_2)x, x) = 0.$$

Следовательно, $U_1 = U_2$. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Каждый неотрицательный оператор* A *имеет единственный неотрицательный квадратный корень* $\sqrt{A}$. *При этом* $\sqrt{A}$ *перестановочен с оператором* $C \in \mathcal{L}(H)$ *в том и только том случае, когда* C *перестановочен с* A.

26.3. Об одном специальном ортопроекторе. Пусть A — самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Введем следующие обозначения:

$$|A| = \sqrt{A^2}, \quad A^+ = \frac{1}{2}\{|A| + A\}, \quad A^- = \frac{1}{2}\{|A| - A\},$$

где $\sqrt{A^2}$ — неотрицательный квадратный корень из A^2.

Упражнение 1. Покажите, что 1) $A = A^+ - A^-$; 2) $|A| = A^+ + A^-$; 3) $A^+A^- = A^-A^+ = 0$; 4) $|A| \geqslant 0$, $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$; 5) $|A|^2 = A^2$; 6) если $A^- = 0$, то $A = A^+ = |A|$; 7) если $A^+ = 0$, то $A = -|A| = -A^-$.

Упражнение 2. Пусть в пространстве $\mathcal{L}_2(-1, 1)$ оператор A определяется равенством $Ax = tx(t)$, $t \in [-1, 1]$. Докажите, что $|A|x = |t|x(t)$, $A^+x = t^+x(t)$, $A^-x = t^-x(t)$, где $t^+ = \dfrac{1}{2}(|t|+t)$, $t^- = \dfrac{1}{2}(|t|-t)$. Постройте графики функций $x(t) = t^+$ и $x(t) = t^-$.

Докажем еще два свойства введенных операторов. Прежде всего отметим справедливость для всех $x \in H$ равенства

$$\||A|x\| = \|Ax\|. \tag{1}$$

Действительно, (1) следует из того, что $|A|$ и A самосопряженны:

$$\||A|x\|^2 = (|A|x,\, |A|x) = (|A|^2x,\, x) = (A^2x,\, x) = (Ax,\, Ax) = \|Ax\|^2.$$

Второе из доказываемых свойств заключается в том, что $|A|$, A^+ и A^- перестановочны с A, друг с другом и со всеми операторами из $\mathcal{L}(H)$, перестановочными с A. Достаточно заметить, что $|A|$ является пределом в смысле сильной сходимости некоторой последовательности многочленов от A (см. п. 26.2), а значит, таковыми же будут A^+ и A^-.

После этих предварительных замечаний перейдем к главной цели настоящего пункта. Рассмотрим подпространство $N(A^+)$ — подпространство нулей оператора A^+ (см. п. 12.1). Введем P — ортопроектор на $N(A^+)$. Свойства проектора P перечислены в следующей лемме.

Лемма. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *оператор P перестановочен с любым оператором $C \in L(H)$, перестановочным с A, в частности с A, $|A|$, A^+ и A^-*;

2) *если $Ax = 0$, то $Px = x$, т. е. $N(A) \subset N(A^+)$*;

3) $$A^- = PA^- = -PA = P|A| \geqslant 0, \tag{2}$$
$A^- = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A \geqslant 0$;

4) $$A^+ = (I - P)A^+ = (I - P)A = (I - P)|A| \geqslant 0, \tag{3}$$
$A^+ = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A \leqslant 0$;

5) $A = (I - 2P)|A|$.

Доказательство. 1) Пусть C перестановочен с $|A|$, тогда, согласно определению $|A|$ из п. 26.2 он перестановочен с $|A|$, A^- и A^+. Далее, для любого $x \in H$, так как $Px \in N(A^+)$, то $A^+CPx = CA^+Px = 0$. Следовательно, $CPx \in N(A^+)$ и потому $PCPx = CPx$ для всех $x \in H$, т. е.

$$PCP = CP. \tag{4}$$

Заметим теперь, что сопряженный оператор $C*$ также перестановочен с A (см. доказательство леммы п. 26.1). Но тогда, наряду с (4), справедливо равенство $PC * P = C * P$. Применяя к обеим его частям оператор сопряжения, получим $PCP = PC$. Отсюда и из (4) следует, что $CP = PC$.

2) Пусть $Ax = 0$. Тогда, вследствие формулы (1), $|A|x = 0$. Следовательно, $A^+x = \frac{1}{2}(|A| + A)x = 0$, т. е. $x \in N(A^+)$, и, вспоминая определение ортопроектора P, получим $Px = x$.

3) Так как $A^+A^-x = 0$ для всех $x \in H$ (см. упражнение 1), то $A^-x \in N(A^+)$, откуда по 2) $PA^-x = A^-x$. Значит, $PAx = P(A^+ - A^-)x = -PAx = -A^-x$. Наконец, $P|A|x = P(A^+ + A^-)x = A^-x$. Из произвольности x следует формула (2): $A^- \geqslant 0$, так как и $P \geqslant 0$ и $|A| \geqslant 0$.

Упражнение 3. По аналогии с доказательством утверждения 3) проведите доказательство утверждения 4).

5) $(I - 2P)(A^+ + A^-) = A^+ + A^- - 2PA^+ - 2PA^- = A^+ - A^- + 0 - 2A^- = A^+ - A^- = A$.

Лемма доказана.

26.4. Существование спектральной функции у любого самосопряженного оператора. Используя конструкцию п. 26.3, покажем что для всякого самосопряженного оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ существует спектральная функция. Введем обозначения (см. п. 26.3):

$$A_\lambda = A - \lambda I, \quad A_\lambda^+ = (A_\lambda)^+, \quad A_\lambda^- = (A_\lambda)^-.$$

Пусть, далее, $P(\lambda)$ — ортопроектор в H на подпространство $N(A_\lambda^+) \equiv N_\lambda$. Докажем, что $P(\lambda)$ является спектральной функцией оператора A. Для этого проверим условия 1)–5) определения спектральной функции (см. определение 1 п. 26.1). Начнем с проверки условия 4). По лемме п. 26.3 $P(\lambda)$ перестановочен с каждым оператором C, перестановочным с A. В частности, $P(\lambda)P(\mu) = P(\mu)P(\lambda)$. Докажем теперь свойство монотонности 2). Пусть $Q = P(\lambda)[I - P(\mu)]$. Если мы установим, что при $\lambda < \mu$ $Q \equiv 0$, то тогда $P(\lambda) = P(\lambda)P(\mu)$, а согласно теореме 1 п. 18.7 $P(\lambda) \leqslant P(\mu)$.

Заметим сначала, что Q — проектор, ибо $P(\lambda)$ и $I - P(\lambda)$ перестановочны (лемма 1 п. 18.7). Покажем теперь, что при $\lambda < \mu$ из равенства $Qx = x$ будет следовать, что $x = 0$, т. е. подпространство на которое проектирует Q, состоит лишь из нуля.

Упражнение 1. Проверьте, что $Q = P(\lambda)Q$, $[I - P(\mu)]Q = Q$.

Если теперь $Qx = x$, то

$$(A_\lambda x, x) = (A_\lambda Qx, x) = (A_\lambda P(\lambda)Qx, x) = -(A_{\bar\lambda} Qx, x) = -(A_{\bar\lambda} x, x) \leqslant 0,$$

ибо $A_\lambda P(\lambda) = -A_{\bar\lambda} \leqslant 0$ (см. формулу (2) п. 26.3).

Аналогично,

$$(A_\mu x,\, x) = (A_\mu Qx,\, x) = (A_\mu(I - P(\mu))Qx,\, x) = (A_\mu^+ Qx,\, x) = (A_\mu^+ x,\, x) \geqslant 0,$$

ибо $A_\mu(I - P(\mu)) = A_\mu^+ \geqslant 0$ (см. (3) п. 26.3).

Итак доказаны неравенства

$$((A - \lambda I)x,\, x) \leqslant 0, \quad ((A - \mu I)x,\, x) \geqslant 0.$$

Вычитая из первого второе, получим неравенство $(\mu - \lambda)(x,\, x) \leqslant 0$. Но $\mu - \lambda > 0$, а $(x,\, x) \geqslant 0$, откуда $x = 0$. Значит, $Q \equiv 0$ при $\lambda < \mu$, и свойство 2) доказано.

Проверим свойство 3) непрерывности $P(\lambda)$ справа. Пусть $\Delta = [\lambda,\, \mu]$, а $P_\Delta = P(\mu) - P(\lambda) \geqslant 0$. Докажем следующее неравенство:

$$\lambda P_\Delta \leqslant A P_\Delta \leqslant \mu P_\Delta. \tag{1}$$

Упражнение 2. Докажите, что $P(\mu)P_\Delta = P_\Delta$, $(I - P(\lambda))P_\Delta = P_\Delta$.

Теперь имеем следующие соотношения:

$$(A - \mu I)P_\Delta = A_\mu P_\Delta = A_\mu P(\mu) P_\Delta = -A_\mu^- P_\Delta \leqslant 0,$$

$$(A - \mu I)P_\Delta = A_\lambda P_\Delta = A_\lambda(I - P(\lambda))P_\Delta = A_\lambda^+ P_\Delta \geqslant 0,$$

которые представляют собой соответственно правую и левую части неравенства (1).

Рассмотрим теперь оператор-функцию $P(\mu)$ при $\mu > \lambda$, где λ фиксировано. $P(\mu)$ не возрастает с убыванием μ и ограничена снизу: $P(\mu) \geqslant P(\lambda)$.

Упражнение 3. Пользуясь свойством Вейерштрасса (п. 26.2), докажите, что существует (в смысле сильной сходимости)

$$\lim_{\mu \to \lambda + 0} P(\mu) = P(\lambda + 0) \geqslant P(\lambda).$$

Покажем, что $P(\lambda + 0) = P(\lambda)$. Положим $P_0 = P(\lambda + 0) - P(\lambda)$. Тогда $P_\Delta = P(\mu) - P(\lambda) \to P_0$ при $\mu \to \lambda + 0$. Переходя к пределу при $\mu \to \lambda + 0$ свойству 2) оператора P (см. лемму п. 26.3), т. е. $A_\lambda P_0 = 0$. Это означает, что вектор $P_0 x \in N_\lambda$ для всех $x \in H$, откуда $P(\lambda)P_0 = P_0$. Переходя к пределу при $\mu \to \lambda + 0$ также в равенстве $[I - P(\lambda)]P_0 P_0$. Но тогда $P_0 = 2P_0$, т. е. $P_0 = 0$. Вспоминая определение P_0, мы видим, что $P(\lambda + 0) = P(\lambda)$, что заканчивает доказательство непрерывности $P(\lambda)$ справа.

Перейдем к проверке справедливости формулы спектрального разложения. Пусть $\tau = \{\lambda_i\}_{i=0}^N$ — разбиение $[m - \varepsilon,\, M]$ с частичными отрезками разбиения Δ_k длины $\lambda_k - \lambda_{k-1}$ $(k = 1,\, \ldots,\, N)$. Согласно формуле (1)

$$\lambda_{k-1} P_{\Delta_k} \leqslant A P_{\Delta_k} \leqslant \lambda_k P_{\Delta_k}.$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до N, учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{N} P_{\Delta_k} = I$, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_{k-1} P_{\Delta_k} \leqslant A \leqslant \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_{\Delta_k}.$$

Выберем на $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ произвольно промежуточную точку θ_k ($k = 1, \ldots, \ldots N$). Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} (\lambda_{k-1} - \theta_k) P_{\Delta_k} \leqslant A - \sum_{k=1}^{N} \theta_k P_{\Delta_k}] \leqslant \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k - \theta_k) P_{\Delta_k}.$$

Если $\nu(\tau)$ — мелкость разбиения τ, то тем более

$$-\nu(\tau) I \leqslant A - \sum_{k=1}^{N} \theta_k P_{\Delta_k} \leqslant \nu(\tau) I.$$

Следовательно,

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{N} \theta_k P_{\Delta_k} \right\| \leqslant \nu(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \nu(\tau) \to 0.$$

Это означает справедливость формулы (1), п. 26.1. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для всякого ограниченного самосопряженного оператора существует спектральная функция.*

26.5. Функции от самосопряженного оператора. Единственность спектральной функции. Мы уже встречались в п. 11.3 с функциями от операторов из $\mathcal{L}(X)$. Доказанная выше формула спектрального разложения позволяет ввести определение, не требующее исследовать сходимость операторных рядов.

Определение. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Под *функцией самосопряженного оператора* A понимают следующее выражение:

$$f(A) = \int_{m-\varepsilon}^{M} f(\lambda) dP(\lambda).$$

(Разумеется необходимо, чтобы $[a, b] \supset [m - \varepsilon, M]$ при некотором $\varepsilon > 0$.)

В частности,

$$I = \int_{m-\varepsilon} dP(\lambda), \quad \sqrt{A} = \int_{m-\varepsilon}^{M} \sqrt{\lambda} dP(\lambda).$$

Первая формула очевидна, во второй необходимо $m \geqslant 0$. Можно показать, что это новое определение $\sqrt{A}$ совпадает с определением п. 26.2. Отметим еще, что

$$A^2 = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 dP(\lambda).$$

Отсюда имеем

$$\|Ax\|^2 = (Ax,\, Ax) = (A^2x,\, x) = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 d(P(\lambda)x,\, x). \tag{1}$$

Теперь мы сможем доказать единственность спектральной функции, существование которой доказано в предыдущем пункте. Пусть существует, кроме $P(\lambda)$, еще одна спектральная функция самосопряженного оператора A, которую мы обозначим $Q(\mu)$. Тогда $A = \int_{m-\varepsilon}^{M} \mu dQ(\mu)$. Кроме того,

$$A_\lambda = A - \lambda I = \int_{m-\varepsilon}^{M} (\mu - \lambda) dQ(\mu), \quad A_\lambda^+ = \int_{m-\varepsilon}^{M} (\mu + \lambda)^+ dQ(\mu),$$

где

$$(\mu + \lambda)^+ = \begin{cases} \mu - \lambda, & \text{если } \mu \geqslant \lambda, \\ 0, & \text{если } \mu \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A_\lambda^+ = \int_{\lambda}^{M} (\mu - \lambda) dQ(\mu).$$

Пусть $N_\lambda = N(A_\lambda^+)$. Если $x \in N_\lambda$, то (см. (1))

$$\|A_\lambda^+ x\|^2 = \int_{\lambda}^{M} (\mu - \lambda)^2 d(Q(\mu)x,\, x) = 0.$$

Это равенство возможно, лишь если $(Q(\mu)x,\, x) \equiv (x,\, x)$ при всех $\mu \geqslant \lambda$. В частности, отсюда следует $(Q(\lambda)x,\, x) = (x,\, x)$. Но тогда $\|Q(\lambda)x - x\|^2 = (Q(\lambda)x - x,\, Q(\lambda)x - x,\, x) = (Q(\lambda)x,\, x) - 2(Q(\lambda)x,\, x) + (x,\, x) = 0$, т. е. $Q(\lambda)x = x$. Значит, $Q(\lambda)$ проектирует H также на N_λ. Вследствие равноправности $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ они равны. Таким образом, доказана единственность спектральной функции для любого самосопряженного ограниченного оператора в комплексном гильбертовом пространстве.

26.6. О спектральном разложении неограниченных самосопряженных операторов. Пусть A — неограниченный самосопряженный оператор, действующий из плотной в комплексном гильбертовом пространстве H области определения $D(A)$ в H.

Определение. Оператор-функция $P(\lambda)$, ставящая в соответствие каждому $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ ортопроектор $P(\lambda)$, называется *спектральной функцией* оператора A, если (ср. с определением 1 п. 26.1):

1) $P(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$,
$P(\lambda) \to I$ при $\lambda \to -\infty$

(пределы в смысле сильной сходимости);

2) $P(\lambda)$ — неубывающая функция λ;

3) $P(\lambda)$ непрерывна справа (в смысле сильной сходимости);

4) для любого оператора $B \in \mathcal{L}(H)$ такого, что $BD(A) \subset D(A)$, для всех $x \in D(A)$

$$BP(\lambda)xP(\lambda)Bx;$$

5) для всех $x \in D(A)$ и всех $y \in H$

$$(Ax, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(P(\lambda)x, y), \tag{1}$$

где справа стоит несобственный интеграл Стилтьеса (см. п. 25.4).

Доказательство существования и единственности спектральной функции для любого неограниченного самосопряженного оператора технически довольно сложно, его можно найти, например в [21].

Ограничимся несколькими замечаниями.

Замечание 1. Вектор $x \in D(A)$ тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(P(\lambda)x, x).$$

Замечание 2. Если $x \in D(A)$, то

$$Ax = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dP(\lambda)x, \tag{2}$$

причем интеграл справа следует понимать как предел (в смысле сходимости по норме в H) $\int\limits_a^b \lambda dP(\lambda)x$ при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$.

Замечание 3. Если $x \in D(A)$, то (см. замечание 1)

$$\|Ax\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(P(\lambda)x,\, x).$$

Перейдем к определению функций от оператора A. Они вводятся с помощью спектральной функции оператора A. Они вводятся с помощью спектральной функции оператора A. Пусть комплекснозначная функция $f(\lambda)$ определена на $(-\infty,\, +\infty)$. Иногда удается определить неограниченный оператор $f(A)$ по формуле $(y \in H)$

$$(f(A)x,\, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(P(\lambda)x,\, y). \tag{3}$$

Полагая в ней $y = f(A)x$, можно убедиться, что область определения $D(f(A))$ состоит из всех тех элементов x, для которых сходится интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(P(\lambda)x,\, x).$$

Упражнение 1. Покажите, что если $f(\lambda)$ ограничена, то ограничен и оператор $f(A)$.

Упражнение 2. Покажите, что если $f(\lambda)$ принимает только вещественные значения то оператор $f(A)$ — самосопряженный.

В качестве примера функции от самосопряженного оператора A рассмотрим его резольвенту $R_\lambda(A)$ (см. п. 24.1).

Упражнение 3. Покажите, что если λ_0 не принадлежит $\sigma(A)$ — спектру оператора A (п. 24.1), то

$$R_{\lambda_0}(A)x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP(\lambda)x}{\lambda - \lambda_0}.$$

Покажите, что если $\operatorname{Im} \lambda_0 \neq 0$, то $\lambda_0 \notin \sigma(A)$ и

$$\|R_{\lambda_0}(A)\| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda_0|^{-1}.$$

В заключение отметим, что в случае самосопряженного ограниченного оператора A формула (2) принимает вид

$$Ax = \int\limits_{m-\varepsilon}^{M} \lambda\, dP(\lambda)x, \tag{4}$$

где m и M определены в свойстве 1) определения 1 п. 26.1, т. е. эта формула превращается в формулу (1) п. 26.1.

В приложениях встречаются также *полуограниченные снизу* самосопряженные операторы. Так называется оператор A, для которого существует вещественная постоянная m такая, что для всех $x \in D(A)$ выполняется неравенство

$$(Ax,\, x) \geqslant m(x,\, x). \tag{5}$$

Спектр такого оператора расположен на полуоси $[m,\, +\infty)$, формула спектрального разложения принимает вид

$$Ax = \int\limits_{m-\varepsilon}^{+\infty} \lambda dP(\lambda)x. \tag{6}$$

Аналогичные определение и формула имеют место для полуограниченного сверху самосопряженного оператора.

Г Л А В А VII

АБСТРАКТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ СХЕМЫ

В этой главе рассмотрен один общий подход к приближенным методам решения линейных уравнений, активно развивающийся в последние десятилетия. При этом подходе, в частности, теория разностных схем и метод Галеркина рассматриваются с единой точки зрения. Типичным примером здесь является разностная схема решения какой-либо задачи для дифференциального уравнения. В то время как задача для дифференциального уравнения рассматривается в функциональных пространствах, аппроксимирующая ее разностная задача рассматривается в конечномерном пространстве. Таким образом, исходное и приближенное уравнения рассматриваются в разных пространствах.

В научной литературе широко употребляется термин «дискретизация» — замена непрерывного объекта дискретным. Ниже этот термин не используется. Дело в том, что замена дифференциальных операторов разностными операторами (п. 28.2, метод прямых) может осуществляться лишь по части переменных. Кроме того, в общем методе Галеркина проекторы могут быть бесконечномерными.

Центральное место в рассматриваемой теории занимают понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости и интерполяции. Для линейных эллиптических уравнений здесь получены наиболее завершенные результаты (см. [31]). Ниже излагается упрощенный вариант теории. Тем не менее нельзя было не коснуться таких важных в приложениях вопросов, как интерполяция, приближение сплайнами и метод конечных элементов.

В последней главе (§ 38, 39) мы вернемся к этому кругу вопросов в применении к нелинейным уравнениям.

§ 27. Аппроксимация, устойчивость и сходимость

27.1. Приближение банахова пространства с помощью последовательности банаховых пространств. Пусть дано банахово пространство X. Для приближения его элементов мы воспользуемся следующей конструкцией. Рассмотрим последовательность банаховых пространств $\{\bar{X}_n\}_1^\infty$, с помощью которой мы и собираемся аппроксимировать пространство X. Связь между пространствами $\bar{X}_n$ и пространством X зададим посредством последовательности линейных операторов $T_n \in \mathcal{L}(X, \bar{X}_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$, причем предположим, что $T_n X = \bar{X}_n$, т. е. области значений T_n $R(T_n) = \bar{X}_n$. Операторы T_n будем называть *операторами сужения*, поскольку в описываемых ситуациях типичным является случай, когда $N(T_n) \neq \{0\}$ (подпространство нулей T_n нетривиально).

В приложениях наиболее важен случай конечномерных $\bar{X}_n$, когда $\dim \bar{X}_n \to \infty$ при $n \to \infty$, возрастая вместе с n. Элементы пространств $\bar{X}_n$ мы будем использовать для аппроксимации элементов пространства X. Близость элемента $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$ и элемента $x \in X$ будем оценивать с помощью числа $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n}$. Пусть в каждом пространстве $\bar{X}_n$ взят элемент $\bar{x}_n$. Записывая эти элементы в порядке возрастания номеров образуем последовательность $\{\bar{x}_n\}$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{\bar{x}_n\}$ *T-сходится* к элементу $x \in X$, и писать $T - \lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = x$ или $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $n \to \infty$, если $\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Разумеется, если $\bar{X}_n = X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то T-сходимость совпадает с обычной сходимостью в X, т. е. со сходимостью по норме.

Упражнение 1. Покажите, что если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $n \to \infty$, то $\alpha\bar{x}_n \xrightarrow{T} \alpha x$, $n \to \infty$, для любого скаляра α. Если, кроме того, $\bar{y}_n \xrightarrow{T} y$, $n \to \infty$, то $\bar{x}_n + \bar{y}_n \xrightarrow{T} x + y$ $(\bar{x}_n, \bar{y}_n \in \bar{X}_n, x, y, \in X)$.

Уже простейшие примеры показывают, что T-предел может быть не единственным.

Пример. Пусть $X = l_2$, а $\bar{X}_n = l_2^{(n)}$. Операторы сужения T_n определим так: для любого $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ положим $T_n x = (\xi)_{k=1}^{n}$. Рассмотрим теперь элемент $x_0 = (\xi_k^{(0)})_{k=1}^{\infty} \in l_2$, где $\xi_1^{(0)} = 0$. Тогда $\bar{x}_n = (\xi_{k+1}^{(0)})_{k=1}^{n} \xrightarrow{T} x_0$ при $n \to \infty$. Но точно так же $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x_0'$, $n \to \infty$, где $x_0' = (\xi_k^{(0)})_{k=1}^{\infty}$, причем $\xi_1^{(0)}$ — произвольное число. Таким образом, последовательность $\{\bar{x}_n\}$ имеет бесконечное число T-пределов.

В рассмотренном примере факт неединственности T-предела свидетельствует о том, что пространства $T_n X$ плохо аппроксимируют пространство X.

Определение 2. Будем говорить, что нормы в $\bar{X}_n$ *невырождены*, если из равенства
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_n = 0$$
следует, что $x = 0$.

В терминах условия невырожденности норм легко получить необходимое и достаточное условие единственности T-предела.

Теорема 1. *Для единственности T-предела необходимо и достаточно, чтобы нормы в $\bar{X}_n$ были невырождены.*

Доказательство достаточности. Допустим, что некоторая последовательность $\{\bar{x}_n\}$ T-сходится к двум элементам x' и x'' из X. Тогда
$$\|T_n(x' - x'')\|_{\bar{X}_n} \leqslant \|T_n x' - \bar{x}_n\|_{\bar{X}_n} + \|\bar{x}_n - T_n x''\|_{\bar{X}_n} \to 0$$
при $n \to \infty$. Из условия невырожденности получаем $x' = x''$.

Доказательство необходимости. Пусть T-предел единствен. Тогда условие $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\bar{X}_n} = 0$ означает, что $T_n x \xrightarrow{T} 0$, $n \to \infty$, но, кроме того, $T_n x \xrightarrow{T} x$, $n \to \infty$. Следовательно, $x = 0$.

Определение 3. Будем говорить, что нормы в $\bar{X}_n$ *согласованы* с нормой в X, если для любого $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\bar{X}_n} = \|x\|.$$

Выбирая подходящим образом операторы сужения T_n и аппроксимирующие пространства X_n, часто удается добиться условия согласования норм. Сделаем следующее важное замечание: из условия согласования норм вытекает невырожденность норм в $\bar{X}_n$, а значит, и единственность T-предела. Приведем еще одно определение и относящееся к нему утверждение, которые, впрочем, не играют существенной роли в нашем изложении.

Определение 4. Будем говорить, что нормы в $\bar{X}_n$ *равномерно ограничены,* если найдется постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,\,\bar{X}_n)} \leqslant M, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Условие равномерной ограниченности норм вытекает, например, из условия согласования норм. Это следует из приведенного ниже обобщения принципа равномерной ограниченности.

Теорема 2. *Если* $\{\|T_n x\|_{\bar{x}_n}\}$ *ограничена при каждом* $x \in X$, *то ограничена и* $\{\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,\,\bar{X}_n)}\}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 п. 11.5.

Проиллюстрируем теперь введенные нами понятия. Рассмотрим $X = C[0,\, l]$ — пространство непрерывных на $[0,\, l]$ функций $x(t)$. Возьмем на $[0,\, l]$ систему узлов $0 \leqslant t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leqslant l$. Введем в рассмотрение оператор сужения T_n, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $x(t)$ столбец ее значений в узлах:

$$T_n x = (x(t_k^{(n)}))_{k=1}^n.$$

Таким образом, T_n отображает X на n-мерное линейное пространство столбцов $\bar{X}_n = \mathbf{R}^n$. Элементы $\bar{X}_n$ суть $\bar{x}_n = (x_k)_{k=1}^n$.

Норму в $\bar{X}_n$ можно ввести самыми различными способами. Мы ограничимся здесь рассмотрением двух наиболее употребительных норм. Введем сначала норму кубическую

$$\|\bar{x}_n\|_{\text{куб}} = \max_{1\,\leqslant\, k\,\leqslant\, n} |x_k|. \tag{1}$$

Тем самым мы принимаем $\bar{X}_n = c^n$ (см. пример 1 п. 2.2). T-сходимость последовательности элементов $\bar{x}_n = (x_k^{(n)})_{k=1}^n \subset c^n$ $(n = 1,\, \ldots,\, k)$ к непрерывной функции $x(t)$ на $[0,\, l]$ означает, что при $n \to \infty$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{куб}} = \max_{1\,\leqslant\, k\,\leqslant\, n} |x_k^{(n)} - x(t_k^{(n)})| \to 0 \tag{2}$$

Упражнение 2. Покажите, что для любой $x(t) \in C[0,\, l]$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x(t_k^{(n)})| = \max_{[0,\, l]} |x(t)|, \tag{3}$$

если

$$\lambda_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1} - t_i| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{4}$$

(т. е. мелкость разбиения $\{t_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ отрезка $[0,\, l]$ стремится к нулю).

Заметим, что равенство (2) представляет собой условие согласования норм в c^n с нормой $C[0,\, l]$ и обеспечивает единственность T-предела. Условие $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$ обеспечивает «хорошее приближение» $[0,\, l]$ системой узлов, или, как принято говорить, сеткой $\{t_k^{(n)}\}_1^n$. Если условие $\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$, нарушено, то T-предел не будет единственным.

Упражнение 3. Пусть $t_1^{(n)} = 0$, $t_2^{(n)} = h$, $h < l$, и пусть $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0, n \to \infty$. Покажите, что если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x_0(t), n \to \infty$, на $[0,\, l]$, то также $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x(t)$, $n \to \infty$, где $x(t)$ — непрерывная на $[0,\, l]$ функция, произвольным образом заданная на $[0,\, h]$.

Перейдем теперь ко второму способу задания нормы в $\bar{X}_n$. Введем норму сферическую, превращающую $\bar{X}_n$ в E^n:

$$\|\bar{x}_n\|_{\text{сф}} = \left(\frac{l}{n}\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Множитель l/n введен из следующих соображений: если $x(t) \equiv 1$ на $[0,\, l]$, то и $T_n x = (1)_{k=1}^n$, а значит, согласно (5) $\|T_n \cdot 1\|_{\text{сф}} = \sqrt{l}$.

Упражнение 4. Покажите, что если $t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} = l/n$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_{\text{сф}} = \left(\int_0^l |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Поскольку для непрерывной на $[0,\, l]$ функции $x(t)$ из равенства $\int\limits_0^l |x(t)|^2\, dt =$ $= 0$ следует, что $x(t) \equiv 0$ на $[0,\, l]$, то формула (6) приводит к невырожденности норм в пространствах $\bar{X}_n = l_2^n$ и, значит, к единственности T-предела; T-сходимость $\{\bar{x}_n\}$ к $x(t) \in C[0,\, l]$ здесь означает, что при $n \to \infty$

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{сф}}^2 = \frac{l}{n}\sum_{k=1}^n |x(t_k^{(n)}) - x_k^{(n)}|^2 \to 0. \tag{7}$$

27.2. Порядок аппроксимации элемента последовательностью. Сравнение двух видов *T*-сходимости. При численных расчетах важен не только сам факт T-сходимости $\{\bar{x}_n\}$ к x, но и порядок скорости сходимости. Пусть дана неотрицательная бесконечно малая числовая последовательность $\{\varphi_n\}$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{\bar{x}_n\}$ *T-сходится* к элементу x *со скоростью* φ_n, если

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant \varphi_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Пусть, далее, $\{\psi_n\}$ — произвольная положительная последовательность.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $\{\bar{x}_n\}$ *T-сходится* к элементу x *со скоростью* $o(\psi_n)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} = 0. \tag{2}$$

В частности, утверждение, что $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ со скоростью $o(1)$, означает просто, что $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$.

В случае определения 1 (определения 2) будем также говорить, что порядок аппроксимации элемента x последовательностью x_n равен φ_n (есть $o(\psi_n)$).

Поясним эту терминологию на уже известных примерах. Пусть $X = C[0, l]$, а $\bar{x}_n = (x_k^{(n)})_{k=1}^n \in \mathbf{R}^n$. Будем рассматривать в $\mathbf{R}^n$ две нормы: кубическую и сферическую.

Упражнение 1. Докажите следующее неравенство:

$$\sqrt{l/n}\, \|\bar{x}_n\|_{\text{куб}} \leqslant \|\bar{x}_n\|_{\text{сф}} \leqslant \|\bar{x}_n\|_{\text{куб}}. \tag{3}$$

Неравенство (3) означает, конечно, эквивалентность кубической и сферической норм в $\mathbf{R}^n$. Сходимость в $\mathbf{R}^n$ последовательности $\{\bar{x}_n\}$ к непрерывной функции $x(t)$ в смысле нормы кубической (см. формулу (2) п. 27.1) назовем *равномерной T-сходимостью*, а T-сходимость $\{\bar{x}_n\}$ к x в смысле нормы сферической (см. (7) п. 27.1) назовем *T-сходимостью в среднем*. Из (3) и (2) п. 27.1 получаем следующее предложение.

Предложение 1. *Из равномерной T-сходимости $\{\bar{x}_n\}$ к x вытекает ее T-сходимость к x в среднем.*

Обратное неверно. Пусть $\{\bar{x}_n\}$ такова, что $x_1^{(n)} = n^\alpha$, где $0 < \alpha < 1/2$, а $x_k^{(n)} = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$. Тогда $\|\bar{x}_n\|_{\text{сф}} = \sqrt{l}\, n^{\alpha - 1/2} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\bar{x}_n \xrightarrow{T} 0$ в среднем. В то же время $\|\bar{x}_n\|_{\text{куб}} = n^\alpha \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Если $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ в среднем со скоростью $o(1/\sqrt{n})$, то $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ равномерно.*

Действительно, согласно левой части неравенства (3), в соответствии с определением 2

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{куб}} \leqslant \sqrt{nl^{-1}}\, \|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{сф}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Упражнение 2. Покажите, что из равномерной T-сходимости $\{\bar{x}_n\}$ к x со скоростью φ_n следует T-сходимость $\{\bar{x}_n\}$ к x с той же скоростью, а из T-сходимости $\{\bar{x}_n\}$ к x в среднем со скоростью $\varphi_n = o(1/\sqrt{n})$ следует ее T-сходимость к x со скоростью $\sqrt{n}\,\varphi_n$.

27.3. Аппроксимация линейных операторов. Пусть теперь X и Y — банаховы пространства (оба вещественные или оба комплексные) аппроксимируются посредством последовательностей операторов сужения $\{T_n\}'$ и $\{T_n'\}$ и последовательностей $\{\bar{X}_n\}$ и $\{\bar{Y}_n\}$ аппроксимирующих банаховых пространств, так что

$$T_n X = \bar{X}_n, \quad T_n' Y = \bar{Y}_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор A с областью определения $D(A) \subset X$ и с областью значений $R(A) \subset Y$. Оператор A мы будем аппроксимировать с помощью последовательности линейных операторов $\bar{A}_n$, имеющих области определения $D(\bar{A}_n) \subset \bar{X}_n$ и области значений $R(\bar{A}_n) \subset \bar{Y}_n$. Пусть всюду ниже выполнено следующее условие:

$$T_n(D(A)) \subset D(\bar{A}_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Определение (условие аппроксимации). Будем говорить, что на элементе $x \in D(A)$ выполнено *условие аппроксимации* (или что $\{\bar{A}_n\}$ аппроксимирует A на x), если при $n \to \infty$

$$\|\bar{A}_n T_n x - T_n' A x\|_{\bar{Y}_n} \to 0. \tag{2}$$

Заметим, что условие (1) обеспечивает смысл выражения $\bar{A}_n T_n x \in \bar{Y}_n$. Условие аппроксимации (2) означает, что при $n \to \infty$

$$\bar{A}_n T_n x \xrightarrow{T'} Ax. \tag{3}$$

Отсюда видна связь условия аппроксимации с ранее введенным понятием сильной, или поточечной, сходимости последовательности линейных операторов (см. п. 11.4).

Пусть $\bar{X}_n \equiv X$, $\bar{Y}_n \equiv Y$ для всех n, тогда можно принять $T_n = I_X$ (тождественный оператор в X), $T_n' = I_Y$ (тождественный оператор в Y). Опустим, кроме того, в (3) черту в $\bar{A}_n$. Теперь условие аппроксимации на некотором множестве M элементов $x \in D(A)$ имеет вид:

$$\|A_n x - Ax\|_Y \to 0, \quad n \to \infty,$$

и означает сильную сходимость $\{A_n\}$ к A на M. Таким образом, условие аппроксимации есть обобщение условия сильной сходимости.

Кратко условие аппроксимации (2) будем записывать так:

$$\bar{A}_n \xrightarrow{T} A \quad \text{на } x.$$

Часто оказывается, что условие аппроксимации выполняется в усиленном виде: существуют постоянная $\alpha(x)$, зависящая лишь от элемента x, и последовательность $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \geqslant 0$, $\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$, такие, что

$$\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \alpha(x)\varphi_n. \tag{4}$$

Если $\varphi_n = 1/n^k$, где $k > 0$, то будем говорить, что порядок аппроксимации (оператора A последовательностью $\{\bar{A}_n\}$) на элементе x равен k.

Пример. Пусть $X = Y = C[0,\, 1]$, а $\bar{X}_n = \bar{Y}_n = c^n$. Операторы сужения T_n зададим так: для любой $x(t) \in C[0,\, 1]$ положим

$$T_n x = (x(k/n))_{k=1}^n.$$

Аппроксимируем оператор дифференцирования $A = d/dt$. В качестве его области определения $D(A)$ возьмем множество всех непрерывно дифференцируемых на $[0,\, 1]$ функций $x(t)$ таких, что $x(0) = 0$. Положим

$$\bar{A}_n = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n \end{bmatrix} \tag{5}$$

(матрица из n строк и n столбцов).

Нетрудно подсчитать, что

$$\bar{A}_n T_n x = \left(n\left[x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]\right)_{k=1}^n, \quad T_n A x = \left(x'\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=1}^n,$$

$$\Delta_n = \|\bar{A}_n T_n x - T_n A x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n}\left|x'\left(\frac{k}{n}\right) - n\left[x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]\right| =$$

$$= \max_{1 \leqslant k \leqslant n}\left|n\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n}\left[x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(s)\right]ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant n\max_{1 \leqslant k \leqslant n}\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n}\left|x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(s)\right|ds.$$

Мы использовали здесь равенство

$$\left[x\left(\frac{k}{n}\right) - x\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] = \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} x'(s)\,ds.$$

Так как $x'(t)$ непрерывна на $[0, 1]$, то она равномерно непрерывна на $[0, 1]$ (см. [21]). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, обладающее тем свойством, что, какие бы $t', t'' \in [0, 1]$, $|t' - t''| < \delta$ ни взять, будет верно неравенство $|x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon$. Возьмем N так, чтобы $1/N < \delta$; тогда для всех $n > N|x'(k/n) - x'(s)| < \varepsilon$, если $s \in [(k-1)/n, k/n]$. Но тогда при всех $n > N$

$$\Delta_n \leqslant n \max \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} \left| x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(s) \right| ds < n\frac{1}{n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Мы показали, что условие аппроксимации выполнено для всех $x \in D(A)$. Покажем теперь, что если $x(t)$ дважды дифференцируема на $(0, 1)$ и

$$\sup_{(0,1)} |x''(t)| \leqslant \alpha$$

(α зависит от x), то имеет место первый порядок аппроксимации. Действительно, по формуле Лагранжа

$$x'\left(\frac{k}{n}\right) - x'(s) = x''(\xi_n)\left(\frac{k}{n} - s\right),$$

где ξ_n заключено между k/n и s. Но тогда

$$\Delta_n \leqslant n\alpha \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \int\limits_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - s\right) ds = \frac{\alpha}{2n}.$$

Аналогично можно рассмотреть вопросы аппроксимации дифференциальных операторов высших порядков. Это будет сделано ниже при рассмотрении конкретных примеров.

27.4. Условие устойчивости. Рассмотрим последовательность линейных операторов $\{\bar{A}_n\}$ $(D(\bar{A}_n) \subset X_n, R(\bar{A}_n) \subset \bar{Y}_n, T_nX = \bar{X}_n, T_n'Y = \bar{Y}_n)$, не связывая ее с каким-либо оператором A.

Определение. (условие устойчивости). Пусть существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что, начиная с некоторого номера, для всех $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ выполняется неравенство

$$\|\bar{A}_n\bar{x}_n\|_{\bar{Y}_n} \geqslant \gamma\|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n}. \tag{1}$$

Тогда будем говорить, что для $\{\bar{A}_n\}$ выполнено *условие устойчивости*.

Согласно теореме п. 21.6 из условия устойчивости (1) следует, что, начиная с некоторого номера (см. определение):

1) $\bar{R}_n = R(\bar{A}_n)$ — подпространство в $\bar{Y}_n$ (т. е. замкнутое линейное многообразие);

2) на $\bar{R}_n$ определен $\bar{A}_n^{-1}$;

3) $\|\bar{A}_n^{-1}\|_{\mathcal{L}(\bar{R}_n,\, \bar{X}_n)} \leqslant \gamma^{-1}$.

Сделаем теперь замечания, позволяющие иногда облегчить проверку условия устойчивости.

Замечание 1. Если, начиная с некоторого номера, операторы $\bar{A}_n$ непрерывно обратимы и $\|\bar{A}_n^{-1}\| \leqslant c$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\{\|\bar{A}_n^{-1}\|\}$ ограничена, то выполнено условие устойчивости с $\gamma = c^{-1}$.

Проверку справедливости замечания 1 мы предоставляем читателю.

Замечание 2. Пусть $\bar{Y}_n = \bar{X}_n^*$. Если, начиная с некоторого номера, для всех $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ выполнено неравенство

$$\langle \bar{x}_n,\ \bar{A}_n \bar{x}_n \rangle \geqslant \gamma \|\bar{x}_n\|^2_{\bar{X}_n}, \tag{2}$$

то выполнено условие устойчивости.

Данное замечание следует из неравенства

$$|\langle \bar{x}_n,\, \bar{A}_n \bar{x}_n \rangle| \leqslant \|\bar{A}_n \bar{x}_n\|_{\bar{X}_n^*} \|\bar{x}_n\|_{\bar{X}_n}.$$

В частности, если $\bar{Y}_n = \bar{X}_n$ — гильбертово пространство, то левая часть в (2) превращается в скалярное произведение.

Пример. Пусть $\bar{X}_n = c^n$ и $\bar{A}_n$ задается формулой (5) п. 27.3.

Упражнение. Покажите, что

$$\bar{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1/n & 1/n & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{bmatrix},$$

причем $\|\bar{A}_n^{-1}\| = 1$. Тогда, согласно замечанию 1, выполнено условие устойчивости для $\{\bar{A}_n\}$.

27.5. Теорема о сходимости приближенной схемы. Переходим к изучению вопроса о T-сходимости последовательности приближенных решений к точному решению.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$Ax = y, \quad y \in R(A). \tag{1}$$

Здесь, как и выше, A — линейный оператор, действующий из $D(A) \subset \subset X$ в $R(A) \subset Y$; X и Y — банаховы пространства. Ограниченность A не предполагается.

Уравнение (1) будем в дальнейшем называть *точным уравнением*, а его решения, существующие вследствие предположения $y \in R(A)$, будем называть *точными решениями*.

Пусть, далее, пространство X аппроксимируется посредством последовательности банаховых пространств $\{\bar{X}_n\}$, связанных с X с помощью операторов сужения $\{T_n\}$: $T_n X = \bar{X}_n$, а пространство Y — посредством пространств $\{\bar{Y}_n\}$ и операторов сужения $\{T'_n\}$: $T'_n Y = \bar{Y}_n$.

Наконец, рассмотрим последовательность приближенных уравнений

$$\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n, \quad \bar{y}_n \in R(\bar{A}_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Здесь $\bar{A}_n$ — линейный оператор, отображающий $D(\bar{A}_n) \subset \bar{X}_n$ в $R(\bar{A}_n) \subset \bar{Y}_n$ (рис. 10). Решения $\bar{x}_n$ уравнения (2), а они существуют, так как $\bar{y}_n \in R(\bar{A}_n)$, будем называть *приближенными решениями*.

$$\begin{tikzcd} X \supset D(A) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "T_n"'] & Y \arrow[d, "T'_n"] \\ \bar{X}_n \supset D(\bar{A}_n) \arrow[r, "\bar{A}_n"] & \bar{Y}_n \end{tikzcd}$$

Рис. 10

Последовательность приближенных задач для краткости будем называть приближенной схемой решения задачи (1). Будем говорить, что приближенная схема (2) сходится, если каждая последовательность приближенных решений T-сходится к некоторому точному решению.

Сформулируем теперь, а затем докажем следующее основное предложение о сходимости приближенной схемы (2).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *нормы в* $\bar{X}_n$ *невырождены*;

2) $\{\bar{A}_n\}$ *аппроксимирует* A *на каждом точном решении*;

3) *выполнено условие устойчивости для* $\{\bar{A}_n\}$ *с постоянной* γ;

4) $\bar{y}_n \xrightarrow{T} y$.

Тогда:

1$'$) *точное решение единственно*;

2$'$) *для всех достаточно больших* n *приближенные решения единственны*;

3$'$) *приближенная схема сходится и справедлива оценка*

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant \gamma^{-1}(\|\bar{y}_n - T_n y\|_{\bar{Y}_n} + \|T'_n A x - \bar{A}_n T_n x\|_{\bar{Y}_n}). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — точные решения, т. е. $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$. Тогда, используя неравенство треугольника, а затем условие устойчивости, получим при достаточно больших n

$$\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x_1\|_{\bar{Y}_n} + \|\bar{A}_n T_n x_2 - T'_n A x_2\|_{\bar{Y}_n} \geqslant$$
$$\geqslant \|\bar{A}_n T_n (x_1 - x_2)\|_{\bar{Y}_n} \geqslant \gamma \|T_n (x_1 - x_2)\|_{\bar{X}_n}.$$

Но левая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$ по условию аппроксимации 2); следовательно, $\|T_n(x_1 - x_2)\|_{\bar{X}_n} \to 0$ $n \to \infty$. По условию 1) невырожденности норм в $\bar{X}_n$ получаем $x_1 - x_2 = 0$. Утверждение 1$'$) доказано.

Утверждение 2$'$) сразу вытекает из условия устойчивости (см. формулу (1) п. 25.4 и замечание 1 ниже).

Осталось доказать утверждение 3$'$). Пусть x и $\bar{x}_n$ — соответственно точное и приближенное решения. С помощью условия устойчивости и неравенства треугольника, используя уравнения (2) и (1), получим для достаточно больших n

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant \gamma^{-1}\|\bar{A}_n(\bar{x}_n - T_n x)\|_{\bar{Y}_n} = \gamma^{-1}\|\bar{y}_n - \bar{A}_n T_n x\|_{\bar{Y}_n} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma^{-1}[\,\|\bar{y}_n - T'_n y\|_{\bar{Y}_n} + \|T^1_n A x - \bar{A}_n T_n x\|_{\bar{Y}_n}].$$

С помощью условий аппроксимации 2) и 4) получаем, что при $n \to \infty$ правая часть неравенства стремится к нулю, а тогда стремится к нулю и левая часть, т. е. $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие 2) теоремы можно заменить более сильным, но проще проверяемым: пусть $\bar{A}_n$ аппроксимирует A на некотором множестве, содержащем все точные решения, например на $D(A)$.

Замечание 2. Из условия устойчивости следует, что при достаточно больших n области значений $R(\bar{A}_n)$ замкнуты, т. е. операторы $\bar{A}_n$ нормально разрешимы (см. § 21).

Замечание 3. Если $\bar{X}_n$ и $\bar{Y}_n$ конечномерны и их размерности равны $(\dim \bar{X}_n = \dim \bar{Y}_n)$, то из условия устойчивости сразу вытекает, что, начиная с некоторого номера N, приближенные решения $\bar{x}_n$ существуют и единственны, поскольку $N(\bar{A}_n) = \{0\}$.

Замечание 4. Если условия аппроксимации 2) и 4) выполнены в усиленном смысле:

$$\|\bar{A}_n T_n x - T'_n A x\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \alpha/n^k, \quad k > 0,$$
$$\|\bar{y}_n - T'_n y\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \beta/n^l, \quad l > 0,$$

то из (3) получаем оценку

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\bar{X}_n} \leqslant \frac{\alpha}{\gamma n^k} + \frac{\beta}{\gamma n^l},$$

т. е. порядок аппроксимации x некоторым приближенным решением есть наинизший из порядков аппроксимации оператора A последовательностью $\{\bar{A}_n\}$ и элемента y последовательностью $\{\bar{y}_n\}$.

§ 28. Простейшие разностные схемы

Разностные схемы решения начальных, краевых и смешанных задач для дифференциальных уравнений являются одним из эффективных математических средств, применяемых в современной практике применения электронных вычислительных машин. В настоящее время теория разностных схем достаточно хорошо разработана (см., например, [37]). В этом параграфе на основе общей концепции, рассмотренной в § 27, обсуждаются простейшие разностные схемы. При этом мы не затрагиваем вопросов конкретной их реализации, делая упор на вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости.

28.1. Сходимость разностной схемы в случае краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-x''(t) + c(t)\,x(t) = y(t), \quad 0 < t < l, \tag{1}$$

$$x(0) = x(l) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что $c(t)$ и $y(t)$ непрерывны на $[0,\, l]$, причем $c(t) \geqslant 0$ на $[0,\, l]$. Согласно п. 14.4 эти условия гарантируют существование и единственность классического решения задачи (1), (2). Запишем задачу (1), (2) в операторной форме:

$$Ax = y, \tag{3}$$

где A — линейный оператор, действующий в пространстве $X = C[a,\, b]$ и определяемый дифференциальным выражением, стоящим в левой части уравнения (1), т. е.

$$Ax \equiv -x''(t) + c(t)\,x(t).$$

Область определения $D(A)$ оператора A пусть состоит из функций пространства X, дважды непрерывно дифференцируемых на $(0,\, l)$ и удовлетворяющих граничным условиям (2).

Разобьем $[0,\, l]$ на n равных частей узлами $t_k = k\tau$ $(k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n)$, где $\tau = n^{-1}l$. Введем операторы сужения $T_n x(t) = (x(t_k))_{k=1}^{n-1}$ (столбец высоты $n-1$). Таким образом, возникло сеточное пространство $\bar{X}_n$ столбцов высоты $n-1$. В нем зададим норму сферическую: если $\bar{x}_n = (x_k)_{k=1}^{n-1}$, то положим

$$\|x\|_{\text{сф}} = \left(\frac{l}{n}\sum_{k=1}^{n-1}|x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Заменяя в дифференциальном операторе A вторую производную разностным отношением

$$x''(t) \sim \frac{x(t-\tau) - 2x(t) + x(t+\tau)}{\tau^2},$$

мы можем записать в $\bar{X}_n$ следующую последовательность приближенных задач, или разностную схему:

$$-\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\tau^2} + c_k x_k = y_k, \quad k = 1,\, \ldots,\, n-1, \tag{4}$$

$$x_0 = x_n = 0. \tag{5}$$

Здесь $(y_k)_{k=1}^{n-1} = T_n y$, $(c_k)_{k=1}^{n-1} = T_n c$.

Разностную схему (4)–(5) нам будет удобнее записать в матричном виде:

$$\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n, \tag{6}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\bar{y}_n = T_n y, \quad \bar{A}_n = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{\tau^2} + c_1 & -\dfrac{1}{\tau^2} & 0 & \ldots & 0 \\ -\dfrac{1}{\tau^2} & \dfrac{2}{\tau^2} + c_2 & -\dfrac{1}{\tau^2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & -\dfrac{1}{\tau^2} & \dfrac{2}{\tau^2} + c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Перейдем к проверке условия аппроксимации. Имеем

$$\Delta_n^2 = \|\bar{A}_n T_n x - T_n A x\|_{\text{сф}}^2 =$$
$$= \frac{l}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|-\frac{x(t_{k-1}) - 2x(t_k) + x(t_{k+1})}{\tau^2} + c_k x(t_k) + x''(t_k) - \right.$$
$$\left. - c_k x(t_k)\right|^2 = \frac{l}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|x''(t_k) - \frac{x(t_{k-1}) - 2x(t_k) + x(t_{k+1})}{\tau^2}\right|^2.$$

Предположим теперь, что решение $x(t)$ задачи (1), (2) четырежды дифференцируемо на $(0,\, l)$, причем

$$\gamma_4 = \sup_{(0,\, l)} |x^{(\text{IV})}(t)| < +\infty.$$

По формуле Тейлора

$$x(t_{k+1}) = \sum_{i=0}^{3}\frac{x^{(i)}(t_k)}{i!}\tau^i + \frac{x^{(\text{IV})}(\xi_k)}{24}\tau^4,$$
$$x(t_{k-1}) = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i\frac{x^{(i)}(t_k)}{i!}\tau^i + \frac{x^{(\text{IV})}(\eta_k)}{24}\tau^4,$$

где $\xi_k \in (t_k,\, t_{k+1})$, $\eta_k \in (t_{k-1},\, t_k)$.

Следовательно, имеем оценку

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{x^{(\text{IV})}(\xi_k)}{24} + \frac{x^{(\text{IV})}(\eta_k)}{24}\right|\tau^4 \leqslant \left(\frac{\gamma_4}{12}\right)^2\tau^4 l,$$

или

$$\|\bar{A}_n T_n x - T_n A x\|_{\text{сф}} = \Delta_n \leqslant \frac{\gamma_4 l^2\sqrt{l}}{12n^2}. \tag{7}$$

Итак, порядок аппроксимации равен 2.

Займемся теперь проверкой условия устойчивости. Введем в $\bar{X}_n$ скалярное произведение. Если $\bar{u}_n = (u_k)_{k=1}^{n-1}$, $\bar{v}_n = (v_k)_{k=1}^{n-1}$, то положим

$$(\bar{u}_n,\, \bar{v}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} u_k v_k, \tag{8}$$

$\bar{X}_n$ превращено в евклидово пространство, причем $(\bar{u}_n,\, \bar{u}_n) = \|\bar{u}_n\|_{\text{сф}}^2$. Используя формулы (4), (5) и неотрицательность c_k, имеем

$$(\bar{A}_n\bar{x}_n,\, \bar{x}_n) = -\tau^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})x_k + \tau\sum_{k=1}^{n-1}c_k x_k^2 \geqslant$$
$$\geqslant \tau^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k-1} - x_k)^2. \tag{9}$$

Далее, замечая, что

$$x_s = \sum_{k=1}^{s}(x_k - x_{k-1}), \quad s \geqslant 1, \quad x_0 = 0,$$

по неравенству Коши получим

$$|x_s| \leqslant \sum_{k=1}^{s}|x_k - x_{k-1}| \leqslant \sqrt{s}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_{k-1}|^2\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Используя неравенства (9) и (10), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\|\bar{x}_n\|^2_{\text{сф}} = \tau\sum_{k=1}^{n-1}|x_s|^2 \leqslant \tau\sum_{s=1}^{n-1}s\sum_{k=1}^{n-1}|x_k - x_{k-1}|^2 =$$
$$= \frac{l(n-1)}{2}\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_{k-1}|^2 \leqslant \frac{l^2}{2}(\bar{A}_n\bar{x}_n,\, \bar{x}_n).$$

Таким образом, установлена оценка

$$(\bar{A}_n\bar{x}_n,\, \bar{x}_n) \geqslant 2l^{-2}\|\bar{x}_n\|^2. \tag{11}$$

Согласно замечания 2 п. 27.4 отсюда следует, что

$$\|\bar{A}_n\bar{x}_n\| \geqslant 2l^{-2}\|\bar{x}_n\|. \tag{12}$$

Условие устойчивости доказано, что вместе с условием аппроксимации (7) приводит к оценке

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{сф}} \leqslant \frac{\gamma_4 l^4\sqrt{l}}{24n^2}. \tag{13}$$

Таким образом, точность разностной схемы в норме сферической есть $o(1/n^2)$. Из оценки (13) и из неравенства (3) п. 27.2 вытекает, что

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{куб}} \leqslant \frac{\gamma_4 l^4}{24n^{3/2}},$$

т. е. имеет место равномерная T-сходимость $\bar{x}_n$ к x со скоростью $o(1/n^{3/2})$.

Наши рассуждения можно уточнить и показать, что на самом деле эта скорость будет $o(1/n^2)$. Из неравенства (10) находим, как и выше,

$$\|x_n\|^2_{\text{куб}} \leqslant n\sum_{k=1}^{n}|x_k - x_{k-1}|^2 \leqslant l(\bar{A}_n\bar{x}_n,\, \bar{x}_n) \leqslant l\,\|\bar{A}_n x_n\|_{\text{сф}}\,\|\bar{x}_n\|_{\text{сф}}.$$

Заменим в этом неравенстве $\bar{x}_n$ на $\bar{x}_n - T_n x$ и, вычислив предварительно (см. (7))

$$||\bar{A}_n(\bar{x}_n - T_n x)||_{\text{сф}} = ||\bar{y}_n - \bar{A}_n T_n x||_{\text{сф}} = ||T_n A x - A_n T_n x||_{\text{сф}} = \Delta_n,$$

находим по неравенству (3) п. 27.2

$$||\bar{x}_n - T_n x||^2_{\text{куб}} \leqslant l\Delta_n ||\bar{x}_n - T_n x||_{\text{сф}} \leqslant l\Delta_n ||\bar{x}_n - T_n x||_{\text{куб}}.$$

Окончательно имеем оценку

$$||\bar{x}_n - T_n x||_{\text{куб}} \leqslant \frac{\gamma_4 l^4}{12n^2}. \tag{14}$$

28.2. Сходимость разностной схемы метода прямых в случае смешанной задачи для уравнения теплопроводности. В прямоугольнике $\bar{Q} = \{x, t : \ 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant \theta\}$ рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{3}$$

Предположим, что параметры задачи $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ достаточно гладки, а начальное и граничные условия согласованы так, что задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u(x, t)$ (функция $u(x, t)$ называется *классическим решением* задачи (1)–(3), если она непрерывна на $\bar{Q}$ и удовлетворяет условиям (2) и (3), а на $Q = \{x, t : \ 0 < x < l, 0 < t < \theta\}$ имеет непрерывные частные производные, входящие в (1), и обращает (1) на Q в тождество.

Задачу (1)–(3) запишем в виде операторного уравнения:

$$Au = v, \tag{4}$$

где неизвестное u разыскивается в банаховом пространстве $U = C(\bar{Q})$, а правая часть v лежит в банаховом пространстве пар $V = C(\bar{Q}) \dotplus C[0, l]$: $v = (f(x, t)); \varphi(x)$, где f непрерывна на $\bar{Q}$, а φ непрерывна на $[0, l]$, причем

$$||v||_V = ||f||_{C(\bar{Q})} + ||\varphi||_{C[0,l]}.$$

Оператор A определим равенством

$$Au = (Lu; \ u(x, 0)),$$

где L — дифференциальное выражение, определенное в (1). Область определения $D(A)$ определим как линейное многообразие в U, состоящее из функций $u(x, t)$, равных нулю при $x = 0$ и при $x = l$, непрерывно дифференцируемых на Q один раз по t и два раза по x.

Теперь дадим описание операторов сужения T_n и T'_n и аппроксимирующих пространств $\bar{U}_n$ и $\bar{V}_n$. Разобьем $[0, l]$ точками $x_i = il/n$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) на n равных частей и аппроксимируем $\bar{Q}$ «сеточным множеством» (рис. 11), состоящим из отрезков прямых $x_i = il/n$ ($i = 0, 1, \ldots, n$); $0 \leqslant t \leqslant \theta$.

Для каждой $u(x,\,t)\in U$ положим

$$T_n u(x,\,t)=\left(u\left(\frac{il}{n},\,t\right)\right)_{i=1}^{n-1},$$

т. е. каждой функции двух переменных $u(x,\,t)$: мы поставим в соответствие вектор-функцию (столбец), координаты которой суть значения $u(x,\,t)$ на отрезках «сеточного множества», за исключением граничных отрезков, лежащих на прямых $x=0$ и $x=l$, где $u(x,\,t)$ задавать и не нужно, ибо, согласно (2), там $u=0$. Пространство $\bar{U}_n$, аппроксимирующее U, будет, следовательно, состоять из всевозможных столбцов вида $\bar{u}_n = (u_i(t))_{i=1}^{n-1}$, координаты которых $u_i(t)$ суть непрерывные на $[0,\,\theta]$ функции. Норму в $\bar{U}_n$ введем следующим образом. Сначала определим норму $\bar{u}_n$ при фиксированном $t\in[0,\,\theta]$:

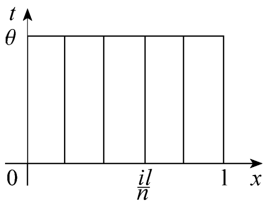


Рис. 11

$$||\bar{u}_n||_{\text{сф}}=\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|u_i(t)|^2\right)^{1/2}.$$

Затем полагаем (это и есть норма в $\bar{U}_n$)

$$\|\bar{u}_n\|=\max_{[0,\,\theta]}||\bar{u}_n||_{\text{сф}}.$$

Теперь определим операторы T'_n и пространства $\bar{V}_n$. Положим

$$T'_n v=T'_n(f;\,\varphi)=\{T_n f,\,T_n^{(1)}\varphi\},$$

где оператор $T_n f=(f(il/n,\,t))_{i=1}^{n-1}$ определен выше, а $T_n^{(1)}\varphi = (\varphi(il/n))_{i=1}^{n-1}$ — аналогичный оператор сужения для функций одной переменной. Таким образом, пространство $\bar{V}_n$ будет состоять из пар $\bar{v}_n$ двух объектов: функционального столбца (вектор-функции) $\bar{f}_n=(f_i(t))_{i=1}^{n-1}$, $t\in[0,\,\theta]$, и числового столбца $\bar{\varphi}_n=(\varphi_i)_{i=1}^{n-1}$, т. е. $\bar{v}_n=(\bar{f}_n;\,\bar{\varphi}_n)$. Норму в $\bar{V}_n$ зададим так:

$$\|\bar{v}_n\|=\|\bar{f}_n\|+||\bar{\varphi}_n||_{\text{сф}},$$

где $\|\bar{f}_n\|$ определяется так же, как и $||\bar{u}_n||$. Нормы в $\bar{U}_n$ (и в $\bar{V}_n$) не согласованы с нормой в U (в V), однако в обоих случаях можно показать, что нормы невырождены и, следовательно, имеет место единственность T-пределов.

Запишем теперь дифференциально-разностные уравнения метода прямых. Аппроксимируя, как и в п. 28.1, оператор $\partial^2/\partial x^2$ разностным отношением, приходим к следующей задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{u}_k - \frac{a^2 n^2}{l^2}(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}) = f_k(t), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

$$u_0(t) = u_n(t) \equiv 0, \tag{6}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{7}$$

где $(f_k(t))_{k=1}^{n-1} = T_n f(x, t)$, $(\varphi_k)_{k=1}^{n-1} = T_n^{(1)}\varphi(x)$.

Задачу (5)–(7) запишем в матрично-операторном виде:

$$\bar{A}_n \bar{u}_n = \bar{v}_n, \tag{8}$$

где $\bar{A}_n \bar{u}_n = \left(\left[\frac{d}{dt} - \bar{B}_n\right]\bar{u}_n;\ \bar{u}_n(0)\right)$, а

$$-\bar{B}_n = \begin{bmatrix} \frac{2a^2n^2}{l^2} & -\frac{a^2n^2}{l^2} & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{a^2n^2}{l^2} & \frac{2a^2n^2}{l^2} & -\frac{a^2n^2}{l^2} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\frac{a^2n^2}{l^2} & \frac{2a^2n^2}{l^2} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Нам удобно также (8) записать в форме задачи Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{u}_n}{dt} - \bar{B}_n \bar{u}_n = \bar{f}_n, \quad \bar{u}_n(0) = \bar{\varphi}_n. \tag{10}$$

Займемся проверкой условия аппроксимации. Предположим сначала, что параметры задачи (1)–(3) $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ таковы, что ее решение $u(x, t)$ имеет в $\bar{Q}$ непрерывную $\partial^2 u/\partial x^2$. Покажем, что в этом предположении при $n \to \infty$

$$\Delta_n = \| \bar{A}_n T_n u - T_n' A u \| \to 0.$$

Действительно, так как операторы T_n и d/dt перестановочны, то

$$\bar{A}_n T_n u = \left(\left(\frac{d}{dt} - \bar{B}_n\right) T_n u; \quad \bar{\varphi}_n\right),$$

$$T_n' A u = \left(T_n \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u; \quad \bar{\varphi}_n\right),$$

$$\bar{A}_n T_n u - T_n' A u = \left(T_n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \bar{B}_n T_n u; \quad 0\right),$$

$$\Delta_n = a^2 \max_{t\in[0,\,\theta]} \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^2 u(kl/n,\ t)}{\partial x^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n^2}{l^2} \left(u\left(\frac{(k-1)l}{n},\ t\right) - 2u\left(\frac{kl}{n},\ t\right) + u\left(\frac{(k+1)l}{n},\ t\right)\right)\right]^2 \right\}^{1/2},$$

и доказательство стремления Δ_n к нулю получается, как и в п. 28.1, из равномерной непрерывности $\partial^2 u/\partial x^2$ в $\bar{Q}$.

Если же предположить, что решение $u(x,\ t)$ имеет в Q производную $\partial^4 u/\partial x^4$, причем

$$\gamma_4 = \sup_Q \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| < +\infty, \tag{11}$$

то, как и в п. 26.1, доказывается, что

$$\Delta_n = \| \bar{A}_n T_n u - T'_n A u \| \leqslant \frac{\gamma_4 l^2 a^2}{12 n^2}. \tag{12}$$

Условие устойчивости проверим, используя стандартное скалярное произведение при фиксированном $t \in [0,\ \theta]$ (см. формулу (8) п. 28.1). Умножив уравнение (10) скалярно на $\bar{u}_n$, получим

$$\left(\frac{d\bar{u}_n}{dt},\ \bar{u}_n\right) - (\bar{B}_n \bar{u}_n,\ \bar{u}_n) = (\bar{f}_n,\ \bar{u}_n). \tag{13}$$

Но согласно неравенству (11) п. 28.1

$$(-\bar{B}_n \bar{u}_n,\ \bar{u}_n) \geqslant \frac{2a^2}{l^2}\, \|\bar{u}_n\|^2. \tag{14}$$

Заметим, далее, что

$$\left(\frac{d\bar{u}_n}{dt},\ \bar{u}_n\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar{u}_n,\ \bar{u}_n) = \|\bar{u}_n\| \frac{d\|u_n\|}{dt},$$

$$(\bar{f}_n, \bar{u}_n) \leqslant \|\bar{f}_n\|\, \|\bar{u}_n\|.$$

Следовательно, равенство (13) после применения этих оценок и сокращения на $\|\bar{u}_n\|$ приводит к дифференциальному неравенству

$$\frac{d\|\bar{u}_n\|}{dt} + \frac{2a^2}{l^2}\|\bar{u}_n\| \leqslant \|\bar{f}_n\|, \tag{15}$$

к которому, в соответствии с (10), следует добавить начальное условие

$$\|\bar{u}_n\| \,\Big|_{t=0} = \|\bar{\varphi}_n\|. \tag{16}$$

Умножая (15) на интегрирующий множитель $\exp\left\{-\dfrac{2a^2}{l^2}t\right\}$ и интегрируя затем полученное неравенство с учетом (16), получим

$$\|\bar{u}_n\| \leqslant \|\bar{\varphi}_n\| \exp\left\{-\frac{2a^2}{l^2}t\right\} + \int_0^t \exp\left\{-\frac{2a^2}{l^2}(t-s)\right\} \|\bar{f}_n(s)\|\, ds.$$

Переходя к $\max$ на $[0,\, \theta]$ в этом неравенстве и оценивая, находим

$$\|\!|\, \bar{u}_n |\!\| \leqslant \|\bar{\varphi}_n\| + \|\!|\, \bar{f}_n |\!\| \max_{[0,\,\theta]} \int_0^t \exp\left\{-\frac{2a^2}{l^2}(t-s)\right\} ds \leqslant \|\bar{\varphi}_n\| + \frac{l^2}{2a^2} \|\!|\, \bar{f}_n |\!\| .$$

Полученное неравенство можно переписать так:

$$\|\!|\, \bar{v}_n |\!\| = \|\!|\, \bar{A}_n \bar{u}_n |\!\| \geqslant \gamma \|\!|\, \bar{u}_n |\!\|, \quad \gamma^{-1} = \max\left(1,\, \frac{l^2}{2a^2}\right). \tag{17}$$

Этим доказано условие устойчивости.

В сочетании с условием аппроксимации (12) и с фактом невырожденности норм в $\bar{U}_n$, согласно основной теореме о T-сходимости, получаем

$$\|\!|\, \bar{u}_n - T_n u |\!\| = \max_{[0,\,\theta]} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left| u\left(\frac{il}{n},\, t\right) - u_i(t) \right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(1,\, \frac{l^2}{2a^2}\right) \frac{\gamma_4 l^2 a^2}{12 n^2}.$$

Полученная оценка не зависит от θ. Если предположить, что $f(x,\, t)$ непрерывна в полуполосе $\bar{Q}_\infty = \{0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$ и $\sup\limits_{\bar{Q}_\infty} |f(x,\, t)| < +\infty$, то, проведя все рассуждения в пространствах $U = C(\bar{Q}_\infty)$, $V = C(\bar{Q}_\infty) \dotplus C[0,\, l]$ и в соответствующих им аппроксимирующих пространствах, мы получили бы T-сходимость $\bar{u}_n$ к u в $\bar{Q}_\infty$.

28.3. Сходимость разностной схемы в случае задачи Дирихле для уравнения Лапласа в квадрате. Пусть $Q = \{x,\, y:\ 0 < x < a,\, 0 < y < a\}$ — квадрат, Γ — его граница, $\bar{Q} = Q + \Gamma$ — замкнутый квадрат. Пусть, далее, $\varphi(x,\, y)$ — функция, определенная и непрерывная на Γ. В квадрате Q рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \varphi. \tag{2}$$

Задачу (1), (2) запишем в операторной форме:

$$Au = \varphi. \tag{3}$$

Область определения $D(A) \subset U = C(Q)$ состоит из гармонических функций в $Q(\Delta u = 0)$, непрерывных на $\bar{Q}$. Каждой такой функции оператор A ставит в соответствие ее значение на границе Γ, т. е. значения A лежат в пространстве $\Phi = C(\Gamma)$. Ниже предполагается, что функция φ такова, что классическое решение задачи (1), (2) существует и единственно (см. [23, с. 243]).

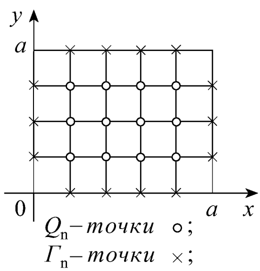


Рис. 12

Переходим к описанию разностной схемы метода сеток. Разобьем квадрат $\bar{Q}$ равномерной сеткой с узлами $(x_i,\, y_i)$ $(i, j = 0,\, 1,\, \ldots,\, n)$, где $x_i = ih$, $y_i = jh$ и $h = a/n$ (x_i, y_i зависят от n).

Введем сеточную область и сеточную границу (рис. 12)

$$Q_n = \{(x_i,\, y_j);\ i, j = 1,\, \ldots,\, n-1\} = \\ = \{(x_i,\, y_i) \in Q\},$$

$$\Gamma_n = \{(x_i,\, y_j) \in \widehat{\Gamma}\}.$$

где $\hat{\Gamma}$ состоит из всех точек Γ, за вычетом четырех угловых точек $(0,\, 0)$, $(0,\, a)$, $(a,\, 0)$, $(a,\, a)$.

Операторы сужения T_n и T'_n введем так:

$$T_n u = u(x,\, y), \quad \text{где} \quad (x,\, y) \in Q_n,$$

$$T_n u = u(x,\, y), \quad \text{где} \quad (x,\, y) \in \Gamma_n.$$

Теперь возникают два пространства: $(n-1)^2$-мерное пространство $\bar{U}_n$ сеточных функций $v(x,\, y)$ и $4(n-1)$-мерное пространство $\bar{\Phi}_n$ сеточных функций $\varphi(x,\, y)$. Нормы определим так:

$$\|v\|_{\bar{U}_n} = \max_{(x,\, y) \in \bar{Q}_n} |v(x,\, y)|, \quad \|\varphi\|_{\bar{\Phi}_n} = \max_{(x,\, y) \in \Gamma_n} |\varphi(x,\, y)|. \tag{4}$$

Аппроксимируя вторые производные функции u, как обычно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u(x-h,\, y) - 2u(x,\, y) + u(x+h,\, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{u(x,\, y-h) - 2u(x,\, y) + u(x,\, y+h)}{h^2},$$

мы приходим к следующей разностной схеме для определения сеточной функции $v(x,\, y)$:

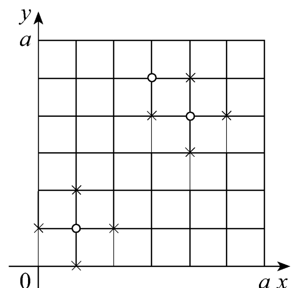
$$\frac{1}{4}\{v(x-h,\, y) + v(x+h,\, y) + v(x,\, y-h) + v(x,\, y+h)\} = v(x,\, y),$$

$$(x,\,y) \in Q_n, \tag{5}$$

$$v(x,\,y) = \varphi(x,\,y), \quad (x,\,y) \in \Gamma_n. \tag{6}$$

Для сеточной функции введено другое обозначение (v, а не u), чтобы подчеркнуть, что она не является, вообще говоря, решением задачи (1), (2). Задача (5), (6) представляет собой систему n^2+2n-3 уравнений с n^2+2n-3 неизвестными. Решение всякой такой системы (при возможных $\varphi(x,\,y)$) будем называть *сеточной гармонической функцией*. Ниже будет установлен принцип максимума для сеточных гармонических функций, аналогичный известному принципу максимума гармонических функций (см. [22]).

Множество точек сетки, участвующих в разностной аппроксимации значения дифференциального оператора в данной точке, принято называть *шаблоном*. В рассматриваемом случае шаблон состоит из пяти точек: (рис. 13) центра шаблона $(x,\,y)$ и точек $(x-h,\,y)$, $(x+ +h,\,y)$, $(x,\,y-h)$, $(x,\,y+h)$ — граничных точек шаблона (вершины $\bar{Q}_n$ ни в один шаблон не попадают). Уравнение (5) означает, что значение сеточной гармонической функции в центре шаблона есть среднее арифметическое ее значений в граничных точках шаблона. Этот факт является следствием известной теоремы о среднем для гармонических функций (см. [22]).



○ – *центр шаблона*,
× – *его граничные точки*

Рис. 13

Отсюда вытекает следующее рассуждение. Предположим, что наибольшее значение M сеточной гармонической функции $v(x,\,y)$ в $\bar{Q}_n$ достигается в точке $(x,\,y) \in \in Q_n$ (т. е. во «внутренней точке»). Рассмотрим шаблон с центром в $(x,\,y)$. Если хоть одно из значений v в граничных точках этого шаблона будет строго меньше M, то равенство (5) будет невозможно. Следовательно, $v(x,\,y) = M$ на шаблоне, но тогда $v(x,\,y) \equiv \equiv M$ на $\bar{Q}_n$. Таким образом, либо $v(x,\,y) \equiv M$ на Q_n, либо наибольшее значение $v(x,\,y)$ достигается на Γ_n. Аналогично обстоит дело с наименьшим значением. Во всяком случае для всех возможных решений $v(x,\,y)$ задачи (5), (6) доказана оценка ($(x,\,y) \in \bar{Q}_n$)

$$\min_{(x,\,y)\in\Gamma_n} \varphi(x,\,y) \leqslant v(x,\,y) \leqslant \max_{(x,\,y)\in\Gamma_n} \varphi(x,\,y),$$

и, следовательно (см. определение норм (4)),

$$\|v\|_{\bar{U}_n} \leqslant \|\varphi\|_{\bar{\Phi}_n}. \tag{7}$$

Из полученного неравенства уже вытекает существование единственного решения алгебраической системы (5), (6). Дело в том, что при $\varphi \equiv 0$ (на Γ_n) из (7) следует, что $v \equiv 0$ на $\bar{Q}_n$, т. е. соответствующая системе (5), (6) однородная система имеет только тривиальное решение. Но тогда определитель этой системы отличен от нуля и применимо правило Крамера.

Записывая систему (5), (6) в матричном виде:

$$\bar{A}_n \bar{v}_n = \bar{\varphi}_n,$$

неравенству (7) можно придать такую форму:

$$\|\bar{A}_n \bar{v}_n\|_{\bar{\Phi}_n} \geqslant \|\bar{v}_n\|_{\bar{U}_n},$$

т. е. форму условия устойчивости.

Перейдем к проверке условия аппроксимации. Пусть сначала граничная функция φ такова, что решение $u(x, y)$ имеет непрерывные в $\bar{Q}$ частные производные $\partial^2 u/\partial x^2$ и $\partial^2 u/\partial y^2$. Как и в предыдущих пунктах, при $n \to \infty$ имеем

$$\Delta_n = \|\bar{A}_n u - T_n' A u\|_{\bar{\Phi}_n} = \max_{(x,\, y) \in Q_n} \left| \frac{u(x+h,\, y) - 2u(x,\, y) + u(x-h,\, y)}{h^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 u(x,\, y)}{\partial x^2} + \frac{u(x,\, y+h) - 2u(x,\, y) + u(x,\, y-h)}{h^2} - \frac{\partial^2 u(x,\, y)}{\partial y^2} \right| \to 0.$$

Если же решение $u(x, y)$ имеет в Q ограниченные $\partial^4 u/\partial x^4$ и $\partial^4 u/\partial y^4$, то

$$\Delta_n \leqslant \frac{\gamma_4}{24} h^2,$$

где

$$\gamma_4 = \sup_{(x,\, y) \in Q} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\},$$

и мы приходим к следующей оценке сходимости разностной схемы:

$$\max_{(x,\, y) \in \bar{Q}_n} |u(x,\, y) - v(x,\, y)| \leqslant \frac{\gamma_4}{24} h^2 = \frac{\gamma_4 a^2}{24 n^2}.$$

28.4. Собственные значения и собственные векторы оператора второго разностного отношения. Одним из основных методов исследования устойчивости разностных схем является конечномерный аналог метода Фурье. В этом пункте будут вычислены собственные значения и собственные векторы оператора второго разностного отношения. Полученные результаты будут использованы в п. 28.5 при изучении устойчивости рассматриваемой там разностной схемы.

В евклидовом пространстве $\bar{U}_n$ — сеточном пространстве $(n-1)$-мерных столбцов $\bar{u}_n = (u_i)_{i=1}^{n-1}$ со скалярным произведением $(h = l/n)$

$$(\bar{u}_n,\, \bar{v}_n) = h^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i$$

— рассмотрим оператор $\bar{B}_n$ — оператор второго разностного отношения, аппроксимирующий на $[0,\, l]$ оператор второй производной (см. формулу (9) п. 28.2). Найдем собственные значения и собственные векторы оператора — $\bar{B}_n$. Для этого заметим сначала, что он является самосопряженным положительно определенным оператором в U_n. Действительно, нетрудно убедиться в том, что

$$(\bar{B}_n\bar{u}_n,\,\bar{v}_n) = h^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1})v_i =$$
$$= h^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)v_i - h^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}(u_i-u_{i-1})v_i =$$
$$= h^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}-u_i)(v_{i+1}-v_i) = (\bar{u}_n,\bar{B}_n\bar{v}_n),$$

т. е. $\bar{B}_n$ — самосопряженный. Положительная определенность оператора — $\bar{B}_n$ была доказана в п. 28.2 (см. формулу (14)). Поскольку $\dim U_n = n-1$, то, согласно п. 23.2, оператор — $\bar{B}_n$ имеет $n-1$ собственных значений (с учетом их кратности), все они положительны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Запишем задачу на собственные значения в «сеточной форме»:

$$-\frac{u(x-h)-2u(x)+u(x+h)}{h^2} = \lambda u(x), \tag{1}$$

$$x\in\{ih\}_{i=1}^{n-1},\quad h=1/n,$$
$$u(0)=u(l)=0. \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(x)=\sin\alpha x,\quad x\in\{ih\}_{i=1}^{n-1}. \tag{3}$$

Поскольку $u(x-h)+u(x+h) = 2\sin\alpha x\cos\alpha h$, то после подстановки (3) в (1) и сокращения на $\sin\alpha x \not\equiv 0$ (разыскивается нетривиальное решение $u(x)$) мы приходим к следующему равенству:

$$-2\cos\alpha h = -2+\lambda h^2$$

Следовательно,

$$\lambda = 2\,\frac{1-\cos\alpha h}{h^2} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}.$$

Поскольку решение (3) должно удовлетворять граничным условиям (2), то необходимо, чтобы $\sin\alpha l = 0$, откуда $\alpha l = \pi k$ ($k=1,\,\ldots\,,\,n-1$).

Таким образом, мы нашли $n-1$ различных собственных значений оператора $-\bar{B}_n$:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l},\quad k=1,\,\ldots\,,\,n-1, \tag{4}$$

которым отвечает ортогональная система собственных векторов

$$u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in \{ih\}_{i=0}^{n-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{5}$$

Вычислим норму собственного вектора $u_k(x)$:

$$\|u_k(x)\|^2 = h\sum_{i=1}^{n-1} u_k^2(x_i) = h\sum_{i=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi x_i}{l} =$$
$$= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi x_i}{l}\right) = \frac{(n-1)l}{2n} - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi x_i}{l} = \frac{l}{2}.$$

Здесь использовано соотношение

$$\sum_{i=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi x_i}{l} = -1.$$

Действительно, умножив данную сумму косинусов на $2\sin\frac{k\pi}{l}h$, получим

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{l}h\cos\frac{2k\pi}{l}x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left[\sin\frac{2k\pi}{l}\left(x_i+\frac{h}{2}\right) - \sin\frac{2k\pi}{l}\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\right] =$$
$$= \sin\frac{2k\pi}{l}\left(l-\frac{h}{2}\right) - \sin\frac{k\pi}{l}h = -2\sin\frac{k\pi}{l}h,$$

откуда и следует наше утверждение. Итак,

$$\|u_k(x)\| = \sqrt{l/2}. \tag{6}$$

Ортонормированная система собственных векторов задается формулами

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad x \in \{ih\}_{i=1}^{n-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Всякую сеточную функцию $u(x)$ ($x \in \{ih\}_{i=1}^{n-1}$), удовлетворяющую нулевым граничным условиям $u(0) = u(l) = 0$, можно разложить в (конечный) ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k v_k(x). \tag{8}$$

При этом

$$c_k = (u,\, v_k), \qquad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} c_k^2. \tag{9}$$

28.5. Условная сходимость разностной схемы в случае смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Вернемся к задаче (1)–(3) п. 28.2 в тех же предположениях и запишем ее в виде операторного уравнения (4) п. 28.2. Здесь, однако, разностная аппроксимация будет осуществлена и по x, и по t. Разобьем $[0,\, l]$ на n равных частей точками $x_i = iln^{-1}$ $(i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n)$. Кроме того, разобьем $[0,\, \theta]$ на m равных частей точками $t_j = j\theta m^{-1}$ $(j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m)$. Введем в рассмотрение сеточное множество

$$(x_i,\, t_j), \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n, \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m,$$

аппроксимирующее прямоугольник Q.

Зададим операторы сужения

$$T_{n,\,m} u(x,\, t) = (u(x_i,\, t_j))_{\substack{i=1,\,\ldots,\,n-1,\\ j=1,\,\ldots,\,m}}$$

ставящие в соответствие каждой непрерывной на $\bar{Q}$ функции $u(x,\, t)$ набор из $m(n-1)$ чисел — ее значений в тех точках сеточного множества, где u неизвестна. В узлах $(0,\, t_j)$, $(l,\, t_j)$ $(j = 0,\, 1,\, \ldots,\, m)$, $u \equiv 0$ согласно граничным условиям (2) п. 28.2, а в узлах $(x_i,\, 0)$ $u = \varphi(x)$. Пространство $\bar{U}_{n,\,m}$, аппроксимирующее U (см. п. 28.2), состоит, следовательно, из всевозможных наборов чисел вида

$$\bar{u}_{n,\,m} = (u_i^j)_{i=1,\,\ldots,\,n-1}^{1,\,\ldots,\,m}.$$

Норму в $\bar{U}_{n,\,m}$ зададим так:

$$\|\bar{u}_{n,\,m}\| = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-1\\ 1 \leqslant j \leqslant m}} |u_i^j|.$$

Пусть, далее, для всякой функции $v \in V$

$$T'_{n,\,m} v = \{T_{n,\,m} f;\; T_n \varphi\},$$

т. е. каждой паре $\{f(x,\, t);\; \varphi(x)\}$ ставим в соответствие пару

$$\left\{(f(x_i,\, t_{j-1}))_{\substack{i=1,\,\ldots,\,n-1;\\ j=1,\,\ldots,\,m}} (\varphi(x_i))_{i=1,\,\ldots,\,n-1}\right\}.$$

Таким образом, аппроксимирующее V пространство $\bar{V}_{n,\,m}$ состоит из упорядоченных пар наборов чисел

$$\bar{v}_{n,\,m} = \left\{(f_i^j)_{i=1,\,\ldots,\,n-1}^{j=1,\,\ldots,\,m}; \quad (\varphi_i)_{i=1,\,\ldots,\,n-1}\right\}.$$

Норму в $\bar{V}_{n,\,m}$ зададим следующим образом:

$$\|\bar{v}_{n,\,m}\| = \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\ 1\leqslant j\leqslant m}} |f_i^j| + \max_{1\leqslant i\leqslant n-1} |\varphi_i|.$$

Нормы в $\bar{U}_{n,\,m}$ (в $\bar{V}_{n,\,m}$) согласованы с нормой в U (в V).

Аппроксимируя операторы $\partial/\partial t$ и $\partial^2/\partial x^2$ разностными отношениями, получим следующую разностную схему:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} - a^2\frac{u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}}{h^2} = f_i^{j-1}, \tag{1}$$

$$i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$u_0^j = u_n^j = 0; \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$u_i^0 = \varphi_i, \, i = 0, \quad 1, \ldots, n-1, \tag{3}$$

где для сокращения мы положим $\tau = \theta m^{-1}$ — шаг по t, $h = ln^{-1}$ — шаг по x. Перепишем эту систему в виде

$$u_i^j = \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) u_i^{j-1} + \frac{a^2\tau}{h^2}(u_{i-1}^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}) + \tau f_i^{j-1} \tag{4}$$

с граничными условиями (2) и начальными условиями (3). Такая форма системы позволяет находить неизвестные последовательно, по «временным слоям». При $j = 1$ получим

$$u_i^1 = \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) \varphi_i + \frac{a^2\tau}{h^2}(\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1}) + \tau f_i^0. \tag{5}$$

Затем при $j = 2$ находим выражение u_i^2 через известные уже значения u_i^2 и т. д. Таким образом, задача (1)–(3) имеет единственное решение.

Перейдем к обсуждению условий аппроксимации и устойчивости.

Что касается условия аппроксимации, то оно сводится к проверке условия аппроксимации отдельно для $\partial/\partial t$ и отдельно для $\partial^2/\partial x^2$. Пусть решение задачи (1)–(3) обладает повышенной гладкостью, что обеспечивается повышенной гладкостью «входных данных» f и φ, а именно в Q существуют ограниченные $\partial^2 u/\partial t^2$ и $\partial^4 u/\partial x^4$. Тогда, как это неоднократно делалось выше, устанавливается, что

$$\|T'_{n,\,m}Lu - \bar{L}_{n,\,m}T_{n,\,m}u\| = O(\tau + h^2). \tag{6}$$

Разностный оператор $\bar{L}_{n,\,m} \in \mathcal{L}(\bar{U}_{n,\,m}, \, \bar{V}_{n,\,m})$ определяется в (6) формулами (1)–(3).

Займемся теперь исследованием устойчивости. Предположим сначала, что

$$1 - \frac{2a^2\tau}{h^2} \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{2a^2\tau}{h^2} \leqslant 1. \tag{7}$$

Из формулы (5) тогда имеем оценку ($i = 1, \ldots, n-1$)

$$|u_i^1| \leqslant \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) ||\varphi|| + \frac{a^2\tau}{h^2} 2\, ||\varphi|| + \tau ||f||,$$

т. е.

$$||\bar{u}||^{-1} \leqslant ||\varphi|| + \tau ||f||, \quad \text{где} \quad \bar{u}^{-1} = (u_i^1)_{i=1}^{n-1}.$$

Используя формулу (4), последовательно находим

$$|u_i^2| \leqslant ||u^1|| + \tau ||f|| \leqslant ||\varphi|| + 2\tau ||f||.$$

Положим, далее, $\bar{u}^j = (u_i^j)_{i=1}^{n-1}$. Мы показали, что

$$||\bar{u}^2|| \leqslant ||\varphi|| + 2\tau ||f||.$$

Методом индукции устанавливаем, что

$$||\bar{u}^j|| \leqslant ||\varphi|| + j\tau ||f||.$$

Но $j\tau \leqslant \theta$ ($j = 1, \ldots, m$); следовательно,

$$||\bar{u}^j|| \leqslant ||\varphi|| + \theta ||f||.$$

Окончательно, беря $\max$ по j, получим

$$||\bar{u}_{n,\,m}|| \leqslant ||\varphi|| + \theta ||f||.$$

Доказана устойчивость схемы (1)–(3), а следовательно, и ее сходимость со скоростью $O(\tau + h^2)$ в предположении, что выполнено условие (7). Оказывается, при нарушении условия (7) разностная схема (1)–(3) может потерять устойчивость. Таким образом, устойчивость имеет место лишь при определенном ограничении (7) на шаги h и τ. Такие разностные схемы принято называть условно устойчивыми в отличие от безусловно устойчивых разностных схем, для которых устойчивость имеет место при любых h и τ.

Рассмотрим подробнее случай неустойчивости. Пусть ниже $f \equiv 0$. Разложим сеточное начальное условие $\varphi(x)$ по собственным векторам оператора $\bar{B}_n$ (см. п. 28.4, (7)):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k(x). \tag{8}$$

Решение задачи (1)–(3) ($f \equiv 0$) будем искать в виде

$$u(x,\, t) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(t)\, v_k(x). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (1) п. 28.4, а (8) в (3) п. 28.4 и приравнивая коэффициенты при базисных векторах, получим для определения $c_k(t)$ задачу (λ_k — собственное значение $\bar{B}_n$)

$$\frac{c_k(t+\tau)-c_k(t)}{\tau}+a^2\lambda_k c_k(t)=0, \quad c_k(0)=\alpha_k. \tag{10}$$

Упражнение. Покажите, что решение задачи (10) дается следующей явной формулой:

$$c_k(s\tau)=(1-a^2\lambda_k\tau)^s\alpha_k, \quad s=1,\ \ldots\ ,m. \tag{11}$$

В п. 28.4 было показано (см. (4)), что

$$\lambda_k=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l}, \quad k=1,\ \ldots\ ,n-1.$$

Следовательно, $0<\lambda_k\leqslant 4/h^2$, откуда

$$1-\frac{4a^2\tau}{h^2}\leqslant 1-a^2\lambda_k\tau<1.$$

Поэтому, если $-1\leqslant 1-\dfrac{4a^2\tau}{h^2}$, т. е. выполнено условие (7), то из (11) следует

$$|c_k(s\tau)|\leqslant|\alpha_k|.$$

Согласно формулам (8), (9) п. 28.4 и данного пункта

$$\|u\|^2=\sum_{k=1}^{n-1}c_k^2(t)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^2=\|\varphi^2\|.$$

Мы еще раз доказали (в частном случае) устойчивость в предположении (7).

Покажем теперь, что в случае, когда соотношение (7) между шагами τ и h нарушено. рассматриваемая задача может оказаться неустойчивой. Предположим, что существует постоянная $\varepsilon>0$, не зависящая от τ и h (а тем самым — от m и n) и такая, что выполняются следующие неравенства:

$$1-a^2\lambda^2\lambda_k\tau\leqslant-1-\varepsilon, \quad k=1,\ \ldots\ ,n-1. \tag{12}$$

Тогда $|c_m(s\tau)|\geqslant(1+\varepsilon)^m|\alpha_s|\to+\infty$ при $m\to\infty$, т. е. при $\tau\to 0$. Это означает, что задача (10), а с ней и разностная схема (1)–(3) неустойчивы.

Таким образом разностная схема (1)–(3) условно устойчива: устойчивость имеет место при выполнении соотношения (7) между шагами h и τ.

28.6. Неявная разностная схема в случае смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Смешанную задачу (1)–(3) п. 28.2 для уравнения теплопроводности запишем в виде операторного уравнения (4) п. 28.2. Аппроксимирующие пространства $\bar{U}_{n,m}$ и $\bar{V}_{n,m}$ и операторы сужения $T_{n,m}$

и $T'_{n,\,m}$ берем, как в п. 28.5. Теперь мы рассмотрим такую разностную схему:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} - a^2\,\frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = f_{i-1}^{j-1}, \tag{1}$$

$$i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$u_0^j = u_n^j = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$u_i^0 = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Эта система есть система $m(n-1)$ линейных уравнений со стольким же числом неизвестных. Для подобных систем из курса линейной алгебры известно следующее: либо система имеет единственное решение, либо она имеет бесчисленное множество решений, либо система несовместна, т. е. не имеет решений. Других возможностей нет.

Покажем, что допущение о существовании решения системы приводит к выводу о единственности решения. Это будет означать, что имеет место первый случай, т. е. система имеет единственное решение. Попутно будет получено условие устойчивости. Перепишем уравнения (1) так:

$$u_i^j\left(1 + \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) = \frac{a^2\tau}{h^2}(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + u_i^{j-1} + \tau f_i^j, \tag{3}$$

$$i = 1, \ldots, n-1; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Пусть система (1), (2) совместна; тогда, полагая в (3) $j = 1$, получим

$$u_i^1\left(1 + \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) = \frac{a^2\tau}{h^2}(u_{i+1}^1 + u_{i-1}^1) + \varphi_i + \tau f_i^1, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Оценивая обе части равенства по модулю, получим

$$|u_i^1|\left(1 + \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) \leqslant \frac{2a^2\tau}{h^2}\|\bar{u}_n^{(1)}\| + \|\varphi\| + \tau\|\bar{f}_n^{(1)}\|, \tag{4}$$

где

$$\|\bar{u}_n^{(1)}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1}|u_i^1|, \quad \|\bar{f}_n^{(1)}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n-1}|f_{i-1}^1|.$$

Беря $\max$ по i в левой части (4), после уничтожения равных членов придем к неравенству $\|\bar{u}_n^{(1)}\| \leqslant \|\varphi\| + \tau\|\,\|f_{i-1}^1\|$.

Далее, полагая в (3) $i = 2$, найдем

$$\|\bar{u}_n^{(2)}\| \leqslant \|\bar{u}_n^{(1)}\| + \tau\|\bar{f}_n^{(2)}\| \leqslant \|\varphi\| + \tau\big\{\|\bar{f}_n^{(1)}\| + \|\bar{f}_n^{(2)}\|\big\}. \tag{5}$$

Продолжая эти оценки, получим

$$\|\bar{u}_{n,\,m}\| \leqslant \|\varphi\| + \theta\|\bar{f}_{n,\,m}\|. \tag{5}$$

Отсюда следует, что однородная система (1), (2) имеет лишь тривиальное решение, а значит, неоднородная система имеет единственное решение. Неравенство (5) и есть условие устойчивости.

Условие аппроксимации доказывается так же, как в п. 28.5. Таким образом, неявная разностная схема сходится при любом соотношении шагов τ и h (безусловно устойчива). Недостатком ее является сложность ее решения «по временным слоям» (последовательно при $j = 1$, при $j = 2$ и т. д.).

Дальнейшие примеры разностных схем читатель найдет в книгах [37, 42, 8, 31]. В современной теории разностных схем широко используется почти весь арсенал идей и методов функционального анализа.

§ 29. Интерполяция сплайнами

В данном параграфе в связи с задачей об интерполяции приближенных решений линейных уравнений вводится одно из важнейших понятий современной вычислительной математики — понятие о сплайнах. Так называются обычно кусочно полиномиальные функции, обладающие определенной гладкостью. Простейший пример сплайнов дают ломаные, т. е. непрерывные кусочно линейные функции. Сплайны находят многочисленные приложения (см. [40], [4], [31], [3]). Кроме задачи интерполяции, сплайны применяются в задачах теории приближения функций. Особенно важны применения сплайнов (метод конечных элементов) для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. В последние годы развивается абстрактный подход к теории сплайнов, изложенный в наиболее завершенной форме в учебном пособии [4], материал которого использован в пп. 29.2 и 29.3.

29.1. Операторы продолжения. Пусть X — исходное банахово пространство, а $\bar{X}$ — еще одно банахово пространство, аппроксимирующее X. Связь, между X и $\bar{X}$ пусть осуществляется операторами сужения (см. п. 27.1)

$$T \in \mathcal{L}(X, \bar{X}) \quad \text{с} \quad R(T) = \bar{X}.$$

Оператор $S \in \mathcal{L}(\bar{X}, X)$ будем называть *оператором продолжения* или *оператором интерполяции*, если $N(S) = \{0\}$. Эта терминология оправдывается тем обстоятельством, что оператор S действует из более «узкого» пространства $\bar{X}$ в более широкое пространство X. Кроме того, во многих конкретных ситуациях S оказывается оператором интерполяции в обычном смысле этого слова.

Остановимся теперь поподробнее на некоторых специальных операторах продолжения, тесно связанных с исходным оператором сужения T. Условие $R(T) = \bar{X}$ означает, что оператор T имеет правый обратный $S = T_r^{-1}$ (см. п. 12.3). Предположим, что подпространство нулей $N(T) \neq \{0\}$. В противном случае T имеет также и левый обратный и тогда непрерывно обратим по теореме Банаха. Правый обратный S не единствен. Естественно поэтому поставить вопрос об оптимальном, в том или ином смысле, выборе оператора S.

Пример 1. Пусть $X = C[0, l]$, $\bar{X} = c^{n+1}$, $Tx(t) = (x(t_i))_{i=0}^{n}$, где $\{t_i\}_0^n$ — сетка на $[0, l]$. В качестве оператора продолжения S^* здесь можно взять оператор кусочно линейной интерполяции, ставящий в соответствие вектору $\bar{x} = (x_i)_{i=0}^n \in c^{n-1}$ функцию $s(t) = S^*\bar{x}$, равную на $[t_i,\, t_{i+1}]$ $(i = 0,\, 1,\, \dots\, ,\, n-1)$

$$s(t) = x_i \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} + x_{i+1} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \equiv x_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}. \qquad (1)$$

Это лишь один из бесчисленных способов построения оператора продолжения S. Например, интерполяционная формула Лагранжа (см. [18]) дает способ построения функции $x(t)$, интерполирующей $\bar{x}$, в виде многочлена степени n:

$$x(t) = S\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i q_i(t),$$

где

$$q_i(t) = \frac{(t - t_0)\dots(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})\dots(t_i - t_n)}{(t - t_0)\dots(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})\dots(t_i - t_n)}.$$

Если, например, n кратно m, то на каждом $[t_{jm},\, t_{(j+1)m}]$ можно применить интерполяционную формулу Лагранжа, в результате чего мы получаем интерполяцию кусками парабол степени m. Частный случай $m = 1$ дает уже упомянутую кусочно линейную интерполяцию. Можно строить и другие конструкции продолжения, в том числе и с нелинейным оператором S.

Пример 2. Видоизменяя пример 1, примем $X = H^1(0,\, l)$ пространство Соболева функций, имеющих на $[0,\, l]$ обобщенную производную, интегрируемую с квадратом. Поскольку имеет место вложение $H^1(0,\, l)$ в $C[0,\, l]$, то все обсужденные в примере 1 операторы продолжения действуют из c^{n+1} в $H^1(0,\, l)$.

Покажем, что оператор кусочно линейной интерполяции S^* является оптимальным в следующем смысле: минимум квадратичного функционала $J(x) = \int_0^l {x'}^2(t)\, dt$ при условиях, что $x(t_i) = x_i$ $(i = 0,\, 1,\, \dots\, ,\, n)$ достигается на функции $s(t) = S^*\bar{x}$ и только на ней (см. (1)). Поскольку $s'(t) = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$ на $[t_i,\, t_{i+1}]$, то для любой функции $z(t) \in H^1(0,\, l)$ такой, что $Tz = 0$, т. е. $z(t_i) = 0$ $(i = 0,\, 1,\, \dots\, ,\, n)$ имеем

$$\int_0^l s'(t)\, z'(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} z'(t)\, dt = 0. \qquad (2)$$

Но тогда для любой функции $x(t) = s(t) + z(t)$ справедливо неравенство

$$J(x) = \int_0^l {x'}^2(t)\, dt = \int_0^l [s'(t) + z'(t)]^2\, dt = \\ = \int_0^l {s'}^2(t)\, dt + \int_0^l {z'}^2(t)\, dt \geqslant \int_0^l {s'}^2(t)\, dt = J(s).$$

Это означает, что точная нижняя грань d^2 функционала $J(x)$ достигается на функции $s(t)$. Допустим теперь, что эта нижняя грань достигается также на функции $\widetilde{s}(t)$, где $T\widetilde{s} = 0$. Возьмем $z(t) = \widetilde{s}(t) - s(t)$ и, в соответствии с (2), получим

$$(s', \widetilde{s}') = \int\limits_0^l s'(t)\widetilde{s}'(t)\,dt = \int\limits_0^l {s'}^2(t)\,dt = d^2 = \int\limits_0^l = {s'}^2(t)\,dt,$$

или, короче,

$$(s', \widetilde{s}') = \|s'\|^2 = \|\widetilde{s}'\|^2. \tag{3}$$

Для завершения доказательства предлагаем выполнить следующее упражнение.

Упражнение. Покажите, что если в пространстве со скалярным произведением для некоторых элементов x и y выполняется равенство $(x, y) = \|x\|^2 = \|y\|^2$, то $x = y$.

Согласно упражнению, из (3) следует, что $\widetilde{s}' = s'$, и поскольку, например, $\widetilde{s}(t_0) = s(t_0)$, то $\widetilde{s}(t) \equiv s(t)$ на $[0, l]$. Таким образом, кусочно линейная функция $s(t)$ является единственной в $H^1(0, l)$ функцией, интерполирующей x и минимизирующей $J(x)$.

В заключение отметим, что кусочно линейные функции $s(t)$ дают простейший пример сплайнов (общее определение сплайнов будет дано ниже). Вводя $\theta_i(t)$ — характеристические функции $[t_i, t_{i+1})$, где $\theta_i = 1$ на отрезке $[t_i, t_{i+1})$ и нуль вне его, оптимальный оператор продолжения S^* можно записать в следующем виде:

$$s(t) = S^*\bar{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right]\theta_i(t). \tag{4}$$

29.2. Абстрактная постановка задачи о сплайнах и ее решение. Пусть X и $\bar{X}$ — банаховы пространства, а оператор $T \in \mathcal{L}(X, \bar{X})$ с $R(T) = \bar{X}$ есть оператор сужения X на $\bar{X}$. Пусть, далее, Y — гильбертово пространство и дан оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Определение. Назовем $s \in X$ *интерполяционным сплайном* (*(T, A)-сплайном*), *соответствующим «вектору входных данных»* $\bar{x} \in \bar{X}$, если

$$\|As\|_Y^2 = \inf_{x \in T^{-1}(\bar{x})} \|Ax\|^2. \tag{1}$$

Здесь через $T^{-1}(x)$ обозначено множество прообразов элемента $\bar{x}$ при отображении T (см. п. 10.1), т. е. множество решений уравнения

$$Tx = \bar{x}. \tag{2}$$

Обозначим, как обычно, через $N(T)$ и $N(A)$ подпространства нулей соответственно операторов T и A. Заметим, что и $N(T)$ и $N(A)$ лежат в X.

Теорема. *Если линейное многообразие $AN(T)$ замкнуто и $N(A) \bigcap N(T) = \{0\}$, то для каждого $\bar{x} \in \bar{X}$ существует единственный интерполяционный (T, A)-сплайн s.*

Доказательство. Так как по условию $R(T) = \bar{X}$, то для всякого элемента $\bar{x} \in \bar{X}$ найдется элемент x_0 такой, что $Tx_0 = \bar{x}$. Но тогда общее решение уравнения (2) имеет вид $x = x_0 + z$, где z — произвольный элемент $N(T)$. Задача состоит, таким образом, в определении расстояния в гильбертовом пространстве Y от нуля 0 до аффинного многообразия

$$M = \{Ax_0 + Az : \ z \in N(T)\}.$$

Это многообразие $M = AT^{-1}(\bar{x}) = Ax_0AN(T)$ по условию теоремы замкнуто. Но тогда согласно теореме Рисса (см. п. 6.2, 6.3) найдется единственный вектор $y \in Y$ такой, что

$$||y|| = \rho(0, M).$$

Согласно определению (см. (1) и (2)) сплайн s, если он существует, является общим решением двух уравнений:

$$As = y, \quad Ts = \bar{x}. \tag{3}$$

Существование s следует из того, что $y \in AT^{-1}(\bar{x})$, являющемуся замкнутым множеством. Докажем единственность сплайна. Допуская, что некоторому $\bar{x}$ соответствуют два сплайна s_1 и s_2, мы получим, согласно (3), для разности $s_1 - s_2$ систему уравнений

$$A(s_1 - s_2) = 0, \quad T(s_1 - s_2) = 0.$$

Следовательно, $s_1 - s_2 \in N(A)$ и $s_1 - s_2 \in N(T)$, но $N(A) \bigcap N(T) = \{0\}$, откуда $s_1 = s_2$. Теорема доказана.

Приведем несколько интересных формул для сплайна. Заметим прежде всего, что для любого $x \in M = AT^{-1}(\bar{x})$

$$||Ax||^2 = ||As||^2 + ||A(x - s)||^2, \tag{4}$$

поскольку вектор As есть ортогональная проекция вектора Ax на $M^\perp$ (рис. 14). Но

$$||A(x-s)||^2 = ||Ax||^2 - 2(Ax, As) + ||As||^2, \tag{5}$$

и из (4) и (5) получаем

$$||As||^2 = (As, Ax). \tag{6}$$

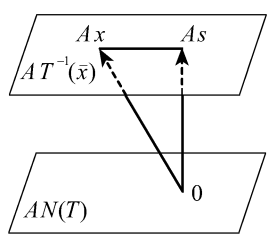


Рис. 14

Последнее равенство можно переписать так:

$$(As, A(x - s)) = 0. \tag{7}$$

Равенства (4), (6) и (7) справедливы для всех $x \in T^{-1}(\bar{x})$ и называются условиями ортогональности интерполяционного сплайна s (см. формулу (2) п. 27.1).

В конкретных применениях доказанной выше теоремы оказывается полезным следующее предложение.

Лемма. *Пусть в X единичный шар слабо компактен (например, X — рефлексивное или гильбертово пространство); пусть, далее, A нормально разрешим, его подпространство нулей $N(A)$ конечномерно, а $N(A) \bigcap \bigcap N(T) = \{0\}$. Тогда $AN(T)$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{y_n\} \subset AN(T)$, причем $y_n \to y_0$, $n \to \to \infty$. Это означает, что существуют элементы $x_n \in N(T)$, $Ax_n = y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Разложим пространство X в прямую сумму (см. п. 15.1):

$$X = N(A) + \widetilde{X}.$$

Тогда сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\widetilde{X}$ является непрерывно обратимым оператором. Полагая $x_n = z_n + \widetilde{x}_n$, где $z_n \in N(A)$, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, и замечая, что $\widetilde{A}\widetilde{x}_n = y_n$, получаем $\widetilde{x}_n = \widetilde{A}^{-1}y_n$, т. е. $\{\widetilde{x}_n\}$ ограничена.

Далее, $Tz_n = -T\widetilde{x}_n$, ибо $Tx_n = 0$. Обозначая через $\widetilde{T}$ сужение T на $N(A)$, найдем $z_n = -\widetilde{T}^{-1}T\widetilde{x}_n$, откуда $\{z_n\}$ также ограничена. Следовательно, $\{x_n\}$ ограничена. Пусть $\{x_{n'}\}$ — ее слабосходящаяся подпоследовательность и x_0 — ее предел. Тогда при $n' \to \infty$

$$Ax_{n'} = y_{n'} \to Ax_0 = y_0 \quad \text{слабо},$$

$$0 = Tx_{n'} \to Tx_0 \quad \text{слабо}.$$

Следовательно, $y \in AN(T)$. Лемма доказана.

29.3. Построение интерполяционных сплайнов. В этом пункте дается метод построения интерполяционных сплайнов (см. [4]).

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $R(A) = Y$ (если A нормально разрешим, то достаточно заменить Y на $R(A)$);

2) $N(A)$ конечномерно;

3) $\bar{X}$ конечномерно;

4) $\dim N(A) = m < n = \dim \bar{X}$;

5) $N(A) \bigcap n(T) = \{0\}$;

6) в X единичный шар слабо компактен.

Согласно лемме и теореме п. 29.2 в этих условиях задача об интерполяционном сплайне имеет единственное решение.

Введем $\{\varphi_i\}_1^m$ — базис в $N(A)$ и линейно независимую систему функционалов $\{\gamma_j\}_1^n \subset X^*$ таких, что

$$N(T) = \{x : \langle x, \gamma_j\rangle = 0, \ j = 1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Пусть еще $\{\bar{e}_j\}_1^n$ — базис в $\bar{X}$, так что

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \langle x, y\rangle \bar{e}_j. \tag{2}$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Ранг матрицы* $(\langle\varphi_i, \gamma_j\rangle)$ $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$ *равен* m.

Доказательство. Рассмотрим однородную систему n линейных уравнений с m неизвестными

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle\varphi_i, \gamma_j\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Ранг ее матрицы $r \leqslant m$. Допустим, что $r < m$. Тогда система (3) имеет нетривиальное решение $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0)$.

Рассмотрим вектор

$$z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^0 \varphi_i \in N(A).$$

Кроме того, $z \neq 0$ и $z \in N(T)$, ибо $\langle z, \gamma_j\rangle = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, а $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0)$ — решение системы (3). Но по условию 5) $N(A) \bigcap N(T) = \{0\}$, и мы приходим к противоречию. Значит, $r = m$, и лемма доказана.

Обозначим через Γ линейную оболочку элементов системы $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$, а через $N(A)^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства нулей $N(A)$. Γ и $N(A)^\perp$ являются подпространствами в X^*.

Лемма 2. $\dim\{\Gamma \bigcap N(A)^\perp\} = n - m$.

Доказательство. Пусть $\gamma = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_j$ (λ_j — скаляры), где $\gamma \in N(A)^\perp$. Это означает, что $\langle\varphi_i, \gamma\rangle = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$. Для определения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ получаем следующую однородную систему из m уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{n} \langle\varphi_i, \gamma_j\rangle \lambda_j = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Матрица системы (4) является транспонированной по отношению к матрице системы (3), и, следовательно, ее ранг равен m (см. лемму 1). Но тогда система (4) имеет $n - m$ линейно независимых решений. Лемма 2 доказана.

Фиксируем, далее, $\{\psi_k\}_1^{n-m}$ — базис в $\Gamma \bigcap N(A)^\perp$. Заметим, что

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} \gamma_j, \quad k = 1, \ldots, n - m, \tag{5}$$

где $(\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{kn})$ $(k = 1, \ldots, n - m)$ — фиксированный набор линейно независимых решений системы (4).

Мы видели в п. 29.2, что если s — сплайн, то $As \in \{AN(T)^\perp\}$. Следующая лемма позволяет связать многообразия $\{AN(T)^\perp\}$ и $\Gamma \cap N(A)^\perp$.

Лемма 3. $\{AN(T)\}^\perp = (A^*)^{-1}\{\Gamma \bigcap N(\dot{A})^\perp\}$.

Доказательство. Утверждение леммы равносильно следующему равенству:

$$A^*\{AN(T)\}^\perp = \Gamma \bigcap N(A)^\perp.$$

Заметим теперь, что $N(A)^\perp = R(A^*)$ (см. п. 21.6). Если $\gamma \in A^*\{AN(T)\}^\perp$, то найдется $y \in \{AN(T)\}^\perp$ такой, что $\gamma = A^*y$. Значит, $y \in N(A)^\perp = R(A^*)$. Покажем, что $\gamma \in \Gamma$. Пусть $z \in N(T)$, тогда

$$\langle z,\, \gamma\rangle = \langle z,\, A^*y\rangle = (Az,\, y) = 0,$$

так как $y \in \{AN(T)\}^\perp$. Мы доказали включение

$$A^*\{AN(T)\} \subset \Gamma \cap N(A)^\perp.$$

Обратно, если $\gamma \in \Gamma$ и $\gamma \in N(A)^\perp$, то $\gamma \in R(A^*)$, т. е. $\gamma = A^*y$. При этом $\langle z,\, \gamma\rangle = 0$ для любого $z \in N(T)$, т. е.

$$0 = \langle z,\, A^*y\rangle = (Az,\, y),$$

т. е. $y \in \{AN(T)\}^\perp$, и доказано обратное включение, а вместе с этим и лемма 3.

Леммы 1–3 позволяют дать следующую процедуру вычисления сплайна s. Пусть $\{\psi_k\}_1^{n-m}$ — базис в $\Gamma \bigcap N(A)^\perp$; тогда, согласно лемме 3, $\{f_k\}_{k=1}^{n-m} = \{(A^*)^{-1}\psi_k\}_{k=1}^{n-m}$ — базис в $\{AN(T)\}^\perp$, т. е. в подпространстве, где лежит вектор As. Но тогда элемент $As = y$ можно искать в виде разложения по базису $\{f_k\}_{k=1}^{n-m}$:

$$As = \sum_{k=1}^{n-m} \beta_k f_k. \tag{6}$$

Умножив это равенство скалярно на вектор f_l, получим, используя формулу (5),

$$\sum_{k=1}^{n-m} \beta_k(f_k, f_l) = (As,\, f_l) = \\ = \langle s,\, A^*f_l\rangle = \langle s,\, \psi_l\rangle = \langle s,\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{lj}\gamma_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{lj}\langle s,\, \gamma_j\rangle.$$

Поскольку, согласно формуле (2),

$$Ts = \sum_{j=1}^{n}\langle s,\, \gamma_j\rangle \bar{e}_j = \bar{x}, \tag{7}$$

то $\langle s,\, \gamma_j\rangle$ $(j = 1,\, \ldots\, ,\, n)$ являются известными координатами ξ_j вектора входных данных $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j\bar{e}_j$. Таким образом, для определения чисел β_k получается система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n-m} \beta_k(f_k,\, f_l) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{lj}\xi_j, \quad l = 1,\, \ldots\,,\, n-m, \tag{8}$$

с матрицей Грама, имеющая единственное решение, но тогда найден вектор

$$As = C\bar{x}, \tag{9}$$

где C — линейный оператор, действующий из X в $\{AN(T)\}^{\perp}$. Для определения самого сплайна s нужно решить совместно уравнения (7) и (9). Эта задача имеет единственное решение (см. формулу (3) п. 29.2). Тем самым каждому элементу $\bar{x} \in \bar{X}$ ставится в соответствие определенный элемент $s \in X$, и, значит, задан оператор

$$s = S^*\bar{x}.$$

Упражнение. Покажите, что оператор S^* — линейный ограниченный оператор.

Построение оптимального оператора продолжения закончено.

29.4. Кубические сплайны. Поставим задачу отыскания функции $s(t) \in H^2(0,\, l)$, реализующей минимум функционала

$$J_2(x) = \int_0^l [x''(t)]^2\, dt,$$

при условии, что $x(t_i) = x_i$, $(i = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n)$, где $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$ — вектор входных данных, а $t_0,\, t_1,\, \ldots\,,\, t_n$ — система узлов на $[0,\, l]$.

В абстрактной интерпретации имеем

$$X = H^2(0,\, l), \quad Y = \mathcal{L}_2(0,\, l), \quad \bar{X} = l_2^{n+1},$$

$$Tx(t) = (x(t_i))_{i=0}^n, \quad Ax(t) = x''(t).$$

Проверим условия 1)–5) п. 29.3. Область значений оператора d^2/dt^2 равна $\mathcal{L}_2(0,\, l)$; далее, $N(A)$ — двумерное подпространство многочленов $c_0 + c_1 t$, т. е. размерности 2, а $\bar{X}$ $(n+1)$-мерно. При $n > 1$ выполняется условие 4), а также и условие 5), ибо $N(T)$ состоит из функций, обращающихся в нуль в n точках, что невозможно для ненулевого многочлена 1-й степени. Наконец, условие 6) выполнено так как $H^2(0,\, l)$ — гильбертово пространство.

Отсюда вытекает, что можно воспользоваться леммой и теоремой п. 29.2, и следовательно, наша вариационная задача имеет единственное решение $s_2(t)$, которое называется интерполяционным кубическим сплайном, отвечающим вектору входных данных $\bar{x}$. Применима также процедура п. 29.3 построения сплайн-функции.

Приведем краткую схему вычисления $s_2(t)$ в случае равномерной сетки $(t_i = i\tau,\, n\tau = l)$. Функционалы $\{\gamma_i\}_{i=0}^n$ над элементами $x(t) \in H^2(0,\, l)$

задаются здесь формулами

$$\langle x,\, y_i \rangle = x(t_i), \quad i = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n.$$

Далее, нетрудно проверить, что базис $\{\psi_k\}_{k=0}^{n-2}$ в $\Gamma \bigcap N(A)^{\perp}$ можно выбрать следующим образом:

$$\psi_s = \frac{1}{\tau^2}(\gamma_{s+1} - 2\gamma_s + \gamma_{s-1}), \quad s = 1,\, \ldots\,,\, n-1. \tag{1}$$

Оператор $A^* = (d^2/dt^2)^*$ является линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathcal{L}_2(0,\, l)$ в $H^2(0,\, l)$, причем $N(A^*) = \{0\}$, а $R(A^*)$ состоит из функций, ортогональных 1 и t. Поэтому $\psi_s \in R(A^*)$ и определены функции

$$f_s(t) = (A^*)^{-1}\psi_s, \quad s = 1,\, \ldots\,,\, n,$$

образующие базис в $\{AN(T)^{\perp}\}$. Оказывается, функции $f_s(t)$ задаются следующими явными формулами (рис. 15):

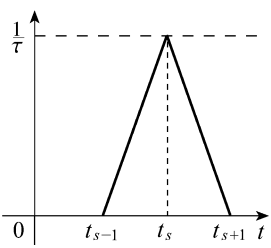


Рис. 15

$$f_s(t) = \frac{1}{\tau^2}[(t_{s+1} - t)_+ - 2(t_s - t)_+ + (t_{s-1} - t)_+], \tag{2}$$

где $a_+ = a$ при $a > 0$, $a_+ = 0$ при $a \leqslant 0$. Поскольку для любого $x \in H^2(0,\, l)$ имеет место равенство

$$(f_s,\, Ax)_{\mathcal{L}_2(0,\, l)} = (A^* f_s,\, x)_{H^2(0,\, l)} = (\psi_s,\, x),$$

то для проверки формулы (2) вследствие (1) достаточно выполнить следующее вычисление.

Упражнение 1. Покажите, что любой функции $x \in H^2(0,\, l)$ и функции $f_s(t)$, заданной формулами (2), имеет место равенство

$$\int\limits_0^l f_s(t)\, x''(t)\, dt = \frac{x(t_{s+1}) - 2x(t_s) + x(t_{s-1})}{\tau}.$$

Наконец, можно вычислить скалярные произведения $(f_k,\, f_l)_{\mathcal{L}_2(0,\, l)}$, а значит, и матрицу системы (8) п. 29.3.

Упражнение 2. Покажите, что $(f_k,\, f_k) = 2\tau/3$, $(f_k,\, f_{k+1}) = (f_k,\, f_{k-1}) = \tau/6$, а $(f_k,\, f_l) = 0$ при $l \neq k-1,\, k,\, k+1$.

Таким образом, система (8) п. 29.3 имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{2\tau}{3} & \frac{\tau}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\tau}{6} & \frac{2\tau}{3} & \frac{\tau}{6} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{\tau}{6} & \frac{2\tau}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{\tau} \\ \frac{x_3 - 2x_2 + x_1}{\tau} \\ \dots \\ \frac{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}{\tau} \end{bmatrix} \tag{3}$$

и решается, например методом прогонки (см. [1]).

Мы вычислили (см. формулу (6) п. 29.3)

$$s''(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k f_k(t), \tag{4}$$

и поскольку $f_k(t_l) = \delta_{kl}$ $(k,\, l = 1,\, \dots\,,\, n-1)$, то мы знаем, что

$$s''(t_i) = \beta_i, \quad i = 1,\, \dots\,,\, n-1; \quad s''(0) = s''(l) = 0. \tag{5}$$

Упражнение 3. Покажите, что на $[t_i,\, t_{i+1}]$ сплайн $s(t)$ задается формулой

$$s(t) = \beta_i \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6\tau} + \beta_{i+1} \frac{(t - t_i)^3}{6\tau} + \\ + \left(x_i - \beta_i \frac{\tau^2}{6}\right) \frac{t_{i+1} - t}{\tau} + \left(x_{i+1} - \beta_{i+1} \frac{\tau_2}{6}\right) \frac{t - t_i}{\tau}.$$

Воспользуйтесь тем, что на $[t_i,\, t_{i+1}]$, согласно формулам (4) и (2),

$$s''(t) = \beta_i \frac{t_{i+1} - 1}{\tau} + \beta \frac{t - t_i}{\tau},$$

и граничными условиями (5).

Аналогично рассматриваются общие полиномиальные сплайны, а также сплайны, порождаемые различными дифференциальными операторами (см. [3, 4, 31]).

29.5. Продолжение приближенных решений. Пусть даны банаховы пространства X и $\bar{X}_n$ и операторы продолжения $S_n \in \mathcal{L}(\bar{X}_n,\, X)$. Рассмотрим $\{\bar{x}_n\}$, где $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$.

Определение. Будем говорить, что $\{\bar{x}_n\}$ *S-сходится* к элементу $x \in X$, если при $n \to \infty$

$$\|S_n \bar{x}_n - x\|_X \to 0. \tag{1}$$

Краткая запись: $\bar{x}_n \xrightarrow{S} x$ или $S\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = x$.

Согласно этому определению S-сходимость $\{\bar{x}_n\}$ к x — это сходимость к x (по норме X) последовательности $S_n\bar{x}_n$. Отсюда вытекает единственность S-предела.

Пусть заданы также операторы сужения T_n:

$$T_n \in \mathcal{L}(X, \bar{X}_n), \quad R(T_n) = \bar{X}_n.$$

Изучим связь двух видов сходимости: T-сходимости (п. 27.1) и S-сходимости. Запишем следующее тождество и оценим по норме:

$$S_n\bar{x}_n - x = S_n(\bar{x}_n - T_n x) + (S_n T_n x - x), \tag{2}$$

$$\|S_n\bar{x}_n - x\| \leqslant \|S_n\| \, \|x - T_n x\| + \|S_n T_n - x\|. \tag{3}$$

Отсюда вытекают следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\|S_n\| \leqslant c$;

2) $S_n T_n x \to x, n \to \infty$.

Тогда из T-сходимости $\{\bar{x}_n\}$ к x следует ее S-сходимость к x.

Теорема 2. *Если $S_n T_n x \to x$, $n \to \infty$, и $\|\bar{x}_n - T_n x\| = o(\|S_n\|^{-1})$ при $n \to \infty$, то $\bar{x}_n \xrightarrow{S} x$, $n \to \infty$.*

Заметим, что оценку скорости S-сходимости $\{\bar{x}_n\}$ к x дает неравенство (3).

Поскольку $N(S_n) = \{0\}$, то оператор S_n непрерывно обратим на $R(S_n)$, если $R(S_n)$ замкнута. Но тогда имеем следующую оценку:

$$\|\bar{x}_n - T_n x\| = \|S_n^{-1} S_n(\bar{x}_n - T_n x)\| \leqslant \|S_n^{-1}\| \, \{\|S_n\bar{x}_n - x\| + \|x - S_n T_n x\|\},$$

и, следовательно, справедливо такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *S_n нормально разрешимы*;

2) $\|S_n\bar{x}_n - x\| = o(\|S_n^{-1}\|^{-1})$ *при* $n \to \infty$;

3) $\|x - S_n T_n x\| = o(\|S_n^{-1}\|^{-1})$ *при* $n \to \infty$.

Тогда $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, $n \to \infty$.

Рассмотрим теперь точное линейное уравнение

$$Ax = y, \quad y \in D(A), \tag{4}$$

и приближенную схему

$$\bar{A}_n\bar{x}_n = \bar{y}_n, \quad \bar{y}_n \in D(\bar{A}_n). \tag{5}$$

Известным недостатком приближенных решений $\bar{x}_n$ является то обстоятельство, что $\bar{x}_n \in \bar{X}_n$, в то время как $x \in X$, т. е. приближенные решения лежат в одних пространствах, а точное решение — в другом. Устранить этот недостаток можно с помощью оператора продолжения. Выражение

$$x_n = S_n\bar{x}_n, \tag{5}$$

где $\bar{x}_n$ — приближенное решение, уже лежит в том же пространстве X, что и точное решение. Например, решение разностной схемы с помощью сплайнов или каким-либо другим способом можно записать в явном виде, изобразив его приблизительно. достаточно гладкой функцией.

Объединяя результаты основной теоремы п. 27.5 о T-сходимости и теоремы 1, мы приходим к следующему предложению (в упрощенном варианте).

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $N(A) = \{0\}$;
2) $\{\bar{A}_n\}$ *аппроксимирует* A *на* $D(A)$;
3) $\bar{y}_n \xrightarrow{T'} y$;
4) *выполнено условие устойчивости*;
5) $\|S_n\| \leqslant c$;
6) $S_n T_n x \to x$, $n \to \infty$, *где* x — *точное решение.*

Тогда $\bar{x}_n \xrightarrow{S} x$, $n \to \infty$, *и справедлива оценка*

$$\|S_n \bar{x}_n - x\|_X \leqslant \|S_n T_n x - x\|_X + \\ + c\gamma^{-1}(\|\bar{y}_n - T'_n y\|_{\bar{Y}_n} + \|T'_n Ax - \bar{A}_n T_n x\|_{\bar{Y}_n}).$$

Приведем два примера иллюстративного характера.

Пример 1. Пусть $X = H^1(0, l)$, $T_n x(t) = \{x(t_k)\}_{k=0}^n$ — равномерная сетка на $[0, l]$, $t_k = k\tau$, $n\tau = l$. Аппроксимирующие X пространства $\bar{X}_n$ зададим как пространства столбцов $\bar{x}_n = (x_k)_{k=0}^n$ с нормой

$$\|\bar{x}_n\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \tau^{-1} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_{k+1} - x_k|. \tag{7}$$

В качестве оператора S_n выберем оператор кусочно линейной интерполяции (см. п. 29.1):

$$s(t) = (S_n \bar{x}_n)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} [x_k + (x_{k+1} - x_k)\tau^{-1}(t - t_k)]\, \theta_k(t). \tag{8}$$

Оценим сначала норму $S_n \in \mathcal{L}(\bar{X}_n, X)$. На (t_k, t_{k+1})

$$|s(t)| \leqslant |x_k| + |x_{k+1}| \leqslant 2 \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_k|,$$

$$|s'(t)| \leqslant \tau^{-1}|x_{k+1} - x_k| \leqslant \tau^{-1} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_{k+1} - x_k|.$$

Возведя эти неравенства в квадрат, складывая полученные неравенства и интегрируя затем на $[0, l]$, получим

$$\|s\|^2_{H^1(0,l)} \leqslant l(2 \max |x_k|)^2 + l(\tau^{-1} \max |x_{k+1} - x_k|)^2 \leqslant \\ \leqslant 4l(\max |x_k| + \tau^{-1} \max |x_{k+1} - x_k|)^2.$$

Мы доказали неравенство (см. условие 1) теоремы 1)

$$\|S_n\| \leqslant 2\sqrt{l}. \tag{9}$$

Оценим теперь $\|S_nT_nx - x\|_{H^1(0,\,l)}$ в предположении, что $x \in H^2(0,\,l)$. На $(t_k,\,t_{k+1})$ имеем

$$x(t) = x(t_k) + x'(t_k)(t - t_k) + \int_{t_k}^{t} (t-\xi)\,x''(\xi)\,d\xi,$$

$$x'(t) = x'(t_k) + \int_{t_k}^{t} x''(\xi)\,d\xi,$$

$$(S_nT_nx)(t) = x(t_k) + x'(t_k)(t - t_k) + \frac{t-t_k}{\tau}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\xi)\,x''(\xi)\,d\xi,$$

$$(S_nT_nx)'(t) = x'(t_k) + \tau^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\xi)\,x''(\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, на $[t_k,\,t_{k+1}]$

$$\|x - S_nT_nx\| \leqslant 2\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-\xi)|x''(\xi)|\,d\xi \leqslant 2\tau\int_{t_k}^{t_{k+1}} |x''(\xi)|\,d\xi,$$

$$\|x' - (S_nT_nx)'\| \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} |x''(\xi)|\,d\xi.$$

Возводя эти неравенства в квадрат, складывая полученные неравенства и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\|x - S_nT_nx\|^2 = \|x' - (S_nT_nx)'\|^2 \leqslant 4\tau^3\int_{t_k}^{t_{k+1}} |x''(\xi)|^2\,d\xi + 4\tau\int_{t_k}^{t_{k+1}} |x''(\xi)|^2 d\xi.$$

Интегрируя последнее неравенство на $[t_k,\,t_{k+1}]$, а затем суммируя по k от 0 $n-1$, получим (при $\tau < 1$)

$$\|x - S_nT_nx\|^2_{H^1(0,\,l)} \leqslant 8\tau^2\sum_{k=0}^{n-1}\theta_k(t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}} |x''(\xi)|^2\,d\xi = 8\tau^2\int_0^l |x''(\xi)|^2\,d\xi.$$

Таким образом, если $x \in H^2(0, l)$, то

$$\|x - S_n T_n x\|_{H^1(0,\,l)} \leqslant c(x)/n, \tag{10}$$

где

$$c(x) = 2\sqrt{2} \left(\int_0^l |x''(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} l.$$

Оценки (9) и (10) обеспечивают выполнение условий теоремы 1. Таким образом, если при $n \to \infty$ $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x \in H^2(0, l)$, то $\bar{x}_n \xrightarrow{S} x$.

Пример 2. Рассмотрим разностную схему п. 28.1. Согласно оченке (13) п. 28.1, если точное решение $x(t)$ имеет ограниченную четвертую производную, приближенные решения $\bar{x}_n$ сходятся к точному решению. Пусть S_n — оператор кусочно линейной интерполяции, тогда

$$\|S_n \bar{x}_n - x\|_{H^1(0,\,l)} \leqslant \|S_n\| \, \|\bar{x}_n - T_n x\| + \|S_n T_n x - x\|_{H^1(0,\,l)} \leqslant \\ \leqslant 2\sqrt{l} \, \frac{\gamma_n l^n}{12n^2} + \frac{c(x)}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Более высокий порядок сходимости можно получить, используя интерполяцию приближенных решений сплайнами высших порядков.

§ 30. Метод Галеркина

Теория разностных схем является лишь одной из возможных реализаций общего подхода, изложенного в § 27. Ниже мы остановимся на другом важном случае. Речь идет о большой группе приближенных методов решения уравнений (методы Ритца, Бубнова, Галеркина, Петрова), объединенных, обычно в современной литературе под общим названием «метод Галеркина». В последние годы идеи метода Галеркина выражаются чаще всего в форме вариационно-разностного метода конечных элементов (см. [3, 31, 9]).

30.1. О системе уравнений приближенной схемы Галеркина. Пусть A — линейный оператор, отображающий взаимно однозначно плотную в банаховом пространстве X область определения $D(A)$ на область значений $R(A)$, лежащую в банаховом пространстве Y. Пусть $y \in R(A)$ — фиксированный элемент. Для разыскания приближенного решения уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

проведем следующие построения.

Выберем в $D(\mathrm{A})$ линейно независимую систему элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — координатную систему. Далее выберем в Y^* линейно независимую систему

$\{\psi_l\}_1^\infty$ — проекционную систему. Приближенное решение x_n уравнения (1) будем искать в виде линейной комбинации первых n векторов системы:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k. \tag{2}$$

Потребуем, далее, чтобы «невязка» $Ax_n - y$ была ортогональна к первым n линейным функционалам проекционной системы:

$$\langle Ax_n - y,\, \psi_l\rangle = 0, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

В результате мы приходим к следующей системе n линейных уравнений с n неизвестными для определения коэффициентов $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в выражении (2):

$$\sum_{k=1}^{n} \langle A\varphi_k,\, \psi_l\rangle \xi_k = \langle y,\, \psi_l\rangle, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

В общем случае нельзя утверждать, что определитель системы (4) отличен от нуля и что она имеет, таким образом, единственное решение. Даже если это так, нельзя гарантировать, что последовательность приближенных решений $\{x_n\}$, определяемых формулами (2) и (4), сходится к точному решению x уравнения (1).

Для исследования этого круга вопросов построим последовательность операторов сужения $\{P_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ и $\{Q_n\} \subset \mathcal{L}(Y)$. Выберем сначала в X^* систему элементов $\{\gamma_i\}_1^\infty$ так, чтобы

$$\det\left(\langle \varphi_k,\, \gamma_i\rangle\right)_{k,\,i=1}^{n} \neq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

и положим

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x,\, y_k\rangle \varphi_k. \tag{6}$$

Далее выберем в Y систему элементов $\{z_j\}^\infty$ так, чтобы

$$\det\left(\langle z_j,\, \psi_l\rangle\right)_{j,\,l=1}^{n} \neq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

и положим

$$Q_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y,\, \psi_k\rangle z_k. \tag{8}$$

Если, в частности, условия (5) и (7) выполнены в следующей усиленной форме:

$$\langle \varphi_k,\, \gamma_i\rangle = \delta_{ki}, \quad k,\, i = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$\langle z_j,\, \psi_l\rangle = \delta_{ji}, \quad j,\, l = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

то операторы P_n и Q_n оказываются конечномерными проекторами в X и Y соответственно. Действительно, в этих случаях (проверьте!)

$$P_n^2 = P_n, \quad Q_n^2 = Q_n. \tag{11}$$

В теоретических рассуждениях условия (9), (10) обычно можно считать выполненными и методы типа Галеркина иногда называют также *проекционными методами.* В следующих пунктах рассматриваются также операторы сужения P_n и Q_n более общего, по сравнению с (6) и (8), вида, в частности, они могут быть и бесконечномерными.

30.2. Галеркинская аппроксимация. Зададим в банаховом пространстве X последовательность операторов $\{P_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ с замкнутыми областями значений

$$X_n = R(P_n) \subset D(A)$$

(т. е. P_n нормально разрешимы). Таким образом, можно считать, что $P_n \in \mathcal{L}(X,\, X_n)$. Перефразируем для данного случая понятие T-сходимости (см. п. 27.1). Рассмотрим $\{x_n\}$, где $x_n \in X_n$. Будем говорить, что эта последовательность *P-сходится* к элементу $x \in X$, если $\|x_n - P_n x\| \to 0$, $n \to \infty$.

Заметим, что в общем случае понятие P-сходимости не совпадает с понятием сходимости в пространстве X. Для того чтобы изучить связь этих понятий, полезно дать следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что $x \in X$ является *P-предельной точкой* (или *предельной точкой последовательности подпространств* $\{X_n\}$), если $P_n x \to x$ при $n \to \infty$.

Определение 2. Если всякий элемент $x \in X$ является P-предельной точкой, то последовательность подпространств $\{X_n\}$ называется *предельно плотной в* X.

Приведем элементарную лемму о связи сходимости в X (по норме) с P-сходимостью.

Лемма 1. *Пусть точка x является предельной точкой последовательности подпространств $\{X_n\}$. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ P-сходилась к x, необходимо и достаточно, чтобы $\{x_n\}$ сходилась к x.*

Доказательство. Если $x_n \xrightarrow{P} x$, то

$$\|x_n - x\| \leqslant \|x_n - P_n x\| + \|P_n x - x\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

(первое слагаемое справа стремится к нулю вследствие P-сходимости, а второе — вследствие P-предельности x).

Аналогично, если $x_n \to x$, то

$$\|x_n - P_n x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|P_n x - x\| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Если $\{X_n\}$ предельно плотна в X, то понятия P-сходимости и сходимости* (*по норме*) *в X совпадают.*

Остановимся подробнее на случае, когда операторы P_n задаются формулами (6), (9) п. 28.1, т. е. являются конечномерными проекторами в X.

Системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\gamma_i\}_1^\infty$ удовлетворяющие условию (9), называются биортогональными. По аналогии с терминологией, применяемой в теории рядов Фурье, числа $\langle x, \gamma_i \rangle$ назовем *коэффициентами Галеркина,* выражение (6) п. 30.1 — *многочленом Галеркина*, а формальный ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, \gamma_i \rangle \varphi_i$$

— *рядом Галеркина* элемента x по биортогональной паре систем элементов $\{\varphi_i\}_1^\infty$, $\{\gamma_j\}_1^\infty$.

Вопрос о том, для каких x ряд Галеркина (1) сходится к x (иначе — какие x являются P-предельными точками), решается по-своему для каждой биортогональной пары систем, порождающих проекторы P_n. Очень важно также уметь оценить скорость стремления $P_n x$ к x. Обычно нужная скорость обеспечивается достаточной гладкостью x, если X — конкретное функциональное пространство. Даже в частном случае гильбертова пространства в галеркинской аппроксимации редко пользуются ортогональной системой $\{\varphi_i\}$, предпочитая ей биортогональную в H пару систем $\{\varphi_i\}$ и $\{\gamma_i\}$. Если, однако, $\{\varphi_i\}$ ортонормирована, то проекторы

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} (\,\cdot\,, \varphi_i)\varphi_i$$

оказываются ортопроекторами: $P_n^* = P_n$, т. е. самосопряженными операторами в H. Известно (см. п. 6.6), что если $\{\varphi_i\}$ полная, то $P_n x \to x$ при $n \to \infty$. Числа $\xi_i = (x, \varphi_i)$ теперь являются коэффициентами Фурье элемента x по ортонормированной системе $\{\varphi_i\}$, причем (см. формулы (3), (4) п. 6.6)

$$\|x - P_n x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \xi_i^2, \tag{2}$$

и вопрос о скорости сходимости $P_n x$ к x сводится к вопросу о порядке при $n \to \infty$ коэффициентов Фурье ξ_n.

Перейдем к вопросу об аппроксимации линейных операторов. Пусть A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения $D(A)$ и с областью значений $R(A)$ в банаховом пространстве Y. Пусть $\{X_n\} \subset D(A)$ и $\{Y_n\} \subset \subset Y$ — две последовательности конечномерных подпространств, причем $\dim X_n = \dim Y_n$. Пусть, далее, $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ — две последовательности конечномерных операторов (например, проекторов): $P_n X = X_n$, $Q_n Y = = Y_n$. В качестве операторов, аппроксимирующих оператор A, возьмем сужение на X_n оператора $Q_n A$.

Определение 3. Будем говорить, что на элементе $x \in D(A)$ выполнено *условие аппроксимации* (*по Галеркину*), если

$$\|Q_n Ax - Q_n A P_n x\|_Y \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что определение 3 является частным случаем общего определения (см. определение п. 27.3).

Условие аппроксимации (3) удобно представить в следующем виде:

$$\|Q_nA(x - P_nx)\|_Y \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Отсюда легко выводится следующее предложение.

Лемма 2. *Положим*

$$\omega_n = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|Q_n\|. \tag{5}$$

Если оператор A ограничен, а x — P-предельная точка, причем $\|x - P_nx\| = o(\omega_n^{-1})$ при $n \to \infty$, то на элементе x выполнено условие аппроксимации.

Доказательство вытекает из оценки

$$\|Q_nA(x - P_nx)\| \leqslant \omega_n\|A\|\,\|x - P_nx\|.$$

Следствие 2. *Пусть x — P-предельная точка, а последовательность $\{Q_n\}$ равномерно ограничена (т. е. найдется постоянная c такая, что $\|Q_n\| \leqslant c$, $n = 1, 2, \ldots,$); тогда на x выполнено условие аппроксимации.*

Упражнение. Покажите, с помощью неравенства треугольника, что если $A = A_1 + A_2$, причем для каждого из операторов A_1, A_2 выполнено условие аппроксимации, то оно выполнено и для оператора A.

30.3. Условие устойчивости.

Определение. Галеркинская аппроксимация оператора A называется *устойчивой*, если существует не зависящая от n постоянная $\gamma > 0$ такая, что для всех $x_n \in X_n$, начиная с некоторого номера,

$$\|Q_nAx_n\|_Y \geqslant \gamma\|x_n\|_X. \tag{1}$$

Разумеется, данное определение является частным случаем общего определения устойчивости приближенной схемы (см. определение п. 27.4).

Лемма 1. *Пусть для всех $x \in D(A)$ выполняется неравенство ($\alpha > 0$ — постоянная)*

$$\|Ax\| \geqslant \alpha\|x\|. \tag{2}$$

Если, кроме того, для любых $y_n \in AX_n$ выполняется неравенство

$$\|Q_ny_n\| \geqslant \beta\|y_n\|, \tag{3}$$

то выполняется условие устойчивости с $\gamma = \alpha\beta$.

Доказательство вытекает из неравенства

$$\|Q_nAx_n\| \geqslant \beta\|Ax_n\| \geqslant \beta\alpha\|x_n\|.$$

Остановимся подробнее на случае, когда X и Y — гильбертовы пространства, а P_n и Q_n — ортопроекторы:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} (\,\cdot\,, \varphi_i)\varphi_i, \quad Q_n = \sum_{j=1}^{n} (\,\cdot\,, \psi_j)\psi_j. \tag{4}$$

Теперь условию устойчивости (1) можно придать чисто алгебраическую форму. Полагая

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i,$$

находим, раскрывая скалярный квадрат $(Q_n A x_n,\, Q_n A x_n)$,

$$\|Q_n A x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i (A\varphi_i,\, \psi_j) \right]^2,$$

и условие устойчивости галеркинской аппроксимации оператора A принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \gamma^2 \sum_{l=1}^{n} \xi_l^2, \tag{5}$$

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A\varphi_i,\, \psi_k)(A\varphi_j,\, \psi_k)$.

Таким образом, условие устойчивости (5) — это условие положительной определенности некоторой, связанной с оператором A, квадратичной формы. Проверка этого условия может быть выполнена, например, с помощью известного критерия Сильвестра (см. [7]).

Существует широкий класс операторов A, действующих в гильбертовом пространстве $H = X = Y$, для которых условие устойчивости при $Q_n = P_n$ проверяется особенно просто. А именно, пусть для всех $x \in D(A)$ выполняется неравенство ($\gamma > 0$ постоянная)

$$(Ax,\, x) \geqslant \gamma(x,\, x). \tag{6}$$

Пусть $P_n = \sum_{i=1}^{n} (\,\cdot\,,\, \varphi_i)\varphi_i$ — ортопроектор в H, тогда $P_n = P_n^*$ и, следовательно, для всех $x_n \in X_n = P_n X$

$$(P_n A x_n,\, x_n) = (A x_n,\, P_n x_n) = (A x_n,\, x_n) \geqslant \gamma \|x_n\|^2.$$

С другой стороны, $(P_n A x_n,\, x_n) \leqslant \|P_n A x_n\|\, \|x_n\|$, и мы приходим к условию устойчивости:

$$\|P_n A x_n\| \geqslant \gamma \|x_n\|. \tag{7}$$

Доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Если выполнено условие* (6), *то для любого ортопроектора P_n галеркинская аппроксимация оператора A устойчива.*

Сделаем теперь следующее полезное замечание.

Замечание. Пусть $A = A_1 + A_2$. Если для всех $x \in D(A)$ $(A_1 x,\, x) \geqslant \gamma_1 \|x\|^2$, $(A_2 x,\, x) \geqslant \gamma_2 \|x\|^2$, где $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, то для оператора A выполнено условие (6), а с ним и лемма 2.

Доказательство представляем читателю.

30.4. Условие сходимости галеркинской схемы. Рассмотрим, как и в п. 30.1, уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с оператором A: $X \to Y$, вообще говоря, неограниченным, с плотной в X областью определения $D(A)$. Как и в п. 30.2, введем операторы сужения $P_n \in \mathcal{L}(X, X_n)$ и $Q_n \in \mathcal{L}(Y, Y_n)$ с замкнутыми областями значений $X_n = P_n X$ и $Y_n = Q_n Y$.

Рассмотрим, далее, галеркинскую схему решения уравнения (1), т. е. следующую последовательность приближенных уравнений:

$$Q_n A x_n = Q_n y. \tag{2}$$

При этом решение x_n уравнения (2) разыскивается в X_n.

Будем говорить, что галеркинская схема (2) сходится, если при каждом n приближенное решение x_n существует и единственно, начиная с некоторого номера, и при этом

$$x_n \to x, \quad n \to \infty,$$

где x — точное решение (решение уравнения (1)). Перефразируя основную теорему о T-сходимости на рассматриваемый случай, мы приходим к следующему предложению (см. п. 27.5).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $y \in R(A)$, *а* $Q_n y \in R(Q_n A P_n)$ (*т. е. точное и приближенное уравнения разрешимы*);

2) $P_n x \to x$ *на каждом точном решении* x;

3) $Q_n y \to y$ *на правой части уравнения (1)*;

4) $\|Q_n A x - Q_n A P_n x\|_Y \to 0$, *т. е. выполнено условие аппроксимации*;

5) $\|Q_n A x_n\|_Y \geqslant \gamma \|x_n\|_X$, *начиная с некоторого номера, для всех* $x_n \in \in X_n$, *т. е. выполнено условие устойчивости.*

Тогда точное решение x единственно, начиная с некоторого номера приближенное решение x_n единственно, а галеркинская схема (2) сходится и имеет место оценка

$$\|x_n - x\| \leqslant \|P_n x - x\| + \gamma^{-1} \|Q_n A x - Q_n A P_n x\|. \tag{3}$$

Доказательство. Из условия устойчивости следует, что, начиная с некоторого номера, приближенное решение x_n единственно. Пусть x — какое-либо точное решение. Воспользуемся условием устойчивости, а затем уравнениями (2) и (1) и получим оценки

$$\|x_n - x\| \leqslant \|P_n x - x\| + \|x_n - P_n x\|,$$

$$\gamma \|x_n - P_n x\| \leqslant \|Q_n A x_n - Q_n A P_n x\| = \\ = \|Q_n y - Q_n A P_n x\| = \|Q_n A x - Q_n A P_n x\|.$$

Отсюда следует оценка (3), а из нее — единственность точного решения, поскольку $\{x_n\}$ может иметь лишь один предел. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если X_n и Y_n конечномерны и $\dim X_n = \dim Y_n$, то из условия устойчивости следует однозначная разрешимость приближенных уравнений, начиная с некоторого номера.

Действительно, пусть A_n — сужение оператора $Q_n A$ на X_n. $A_n \in \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)$ и $N(A_n) = \{0\}$, согласно условию устойчивости, начиная с того же номера n_0, с какого выполняется условие 5) теоремы.

З а м е ч а н и е 2. Если $\|Q_n\| \leqslant c$ и $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то оценку (3) можно заменить следующей:

$$\|x_n - x\| \leqslant (1 + \gamma^{-1} c\|A\|)\,\|P_n x - x\|. \tag{4}$$

30.5. О методе наименьших квадратов. Начнем с рассмотрения простейшего случая. Пусть A — линейный оператор, действующий из плотной в гильбертовом пространстве H области определения $D(A)$ снова в H. Рассмотрим на $D(A)$ функционал $\varphi(x) = \|Ax - y\|^2$. Решение x^* уравнения $Ax = y$, $y \in D(A)$, доставляет минимум функционалу $\varphi(x)$. Для приближенного определения решения выберем в $D(A)$ линейно независимую систему $\{\varphi_i\}_1^n$. Пусть H_n — подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Приближенное решение $x_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ разыскивается из требования, чтобы

$$\varphi(x_n) = \left\| \sum_{i=1}^n c_i A\varphi_i - y \right\|^2 = \min.$$

Таким образом, вопрос о вычислении $c_1, \ldots, c_n$ сводится к вопросу о наилучшей аппроксимации правой части y линейными комбинациями векторов системы $\{A\varphi_i\}_1^n$. Этот метод принято называть *методом наименьших квадратов.* Ниже вопрос о сходимости метода наименьших квадратов решается в более общем случае. Пусть A — линейный оператор, действующий из плотной в банаховом пространстве X области определения $D(A)$ в банахово пространство Y. Пусть нам удалось найти систему линейно независимых элементов $\{\varphi_i\}_1^\infty \subset D(A)$ и систему линейно независимых функционалов $\{\psi_j\}_1^\infty \subset D(A^*)$, согласованные таким образом, что

$$\langle A\varphi_i,\, \psi_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{1}$$

Зададим проекторы P_n в X и Q_n в Y так:

$$P_n x = \sum_{i=1}^n \langle x,\, A^*\psi_i\rangle \varphi_i, \qquad Q_n y = \sum_{i=1}^n \langle y,\, \psi_i\rangle A\varphi_i. \tag{2}$$

При таком способе задания проекторов галеркинскую схему будем называть *схемой наименьших квадратов.* Для всякого $x \in D(A)$ теперь имеем

$$Q_n A x = \sum_{i=1}^n \langle Ax,\, \psi_i\rangle A\varphi_i = A\left(\sum_{i=1}^n \langle x,\, A^*\psi_i\rangle \varphi_i\right).$$

Таким образом, на $D(A)$ справедливо равенство

$$Q_nA = AP_n. \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема о сходимости схемы наименьших квадратов для уравнения (1) п. 30.4.

Теорема. *Пусть $A:\ X \to Y$ плотно задан в X и для всех $x \in D(A)$*

$$\|Ax\| \geqslant \gamma\|x\|. \tag{4}$$

Если правая часть $y \in R(A)$ и $Q_ny \to y$, то схема наименьших квадратов сходится, причем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \gamma^{-1}\|y - Q_ny\|. \tag{5}$$

Доказательство. Из равенства (3) и неравенства (4) имеем

$$\|Q_nAx_n\| = \|AP_nx_n\| = \|Ax_n\| \geqslant \gamma\|x_n\|,$$

и условие устойчивости схемы выполнено. Далее, из того же равенства (3) имеем $Q_nAx = Q_n^2Ax = Q_nAP_nx$, и, следовательно, условие аппроксимации на $D(A)$

$$\|Q_nAx - Q_nAP_nx\| = 0$$

выполняется точно. Но тогда согласно оценке (4), снова используя (4) и (3), получаем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \|P_nx - x\| \leqslant \gamma^{-1}\|AP_nx - Ax\| = \\ = \gamma^{-1}\|AP_nx - y\| = \gamma^{-1}\|Q_ny - y\|.$$

Теорема доказана.

30.6. Примеры к методу Галеркина. Приведем простейшие примеры, иллюстрирующие применения метода Галеркина.

Пример 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H = \mathcal{L}_2(0,\,1)$ следующую краевую задачу (см. § 14):

$$Ax \equiv -x'' + c(t)x = y(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{2}$$

с непрерывными на $[0,\,1]$ параметрами $c(t)$ и $y(t)$. Пусть, кроме того, на $[0,\,1]$

$$c(t) \geqslant \alpha > -8/\pi. \tag{3}$$

Задачу (1), (2) будем трактовать как операторное уравнение с неограниченным оператором A, область определения которого $D(A)$ состоит из дважды непрерывно дифференцируемых на $(0,\,1)$ функций $x(t)$, непрерывных на $[0,\,1]$ и удовлетворяющих граничным условиям (2). В качестве координатной системы выберем ортонормированную в H, полную в H систему функций

$$\varphi_k = \sqrt{2}\sin k\pi t, \quad k = 1,\,2,\,\ldots \tag{4}$$

Упражнение 1. Покажите, что для всех $x \in D(A)$ справедливо следующее неравенство:

$$(Ax,\, x) \geqslant (8/\pi + \alpha)(x,\, x). \tag{5}$$

Воспользуйтесь оценками (6), (7) п. 14.4.

Заметим теперь, что из оценки (5) и ортонормированности системы (4), в соответствии с п. 30.3 (неравенства (6), (7)), следует условие устойчивости галеркинской приближенной схемы (2) с

$$Q_n = P_n = \sum_{k=1}^{n} (\,\cdot\,,\, \varphi_k)\varphi_k.$$

Упражнение 2. Покажите, что галеркинские приближения имеют вид

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t),$$

где коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определяются из системы уравнений

$$(k\pi)^2 \xi_k + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\xi_i = \eta_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

При этом

$$c_{ik} = \int_0^1 c(t)\, \varphi_k(t)\, \varphi_i(t)\, dt, \qquad \eta_k = \int_0^1 y(t)\, \varphi_k(t)\, dt.$$

Эта система однозначно разрешима.

Для проверки условия аппроксимации воспользуемся упражнением конца п. 30.2, представив оператор A в виде

$$A = -d^2/dt^2 + c(t).$$

Так как $\|P_n\| = 1$ и оператор умножения на $c(t)$ ограничен (проверьте!), то для него условие аппроксимации выполняется (см. лемму 2 п. 30.2).

Проверим теперь условие галеркинской аппроксимации для оператора $-d^2/dt^2$ с областью определения $D(A)$. Воспользуемся его симметричностью и тем обстоятельством, что φ_k является его собственной функцией, отвечающей собственному значению $\lambda_k = k^2\pi^2$. Имеем

$$P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]x = \sum_{k=1}^{n} (-x'',\ \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} (x,\ -\varphi_k'')\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x,\, \varphi_k)\varphi_k,$$

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right] P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x,\, \varphi_k)[-\varphi_k''] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_k (x,\, \varphi_k)\varphi_k.$$

Следовательно, также

$$P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]P_nx=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x,\,\varphi_k)\varphi_k.$$

Таким образом, для любой функции $x\in D(A)$

$$P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]P_nx-P_n\left[-\frac{d^2}{dt^2}\right]x=0,$$

т. е. для оператора $-d^2/dt^2$ условие аппроксимации выполнено точно. Согласно теореме п. 30.4 галеркинская схема сходится.

Упражнение 3. Докажите справедливость следующей оценки галеркинских приближений:

$$\|x_n-x\|_H\leqslant\left[1+(8/\pi+\alpha)^{-1}\,\|c(t)\|_H\right]\|x-P_nx\|_H.$$

Пример 2. Пусть $Q=[0,\,1]\times[0,\,1]$ — единичный квадрат с границей Γ и $H=\mathcal{L}_2(Q)$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$Au\equiv-\Delta u+c(x,\,y)u=h(x,\,y), \tag{6}$$

$$u|_\Gamma=0. \tag{7}$$

Предположим, что функции $c(x,\,y)$ и $h(x,\,y)$ непрерывны в Q и таковы, что задача (6), (7) имеет единственное классическое решение (см. п. 17.3).

Упражнение 4. Покажите, что

$$\iint\limits_Q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dx\,dy\geqslant\frac{16}{\pi}\iint\limits_Q u^2\,dx\,dy. \tag{8}$$

(Справедливо более сильное неравенство, где вместо $16/\pi$ можно взять $2\pi^2$.)

Предположим, далее, что на Q

$$c(x,\,y)\geqslant\alpha>-16/\pi. \tag{9}$$

В качестве координатной системы в $\mathcal{L}_2(Q)$ выберем систему функций

$$\varphi_{kl}=2\sin k\pi x\sin k\pi y,\qquad k,\,l=1,\,2,\,\ldots \tag{10}$$

Из неравенств (8) и (9) вытекает, что

$$(AX,\,x)\geqslant(16/\pi+\alpha)(x,\,x).$$

Поскольку система (10) ортонормирована, то устойчивость галеркинских приближений следует из последнего неравенствах. Проверка условия аппроксимации проводится так же, как в примере 1, так как система (10) — это система собственных функций оператора $-\Delta$, а оператор умножения на $c(x,\,y)$ в $\mathcal{L}_2(Q)$ ограничен.

30.7. О методе Галёркина для линейных уравнений 2-го рода. В этом пункте общий метод Галеркина применяется к линейным уравнениям специального вида. При этом оценку скорости сходимости галеркинской приближенной схемы, полученную в общем случае, удается улучшить.

Рассмотрим в банаховом пространстве X уравнение

$$x - Kx = y \tag{1}$$

с оператором $K \in \mathcal{L}(X)$, $y \in X$. Пусть всюду ниже оператор $I - K$ непрерывно обратим. Введем последовательность проекторов $\{P_n\} \subset \mathcal{L}(X)$, и пусть $X_n = P_n X$ — подпространства в X. Галеркинские приближения x_n определим как решения уравнений

$$x_n - P_n K x_n = P_n y. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $x_n \in X_n$. Все изложенное выше справедливо, конечно, для уравнений (1) и (2). Условие устойчивости означает, как обычно, справедливость априорной оценки

$$\|x_n\| \leqslant \gamma^{-1} \|P_n y\|$$

для возможных решений последовательности уравнений (2). Оно выполняется, в частности, если все операторы $I - P_n K$ непрерывно обратимы и

$$\|(I - P_n K)^{-1}\| \leqslant \gamma, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Достаточное условие (3) дает теорема об обратном операторе п. 12.5. Если

$$\|P_n K - K\| \leqslant q \|(I - K)^{-1}\|^{-1}, \qquad q \in (0, 1), \tag{4}$$

то, согласно неравенству (5) п. 12.5, справедлива оценка (3) с

$$\gamma = \|(I - K)^{-1}\| / (1 - q).$$

Оценка (4) выполняется при всех достаточно больших n, если при $n \to \to \infty$ $P_n K \to K$. Что касается условия аппроксимации, то при $\|P_n\| \leqslant c$ оно следует из ограниченности оператора K. Отметим, однако, что общая оценка (см. формулу (4) п. 30.4) в рассматриваемом случае может быть улучшена. Действительно, так как $Kx = x - y$, то

$$\begin{aligned} x_n - x &= (1 - P_n K)^{-1} P_n y - x = \\ &= (I - P_n K)^{-1}(P_n y - x + P_n K) = (I - P_n K)^{-1}(P_n x - x), \end{aligned}$$

и мы приходим к оценке

$$\|x_n - x\| \leqslant \gamma \|x - P_n x\|.$$

Если же при $n \to \infty$ $P_nK \to K$, $P_ny \to y$, то

$$x_n - x = (I - P_nK)^{-1}(P_ny - y) + [(I - P_nK)^{-1} - (I - K)^{-1}]y =$$
$$= (I - P_nK)^{-1}(P_ny - y) + (I - P_nK)^{-1}(P_nK - K)(1 - K)^{-1}y$$

и, следовательно,

$$\|x_n - x\| \leqslant \gamma\|P_ny - y\| + \gamma\|(I - K)^{-1}\| \, \|P_nK - K\| \, \|y\|.$$

Приведенные в этом рассуждении оценки применимы к различным классам линейных уравнений и, прежде всего, к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t) \tag{5}$$

в пространствах $C[a, b]$ и $\mathcal{L}_2[a, b]$.

Упражнение. Докажите сходимость приближенной схемы Галеркина для уравнения (5) в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ с ядром

$$K(t, s) = \frac{2s \sin \pi t}{4 - 4s \cos \pi t + s^2},$$

если выбрана координатная система $\{\sqrt{2} \sin k\pi t\}_{k=1}^{\infty}$.

Указание. Докажите сначала, что $P_nK \to K$, $n \to \infty$, в $\mathcal{L}_2(0, 1)$.

30.8. Вариационная форма метода Галеркина. Следуя [31], изложим один достаточно общий вариант метода Галеркина, последовательное развитие которого приводит к так называемым вариационно-разностным уравнениям (см. п. 30.9). Пусть A — линейный оператор, действующий из плотной в вещественном гильбертовом пространстве X области $D(A)$ снова в то же пространство X.

Скалярное произведение в X будем обозначать через (x, y), а соответствующую ему норму — через $\|x\|$. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y. \tag{1}$$

Обобщая рассуждения п. 17.3, определим обобщенное решение уравнения (1). Пусть H — еще одно гильбертово пространство со скалярным произведением $[u, v]$ и нормой $\| u \|$, отвечающей этому скалярному произведению. Предположим, что выполнены следующие условия:

I. H вложено в X, $H \supset D(A)$, причем в $H \dot{+} H$ определен билинейный ограниченный функционал $a(u, v)$, т. е. вещественнозначная функция, линейная по u при фиксированном v, линейная по v при фиксированном u и такая, что

$$|a(u, v)| \leqslant c\| u \| \| v \|. \tag{2}$$

Пусть при этом для всех $x \in D(A)$ и всех $v \in H$

$$a(x, v) \equiv (Ax, v). \tag{3}$$

II. Найдется постоянная $\gamma > 0$ такая, что для всех $u \in H$ выполняется неравенство

$$a(u, u) \geqslant \gamma \|u\|^2. \tag{4}$$

Определение 1. Оператор A, удовлетворяющий условиям I и II, будем называть *H-эллиптическим.*

Определение 2. Элемент $x \in H$ назовем *обобщенным решением* уравнения (1) с H-эллиптическим оператором A, если для всех $v \in H$ имеет место тождество

$$a(x, v) = (y, v). \tag{5}$$

Заметим, что, согласно (3), билинейный функционал $a(x, v)$ является расширением с $D(A)\dot{+}H$ на $H\dot{+}H$ билинейного функционала (Ax, v). В соответствии с этим понятие обобщенного решения оказывается расширением понятия решения уравнения (1). Тождество (5) обычно называют при этом вариационной формой уравнения (1).

Для доказательства существования и единственности обобщенного решения уравнения (1) мы воспользуемся методом Галеркина. Это можно сделать и иначе, усиливая рассуждения п. 17.3. Ниже мы ограничиваемся случаем сепарабельных пространств X и H. Выберем в H координатную систему $\{\varphi_k\}_1^\infty$, и пусть P_n — проектор H на линейное подпространство H_n, натянутое на первые n векторов координатной системы.

Определение 3. Элемент $x_n \in H_n$ будем называть *галеркинским приближением* обобщенного решения x уравнения (1), если для любых $v_n \in \in H_n$ имеет место тождество

$$a(x_n, v_n) = (y, v_n). \tag{6}$$

Лемма 1. *Решение задачи* (6) *имеет вид*

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i, \tag{7}$$

где коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определяются из следующей системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\sum_{i=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i = (y, \varphi_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Доказательство. Элемент x_n принадлежит H_n и, значит, имеет вид (7). Подставляя в (6) представление (7) и представление

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \varphi_j, \tag{9}$$

получим, пользуясь билинейностью $a(u, v)$ и линейностью скалярного произведения,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i\eta_j = \sum_{j=1}^{n}(y, \varphi_j)\eta_j. \qquad (10)$$

Но $v_n \in H_n$ произвольно, т. е. $\eta_1, \ldots, \eta_n$ в (10) — произвольные постоянные. Следовательно, (6) и (10) эквивалентны, и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть оператор A H-эллиптичен; тогда для всякого n существует единственное галеркинское приближение x_n обобщенного решения уравнения* (1).

Доказательство. Согласно лемме 1 задача определения x_n из (6) эквивалентна линейной системе (8). Поэтому, если будет установлено, что однородная задача, получающаяся из (6) при $y = 0$, имеет лишь тривиальное решение, то задача (8), а с ней и задача (6) будут однозначно разрешимы.

Воспользуемся условием II. Если $a(x_n, v_n) = 0$ для всех $v_n \in H_n$, то это верно и при $v_n = x_n$. Но тогда по (4)

$$0 = a(x_n, x_n) \geqslant \gamma\|x_n\|^2 .$$

Значит, $x_n = 0$, и лемма 2 доказана.

Ниже будут установлены существование обобщенного решения уравнения (1) и сходимость к нему галеркинских приближений (7). Для этой цели нам понадобится еще следующая лемма.

Лемма 3. *Если $u_n \to u_0, n \to \infty$, слабо в H, а $v_n \to v_0, n \to \infty$, сильно в H, то при $n \to \infty$*

$$a(u_n, v_n) \to a(u_0, v_0).$$

Доказательство. Заметим сначала, что вследствие билинейности

$$a(u_n, v_n) - a(u_0, v_0) = a(u_n, v_n - v_0) + a(u_n - u_0, v_0). \qquad (11)$$

Так как $\{u_n\}$ сходится слабо, то, по теореме 2 п. 17.5, она ограничена. Поэтому из неравенства (2) при $n \to \infty$ имеем

$$|a(u_n, v_n - v_0)| \leqslant c\|u_n\|\|v_n - v_0\| .$$

Далее, поскольку v_0 фиксировано, для всевозможных $u \in H$ выражение $a(u, v_0)$ определяет в H линейный функционал. Но тогда, по теореме Рисса п. 17.2, найдется $w_0 \in H$ такой, что для всех $u \in H$ $a(u, v_0) = [u, w_0]$. Следовательно, при $n \to \infty$, согласно определению слабой сходимости $\{u_n\}$ к u_0, имеем

$$a(u_n - u_0, v_0) = [u_0 - u_n, w_0] \to 0.$$

Итак, в (11) оба слагаемых справа стремятся к нулю, и лемма 3 доказана.

Теорема. *Пусть подпространство H сепарабельно и оператор A H-эллиптичен. Тогда*:

1) *для всякого n галеркинское приближение x_n обобщенного решения уравнения* (1) *существует и единственно*;

2) *обобщенное решение уравнения* (1) *существует и единственно*;
3) $x_n \to x_0, n \to \infty$, *слабо*; *при этом справедлива оценка*

$$\|x_n - x_0\| \leqslant c\gamma^{-1}\|P_n x - x\|. \tag{12}$$

Доказательство. Согласно лемме 2 утверждение 1) теоремы верно. Для доказательства утверждения 2) воспользуемся сепарабельностью пространства H. Выберем в H ортонормированный базис, сохранив для него обозначение $\{\varphi_i\}_1^\infty$. При $n \to \infty$ $P_n v \to v$ для любого $v \in H$, т. е. ряд Фурье, составленный для элемента v, сходится к v.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ галеркинских приближений. Полагая в (6) $v_n = x_n$ и пользуясь неравенством (4), получаем

$$\gamma\|x_n\|^2 \leqslant a(x_n, x_n) = (y, x_n) \leqslant ||y||\,||x_n||.$$

Но H вложено в X, и поскольку $x_n \in H$, то найдется постоянная $k > 0$ такая, что $||x_n|| \leqslant k\|x_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, $\gamma\|x_n\|^2 \leqslant k\|x_n\|\,||y||$, откуда

$$\|x_n\| \leqslant \gamma^{-1}k||y||.$$

Значит, последовательность галеркинских приближений $\{x_n\}$ ограничена в H. Но тогда она слабо компактна (см. следствие 2 из теоремы 2 п. 19.7). Пусть $\{x_{n'}\}$ — ее подпоследовательность, сходящаяся в H слабо к некоторому элементу $x_0 \in H$. Покажем, что x_0 и есть обобщенное решение уравнения (1). Фиксируем произвольный элемент $v \in H$. Тогда, в соответствии с (6), $a(x_{n'}, P_{n'}v) = (y, P_{n'}v)$. При этом $P_{n'}v \to v, n' \to \infty$, сильно, а $x_{n'} \to x_0$, $n' \to \infty$, слабо. По лемме 3 и свойству непрерывности скалярного произведения имеем $a(x_0, v) = (y, v)$. Из произвольности $v \in H$ (см. (5)) следует, что x_0 — обобщенное решение уравнения (1).

Для доказательства единственности обобщенного решения воспользуемся условием II. Если x_0 и x_0' — два обобщенных решения, то для любых $v \in H$

$$a(x_0, v) = (y, v), \quad a(x_0', v) = (y, v).$$

Вычитая эти тождества, получим $a(x_0 - x_0',\ v) = 0$. Полагая здесь $v = x_0 - x_0'$ и пользуясь (4), находим

$$0 = a(x_0 - x_0', x_0 - x_0') \geqslant \gamma\|x_0 - x_0'\|^2.$$

Значит, $x_0 = x_0'$.

Докажем теперь оценку (12). Она справедлива без предположения о полноте системы $\{\varphi_i\}_1^\infty$. Полагая в (5) $v = v_n$ и вычитая из (6), получим, что $a(x_n - x,\ v_n) = 0$ для всех $v_n \in H_n$. В частности, $a(x_n - x,\ x_n) = a(x_n - x,\ P_n x) = 0$. Но тогда по условию II

$$\gamma\|x_n - x\|^2 \leqslant a(x_n - x,\ x_n - x) = -a(x_n - x,\ x) = \\ = a(x_n - x,\ P_n x - x) \leqslant c\|x_n - x\|\|P_n x - x\|.$$

Отсюда следует оценка (12). Теорема доказана.

30.9. Метод конечных элементов в простейшем случае. Рассмотрим краевую задачу

$$-(a(t)x')' + c(t)x = y(t), \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0 \tag{2}$$

с непрерывно дифференцируемым на $[0,\ 1]$ коэффициентом $a(t)$ и с непрерывными на $[0,\ 1]$ коэффициентами $c(t)$ и $y(t)$.

Пусть на $[0,\ 1]$

$$a(t) \geqslant \alpha > 0, \quad c(t) \geqslant \beta > 0. \tag{2}$$

Согласно определению 2 п. 30.8 *обобщенным решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $x(t) \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,\ 1)$, удовлетворяющую тождеству (5) п. 30.8 для всех $v(t) \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,\ 1)$, где в данном случае

$$a(x,\ v) \equiv \int_0^1 a(t)\, x'(t)\, v'(t)\, dt + \int_0^1 c(t)\, x(t)\, v(t)\, dt,$$

$$(y,\ v) = \int_0^1 y(t)\, v(t)\, dt.$$

Таким образом, тождество (5) п. 30.8 получается в результате скалярного умножения в $\mathcal{L}_2(0,\ 1)$ уравнения (1) не произвольную функцию $v(t) \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}^1(0,\ 1)$ и интегрирования по частям. Это позволяет «перебросить» часть требований гладкости с $x(t)$ на $v(t)$.

Упражнение 1. Покажите, что билинейный функционал $a(x,\ v)$ удовлетворяет условию (4) п. 30.8 с $\gamma = \min(\alpha,\ \beta)$ (см. (3)).

Упражнение 2. Из неравенства Коши–Буняковского выведите ограниченность $a(x,\ v)$, т. е. неравенство (2) п. 30.8.

В качестве координатной системы в $H_n \subset \overset{\circ}{H}{}^1(0,\ 1)$ выберем систему функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^n$, где

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{на} \quad [0,\ 1/n], \\ 0 & \text{на} \quad [1/n,\ 1], \end{cases}$$

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad [0,\ 1 - 1/n], \\ n - 1 + nt & \text{на} \quad [1 - 1/n,\ 1], \end{cases}$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} i - 1 + nt & \text{на} \quad [(i-1)/n,\ i/n], \\ i + 1 - nt & \text{на} \quad [i/n,\ (i+1)/n], \\ 0 & \text{вне} \quad [(i-1)/n,\ (i+1)/n]. \end{cases}$$

Галеркинское приближение разыскивается в виде (7) п. 30.8, т. е. в виде кусочно линейной функции. Коэффициенты $\xi_0, \ldots, \xi_n$ разыскиваются из системы уравнений вида (8) п. 30.8:

$$\sum_{i=0}^{n} a(\varphi_i, \varphi_j)\xi_i = (y, \varphi_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Упражнение 3. Покажите $(h = n^{-1})$, что

$$a(\varphi_0, \varphi_0) = n^2 \int_0^h a(t)\,dt + \int_0^h c(t)(1 - nt)^2\,dt,$$

$$a(\varphi_n, \varphi_n) = n^2 \int_{1-h}^{h} a(t)\,dt + \int_{1-h}^{h} c(t)(n - 1 + nt)^2\,dt,$$

$$a(\varphi_k, \varphi_{k+1}) = a(\varphi_{k-1}, \varphi_k) =$$

$$= -n^2 \int_{kh}^{(k+1)h} a(t)\,dt + \int_{kh}^{(k+1)h} c(t)(nt - k)(nt - k - 1)\,dt,$$

$$a(\varphi_k, \varphi_l) = 0, \quad l \neq k - 1, \quad k + 1.$$

Вычислите также (y, φ_k) $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Таким образом, коэффициенты $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ определяются из системы с трехдиагональной матрицей.

В случае задачи (1)–(2) нетрудно показать, что ее обобщенное решение на самом деле принадлежит $C^2[0, 1]$. Воспользуемся примером 1 п. 29.5. В этом примере была установлена оценка (10), показывающая, что для всякой функции $x(t) \in H^2(0, 1)$ при $n \to \infty$

$$\|x - P_n x\|_{H^1(0,1)} = O(1/n),$$

где $P_n = S_n T_n$ — проектор в $H^1(0, 1)$ на подпространство кусочно линейных функций, натянутое на $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Таким образом, из оценки (12) теоремы п. 30.8 следует сходимость галеркинских аппроксимаций x_n к точному решению x задачи (1), (2). Дальнейшие сведения по применению метода конечных элементов в теории краевых задач для эллиптических уравнений можно найти в монографии [31].

§ 31. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и методы их решения

Теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве является одним из новых и плодотворных направлений функционального анализа. В этом параграфе рассматриваются лишь простейшие линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. В п. 31.1

мы останавливаемся на задаче Коши для уравнения с постоянным ограниченным оператором. В следующих двух пунктах для этой же задачи обсуждается применение метода Галеркина и разностной схемы. Затем в п. 31.4 рассмотрен метод малого параметра, включая случай сингулярного возмущения.

Только после этого мы переходим к изучению дифференциального уравнения с постоянным неограниченным оператором, порождающим аналитическую полугруппу $U(t)$, совпадающую с $\exp\{At\}$ в случае ограниченного оператора A. Этот случай, по-видимому, наиболее часто встречается в приложениях.

31.1. Задача Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. В последние десятилетия сложилось новое направление в функциональном анализе — теория дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Функционально-аналитический подход оказался особенно полезным в уравнениях математической физики, поскольку он позволяет отвлечься от второстепенных специфических особенностей задачи и технических трудностей и сосредоточить внимание лишь на существо проблемы. В этом пункте мы остановимся на простейшем дифференциальном уравнении в банаховом пространстве и на методах нахождения решений.

Пусть X — банахово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X)$, $x_0 \in X$ — заданный элемент, $y(t)$ — заданная абстрактная, непрерывная на $[0,\, \theta]$ функция со значениями в X. Рассмотрим на $[0,\, \theta]$ следующую задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$dx/dt = Ax + y(t), \tag{1}$$

$$x|_{t=0} = x_0. \tag{2}$$

Решение $x(t)$ задачи (1), (2) (абстрактная функция, непрерывно дифференцируемая на $[0,\, \theta]$, обращающая (1) в тождество и удовлетворяющая начальному условию (2)) может быть найдено в явном виде.

Допустим сначала, что решение $x(t)$ задачи (1), (2) существует. Подставим $x(t)$ в (1) и полученное тождество умножим на интегрирующий множитель e^{-At}. Полученное тождество, если заменить в нем переменную t на s, можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{ds}[e^{-At}x(s)] \equiv e^{-As}y(s), \qquad s \in [0,\, \theta]. \tag{3}$$

Проинтегрируем тождество (3) по s от 0 до $t \in [0,\, \theta]$ и, согласно формуле Ньютона–Лейбница (свойство 9 п. 25.2), используя начальное условие (2), получим

$$e^{-At}x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-As}y(s)\, ds. \tag{4}$$

Поскольку $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$, то, применяя к обеим частям тождества (4) оператор e^{At}, найдем

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}y(s)\,ds. \tag{5}$$

Мы показали, что если задача (1), (2) имеет решение, то это решение обязательно дается формулой (5). Это, в частности, означает единственность решения задачи Коши (1)–(2).

Для доказательства существования решения этой задачи покажем, что формула (5) дает решение (1), (2). Дифференцируя по t функцию $x(t)$, определенную равенством (5), и, пользуясь тем, что

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t e^{A(t-s)}y(s)\,ds\right\} = y(t) + A\int_0^t e^{A(t-s)}y(s)\,ds, \tag{6}$$

убеждаемся, что $x(t)$ действительно обращает (1) в тождество. Начальное условие (2) также удовлетворяется (почему?).

Упражнение. Докажите формулу (6), применив формулу производной произведения (см. п. 13.2) и свойство 8 п. 25.2 дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, заметив предварительно, что

$$\int_0^t e^{A(t-s)}y(s)\,ds = e^{At}\int_0^t e^{-As}y(s)\,ds.$$

Итак, мы установили, что задача Коши (1), (2), при сделанных выше предположениях о ее параметрах A, $y(t)$, x_0, имеет, и притом единственное, решение $x(t)$, и показали, что это решение дается явной формулой (5).

При всей своей внешней простоте формула (5), будучи очень удобной в теоретических рассуждениях, может оказаться очень сложной при численных расчетах, поскольку требует вычисления функции оператора e^{At} и интегрирования. Поэтому ниже будут приведены приближенные схемы решения задачим (1), (2). Пока же дадим примеры уравнений, которые можно записать в виде (1).

Пример 1. Пусть $X = E^m$, $x_0 = (x_{0i})_{i=1}^m$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad y(t) = (y_i(t))_{i=1}^m, \quad t \in [0,\,\theta],$$

$y_i(t)$ непрерывны на $[0,\,T]$. Неизвестное $x(t) = (x_i(t))_{i=1}^m$ — столбец непрерывно дифференцируемых функций. Задача (1), (2) в данном случае представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j + y_i(t), \quad x_i(0) = x_{0i}, \quad i = 1,\,\dots,\,m.$$

П р и м е р 2. Пусть $X = C[a,\, b]$. Абстрактная функция $y(t,\, s)$ зависит здесь от двух переменных $s \in [a,\, b]$ и $t \in [0,\, \theta]$ и непрерывна отдельно по s и отдельно по t. Пусть функции $k(s)$ и $x_0(s)$ непрерывны на $[a,\, b]$, а функция двух переменных $K(s,\, \sigma)$ непрерывна, как функция двух переменных в квадрате $a \leqslant s,\, \sigma \leqslant b$. Рассмотрим следующую задачу Коши для интегродифференциального уравнения:

$$\frac{\partial x(s,\, t)}{\partial t} = k(s)\, x(s,\, t) + \int\limits_a^b K(s,\, \sigma)\, x(\sigma,\, t)\, d\sigma + y(s,\, t),$$

$$x(s,\, 0) = x_0(s).$$

Это еще одна реализация абстрактной задачи (1), (2).

З а м е ч а н и е. В форме (1), (2) может быть записана также смешанная задача для уравнения теплопроводности (п. 28.2), однако это уже будет дифференциальное уравнение с неограниченным оператором $A = \partial^2/\partial x^2$, с соответствующей областью определения $D(A)$, для описания которой нужна более серьезная теория (см. п. 31.5 и далее до конца параграфа).

31.2. Применение схем Галеркина и Фурье. Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) п. 31.1 можно воспользоваться методом Галеркина. Пусть $\{\varphi_i\}$ — линейно независимая система в X, а $\{\gamma_i\}$ — биортогональная к ней система из X^*. Введем проектор

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \langle\, \cdot\,,\, \gamma_i\rangle \varphi_i. \tag{1}$$

Предположим, что абстрактная функция $y(t)$ — правая часть уравнения (1) п. 31.1 — разлагается в сходящийся к ней ряд Галеркина:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t)\varphi_k, \qquad \eta_k(t) = \langle y(t),\, \gamma_k\rangle. \tag{2}$$

То же самое предположим о начальном условии

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{0k}\varphi_k, \qquad \xi_{0k} = \langle x_0,\, \gamma_k\rangle. \tag{3}$$

Иначе требования (2) и (3) можно записать так:

$$P_n y(t) \to y(t), \quad P_n x_0 \to x_0, \quad n \to \infty.$$

Приближенное решение задачи Коши будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)\varphi_k. \tag{4}$$

Согласно методу Галеркина (§ 30) для определения $x_n(t)$ получаем задачу Коши

$$dx_n/dt = P_n A x_n + P_n y(t), \tag{5}$$

$$x_n|_{t=0} = P_n x_0. \tag{6}$$

Согласно п. 31.1 решение задачи (5), (6) существует, единственно и дается формулой (см. формулу (5) п. 31.1)

$$x_n(t) = e^{P_n A t} P_n x_0 + \int\limits_0^t e^{P_n A(t-s)} P_n y(s)\, ds. \tag{7}$$

Пусть проектор P_n удовлетворяет условию

$$\|P_n\| \leqslant c, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Тогда из (7) оценкой по норме получаем

$$\max_{[0,\,\theta]} \|x_n(t)\| \leqslant k(\theta)\bigl\{\|P_n x_0\| + \max_{[0,\,\theta]} \|P_n y(t)\|\bigr\}, \tag{9}$$

где

$$k(\theta) = \max\{e^{c\|A\|\theta},\ (e^{\|A\|\theta} - 1)/c\|A\|\}.$$

Оценка (9) представляет собой условие устойчивости галеркинской схемы (5), (6). Относительно условия аппроксимации заметим, что

$$P_n\left(\frac{dx}{dt} - Ax\right) - P_n\left(\frac{d}{dt} - A\right) P_n x = P_n A(P_n x - x),$$

поскольку операторы P_n и d/dt перестановочны. Так как A ограничен и выполнено условие (8), то условие аппроксимации также будет выполняться, если для решения $x(t)$

$$P_n x(t) \to x(t), \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Таким образом, если выполняются требования (2), (3) и (10), то галеркинская схема (5), (6) сходится согласно общей теореме п. 30.4.

В частном случае, когда X — гильбертово пространство, а $\{\varphi_k\} = \{\gamma_k\}$ — ортонормированная полная система, эти условия выполняются автоматически. Если A — самосопряженный, вполне непрерывный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве X, то систему $\{\varphi_i\}$ можно образовывать из собственных векторов оператора A. В этом случае матрица $P_n A P_n$ диагональна и коэффициенты $\xi_k(t)$ в формуле (4) находятся из уравнений (см. также (2) и (3))

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \lambda_k \xi_k + \eta_k(t), \quad \xi_k(0) = \xi_{k0}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где λ_k — собственные значения A. Мы пришли к известному методу Фурье.

31.3. Разностная схема в банаховом пространстве. Для приближенного решения задачи Коши (1), (2) п. 31.1 можно воспользоваться также следующей разностной схемой. Пусть $\{k\tau\}_{k=0}^{n}$ — равномерная сетка на $[0,\,\theta]$, $n\tau = 0$. Зададим последовательность операторов $\{A_\tau\} \subset \mathcal{L}(X)$, аппроксимирующих оператор A равномерно (в метрике $\mathcal{L}(X)$), т. е. $A_\tau \to \to A$ при $\tau \to 0$. Следовательно, найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех τ (принимаем $A_0 = A$)

$$\|A_\tau \leqslant c\|. \tag{1}$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} = A_\tau u(t) + y(t+\tau), \qquad t \in \{k\tau\}_{k=0}^{n}, \tag{2}$$

$$u(0) = x_0. \tag{3}$$

Замена оператора A приближением A_τ оправдана, например, в ситуации примера 2 п. 31.2, когда интеграл заменяется его приближением по какой-либо квадратурной формуле.

Проверим для разностной схемы (2), (3) условия аппроксимации и устойчивости.

Рассуждения будем вести в банаховом пространстве $C_X[0,\,\theta]$, элементы которого $x(t),\, y(t),\, \ldots$ суть абстрактные, непрерывные на $[0,\,\theta]$ функции, со значениями в X и с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{[0,\,\theta]} \|x(t)\|.$$

В $C_X[0,\,\theta]$ рассмотрим линейный оператор B, область определения которого $D(B)$ состоит из непрерывно дифференцируемых на $[0,\,\theta]$ функций $x(t)$ и который действует по формуле

$$Bx = \bigl(x'(t) - Ax(t),\; x(0)\bigr).$$

Таким образом, значения B лежат в пространстве $C_X[0,\,\theta]\dot{+}X$. Норму элемента $(y(t),\, x_0)$ зададим, как обычно:

$$\|(y(t),\, x_0)\|_1 = \|y(t)\| + \|x_0\|.$$

Операторы сужения T_τ и T'_τ, согласно (2), имеют вид

$$T_\tau x(t) = (x(k\tau))_{k=1}^{n}, \qquad T'_\tau(y(t),\, x_0) = (T_\tau y(t),\, x_0),$$

а операторы B_τ, аппроксимирующие B, задаются так:

$$B_\tau u(t) = \left(\frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} - A_\tau u(t),\; x_0\right), \qquad t \in \{k\tau\}_0^{n-1}.$$

Для проверки условия аппроксимации составим погрешность

$$\Delta_\tau = B_\tau x(t) - Bx(t) = \left(\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} - x'(t) + (A - A_\tau)x(t),\ 0 \right),$$

где $x(t)$ — решение исходной задачи (1), (2) п. 31.1, а $t \in \{k\tau\}_{k=0}^{n}$. Имеем следующую оценку:

$$\|\Delta_\tau\| \leqslant \left\| \frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} - x'(t) \right\| + \|A - A_\tau\| \, \|x(t)\|.$$

Поскольку

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} - x'(t) = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau [x'(t+\alpha) - x'(t)]\, d\alpha,$$

то, вследствие равномерной непрерывности $x'(t)$ на $[0,\,\theta]$ (см. п. 25.1),

$$\left\| \frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} - x'(t) \right\| \to 0.$$

Так как при $\tau \to 0$ $A_\tau \to A$, то доказано, что $\|\Delta_\tau\| \to 0$, при $\tau \to 0$, т. е. выполнено условие аппроксимации.

Перейдем к проверке условия устойчивости. Воспользуемся тем, что разностная схема (2), (3) решается в явном виде по временным слоям и решение ее дается формулой

$$u(k\tau) = (I + \tau A_\tau)^k x_0 + \tau \sum_{s=0}^{k-1} (I + \tau A_\tau)^s y((k-s)\tau). \tag{4}$$

Отсюда, пользуясь неравенством (1), нетрудно показать, что

$$\|u(k\tau)\| \leqslant (1 + \tau c)^k \|x_0\| + \tau \sum_{s=0}^{k-1} (1+\tau c)^s \max_{0 \leqslant l \leqslant k} \|y(l\tau)\|. \tag{5}$$

Далее, заметим, что

$$(1+\tau c)^k \leqslant (1+\tau c)^n = (1+\tau c)^{\theta/\tau} \leqslant e^{c\theta}, \qquad \tau \sum_{s=0}^{k-1} (1+\tau c)^s \leqslant \frac{e^{c\theta}-1}{c}.$$

Следовательно, оценку (5) можно продолжить и получить

$$\|u(t)\| \leqslant e^{c\theta} \|x_0\| + \frac{e^{c\theta}-1}{c} \|y\|. \tag{6}$$

Последнее неравенство представляет собой условие устойчивости разностной схемы (2), (3). Из основной теоремы п. 27.5 теперь вытекает сходимость разностной схемы (1), (2).

Разностная схема (2), (3) является частным случаем двуслойных разностных схем (ограничимся случаем $y = 0$):

$$U(\tau)\,\frac{u(t+\tau)-u(t)}{\tau} + V(\tau)\,u(t) = 0, \qquad u(0) = x_0. \tag{7}$$

Пусть X — гильбертово пространство, $U(\tau)$ и $V(\tau)$ всюду заданы, самосопряженны и положительны. Положим $\|x\|_\tau = \sqrt{(V(\tau)x,\, x)}$. Для того чтобы имела место априорная оценка $\|u(t)\|_\tau = \|x_0\|_\tau$, необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства $U(\tau) \geqslant 0,5\tau V(\tau)$.

Этот результат акад. А. А. Самарского и его обобщения играют важную роль в теории устойчивости разностных схем (см. [37]).

31.4. Метод малого параметра. Регулярное и сингулярное возмущение. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве X, содержащего малый параметр ε, $|\varepsilon| < \rho$:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = A(\varepsilon)x_\varepsilon + y(t,\, \varepsilon), \quad x_\varepsilon|_{t=0} = a(\varepsilon). \tag{1}$$

Предположим, что оператор-функция $A(\varepsilon)$, правая часть $y(t,\, \varepsilon)$ и начальное условие $a(\varepsilon)$ аналитичны по ε в точке $\varepsilon = 0$, т. е. справедливы их следующие разложения в сходящиеся ряды с общим радиусом сходимости ρ:

$$A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k, \quad y(t,\, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t)\varepsilon^k, \quad a(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k. \tag{2}$$

Решение задачи (1) (см. формулу (5) п. 31.1) записывается так:

$$x_\varepsilon(t) = e^{A(\varepsilon)t}a(\varepsilon) + \int\limits_0^t e^{A(\varepsilon)(t-s)}y(s)\,ds.$$

Отсюда видно, что $x_\varepsilon(t)$ также является аналитической функцией ε в точке $\varepsilon = 0$ и представимо при $|\varepsilon| < \rho$ сходящимся рядом

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\varepsilon^k. \tag{3}$$

Это решение можно найти методом малого параметра (см. п. 13.6). Подставим (3) в (1) с учетом (2) и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим для определения коэффициентов $x_k(t)$ в (3) следующую рекуррентную последовательность задач Коши:

$$\frac{dx_0}{dt} = A_0 x_0 + y_0(t), \quad x_0|_{t=0} = a_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dx_k}{dt} = A_0 x_k + \sum_{s=1}^{k} A_s x_{k-s} + y_k(t), \quad x_k|_{t=0} = a_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Заметим, что метод эффективен, если задача Коши с оператором A_0 проще, чем та же задача с оператором $A(\varepsilon)$. Описанный выше случай, как мы видели, укладывается в рамки метода малого параметра. Этот случай принято называть *случаем регулярного возмущения.*

Существенно более сложным является случай, когда малый параметр ε входит в виде множителя при производной. Это один из примеров задач с сингулярным возмущением, привлекшим к себе в последние годы пристальное внимание, поскольку подобные задачи плохо поддаются решению на ЭВМ. В то же время здесь хорошо работают так называемые асимптотические методы. Ознакомимся с образцом задачи с сингулярным возмущением на примере следующей задачи Коши:

$$\varepsilon \frac{dx_\varepsilon}{dt} = A x_\varepsilon + y(t), \tag{4}$$

$$x_\varepsilon|_{t=0} = a. \tag{5}$$

Пусть оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ непрерывно обратим и обладает следующим свойством: существуют постоянные $c > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\|e^{At}\| \leqslant c e^{-\alpha t}, \quad t \in [0, \theta]. \tag{6}$$

Абстрактную функцию $y(t)$ будем предполагать достаточно гладкой на $[0, \theta]$, т. е. имеющей там столько производных, сколько может понадобиться в наших рассуждениях.

Попытаемся сначала найти решение задачи (4), (5) в следующем виде:

$$\bar{x} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \varepsilon^k. \tag{7}$$

Подстановка (7) в (4) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε приводят к следующей системе уравнений:

$$A x_0(t) = -y(t), \quad A x_k(t) = x'_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

из которой последовательно находим

$$x_0(t) = -A^{-1} y(t), \quad x_1(t) = -A^{-2} y'(t), \dots, \tag{9}$$

$$x_k(t) = -A^{-k-1}y^{(k)}(t), \quad k = 2,\, 3,\, \ldots$$

Если $y(t)$ бесконечно дифференцируема на $[0,\, \theta]$ и $\|y^{(s)}(t)\| \leqslant c_1$ на $[0,\, \theta]$, то ряд

$$x(t,\, s) = -\sum_{s=0}^{\infty} A^{-1-s}y^{(s)}(t)\varepsilon^s \tag{10}$$

сходится при $\varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1}$, но в общем случае не удовлетворяет начальному условию (5); $x(0,\, \varepsilon) = a$ лишь в исключительных обстоятельствах, когда $y(0) = -Aa$ и все $y^{(k)}(0) = 0$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$. Таким образом, ряд (7) непригоден в качестве приближенного решения по крайней мере вблизи точки $t = 0$. Оказывается — и здесь существенную роль играет ограничение (6) на оператор A,— разложение (7) можно вблизи точки $t = 0$ подправить так, чтобы получилось приближенное решение, пригодное на всем $[0,\, \theta]$. Рассмотрим соответствующее (4) однородное уравнение

$$\varepsilon\frac{dv}{dt} = Av,$$

общий вид решений которого следующий (рис. 16):

$$v(t,\, \varepsilon) = e^{-At/\varepsilon}v_0,$$

где $v_0 \in X$ — произвольный вектор. Функции $v(t,\, \varepsilon)$ обладают следующим

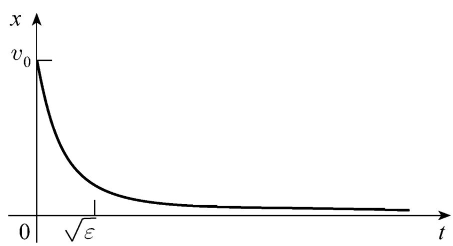


Рис. 16

замечательным свойством. Заметим сначала, что согласно неравенству (6)

$$v|_{t=0} = v_0, \qquad \|v(t,\, \varepsilon)\| \leqslant ce^{-\alpha t/\varepsilon}, \qquad t \geqslant 0.$$

Выделим отрезок $[0,\, \sqrt{\varepsilon}]$, который, применяя терминологию механики жидкости, назовем «пограничным слоем». При $t \in [\sqrt{\varepsilon},\, \theta]$, т. е. вне пограничного слоя, для любого натурального N

$$e^{-\alpha t/\varepsilon} \leqslant e^{-\alpha/\sqrt{\varepsilon}} = o(\varepsilon^N), \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, значения $v(t,\ \varepsilon)$ сосредоточены в пограничном слое, а вне его $v(t,\ \varepsilon)$ экспоненциально убывает (быстрее любой степени ε^N). Это обстоятельство и позволяет за счет «функции погранслоя» $v(t,\ \varepsilon)$ исправить степенное разложение (7). Сформулируем и докажем соответствующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть оператор A удовлетворяет условию* (6), *а правая часть $y(t)$ $N+1$ раз непрерывно дифференцируема на* $[0,\ \theta]$; *тогда равномерно на* $[\sqrt{\varepsilon},\ \theta]$ *при* $\varepsilon \to 0$ *для решения* $x_\varepsilon(t)$ *задачи* (1), (2) *справедливо представление*

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{N} x_k(t)\varepsilon^k + w_\varepsilon(t), \tag{11}$$

где $w_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{N+1})$, *а* $x_k(t)$ *определяются формулами* (8) *или* (9).

Доказательство. Сделаем в (1) замену (11) и, учитывая равенства (8), придем к следующей задаче Коши для определения $w_\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon\frac{dw_\varepsilon}{dt} = Aw_\varepsilon + A^{-N-1}y^{(N+1)}(t)\varepsilon^{N+1}, \tag{12}$$

$$w_\varepsilon(0) = a - \sum_{k=0}^{N} x_k(0)\varepsilon^k. \tag{13}$$

Решение этой задачи (см. формулу (5) п. 31.1) имеет вид

$$w_\varepsilon(t) = e^{At/\varepsilon}w_\varepsilon(0) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{A(t-s)/\varepsilon}A^{-N-1}y^{(N+1)}(t)\,dt\,\varepsilon^{N+1}.$$

Оценим $w_\varepsilon(t)$ по норме и получим

$$\|w_\varepsilon(t)\| \leqslant ce^{-\alpha t/\varepsilon}\|w_\varepsilon(0)\| + \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)/\varepsilon}\,ds\,(\|A^{-1}\|\varepsilon)^{N+1}\|y^{(N+1)}(t)\|.$$

Поскольку для $t \geqslant \sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$

$$ce^{-\alpha t/\varepsilon}\|w_\varepsilon(0)\| = O(\varepsilon^{N+1}), \qquad \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)/\varepsilon}\,ds = \frac{1}{\alpha} + O(\varepsilon^{N+1}),$$

то $\|w_\varepsilon(t)\| = O(\varepsilon^{N+1})$, и теорема доказана.

Интересно отметить, что в формулировке теоремы не участвует начальное условие a. Решения всех задач (4), (5) со всевозможными начальными условиями a представимы на $[\sqrt{\varepsilon},\ \theta]$ в виде (11). Выполнение начального условия реализуется в пограничном слое $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ за счет быстрого изменения решения (рис. 17).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *для решения* $x_\varepsilon(t)$ *задачи* (1), (2) *справедливо представление*

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{N} x_k(t)\varepsilon^k - e^{At/\varepsilon} \times \left[\sum_{k=0}^{N} x_k(0)\varepsilon^k - a\right] + z_\varepsilon(t), \quad (14)$$

где $z_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{N+1})$ при $\varepsilon \to 0$ *равномерно на* $[0, \theta]$.

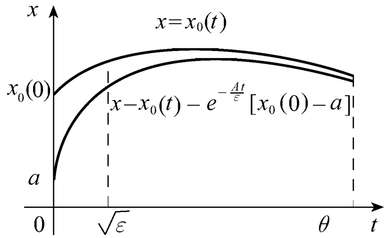


Рис. 17

Доказательство. Сделаем в (1), (2) замену (14) и придем к следующей задаче Коши для определения $z_\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon\frac{dz_\varepsilon}{dt} = Az_\varepsilon + A^{-N-1}y^{(N+1)}(t)\varepsilon^{N+1}, z_\varepsilon(0) = 0.$$

Решение этой задачи дается формулой

$$z_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{A(t-s)/\varepsilon}A^{-N-1}y^{(N+1)}(s)\,ds\,\varepsilon^{N+1}.$$

Повторяя оценки доказательства теоремы 1, получим, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $[0, \theta]$ $z_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^{N+1})$. Теорема доказана.

Следствие. *Если оператор* A *удовлетворяет условию* (6) *и функция* $y(t)$ *бесконечо дифференцируема на* $[0, \theta]$, *то утверждения теорем* 1 *и* 2 *справедливы для любого целого неотрицательного* N.

31.5. Задача Коши с неограниченным оператором; преобразование Лапласа и полугруппы. В этом пункте с помощью преобразования Лапласа будет дан нестрогий вывод формулы для решения задачи Коши для однородного линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с неограниченным оператором. В последующих пунктах, при дополнительных ограничениях на оператор, будет дано строгое обоснование полученной формулы, рассмотрено неоднородное уравнение и будет доказана теорема единственности. Наше изложение следует схеме, предложенной в [26], и требует знания основ теории функций комплексного переменного.

Всюду ниже предполагается, что A — замкнутый линейный неограниченный оператор с плотной в банаховом комплексном пространстве X областью определения $D(A)$, со значениями в X.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$dx/dt = Ax, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$x|_{t=0} = x_0. \tag{2}$$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать абстрактную функцию $x(t)$ со значениями в $D(A)$, непрерывную на $[0, +\infty)$, непрерывно дифференцируемую на $(0, +\infty)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Предположим временно, что решение $x(t)$ задачи (1), (2) существует, единственно и существуют постоянные $M > 0$ и ω такие, что

$$\|x(t)\| \leqslant Me^{\omega t}. \tag{3}$$

Каждой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $x(t)$, удовлетворяющей условию (3), поставим в соответствие функцию $\widehat{x}(p)$ комплексного переменного p, определяемую в виде несобственного интеграла, зависящего от параметра:

$$\widehat{x}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}x(t)\,dt. \tag{4}$$

Функция $\widehat{x}(p)$ называется *изображением* (*по Лапласу*) функции $x(t)$; сама $x(t)$ при этом называется *оригиналом*. Таким образом, задано преобразование Лапласа абстрактных функций $x(t)$, которое можно записать в виде

$$\widehat{x}(p) = \mathcal{L}[x(t)]. \tag{5}$$

Основные свойства преобразования Лапласа (линейность его очевидна) мы предлагаем проверить читателю (см. [22]).

Упражнение 1. Покажите, что несобственный интеграл (4) сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \omega$ (см. (3)) и, таким образом, изображение $\widehat{x}(p)$ определено в этой полуплоскости.

Упражнение 2. Покажите, что несобственный интеграл, полученный формальным дифференцированием интеграла (4) по параметру p, сходится абсолютно и равномерно по p в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \omega_1 > \omega$. Покажите, что отсюда вытекает дифференцируемость функции $\widehat{x}(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \omega$ и, значит, ее аналитичность в этой полуплоскости.

Упражнение 3. Покажите, что если $x'(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет оценке вида (3), то и $x(t)$ удовлетворяет оценке вида (3), причем справедлива формула

$$\mathcal{L}[x'(t)] = p\widehat{x}(p) - x(0). \tag{6}$$

Приведем теперь без доказательства формулу обратного преобразования Лапласа. По изображению $\widehat{x}(p)$ можно однозначно восстановить оригинал $x(t)$ по следующей формуле:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\widehat{x}(p)\,dp, \tag{7}$$

в которой интегрирование ведется по любой прямой $\operatorname{Re} p = a$, где $a > \omega$.

Перейдем к формальному выводу формулы для решения $x(t)$ задачи (1), (2) при некоторых дополнительных ограничениях. Применим к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и, пользуясь формулой (6) и начальным условием (2), получим

$$p\widehat{x}(p) - \mathcal{L}[Ax(t)] = x_0.$$

Предположив теперь перестановочность $\mathcal{L}$ и A, имеем

$$[A - pI]\widehat{x}(p) = -x_0.$$

Пусть, наконец, полуплоскость $\operatorname{Re} > \omega$ принадлежит резольвентному множеству оператора A (см. п. 24.1). Тогда

$$\widehat{x}(p) = -[A - pI]^{-1}x_0 = -R_p(A)x_0,$$

где $R_p(A)$ — резольвента оператора A. Наконец, восстанавливаем оригинал $x(t)$ по формуле (7):

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}R_p(A)x_0\,dp. \tag{8}$$

Мы получили искомое интегральное представление решения задачи (1), (2). Действительно ли формула (8) дает решение этой задачи? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем пункте для некоторых классов операторов A. При этом важную роль будет играть обсуждаемое ниже понятие сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов.

Пусть на полуоси $[0, +\infty)$ задана оператор-функция $U(t)$ со значениями в $\mathcal{L}(X)$, где X — банахово пространство.

Определение. Оператор-функция $U(t)$ называется *сильно непрерывной полугруппой,* если выполнены следующие условия:

1) при каждом $x \in X$ абстрактная функция $U(t)x$ непрерывна на $[0, +$ $+\infty)$, причем $U(0) = I$;

2) существуют постоянные $M > 0$ и ω такие, что на $[0, +\infty)$

$$\|U(t)\| \leqslant Me^{\omega t};$$

3) для $U(t)$ выполняется полугрупповое свойство: при всех $t, s \in [0, +$ $+\infty)$

$$U(t+s) = U(t)\,U(s).$$

Пример. Пусть B — линейный ограниченный оператор, действующий в X, т. е. $B \in \mathcal{L}(X)$. Согласно п. 31.1 (формула (5)) решение задачи Коши $dx/dt = Bx$, $x|_{t=0} = x_0$ имеет вид $x(t) = e^{Bt}x_0$.

Упражнение 4. Проверьте для $U(t) = \exp\{Bt\}, t \in [0, +\infty)$, свойства 1), 3) определения сильно непрерывной полугруппы.

Таким образом, оператор-функция $\exp\{Bt\}$ является сильно непрерывной полугруппой, так что понятие сильно непрерывной полугруппы является обобщением понятия экспоненты $\exp(Bt)$.

Оказывается, формула (8) также определяет сильно непрерывную полугруппу $U(t)$ в виде несобственного интеграла, зависящего от t как от параметра. Решение задачи (1), (2) записывается в виде $x(t) = U(t)x_0$, а полугрупповое свойство 3) означает, что решение в момент $t + s$ может быть получено и как решение задачи (1), (2), и как решение уравнения (1) на $[s, +\infty)$ с условием $x|_{t=s} = x(s) = U(s)x_0$ (проверьте!). Понятие полугруппы описывает, тем самым, процессы, носящие эволюционный характер.

31.6. Обоснование формулы решения задачи Коши. Пусть даны вещественные числа α и $\varphi \in (0, \pi/2)$ и область $\Omega = \Omega(\alpha, \varphi)$, ограниченная двумя лучами, исходящими из точки $(\alpha, 0)$ и образующими углы φ и $-\varphi$ с отрицательным направлением вещественной оси (см. рис. 18, где Ω — внешность заштрихованного угла).

Определение. Оператор A будем называть *абстрактным эллиптическим оператором*, если существуют постоянная $c > 0$ и область Ω (указанного выше вида) такие, что $\Omega \subset \rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, причем для всех $\lambda \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \|R_\lambda(A)\| \leqslant \frac{c}{1 + |\lambda|}. \quad (1)$$

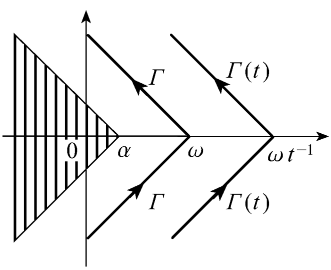


Рис. 18

Рассмотрим ломаную Γ, лучи которой параллельны сторонам угла, ограничивающего Ω, и проходящую через точку $(\omega, 0)$. При этом мы выбираем $\omega > \alpha$ (если $\alpha < 0$, то берем $\omega < 0$).

Рассмотрим, далее, следующий криволинейный несобственный интеграл, зависящий от параметра $t \in (0, +\infty)$ (полагаем, кроме того, $U(0) = I$)

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda, \quad (2)$$

где $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора A.

Теорема 1. *Если A — абстрактный эллиптический оператор, то оператор-функция $U(t)$, определяемая при $t \in (0, +\infty)$ формулой (2) и формулой $U(0) = I$ при $t = 0$, является сильно непрерывной полугруппой.*

Доказательство. Для определенности пусть $\alpha > 0$. Покажем сначала, что интеграл (2) сходится примерно по t на любом отрезке $[t_0, t_1]$, где $t_0 > 0$. Так как подынтегральная функция непрерывна по (t, λ), то отсюда, как и в математическом анализе (см. [18]), следует непрерывность $U(t)$ на $(0, +\infty)$ в метрике $\mathcal{L}(X)$. В точке $t = 0$ оператор-функция $U(t)$ окажется лишь сильно непрерывной, что будет проверено отдельно.

Запишем кривую Γ в параметрическом виде. Ее нижний луч имеет уравнение $\lambda = \omega + \rho e^{i\varphi}$, где $\rho \in (-\infty, 0]$, а верхний луч — уравнение $\lambda = \omega + \rho e^{i(\pi-\varphi)}$, где $\rho \in [0, +\infty)$. На обоих лучах $\operatorname{Re}\lambda = \omega - |\rho|\cos\varphi$.

Далее, поскольку в Ω (см. (1)) $\|R_\lambda(A)\| \leqslant c$, то на Γ имеем следующую оценку подынтегральной функции в (2):

$$\|e^{\lambda t}R_\lambda(A)\| \leqslant ce^{\omega t}e^{-|\rho|t\cos\varphi}. \tag{3}$$

Если $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 > 0$, то на Γ из (3) следует оценка

$$\|e^{\lambda t}R_\lambda(A)\| \leqslant ce^{\omega t_1}e^{-|\rho|t_0\cos\varphi}.$$

Так как эта оценка на $[t_0, t_1]$ равномерна по t, то интеграл (2) сходится на всяком $[t_0, t_1]$ равномерно. Следовательно, $U(t)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ в смысле равномерной сходимости операторов.

Докажем теперь, что $U(t)x \to x$ при $t \to +0$, т. е сильную непрерывность $U(t)$ в нуле, так как по определению $U(0) = I$.

Упражнение 1. Покажите, что при $\lambda \in \Omega$

$$R_\lambda(A) + \lambda^{-1}I = \lambda^{-1}AR_\lambda(A).$$

Упражнение 2. Покажите с помощью теории вычетов (см. [22]), что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = 1.$$

С помощью этих упражнений получаем

$$U(t)x - x = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}\{R_\lambda(A) + \lambda^{-1}I\}x\,d\lambda = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}\lambda^{-1}R_\lambda(A)Ax\,d\lambda. \tag{4}$$

Для получения оценки $U(t)x - x$ при $t \in (0, 1)$ мы воспользуемся следующим приемом. Пусть $\Gamma(t)$ — ломаная, проходящая через точку $(\omega t^{-1}, 0)$, с лучами, параллельными лучам ломаной Γ (см. рис. 18). Докажем, что если $\psi(\lambda)$ — абстрактная аналитическая функция, ограниченная в Ω, со значениями в X, то

$$\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\Gamma(t)} e^{\lambda t}\psi(\lambda)d\lambda. \tag{5}$$

Действительно, пусть γ_r — замкнутая кусочно гладкая кривая, состоящая из отрезков Γ_r и $\Gamma_r(t)$ ломаных Γ и $\Gamma(t)$ соответственно и дуг γ_r^+ и γ_r^- окружности $\lambda = \omega + re^i\psi$ (рис. 19). Нетрудно проверить, что если $r \geqslant \omega(t^{-1} - 1)/\cos\varphi$, то на γ_r^+ $\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi - \varphi$, а на γ_r^- $-\pi + \varphi \leqslant \psi \leqslant \pi/2$. Но тогда на γ_r^+ имеем $\operatorname{Re}\lambda = \omega + r\cos\psi$ и

$$\left\| \int\limits_{\gamma_r^+} e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda \right\| \leqslant ce^{\omega} \int\limits_{\pi/2}^{\pi-\varphi} e^{tr\cos\psi}d\psi \to 0$$

при $r \to +\infty$.

Аналогично, при $r \to +\infty$ стремится к нулю интеграл по γ_r^-. Но

$$\oint\limits_{\gamma_r} e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda = 0. \tag{6}$$

Это следует из аналитичности в Ω подынтегральной функции. Для этого достаточно рассмотреть для любых $f \in X^*$ интеграл $\oint\langle e^{\lambda t}\psi(\lambda),\, f\rangle\,d\lambda$, который равен нулю по теореме Коши (см. [19]), откуда имеем (6). Запишем теперь равенство (6) в виде

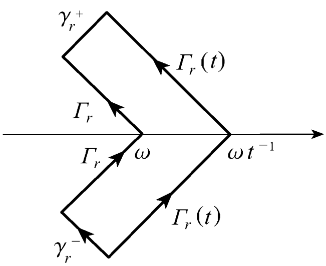


Рис. 19

$$\int\limits_{\Gamma_r} e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda - \int\limits_{\Gamma_r(t)} e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda = \\ = \int\limits_{\gamma_r^+} e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda + \int\limits_{\gamma_r^-} e^{\lambda t}\psi(\lambda)\,d\lambda$$

и при $r \to +\infty$ получим равенство (5).

Вернемся к формуле (4). С помощью (5) запишем ее в следующем виде:

$$U(t)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(t)} e^{\lambda t}\lambda^{-1}R(A)Ax\,d\lambda.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $\lambda t = \mu$. При этом кривая $\Gamma(t)$ перейдет в кривую Γ, и мы получим

$$U(t)x - x = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\mu}\mu^{-1}R_{\mu t^{-1}}(A)Ax\,d\mu.$$

Но в Ω, согласно оценке (1),

$$\|R_{\mu t^{-1}}(A)\| \leqslant \frac{c}{1 + |\mu t^{-1}|} \leqslant \frac{ct}{|\mu|}. \tag{7}$$

Следовательно, при любых $x \in D(A)$ и $t \in (0,\, 1)$

$$\|U(t)x - x\| \leqslant \frac{c\|Ax\|}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}\mu}}{|\mu^2|}\, d|\mu| t = c_1 \|Ax\| t.$$

Следовательно, на $D(A)$ $U(t)x \to x$ при $t \to +\infty$.

Кроме того, оператор-функция $U(t)$ ограничена. Действительно, согласно (5)

$$U(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(t)} e^{\lambda t} R_\lambda(A)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i t} \int\limits_{\Gamma} e^{\mu} R_{\mu t^{-1}}(A)\, d\mu$$

и оценка с помощью (7) дает при $t \in (0,\, 1)$

$$\|U(t)\| \leqslant \frac{c}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} e^{\operatorname{Re}\mu} \frac{d|\mu|}{|\mu|} = c_2. \tag{8}$$

По теореме Банаха–Штейнгауза (п. 11.5) $U(t)x \to x$ при $t \to +0$ для любого $x \in X$. Доказано свойство 1) определения сильно непрерывной полугруппы.

Для доказательства свойства 2) воспользуемся оценкой (3), откуда при $t \geqslant 1$ получаем

$$\|U(t)\| \leqslant c e^{\omega t} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\rho| t \cos\varphi} d\rho \leqslant \frac{c e^{\omega t}}{\pi \cos\varphi} = c_3 e^{\omega t}.$$

Вместе с оценкой (8) получаем свойство 2) с $M = \max(c_2,\, c_3)$.

Докажем свойство 3) сильно непрерывной полугруппы. Пусть Γ' — одна из ломаных $\Gamma(t)$ (рис. 18). Представим $U(t)$ по формуле (2), а $U(s)$ — в виде

$$U(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} e^{\mu s} R_\lambda(A)\, d\mu.$$

Записывая повторный интеграл в виде двойного и пользуясь тождеством

$$R_\lambda(A)\, R_\mu(A) = [R_\lambda(A) - R_\mu(A)](\lambda - \mu)^{-1},$$

получим

$$U(t)\, U(s) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} R_\lambda(A)(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda\, d\mu -$$

$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} R_\mu(A)(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda\, d\mu.$$

Законность этого и следующих преобразований вытекает из доказанной выше равномерной сходимости несобственных интегралов.

Упражнение 3. Докажите с помощью теории вычетов, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{e^{\mu s}}{\lambda-\mu}\,d\mu = e^{\lambda s},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-\mu}\,d\lambda = 0.$$

Используя это упражнение, поменяв предварительно в первом из двойных интегралов порядок интегрирования, находим

$$U(t)\,U(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda}(t+s)R_\lambda(A)\,d\lambda = U(t+s).$$

Теорема 1 полностью доказана.

Упражнение 4. Докажите, что в формуле (2) кривую Γ можно заменить любой прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$, где $a > \omega$, и, таким образом, для полугруппы $U(t)$ справедливо интегральное представление (8) п. 31.5.

Упражнение 5. Проведите доказательство теоремы 1 в случае $\alpha < 0$.

В следующей теореме исследуется вопрос о дифференцируемости полугруппы $U(t)$.

Теорема 2. *Пусть A — абстрактный эллиптический оператор. Тогда при $t > 0$ полугруппа $U(t)$ непрерывно диференцируема, для любого $x_0 \in \in X U(t)x_0 \in D(A)$ и*

$$U'(t)x_0 = AU(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda e^{\lambda t}R_\lambda(A)x_0\,d\lambda. \tag{9}$$

При $t > 0$ справедлива оценка

$$\|U'(t)\| \leqslant Me^{\omega t}t^{-1}. \tag{10}$$

Если $x_0 \in D(A)$, то $U(t)x_0$ непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $t > 0$, тогда

$$U'(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda e^{\lambda t}R_\lambda(A)\,d\lambda.$$

Дифференцирование законно, ибо полученный интеграл сходится равномерно по t на любом $[t_0, t_1]$ $(t_0 > 0)$. Далее, вследствие равенства $\lambda R_\lambda(A) = I + AR_\lambda(A)$ (см. упражнение 1) оператор $AR_\lambda(A)$ ограничен, и так как $\int_\Gamma e^{\lambda t}\,d\lambda = 0$, о равенство (9) доказано. Оценку (10) мы предлагаем доказать читателю переходом к кривой $\Gamma(t)$ с последующей заменой переменной. Если $x_0 \in D(A)$, то $U'(t)x_0 = U(t)Ax_0 \to Ax_0$ при $t \to \to +0$. При этом, как нетрудно проверить, функция $U(t)Ax_0$ непрерывна. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Если A — абстрактный эллиптический оператор, то формула $x(t) = U(t)x_0$ дает решение задачи* (1), (2) *п.* 31.5. *Если $x_0 \in \in D(A)$, то это решение непрерывно дифференцируемо на полуоси* $[0, + +\infty)$. *Справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant Me^{\omega t}\|x_0\|.$$

В заключение заметим, что если $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа и $U'(0)x = Ax$, то оператор A, определенный на тех элементах x, на которых существует производная, называется инфинитезимальным порождающим (производящим) оператором полугруппы $U(t)$.

Можно показать, что полугруппа $U(t)$, порожденная абстрактным эллиптическим оператором A, на самом деле является аналитической полугруппой, т. е. может быть продолжена аналитически в некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий полуось $t \in [0, +\infty)$.

31.7. Существование решения неоднородной задачи Коши. Теорема единственности. Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

$$x|_{t=0} = x_0 \tag{2}$$

с абстрактным эллиптическим оператором A.

Теорема 1. *Пусть абстрактная функция $y(t)$ со значениями в X удовлетворяет условию Гёльдера*

$$\|y(t') - y(t'')\| \leqslant c|t' - t''|^{\theta}, \quad \theta \in (0, 1), \tag{3}$$

на $[0, T]$. *Тогда формула*

$$x(t) = U(t)x_0 + \int_0^t U(t-s)\,y(s)\,ds \tag{4}$$

дает решение задачи (1), (2).

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $x_0 = 0$, т. е. показать, что функция $z(t) = \int_0^t U(t-s)\,y(s)\,ds \in D(A)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и $z'(t) = Az(t) + y(t)$.

Рассмотрим последовательность

$$z_n(t) = \int_0^{t-1/n} U(t-s)\,y(s')\,ds =$$
$$= \int_0^{t-1/n} U(t-s)\,y(t)\,ds + \int_0^{t-1/n} U(t-s)[y(s) - y(t)]\,ds.$$

При $n \to \infty$ $z_n(t) \to z(t)$ равномерно на $[0, T]$. Далее, так как $AU(t) = U'(t)$ при $t > 0$, то, используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$Az_n(t) = \int\limits_0^{t-1/n} AU(t-s)\,y(t)\,ds + \int\limits_0^{t-1/n} AU(t-s)[y(s)-y(t)]\,ds =$$
$$= \int\limits_0^{t-1/n} U'(t-s)\,ds\,y(t) + \int\limits_0^{t-1/n} U'(t-s)[y(s)-y(t)]\,ds =$$
$$= \left[U(t) - U\left(\frac{1}{n}\right)\right] y(t) + \int\limits_0^{t-1/n} U'(t-s)[y(s)-y(t)]\,ds. \qquad (5)$$

Далее, вследствие оценки (10) п. 31.6 и условия Гёльдера (3) имеем
$$\left\|U'(t-s)[y(s)-y(t)]\right\| \leqslant Mce^{\omega t}/(t-s)^{1-\theta}.$$
Следовательно, в (5) последний интеграл сходится и при $n \to \infty$:

$$Az_n(t) \to [U(t) - I]y(t) + \int\limits_0^t U'(t-s)[y(s)-y(t)]\,ds.$$

Вследствие замкнутости оператора A имеем $z(t) \in D(A)$ и

$$Az(t) = [U(t) - I]y(t) + \int\limits_0^t U'(t-s)[y(s)-y(t)]\,ds.$$

Кроме того, так как сходимость $Az_n(t)$ к $Az(t)$ равномерна по t на любом отрезке, то функция $Az(t)$ непрерывна. Наконец, поскольку, как нетрудно проверить,
$$z_n'(t) = Az_n(t) + U(1/n)y(t),$$
то вследствие той же равномерной сходимости $z'(t) = Az(t) + y(t)$. Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о единственности решения задачи (1)–(2). Если допустить, что она имеет два решения, то для их разности $u(t)$ имеем следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad 0 < t \leqslant T; \quad u|_{t=0} = 0. \qquad (6)$$

Наша цель показать, что задача (6) имеет лишь тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$. Воспользуемся для этого аппроксимациями абстрактного эллиптического оператора A ограниченными операторами.

Введем при каждом натуральном $n > \omega$ операторы $I_n = (I - A/n)^{-1}$.

Лемма 1. *$I_n \to I$ сильно при $n \to \infty$.*

Доказательство. $I_n = -n(A - nI)^{-1}$. Следовательно, по оценке (1) п. 31.6 имеем $\|I_n\| \leqslant nc/(1 + n) \leqslant c$. Далее, при любом $x \in D(A)$ $I_nx - x = I_nn^{-1}Ax$. Следовательно, $\|I_nx - x\| \leqslant cn^{-1}\|Ax\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $D(A)$ плотно в X, то из теоремы Банаха–Штейнгауза и следует утверждение леммы.

Введем теперь при $n > \omega$ операторы $A_n = AI_n$. Так как $A_n = -nI + nI_n$, то $A_n \in \mathcal{L}(X)$.

Лемма 2. *При всех $\lambda \in \Omega$ справедлива оценка*

$$\|R_\lambda(A_n)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| + n} + \frac{c}{1 + |\lambda|}. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$R_\lambda(A_n) = -\frac{1}{\lambda + n}I + \frac{n^2}{(n + \lambda)^2}R_{n\lambda/(n+\lambda)}(A),$$

и воспользоваться абстрактной эллиптичностью A.

Лемма 3. *Справедливо интегральное представление*

$$e^{tA_n} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t}R_\lambda(A_n)\,d\lambda. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть n фиксировано. Пусть, далее, Γ_r — замкнутая кривая, состоящая из отрезков ломаной Γ и дуги окружности σ_r: $\lambda = \omega + re^{i\psi}$ (рис. 20), где r настолько велико, что спектр оператора A находится внутри Γ_r. На Γ_r справедливо разложеине (2) п. 29.3:

$$R_\lambda(A_n) = -\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^{-(s+1)}A_n^s.$$

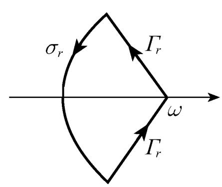


Рис. 20

Умножив это равенство на λ^k и интегрируя вдоль Γ_r, получим с использованием теории вычетов

$$A_n^k = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_r}\lambda^kR_\lambda(A_n)\,d\lambda.$$

Полученное равенство умножим на $t^k/k!$, просуммировав по k от нуля до бесконечности, придем к равенству

$$e^{tA_n} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_r}\lambda^kR_\lambda(A_n)\,d\lambda.$$

Переходя к пределу при $r \to +\infty$ и используя теорему Коши (предоставляем это читателю), придем к формуле (8). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Существует не зависящая от* n *постоянная* $M' > 0$ *такая, что для* $t \in [0, +\infty)$

$$\|e^{tA_n}\| \leqslant M' e^{\omega t}.$$

Доказательство проводится с использованием формулы (8) и оценки (7) так же, как и доказательство теоремы 1 п. 31.6.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Задача Коши* $(1), (2)$ *с абстрактным эллиптическим оператором* A *может иметь не более одного решения. В условиях теоремы* 1 *задача* (1), (2) имеет единственное решение, которое дается формулой (4).

ГЛАВА VIII

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 32. Дифференцирование нелинейных операторов. Степенные ряды

32.1. Производная Фреше нелинейного оператора. Рассмотрим нелинейный оператор $F(x)$ с областью определения $D(F)$ в банаховом пространстве X и со значениями в банаховом пространстве Y. Предположим, что оператор $F(x)$ определен в некоторой окрестности S точки x_0, т. е. $S \subset D(F)$.

Определение 1. Оператор $F(x)$ называется *дифференцируемым в точке* x_0 (*в смысле Фреше*), если существует линейный ограниченный оператор A ($A \in \mathcal{L}(X, Y)$) такой, что для любых $x \in S$

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0), \tag{1}$$

причем $\|\omega(x - x_0)\| = o(\|x - x_0\|)$ при $x \to x_0$.

Оператор A в формуле (1) называется *производной* (*Фреше*) оператора F в точке x_0 и обозначается $F'(x_0)$ или $dF(x_0)/dx$. Если положить $h = x - x_0$, то (1) можно записать в виде

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \omega(h), \tag{2}$$

где $\|\omega(h)\| = o(\|h\|)$ при $h \to 0$.

Определение 2. Если оператор $F(x)$ дифференцируем в точке x_0, то выражение

$$dF(x_0;\, h) \equiv F'(x_0)h$$

называется *дифференциалом* (*Фреше*) оператора F в точке x_0 при приращении h. Таким образом, дифференциал $dF(x_{0;\, h})$ — это всего-навсего значение линейного оператора $F'(x_0)$ на элементе h. Заметим, что из дифференцируемости оператора в точке следует его непрерывность в этой точке. Действительно, если $x \to x_0$, то из (1) вытекает, что $F(x) \to F(x_0)$.

Замечание. Если $F(x) \equiv Ax$, где $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $F(x)$ дифференцируем в любой точке $x_0 \in X$ и его производная равна A.

Упражнение 1. Пусть $F\colon X \to Y$ и $G\colon X \to Y$ дифференцируемы в точке x_0. Докажите, что $F + G$ дифференцируем в x_0, причем

$$(F + G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0).$$

Упражнение 2. Пусть $F\colon X \to Y$ дифференцируем в точке x_0. Докажите, что αF, где α — скаляр, дифференцируем в этой точке и

$$(\alpha F)'(x_0) = \alpha F'(x_0).$$

Рассмотрим вопрос о дифференцировании суперпозиции операторов (п. 10.3). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства. Пусть, далее, оператор $y = F(x)$ дифференцируем в точке x_0 ($F\colon X \to Y$), а оператор $x = G(z)$ дифференцируем в точке z_0 ($G\colon Z \to X$), причем $G(z_0) = x_0$. Так как отсюда вытекает непрерывность F в точке x_0 и G в точке z_0, то определена и непрерывна в точке z_0 суперпозиция операторов

$$F[G(z)] = (F * G)(z)$$

(см. теорему о непрерывности суперпозиции непрерывных функций в [21]).

Покажем, что $F * G$ дифференцируем в точке z_0, причем

$$(F * G)'(z_0) = F'(x_0)G'(z_0). \tag{3}$$

Действительно, дифференцируемость F в x_0 означает справедливость представления (1), причем можно считать, что $\omega(0) = 0$, так что $\omega(h)$ непрерывна в окрестности нуля. Далее дифференцируемость G в точке z_0 означает, что

$$G(z) = G(z_0) + B(z - z_0) + \delta(z - z_0), \tag{4}$$

где $\|\delta(z - z_0)\| = o(\|z - z_0\|)$ при $\|z - z_0\| \to 0$. Подставляя (4) в (1), получим

$$F(G(z)) - F(G(z_0)) = AB(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0), \tag{5}$$

где $\varepsilon(z - z_0) = A\delta(z - z_0) + \omega[B(z - z_0) + \delta(z - z_0)]$. Но

$$\|A\delta(z - z_0)\| = o(\|z - z_0\|) \quad \text{при} \quad \|z - z_0\| \to 0,$$

$$\|\omega[B(z - z_0) + \delta(z - z_0)]\| = o(\|B(z - z_0) + \delta(z - z_0)\|) =$$
$$= o(\|z - z_0\|) \quad \text{при} \quad \|z - z_0\| \to 0.$$

Следовательно, $\|\varepsilon(z - z_0)\| = o(\|z - z_0\|)$ при $\|z - z_0\| \to 0$. Таким образом, представление (5) означает, что $(F * G)'(z_0) = AB$, а это и есть формула (3).

Приведем теперь несколько примеров.

Пример 1. Производная нелинейного оператора в конечномерном случае. Пусть $F\colon E^k \to E^l$. Тогда равенство $y = F(x)$ равносильно системе равенств

$$\begin{gathered} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_l = f_l(x_1, \ldots, x_k), \end{gathered}$$

которые задают отображение из E^k в E^l. Если F определен в окрестности точки x_0, то координатные функции f_i также определены в окрестности этой точки $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$.

Пусть F дифференцируем в окрестности точки x_0; тогда при $i = 1, \ldots, l$

$$f_i(x_1^0 + h_1, \ldots, x_k^0 + h_k^0) - f_l(x_1^0, \ldots, x_k^0) = \\ = a_{i1}h_1 + \ldots + a_{ik}h_k + \omega_i(h_1, \ldots, h_k),$$

где $||\omega|| = o(||h||)$ при $h \to 0, \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$; $||\omega|| = \sqrt{|\omega_1|^2 + \ldots + |\omega_l|^2}$, а $h = (h_1, \ldots, h_k)$; $||h|| = \sqrt{|h_1|^2 + \ldots + |h_k|^2}$.

В математическом анализе матрица $A = ||\partial f_i/\partial dx_j||_{\substack{i=1,\ldots,l;\\ j=1,\ldots,k}}$ называется *матрицей Якоби* или *матрицей-производной* оператора (отображения) F. Оператор $A \in \mathcal{L}(E^k, E^l)$ и является производной Фреше оператора F в точке x_0, т. е. $A = F'(x_0)$. Устанавливается, что из дифференцируемости F в точке x_0 вытекает существование в этой точке частных производных и равенство

$$a_{ij} = \partial f_i(x_0)/\partial x_j, \quad i = 1, \ldots, l; \quad j = 1, \ldots, k.$$

Посмотрим еще, как записывается производная суперпозиции отображений. Если $x = G(z)$ — отображение из E^m в E^k, дифференцируемое в точке z_0, то

$$G'(z_0) = ||\partial g_j/\partial z_s||_{\substack{j=1,\ldots,k;\\ s=1,\ldots,m}}.$$

Формула производной суперпозиции (3) приобретает теперь вид

$$(F * G)'(z_0) = ||\partial f_i(x_0)/\partial x_j||\,||\partial g_j/\partial z_s||.$$

Производя умножение матриц, получим

$$(F * G)'(z_0) = \left\| \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}\frac{\partial g_j(z_0)}{\partial z_s} \right\|_{\substack{i=1,\ldots,l\\ s=1,\ldots,m}}.$$

Это оператор из $\mathcal{L}(E^m, E^l)$. Мы получили в общем виде правило вычисления производный при замене переменных (см. [21]).

Упражнение 3. Вычислите $(F * G)'(z_0)$, если

$$F = (\sin(x_1 + x_2 + x_3), \quad \cos(x_1 + x_2 + x_3), \quad x_1x_2x_3),$$

$$G = (z_1 + z_2,\, z_1 - z_2, z_1z_2), \quad \text{а} \quad z_0 = (0, \pi).$$

Пример 2. Пусть $f(x, u)$ — непрерывная функция двух переменных, $x \in [a, b]$ — непрерывная функция двух переменных, $x \in [a, b]$, $-\infty < u < +\infty$. Зададим нелинейный оператор F, действующий в $C[a, b]$, по формуле

$$F(u) = f(x, u(x)).$$

Упражнение 4. Покажите, что если $u(x) \in C[a, b]$, то и $f(x, u(x)) \in \in C[a, b]$.

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости оператора $F(u)$ в точке $u_0(x) \in C[a, b]$. Предположим, что функция $f(x, u)$ имеет при любых (x, u) непрерывную частную производную $f_u(x, u)$. Для всех $h(x) \in \in C[a, b]$ имеем следующее равенство:

$$f(x, u_0(x) + h(x)) - f(x, u_0(x)) = f_u(x, u_0(x))h(x) + \omega(x, h), \tag{6}$$

где

$$\omega(x, h) = \int_0^1 [f_u(x, u_0(x) + \theta h(x)) - f_u(x, u_0(x))]d\theta h(x). \tag{7}$$

Рассмотрим в E^2 замкнутое ограниченное множество $\Pi_R = \{x, u : x \in \in [a, b],\ u_0(x) \leqslant u_0(x) + R\}$ $(R > 0)$. Согласно теореме Кантора (см. [21]) функция $f_u(x, u)$, будучи непрерывна на Π_R, равномерна непрерывна на нем. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $(x', u') \in \Pi_R$, $(x'', u'') \in \Pi_R$, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(x' - x'')^2 + (u' - u'')^2} < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f_u(x', u') - f_u(x'', u'')| < \varepsilon.$$

Пусть, далее, в формулах (6) и (7) $||h|| \leqslant R$. Тогда для всех $\theta \in [0, 1]$ имеем $(x, u_0(x) + \theta h(x)) \in \Pi_R$. Возьмем $x' = x'' = x$, $u' = u_0(x) + \theta h(x)$, $u'' = u_0(x)$ и получим, что для всех $x \in [a, b]$, как только $||h|| < \delta$, так

$$||\omega(x, h)|| \leqslant \max_{x \in [a, b]} \int_0^1 |f_u(x, u_0(x) + \theta h(x)) - f_u(x, u_0(x))|d\theta |h(x)| < \varepsilon ||h||.$$

Это означает, что оператор F дифференцируем в точке u_0 в смысле Фреше и что

$$F'(u_0) = f_u(x, u_0(x)).$$

Упражнение 5. Найдите производную Фреше следующих операторов F в точке u_0:

1) $F(u) = \sin u(x)$ в $C[0, \pi]$, $u_0 = \cos x$;

2) $F(u) = u(x) - \exp\{xu(x)\}$ в $C[0, 1]$, $u_0 = 0$.

Будет ли оператор $F(u_0)$ непрерывно обратим?

Пример 3. Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ нелинейный интегральный оператор

$$F(u) = u(x) - \int_a^b f(x, \xi, u(\xi))d\xi,$$

где функция $f(x,\, \xi,\, u)$ непрерывна по совокупности своих переменных при $a \leqslant x,\, \xi \leqslant b,\, -\infty < u < +\infty$, вместе с частной производной $f_u(x,\, \xi,\, u)$.

Упражнение 6. Покажите, что оператор F дифференцируем в любой точке $u_0 \in C[a,\, b]$ и что

$$F'(u_0)h = h(x) + \int\limits_a^b f_u(x,\, \xi,\, u_0(\xi))h(\xi)d\xi.$$

Упражнение 7. Найдите производную Фреше по u в точке $u_0 = 0$ интегрального оператора с параметром λ:

$$F(u) = u(x) - \int\limits_a^b cos(x + u(\xi))d\xi.$$

Найдите все решения уравнения

$$F'(0)h = \cos x.$$

32.2. Формула конечных приращений Лагранжа и условие Липшица. Докажем сначала формулу конечных приращений Лагранжа в интегральной форме. Условимся говорить, что оператор $F(x)$ непрерывно дифференцируем в точке x_0, если он дифференцируем в некоторой окрестности точки x_0 и $F'(x)$ непрерывен в x_0. Если $F(x)$ непрерывно дифференцируем в каждой точке некоторого множества, то будем говорить, что он непрерывно дифференцируем на этом множестве.

Теорема. *Пусть оператор F непрерывно дифференцируем в окрестности S точки x_0; тогда в S справедлива формула Лагранжа*

$$F(x) - F(x_0) = \int\limits_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))d\theta(x - x_0). \tag{1}$$

Доказательство.]Рассмотрим суперпозицию $F * G$ $(G : E^1 \to \to X)$, где

$$x = G(\theta) \equiv x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Имеем $G'(\theta) = x - x_0$. Следовательно, согласно формуле производной суперпозиции (см. п. 32.1),

$$\frac{d}{d\theta}F(x_0 - \theta(x - x_0)) = F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).$$

Интегрируя это тождество по θ от 0 до 1, получаем формулу (1). Теорема доказана.

Перейдем теперь к обсуждению условия Липшица и связанных с ним некоторых утверждений. Пусть оператор $F(x)$ определен на некотором множестве Ω банахова пространства X, а значения его лежат в банаховом пространстве Y.

Определение. Будем говорить, что F удовлетворяет на Ω *условию Липшица* (*с постоянной Липшица* l), *если для любых* x_1, $x_2 \in \Omega$

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant l\|x_1 - x_2\|. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть* $F(x)$ *непрерывно дифференцируем на выпуклом множестве* Ω, *причем* $\|F'(x)\| \leqslant l$ *на* Ω; *тогда* $F(x)$ *удовлетворяет на* Ω *условию Липшица с постоянной Липшица* l.

Доказательство. По формуле Лагранжа имеем

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_0^1 F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))d\theta(x_1 - x_2).$$

Оценка по норме дает следующее неравенство:

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leqslant \left\|\int_0^1 F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))d\theta\right\| \|x_1 - x_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2))\|d\theta\|x_1 - x_2\| \leqslant l\|x_1 - x_2\|.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $F(x)$ *дифференцируем на выпуклом множестве* Ω, *причем*

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leqslant l\|x_1 - x_2\| \quad \text{на} \quad \Omega$$

(*т. е.* $F(x)$ *удовлетворяет на* Ω *условию Липшица с постоянной Липшица* l); *тогда справедлива оценка*

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}l\|x_1 - x_2\|^2. \tag{3}$$

Доказательство. Применяя сначала формулу Лагранжа для F, а затем условие Липшица для производной, получаем

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F(x_2)(x_2 - x_1)\| =$$
$$= \left\|\int_0^1 \{F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)\}d\theta\right\| \|x_1 - x_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)\|d\theta\|x_1 - x_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 l\theta\|x_1 - x_2\|d\theta\|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2}l\|x_1 - x_2\|^2.$$

и формула (3), а с ней и лемма доказаны.

П р и м е р. Пусть оператор F: $E^k \to E^l$ дифференцируем в точке x_0 (в обозначениях примера 1 п. 32.1). Формула конечных приращений здесь принимает вид $(i = 1, \ldots, l)$

$$f_i(x_1^0 + h_1, \ldots, x_k^0 + h_k) - f_i(x_1^0, \ldots, x_k^0) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 \frac{\partial f_i(x_1^0 + \theta h_1, \ldots, x_k^0 + \theta h_k)}{\partial x_j} d\theta h_j.$$

32.3. Степенные операторы, производные и дифференциалы Фреше высших порядков. Пусть X и Y — банаховы пространства. Образуем прямую сумму k экземпляров пространства X

$$X^k = X \oplus \ldots \oplus X$$

и рассмотрим нелинейный оператор $y = F_k(x_1, \ldots, x_k)$, определенный всюду на X^k: $(x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ со значениями в пространстве Y. Иначе говоря, мы имеем дело с операторной функцией от k векторных переменных.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор $y = F_k(x_1, \ldots, x_k)$, называется *$k$-линейным оператором*, если он линеен по каждому аргументу x_i $(i = 1, \ldots, k)$.

О п р е д е л е н и е 2. k-линейный оператор $F_k(x_1, \ldots,)$ называется *ограниченным*, если существует постоянная m такая, что для всех $x_i \in X$

$$\|F_k(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant m\|x_1\| \ldots \|x_k\|. \tag{1}$$

Наименьшая из постоянных m в (1) обозначается $\|F_k\|$ и называется *нормой* k-линейного оператора F_k. Точнее,

$$\|F_k\| = \sup_{\|x_1\| \leqslant 1, \ldots, \|x_k\| \leqslant 1} \frac{\|F_k(x_1, \ldots, x_k)\|}{\|x_1\| \ldots \|x_k\|}. \tag{2}$$

У п р а ж н е н и е 1. Покажите, что всякий k-линейный ограниченный оператор непрерывен в любой точке $x^k \in X^k$.

О п р е д е л е н и е 3. k-линейный оператор называется *симметричным*, если его значения не изменяются при любой перестановке его аргументов.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ — k-линейный ограниченный оператор, то, в соответствии с (1), (2) и определением 4,

$$\|F_k x^k\| \leqslant \|F_k\| \, \|x^k\|. \tag{3}$$

Отметим еще следующую точку зрения на k-линейные операторы. Билинейный оператор $F_2(x_1, x_2)$ можно трактовать как произведение элементов $x_1, x_2 \in X$, значение которого лежит в Y. Если F_2 симметричен, то порядок сомножителей несущественен (см. также п. 11.7). Можно так же рассматривать $F_2(x_1, x_2)$, как произведение трех сомножителей: «коэффициента» $F_2 \in \mathcal{L}(X^2, Y)$ и сомножителей x_1 и x_2. Аналогично, $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ можно рассматривать как произведение k (или $k + 1$) сомножителей.

Замечание. Всегда можно считать, что степень $F_k x^k$ порождена симметричным k-линейным оператором. Действительно, положим

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum F_k(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k}),$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$. Очевидно, $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$ симметричен и $F_k x^k = \Phi(x_1, \ldots, x_k)$.

В дальнейшем, говоря о степени $F_k x^k$, мы будем считать, что исходный k-линейный оператор $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ симметричен. Тем самым определены операторы $F_k x^s h^{k-s}$ при $0 \leqslant s \leqslant k$.

Упражнение 1. Докажите формулу «бинома Ньютона»

$$F_k(x+h)^k = \sum_{s=1}^{k} C_k^s F_k x^{k-s} h^s.$$

Упражнение 2. С помощью формулы бинома Ньютона докажите, что k-степенной ограниченный оператор $F_k x^k$ дифференцируем (в смысле Фреше) в любой точке x и

$$\frac{d}{dx} F_k x^k = k F_k x^{k-1} \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Перейдем теперь к вопросу о дифференциалах высшего порядка от нелинейного оператора $F(x)$. Пусть G — некоторая область в банаховом пространстве X. Предположим, что оператор $F(x)$ дифференцируем в G (т. е. во всех точках $x \in G$). Рассмотрим его дифференциал $dF(x, h) = F'(x)h$. Он является снова функцией (оператором) от x, и поэтому можно поставить задачу о нахождении дифференциала в точке $x_0 \in G$.

Определение 5. Пусть оператор $F'(x)h = dF(x, h)$ дифференцируем в точке x_0; тогда выражение

$$d^2F(x; h) = d[F'(x_0)h, \mathrm{g}]|_{\mathrm{g}=h} \tag{4}$$

называется *вторым дифференциалом оператора* $F(x)$ *в точке* x_0.

Согласно определению 5, чтобы найти второй дифференциал оператора F в точке x_0 при приращении h, следует сначала найти дифференциал $F'(x)h$ в точке x_0 при приращении g, независимом от h, а затем положить $\mathrm{g} = h$. Согласно этому правилу составим приращение

$$F'(x_0 + \mathrm{g})h - F'(x_0)h = (B\,\mathrm{g})h + \omega(\mathrm{g})h, \tag{5}$$

где $\|\omega(\mathrm{g})\| = o(\|\,\mathrm{g}\,\|)$ при $\mathrm{g} \to 0$.

Таким образом, дело сводится к дифференцированию линейного оператора $F'(x)$ в точке x_0. Его производную, если она существует, естественно обозначить через $F''(x_0)$, причем $F''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, т. е. выражение $F''(x_0)h\,\mathrm{g}$ является симметричным билинейным (2-линейным) оператором. Формулу (5) можно теперь записать так:

$$F'(x_0 + \mathrm{g})h - F'(x_0)h = F''(x_0)h\,\mathrm{g} + \omega(\mathrm{g})h.$$

Согласно определению 5 имеем

$$d^2F(x_0, h) = F''(x_0)h^2.$$

Совершенно аналогично, если второй дифференциал существует в точках области G, то можно поставить вопрос о дифференцировании его по x и т. д.

Пусть $d^n F(x,\, h) = F^{(n)}(x)h^n$ уже определен. Тогда, если он является дифференцируемым в точке $x_0 \in G$ оператором, полагаем

$$d^{n+1}F(x_0,\, h) = d[F^n(x_0)h^n,\, \mathrm{g}]|_{\mathrm{g}=h},$$

откуда вытекает, что

$$d^{n+1}F(x_0,\, h) = F^{(n+1)}(x_0)h^{n+1}.$$

Таким образом n-й дифференциал $F^{(n)}(x_0)h^n$ является n-степенным оператором.

Приведем несколько примеров, в которых выкладки мы предлагаем сделать читателю.

Пример 1. В пространстве c^m m-мерных столбцов

$$x_1 = (x_i^{(1)})_{i=1}^m, \quad x_2 = (x_i^{(2)})_{i=1}^m, \quad y = (y_i)_{i=1}^m, \quad \ldots$$

рассмотрим оператор $y = F(x_1,\, x_2)$, определяемый формулами

$$y_k = \sum_{i,\, j=1}^{m} a_{ij}^{(k)} x_i^{(1)} x_j^{(2)}, \quad k = 1,\, \ldots,\, m.$$

Здесь $a_{ij}^{(k)}$ — набор m^3 вещественных чисел.

Упражнение 3. Покажите, что $F(x_1,\, x_2)$ является билинейным (т. е. 2-линейным) ограниченным оператором. Найдите оценку его нормы. Как выглядит соответствующий квадратичный оператор (2-степенной оператор)? Когда $F(x_1,\, x_2)$ симметричен?

Пример 2. В пространстве $C[0,\, 1]$ рассмотрим нелинейный интегральный оператор

$$(F_2 x^2)(t) = x(t) \int_0^1 K(t,\, s)x(s)ds$$

с непрерывным в квадрате $0 \leqslant t,\, s \leqslant 1$ ядром $K(t,\, s)$.

Соответствующий билинейный симметричный оператор имеет вид

$$(F_2 x_1 x_2)(t) = \frac{1}{2}x_1(t) \int_0^1 K(t,\, s)x_2(s)ds + \frac{1}{2}x_2(t) \int_0^1 K(t,\, s)x_1(s)ds.$$

Упражнение 4. Покажите, что

$$d\{F_2x^2,\, h\} = 2F_2xh, \quad d^2\{F_2x^2,\, h\} = 2F_2h^2,$$
$$d^k\{F_2x^2,\, h\} = 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 3.$$

Пример 3. Рассмотрим нелинейный оператор

$$F(x) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \sin x(t),$$

действующий из $C^2[0,\, 1]$ в $C^2[0,\, 1]$.

Упражнение 5. Покажите, что если $x_0(t) = t$, то

$$d\{F(x_0),\, h\} = \frac{d^2h(t)}{dt^2} + (\cos t)h(t),$$

$$d^2\{F(x_0,\, h)\} = -(\sin t)h^2(t),$$

$$d^3\{F(x_0,\, h)\} = -(\cos t)h^3(t).$$

Найдите общий вид $d^k\{F(x_0),\, h\}$.

32.4. Степенные ряды, ряды Тейлора, аналитические операторы. Пусть задана последовательность степенных операторов F_kx^k $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, и пусть задан элемент $F_0 \in Y$. Образуем формальный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_kx^k, \qquad F_0x^0 = F_0. \tag{1}$$

Обозначим через $\Omega \subset X$ область сходимости ряда (1). Всегда $0 \in \Omega$. Фиксируем $x_0 \in X$ с $\|x_0\| = 1$ и рассмотрим ряд (1) на одномерном полупространстве (комплексном, если таковы X и Y) элементов вида $x = \lambda x_0$, где λ пробегает всевозможные скалярные значения. Получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(F_kx_0^k)\lambda^k. \tag{2}$$

Обозначим через $\rho(x_0)$ радиус сходимости ряда (2). Для одних x_0 может оказаться, что $\rho(x_0) = 0$, для других $\rho(x_0) > 0$ или даже $\rho(x_0) = +\infty$. Таким образом, область сходимости Ω ряда (1) представляет собой так называемую C-звезду вокруг точки O, т. е. такое множество в X, что если $x \in \Omega$, то и $\lambda x \in \Omega$ при $|\lambda| \leqslant 1$. В приложениях особенно важен случай, когда Ω содержит некоторый шар $S_\rho(0)$. Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|F_k\|\, \|x\|^k \tag{3}$$

является мажоритарным (оценивающим) для ряда (1). Его радиус сходимости ρ_u называется радиусом равномерной сходимости ряда (1). По формуле Коши–Адамара (см. п. 13.3)

$$\rho_u = \left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|F_n\|}\right)^{-1}.$$

Если $\rho_u > 0$, то в любом шаре $S_p(0)$ $(\rho \in (0,\, \rho_u))$, степенной ряд (1) сходится абсолютно и равномерно. Если же $\rho > \rho_u$, то найдутся точки x с $\|x\| = \rho$, в которых ряд (1) не сходится равномерно. Таким образом, при $\rho_u > 0$ и только в этом случае Ω содержит шар (радиуса ρ с любым $\rho < \rho_u$).

Упражнение 1. Пусть $X = E^2$, $Y = E^1$, рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(_1,\, x_2)^k$. Найдите Ω и ρ_u.

Обозначим через $F(x)$ сумму ряда (1), и пусть в шаре $S_1(0)$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k. \tag{4}$$

В этом случае оператор $F(x)$ будем называть аналитическим в точке $x = 0$. Как и в случае абстрактных функций, можно показать, что в шаре $S_{\rho_u}(0)$ оператор $F(x)$ непрерывен и даже бесконечно дифференцируем.

Для бесконечно дифференцируемых операторов $F(x)$ имеет смысл рассматривать степенные ряды специального вида — ряды Тейлора:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) x^k.$$

Для аналитических операторов справедлива теорема о единственности разложения в степенной ряд.Доказательство ее следует сразу из аналогичной теоремы для абстрактных функций, если степенной ряд рассмотреть на одномерных пространствах. Таким образом, всякий степенной ряд аналитического оператора автоматически оказывается его рядом Тейлора.

Упражнение 2. Пусть ядро $K(t, s)$ непрерывно при $a \leqslant t, s \leqslant b$. Рассмотрим действующий в $C[a, b]$ нелинейный оператор

$$\{F(x)\}(t) = x(t) + \int_a^b K(t, s) \exp\{x(s)\} ds.$$

Докажите, что $F(x)$ разлагается в сходящийся всюду ряд Тейлора

$$\{F(x)\}(t) = \int_a^b K(t, s) ds + x(t) + \int_a^b K(t, s) x(s) ds + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_a^b K(t, s) x^k(s) ds.$$

32.5. Дифференцирование нелинейных операторов, зависящих от двух переменных. Пусть X, Λ и Y — банаховы пространства. Рассмотрим оператор $F(x, \lambda)$, зависящий от переменных $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$, со значением в пространстве Y. Воспользуемся следующим приемом. Введем $U = X \dot{+} \Lambda$ — прямую сумму банаховых пространств X и Λ (см. п. 14.1). Норму элемента $u = (x, \lambda) \in U$ определим так:

$$\|u\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|\lambda\|^2},$$

где $\|x\|$ — норма в X, а $\|\lambda\|$ — норма в Λ. Оператор $F(u)$, определенный, скажем, на множестве $\Omega \subset U$, является теперь оператором, зависящим от одной переменной. Это простое соображение позволяет перенести на операторы, зависящие от двух (и более) переменных, практически все понятия и результаты пп. 32.1–32.4. Начнем с определения непрерывности.

Пусть оператор $F(x, \lambda)$ определен на множестве $\Omega \subset X \dot{+} \Lambda$ и $(x_0, \lambda_0) \in \in \Omega$. Оператор $F(x, \lambda)$ называется *непрерывным в точке* (x_0, λ_0), если $F(x, \lambda) \to F(x_0, \lambda_0)$ в Y при $(x, \lambda) \in \Omega$, $(x, \lambda) \to (x_0, \lambda_0)$ в $X \dot{+} \Lambda$.

Перейдем к определению дифференцирумости. Пусть теперь Ω содержит некоторый шар S с центром в $(x_0,\, \lambda_0)$. Оператор $F(x,\, \lambda)$ называется *дифференцируемым в точке* $(x_0,\, \lambda_0)$ (*в смысле Фреше*), если для любых $(h,\, \mathrm{g})$ таких, что $(x_0 + h,\, \lambda_0 + \mathrm{g}) \in S$,

$$F(x_0 + h,\, \lambda_0 + \mathrm{g}) = F(x_0,\, \lambda_0) + Ah + B\,\mathrm{g} + \omega(h,\, \mathrm{g}), \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$, $B \in \mathcal{L}(\Lambda,\, Y)$, а $\omega(h,\, \mathrm{g}) = o(\sqrt{\|h\|^2 + \|\,\mathrm{g}\,\|^2})$ при $(h,\, \mathrm{g}) \to 0$.

Определение это является, конечно, только перефразировкой определения п. 32.1. Достаточно заметить, что выражение $Ah + B\,\mathrm{g}$, где $A \in \mathcal{L}(X,\, Y)$, $B \in \mathcal{L}(\Lambda,\, Y)$, дает общий вид линейного оператора из $\mathcal{L}(X \dot{+} \Lambda,\, Y)$. Следуя математическому анализу, операторы A и B будем называть *частными производными* оператора $F(x,\, \lambda)$ соответственно по x и λ и писать

$$A = \partial F(x_0,\, \lambda_0)/\partial x, \quad B = \partial F(x_0,\, \lambda_0)/\partial \lambda.$$

Упражнение 1. Покажите, что если оператор $F(x,\, \lambda)$ дифференцируем в точке $(x_0,\, \lambda_0)$, то

$$F(x_0 + h,\, \lambda) = F(x_0,\, \lambda_0) + \frac{\partial F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial x} h + \omega_1(h),$$

$$F(x_0,\, \lambda + \mathrm{g}) = F(x_0,\, \lambda_0) + \frac{\partial F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial \lambda}\,\mathrm{g} + \omega_2(\mathrm{g}),$$

где $\omega_1(h) = o(\|h\|)$ при $h \to 0$, $\omega_2(\mathrm{g}) = o(\|\,\mathrm{g}\,\|)$ при $g \to 0$.

Выражение

$$d\{F(x_0,\, \lambda_0);\ (h,\, \mathrm{g})\} = \frac{\partial F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial x} h + \frac{\partial F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial \lambda}\,\mathrm{g}$$

называется *дифференциалом* оператора F в точке $(x_0,\, \lambda_0)$ при приращении $(h,\, \mathrm{g})$.

На случай двух переменных без труда переносится правило дифференцирования суперпозиции. Предлагаемв качестве упражнения проверить частный случай этого правила.

Упражнение 2. Пусть оператор $F(x,\, \lambda)$ дифференцируем в точке $(x_0,\, \lambda_0)$, а оператор $x = f(\lambda)$ дифференцируем в точке λ_0, причем $f(\lambda_0) = x_0$. Покажите, что оператор $\Phi = F(f(\lambda),\, \lambda)$ дифференцируем в точке λ_0 и

$$\Phi'(\lambda_0) = \frac{\partial F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial x} f'(\lambda_0) + \frac{\partial F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial \lambda}. \tag{2}$$

Приведем теперь примеры операторов, зависящих от двух переменных.

Пример 1. Пусть $X = E^k$, $Y = E^l$, $\Lambda = E^m$. Равенство $y = F(x,\, \lambda)$ можно записать в координатной форме так:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1,\, \ldots,\, x_k;\ \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m),\\ y_2 &= f_2(x_1,\, \ldots,\, x_k;\ \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_l &= f_l(x_1,\, \ldots,\, x_k;\ \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m). \end{aligned}$$

Эти равенства задают отображение из $E^{k+m} = E^k + E^m$ в E^l. Если это отображение дифференцируемо в точке

$$(x_0,\, \lambda_0) = (x_1^0,\, \ldots,\, x_k^0;\; \lambda_1^0,\, \ldots,\, \lambda_m^0),$$

то для каждой координатной функции

$$f_i(x_1,\, \ldots,\, x_k;\; \lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m), \quad i = 1,\, \ldots,\, l,$$

в окрестности точки $(x_0,\, \lambda_0)$ справедливо следующее представление:

$$f_i(x_1^0 + h_1,\, \ldots,\, x_k^0 + h_k;\; \lambda_1^0 + g_1,\, \ldots,\, \lambda_m^0 + g_m) - f_i(x_1^1,\, \ldots$$
$$\ldots,\, x_k^0;\; \lambda_1^0,\, \ldots,\, \lambda_m^0) = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} h_r + \sum_{s=1}^{m} b_{is}\, g_s + \omega_i(h_1,\, \ldots,\, h_k;\; g_1,,\, \ldots,\, g_m),$$

где $\omega = o(\sqrt{h_1^2 + \ldots h_k^2 + g_1^2 + \ldots + g_m^2})$ при $(h,\, g) \to 0$. Таким образом, коэффициенты

$$a_{ir} = \frac{\partial f_i(x_1^0,\, \ldots,\, x_k^0;\; \lambda_1^0,\, \ldots,\, \lambda_m^0)}{\partial x_r},\, b_{is} = \frac{\partial f_i(x_1^0,\, \ldots,\, x_k^0;\; \lambda_1^0,\, \ldots,\, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_s}$$

являются частными производными, а операторы $A = \|a_{ir}\|_{\substack{i=1,\, \ldots,\, l \\ r=1,\, \ldots,\, k}}$ и $B = \|b_{is}\|_{\substack{i=1,\, \ldots,\, l \\ s=1,\, \ldots,\, m}}$ представляют собой матрицы Якоби. Равенство (1) является матричной записью свойства дифференцируемости оператора F.

Упражнение 3. Запишите в условиях примера 1 правило дифференцирования суперпозиции (2).

Пример 2. Пусть $f(x,\, u,\, \lambda)$ — непрерывная функция трех переменных: $x \in [a,\, b]$, $-\infty < u < +\infty$ и $\lambda \in [\alpha,\, \beta]$. Зададим оператор $F(u,\, \lambda)$: $C[a,\, b] + E^1 \to C[a,\, b]$ формулой

$$F(u,\, \lambda) = f(x,\, u(x),\, \lambda).$$

Если предположить, что $f(x,\, u,\, \lambda)$ при любых u и λ имеет непрерывные по $(x,\, u,\, \lambda)$ частные производные по u, и по λ, то, как в п. 32.1, можно установить дифференцируемость оператора F. При этом

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f(x,\, u(x),\, \lambda)}{\partial u}\, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(x,\, u(x),\, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Пример 3. Рассмотрим следующий нелинейный интегральный оператор:

$$F(x,\, \lambda) = \int_a^b K(t,\, s) f[x(s),\, \lambda(s)]\, ds.$$

Здесь $K(t,\, s)$ непрерывна в квадрате $a \leqslant t,\, s \leqslant b$, а $f(x,\, \lambda)$ непрерывно дифференцируема как функция $x,\, \lambda$ при $-\infty < x,\, \lambda < +\infty$.

Нетрудно убедиться в том, что оператор $F(x,\lambda)$ действует из $C[a,b]+$ $+C[a,b]$ в $C[a,b]$, а его частные производные определяются следующими формулами:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\int_a^b K(t,s)\frac{\partial f(x(s),\lambda(s))}{\partial x}ds,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=\int_a^b K(t,s)\frac{\partial f(x(s),\lambda(s))}{\partial \lambda}ds.$$

Перейдем теперь к вопросам определения производных высших порядков оператора $F(x,\lambda)$. Пусть $F(x,\lambda)$ дифференцируем в области $\Omega\subset X\oplus\Lambda$. Тогда дифференциал

$$d\{F(x,\lambda);\ (h,\mathrm{g})\}=\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial x}h+\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial \lambda}\,\mathrm{g}$$

снова может оказаться дифференцируемым по (x,λ) оператором, например, в точке (x_0,λ_0). Следуя определению 5 п. 32.3, мы можем тогда определить второй дифференциал $d^2\{F(x_0,\lambda_0);\ (h,\mathrm{g})\}$, являющийся квадратичным оператором приращения (h,g), и, следовательно,

$$d^2\{F(x_0,\lambda_0);\ (h,\mathrm{g})\}=F_{20}h^2+2F_{11}h\,\mathrm{g}+F_{02}\,\mathrm{g}^2\,.$$

Операторные коэффициенты в правой части этого равенства являются частными производными:

$$F_{20}=\frac{\partial^2F(x_0,\lambda_0)}{\partial x^2},\quad F_{11}=\frac{\partial^2F(x_0,\lambda_0)}{\partial x\partial\lambda}=\frac{\partial^2F(x_0,\lambda_0)}{\partial\lambda\partial x},$$
$$F_{02}=\frac{\partial^2F(x_0,\lambda_0)}{\partial\lambda^2}$$

(равенство смешанных производных следует из симметричности второго дифференциала). Заметим, что

$$F_{20}:\ X\oplus X\to Y,\quad F_{11}:\ X\oplus\Lambda\to Y,\quad F_{02}:\ \Lambda\oplus\Lambda\to Y.$$

Аналогично определяются производные и дифференциалы высших порядков. При этом

$$d^k\{F(x,\lambda);\ (h,\mathrm{g})\}=\sum_{i+j=k}C_k^i\frac{\partial^kF(x,\lambda)}{\partial x^i\partial\lambda^j}h^i\,\mathrm{g}^j, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^kF(x,\lambda)}{\partial x^i\partial\lambda^j}:\underbrace{X\oplus\ldots\oplus X}_{i\text{ раз}}\oplus\underbrace{\Lambda\oplus\ldots\oplus\Lambda}_{j\text{ раз}}\to Y,$$

где C_k^i — биномиальные коэффициенты.

Рассмотрим теперь двойные степенные ряды

$$\sum_{k+l\geqslant 0}F_{kl}h^k\,\mathrm{g}^l,\quad h\in X,\quad \mathrm{g}\in\Lambda, \tag{4}$$

где F_{kl} — линейный оператор, k-линейный по h и l-линейный по g . Вместе с рядом (4) рассмотрим следующий числовой ряд:

$$\sum_{k+l\geqslant 0} \|F_{kl}\| \, \|h\|^k \| \mathrm{g} \|^l. \tag{5}$$

Пусть существуют числа $\rho_u > 0$ и $r_u > 0$ такие, что при $\|h\| < \rho_u$ и $\| \mathrm{g} \| < r_u$ ряд (5) сходится. В этом случае ρ_u, r_u называются *совместными радиусамисходимости числового ряда (5)*, а также и *совместными радиусами равномерной сходимости абстрактного ряда (4)*, так как в области $\|h\| < \rho_u$, $\| \mathrm{g} \| < r_u$ ряд (4) сходится абсолютно и равномерно.

Упражнение 4. Покажите, что числа $r, 1-r$ для любого $r \in (0,\, 1)$ являются совместными радиусами сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times$ $\times y^{n-k}$.

Таким образом, ρ_u и r_u определяются неоднозначно (например, при уменьшении ρ_u может увеличиваться r_u). Можно показать, что в области $\|h\| < \rho_u$, $\| \mathrm{g} \| < r_u$ сумма ряда (4) есть функция непрерывная и ряд этот можно дифференцировать по h и g любое число раз, в результате чего получаются непрерывные функции, равные соответствующим производным ряда.

Приведем еще следующее определение. Оператор $F(x,\, \lambda)$ называется *аналитическим в точке* $(x_0,\, \lambda_0)$, если можно указать окрестность этой точки, в которой $F(x,\, \lambda)$ представим равномерно и абсолютно сходящимся рядом Тейлора

$$F(x,\, \lambda) = F(x_0,\, \lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k \{F(x_0,\, \lambda_0);\; (x - x_0,\, \lambda - \lambda_0)\}.$$

Учитывая выражение (3) для дифференциалов и формулу биномиального коэффициента, ряд Тейлора оператора $F(x,\, \lambda)$ можно записать также в следующем виде:

$$F(x,\, \lambda) = \sum_{i+j\geqslant 0} F_{ij} (x - x_0)^i (\lambda - \lambda_0)^j, \tag{6}$$

где

$$F_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{j+j} F(x_0,\, \lambda_0)}{\partial x^i \partial \lambda^j}.$$

Отсюда видно, что ряд Тейлора представляет собой двойной степенной ряд вида(4), где $h = x - x_0$, $\mathrm{g} = \lambda - \lambda_0$.

Пример 4. Пусть в примере 1 $k = l = m = 1$ и координатная функция аналитична в точке$x_0,\, \lambda_0$. Тогда

$$f(x,\, \lambda) = f(x_0,\, \lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k \{f_0(x_0,\, \lambda_0);\; (x - x_0,\, \lambda - \lambda_0)\},$$

где

$$d^k f_0 = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0, \lambda_0)}{\partial x^i \partial \lambda^{k-i}} (x - x_0)^i (\lambda - \lambda_0)^{k-i}.$$

Пример 5. Пусть в примере 2 функция $f(x, u, \lambda)$ k раз непрерывно дифференцируема по переменным $u, \lambda \in (-\infty, +\infty)$. Тогда k-й дифференциал оператора F в точке $(u_0(x), \lambda_0) \in C[a, b] \oplus E^1$ при приращении $(h(x), \mathrm{g}) \in C[a, b] \oplus E^1$ равен

$$d^k F = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x, u_0(x), \lambda_0)}{\partial u^i \partial \lambda^{k-i}} h^i(x)\, \mathrm{g}^{k-i}.$$

Пример 6. Пусть в примере 3 функция $f(x, \lambda)$ дважды непрерывно дифференцируема при $x, \lambda \in (-\infty, +\infty)$, и пусть $x_0(t) \in C[a, b]$, $\lambda_0(t) \in \in C[a, b]$. Второй дифференциал оператора F в точке $(x_0(s), \lambda_0(s))$ при приращении $(h(s), \mathrm{g}(s))$ имеет следующий вид (проверьте!):

$$d^2 F = \int_a^b K(t, s) \left\{ \frac{\partial^2 f(x_0(s), \lambda_0(s))}{\partial x^2} h^2(s) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial^2 f(x_0(s), \lambda_0(s))}{\partial x \partial \lambda} h(s)\, \mathrm{g}(s) + \frac{\partial^2 f(x_0(s), \lambda_0(s))}{\partial \lambda^2} \mathrm{g}^2(s) \right\} ds.$$

32.6. Первая вариация и производная Гато нелинейного оператора. В приложениях иногда оказываются полезными другие определения дифференцируемости нелинейного оператора. Рассмотрим нелинейный оператор $F(x)$, определенный в окрестности S точки x_0 банахова пространства X, со значениями в банаховом пространстве Y.

Определение 1. Если для всех $h \in X$ существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0; h), \tag{1}$$

то этот предел называется *первой вариацией оператора F в точке x_0*.

Разумеется, в формуле (1) при каждом $h \in X$ выражение $F(x_0 + th)$ определено при достаточно малых $|t|$: при $x_0 + th \in S$.

Заметим, что при фиксированном x_0 первая вариация $\delta F(x; h)$ является, вообще говоря, нелинейным оператором, отображающим пространство X (h — переменная) в пространство Y.

Определение 2. Пусть оператор F имеет в точке x_0 первую вариацию следующего вида: $\delta F(x; h) \equiv Ah$, где A — линейный ограниченный оператор ($A \in \mathcal{L}(X, Y)$). Тогда говорят, что оператор F *дифференцируем в точке x_0 в смысле Гато*. При этом оператор A называется *производной Гато* оператора F в точке x_0 и обозначается $A = F'(x_0)$. Сама первая вариация

$$\delta F(x; h) = F'(x_0)h \tag{2}$$

называется *дифференциалом Гато* оператора F в точке x_0 по направлению h.

Упражнение 1. Вычислите производную Гато функционала $\varphi(x) = \langle x, f\rangle$, где $f \in X*$, X — банахово пространство.

Упражнение 2. Пусть $\varphi(x)$ — функционал, определенный в окрестности точки x_0 банахова пространства X и дифференцируемый в точке x_0 в смысле Гато. Покажите, что $\varphi'(x_0) \in X*$, причем $\varphi'(x_0)h = \langle h, \varphi'(x_0)\rangle$.

Заметим, что из дифференцируемости F в точке x_0 в смысле Фреше следует его дифференцируемость в x_0 в смысле Гато. Действительно, дифференцируемость F в точке x_0 в смысле Фреше означает, что для всех достаточно малых h

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + \omega(th),$$

где $\|\omega(th)\| = o(\|h\|)$ при $h \to 0$. Деля последнее равенство на t и переходя к пределу при $t \in (-1, +1)$, $t \neq 0$, получаем

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = F'(x_0)h.$$

Согласно (1), (2) это означает дифференцируемость F в x_0 в смысле Гато, а также совпадениепроизводной Гато F в точке x_0 с $F'(x_0)$.

Следующий пример показывает, что из дифференцируемости оператора по Гато не вытекает его дифференцируемость по Фреше.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f : E^2 \to E^1$ переменных (x, y), определенную формулой

$$\begin{aligned} &f(x, y) = 1, \quad \text{если} \quad y = x^2, \quad x \neq 0 \\ &f(x, y) = 0 \quad \text{в остальных точках} \quad E^2. \end{aligned}$$

Эта функция разрывна в точке $(0, 0)$, а потому не дифференцируема в этой точке в смысле Фреше. В то же время

$$\frac{f(th, t\,\mathrm{g}) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

ибо $f(0, 0) = 0$ и $f(th, t\,\mathrm{g}) = 0$ при любом (h, g) и достаточно малом t (нарисуйте график f). Следовательно, функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$ в смысле Гато и ее дифференциал Гато в этой точке равен нулю.

Следующий пример показывает, что требование существования первой вариации слабее требования дифференцируемости по Гато.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 > 0,$$

$$f(0, 0) = 0.$$

Упражнение 3. Покажите, что

$$\delta f((0, 0); (h, \mathrm{g})) = f(h, \mathrm{g}),$$

т. е. f имеет в точке $(0, 0)$ нелинейную первую вариацию и, значит, не дифференцируема а этой точке в смысле Гато.

§ 33. Принцип сжимающих отображений

33.1. Неподвижные точки нелинейного оператора, сжимающие отображения. Пусть в банаховом пространстве X действует оператор $\Phi(x)$ с областью определения $D(\Phi) \subset X$ и с областью значений $R(\Phi) \subset X$. Предположим, что множество $M = D(\Phi) \bigcap R(\Phi)$ не пусто. Точка x^* называется *неподвижной точкой* оператора Φ, если

$$\Phi(x^*) = x^*. \tag{1}$$

Таким образом, неподвижные точки Φ — это решения уравнения

$$x = \Phi(x), \tag{2}$$

а поскольку к такому виду довольно часто удается преобразовать уравнение $F(x) = 0$, где F действует из банахова пространства X в банахово пространство Y, то важность определения неподвижных точек оператора не вызывает сомнения.

Упражнение 1. Найдите неподвижные точки операторов $(X = E)$: а) $\Phi(x) = x^3$; б) $\Phi(x) = \operatorname{tg} x$.

Упражнение 2. Найдите неподвижные точки оператора Φ в $C[0, 1]$, если

$$\Phi(x) = \int\limits_0^1 x(t)x(s)ds + f(t),$$

в предположении, что $f(t) \in C[0, 1]$ и что $\int\limits_0^1 f(t)dt \leqslant 1/4$, а $C[0, 1]$ вещественно.

Дадим теперь важное определение сжимающего оператора Φ. Пусть дано некоторое множество $Q \subset D(\Phi)$.

Определение. Будем говорить, что оператор Φ является *сжимающим оператором* (короче, *сжатием*) на Q, если существует $q \in (0, 1)$ такое, что для любых x', $x'' \in Q$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leqslant q\|x' - x''\|. \tag{3}$$

Число q будем называть *коэффициентом сжатия*.

Упражнение 3. Покажите, что оператор $F(x) = x^3$ $(x \in E^1)$ является сжатием на множестве $S_r(0) = \{x : \ |x| < r\}$, где $r < 1/\sqrt{3}$, и не является сжатием вблизи неподвижных точек 1 и -1.

Упражнение 4. Покажите, что оператор $\Phi(x) = tgx$ $(x \in E^1)$ является сжимающим оператором в шаре $\bar{S}_r(x^*)$, где $x^* \neq 0$ — любая из его неподвижных точек, а r достаточно мало (r зависит от x^*).

33.2. Принцип сжимающих отображений. Теорема 1. *Пусть оператор Φ отображает замкнутое в банаховом пространстве X множество Q в себя и является на Q сжимающим оператором с коэффициентом сжатия q. Тогда в Q оператор Φ имеет единственную неподвижную точку x^*. Пусть $x_0 \in Q$ произвольно. Образуем последовательность*

$$x_n = \Phi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Тогда $\{x_n\} \subset Q$ и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|\Phi(x_0) - x_0\|. \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку $\Phi Q \subset Q$, то $\{x_n\} \subset Q$. Положим $\theta = \|x_1 - x_0\| = \|\Phi(x_0) - x_0\|$. Используя сжимаемость Φ на Q, последовательно находим

$$\begin{array}{l} \|x_2 - x_1\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)\| \leqslant q\|x_1 - x_0\| = \theta q, \\ \|x_3 - x_2\| = \|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\| \leqslant q\|x_2 - x_1\| = \theta q^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \|x_{n+1} + x_n\| \leqslant \theta q^n. \end{array} \tag{3}$$

Строгое обоснование оценки (3) получаем методом полной математической индукции.

Теперь оценим $\|x_{n+p} - x_n\|$, пользуясь неравенством треугольника и формулой суммы геометрической прогрессии:

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leqslant \|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\|+\ldots+\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \theta q^{n+p-1} + \theta q^{n+p-2} + \ldots + \theta q^n = \frac{\theta(q^n - q^{n+p})}{1-q} \leqslant \frac{\theta q^n}{1-q}.$$

Итак, мы получили оценку

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{\|\Phi(x_0) - x_0\|q^n}{1-q}. \tag{4}$$

Отсюда вытекает фундаментальность $\{x_n\}$, а вследствие полноты X — сходимость $\{x_n\}$ в X к некоторому элементу $x^* \in X$. Так как Q замкнуто, то $x^* \in Q$.

Докажем теперь, что x^* является неподвижной точкой оператора Φ. Из условия сжимаемости Φ на Q вытекает непрерывность Φ на Q. Действительно, если $x'' \to x'$, x', $x'' \in Q$, то, согласно формуле (3) п. 33.1, также и $\Phi(x'') \to \Phi(x')$. Перейдем в равенстве (1) к пределу при $n \to \infty$, и так как $x_n \to x^*$, то по непрерывности Φ получим равенство $x^* = \Phi(x^*)$. Итак, x^* — неподвижная точка Φ на Q.

Докажем, что x^* — единственная неподвижная точка Φ на Q. Пусть $\widetilde{x}$ — еще одна неподвижная точка оператора Φ на множестве Q. Вычитая равенства $x^* = \Phi(x^*)$, $\widetilde{x} = \Phi(\widetilde{x})$ и оценивая, получим

$$\|x^* - \widetilde{x}\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(\widetilde{x})\| \leqslant q\|x^* - \widetilde{x}\|.$$

Это неравенство возможно только при $\|x^* - \widetilde{x}\| = 0$, откуда $\widetilde{x} = x^*$. Итак, в Q неподвижная точка у Φ существует и только одна.

Осталось доказать оценку (2). Для этого достаточно перейти к пределу при $p \to +\infty$ в неравенстве (4). Теорема доказана.

Отметим теперь, что наиболее часто принцип сжимающих отображений применяется в двух следующих случаях: $Q = X$ — все пространство и $Q = \overline{S_r(a)}$ — замкнутый шар в X. Сформулируем соответствующие утверждения в виде следствий из теоремы.

Следствие 1. *Пусть Φ определен всюду в банаховом пространстве X и значения Φ также лежат в X. Если Φ является сжимающим оператором на X с коэффициентом сжатия q, то Φ имеет в X единственную неподвижную точку x^*, причем последовательность (1), начиная с любого $x_0 \in X$, сходится к x^* со скоростью (2).*

Следствие 2. *Пусть оператор Φ определен на замкнутом шаре $\overline{S_r(a)}$ банахова пространства X и значения Φ лежат в X. Пусть Φ является на $\overline{S_r(a)}$ сжатием с коэффициентом q, причем*

$$\|\Phi(a) - a\| \leqslant (1 - q)r. \tag{5}$$

Тогда в $\overline{S_r(a)}$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку x^* и последовательность (1) сходится к x^*, начиная с любого $x_0 \in \overline{S_r(a)}$, со скоростью (2).

Следствие 1 является просто частным случаем теоремы 1. Для доказательства следствия 2 достаточно показать, что оператор Φ отображает шар $\overline{S_r(a)}$ в себя. Действительно, если $x \in \overline{S_r(a)}$, т. е. $\|x - a\| \leqslant r$, то, вследствие сжимаемости Φ на $\overline{S_r(a)}$ и неравенства (5), получим

$$\|\Phi(x) - a\| \leqslant \|\Phi(x) - \Phi(a)\| + \|\Phi(a) - a\| \leqslant \\ \leqslant q\|x - a\| + (1 - q)r \leqslant qr + (1 - q)r = r.$$

Теперь выполнены все условия теоремы 1 при $Q = \overline{S_r(a)}$, и следствие 2 доказано.

Заметим, что условия следствия 2 более типичны для нелинейного оператора, чем условия следствия 1. Единственность решения нелинейного уравнения является фактом сравнительно редким (см. упражнения п. 33.1).

Произведем одно полезно обобщение принципа сжимающих отображений. Пусть нелинейный оператор Φ отображает множество $Q \subset X$ в себя. В этом случае для векового натурального n определена n-я степень (n-я итерация) оператора Φ. Полагаем для $x \in Q$ $\Phi^2(x) = \Phi(\Phi(x))$. Если $\Phi^{n-1}(x)$ уже определена, то полагаем $\Phi^n(x) = \Phi(\Phi^{n-1}(x))$.

Теорема 2. *Пусть оператор Φ отображает замкнутое множество $Q \subset X$ в себя и при некотором натуральном m оператор Φ^m является на Q сжатием. Тогда в Q лежит существует единственная неподвижная точка x^*, начиная с любого начального приближения $x_0 \in Q$.*

Доказательство. Если $m = 1$, то мы имеем теорему 1. Пусть

$m > 1$. Рассмотрим сжатие $\Psi = \Phi^m$. По теореме 1 Ψ имеет на Q единственную неподвижную точку x^*. Поскольку Ψ и Φ перестановочны на Q и так как $\Psi(x^*) = x^*$, мы имеем

$$\Psi(\Phi(x^*)) = \Phi(\Psi(x^*)) = \Phi(x).$$

Это означает, что $\Phi(x^*) \in X$ также является неподвижной точкой оператора Ψ. Но Ψ имеет на Q единственную точку и, следовательно,

$$\Phi(x^*) = x^*,$$

т. е. x^* является неподвижной точкой на Q также и для оператора Φ. Докажем, что x^* — единственная неподвижная точка Φ на Q. Если $\Phi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in Q$, то

$$\Psi(\widetilde{x}) = \Phi^m(\widetilde{x}) = \widetilde{x}.$$

Оказалось, что $\widetilde{x}$ — неподвижная точка Ψ и, значит, $\widetilde{x} = x^*$. Теорема 2 доказана.

В заключение приведем еще одно следствие из теоремы 1 для случая дифференцируемого оператора Φ.

Следствие 3. *Пусть оператор Φ отображает замкнутое выпуклое множество $Q \subset X$ в себя, причем на Q он непрерывно дифференцируем и*

$$\|\Phi'(x)\| \leqslant q < 1. \tag{6}$$

Тогда справедливы все утверждения теоремы 1.

Для доказательства заметим, что по лемме 1 п. 32.2 оператор Φ удовлетворяет в Q условию Липшица с постоянной $q \in (0,\, 1)$, т. е. является в Q сжатием.

33.3. Применение к системам линейных алгебраических уравнений. Принцип сжимающих отображений находит многочисленные практически важные приложения даже в случае линейной системы m уравнений с m неизвестными, особенно, когда m велико и применение правила Крамера нецелесообразно. Здесь мы остановимся на двух известных методах решения систем линейных уравнений.

Пусть H — m-мерное унитарное пространство, y — заданный вектор в H, а $B \in \mathcal{L}(H)$. Для нахождения решения уравнения

$$x - Bx = y \tag{1}$$

часто применяется так называемый *метод простой итерации* (см. [1]). При этом решение уравнения (1) разыскивается как предел последовательности

$$x_{n+1} = Bx_n + y, \quad n = 0,\, 1,\, \ldots\,, \tag{2}$$

а начальное приближение x_0 задано. Если $x_n \to x$ при $n \to \infty$ (x_n — решение (2), а x — решение (1)), то говорят, что метод простой итерации *сходится*.

С точки зрения принципа сжимающих отображений уравнение (1) следует записать в виде

$$x = \Phi(x),$$

где $\Phi(x) = Bx + y$. При этом $\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| = \|Bx' - Bx''\| \leqslant \|B\|\,\|x' - x''\|$.

Если $\|B\| < 1$, то оператор Φ является сжимающим и метод простых итераций сходится. Более общее условие его сходимости дает теорема 2 п. 33.2, когда сжимающим является оператор Φ^k при некотором натуральном k. Предлагаем читателю проверить, что в данном случае

$$\Phi^k(x) = B^k x + \sum_{l=0}^{k} B^l y$$

и, следовательно,

$$\|\Phi^k(x') - \Phi^k(x'')\| \leqslant \|B^k\|\,\|x' - x''\|.$$

Таким образом, если удастся показать, что при каком-либо k $\|B^k\| < 1$, то, согласно теореме 2 п. 33.2, метод простой итерации сходится. На этом пути удается получить следующее необходимое и достаточное условие (см. [1, 24])

Теорема. *Для сходимости метода простой итерации при любом начальном приближении необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора B по модулю были меньше* 1.

Доказательство достаточности. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения оператора B (среди них могут быть равные). Согласно условию теоремы существует число $q \in (0,\ 1)$ такое, что

$$|\lambda_i| \leqslant q, i = 1, \ldots, m.$$

Фиксируем число $\delta > 0$ настолько малое, что $q + \delta < 1$, и рассмотрим оператор $\delta^{-1}B$. Его собственные значения равны $\delta^{-1}\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. По теореме Жордана (см. п. 23.2) существует в H базис $\{e_i\}_1^m$, состоящий из собственных и присоединенных векторов оператора $\delta^{-1}B$. При этом выполняются следующие соотношения:

$$\delta^{-1}Be_1 = \lambda_1\delta^{-1}e_1, \quad \delta^{-1}Be_i = \lambda_i\delta^{-1}e_i + \alpha_{i-1}e_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, m,$$

где либо $\alpha_{i-1} = 0$, либо $\alpha_{i-1} = 1$. После умножения на δ приходим к равенствам

$$Be_1 = \lambda_1 e_1, \quad Be_i = \lambda_i e_i + \delta\alpha_{i-1}e_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, m. \tag{3}$$

Возьмем $x \in H$, и пусть его разложение по базису имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i.$$

Пользуясь формулами (3), можно показать, согласно математической индукции, что

$$
\begin{aligned}
Bx &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i e_i + \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i\xi_{i+1}e_i,\\
B^2x &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2\xi_i e_i + 2\delta\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\alpha_i\xi_{i+1}e_i + \delta^2\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_{i+2}e_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
B^kx &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^k\xi_i e_i + C_k^1\delta\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i^{k-1}\alpha_i\xi_{i+1}e_i + \ldots\\
&\qquad\qquad\ldots + \delta^k\sum_{i=1}^{m-k}\alpha_i\xi_{i+k}e_i,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где C_m^s — биномиальные коэффициенты. При этом, если $m \leqslant s$, то полагаем

$$\sum_{i=1}^{m-s}\lambda_i^s\alpha_i\xi_{i+s}e_i = 0.$$

Вспомним теперь, что $|\lambda_i| \leqslant q$, и, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получим

$$\left\|\sum_{i=1}^{m-s}\lambda_i^s\alpha_i\xi_{i+s}e_i\right\| \leqslant q^s\sum_{i=1}^{m-s}|\xi_{i+s}|\|e_i\| \leqslant q^s\alpha(x), \tag{5}$$

где

$$\alpha(x) = \left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{m}\|e_i\|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Оценка (4) с использованием (5) приводит к следующему неравенству:

$$\|B^kx\| \leqslant (q+\delta)^k\alpha(x). \tag{7}$$

Заметим теперь, что функционал $\alpha(x)$, определяемый формулой (6), удовлетворяет всем аксиомам нормы. Но H конечномерно, и потому все нормы в H эквивалентны. Поэтому найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $x \in H$ имеем $\alpha(x) \leqslant c\|x\|$. Обращаясь к (7), получаем оценку

$$\|B^kx\| \leqslant c(q+\delta)^k\|x\|,$$

т. е. $\|B^k\| \leqslant c(q+\delta)^k$. Так как $q+\delta < 1$, то при достаточно большом k будем иметь $\|B^k\| < 1$, и метод простой итерации сходится.

Доказательство необходимости. Пусть λ — собственное значение B и $|\lambda| \geqslant 1$. Пусть φ — собственный вектор B, отвечающий λ. Выберем в (2) начальное приближение $x_0 = x + \varphi$, где x — решение уравнения (1).

Тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= Bx_0 + y = Bx + y + \lambda\varphi = x + \lambda\varphi, \\ x_2 &= Bx_1 + y = x + \lambda^2\varphi, \ \ldots, \\ x_n &= x + \lambda^n\varphi. \end{aligned}$$

При $|\lambda| \geqslant 1$ $x_n \nrightarrow x$ при $n \to \infty$, и, следовательно, метод итерации расходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Если B — самосопряженный оператор в H, то $\|B\| = \max_i |\lambda_i| \leqslant q < 1$ (см. следствие 1 п. 23.4) и оператор $\Phi(x) = Bx + y$ — сжимающий.

Замечание 2. Теорему можно перефразировать так: для того чтобы спектральный радиус $r_\sigma(B)$ оператора B был меньше 1 (см. п. 24.2), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения B были по модулю меньше 1.

Рассмотрим теперь метод верхней релаксации (см. [17]). Для решения линейного уравнения

$$Ax = y, \tag{8}$$

где $y \in H$, $A \in \mathcal{L}(H)$, H — m-мерное унитарное пространство, обычно используются различные варианты его записи в форме (1). Опишем один из них. Пусть в H фиксирован ортонормированный базис, в котором (4) является матричной записью системы линейных уравнений:

$$x = (\xi_i)_1^m, \quad y = (\eta_i)_1^m, \quad A = (a_{ij})_{i,\,j=1}^m.$$

Предположим, далее, что оператор A вещественный самосопряженный, т. е. a_{ij} вещественны и $a_{ij} = a_{ji}$, и положительно определенный, т. е. $(Ax,\, x) > 0$, при $x \neq 0$. Разложим матрицу A на сумму трех матриц:

$$A = C + \Lambda + D, \tag{9}$$

где матрица C — нижняя левая треугольная, матрица D — верхняя правая треугольная, а Λ — диагональная матрица. Точнее, $c_{ij} = a_{ij}$ при $i > j$, $c_{ij} = 0$ при $i \leqslant j$; $\lambda_{ij} = a_{ij}$, $\lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$; $d_{ij} = a_{ij}$ при $i > j$, $a_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$.

Запишем уравнение (8) в виде

$$(\Lambda + \omega C)x = [(1-\omega)\Lambda - \omega D]x + \omega y, \tag{10}$$

где $\omega > 0$. Поскольку матрица $\Lambda + \omega C$ обратима, то уравнению (10) можно придать вид

$$x = B_\omega x + \omega(\Lambda + \omega C)^{-1} y, \tag{11}$$

где

$$B_\omega = (\Lambda + \omega C)^{-1}[(1-\omega)\Lambda - \omega D].$$

Покажем, что при $0 < \omega < 2$ все собственные значения матрицы B_ω по модулю меньше 1. Действительно, если λ — ее собственное значение, а φ — отвечающий λ ее собственный вектор, то

$$[(1-\omega)\Lambda - \omega D]\varphi = \lambda(\Lambda + \omega C)\varphi. \tag{12}$$

Учитывая представление (9), уравнения (12) можно записать в виде

$$[(2-\omega)\Lambda - \omega A + \omega(C-D)]\varphi = \lambda[(2-\omega)\Lambda + \omega A + \omega(C-D)]\varphi.$$

Умножим это равенство скалярно на φ и, пользуясь тем, что $((C-D)\varphi,\, \varphi) = 0$, получим

$$\lambda = \frac{(2-\omega)(\Lambda\varphi,\, \varphi) - \omega(A\varphi,\, \varphi)}{(2-\omega)(\Lambda\varphi,\, \varphi) + \omega(A\varphi,\, \varphi)}.$$

Так как $(A\varphi,\, \varphi) > 0$ и $(\Lambda\varphi,\, \varphi) > 0$, то при $\omega \in (0,\, 2)$ имеем $|\lambda| < 1$. Согласно методу простых итераций, метод верхней релаксации, т. е. метод последовательных приближений для уравнения (11), сходится при любом начальном приближении, если $0 < \omega < 2$. Число ω называется *релаксационным множителем*. Его выбор может существенно ускорить сходимость последовательных приближений (см. [17]).

33.4. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Принцип сжимающих отображений позволяет дать простое доказательство различных теорем о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений.

Мы рассматриваем здесь дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, поскольку доказательства в этом случае нисколько не усложняются, а абстрактная запись позволяет охватить более широкий класс прикладных задач. Речь пойдет о дифференциальном уравнении вида

$$dx/dt = F(t,\, x), \tag{1}$$

где $F(t,\, x)$ — нелинейный оператор от двух переменных: вещественного переменного $t \geqslant 0$ и переменного x из вещественного банахова пространства X; значения F также лежат в X. Для уравнения (1) ставится задача Коши, т. е. задается начальное условие ($a \in X$)

$$x|_{t=0} = a. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $F(x,\, t)$ *непрерывен по* t *на* $[0,\, \theta]$ *при каждом фиксированном* x *с* $\|x-a\| \leqslant r$ *и при* $t \in [0,\, \theta]$ *и* x *таких, что* $\|x-a\| \leqslant r$, *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\|F(t,\, x)\| \leqslant c, \tag{3}$$

$$\|F(t,\, x_1) - F(t,\, x_2)\| \leqslant m\|x_2 - x_1\|. \tag{4}$$

Тогда на $[0,\, \theta]$, *где*

$$\theta_1 = \min(r/c,\, 1/m,\, \theta), \tag{5}$$

существует единственное решение $x(t)$ *задачи Коши* (1), (2). *При этом на* $[0,\, \theta]$ $\|x(t) - a\| \leqslant r$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение задачи (1), (2), т. е. непрерывно дифференцируемая на некотором $[0,\, \theta_1]$, $\theta_1 \leqslant \theta$, абстрактная функция, обращающая (1) в тождество на $[0,\, \theta_1]$ и удовлетворяющая начальному условию (2). Подставим $x(t)$ в (1) и полученное тождество проинтегрируем на $[0,\, t]$ с учетом (2). Получим, что $x(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$x(t) = a + \int_0^t F(s,\, x(s))ds. \tag{6}$$

Обратно, пусть $x(t)$ — непрерывное на $[0,\, \theta_1]$ решение интегрального уравнения (6). Заметим сначала, что при $s \in [0,\, \theta_1]$ абстрактная функция $F(s,\, x(s))$ непрерывна на $[0,\, \theta_1]$. Это вытекает из непрерывности $x(s)$, непрерывности $F(x,\, t)$ по t и следующей оценки, использующей условие Липшица (4):

$$\begin{aligned}\|F(s,\, x(s)) - F(s_0,\, x(s_0))\| \leqslant \|F(s,\, x(s)) - F(s,\, x(s_0))\| &+ \\ + \|F(s,\, x(s_0)) - F(s_0,\, x(s_0))\| \leqslant m\|x(s) - x(s_0)\| &+ \\ + \|F(s,\, x(s_0)) - F(s_0,\, x(s_0))\|&.\end{aligned}$$

Если $s,\, s_0 \in [0,\, \theta_1]$ и $s \to s_0$, то правая часть в последнем неравенстве стремится к нулю и, значит, $F(s,\, x(s))$ непрерывна в каждой точке $[0,\, \theta]$. Откуда вытекает, что согласно (6) $x(0) = a$, а также дифференцируемость $x(t)$ на $[0,\, \theta]$ и равенство $x'(t) = F(t,\, x(t))$ (см. свойство 8 п. 25.2). Итак, $x(t)$ — решение задачи (1), (2). Таким образом, задача нахождения решения задачи Коши (1), (2) эквивалентна задаче нахождения непрерывного решения интегрального уравнения (6). Пользуясь этим, введем банахово пространство $C_X[0,\, \theta_1]$ абстрактных, непрерывных на $[0,\, \theta_1]$ функций $x(t)$ со значениями в X и с нормой

$$\| x(t) \| = \max_{[0,\, \theta]} \|x(t)\|.$$

Рассмотрим в $C_X[0,\, \theta_1]$ замкнутый шар

$$S_r(a) = \{x(t) \in C_X[0,\, \theta_1];\ \|x(t) - a\| \leqslant r\}.$$

Нелинейный оператор

$$\Phi(x) = a + \int_0^t F(s,\, x(s))ds$$

переводит $S_r(a)$ в себя, ибо

$$\| \Phi(x) - a \| = \max_{[0,\, \theta_1]} \left\| \int_0^t F(s,\, x(s))ds \right\| \leqslant \max_{[0,\, \theta_1]} \int_0^t \|F(s,\, x(s))\|ds \leqslant \theta_1 c < r$$

вследствие неравенства (3) и определения θ_1 равенством (5). Кроме того, $\Phi(x)$ является на $S_r(a)$ оператором сжатия, так как согласно (4)

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| = \max_{[0,\,\theta_1]} \left\| \int_0^t [F(s,\, x_1(s)) - F(s,\, x_2(s))]ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[0,\,\theta_1]} \int_0^t \|F(s,\, x_1(s)) - F(s,\, x_2(s))\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \theta_1 m \| x_1(s) - x_2(s) \| = q \| x_1 - x_2 \| ,$$

где

$$q = \theta_1 m < 1$$

(см. (5)).

Согласно принципу сжимающих отображений в шаре $S_r(a)$ существует единственное решение $x(t) \in C_X[0,\, \theta_1]$ уравнения (6). Таким образом, теорема 1 доказана.

Определенным недостатком полученного результата является то обстоятельство, что решение $x(t)$ задачи (1), (2) определено не на всем $[0,\, \theta]$, а лишь локально на $[0,\, \theta_1]$, где θ_1 удовлетворяет равенству (5). Пример задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$dx/dt = x^2, \quad x(0) = 1,$$

точное решение которой имеет вид $x(t) = (1 - t)^{-1}$, показывает, что в общем случае нельзя гарантировать существования решения задачи (1), (2) «в целом» — на всем $[0,\, \theta]$.

При более жестких предположениях относительно оператора $F(t,\, x)$ удается доказать теорему существования и единственности решения задачи Коши (1), (2) на $[0,\, \theta]$.

Теорема 2. *Пусть оператор $F(t,\, x)$ непрерывен по t на $[0,\, \theta]$ при каждом фиксированном $x \in X$ и удовлетворяют условию Липшица (4) при этих же значениях переменных. Тогда на $[0,\, \theta]$ существует единственное решение задачи Коши (1), (2).*

Мы приведем ниже два доказательства теоремы 2, каждое из которых достаточно просто и поучительно.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, сведем задачу (1), (2) к эквивалентному интегральному уравнению (6). Рассмотрим в банаховом пространстве $C_X[0,\, \theta]$ интегральный оператор $\Phi(x)$, определяемый равенством (7). Имеем следующую оценку:

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leqslant m \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds \leqslant mt \| x_1 - x_2 \| .$$

Отсюда находим

$$||\Phi^2(x_1) - \Phi^2(x_2)|| \leqslant m \int_0^t ||\Phi(x_1(s)) - \Phi(x_2(s))||ds \leqslant$$
$$\leqslant m^2 \int_0^t s||x_1(s) - x_2(s)||ds \leqslant \frac{m^2t^2}{2!} \| x_1 - x_2 \| .$$

Продолжая такие оценки, методом полной математической индукции устанавливаем оценку

$$||\Phi^n(x_1) - \Phi^n(x_2)|| \leqslant \frac{(mt)^n}{n!} \| x_1 - x_2 \| .$$

Переходя к максимуму на $[0,\, \theta]$, получим

$$\| \Phi^n(x_1) - \Phi^n(x_2) \| \leqslant \frac{(m\theta)^n}{n!} \| x_1 - x_2 \| .$$

Поскольку $(m\theta)^n/n! \to 0$ при $n \to \infty$, то, фиксируя настолько большое n, чтобы $(m\theta)^n/n! = q < 1$, придем к выводу, что Φ^n — сжатие в $C_X[0,\, \theta]$. Утверждение теоремы 2 следует теперь из теоремы 2 п. 33.2.

Доказательство 2. В банаховом пространстве $C_X[0,\, \theta]$ введем эквивалентную норму

$$\| x(t) \|_m = \max_{[0,\, \theta]} ||e^{-mt}x(t)||.$$

Покажем теперь, что интегральный оператор Φ является сжатием в смысле этой новой нормы. Действительно,

$$||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| \leqslant m \int_0^t ||x_1(s) - x_2(s)||e^{-ms}e^{ms}ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t e^{ms}ds \| x_1 - x_2 \|_m = (e^{mt} - 1) \| x_1 - x_2 \|_m .$$

Умножив полученное неравенство на e^{-mt}, получим

$$e^{-mt}||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| \leqslant (1 - e^{-mt}) \| x_1 - x_2 \|_m .$$

Наконец, перейдем к $\max$ на $[0,\, \theta]$, что дает неравенство

$$\| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \|_m \leqslant (1 - e^{-m\theta}) \| x_1 - x_2 \|_m .$$

Итак, Φ — сжимающий оператор. Теорема 2 доказана.

Упражнение. Перефразируйте теоремы 1 и 2:

а) на случай обыкновенного дифференциального уравнения.

б) на случай системы l обыкновенных дифференциальных уравнений с l неизвестными функциями.

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$dx/dt = A(t)x + y(t), \quad t \leqslant 0, \quad x(0) = a. \tag{8}$$

Пусть $y(t)$ и $A(t)$ — соответственно абстрактная функция со значениями в X и оператор-функция из $\mathcal{L}(X)$, непрерывные на $[0, +\infty)$.

Поскольку на каждом $[0, \theta]$ $\max \|A(t)\| < +\infty$, то из теоремы 2 вытекает существование и единственность решения задачи (8) на полуоси $[0, +\infty)$. Доказательство этого утверждения мы предлагаем провести читателю.

§ 34. Итерационный процесс Ньютона

34.1. Описание итерационного процесса Ньютона. Ньютон предложил эффективный метод вычисления решений уравнения

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

для случая функции $F(x)$ с вещественными значениями, зависящий от вещественный переменной x. Впоследствии метод Ньютона был перенесен на системы уравнений (когда $F(x) \in E^m$, $x \in E^m$), а затем обобщен на работах акад. Л. В. Канторовича на уравнения в банаховых пространствах.

Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, определенный в окрестности S решения x^* уравнения (1), непрерывно дифференцируемый в S в смысле Фреше. Пусть, далее, в S оператор $F'(x)$ непрерывно обратим. Итерационный процесс Ньютона состоит в следующем. Выбирается начальное приближение $x_0 \in S$ и лежащее достаточно близко к решению x^*. Дальнейшие приближения x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ предлагается вычислять по формуле

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

В книге [14], гл. XVIII] читатель может найти подробнейшим образом разработанную теорию метода Ньютона, различные варианты теорем о сходимости итерационного процесса (2) и близких к нему процессов, а также многочисленные приложения. Метод Ньютона является в настоящее время одним из наиболее употребительных вычислительных методов. Главное его достоинство — это (в определенных предположениях) очень быстрая сходимость последовательных приближений (2) к решению x^*. Метод применим также и в случае, когда уравнение (1) имеет несколько решений.

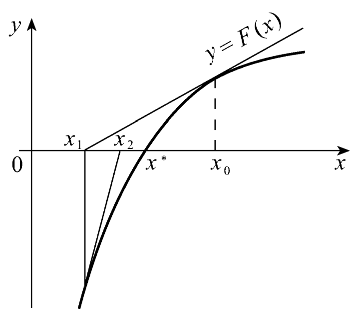


Рис. 21

Дадим описание метода Ньютона в простейших случаях. Пусть x — вещественная переменная и значения $F(x)$ также вещественны. Предположим, что в окрестности решения x^* (рис. 21) функция $F(x)$ строго возрастает и выпукла вверх (аналогично рассматриваются и другие случаи строго монотонной и выпуклой функции). Выберем начальное приближение x_0 достаточно близко к x^*. Запишем уравнение касательной к кривой $y = F(x)$ в точке $(x_0,\, F(x_0))$:

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

Точка x_1 пересечения касательной с осью абсцисс получится при $y = 0$. Ее абсцисса равна значению, вычисляемому по формуле (2) при $n = 1$. Далее проводим касательную к кривой $y = F(x)$ в точке $(x_1,\, F(x_1))$ и получаем x_2 (см. (2) при $n = 2$) и т. д. В результате получается последовательность $\{x_n\}$ очень быстро сходящаяся к x^*, если $|x_0 - x^*|$ достаточно мало. В рассматриваемом случае метод Ньютона обычно называют методом касательных Ньютона.

Пусть теперь $x,\, F(x) \in E^m$. Если $f_i(x_1,\, \ldots,\, x_m)$ $(i = 1,\, \ldots,\, m)$ — координатные функции $F(x)$, то уравнение (1) является краткой записью системы уравнений

$$f_i(x_1,\, \ldots,\, x_m) = 0, \quad i = 1,\, \ldots,\, m.$$

Производная $F'(x) = (\partial f_i(x)/\partial x_j)_{i,\, j=1}^m$ — это матрица Якоби, а $[F'(x)]^{-1}$ — обратная матрица. Формула (2) представляют собой, таким образом, матричную запись итерационного процесса Ньютона в E^m.

34.2. Теорема о сходимости итерационного процесса Ньютона. Приведем один из наиболее удобных в приложениях вариантов теорем о методе Ньютона. Существование решения x^* здесь не предполагается, а доказывается. Вопрос о единственности решения в рассматриваемом шаре здесь не обсуждается.

Теорема. *Пусть в шаре $S_r(x_0)$ оператор $F(x)$ дифференцируем и его производная удовлетворяет в этом шаре условию Липшица с постоянной l. Пусть, далее, в $S_r(x_0)$ оператор $F'(x)$ непрерывно обратим и существует постоянная $m > 0$ такая, что в $S_r(x_0)$*

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leqslant m. \tag{1}$$

Пусть, далее, $\|F(x_0)\| \leqslant \eta$. Тогда, если $q = \frac{1}{2}m^2/\eta < 1$ и

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k-1} < r, \tag{2}$$

то уравнение $F(x) = 0$ имеет решение $x^* \in \overline{S_{r'}(x_0)}$, к которому сходится итерационный процесс Ньютона, начатый с x_0. Скорость сходимости x_n к x^* дается неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leqslant m\eta \frac{q^{2^n-1}}{1 - q^{2^n}}.$$

Доказательство. Введем для краткости следующие обозначения

$$\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}, \quad \Gamma_n = \Gamma(x_n), \quad F_n = F(x_n), \quad F'_n = F'(x_n).$$

Итерационный процесс Ньютона в этих обозначениях записывается так:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n F_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Покажем сначала, что $\{x_n\} \subset \overline{S_{r'}(x_0)}$, $x_1 - x_0 = \Gamma_0 F_0$, и, следовательно, $\|x_1 - x_0\| \leqslant m\eta$. Из (2) следует, что $x_1 \in \overline{S_{r'}(x_0)}$. Далее, $F_0 + F_0'(x_1 - - x_0) = 0$, поэтому

$$F_1 = F_1 - F_0 - F_0'(x_1 - x_0) = F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Пользуясь неравенством (3) п. 32.2, получаем

$$\|F_1\| \leqslant \frac{1}{2} l \|x_1 - x_0\|^2.$$

Дальнейшие рассуждения проведем методом полной математической индукции. Пусть уже доказано, что $x_n \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ и что справедливы оценки

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant m\eta q^{2^{n-1}-1}, \tag{4}$$

$$\|F_n\| \leqslant \frac{1}{2} l \|x_n - x_{n-1}\|^2. \tag{5}$$

Покажем, что тогда

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant m\eta q^{2^n - 1}, \tag{6}$$

откуда $x_n \in \overline{S_{r'}(x_0)}$, и что

$$\|F_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2} l \|x_{n+1} - x_n\|^2. \tag{7}$$

Действительно, из (3), (1) и (4) имеем

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\Gamma_n F_n\| \leqslant \frac{1}{2} ml \|x_n - x_{n-1}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} ml (m\eta)^2 q^{2^n - 2} = m\eta \left(\frac{1}{2} m^2 l \eta\right) q^{2^n - 2} = m\eta q^{2^n - 1}.$$

Формула (6) доказана.

Далее, из (3) имеем

$$F_n + F_n'(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Это позволяет оценить F_{n+1}:

$$F_{n+1} = F_{n+1} - F_n - F_n'(x_{n+1} - x_n) = F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Следовательно, по неравенству (3) п. 32.2

$$\|F_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2} l \|x_{n+1} - x_n\|^2,$$

и неравенство (7) тоже доказано.

Теперь установим фундаментальность $\{x_n\}$. Из неравенства треугольника и оценок (6) имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \ldots$$
$$\ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant m\eta \sum_{k=n}^{n+p-1} q^{2^k - 1}. \tag{8}$$

Отсюда $||x_{n+p}-x_n|| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по p, так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1}$ сходится. Итак, $\{x_n\}$ — фундаментальная, а в силу полноты X — сходящаяся. Обозначим через x^* ее предел. Вследствие замкнутости $\overline{S_{r'}(x_0)}$, так как $\{x_n\} \in \overline{S_{r'}(x_0)}$, то и $x^* \in \overline{S_{r'}(x_0)}$.

Докажем, что x^* — решение уравнения $F(x) = 0$. Для этого достаточно перейти к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (3). Получаем $x^* = x^* - \Gamma(x^*)F(x^*)$, откуда $F(x^*) = 0$, так как $\Gamma(x^*)$ обратим. Переходя в оценке (8) к пределу при $p \to \infty$, получим следующую оценку скорости сходимости $\{x_n\}$ к x^*:

$$||x^* - x_n|| \leqslant m\eta \sum_{k=n}^{\infty} q^{2^k-1}. \tag{9}$$

Воспользуемся теперь элементарным неравенством $2^{1+s} > 1 + s$, справедливым для $s = 0, 1, \ldots$ Полагая в (9) $k = n+s$, учитывая, что $q \in (0, 1)$, и используя формулу суммы геометрической прогрессии, имеем

$$||x^* - x_n|| \leqslant m\eta \sum_{s=0}^{+\infty} q^{2^n \cdot 2^s - 1} \leqslant m\eta q^{2^n-1} = \frac{m\eta q^{2^n-1}}{1-q^{2^n}}.$$

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь вопрос об единственности решения уравнения $F(x) = 0$.

Лемма. *Пусть в шаре $S_r(x_0)$ оператор $F(x)$ дифференцируем, его производная $F'(x)$ удовлетворяет в данном шаре условию Липшица с постоянной l, оператор $F'(x_0$ непрерывно обратим и $||(F'(x_0))^{-1}|| \leqslant m$. Тогда в шаре $S_{r''}(x_0)$, где $r'' < min(1/2ml, r)$ уравнение $F(x) = 0$ может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Допустим противное, что в $S_{r''}(x_0)$ существует два различных решения x_1 и x_2. По формуле Лагранжа (1), п. 32 $F(x_2)=F(x_1)+\int\limits_0^1 F'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1)d\theta$. Поскольку $F(x_2)=F(x_1)$, то предпоследнеее равенство можно записать в виде $-F'(x_0)(x_2 - x_1) = \int\limits_0^1 (F'(x_1+\theta(x_2-x_1))-F'(x_0))(x_2-x_1)d\theta$ или $(x_2-x_1)= -(F'(x_0)^{-1} \times \int\limits_0^1 F'(x_1+\theta(x_2 - x_1))(x_2-x_1)d\theta$. Оценивая по норме, используя условие Липшица и оценку $||x_2-x_1)|| \leqslant 2r''$ находим $||x_2-x_1)|| \leqslant ml \int\limits_0^1 \theta||x_2 - x_1)||^2 d\theta \leqslant 2mlr''||x_2-x_1|| < ||x_2-x_1||$. Это невозможно и, значит, лемма доказана.

Замечание. Обращаясь к теореме о методе Ньютона мы видим, что в ее условиях решение уравнения будет, согласно лемме, единственным в шаре $S_{r''}(x_0)$. Если η достаточно мало, то $r'' < r'$.

34.3. Модифицированный метод Ньютона. Рассмотрим видоизменение, или, как говорят, модификацию итерационного метода Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Преимущество формул (1) заключается в том, что упрощаются вычисления (обратный оператор вычисляется только один раз). Недостаток формул (1), как мы увидим ниже, состоит в том, что ухудшается по сравнению с итерационным методом Ньютона скорость сходимости.

Теорема. *Пусть в шаре $S_r(x_0)$ оператор $F(x)$ дифференцируем и его производная удовлетворяет в $S_r(x_0)$ условию Липшица с постоянной l. Пусть $F'(x_0)$ непрерывно обратим и $\|[F'(x_0)^{-1}]\| \leqslant m$. Пусть, кроме того, $\|F(x_0)\| \leqslant \eta$. Тогда, если $2m^2 l\eta < 1$ и*

$$r' = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta}}{ml} < r, \tag{2}$$

то уравнение $F(x) = 0$ имеет единственное решение $x^* \in \overline{S_{r'}(x_0)}$, к которому сходится модифицированный метод Ньютона (1), начатый с x_0. Скорость сходимости x_n к x^* дается неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta})^2}{\sqrt{1 - 2m^2 l\eta}} m\eta.$$

Доказательство. Покажем сначала, что оператор $\Phi(x) = x - [F'(x_0)]^{-1} F(x)$ отображает шар $\overline{S_{r'}(x_0)}$ в себя. Действительно, используя оценку для $[F'(x_0)]^{-1}$, неравенство (3) п. 32.2, неравенство треугольника и оценку для $F(x_0)$, получаем

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - x_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1}[F(x) - F'(x_0)(x - x_0)]\| \leqslant \\
\leqslant m\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\| \leqslant \\
\leqslant m\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\| + m\|F(x_0)\| \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{2} ml\|x - x_0\|^2 + m\eta \leqslant \frac{1}{2} mlr'^2 + m\eta = r',
\end{aligned}$$

ибо r' — наименьший корень квадратного уравнения (см. формулу (2))

$$\frac{1}{2} mlr'^2 - r' + m\eta = 0.$$

Покажем теперь, что в $\overline{S_{r'}(x_0)}$ оператор является сжатием. Имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
\|\Phi'(x)\| = \|I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x)\| = \|[F'(x_0)]^{-1}[F'(x_0) - F'(x)]\| \leqslant \\
\leqslant ml\|x - x_0\| \leqslant mlr' = 1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta} < 1.
\end{aligned}$$

Итак, в $\overline{S_{r'}(x_0)}$ выполнены условия принципа сжимающих отображений, откуда и вытекают утверждения теоремы о существовании и единственности решения x^* в $\overline{S_{r'}(x_0)}$ и о сходимости к нему $\{x_n\}$. Далее, $q = 1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta}$, $1 - q = \sqrt{1 - 2m^2 l\eta}$, а $\|\Phi(x_0) - x_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leqslant m\eta$.

Согласно оценке (2) п. 33.2 скорости сходимости метода последовательных приближений имеем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|\Phi(x_0) - x_0\| \leqslant \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m^2 l\eta})^n}{\sqrt{1 - 2m^2 l\eta}} m\eta,$$

и, таким образом, теорема доказана.

34.4. Пример к методу Ньютона. Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-x'' + f(t, x) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = \alpha_0, \quad x(1) = \alpha_1. \tag{2}$$

Предположим для простоты, что функция $f(t, x)$ непрерывна вместе со своей частной производной $f_x(t, x)$ в полосе $t \in [0, 1]$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Задачу (1), (2) представим в операторном виде. Для этого введем сначала банаховы пространства $X = C^2[a, b]$ и $Y = C[a, b] \dot{+} E^2$. Норму в X и Y зададим формулами

$$\|x\|_X = \max_{[0,1]} |x(t)| + \max_{[0,1]} |x''(t)|,$$

$$\|y\|_Y = \max_{[0,1]} |h(t)| + \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2},$$

где $y = \{h(t);\ \alpha_0, \alpha_1\} \in Y$.

Пусть далее $F(x)$ — нелинейный оператор, действующий из X в Y по формуле

$$F(x) = \{-x''(t) + f(t, x(t));\ x(0) - \alpha_0,\ x(1) - \alpha_1\}. \tag{3}$$

Теперь задача (1), (2) записывается в виде операторного уравнения

$$F(x) = 0.$$

Далее нетрудно убедиться, что уравнение

$$F'(x) \cdot z = y,$$

где $F'(x)$ — производная Фреше оператора F в точке x, представляет собой следующую линейную краевую задачу:

$$\begin{gathered} -z'' + f_x(t, x(t))z = h(t) \\ z(0) = \alpha_0, \quad z(1) = \alpha_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Следовательно выражение $F'(x)z$ задается формулой

$$F'(x)z = \{-z''(t) + f_x(t,\, x(t))z(t);\; z(0),\, z(1)\}. \tag{5}$$

Но тогда

$$F'(u)z - F'(v)z = \{[f_x(t,\, u(t)) - f_x(t,\, v(t))]z(t);\; 0,\, 0\}$$

и, следовательно,

$$\|F'(u) - F'(v)\| = \max_{[0,\,1]} |f_x(t,\, u(t)) - f_x(t,\, v(t))|. \tag{6}$$

Перейдем к рассмотрению итерационного процесса Ньютона. Пусть мы имеем достаточно хорошее начальное приближение $x_0(t)$ решения задачи (1), (2), т. е. $\|F(x_0)\| \leqslant \eta$, где η — достаточно мало. Согласно формуле (3) это означает, что

$$\max_{[0,\,1]} |-x_0''(t) + f(t,\, x_0(t))| + \sqrt{(x_0(0) - \alpha_0)^2 + (x_0(1) - \alpha_1)^2} \leqslant \eta. \tag{7}$$

Рассмотрим в пространстве X шар $S_{r'}(x_0)$, т. е. множество всех тех $x(t) \in X$, для которых выполняется неравенство

$$\max_{[0,\,1]} |x(t) - x_0(t)| + \max_{[0,\,1]} |x''(t) - x_0''(t)| < r,$$

и предположим, что для всех u и v из этого шара, выполняется неравенство

$$|f_x(t,\, u(t)) - f_x(t,\, v(t))| \leqslant l|u(t) - v(t)|. \tag{8}$$

Согласно равенству (5) тем более в $S_r(x_0)$ будет выполняться условие Липшица: $\|F'(u) - F'(v)\| \leqslant l\|u - v\|$. Потребуем, наконец, чтобы при всех $x \in S_r(x_0)$ для решений z задачи (4) выполнялась априорная оценка

$$\|z\|_X \leqslant m(\|h\| + \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}). \tag{9}$$

Тем самым, в $S_r(x_0)$ гарантирована оценка

$$\|[F'(x)^{-1}]\| \leqslant m$$

и выяснен смысл постоянных l, η и m, входящих в формулировки теорем пп. 34.2 и 34.3 о методе Ньютона.

Выпишем теперь формулы последовательных приближений. Здесь удобнее выписать формулы итерационного процесса Ньютона в виде

$$F'(x_n)x_{n+1} = F'(x_n)x_n - F(x_n), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Используя формулы (3) и (5), получаем последовательность линейных краевых задач

$$-x_{n+1}'' + f_x(t,\, x_n(t))x_{n+1} = f_x(t,\, x_n(t))x_n(t) - f(t,\, x_n(t))$$

$$x_{n+1}(0) = \alpha_0, \quad x_{n+1}(1) = \alpha_1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Заметим, что полученная линеаризация задачи (вместо нелинейной задачи решается последовательность линейных задач) еще не решает эту задачу практически. Для решения получившихся линейных задач приходится прибегать к разностным методам или к методу Галеркина.

В заключение выпишем формулы модифицированного процесса Ньютона:

$$-x''_{n+1} + f_x(t, x_0(t))x_{n+1} = f_x(t, x_0(t))x_n(t) - f(t, x_n(t))$$

$$x_{n+1}(0) = \alpha_0, \quad x_{n+1}(1) = \alpha_1, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Упражнение. Для краевой задачи

$$-x'' + tx^2 = t^3, \quad x(0) = x(1) = 0$$

примем $x_0(t) \equiv 0$. Найдите к модифицированным итерационным процессом Ньютона $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Пусть в этой же задаче $x_0(t) = t$. Найдите $x_1(t)$.

§ 35. Принцип Шаудера

В этом параграфе мы остановимся еще на одном принципе неподвижной точки, принадлежащем Ю. Шаудеру. Наряду с принципом сжимающих отображений и с итерационным методом Ньютона принцип Шаудера является одним из основных методов доказательства существования решений нелинейных уравнений.

35.1. Теорема Броуэра о неподвижной точке. Начнем со следующего элементарного примера. Пусть $f(x)$ —- непрерывная на $[0, 1]$ функция, отображающая $[0, 1]$ в себя, т. е. для всех $x \in [0, 1]$ $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Покажем, что в этом случае существует на $[0, 1]$ неподвижная точка x_0 отображения f, т. е. $f(x_0) = x_0$. Действительно, рассмотрим на $\varphi(0) = -f(0) \leqslant 0$, $\varphi(1) = 1 - f(1) \geqslant 0$. Если $f(0) = 0$ или $f(1) = 1$, то неподвижной точкой f будет соответственно точка $x = 0$ или $x = 1$. Если же $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то $\varphi(0) < 0$, $\varphi(1) > 0$, и мы можем воспользоваться теоремой о промежуточных значениях (см. [18]), согласно которой найдется точка $\xi \in (0, 1)$, в которой $\varphi(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = \xi$. Итак, существование неподвижной точки отображения f в рассмотренном случае доказано.

Упражнение 1. Покажите, что функция $f(x) = 2x(1 - x)$ отображает $[0, 1]$ в себя. Найдите ее неподвижные точки на $[0, 1]$.

Оказывается, рассмотренный пример можно обобщить на n-мерный случай.

Л. Броуэр доказал следующую теорему о неподвижной точке.

Теорема 1 (Броуэр). *Пусть оператор A отображает единичный шар $S = \{x \in E^n : \ \|x\| \leqslant 1\}$ n-мерного евклидова пространства E^n*

в себя и непрерывен на S. Тогда в S найдется неподвижная точка оператора A.

Доказательство этой теоремы Броуэра обычно использует тонкие топологические соображения (см. [25]=), однако в [10], с. 505–508 приведено ее доказательство, основанное на методах математического анализа в E^n. Все известные нам доказательства теоремы Броуэра довольно сложны и останавливаться здесь на них мы не будем. Нам понадобится небольшое усиление теоремы Броуэра. Введем сначала несколько понятий выпуклого анализа (см. п. 1.7).

Определение 1. Пусть в банаховом пространстве X задано множество M из конечного числа элементов

$$M = \{x_i \in X;\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Множество всевозможных линейных комбинаций $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где все $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, называется *выпуклой оболочкой* множества M и обозначается $\mathrm{C}o(M)$.

Упражнение 2. Докажите, что множество $\mathrm{C}o(M)$, где M задается формулой (1), выпукло и замкнуто.

Упражнение 3. Докажите, что если в (1) $x_i \in D$ $(i = 1, \ldots, n)$, где множество D выпуклое, то $\mathrm{C}o(M) \subset D$.

Определение 2. *Выпуклым телом* в банаховом пространстве X называется выпуклое замкнутое множество, имеющее хоть одну внутреннюю точку.

Упражнение 4. Покажите, что для множества $M = \{0, x_1, \ldots, x_n\}$, где элементы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис банахова пространства X, множество $\mathrm{C}o(M)$ является выпуклым телом в X.

Указание. Проверьте, что точка $x = (1/2n) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ является внутренней точкой множества $\mathrm{C}o(M)$. В заключение приведем усиленный вариант теоремы Броуэра (доказательство см. [11, с. 573]).

Теорема 2 (Броуэр). *Пусть Ω — выпуклое ограниченное тело n-мерного банахова пространства X. Тогда всякий непрерывный оператор A, отображающий множество Ω в себя, имеет в Ω неподвижную точку.*

35.2. Нелинейные вполне непрерывные операторы и их аппроксимации. В § 20 мы изучали линейные вполне непрерывные операторы. В этом пункте будут приведены необходимые сведения о нелинейных операторах.

Определение. Нелинейный оператор A с областью определения $D(A) \subset X$ и с областью значений в Y (X и Y — банаховы пространства) называется *вполне непрерывным* (*на* $D(A)$) если он непрерывен на $D(A)$ и переводит каждое ограниченное множество, лежащее в $D(A)$, в компактное в Y множество.

Упражнение 1. Покажите, что любой непрерывный оператор $A\colon X \to Y$, где X, Y — конечномерные банаховы пространства, является вполне непрерывным.

Упражнение 2. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства. Пусть оператор $F: X \to Y$ ограниченный и непрерывный, а $A: Y \to Z$ — линейный вполне непрерывный оператор ($A \in \sigma(Y, Z)$). Докажите, что оператор AF — вполне непрерывный.

Введем операторы Шаудера (нелинейные проекторы), аппроксимирующие нелинейный вполне непрерывный оператор A. Пусть оператор A непрерывен на ограниченном множестве $D \subset X$ и множество $A(D) \subset Y$ компактно. По критерию Хаусдорфа (см. п. 19.3) для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество

$$M_\varepsilon = \{y_i \in \overline{A(D)},\ i = 1, \ldots, n\},$$

являющееся конечной ε-сетью множества $\overline{A(D)}$ — замыкания множества $A(D)$. Рассмотрим оператор A_ε, отображающий D в Y и определяемый следующим правилом: для $x \in D$

$$A_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x), \tag{1}$$

где $\mu_i(x) = 0$, если $\|Ax - y_i\| > \varepsilon$, и $\mu_i(x) = \varepsilon - \|Ax - y_i\|$, если $\|Ax - - y_i\| \leqslant \varepsilon$. Оператор A_ε часто называют *ε-проектором Шаудера.*

Упражнение 3. Докажите, что оператор A_ε непрерывен на D. Воспользуйтесь непрерывностью нормы.

Отметим теперь некоторые свойства оператора A_ε.

Свойство 1. $\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in D$, т. е. оператор A_ε аппроксимирует оператор A на D с точностью ε.

Действительно,

$$A(x) - A_\varepsilon(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) A(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)[A(x) - y_i]}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) \|Ax - y_i\| \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x),$$

где суммирование в числителе и знаменателе ведется только по тем индексам i, для которых $\|Ax - y_i\| < \varepsilon$, ибо если $\|Ax - y_i\| \geqslant \varepsilon$, то $\mu_i(x) = 0$. Следовательно,

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mu_i(x) \varepsilon \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n} \mu_i(x) = \varepsilon.$$

Тем самым свойство 1 доказано.

Замечание. При построении ε-проектора A_ε можно вместо конечной ε-сети множества $\overline{A(D)}$ взять конечную ε-сеть любого компактного множества, содержащего $A(D)$.

Упражнение 4. Покажите, что вполне непрерывный оператор $A\colon D \subset X \to Y$ (X и Y — банахова пространства) можно аппроксимировать ε-проекторами на любом ограниченном множестве $D_1 \subset D$.

В заключение пункта сформулируем еще одно свойство ε-проектора Шаудера A_ε, доказать которое мы предлагаем читателю.

Свойство 2. Область значений оператора A_ε содержится в $\mathrm{Co}(M_\varepsilon)$, где M_ε — конечная ε-сеть множества $\overline{A(D)}$.

35.3. Принцип неподвижной точки Шаудера. С помощью теоремы Броуэра можно доказывать различные теоремы о неподвижных точках нелинейных операторов в бесконечномерных банаховых пространствах. В этом пункте будет доказан принцип неподвижной точки Шаудера.

Теорема (принцип Шаудера). *Пусть оператор A отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество D банахова пространства X в себя. Тогда, если A вполне непрерывен на D, то он имеет на D неподвижную точку.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть оператор A не имеет на D неподвижных точек. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $x \in D$

$$\|A(x) - x\| \geqslant \varepsilon_0. \tag{1}$$

Действительно, если это не так, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset D$ такая, что

$$\|A(x_n) - x_n\| \to, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Но тогда, вследствие компактности $A(D)$ в X из последовательности $\{A(x_n)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{Ax_{n'}\}$, сходящуюся к элементу $x_0 \in \overline{A(D)}$. Из (2) видно, что и $x_{n'} \to x_0$, $n' \to \infty$. При этом $x_0 \in D$, ибо $\overline{A(D)} \subset D$, а D замкнуто. Полагая в (2) $n = n'$, вследствие непрерывности $A(x)$ получаем $A(x_0) = x_0$, что противоречит нашему предположению об отсутствии у A неподвижных точек на D. Итак, выполняется неравенство (1).

Будем далее считать, что $0 \in D$. Это условие не является ограничением. В самом деле, пусть $y_0 \in D$. Рассмотрим множество $D_0 = D - y_0$ и оператор

$$A_0 x = A(x + y_0) - y_0.$$

Упражнение. Докажите, что D_0 — замкнутое выпуклое множество, A_0 — вполне непрерывный оператор. Если $x_0 \in D$ — неподвижная точка оператора A, то $x_0 + y_0 \in D_0$ — неподвижная точка оператора A_0.

Зафиксируем любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (см. (1)). Пусть $M_\varepsilon = \{y_i \in \overline{A(D)}, i = 1, \ldots, n\}$ есть конечная ε-сеть множества $A(D)$. Выделим во множестве M_ε максимальную линейно независимую систему элементов. Можно считать, что ее образуют элементы множества

$$N_\varepsilon = \{y_i,\ i = 1, \ldots, m\}, \quad m \leqslant n.$$

Рассмотрим m-мерное банахово пространство X_m, натянутое на элементы множества N_ε и являющееся подпространством банахова пространства X. Пусть, далее, $K_\varepsilon = Co(0 \bigcup M_\varepsilon)$ — выпуклая оболочка (см. п. 35.1).

Введем оператор A_ε — ε-проектор Шаудера (см. п. 35.2) — и рассмотрим его сужение на множество K_ε. По свойству 2 (см. конец п. 35.2) A_ε отображает K_ε в себя. Далее, A_ε непрерывен (см. упражнение 3 п. 35.2). Таким образом, к сужению A_ε на K_ε можно применить теорему 2 Броуэра, согласно которой существует неподвижная точка $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ оператора A_ε: $A_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. В силу свойства 1 оператора A_ε (п. 35.2) имеем

$$\|A(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|A(x_\varepsilon) - A_\varepsilon(x_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon.$$

Это противоречит неравенству (1), ибо мы взяли $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$. Значит, допущение о том, что A не имеет на D неподвижных точек, неверно, и теорема Шаудера доказана.

Следствие. *Если непрерывный оператор A отображает замкнутое выпуклое* (*не обязательно ограниченное*) *множество D банахова пространства X в компактное множество $D_0 \subset D$, то он имеет на D неподвижную точку.*

Действительно, из компактности множества D_0 следует, что в X существует шар $\overline{S_R(0)} \supset D_0$ (см. следствие 2 п. 19.4). Но тогда сужение оператора A на $D \bigcap \overline{S_R(0)}$ удовлетворяет условиям принципа Шаудера.

35.4. Примеры применения принципа Шаудера. Приведем два примера на доказательство теорем существования решений нелинейных задач.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, встречающуюся в гидромеханике (модельная задача теории пограничного слоя):

$$x''' + xx'' = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = a, \quad x'(0) = b, \quad x(1) = c. \tag{2}$$

Задачу (1), (2) мы сведем к эквивалентному интегральному уравнению, в котором затем применим принцип Шаудера. Прежде всего, умножив (1) на $\exp\left\{\int\limits_0^t x(s)ds\right\}$ и интегрируя затем полученное равенство, находим

$$x''(t) = K\exp\left\{-\int\limits_0^t x(s)ds\right\}, \quad \text{где} \quad K = x''(0).$$

Дважды интегрируя это равенство с учетом начальных условий (2), получаем

$$x(t) = a + bt + K\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau.$$

Подставляя сюда $t = 1$ и используя граничное условие (2), определяем K:

$$K = \frac{c-a-b}{\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau}.$$

Мы приходим, таким образом, к следующему интегральному уравнению для $x(t)$:

$$x(t) = a + bt + (c-a-b)\frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau}{\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau}. \tag{3}$$

Упражнение 3. Покажите, что всякое непрерывное на $[0, 1]$ решение интегрального уравнения (3) трижды непрерывно дифференцируемо на $[0, 1]$ и является решением краевой задачи (1), (2). Обратно: всякое (классическое) решение задачи (1), (2) является решением уравнения (3) (покажите).

Обозначим, через $F(x)$ интегральный оператор, равный правой части уравнения (3). Докажем, что $F(x)$ отображает шар $\overline{S_r(0)} \subset C[0, 1]$ в себя, если $r = |a| + |b| + |c-a-b|$. Действительно, поскольку отношение интегралов в правой части (3) неотрицательно и не превышает единицы, то для любых $x \in C[0, 1]$

$$\|F(x)\| \leqslant |a| + |b| + |c-a-b| = r. \tag{4}$$

тем более это верно для $x \in S_r(0)$.

Докажем теперь, что $F(x)$ — вполне непрерывный оператор на $S_r(0)$. Для этого воспользуемся теоремой Арцела (см. п. 19.6). Вследствие оценки (4) множество функций

$$y(t) = \{F(x)\}(t), \quad x \in \overline{S_r(0)}, \tag{5}$$

равномерно ограничено. Далее,

$$y(t_2) - y(t_1) = b(t_2-t_1) + (c-a+b)\frac{\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau}{\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau} \tag{6}$$

Но если $\|x\| \leqslant r$, то $-x(s) \geqslant -r$ на $[0, 1]$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma d\tau \geqslant \int\limits_0^1\int\limits_0^\tau e^{-\sigma r}d\sigma d\tau \geqslant \int\limits_0^1 \tau e^{-\tau r}d\tau \geqslant \frac{1}{2}e^{-r}. \tag{7}$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\sigma x(s)ds\right\}d\sigma \leqslant \int\limits_0^1 e^{\sigma r}d\sigma \leqslant e^r. \tag{8}$$

Из оценок (6)–(8) имеем

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leqslant |b||t_2 - t_1| + |c - a - b|2e^r|t_2 - t_1|e^r = \\ = (|b| + 2e^{2r}|c - a - b|)|t_2 - t_1|.$$

Доказана равностепенная непрерывность множества функций (5). Согласно теореме Арцела $F(x)$ вполне непрерывен на $\overline{S_r(0)}$. Кроме того, F отображает этот шар в себя. Следовательно, согласно принципу Шаудера интегральное уравнение (3), а с ним и краевая задача (1), (2) имеют в шаре $\overline{S_r(0)}$ по крайней мере одно решение.

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $C[a,\, b]$ интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t,\, s)x^3(s)ds + y(t). \tag{9}$$

(Предполагается, что $y \in C[a,\, b]$, а ядро $K(t,\, s)$ непрерывно в квадрате $a \leqslant t,\, s \leqslant b$.)

Рассмотрим в $C[a,\, b]$ линейный интегральный оператор

$$Ku = \int_a^b K(t,\, s)u(s)ds. \tag{10}$$

Согласно п. 10.11 он ограничен и

$$||K|| = \max_{t \in [a,\, b]} \int_a^b K(t,\, s)ds. \tag{11}$$

Согласно примеру 2, п. 20.4 оператор K вполне непрерывен. Поскольку нелинейный оператор $x^3(t)$ ограничен и непрерывен в $C[a,\, b]$ (проверьте!), то, в силу упражнения 2 п. 35.2, нелинейный оператор

$$F(x) = \int_a^b K(t,\, s)x^3(s)ds + y(t) \tag{12}$$

является вполне непрерывным оператором на каждом ограниченном в $C[a,\, b]$ множестве.

В последующих рассуждениях нам понадобится следующее вспомогательное числовое кубическое уравнение:

$$||K||r^3 + ||y|| = r, \tag{13}$$

где $||K||$ определяется формулой (11), а $||y|| = \max_{[a,\, b]} |y(t)|$ — норма в $C[a,\, b]$. Предлагаем читателю выполнить следующие упражнения, которые мы используем далее.

Упражнение 2. Покажите, что если

$$0 \leqslant \|y\| < \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3\|K\|}}, \tag{14}$$

то уравнение (13) имеет два неотрицательных решения r_* и r^*, $r_* < r^*$. При этом $r_* = 0$, а $r^* = 1/\sqrt{\|K\|}$ при $\|y\| = 0$. Далее,

$$r_* < (3\|K\|)^{-1/2}. \tag{15}$$

При $\|y\| = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3\|K\|}}$ (см. (14), (15)), интегральное уравнение (9) имеет в шаре $S^* = S_{r^*}(0)$ решение $x(t)$. Поскольку доказано, что $F(x)$ вполне непрерывен, осталось проверить, что он переводит шар S^* в этот же шар.

Пусть $x \in S^*$. Тогда (см. формулы (12), (10), (11))

$$\|F(x)\| \leqslant \|K\|\,\|x\|^3 + \|y\| \leqslant \|K\|(r^*)^3 + \|y\| = r^*.$$

Это означает, что $FS^* \subset S^*$, и, следовательно, при каждом y с $\|y\| \leqslant \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3\|K\|}}$ уравнение (9) имеет по крайней мере одно решение, причем $\|x\| \leqslant r^*$.

Покажем теперь, что если выполнено условие (14), то в шаре $S^* = S_{r^*}(0)$ уравнение (9) имеет в точности одно решение. Если $x \in S_*$, то

$$\|F(x)\| \leqslant \|K\|\,\|x^3\| + \|y\| \leqslant \|K\|r_*^3 + \|y\| = r_*$$

и по теореме Шаудера в S_* уравнение (9) имеет хотя бы одно решение, если $y \in \overline{S_\rho(0)}$. Далее, при $x_1,\ x_2 \in S_*$ имеем

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| = \left\| \int_a^b K(t,\,s)[x_1^3(s) - x_2^3(s)]ds \right\| \leqslant 3Kr_*^2\|x_1 - x_2\|.$$

Если $y(t)$ удовлетворяет условию (14), то выполняется неравенство (15), откуда $3Kr_*^2 < 1$. Следовательно, при ограничении (14) F отображает S_* в себя и является на S_* сжимающим отображением, а потому уравнение (9) имеет при ограничении (14) в S_* единственное решение.

Пример уравнения (13) показывает, что в S^* уравнение типа (9) имеет, вообще говоря, более одного решения.

Упражнение 3. Исследуйте этим методом нелинейного интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K(t,\,s)x^2(s)ds + y(t).$$

35.5. Теоремы о неподвижных точках, вытекающие из принципа Шаудера. Приведем несколько следствий из теоремы Шаудера о неподвижной точке. Всюду далее X — банахово пространство.

Теорема 1. *Пусть оператор A действует из шара $\overline{S_R(0)} \subset X$ в X и вполне непрерывен. Если для всех $\lambda > 1$ и всех x с $\|x\| = R$ $A(x) \neq \lambda x$, то A имеет в $\overline{S_R(0)}$ неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим оператор F, отображающий $\overline{S_R(0)}$ в $\overline{S_R(0)}$ по следующему правилу:

$$F(x) = \begin{cases} A(x), & \text{если} \quad \|A(x)\| \leqslant R, \\ RA(x)/\|A(x)\|, & \text{если} \quad \|A(x)\| > R. \end{cases}$$

Оператор F вполне непрерывен на $\overline{S_R(0)}$. Действительно, непрерывность F, на $S_R(0)$ очевидно. Кроме того, образ $\overline{S_R(0)}$ при отображении F является компактным множеством вследствие того, что оператор A вполне непрерывен. Значит, по принципу Шаудера существует точка $x_0 \in \overline{S_R(0)}$ такая, что $F(x_0) = x_0$.

Рассмотрим два возможных случая.

Если $F(x_0) = A(x_0)$, то $\|x_0\| = \|A(x_0)\| \leqslant R$, и теорема доказана. Пусть $F(x_0) = RA(x_0)/\|A(x_0)\|$, где $\|A(x_0)\| > R$. Тогда $A(x_0) = \lambda_0 x_0$ и $\lambda_0 = \|A(x_0)\|/R > 1$. Это невозможно по условию теоремы, ибо $\|x_0\| = R$. Значит, возможен только первый случай, т. е. $x_0 = F(x_0) = A(x_0)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть оператор A действует из шара $\overline{S_R(0)} \subset X$ в X и вполне непрерывен. Если $\|A(x)\| \leqslant \|x\|$ для всех x с $\|x\| = R$, то оператор A имеет в $\overline{S_R(0)}$ неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

1) Если $x_0 = A(x_0)$, где $\|x_0\| = R$, то теорема доказана.

2) Если $x \neq A(x)$ для всех x с $\|x\| = R$, то $\lambda x \neq A(x)$ для всех $\lambda > 1$ и всех x с $\|x\| = R$. Действительно, если $\lambda_0 x_0 = A(x_0)$ для некоторого $\lambda_0 > 1$ и некоторого x_0 с $\|x_0\| = R$, то $\lambda_0 \|x_0\| = \lambda_0 R = \|A(x_0)\|$. Это невозможно, так как $\|A(x_0)\| \leqslant R$. Мы находимся в условиях теоремы 1, согласно которой оператор A имеет в $\overline{S_R(0)}$ неподвижную точку. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (Лере–Шаудер). *Пусть оператор A отображает все X в X и вполне непрерывен. Пусть, далее, для всех возможных решений уравнения с параметром $\lambda \in [0, 1]$*

$$x = \lambda A(x) \tag{1}$$

справедлива априорная оценка: существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\lambda \in [0, 1]$ и для всех x, удовлетворяющих (1), выполняется неравенство

$$\|x\| \leqslant c. \tag{2}$$

Тогда уравнение $x = A(x)$ имеет решение.

Доказательство. Зафиксируем любое число $R > c$. Рассмотрим сужение оператора A на $\overline{S_R(0)}$. Оператор A вполне непрерывен на $\overline{S_R(0)}$. Допустим, что найдутся x_0 с $\|x_0\| = R$ и $\mu_0 > 1$ такие, что $A(x_0) = \mu_0 x_0$. Тогда $x_0 = \mu^{-1}A(x_0)$ и $\mu^{-1} \in (0, 1)$. Значит, x_0 — решение уравнения (1) при $\lambda = \mu_0^{-1}$. Но тогда справедлива оценка (2): $\|x\| \leqslant c < R$. Мы пришли к противоречию с предположением, что $\|x_0\| = R$. Таким образом, для сужением A на $\overline{S_R(0)}$ выполнены условия теоремы 1. Следовательно, теорема 3 доказана.

Теорема Лере–Шаудера дает условия, обеспечивающие возможность продолжения по параметру λ решения нелинейного уравнения (1). Напомним, что другой (линейный) вариант метода продолжения по параметру обсуждался нами в § 14.

Упражнение. Покажите, что в условиях теоремы 3 уравнение (1) имеет решение для каждого $\lambda \in [0, 1]$.

В заключение приведем теорему о разрешимости уравнения

$$x - A(x) = y \tag{3}$$

для любого $y \in X$, где оператор $A : X \to X$.

Теорема 4. *Пусть A отображает X в X и вполне непрерывен. Если*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = q < 1,$$

то уравнение (3) имеет решение для всякого $y \in X$.

Доказательство. Зафиксируем любой элемент $y \in X$ и рассмотрим вполне непрерывный оператор $F(x) = A(x) + y$. Для любого $x \in X$, $x \neq 0$, имеем

$$\|F(x)\| \leqslant \|A(x)\| + \|y\| = \left(\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\|x\|.$$

Отсюда, согласно условию теоремы, существует такое $R > 0$, что $\|F(x)\| \leqslant \|x\|$ для $\|x\| = R$. Значит, для сужения оператора F на $\overline{S_R(0)}$ выполнены условия теоремы 2. Таким образом, теорема 4 доказана.

Г Л А В А IX

НЕЯВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 36. Теоремы о неявных операторах

36.1. Неявные операторы. Пусть X, Y и Λ — банаховы пространства. Рассмотрим оператор $F\colon X \dotplus \Lambda \to Y$ ($X \dotplus \Lambda$ — прямая сумма банаховых пространств X и Λ, см. п. 15.1). Уравнение

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{1}$$

где $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$, может определять операторы

$$x = x(\lambda) \tag{2}$$

— решения уравнения (1). (Оператор $x(\lambda)$ с областью определения $\mathfrak{N} \subset \Lambda$ называется *решением* уравнения (1), если $F(x(\lambda),\ \lambda) \equiv 0$ для всех $\lambda \in \mathfrak{N}$.)

Каждое решение уравнения вида (2) называется *неявным оператором* (или *неявной функцией*), определяемым уравнением (1).

Уравнение вида (1) может не иметь решений ни для каких λ, может иметь единственное решение и, наконец, может иметь более одного решения. Рассмотрим несколько простейших примеров. Ограничимся простейшим случаем $X = Y = \Lambda = E^1$.

Пример 1. Уравнение $x^2 + \lambda^2 = -1$ не определяет ни одной неявной функции.

Пример 2. Уравнение $x^2 + \lambda^2 = 0$ определяет единственную неявную функцию $x = 0$, определенную только при $\lambda = 0$.

Пример 3. Уравнение $x - \lambda^2 = 0$ определяет единственную неявную функцию $x = \lambda^2$, определенную для всех $\lambda \in E^1$.

Пример 4. Уравнение $x^2 + \lambda^2 = 1$ определяет две непрерывные функции $x = \sqrt{1-\lambda^2}$ и $x = -\sqrt{1-\lambda^2}$, определенные на $[-1,\ 1]$.

Приведенные примеры показывают, что задача о неявных функциях оказывается достаточно сложной даже в простейшем случае $X = Y = \Lambda = E^1$. Поэтому обычно ограничиваются соответствующей локальной задачей. Напомним известную в математическом анализе теорему о неявной функции (см. [21]).

Теорема. *Пусть функция $F(x,\ \lambda)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x_0,\ \lambda_0)$ и имеет в этой окрестности частную производную $F_x(x,\ \lambda)$, которая непрерывна в точке $(x_0,\ \lambda_0)$. Тогда, если*

$$F(x_0,\ \lambda_0) = 0, \quad F_x(x_0,\ \lambda_0) \neq 0,$$

то найдутся числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что для каждого $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$ существует, и притом единственное, решение $x = x(\lambda) \in S_r(x_0)$ уравнения $F(x,\ \lambda) = 0$, причем $x(\lambda)$ непрерывно на $S_\rho(\lambda_0)$. Если, кроме того, F

имеет непрерывную в точке $(x_0,\,\lambda_0)$ *частную производную* $F_\lambda(x,\,\lambda)$, *то решение* $x(\lambda)$ *дифференцируемо в точке* λ_0, *причем*

$$x'(\lambda_0) = -\frac{F_\lambda(x_0,\,\lambda_0)}{F_x(x_0,\,\lambda_0)}.$$

Эта теорема решает локальную задачу о неявной функции, т. е. задачу разыскания неявной функции $x(\lambda)$ вблизи точки $(x_0,\,\lambda_0)$, значения которой лежат вблизи x_0 и которая определена вблизи λ_0.

Упражнение. Пусть $F(x,\,\lambda) \equiv x^2 + \lambda^2 - 1$, $x_0^2 + \lambda_0^2 = 1$, $x \neq 0$. Покажите, что $r = |x_0|$, $\rho = \min\,(|1+\lambda_0|,\,|1-\lambda_0|)$.

Сформулированная нами теорема допускает перенесение в банаховы пространства. Мы докажем сначала ее варианты, пригодные для недифференцируемых операторов, затем как следствие получим стандартную теорему о неявных операторах, наконец, при некоторых дополнительных ограничениях будут получены оценки снизу чисел ρ и r. Мы рассмотрим позднее и аналитический случай. Будут приведены также примеры применения теорем о неявных операторах.

36.2. Теорема о неявных операторах без предположения о дифференцируемости оператора *F*. Рассмотрим уравнение (1) п. 36.1 и предположим, что оператор $F(x,\,\lambda)$ определен на множестве $\Omega(x_0,\,\lambda_0) = \{x \in X,\ \lambda \in \Lambda\colon \|x - x_0\| < R,\ \|\lambda - \lambda_0\| < k\}$. Очевидно, $\Omega(x_0,\,\lambda_0) \subset X \dotplus \Lambda$.

Теорема. *Пусть существует непрерывно обратимый оператор* $A \in \mathcal{L}(X,\,Y)$ *такой, что для любых* $x,\,y \in S_r(x_0,\ \lambda \in S_\rho(\lambda_0)$, *где* $r < R$, $\rho < k$, *выполняется неравенство*

$$\|F(x,\,\lambda) - F(y,\,\lambda) - A(x-y)\| \leqslant c(r,\,\rho)\|x-y\|, \tag{1}$$

причем

$$\lim_{r,\,\rho\to 0} c(r,\,\rho) < \|A^{-1}\|^{-1}. \tag{2}$$

Пусть, далее, $F(x_0,\,\lambda_0)$ *и* $F(x_0,\,\lambda)$ *непрерывен в точке* λ_0. *Тогда существуют числа* $r' \in (0,\,r)$, $\rho' \in (0,\,\rho)$ *такие, что для каждого* $\lambda \in S_{\rho'}(\lambda_0)$ *уравнение* $F(x,\,\lambda) = 0$ *имеет в шаре* $S_{r'}(x_0)$ *единственное решение* $x(\lambda)$, *причем* $x(\lambda_0) = x_0$ *и* $x(\lambda)$ *непрерывно в точке* λ_0.

Доказательство. Уравнение $F(x,\,\lambda) = 0$ заменим уравнением

$$x = \Phi(x,\,\lambda), \tag{3}$$

где $\Phi(x,\,\lambda) = x - A^{-1}F(x,\,\lambda)$, и покажем, что при достаточно малых r' и ρ' к нему можно применить принцип сжимающих отображений. Имеем оценку (см. (1))

$$\|\Phi(x,\,\lambda) - \Phi(y,\,\lambda)\| = \big\|x - y - A^{-1}[F(x,\,\lambda) - F(y,\,\lambda)]\big\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-1}\|\,\|F(x,\,\lambda) - F(y,\,\lambda) - A(x-y)\| \leqslant \|A^{-1}\|c(r,\,\rho)\|x-y\|.$$

Воспользуемся условием (2) и найдем числа $\widetilde{\rho} \in (0,\, k)$ и $\widetilde{r} \in (0,\, R)$ такие, что для любых $\rho \in (0,\, \widetilde{\rho}]$ и любых $r \in (0,\, \widetilde{r}]$

$$\|A^{-1}\| c(r,\, \rho) \leqslant q < 1$$

(q не зависит от r и ρ, но зависит, конечно, от $\widetilde{r}$ и $\widetilde{\rho}$). Тогда $\|\Phi(x,\, \lambda) - \Phi(y,\, \lambda)\| \leqslant q\|x - y\|$ для любых $x,\, y \in \bar{S}_{\widetilde{r}}(x_0)$, $\lambda \in \bar{S}_{\widetilde{\rho}}(\lambda_0)$.

Итак, в шаре $\bar{S}_{\widetilde{r}}(x_0)$ оператор Φ является сжатием при всяком $\lambda \in \bar{S}_{\widetilde{\rho}}(\lambda_0)$. Покажем теперь, что за счет уменьшения $\widetilde{\rho}$ можно добиться, чтобы Φ отображал шар $\bar{S}_{\widetilde{r}}(x_0)$ в себя. Действительно,

$$\|\Phi(x_0,\, \lambda) - x_0\| = \|A^{-1}F(x_0,\, \lambda)\| \leqslant \|A^{-1}\|\, \|F(x_0,\, \lambda)\|.$$

Поскольку $F(x_0,\, \lambda)$ непрерывен при $\lambda = \lambda_0$ и, значит, $F(x_0,\, \lambda) \to F(x_0,\, \lambda_0) = 0$, когда $\lambda \to \lambda_0$, то найдется число $\rho' \in (0,\, \widetilde{\rho}]$ такое, что для любых $\lambda \in \bar{S}_{\rho'}(\lambda_0)$ $\|A^{-1}\|\, \|F(x_0,\, \lambda)\| \leqslant (1 - q)\widetilde{r}$. Следовательно, Φ переводит $\bar{S}_{\widetilde{r}}(x_0)$ в себя и является в нем сжатием при каждом $\lambda \in \bar{S}_{\rho'}(\lambda_0)$. Осталось взять $r' = \widetilde{r}$. Далее, очевидно, что если $\lambda = \lambda_0$, то решением будет x_0 и только оно.

Наконец, имеем оценку

$$\begin{aligned}\|x(\lambda) - x_0\| = \|\Phi(x(\lambda),\, \lambda) - \Phi(x_0,\, \lambda)\| \leqslant \\ \leqslant \|\Phi(x(\lambda),\, \lambda) - \Phi(x_0,\, \lambda)\| + \|\Phi(x_0,\, \lambda) - x_0\| \leqslant \\ \leqslant q\|x(\lambda) - x_0\| + \|A^{-1}\|\, \|F(x_0,\, \lambda)\|\end{aligned}$$

для всех $\lambda \in \bar{S}_{\rho'}(\lambda_0)$. Следовательно,

$$\|x(\lambda) - x_0\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\, \|F(x_0,\, \lambda)\|}{1 - q},$$

откуда $x(\lambda) \to x_0$ при $\lambda \to \lambda_0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если в условиях теоремы $F(x,\, \lambda)$ непрерывен по λ при каждом фиксированном x при $(x,\, \lambda) \in \Omega(x_0,\, \lambda_0)$ или $F(x,\, \lambda)$ непрерывен в $\Omega(x_0,\, \lambda_0)$ как функция двух переменных, то неявный оператор $x(\lambda)$ непрерывен на $\bar{S}_{\rho'}(\lambda_0)$.*

Доказательство вытекает из следующей оценки:

$$\begin{aligned}\|x(\lambda_1) - x(\lambda_2)\| = \|\Phi(x(\lambda_1),\, \lambda_1) - \Phi(x(\lambda_2),\, \lambda_2)\| \leqslant \\ \leqslant \|\Phi(x(\lambda_1),\, \lambda_1) - \Phi(x(\lambda_2),\, \lambda_1)\| + \|\Phi(x(\lambda_2),\, \lambda_1) - \Phi(x(\lambda_2),\, \lambda_2)\| \leqslant \\ \leqslant q\|x(\lambda_1) - x(\lambda_2)\| + \|A^{-1}\|\, \|F(x(\lambda_1),\, \lambda_1) - F(x(\lambda_2),\, \lambda_2)\|.\end{aligned}$$

Отсюда, если $\lambda_2 \in \bar{S}_{\rho'}(\lambda_0)$ фиксировано, а $\lambda_1 \to \lambda_2$, то $x(\lambda_1) \to x(\lambda_2)$, т. е. функция $x(\lambda)$ непрерывна.

36.3. Стандартная теорема о неявных операторах. Из теоремы п. 36.2 как следствие мы можем получить обычную теорему о неявных операторах — прямое обобщение теоремы п. 36.1.

Теорема. *Пусть оператор* $F(x, \lambda)$ *непрерывен на множестве* $\Omega(x_0, \lambda_0) = \{(x, \lambda) \in X\dot{+}\Lambda, \|x - x_0\| < R, \|\lambda - \lambda_0\| < k\}$ *и имеет на* $\Omega(x_0, \lambda_0)$ *частную производную* $F_x(x, \lambda)$, *непрерывную в точке* (x_0, λ_0). *Пусть, далее,* $F(x_0, \lambda_0) = 0$, *а оператор* $F_x(x_0, \lambda_0)$ *непрерывно обратим. Тогда найдутся числа* $\rho > 0$ *и* $r > 0$ *такие, что для каждого* $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$ *уравнение* $F(x, \lambda) = 0$ *имеет в шаре* $S_r(x_0)$ *единственное решение* $x = x(\lambda)$. *При это* $x(\lambda)$ *непрерывна в* $S_\rho(\lambda_0)$ *и* $x(\lambda_0) = x_0$. *Если, кроме того,* $F(x, \lambda)$ *имеет на* $\Omega(x_0, \lambda_0)$ *частную производную* $F_\lambda(x, \lambda)$, *непрерывную в точке* (x_0, λ_0), *то неявная функция* $x = x(\lambda)$ *дифференцируема в точке* λ_0, *причем*

$$x'(\lambda_0) = -{F_x}^{-1}(x_0, \lambda_0)\, F_\lambda(x_0, \lambda_0). \tag{1}$$

Доказательство. В качестве оператора A, фигурирующего в теореме п. 36.2 возьмем

$$A = F_x(x_0, \lambda_0).$$

Согласно формуле (1) имеем

$$\|F(x, \lambda) - F(y, \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)(x - y)\| =$$
$$= \left\| \int_0^1 \{F_x(y + \theta(x - y), \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)\}\, d\theta\, (x - y) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \|F_x(y + \theta(x - y),\ \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)\|\, d\theta\, \|x - y\| \leqslant c(r, \rho)\|x - y\|,$$

если только $x, y \in \bar{S}_r(x_0)$, $\lambda \in \bar{S}_\rho(\lambda_0)$ ($r < R$, $\rho < k$), где

$$c(r, \rho) = \sup_{z \in \bar{S}_r(x_0),\ \lambda \in \bar{S}_\rho(\lambda_0)} \|F_x(z, \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)\|.$$

При этом $c(r, \rho) \to 0$ при $r, \rho \to 0$ вследствие непрерывности F_x в точке (x_0, λ_0), и, следовательно, выполнены неравенства (1) и (2) п. 36.2. Далее, $F(x, \lambda)$ непрерывен в точке λ_0 и все условия теоремы п. 36.2 выполнены. Из этой теоремы и из следствия к ней мы получаем (локальные) существование и единственность неявной функции $x(\lambda)$, а также ее непрерывность. Пусть теперь существует $F_\lambda(x, \lambda)$, непрерывная в точке (x_0, λ_0). Докажем дифференцируемость неявного оператора $x(\lambda)$ и формулу (1) для его производной. Положим

$$x_1 = x_1(\lambda) = x_0 - {F_x}^{-1}(x_0, \lambda_0)\, F_\lambda(x_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0). \tag{2}$$

Воспользуемся тем, что частные производные F_x и F_λ непрерывны в точке (x_0, λ_0) и, значит, оператор F дифференцируем в этой точке. Это означает, в частности, что

$$F(x_1, \lambda) = F(x_0, \lambda_0) + F_x(x_0, \lambda_0)(x_1 - x_0) + \\ + F_\lambda(x_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \Psi(x_1, \lambda),$$

где $\|\Psi(x_1, \lambda)\| = o(\|x_1 - x_0\| + \|\lambda - \lambda_0\|)$ при $x_1 \to x_0$, $\lambda \to \lambda_0$. Учитывая формулу (2) для x_1 и равенство $F(x_0, \lambda_0) = 0$, получим $F(x_1, \lambda) = \Psi(x_1(\lambda), \lambda)$,

$$\|F(x_1(\lambda), \lambda)\| = o(\|F_x{}^{-1}(x_0, \lambda_0)\, F_\lambda(x_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)\| + \|\lambda - \lambda_0\|),$$

т. е.

$$\|F(x_1(\lambda), \lambda)\| = o(\|\lambda - \lambda_0\|) \quad \text{при} \quad \lambda \to \lambda_0. \tag{3}$$

Далее, имеем оценку ($x = x(\lambda)$ — неявная функция)

$$\|x - x_1\| = \|x - x_1 - F_x{}^{-1}(x_0, \lambda_0) \quad F(x, \lambda)\| \leqslant \\ \leqslant \|F_x{}^{-1}(x_0, \lambda_0)\|\, \|F(x, \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)(x - x_1)\| \leqslant \\ \leqslant \|F_x{}^{-1}(x_0, \lambda_0)\|\, \|F(x_1, \lambda)\| + \\ + \|F_x{}^{-1}(x_0, \lambda_0)\|\, \|F(x, \lambda) - F(x_1, \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)(x - x_1)\|. \tag{4}$$

По формуле конечных приращений

$$\|F(x, \lambda) - F(x_1, \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)(x - x_1)\| = \\ = \left\| \int_0^1 [F_x(x_1 + \theta(x - x_1), \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)]\, d\theta\, (x - x_1) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|F_x(x_1 + \theta(x - x_1), \lambda) - F_x(x_0, \lambda_0)\|\, d\theta\, \|x - x_1\| \leqslant c(r, \rho)\|x - x_1\|.$$

Если $x \in \bar{S}_r(x_0)$, $\lambda \in \bar{S}_\rho(\lambda_0)$, то $c(r, \rho) = q < 1$ (см. доказательство теоремы п. 36.2), но тогда из формул (3) и (4) имеем

$$\|x(\lambda) - x_1(\lambda)\| = o(\|\lambda - \lambda_0\|) \text{ при } \lambda \to \lambda_0.$$

Иначе эта формула записывается так (при $\lambda \to \lambda_0$):

$$x(\lambda) - x_0 = -F_x{}^{-1}(x_0, \lambda_0)\, F_\lambda(x_0, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + o(\|\lambda - \lambda_0\|),$$

и означает дифференцируемость $x(\lambda)$ в точке λ_0 и справедливость формулы (1).

Теорема полностью доказана.

36.4. Теорема о неявном операторе в условиях повышенной гладкости оператора $\boldsymbol{F}$. Недостатком теорем о неявном операторе, приведенных выше, является отсутствие оценок снизу чисел r и ρ. Первое из этих чисел, r, характеризует область в пространстве X (шар $\bar{S}_r(\lambda_0)$), в которой неявная функция существует и единственна. Число ρ дает важную информацию об области определения $D(x)$ неявной функции $x(\lambda)$; утверждается, что $\bar{S}_\rho(\lambda_0) \subset D(x)$. При практическом решении уравнения $F(x,\, \lambda) = 0$ с параметром λ важно бывает найти $x(\lambda)$ на возможно более широкой области определения или хотя бы оценить ее характеристику ρ снизу. В следующей теореме дается один из возможных путей получения таких оценок.

Теорема. *Пусть в условиях теоремы* п. 36.3 *имеют место следующие оценки*:

1) $\|F_x{}^{-1}(x_0,\, \lambda_0)\| \leqslant m$;

2) $\|F_x(x,\, \lambda) - F_x(x_0,\, \lambda_0)\| \leqslant c\big[\|x - x_0\| + \|\lambda - \lambda_0\|\big]$ *для любых* $(x,\, \lambda) \in \in \Omega(x_0,\, \lambda_0)$;

3) $\|F(x_0,\, \lambda)\| \leqslant k\|\lambda - \lambda_0\|$ *для любых* $\lambda \in S_k(\lambda_0)$, *где* m, c *и* k — *некоторые постоянные, зависящие только от области* $\Omega(x_0,\, \lambda_0)$ *и оператора* F.

В этих условиях при каждом $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$, *где*

$$\rho = \min\left(k,\ \frac{1}{mc}\,\frac{1}{(\sqrt{1+km}+\sqrt{km})^2}\right),$$

в шаре $S_r(x_0)$, *где*

$$r = \min\left(R,\ \frac{1}{mc}\,\frac{\sqrt{km}}{\sqrt{km+1}+\sqrt{km}}\right),$$

существует единственное решение $x = x(\lambda)$ *уравнения* $F(x,\, \lambda) = 0$, *непрерывное в* $S_\rho(\lambda_0)$, *и* $x(\lambda_0) = x_0$. *Решение* $x(\lambda)$ *можно получить процессом последовательных приближений*

$$x_{n+1}(\lambda) = x_n(\lambda) - F_x{}^{-1}(x_0,\, \lambda_0)\, F(x_n(\lambda),\, \lambda), \quad n = 0,\, 1,\, \cdots$$

(т. е. модифицированным итерационным процессом Ньютона). Справедлива следующая оценка скорости сходимости $x_n(\lambda)$ *к* $x(\lambda)$:

$$\|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\, mk\rho, \tag{1}$$

где можно принять

$$q = \frac{\sqrt{1+mk}}{\sqrt{1+mk}+\sqrt{mk}}.$$

Доказательство. Пусть сначала числа R и k, характеризующие $\Omega(x_0,\, \lambda_0)$, достаточно велики. Положим $\Phi(x,\, \lambda) = x - F_x{}^{-1}(x_0,\, \lambda_0)\times \times F(x,\, \lambda)$ и вычислим частную производную Φ по x:

$$\Phi_x(x,\, \lambda) = I - F_x{}^{-1}(x_0,\, \lambda_0)\, F_x(x,\, \lambda) = F_x{}^{-1}(x_0,\, \lambda_0)[F_x(x_0,\, \lambda_0) - F_x(x,\, \lambda)].$$

С помощью условий 1) и 2) нашей теоремы при $\|x-x_0\| \leqslant \alpha$, $\|\lambda-\lambda_0\| \leqslant \beta$ имеем

$$\|\Phi_x(x,\,\lambda)\| \leqslant mc(\|x-x_0\| + \|\lambda-\lambda_0\|) \leqslant mc(\alpha+\beta).$$

Далее,

$$\|\Phi(x_0,\,\lambda) - x_0\| = \|{F_x}^{-1}(x_0,\,\lambda_0)\,F(x_0,\,\lambda)\| \leqslant mk\|\lambda-\lambda_0\| \leqslant mk\beta.$$

Фиксируем $q \in (0,\,1)$ и покажем, что α и β можно подобрать так, чтобы $mc(\alpha+\beta) = q$, $mk\beta = (1-q)\alpha$. Тогда при каждом $\lambda \in \bar{S}_\beta(\lambda_0)$ в шаре $\bar{S}_\alpha(x_0)$ уравнение $x = \Phi(x)$, согласно принципу сжимающих отображений, будет иметь единственное решение.

Решая полученную систему линейных уравнений относительно α и β, находим

$$\alpha = \frac{1}{mc}\,\frac{qmk}{mk+1-q}, \qquad \beta = \frac{1}{mc}\,\frac{q(1-q)}{mk+1-q}. \tag{2}$$

Таким образом, α и β являются функциями параметра $q \in [0,\,1]$. При $q = 0$ и при $q = 1$ $\beta = 0$, а если $0 < q < 1$, то $\beta > 0$. Следовательно, β достигает максимума в некоторой точке $q_* \in (0,\,1)$. Это позволяет распорядиться параметром q таким образом, чтобы β было наибольшим. Этим путем мы получим неявную функцию $x(\lambda)$, определенную в шаре наибольшего радиуса ρ.

Предоставляем читателю показать, что при

$$q_* = \frac{\sqrt{1+mk}}{\sqrt{1+mk}+\sqrt{mk}}$$

имеем

$$\rho_* = \beta(q_*) = \max_{q\in(0,\,1)} \beta = \frac{1}{mc}\frac{1}{(\sqrt{1+mk}+\sqrt{mk})^2},$$

$$r_* = \alpha(q_*) = \frac{1}{mc}\frac{\sqrt{mk}}{\sqrt{1+mk}+\sqrt{mk}}.$$

Итак, если $\lambda \in \bar{S}_{\rho_*}(\lambda_0)$, то в шаре $\bar{S}_{r_*}(x_0)$ существует единственная неявная функция $x(\lambda)$, если только $r_* < R$, а $\rho_* < k$. При этом справедлива оценка скорости сходимости (1).

Пусть теперь одно или оба неравенства $r_* < R$, $\rho_* < k$ нарушаются. Заметим, что на $(0,\,q_*)$ функции $\alpha(q)$ и $\beta(q)$ (см. формулы (2)) строго возрастают. Отсюда следует существование единственного числа $q_0 \in (0,\,q_*)$ такого, что

$$\alpha(q_0) \leqslant R, \quad \beta(q_0) \leqslant k,$$

и хоть одно из этих неравенств является равенством. Из изложенного выше ясно, что теперь при $\lambda \in S_{\beta(q_0)}(\lambda_0)$ в шаре $S_{\alpha(q_0)}(x_0)$ существует и единственна неявная функция. Оценка сходимости последовательных приближений теперь имеет вид

$$\|X_n(\lambda) - x(\lambda)\| \leqslant \frac{q_0^n}{1-q_0}\,mk\beta(q_0).$$

Эта оценка лучше указанной в теореме, но мажорируется последней, так как $q_0^n/(1-q_0)$ и $\beta(q_0)$ мажорируются соответственно $q_*^n/(1-q_*)$ и $\beta(q_*)$. Теорема доказана.

36.5. Теорема о неявном операторе в аналитическом случае. Приводимая ниже теорема находит самые разнообразные приложения в нелинейных уравнениях с малым параметром. В ходе ее доказательства будет развит метод малого параметра в нелинейном случае (см. § 13). Дальнейшее развитие этот подход найдет в § 37, в котором мы рассмотрим явление ветвления решений нелинейных уравнений.

Теорема. *Пусть* $F(x,\,\lambda)$ — *аналитический оператор в точке* $(x_0,\,\lambda_0)$, *причем* $F(x_0,\,\lambda_0)=0$, *а оператор* $F_x(x_0,\,\lambda_0)$ *непрерывно обратим. Тогда уравнение* $F(x,\,\lambda)=0$ *определяет в некоторой окрестности точки* $(x_0,\,\lambda_0)$ *единственную неявную функцию* $x=x(\lambda)$, *причем* $x(\lambda_0)=$ $=x_0$ *и* $x(\lambda)$ *аналитична в точке* λ_0.

Доказательство. Воспользуемся аналитичностью оператора $F(x,\,\lambda)$ и, пользуясь разложением (6) п. 32.5, представим $F(x,\,\lambda)$ в следующем виде:

$$F(x,\,\lambda)=\sum_{i+j\geqslant 1} F_{ij}h^i\,\mathrm{g}^j, \tag{1}$$

где $h=x-x_0$, $\mathrm{g}=\lambda-\lambda_0$.

Пусть r_u и ρ_u — совместные радиусы сходимости двойного степенного ряда (1) (см. п. 32.5). Фиксируем числа $r\in(0,\,r_u)$ и $\rho\in(0,\,\rho_u)$, тогда сходится следующий числовой ряд:

$$\sum_{i+j\geqslant 1}\|F_{ij}\|r^i\rho^j. \tag{2}$$

Воспользуемся теперь непрерывной обратимостью оператора $F_{10}=$ $=F_x(x_0,\,\lambda_0)$ и заменим уравнение $F(x,\,\lambda)=0$ следующим эквивалентным ему уравнением:

$$h=R_{01}\,\mathrm{g}+\sum_{i+j\geqslant 2}R_{ij}h^i\,\mathrm{g}^j, \tag{3}$$

где $R_{01}=-(F_{10})^{-1}F_{01}$, $R_{ij}=-(F_{10})^{-1}F_{ij}$. Из сходимости числового ряда (2) вытекает сходимость числового ряда

$$\sum_{i+j\geqslant 2}\|R_{ij}\|r^i\rho^j, \tag{4}$$

ибо $\|R_{ij}\|\leqslant\|(F_{10})^{-1}\|\,\|F_{ij}\|$, а следовательно, сходимость при $\|h\|\leqslant r$, $\|\,\mathrm{g}\,\|\leqslant\rho$ двойного степенного ряда, стоящего в правой части уравнения (3).

Решение уравнения (3) будем искать в виде степенного ряда

$$h=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\,\mathrm{g}^k\,. \tag{5}$$

Подставим ряд (5) в уравнение (3). Приравняв степенные операторы одинаковых порядков по g (мы пользуемся здесь единственностью разложения оператора в степенной ряд), мы придем к следующей рекуррентной системе для определения членов ряда (5):

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1\,\mathrm{g} = R_{01}\,\mathrm{g},\\
&\Phi_2\,\mathrm{g}^2 = R_{20}(\Phi_1\,\mathrm{g})^2 + 2R_{11}(\Phi_1\,\mathrm{g})\,\mathrm{g} + R_{02}\,\mathrm{g}^2,\\
&\Phi_3\,\mathrm{g}^3 = 2R_{20}(\Phi_1\,\mathrm{g})(\Phi_2\,\mathrm{g}^2) + 2R_{11}(\Phi_2\,\mathrm{g}^2)\,\mathrm{g} + R_{30}(\Phi_1\,\mathrm{g}^3) +\\
&\qquad\qquad + 3R_{21}(\Phi_1\,\mathrm{g})^2\,\mathrm{g} + 3R_{12}(\Phi_1\,\mathrm{g})\,\mathrm{g}^2 + R_{03}\,\mathrm{g}^3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Phi_k\,\mathrm{g}^k = P_k(\mathrm{g},\, \Phi_1\,\mathrm{g},\, \dots,\, \Phi_{k-1}\,\mathrm{g}^{k-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Явный вид операторов P_k мы здесь не выписываем (см. [2], с. 352).

Первое уравнение этой системы уже определяет $\Phi_1\,\mathrm{g}$. Подставляя это значение во второе уравнение, находим $\Phi_2\,\mathrm{g}^2$, затем подставляя найденные значения $\Phi_1\,\mathrm{g}$ и $\Phi_2\,\mathrm{g}^2$ в третье уравнение, находим $\Phi_3\,\mathrm{g}^3$ и т. д. Продолжая эти вычисления, находим все коэффициенты ряда (5). Осталось доказать, что полученный ряд (5) действительно имеет ненулевой радиус сходимости, и тогда приведенные выше рассуждения законны. Кроме того, это будет означать аналитичность найденной неявной функции, и доказательство теоремы будет, тем самым, завершено.

Сходимость ряда (5) докажем при помощи мажорантного метода Коши–Гурса. Поскольку числовой ряд (4) сходится, то его общий член стремиться к нулю и, значит, ограничен. Поэтому существует число $M > 0$ такое, что

$$\|R_{ij}\| \leqslant \frac{M}{r^i \rho^j}. \tag{7}$$

Но тогда ряд, стоящий в правой части уравнения (3), мажорируется (оценивается по норме) следующей функцией (кратной прогрессией):

$$
\begin{aligned}
r(\xi,\, \eta) = M\frac{\eta}{\rho} + \sum_{i+j\geqslant 2} M\left(\frac{\xi}{r}\right)^i \left(\frac{\eta}{\rho}\right)^j &=\\
&= M\left[\left(1-\frac{\xi}{r}\right)^{-1}\left(1-\frac{\eta}{\rho}\right)^{-1} - 1 - \frac{\xi}{r}\right],
\end{aligned}
$$

где $\xi = \|h\|$, $\eta = \|\,\mathrm{g}\,\|$.

Рассмотрим числовое уравнение

$$\xi = r(\xi,\, \eta), \tag{8}$$

которое легко преобразуется у виду

$$(M+r)\xi^2 - r^2\xi + Mr^2\frac{\eta}{\rho}\left(1-\frac{\eta}{\rho}\right)^{-1} = 0.$$

Нетрудно показать, что последнее уравнение имеет единственный корень $\xi = \xi(\eta)$, удовлетворяющий условию $\xi(0) = 0$:

$$\xi(\eta) = \frac{r^2}{2(r+M)}\left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{\eta}{\alpha}\right)^{-1/2}\right], \tag{9}$$

где

$$\alpha = \rho\left(\frac{r}{r+2M}\right)^2.$$

Решение $\xi = \xi(\eta)$ является аналитической в точке $\eta = 0$ функцией при $|\eta| < \alpha$, так как $\alpha < \rho$, и, значит, представимо сходящимся при этих значениях η рядом

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \eta^k, \tag{10}$$

где коэффициенты $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ удовлетворяют рекуррентной системе уравнений, получающейся подстановкой ряда (10) в уравнение (8) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях η. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{M}{\rho},\\
\varphi_2 &= \frac{M}{r^2}\varphi_1^2 + 2\frac{M}{r\rho}\varphi_1 + \frac{M}{\rho^2},\\
\varphi_3 &= 2\frac{M}{r^2}\varphi_1\varphi_2 + 2\frac{M}{r\rho}\varphi_2 + \frac{M}{r^3}\varphi_1^3 + 3\frac{M}{r^2\rho}\varphi_1^2 + 3\frac{M}{r\rho^2}\varphi_1 + \frac{M}{\rho^3}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Используя оценки (7), методом полной математической индукции можно показать, что правые части системы (11) мажорируют правые части системы (6), откуда вытекает, что ряд (5) мажорируется рядом (10). Следовательно, ряд (5) сходится при $\| g \| < \alpha$, т. е. представляет собой аналитический оператор. Теорема доказана.

Заметим, что в ходе доказательства мы получили, (см. формулу (9)) оценку снизу для радиуса сходимости ряда (5), представляющего неявный оператор.

36.6. Примеры к теоремам о неявных операторах. Теоремы о неявных операторах находят полезные приложения в нелинейных задачах с параметром. В ряде случаев удается не только доказать локальные существование и единственность неявного оператора, но и дать для него приближенное выражение.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (см. п. 36.2)

$$f(x,\, \lambda) = 0 \tag{1}$$

с вещественными переменными x и λ. Пусть функция $f(x,\, \lambda)$ определена в прямоугольнике

$$\Omega(x_0,\, \lambda_0) = \{x \in E^1,\ \lambda \in E^1\colon\ |x - x_0| < R,\ |\lambda - \lambda_0| < k\},$$

причем $f(x_0, \lambda_0) = 0$, а $f(x_0, \lambda)$ непрерывна в точке λ_0. Предположим, что существуют числа m и M, $0 < m < M$, такие, что для всех $(x, \lambda) \in \Omega(x_0, \lambda_0)$, $(y, \lambda) \in \Omega(x_0, \lambda_0)$, $x \neq y$, выполняется неравенство

$$m \leqslant \frac{f(x, \lambda) - f(y, \lambda)}{x - y} \leqslant M. \tag{2}$$

Покажем, что в этих предположениях уравнение (1) имеет в достаточно малой окрестности точки (x_0, λ_0) единственное решение $x = x(\lambda)$, непрерывное в λ_0, причем $x(\lambda_0) = x_0$. Для этого, согласно теореме п. 36.2, достаточно доказать существование чисел $a > 0$, $q \in (0, 1)$, для которых в $\Omega(x_0, \lambda_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x, \lambda) - f(y, \lambda) - a(x - y)| \leqslant q|a|\,|x - y|, \tag{3}$$

т. е. неравенство (1) п. 36.2 с $c(r, \rho) \equiv q|a|$. Из неравенства (2) для любого a имеем

$$m - a \leqslant \frac{f(x, \lambda) - f(y, \lambda)}{x - y} - a \leqslant M - a.$$

Выбрав здесь $a = (m + M)/2$, получим

$$-\frac{M - m}{2} \leqslant \frac{f(x, \lambda) - f(y, \lambda)}{x - y} - a \leqslant \frac{M - m}{2}.$$

Следовательно, неравенство (3) выполняется при

$$a = \frac{m + M}{2}, \quad q = \frac{M - m}{M + m}.$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда в $\Omega(x_0, \lambda_0)$

$$-M \leqslant \frac{f(x, \lambda) - f(y, \lambda)}{x - y} \leqslant -m, \quad m > 0.$$

Впрочем, этот случай сводится к предыдущему заменой f на $-f$.

Упражнение 1. Покажите, что уравнение

$$|x| + 2x + x^2 = \lambda$$

определяет в окрестности точки $(0, 0)$ единственную непрерывную неявную функцию. Проверьте выполнение неравенства (2).

Упражнение 2. Покажите, что уравнение

$$|x| + x^2 = \lambda$$

определяет при $\lambda > 0$ две неявные функции, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$, а при $\lambda < 0$ не определяет ни одной неявной функции, удовлетворяющей этому же условию. Покажите, что в данном случае условие (2) не выполняется.

Упражнение 3. Пусть функции $\psi(x, \lambda)$ и $\varphi(x, \lambda)$ определены в $\Omega(x_0, \lambda_0)$, причем $\varphi(x_0, \lambda_0) + |\psi(x_0, \lambda_0)| = 0$, а функция $\varphi(x_0, \lambda) + |\psi(x_0, \lambda)|$ непрерывна в точке λ_0. Пусть, далее, $\varphi_x(x, \lambda)$ и $\psi_x(x, \lambda)$

непрерывны в точке (x_0, λ_0). Докажите, что если $0 \notin [m, M]$, где $m = \varphi_x(x_0, \lambda_0) - |\psi_x(x_0, \lambda_0)|$, $M = \varphi_x(x_0, \lambda_0) + |\psi_x(x_0, \lambda_0)|$, то уравнение (1) с $f = \varphi + |\psi|$ определяет в окрестности точки (x_0, λ_0) единственную неявную функцию $x = x(\lambda)$, непрерывную в точке λ_0, причем $x(\lambda_0) = x_0$.

Пример 2. Пусть в уравнении (1) функция f непрерывна в $\Omega(x_0, \lambda_0)$ и непрерывно дифференцируема по x в $\Omega(x_0, \lambda_0)$. Согласно теореме п. 36.3 уравнение (1) определяет локальную неявную функцию $x = x(\lambda)$. Если, кроме того, существуют положительные постоянные c, m, k такие, что

1) $|f_x(x_0, \lambda_0)| \geqslant m$;

2) $|f_x(x, \lambda) - f_x(x_0, \lambda_0)| \leqslant c(|x - x_0| + |\lambda - \lambda_0|)$ при $(x, \lambda) \in \Omega(x_0, \lambda_0)$;

3) $|f(x_0, \lambda)| \leqslant k|\lambda - \lambda_0|$ при $\lambda \in S_k(\lambda_0)$,

то применима теорема п. 36.4, дающая оценки области определения $x(\lambda)$ и области ее значений, а также скорости сходимости последовательных приближений. Если, наконец, функция f аналитична в точке (x_0, λ_0), то по теореме п. 36.5 аналитична в λ_0 локальная неявная функция $x(\lambda)$. При этом иногда оценки могут быть улучшены.

Пример 3. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение с вещественным параметром λ

$$F(x, \lambda) \equiv x(t) - \int_a^b K(t, s;\ x(s), \lambda)\, ds = 0. \tag{4}$$

Относительно функции $K(t, s;\ x, \lambda)$ предположим, что она является непрерывной функцией относительно совокупности своих переменных $t, s \in [a, b]$, $-\infty < x < +\infty$, $|\lambda - \lambda_0| < \rho$, причем пусть ее частная производная по x равномерно непрерывна для этих же значений переменных. Пусть, далее, при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (4) имеет непрерывное решение $x_0(t)$. Введем линейный интегральный оператор (см. пример 3. п. 32.1)

$$f_x(x_0, \lambda_0)z \equiv z(t) - \int_a^b K_x(t, s;\ x_0(s), \lambda_0)\, z(s)\, ds. \tag{5}$$

Считая, что $X = Y = C[a, b]$, можно показать, что условия теоремы п. 36.3 выполнены, если оператор (5) непрерывно обратим, что мы предположим далее. Следовательно, уравнение (1) определяет (локально) единственное решение $x(t;\ \lambda)$, $t \in [a, b]$, причем на $[a, b]$ $x(t;\ \lambda_0) \equiv x_0(t)$.

Если известно, что функция K аналитична относительно переменных x и λ, то $x(t;\ \lambda)$ является при $\lambda = \lambda_0$ аналитической функцией λ, т. е. может быть найдена методом малого параметра в виде ряда

$$x(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)(\lambda - \lambda_0)^k,$$

сходящегося равномерно на $[a, b]$ с ненулевым радиусом сходимости.

Упражнение 4. Покажите, что интегральное уравнение

$$x(t) - \frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin t\,[(\sin s)\,x(s) + x^2(s)]\,ds = 0. \tag{6}$$

имеет при $\lambda = \lambda_0 = 1$ решение $x_0(t) = \sin t$. Найдите непрерывное по $(t;\ \lambda)$ решение уравнения (6) $x(t;\ \lambda)$ такое, что $x(t;\ 1) \equiv \sin t$.

Упражнение 5. Из (6) следует, что

$$x(t) = \frac{\lambda}{\pi} c \sin t,\ \text{где } c = \int\limits_0^\pi [x(s)\sin s + x^2(s)]\,ds.$$

Пользуясь этим, найдите все неявные функции, определяемые уравнением (6).

Пример 4. Рассмотрим краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка с малым параметром ε:

$$x'' + f(t,\,x,\,x';\ \varepsilon) = 0, \quad 0 < t < l, \tag{7}$$

$$x(0) = \varphi_0(\varepsilon), \quad x(l) = \varphi_l(\varepsilon).$$

Относительно функции $f(t,\,x,\,y;\ \varepsilon)$ мы предположим, что она непрерывна по совокупности своих переменных при

$$t \in [0,\,l], \quad -\infty < x, \quad y < +\infty, \quad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$$

и что существуют ее частные производные f_x и f_y, равномерно непрерывные при этих же значениях переменных. Пусть функции $\varphi_0(\varepsilon)$ и $\varphi_l(\varepsilon)$ определены и непрерывны при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ задача (7), т. е. задача

$$x'' + f(t,\,x,\,x';\ 0) = 0, \tag{8}$$

$$x(0) = \varphi_0(0), \quad x(l) = \varphi_l(0),$$

имеет решение $x = x_0(t)$.

Пусть, далее, линеаризованная задача

$$z'' + f_x(t,\,x_0(t),\,{x_0}'(t),\,0)z + f_y(t,\,x_0(t),\,{x_0}'(t),\,0)z' = 0,$$

$$z(0) = 0, \quad z(l) = 0$$

имеет только тривиальное решение $z \equiv 0$. В этих условиях задачу (7) можно записать в операторном виде: $F(x,\,\varepsilon) = 0$. При этом оператор F действует из $X + E^1$ в Y, где $X = C^2[0,\,l]$, $Y = C[0,\,l] \dotplus E^1 \dotplus E^1$, по следующему закону: каждой паре, состоящей из функции и числа $(x(t),\,\varepsilon)$, ставится в соответствие тройка

$$\{x''(t) + f(t,\,x,\,x';\ \varepsilon),\ x(0),\ x(l)\}.$$

Операторы $F(x, \lambda)$ и $F_x(x, \lambda)$ непрерывны, причем оператор $F_x(x_0, 0)$ непрерывно обратим (предоставляем проверить это читателю). Если, в дополнение к этому, функция f аналитична по x, y и ε, а функции φ_0 и φ_l аналитичны по ε, то и оператор $F(x, \varepsilon)$ оказывается аналитическим.

Применяя к задаче (7) теоремы о неявных операторах, мы приходим к выводу, что эта задача имеет при достаточно малых ε единственное решение $x(t, \varepsilon)$, лежащее в $C^2[a, b]$, в окрестности решения задачи (8), причем $x(t, \varepsilon) \to x_0(t)$ при $\varepsilon \to 0$ по норме пространства $C^2[a, b]$. В аналитическом случае $x(t, \varepsilon)$ можно найти методом малого параметра (см. теорему п. 36.5).

Упражнение 6. Методом малого параметра найдите с точностью $O(\varepsilon^2)$ решение краевой задачи с малым параметром ε:

$$x'' + \sin x = \varepsilon \sin \pi t, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

§ 37. Диаграмма Ньютона и ветвление решений нелинейных уравнений

В этом параграфе рассмотрены особые случаи задачи о неявных операторах. Пусть нелинейное уравнение $F(x, \lambda) = 0$ с параметром λ имеет при фиксированном значении параметра λ_0 решение x_0. Если при значениях λ, близких к λ_0, это уравнение имеет несколько (более одного) решений $x(\lambda)$, близких к x_0, то говорят, что происходит *ветвление* решения x_0.

Современная теория ветвления решений нелинейных уравнений (см. [2]) основывается на идеях А. М. Ляпунова и Э. Шмидта и широко использует методы функционального анализа. В одномерном случае, который здесь рассматривается, важную роль играет метод диаграммы Ньютона. С помощью этого метода решаются, впрочем, и некоторые другие математические проблемы.

37.1. Метод диаграммы Ньютона. Пусть комплекснозначная функция $f(x, \lambda)$ комплексных переменных x и λ представляет собой многочлен степени n относительно x:

$$f(x, \lambda) = \sum_{s=0}^{n} f_s(\lambda) x^s, \tag{1}$$

где, согласно определению многочлена степени n, $f_n(\lambda) \equiv 0$. Относительно коэффициентов $f_s(\lambda)$ мы сделаем довольно слабые предположения. Пусть они представимы в окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящихся рядов:

$$f_s(\lambda) = \lambda^{\rho_s} \sum_{r=0}^{+\infty} f_{rs} \lambda^{r/p}, \tag{2}$$

где ρ_s — рациональные числа, а p — общее для всех f_s натуральное число.

Заметим, что если при некотором s $f_s(\lambda) \equiv 0$, то можно считать, что $f_{0s} \neq 0$. Будем далее считать, что $f_{00} \neq 0$, т. е. $f(0, \lambda) \not\equiv 0$. Будем разыскивать решения $x = x(\lambda)$ уравнения

$$f(x, \lambda) = 0, \tag{3}$$

где f определена равенствами (1) и (2), представимые в виде

$$x = x_\varepsilon \lambda^\varepsilon + X, \tag{4}$$

где $x_\varepsilon \neq 0$, а $X = o(\lambda^\varepsilon)$ при $\lambda \to 0$. Чтобы найти возможные значения показателя ε и коэффициента x_ε, нужно подставить (4) в (3) и приравнять нулю главный член, т. е. коэффициент при наинизшей степени λ. Однако, пока показатель ε остается неизвестным, нельзя сказать, какие из членов (после подстановки) будут наинизшими. Ясно только, что члены наинизшего порядка содержатся среди следующих:

$$f_{00}\lambda^{\rho_0}, \quad f_{0k}x_\varepsilon^k \lambda^{\rho_k + k\varepsilon}, \quad f_{0n}x_\varepsilon^n \lambda^{\rho_n + n\varepsilon}, \tag{5}$$

где k пробегает те из значений $1, \ldots, n-1$, для которых $f_k(\lambda) \not\equiv 0$. Так как $f_{00} \neq 0$ и $f_{0n} \neq 0$, то отличны от нуля по меньшей мере два члена в (5).

Для уничтожения членов наинизшего по λ порядка необходимо подобрать показатель ε так, чтобы по крайней мере два из показателей ρ_0, $\rho_k + k\varepsilon$, $\rho_n + n\varepsilon$ совпали, а остальные были не меньше их. Это соображение позволяет отыскивать все возможные значения ε и соответствующие им значения коэффициента x_ε.

Для нахождения значений ε используется диаграмма Ньютона. Нанесем в декартовой прямоугольной системе координат точки (рис. 22) $(0, \rho_0)$, (k, ρ_k), (n, ρ_n), где k пробегает те же значения, что и в (5). Проведем в точке $(0, \rho_0)$ прямую так, чтобы она совпала с осью ординат, и станем ее вращать вокруг точки $(0, \rho_0)$ против часовой стрелки до тех пор, пока на нее впервые не попадет другая из нанесенных точек, например (l, ρ_l). Тангенс угла между этим положением прямой L и отрицательным направлением оси абсцисс равен одному из возможных значений ε, ибо $\operatorname{tg}\alpha = (\rho_0 - \rho_l)/l = \varepsilon$. Если под таким углом провести прямые через точки (s, ρ_s), отличные от попавших на L, то эти прямые будут лежать выше L, а потому $\rho_s + s\varepsilon > \rho_l + l\varepsilon$.

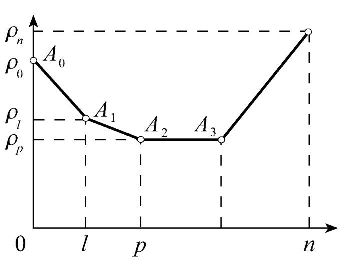


Рис. 22

Отметим, что на прямой, соединяющей точки $(0, \rho_0)$ и (l, ρ_l), могут оказаться и другие точки (k, ρ_k). Будем теперь вращать прямую L в том же направлении вокруг той оказавшейся на прямой L точки (l, ρ_l), у которой абсцисса наибольшая, пока на L не попадет другая из нанесенных точек, например (p, ρ_p). Тангенс угла между новым направлением прямой L и отрицательным направлением оси абсцисс определит другое возможное значение ε:

$$\operatorname{tg}\alpha = (\rho_l - \rho_p)/(p - l) = \varepsilon,$$

ибо прямые, проходящие через другие точки $(s,\, \rho_s)$ параллельно этому новому направлению L, будут лежать выше, а значит, $\rho_s + \varepsilon s > \rho_l + \varepsilon l = \rho_p + \varepsilon p$. Продолжая этот процесс, получим всевозможные значения ε. Выпуклая ломаная, соединяющая точки поворота прямой L, называется диаграммой Ньютона.

Перейдем к определению возможных значений коэффициентов x_ε. Пусть $(i,\, \rho_i)$ и $(j,\, \rho_j)$ — крайние точки одного из звеньев диаграммы — отрезка, определяющего одно из возможных значений ε. Для того чтобы после подстановки (4) в (3) уничтожились низшие члены, необходимо и достаточно, чтобы

$$P(x_\varepsilon) = \sum_s{}' f_{0s} x_\varepsilon^s = 0, \tag{6}$$

где знак штрих у суммы здесь означает, что суммирование проводится по s, удовлетворяющим соотношению $\rho_s + s\varepsilon = \rho_i + i\varepsilon$. Уравнение (6) имеет $j - i$ отличных от нуля корней (с учетом их кратности), т. е. столько корней, какова длина проекции взятого отрезка диаграммы. Отсюда видно, что этим методом получаются все n значений главного члена $x_\varepsilon \lambda^\varepsilon$ в разложении (4).

Для нахождения следующего члена разложения x нужно подставить (4) в (3) и тем же приемом определить низший член разложения, полагая

$$X = x_{\varepsilon'} \lambda^{\varepsilon'} + O(\lambda^{\varepsilon'}).$$

Продолжая этот процесс, можно показать (строгие формулировки и доказательства см. в [2], § 2), что все n решений уравнения (3) имеют вид (ряды Пюизо)

$$x = x_\varepsilon \lambda^\varepsilon + x_{\varepsilon'} \lambda^{\varepsilon'} + x_{\varepsilon''} \lambda^{\varepsilon''} + \ldots, \tag{7}$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$, причем числа ε, ε', ε'', ... являются дробями с конечным общим знаменателем. Ряды (7) сходятся в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, за исключением самой точки $\lambda = 0$, если $\lambda < 0$.

Замечание. (см. п. 2.4 [2]) Пусть x_ε — корень уравнения (6). Будем называть его *простым*, если производная многочлена P на этом корне $P_x(x_\varepsilon) \neq 0$. Можно показать, что если x_ε — простой корень, а $\varepsilon = q/p$ — несократимая дробь, то ряд (7) принимает вид

$$x(\lambda) = \sum_{k=q}^{+\infty} x_k \lambda^{k/p}. \tag{8}$$

Отметим, далее, что диаграмма, постороенная для определения первого показателя ε, имеет общую длину проекций звеньев, равную n. Она разбивается в общем случае на три участка: убывающий, постоянный и возрастающий. Убывающий участок (в наших предположениях он существует) определяет положительные значения показателей ε и, значит, приводит к определению решений уравнения (3) таких, что $x(0) = 0$. Постоянный участок диаграммы соответствует значению $\varepsilon = 0$ и определяет, согласно (4), неявные функции $x = x(\lambda)$ вида $x(\lambda) = x_0 + o(1)$ при $\lambda \to 0$, где $x_0 \neq 0$. Наконец, возрастающий участок диаграммы Ньютона приводит к определению так называемых «больших решений» уравнения (3), стремящихся к бесконечности при $\lambda \to 0$, ибо в этом случае значения показателя ε отрицательны.

37.2. Примеры на определение неявных функций с помощью диаграммы Ньютона. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих метод.

Пример 1. Рассмотрим следующее кубическое уравнение с малым параметром λ:

$$(-\lambda + \lambda^2) + x(1 + \lambda - \lambda^2) + x^2(-1 - \lambda^2 + \lambda^3) + x^3\lambda = 0. \qquad (1)$$

Выберем декартову прямоугольную систему координат. По оси абсцисс будем откладывать значения показателей k степеней x в уравнении (1), а по оси ординат будем откладывать значения показателей ρ_k степеней λ в этом же уравнении (рис. 23).

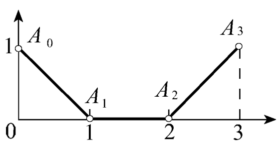


Рис. 23

Построим точки $A_0 = (0, 1)$, $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (2, 0)$, $A_3 = (3, 1)$. Выпуклая ломаная, соединяющая последовательно эти точки, и является, согласно п. 37.1, диаграммой Ньютона уравнения (1). Ее убывающее звено — отрезок, соединяющий точки A_0 и A_1, — соответствует значению $\varepsilon = 1$ и определяет единственное решение $x_1(\lambda)$ уравнения (1), аналитическое при $\lambda = 0$, такое, что $x(0) = 0$, согласно теореме п. 36.5. При этом $x_1(\lambda) = \lambda + o(\lambda)$.

Постоянное звено диаграммы — отрезок, соединяющий точки A_1 и A_2, — определяет неявную функцию $x(\lambda)$, удовлетворяющую условию $x_2(0) = 1$, также аналитическую при $\lambda = 0$, так что

$$x_2(\lambda) = 1 + o(1) \quad \text{при} \ \lambda \to 0.$$

Наконец, возрастающая часть диаграммы также состоит из одного звена — отрезка, соединяющего точки A_2 и A_3. Этому отрезку отвечает значение $\varepsilon = -1$ и «большое» решение $x_3(\lambda)$ уравнения (1):

$$x_3(\lambda) = \lambda^{-1} + o(1) \quad \text{при} \ \lambda \to 0.$$

Упражнение 1. Покажите, что $x_3(\lambda)$ разлагается в сходящийся в окрестности точки $\lambda = 0$ с выколотой точкой $\lambda = 0$ ряд Лорана

$$x_3(\lambda) = \lambda^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} x_{3k}\lambda^k.$$

Указание. Воспользуйтесь замечанием п. 37.1 и простотой соответствующего корня уравнения (6) п. 37.1.

Упражнение 2. Найдите с точностью $O(\lambda)$ решения $x_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) уравнения (1).

Итак, все три решения уравнения (1) можно найти методом диаграммы Ньютона.

Пример 2. Пусть

$$f(x, \lambda) = \lambda^2 - \lambda x^2 - \lambda x^3 + x^5 = 0. \tag{2}$$

Построим точки $A_0 = (0, 2)$, $A_1 = (2, 1)$, $A_2 = (3, 1)$, $A_3 = (5, 0)$ (рис. 24). Диаграмма Ньютона имеет только убывающую часть и состоит из двух звеньев — отрезка A_0A_1 и отрезка A_1A_3. Им отвечают два значения ε: $\varepsilon = 1/2$ и $\varepsilon = 1/3$. Полагая в (2) $x = x_{1/2}\lambda^{1/2} + X_{1/2}(\lambda)$, получаем для определения $x_{1/2}$ уравнение $1 - x_{1/2}^2 = 0$, откуда $x_{1/2} = \pm 1$, причем оба корня простые. Аналогично, полагая в (2) $x = x_{1/3}\lambda^{1/3} + X_{1/3}(\lambda)$, приходим к уравнению $-x_{1/3}^2 + x_{1/3}^5 = 0$. Это уравнение имеет три ненулевых простых корня $x_{1/3} = \sqrt[3]{1}$.

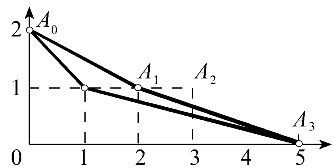


Рис. 24

Итак, уравнение (2) определяет двузначную неявную функцию

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k/2}\lambda^{k/2} \tag{3}$$

и трехзначную неявную функцию

$$\widetilde{x}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x}_{k/3}\lambda^{k/3}. \tag{4}$$

Упражнение 3. Покажите, что при $\lambda > 0$ уравнение (2) имеет два вещественных решения вида (3) и одно вещественное решение вида (4).

Упражнение 4. Найдите вещественные решения уравнения (2) при $\lambda < 0$.

Замечание. В случае кратных корней определяющего уравнения (6) п. 37.1 приходится несколько раз (конечное число) строить диаграммы Ньютона, определяя показатель ε, затем ε', ε'', ... в разложении (7) п. 37.1, пока некоторый корень не окажется простым (см. п. 2.5 [2]).

Пример 3. Пусть

$$f(x, \lambda) = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - x^3 = 0. \tag{5}$$

Упражнение 5. Покажите, что уравнение $f(x, \lambda) = 0$ имеет решение вида $x(\lambda) = \lambda + o(\lambda)$, причем 1 — двукратный корень определяющего уравнения.

Для нахождения следующего члена $x(\lambda)$ полагаем в (5) $x = \lambda + u$. После уничтожения подобных членов получаем для определения u уравнение

$$u^2 - \lambda^3 - 3\lambda^2 u - 3\lambda u^2 - u^3 = 0.$$

Упражнение 6. Постройте диаграмму Ньютона для этого уравнения и покажите, что $u = \lambda^{3/2}$, причем 1 — простой корень определяющего его уравнения. Таким образом, уравнение (5) имеет двузначное решение вида

$$x(\lambda) = \lambda + \lambda^{3/2} + \sum_{l=4}^{\infty} x_l \lambda^{1/2}. \tag{6}$$

Упражнение 7. Покажите, что в вещественном случае при $\lambda > 0$ уравнение (5) определяет два решения вида (6), а при $\lambda < 0$ не определяет непрерывных решений таких, что $x(0) = 0$.

Упражнение 8. Покажите, что уравнение (5) определяет единственную непрерывную неявную функцию $x(\lambda)$, удовлетворяющую условию $x(0) = 1$.

37.3. Постановка задачи о ветвлении в простейшем случае. Пусть комплекснозначная функция $f(x,\, \lambda)$ двух комплексных переменных x и λ аналитична в точке $(0,\, 0)$ и пусть $f(0,\, 0) = 0$. Разложим $f(x,\, \lambda)$ в двойной степенной ряд:

$$f(x,\, \lambda) = \sum_{i+j\geqslant 1} f_{ij} x^i \lambda^j, \tag{1}$$

и пусть числа $r > 0$ и $\rho > 0$ таковы, что при $|x| \leqslant r$, $|\lambda| \leqslant \rho$ сходится мажорирующий ряд (1), числовой ряд

$$\sum_{i+j\geqslant 1} |f_{ij}| r^i \rho^j. \tag{2}$$

Нашей целью является локальное определение неявных функций $x = x(\lambda)$ — решений уравнения

$$f(x,\, \lambda) = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Ниже такие неявные функции $x(\lambda)$ мы будем называть *малыми решениями* уравнения (3).

Случай, когда $f_{10} = f_x(0,\, 0) \neq 0$, уже рассмотрен нами в теореме п. 36.5. Согласно этой теореме уравнение (3) имеет единственное малое решение, аналитическое в точке $\lambda = 0$; значит, представимое сходящимся рядом

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \lambda^k \tag{4}$$

с ненулевым радиусом сходимости.

Ниже мы предполагаем, что $f_{10} = 0$. Это означает, что мы не можем воспользоваться теоремой о неявных операторах п. 36.5. Уравнение (3) принимает теперь следующий вид:

$$f_{01}\lambda + \sum_{i+j\geqslant 2} f_{ij} x^i \lambda^j = 0. \tag{5}$$

Естественно предположить далее, что найдется номер n такой, что

$$f_{i0} = 0, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad f_{n0} \neq 0. \tag{6}$$

В противном случае уравнение (5) можно сократить на λ, и если $f_{01} \neq 0$, то оно малых решений не имеет. Если же $f_{01} = 0$, то после сокращения на λ мы снова получим уравнение типа (4).

Оказывается, что в предположении (6) уравнение (5) имеет ровно n, с учетом кратности, малых решений, и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням параметра λ. Доказательство этого утверждения может быть проведено с помощью так называемой подготовительной теоремы Вейерштрасса. Согласно этой теореме, в сделанных нами относительно $f(x, \lambda)$ предположениях, в окрестности точки $(0, 0)$ эта функция может быть представлена в виде

$$f(x, \lambda) = p_n(x, \lambda)\, q(x, \lambda), \tag{7}$$

где $q(x, \lambda)$ — аналитическая в $(0, 0)$ функция, причем $q(0, 0) \neq 0$, а $p_n(x, \lambda)$ — многочлен вида

$$p_n(x, \lambda) = x^n + p_{n-1}(x, \lambda)$$

с аналитическими при $\lambda = 0$ коэффициентами, удовлетворяющими условиям $p_k(0) = 0$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Из (7) видно, что малые решения уравнения (5) и малые решения уравнения

$$p_n(x, \lambda) = 0 \tag{7}$$

совпадают. Но тогда, согласно методу диаграммы Ньютона (см. п. 37.1), уравнение (8), а с ним и уравнение (5), имеет n малых решений, представимых сходящимися рядами по целым или дробным степеням λ.

Для практического нахождения малых решений уравнения (5) нет необходимости переходить к представлению (7). Можно применить метод диаграммы Ньютона непосредственно к уравнению (5). В этом случае диаграмма может состоять из счетного числа отрезков. Однако поскольку нас интересуют лишь малые решения уравнения (5), то мы должны рассмотреть только убывающий участок диаграммы Ньютона, который всегда состоит из конечного числа звеньев.

Упражнение. С помощью метода диаграммы Ньютона найдите все малые решения уравнения

$$\sin x - x + x^2 \sin\lambda - \lambda^4 = 0.$$

Указание. Воспользуйтесь тейлоровским разложением синуса.

37.4. Точки ветвления и точки бифуркации. Продолжим исследование уравнения (1) п. 36.1

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что

$$F(x_0, \lambda_0) = 0. \tag{2}$$

Пусть оператор F определен на множестве Ω, $\Omega(x_0, \lambda_0) \subset X \dot{+} \Lambda$, а значения F лежат в Y (X, Λ и Y — банаховы пространства).

Если существуют числа $r > 0$ и $\rho > 0$ такие, что при каждом $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$ существует единственное решение $x = x(\lambda) \in S_r(x_0)$ уравнения (1), то точку (x_0, λ_0) будем называть *регулярной точкой* этого уравнения. Теоремы о неявных операторах дают условия, достаточные для регулярности точки (x_0, λ_0).

Среди нерегулярных точек важное место занимают точки ветвления.

Определение 1. Точка (x_0, λ_0) называется *точкой ветвления* уравнения (1), если для любых $r > 0$ и $\rho > 0$ найдется $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$, которому отвечают по крайней мере два решения уравнения (1), лежащих в шаре $S_r(x_0)$.

Приведем простейшие примеры точек ветвления.

Пример 1. Для уравнения $x^2 - \lambda = 0$ в комплексном случае точка $(0, 0)$ является точкой ветвления, так как уравнение определяет в ее окрестности двузначную неявную функцию $x = \sqrt{\lambda}$. Это верно и в вещественном случае, где два решения $x = \pm\sqrt{\lambda}$ определены при $\lambda > 0$.

Пример 2. Пусть $X = Y = C[-1, +1]$, $\Lambda = E^1$ (рассматривается вещественный случай). Покажем, что для интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} x(s)\, ds + \int_{-1}^{1} s x^2(s)\, ds \tag{3}$$

точка $x \equiv 0$, $\lambda = 1/2$ является точкой ветвления. В самом деле, из (3) следует, что $x(t) = \lambda a + b$, где $a = \int_{-1}^{1} x(s)\, ds$, $b = \int_{-1}^{1} s x^2(s)\, ds$. Интегрируя на $[-1, 1]$ $x(t)$ и $tx^2(t)$, получим систему уравнений

$$a = 2\lambda a + 2b, \quad b = 0.$$

Если $\lambda \neq 1/2$, то $a = 0$, откуда $x(t) \equiv 0$. Если же $\lambda = 1/2$, то a произвольно. Итак, уравнение (3) при всех λ имеет тривиальное решение, а при $\lambda = 1/2$ решением (3) является также функция $x(t) \equiv c$, где c — произвольная постоянная. Поскольку при $\lambda = 1/2$ уравнение (3) имеет бесчисленное множество решений, точка $(0, 1/2)$ является точкой ветвления этого уравнения.

Пример 3. Интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_{0}^{1} x(s)\, ds + \int_{0}^{1} x^2(s)\, ds$$

имеет два решения: $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv 1 - \lambda$. Следовательно, точка $(0, 0)$ является его точкой ветвления.

Вернемся к уравнению (1). Пусть теперь $F(0, \lambda) \equiv 0$.

Определение 2. Точка λ_0 называется *точкой бифуркации* уравнения (1), если точка $(0, \lambda_0)$ является точкой ветвления этого уравнения.

Примеры 2 и 3 дают, очевидно, примеры точек бифуркации.

37.5. Уравнение разветвления Ляпунова–Шмидта. Предположим здесь, что оператор $F(x, \lambda)$ непрерывен в $\Omega(x_0, \lambda_0)$ и что он имеет в $\Omega(x_0, \lambda_0)$ непрерывную частную производную $F_x(x, \lambda)$. Пусть, далее, оператор $A = -F_x(x_0, \lambda_0)$ фредгольмов, причем $n = \dim N(A) \geqslant 1$ ($N(A)$ — подпространство нулей A, см. § 21). Для изучения уравнения (1) с условием (2) п. 37.4 запишем это уравнение в виде

$$Au = R(u, \mu), \tag{1}$$

где $u = x - x_0$, $\mu = \lambda - \lambda_0$, $R(u, \mu) = F(x_0 + u, \lambda_0 + \mu) - F_x(x_0, \lambda_0)u$.

Пусть $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(A)$, $\{\gamma\}_1^n$ — биортогональная к нему система из X^*; пусть, далее $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(A^*)$, а $\{z_i\}_1^n$ — биортогональная к нему система элементов из Y. Введем линейный оператор

$$B = A + K, \quad \text{где} \quad K = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot\,, \gamma_i\rangle z_i.$$

Согласно лемме Шмидта (п. 21.4) оператор B непрерывно обратим. Запишем теперь уравнение (1) в виде эквивалентной ему системы:

$$Bu = R(u, \mu) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \tag{2}$$

$$\xi_k = \langle u, \gamma_k\rangle, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

К уравнению (2), если рассматривать $(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in E^{n+1}$ как параметр, можно применить теорему п. 36.3 о неявных операторах. Однако удобнее сначала немного преобразовать это уравнение. А именно, положим в (2)

$$u = v + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i. \tag{4}$$

Поскольку $B\varphi_i = z_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), подстановка (4) в (2) приводит к уравнению

$$Bv = R\left(v + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_1,\ \mu\right). \tag{5}$$

Это уравнение имеет при всех достаточно малых $\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n$ единственное малое решение $v = v(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Следовательно, уравнение (2), в соответствии с (4), имеет единственное малое решение

$$u = v(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i. \tag{6}$$

Это решение должно также удовлетворять уравнениям (3). Учитывая условия биортогональности $\langle \varphi_i, \gamma_j\rangle = \delta_{ij}$, мы получаем для определения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ следующую систему уравнений:

$$\langle v(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n)\gamma_k\rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Эта система называется *уравнением разветвления Ляпунова–Шмидта*. Нетрудно показать, что формула (6) устанавливает взаимно однозначное соответствие между малыми решениями уравнения (1) и системы (7).

Придадим теперь уравнению разветвления (7) другую, более удобную форму.

В п. 21.4 мы установили, что

$$K^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle z_i, \cdot \rangle} \gamma_i,$$

где черта означает комплексное сопряжение. Отсюда, вследствие биортогональности $\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, , имеем $K^* \psi_j = \gamma_j$ (проверьте!). Следовательно, так как $\psi_j \in N(A^*)$,

$$B^* \psi_j = (A^* + K^*) \psi_j = K^* \psi_j = \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Применяя к обеим частям уравнения (5) функционал ψ_k, получаем с помощью формул (8)

$$\left\langle R\left(v + \sum_{i=j}^{n} \xi_i \varphi_i,\ \mu\right),\ \psi_k \right\rangle = \langle Bv, \psi_k \rangle = \langle v, B^* \psi_k \rangle = \langle v, \gamma_k \rangle.$$

Обращаясь к системе (7), мы видим теперь, что ее можно записать в такой форме:

$$\left\langle R\left(v(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i,\ \mu\right),\ \psi_k \right\rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

С учетом формул (6) получаем окончательно

$$\langle R(u(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n), \mu), \psi_k \rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Напомним, что функция $u(\mu, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ определяется как малое решение уравнения (2).

37.6. Исследование задачи о ветвлении в одномерном аналитическом случае. В этом пункте мы предположим дополнительно, что оператор $F(x, \lambda)$ аналитичен в точке (x_0, λ_0), т. е. разлагается вблизи (x_0, λ_0) в степенной ряд $(F(x_0, \lambda_0) = 0)$

$$F(x, \lambda) = \sum_{i+j \geqslant 1} F_{ij} u^i \lambda^j.$$

Далее, предполагается, что $n = \dim N(A) = 1$. Положим $\varphi_1 = \varphi$, $z_1 = z$, $\gamma_1 = \gamma$, $\psi_1 = \psi$, $\xi_1 = \xi$. Уравнение (2) п. 37.5 здесь принимает вид

$$Bu = F_{01} \mu + \sum_{i+j \geqslant 2} F_{ij} u^i \mu^j + \xi z. \tag{1}$$

Положим $B^{-1} = \Gamma$ и будем искать малое решение уравнения (1) в виде

$$u = \sum_{r+s \geqslant 1} u_{rs} \xi^r \mu^s. \tag{2}$$

Чтобы получить уравнение разветвления, мы должны подставить этот ряд в уравнение (9) п. 37.5, которое здесь выглядит так:

$$\left\langle F_{01}\mu + \sum_{i+j \geqslant 2} F_{ij} u^i \mu^j,\ \psi \right\rangle = 0. \tag{3}$$

Подстановка (2) в (3) приводит к следующему уравнению:

$$f_{01}\mu + \sum_{i+j \geqslant 2} f_{ij} \xi^i \mu^j = 0. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение разветвления Ляпунова–Шмидта в рассматриваемом случае совпадает с уравнением (5) п. 37.3 и может быть исследовано с помощью метода диаграммы Ньютона. Возможен, впрочем, и вырожденный случай, когда $f_{01} = 0$, $f_{ij} = 0$, $i + j \geqslant 2$. В этом случае в качестве $\xi = \xi(\mu)$ можно взять любую функцию λ. Если же выполнено условие (6) п. 37.3, то уравнение (3) имеет ровно n, с учетом их кратности, малых решений, причем все они разлагаются в сходящиеся ряды по целым или дробным степеням параметра μ. Но тогда это заключение верно и для исходной задачи.

Коэффициенты уравнения разветвления (4) можно подсчитать с помощью (1), (2), (3).

Упражнение 1. Покажите, что $u_{10} = \Gamma z = \varphi$. Получите выражения коэффициентов уравнения разветвления (4):

$$f_{01} = \langle F_{01},\, \psi \rangle, \quad f_{20} = \langle F_{02}\varphi^2,\, \psi \rangle. \tag{5}$$

Различные конкретные приложения теории ветвления читатель может найти в гл. X,[2]. Ограничимся здесь следующим примером. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения с малым параметром μ:

$$x'' + x = \mu \sin t - x^2, \tag{6}$$

$$x(0) = x(\pi) = 0. \tag{7}$$

Здесь $X = \overset{\circ}{C}{}^2\ [0,\, \pi]$ — вещественное пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,\, \pi]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям (7), $\Lambda = E^1$, $Y = C[0,\, \pi]$. Можно принять $\varphi = \psi = \sin t$, $\gamma = z = \frac{2}{\pi} \sin t$.

Далее, главные коэффициенты уравнения разветвления (3) имеют вид (см. (5))

$$f_{01} = \langle \sin t,\, \psi \rangle = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin^2 t\, dt = 1,$$

$$f_{20} = -\langle \sin^2 t,\, \psi\rangle = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^3 t\, dt = -\frac{4}{3}\frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, убывающая часть диаграммы Ньютона состоит из одного отрезка, соединяющего точки $(0,\, 1)$ и $(2,\, 0)$, так что

$$\varepsilon = 1/2 \text{ и } x = x_{1/2}\mu^{1/2} + o(\mu^{1/2}).$$

Для определения $x_{1/2}$ получаем уравнение $f_{01} + f_{20}x_{1/2}^2$, откуда $x_{1/2} = \pm\sqrt{3\pi/8}$. Итак, при $\mu > 0$ задача (6)–(7) имеет два малых решения вида

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{8}\,\mu}\sin t + o(\sqrt{\mu}).$$

Эти решения аналитичны относительно переменной $\sqrt{\mu}$.

Упражнение 2. Найдите точки бифуркации краевой задачи и главные члены ее решений

$$-x'' + \lambda x = x^3, \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

Упражнение 3. Найдите главные члены малых решений интегрального уравнения

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\sin t \sin s)\, x(s)\, ds + \mu \sin^3 t + x^3(t).$$

Г Л А В А X

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ СХЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

§ 38. Нелинейные приближенные схемы

В этом параграфе основные понятия теории абстрактных приближенных схем гл. VII обобщаются на нелинейный случай.

38.1. Аппроксимация, устойчивость и T-сходимость. Пусть, как и в §27, X и Y — банаховы пространства $\{\bar{X}_n\}$ и $\{\bar{Y}_n\}$ — две последовательности банаховых пространств, аппроксимирующих X и Y соответственно, а $\{T_n\} \subset \mathcal{L}\left(X, \bar{X}_n\right)$ и $\{T'_n\} \subset \mathcal{L}\left(Y, \bar{Y}_n\right)$ — две последовательности операторов сужения. Предполагается также, что $\bar{X}_n = T_n X$, $\bar{Y}_n = T'_n Y$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Рассмотрим нелинейный оператор $y = A(x)$, действующий из своей области определения $D(A) \subset X$ в пространство Y. Пусть, далее, $\bar{A}_n :\ \bar{X}_n \to \to \bar{Y}_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ — последовательность нелинейных операторов с областями определения $D\left(\bar{A}_n\right) \subset \bar{X}_n$ и с областями значений, лежащими в $\bar{Y}_n$.

Определение 1. Будем говорить, что на элементе $x \in D(A)$ выполняется *условие аппроксимации*, если

$$T_n x \in D\left(\bar{A}_n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

$$\|\bar{A}_n(T_n x) - T'_n A(x)\|_{\bar{Y}_n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2}$$

Определение 2. Пусть $x \in D(A)$ и выполнено условие (1). Пусть, далее, существуют положительные постоянные $\alpha = \alpha(x)$ и k такие, что

$$\|\bar{A}_n(T_n x) - T'_n A(x)\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \alpha n^{-k}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Тогда будем говорить, что порядок аппроксимации оператора A операторами A_n на элементе x равен k. Очевидно, из (3) следует (2).

Нашей целью является приближенное определение решений уравнения

$$A(x) = 0. \tag{4}$$

Пусть $x_0 \in D(A)$ является решением уравнения (4), т. е. $A(x_0) = 0$. Условия аппроксимации (2) и (3) оператора A операторами $\bar{A}_n$ на решении x_0 записываются так ($T_n x_0 \in D\left(\bar{A}_n\right)$ для всех n):

$$\|\bar{A}_n(T_n x_0)\|_{\bar{Y}_n} \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{5}$$

$$\|\bar{A}_n(T_n x_0)\| A_{\bar{Y}_n} \leqslant \alpha n^{-k}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{6}$$

Заметим, что проверка условий аппроксимации (5) или (6) на практике обычно не требует знания точного решения x_0. Достаточно знать, что x_0 обладает некоторыми свойствами гладкости. Ясно также, что условия (3) или (6) достаточно проверить, начиная с некоторого номера.

Для приближенного решения уравнения (4) мы будем использовать последовательность

$$\bar{A}_n(\bar{x}_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

приближенных уравнений, или, короче, приближенную схему. Решения (7) будем называть *приближенными решениями.*

Определение 3. Будем говорить, что приближенная схема (7) *устойчива* или, короче, что выполнено *условие устойчивости*, если существует непрерывная, строго возрастающая на $[0, +\infty]$ функция $\omega(t)$ такая, что $\omega(0) = 0, \omega(+\infty) = +\infty$, причем для всех $\bar{x}_n', \bar{x}_n'' \in D(\bar{A}_n)$ и любых n выполняется неравенство

$$\|\bar{A}_n(\bar{x}_n') - \bar{A}_n(\bar{x}_n'')\|_{\bar{Y}_n} \geqslant \omega\left(\|\bar{x}_n' - \bar{x}_n''\|_{\bar{X}_n}\right). \tag{8}$$

Наиболее употребительный случай: $\omega(t) = \gamma t, \gamma > 0$, который используется не только в линейном случае (п. 27.4), но и в нелинейном случае, когда удается получить соответствующую оценку.

Обычно условие устойчивости достаточно бывает проверить, начиная с некоторого номера. Для практической его проверки часто удается провести следующие рассуждения. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\bar{A}_n(\bar{x}_n + \bar{z}_n) - \bar{A}_n(\bar{x}_n) = \bar{y}_n. \tag{9}$$

Здесь $\bar{x}_n$ будем считать параметром, а $\bar{z}_n$ — неизвестным. Если удастся получить априорную оценку (т. е. оценку возможных решений $\bar{z}_n$, равномерную относительно $\bar{x}_n$) вида

$$\|\bar{z}_n\|_{\bar{X}_n} \leqslant \eta\left(\|\bar{y}\|_{\bar{Y}_n}\right) \tag{10}$$

с функцией $\eta(t)$, удовлетворяющей тем же условиям, что и $\omega(t)$, то будет выполнено условие устойчивости (8) с $\omega(t) = \eta^{-1}(t)$ (т. е. ω — обратная функция к η). Достаточно в (9) положить

$$\bar{x}_n = \bar{x}_n'', \qquad \bar{x}_n + \bar{z}_n = \bar{x}_n'.$$

Теперь мы можем перенести на нелинейный случай теорему о сходимости приближенной схемы п. 27.5.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *нормы в X_n невырождены;*
2) *существует точное решение*;
3) *при всяком n существует приближенное решение*;
4) *на всяком точном решении выполнено условие аппроксимации*;
5) *выполнено условие устойчивости приближенной схемы.*

Тогда:

α) *точное решение единственно*;

β) *приближенное решение единственно для любого* n;

γ) *имеет место* T*-сходимость приближенных решений к точному.*

Доказательство. Докажем α). Пусть x_1 и x_2 — два решения уравнения (4) и на них выполнено условие аппроксимации (5).

Тогда

$$\|T_n (x_1 - x_2)\|_{\bar{X}_n} \leqslant \omega^{-1} \left(\|\bar{A}_n (T_n x_1) - \bar{A}_n (T_n x_2)\|_{\bar{Y}_n}\right) \leqslant \\ \leqslant \omega^{-1} \left(\|\bar{A}_n (T_n x_1)\|_{\bar{Y}_n} + \|\bar{A}_n (T_n x_2)\|_{\bar{Y}_n}\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

вследствие условия устойчивости, строгого возрастания ω^{-1}, непрерывности ω^{-1} в нуле и условий аппроксимации на x_1 и x_2. Но тогда и $\|T_n (x_1 - x_2)\| \to 0$, $n \to \infty$, и, вследствие условия невырожденности норм в $\bar{X}_n$ (см. определение 2 п. 27.1), имеем $x_1 = x_2$. Утверждение α) доказано.

Утверждение β) сразу же следует из условия устойчивости (проверьте!). Докажем утверждение γ). Воспользовавшись условием устойчивости, равенствами (7) и непрерывностью ω^{-1} в нуле, получаем

$$\|\bar{x}_n - T_n x_0\|_{\bar{X}_n} \leqslant \omega^{-1} \left(\|\bar{A}_n (\bar{x}_n) - \bar{A}_n (T_n x_0)\|_{\bar{Y}_n}\right) = \\ = \omega^{-1} \left(\|\bar{A}_n(T_n x_0)\|_{\bar{Y}_n}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если в условиях теоремы порядок аппроксимации равен* k, *а* $\omega(t) \sim \gamma t^\rho$ *при* $t \to +0$ *(*$\rho > 0$*), то*

$$\|\bar{x}_n - T_n x_0\|_{\bar{X}_n} = O(n^{-k/\rho}), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. По условию (см. (6))

$$\|\bar{A}_n (T_n x_0)\|_{\bar{Y}_n} \leqslant \alpha n^{-k}, \quad \omega^{-1}(\tau) \sim \gamma^{-1} \tau^{1/\rho}.$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\|\bar{x}_n - T_n x_0\|_{\bar{X}_n} \leqslant \omega^{-1}(\alpha n^{-k}) \sim \gamma^{-1}(\alpha n^{-k})^{1/\rho} = O(n^{-k/\rho}).$$

Итак, порядок сходимости $\bar{x}_n$ к x_0 есть k/ρ.

38.2. Сходимость разностной схемы Эйлера. В качестве иллюстрации на применение теоремы предыдущего пункта рассмотрим известную схему Эйлера решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\dot{x} + f(x, t) = 0, \quad 0 < t \leqslant l, \tag{1}$$

$$x(0) = a. \tag{2}$$

Предположим, что в полосе

$$\Pi_l = \{t, x\colon\ 0 \leqslant t \leqslant l, \quad -\infty < x < +\infty\}$$

непрерывны $f(x, t)$ и $f_x(x, t)$, причем найдется постоянная $\beta > 0$ такая, что в Π_l

$$|f_x(x, t)| \leqslant \beta. \tag{3}$$

Можно показать, что в этих условиях задача (1), (2) имеет на $[0, l]$ единственное решение. В самом деле, из условия (3) вытекает, что $f(x, t)$ удовлетворяет в Π_l условию Липшица (4) п. 33.4, и мы можем поэтому воспользоваться теоремой 2 этого же пункта. Запишем задачу (1), (2) в виде операторного уравнения (4) п. 38.1, где оператор

$$A(x) = (\dot{x} + f(x, t);\;\; x(0) - a)$$

действует из банахова пространства $X = C[0, l]$ в банахово пространство $Y = C[0, l] + E^1$, где E^1 — вещественная прямая. Норму элемента $y(t) = (h(t),\ a) \in Y$ зададим так:

$$\|y\| = \|h\|_{C[0, l]} + |a|.$$

Пусть область определения $D(A)$ оператора A состоит из непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций $x(t)$.

Зададим на $[0, l]$ равномерную сетку: $(t_i)_{i=0}^n$, $t_i = i\tau$, $\tau = l/n$. Как и в п. 27.1, операторы сужения T_n зададим так: для всякой функции $x(t) \in C[0, l]$ полагаем

$$T_n x = \big(x(t_i)\big)_{i=1}^n,$$

т. е. $\bar{X}_n$ состоит из столбцов $\bar{x}_n = (x_i)_{i=1}^n$. Норму в $\bar{X}_n$ зададим кубическую:

$$\|\bar{x}_n\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Далее, если $y(t) = (h(t);\ a) \in Y$, то положим

$$T'_n y = \big((y(t_{i-1}))_{i=1}^n;\ a\big).$$

Таким образом, $\bar{Y}_n$ состоит из столбцов $\bar{y}_n = \big(\bar{h}_n;\ a\big)$ высоты $n+1$. Норму в $\bar{Y}_n$ зададим так:

$$\|\bar{y}_n\| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |h_i| + |a|.$$

Выпишем теперь систему разностных уравнений метода Эйлера:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} + f(t_{k-1},\ x_{k-1}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$x_0 = a. \tag{5}$$

Эту систему удобнее переписать так:

$$x_k = x_{k-1} - \tau f(t_{k-1},\ x_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

$$x_0 = a. \tag{7}$$

Из формул (6) видно, что система имеет рекуррентный характер и по известному $x_0 = a$ из нее последовательно определяются $x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, система (4), (5) имеет, и притом единственное, решение.

Перейдем к проверке условия аппроксимации. Приближенные операторы $\bar{A}_n(\bar{x}_n)$ действуют из $\bar{X}_n$ в $\bar{Y}_n$ и задаются формулой

$$\bar{A}_n(\bar{x}_n) = \left(\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} + f(t_{k-1},\, x_{k-1}) \right)_{k=1}^{n};\quad x_0 - a \right).$$

Следовательно, имеем для точного решения

$$\bar{A}_n(T_n x) = \left(\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\tau} + f(t_{k-1},\, x(t_{k-1})) \right)_{k=1}^{n};\ 0 \right) = \\ = \left(\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\tau} - x'(t_{k-1}) \right)_{k=1}^{n};\quad 0 \right).$$

Теперь нетрудно проверить условие аппроксимации:

$$\Delta_n = \|\bar{A}_n(T_n x)\|_{\bar{Y}_n} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\tau} - x'(t_{k-1}) \right| \to 0$$

при $n \to \infty$ вследствие равномерной непрерывности на $[0,\, l]$ производной $x'(t)$. Подробнее это рассуждение проводилось нами в примере п. 27.3.

Если дополнительно решение $x(t)$ задачи (1), (2) имеет на $(0,\, l)$ вторую производную, ограниченную на $(0,\, l)$:

$$\gamma_2(x) = \sup_{(0,\, l)} |x''(t)| < +\infty, \tag{8}$$

то оценка может быть улучшена. В этом случае, как и в примере п. 27.3,

$$\Delta_n \leqslant n l^{-1} \max \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |x'(t_{k-1}) - x'(s)|\, ds \leqslant n l^{-1} \gamma_2(x) \frac{l^2}{2n^2} = \frac{\gamma_2(x)\, l}{n}.$$

Следовательно, если точное решение $x(t)$ достаточно гладко, то разностная схема Эйлера имеет 1-й порядок аппроксимации.

Займемся теперь проверкой условия устойчивости. Докажем, что для любых $\bar{x}_n$ справедлива следующая априорная оценка:

$$\|\bar{z}_n\| \leqslant c\left\{\|\bar{h}_n\| + |a|\right\} \tag{9}$$

для всех возможных решений следующей разностной задачи:

$$\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} + f(t_{k-1},\, x_{k-1} + z_{k-1}) - f(t_{k-1},\, x_{k-1}) = h_{k-1}, \tag{10}$$

$$k = 1, \ldots, n,$$

$$z_0 = a,$$

где параметры $x_0, x_1, \ldots, x_n$ совершенно произвольны. Для этой цели запишем (10) в следующем виде:

$$z_k = (1 - \tau\beta_{k-1})\, z_{k-1} + \tau h_{k-1}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{11}$$
$$z_0 = a,$$

где, согласно формуле конечных приращений,

$$\beta_{k-1} = \int\limits_0^1 f_x(t_{k-1},\ x_{k-1} + \sigma z_{k-1})\, d\sigma.$$

Хотя β_{k-1} зависят и от x_{k-1}, и от z_{k-1}, вследствие ограничения (3)

$$|\beta_{k-1}| \leqslant \beta, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, для z_k справедлива рекуррентная система

$$|z_k| \leqslant (1 + \beta\tau)\, |z_{k-1}| + \tau\, |h_{k-1}|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned} &|z_1| \leqslant (1 + \beta\tau)\, |a| + \tau\, \|\bar{h}_n\|, \\ &|z_2| \leqslant (1 + \beta\tau)^2\, |a| + [(1 + \beta\tau) + 1]\, \tau\, \|\bar{h}_n\|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|z_n| \leqslant (1 + \beta\tau)^n\, |a| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \beta\tau)^k\, \tau\, \|\bar{h}_n\|. \end{aligned}$$

Так как

$$(1 + \beta\tau)^k = \left(1 + \frac{\beta l}{n}\right)^k \leqslant \left(1 + \frac{\beta l}{n}\right)^n \leqslant e^{\beta l},$$

а

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{\beta l}{n}\right) \frac{l}{n} = \frac{(1 + \beta l/n)^n - 1}{(1 + \beta l/n) - 1}\, \frac{l}{n} \leqslant \frac{e^{\beta l} - 1}{\beta},$$

то имеем следующую оценку для $\bar{z}_n$:

$$\|\bar{z}_n\| \leqslant e^{\beta l} |a| + \frac{e^{\beta l} - 1}{\beta}\, \|\bar{h}_n\|. \tag{12}$$

Отсюда вытекает доказываемая оценка (9), в которой можно принять

$$c = \max\left(e^{\beta l},\ \ \frac{e^{\beta l} - 1}{\beta}\right).$$

Тем самым доказано условие устойчивости (8) п. 38.1 с $\omega\,(t) = c^{-1} t$.

Из теоремы п. 38.1 вытекает теперь сходимость разностной схемы Эйлера. Если дополнительно выполнено условие (9), то из следствия из теоремы п. 38.1 мы получаем такой вывод: разностная схема Эйлера имеет первый порядок точности (сходится со скоростью $O(1/n)$).

38.3. Улучшенная схема Эйлера. Рассмотрим снова задачу Коши (1), (2) п. 38.2 в тех же предположениях относительно функции $f\,(x,\,t)$. Прежними останутся также пространства X, Y, $\bar{X}_n$, $\bar{Y}_n$ и операторы сужения. Однако теперь мы рассмотрим следующую разностную схему:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} + \frac{1}{2}\left[f\,(t_{k-1},\,x_{k-1}) + f\,(t_k,\,x_k)\right] = 0, \tag{1}$$

$$x_0 = a. \tag{2}$$

Схема эта, в отличие от схемы Эйлера, является неявной: x_k входит в k-е уравнение, которое нелинейно и не может быть так просто, как в п. 38.2, разрешено относительно x_k. Преимуществом рассматриваемой схемы является ее более высокий порядок точности, а значит, и сходимости. Для практического решения системы (1), (2) используются итерационные методы (см. [1]). Неявные схемы часто применяются в приложениях.

Целью настоящего пункта является изучение не схемы (1), (2), а близкой к ней явной схемы, которая называется *улучшенной схемой Эйлера* и представляет собой простейшую из схем Рунге–Кутта (см.[2, с. 450]).

Итак, рассмотрим разностную схему:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\tau} + \frac{1}{2}\left[f\,(t_{k-1},\,x_{k-1}) + f\,(t_k,\,x_k^*)\right] = 0, \tag{3}$$

$$x_k^* = x_{k-1} - \tau f\,(t_{k-1},\,x_{k-1})\,, \qquad k = 1,\,\ldots,\,n, \tag{4}$$

$$x_0 = a. \tag{5}$$

Проверим условие аппроксимации. Предположим, что функция $f\,(t,\,x)$ дважды непрерывно дифференцируема в полосе Π_l, причем в этой полосе функция f и все ее частные производные до второго порядка включительно ограничены. Отсюда вытекает, что решение $x(t)$ задачи (1), (2) п. 38.2 трижды непрерывно дифференцируемо на $[0,\,l]$. Функция $x(t)$ удовлетворяет на $[0,\,l]$ тождеству

$$\dot{x}\,(t) + f\,(t,\,x\,(t)) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество по t и подставляя затем $x(t)$ из (6), получим еще одно тождество:

$$\ddot{x}(t) + f_t(t,\,x(t)) - f_x(t,\,x(t))\,f(t,\,x(t)) \equiv 0. \tag{7}$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$F\,(t,\,\tau) \equiv \frac{x\,(t+\tau) - x\,(t)}{\tau} + \\ + \frac{1}{2}\Big[f\,(t,\,x\,(t)) + f\big(t+\tau,\,x\,(t) - \tau f\,(t,\,x\,(t))\big)\Big]\,. \tag{8}$$

Эта функция зависит от параметров $\tau > 0$ и определена по t на $[0,\,l-\tau]$. Если через $\bar{F}_n\,(\bar{x}_n)$ обозначить нелинейный оператор, соответствующий схеме (3)–(4), то нетрудно усмотреть, что

$$\bar{F}_n\,(T_n x) = \left(\Phi\,(t_{k-1},\,\tau)\right)_{k=1}^n.$$

По формуле Тейлора имеем при $\tau \to 0$

$$\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} = \dot{x}(t) + \frac{1}{2}\tau\ddot{x}(t) + O(\tau^2),$$

$$f[t+\tau f(t, x(t))] = f(t, x(t)) + f_t(t, x(t))\,\tau - \\ - f_x(t, x(t))\,\tau f(t, x(t)) + O(\tau^2).$$

Учитывая тождества (6), (7) и формулу (8), получим, что при $\tau \to 0$ $F(t, \tau) = O(\tau^2)$, откуда $\|\bar{F}_n(T_n x)\| = O(1/n^2)$ при $n \to \infty$. Итак, улучшенная схема Эйлера имеет второй порядок аппроксимации (точности).

Проверим теперь условие устойчивости. Рассмотрим вспомогательную разностную задачу

$$\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} + \frac{1}{2}[f(t_{k-1}, x_{k-1}+z_{k-1}) - f(t_{k-1}, x_{k-1})] + \\ + \frac{1}{2}[f(t_k, x_{k-1}+z_{k-1}-\tau f(t_{k-1}, x_{k-1}-z_{k-1})) - \\ - f(t_k, x_{k-1}-\tau f(t_{k-1}, x_{k-1})] = h_k, \qquad k=1, \ldots, n,$$

$$z_0 = \delta.$$

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(t_{k-1}, x_{k-1}+z_{k-1}) - f(t_{k-1}, x_{k-1}) = \beta_{k-1} z_{k-1},$$

где

$$\beta_{k-1} = f_x(t_{k-1}, x_{k-1}+\theta_{k-1} z_{k-1}),$$

а $0 < \theta_{k-1} < 1$.

Аналогично

$$f(t_k, x_{k-1}+z_{k-1}-\tau f(t_{k-1}, x_{k-1}+z_{k-1})) - \\ - f(t_k, x_{k-1}-\tau f(t_{k-1}, x_{k-1})) = \widetilde{\beta}_{k-1}(1-\tau\beta_{k-1})\,z_{k-1},$$

где

$$\widetilde{\beta}_{k-1} = f_x(t_k, x_{k-1} + \widetilde{\theta}_{k-1}\{z_{k-1} - \\ - \tau[f(t_{k-1}, x_{k-1}+z_{k-1}) - f(t_{k-1}, x_{k-1})]\})$$

и $0 < \widetilde{\theta}_{k-1} < 1$.

Систему для определения $z_1, \ldots, z_n$ можно теперь записать в таком виде:

$$z_k = \left[1 - \frac{\tau}{2}\beta_{k-1} - \frac{\tau}{2}\widetilde{\beta}_{k-1}(1-\tau\beta_{k-1})\right] z_{k-1} + \tau h_k, \qquad k=1, \ldots, n,$$

$$z_0 = \delta.$$

Отсюда, полагая $\max\limits_{\Pi_l} |f_x| = \beta$, получим $|\beta_k| \leqslant \beta$, $|\widetilde{\beta}_k| \leqslant \beta$ и, следовательно,

$$|z_k| \leqslant \left(1 + \tau\beta + \frac{\tau^2}{2}\,\beta^2\right) |z_{k-1}| + \tau|h_k|, \quad k = 1, \ldots, n, \quad |z_0| = |\delta|.$$

Но $1 + \tau\beta + \left(\tau^2/2\right)\,\beta^2 \leqslant e^{\beta\tau} = e^{\beta l/n}$, откуда

$$|z_k| \leqslant e^{\beta l/n}|z_{k-1}| + \tau|h_k|, \quad k = 1, \ldots, n, \quad |z_0| = |\delta|.$$

Отсюда последовательно находим

$$\begin{aligned}
&|z_1| \leqslant e^{\beta l/n}|\delta| + \tau|h_0|,\\
&|z_2| \leqslant e^{2\beta l/n}|\delta| + \tau e^{\beta l/n}|h_1| + \tau|h_0|,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|z_n| \leqslant e^{\beta l}|\delta| + \tau\left(1 + e^{\beta l/n} + \ldots + e^{\beta l(n-1)/n}\right)\|\bar{h}_n\|.
\end{aligned}$$

Осталось заметить, что $\sum\limits_{i=0}^{n-1} e^{i\beta l/n}\,(1/n)$ есть интегральная сумма для $\int\limits_0^1 e^{\beta x}\,dx$ и, следовательно, не превосходит самого интеграла $\left(e^{\beta i} - 1\right)/\beta$. Итак,

$$\|\bar{z}_n\| \leqslant e^{\beta l}|\delta| + \frac{e^{\beta l} - 1}{\beta}\,\|\bar{h}_n\|.$$

Это — оценка (12) предыдущего пункта. Устойчивость доказана. Следовательно, улучшенная схема Эйлера сходится со скоростью $O(1/n^2)$ при $n \to \infty$.

38.4. О методе Галёркина решения нелинейных уравнений. Для решения нелинейного уравнения

$$A\,(x) = 0 \tag{1}$$

с нелинейным оператором A, действующим из области определения $D\,(A) \subset X$ в Y, где X и Y — банаховы пространства, можно воспользоваться методом Галёркина (см. § 30). Пусть в X заданы последовательность подпространств $X_n \subset D\,(A)$ и последовательность операторов $\{P_n\}$, $P_n\colon\ X \to X$, такие, что $D\,(A) \subset D\,(P_n)$, а $P_n D\,(A) = X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через AX_n образ подпространства X_n при отображении A. Зададим при каждом натуральном n оператор $Q_n\colon\ Y \to Y$ с областью определения $D\,(Q_n)$ такой, что $X_n \subset D\,(Q_n)$.

Галёркинские приближения $x_n \in X_n$ решения x уравнения (1) разыскиваются из последовательности уравнений (приближенной схемы Галёркина)

$$Q_n A\,(x_n) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

В соответствии с определениями п. 38.1 введем следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что на решении x_0 уравнения (1) выполнено *условие аппроксимации*, если

$$\|Q_n A(P_n x_0)\| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3}$$

Определение 2. Галеркинская схема (2) называется *устойчивой,* если для любых $x'_n, x''_n \in X_n$ при всех n справедливо неравенство

$$\|Q_n A\,(x'_n) - Q_n A\,(x''_n)\,\| \geqslant \omega\,(\|x'_n - x''_n\|)\,, \tag{4}$$

где $\omega\,(t)$ строго возрастает на $[0,\,+\infty)$, $\omega\,(0) = 0$, $\omega\,(+\infty) = +\infty$.

Из теоремы п. 38.1 вытекает следующее утверждение, справедливость которого мы предлагаем проверить читателю.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *решение* x_0 *уравнения* (1) *существует и единственно*;

2) x_0 *является предельной точкой последовательности подпространств* $\{X_n\}$ (см. определение 1 п. 30.2);

3) *на* x_0 *выполнено условие аппроксимации*;

4) *галеркинская схема* (2) *устойчива*;

5) *галеркинская схема* (2) *имеет единственное решение* x_n.

Тогда $x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty$.

Сделаем теперь замечание общего характера.

На практике операторы P_n и Q_n обычно выбирают конечномерными, так что совпадают следующие размерности:

$$\dim X_n = \dim\, Q_n A X_n.$$

Пусть это условие выполнено. Выберем в X_n базис $\bar{\varphi}^{(n)} = \{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^{m_n}$, где m_n — размерность X_n. Индекс n вверху означает, что, вообще говоря, в каждом X_n берется свой базис. Пусть, далее, система $\bar{\gamma}^{(n)} = \{\gamma_i^{(n)}\}_{i=1}^{m_n} \subset$ $\subset X^*$ биортогональна системе $\bar{\varphi}^{(n)}$; тогда можно принять

$$P_n = \sum_{i=1}^{m_n} \langle\,\cdot\,,\,\gamma_i^{(n)}\rangle \varphi_i^{(n)}. \tag{5}$$

Аналогично, операторы Q_n зададим в виде

$$Q_n = \sum_{j=1}^{m_n} \langle\,\cdot\,,\,\psi_j^{(n)}\rangle z_j^{(n)}, \tag{6}$$

где линейные функционалы $\psi_j^{(n)} \in Y^*$ $(j = 1,\,\ldots,\,m_n)$ должны быть определены на множестве AX_n, элементы $z_j^{(n)}$ принадлежат Y $(j = 1,\,\ldots,\,m_n)$; при этом системы $\bar{z}^{(n)} = \{z_j^{(n)}\}_{j=1}^{m_n}$ и $\bar{\psi}^{(n)} = \{\psi_j^{(n)}\}_{j=1}^{m_n}$ выбираются взаимно биортогональными. Подчеркнем, что операторы Q_n могут быть не определены всюду в Y и, значит, не быть проекторами.

В этих обозначениях схема Галёркина реализуется следующим образом. Галеркинское приближение x_n разыскивается в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{m_n} \xi_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}, \tag{7}$$

причем коэффициенты $\xi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ разыскиваются из нелинейной системы n уравнений с n неизвестными

$$\langle \psi_j^{(n)}, A(x_n) \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, m_n. \tag{8}$$

В следующем параграфе будут изложены тонкие результаты, связанные с исследованием монотонных операторов с помощью метода Галёркина. Здесь же мы ограничимся одним элементарным примером.

Рассмотрим снова краевую задачу

$$\dot{x} + f(t, x) = 0, \quad 0 < t \leqslant l, \tag{9}$$

$$x(0) - a = 0 \tag{10}$$

и предположениях п. 38.2. Задачу эту запишем в операторном виде (1), где оператор $A\colon \ \mathcal{L}(0, l) \to \mathcal{L}(0, l) \dot{+} E^1$ задается на функциях $x(t) \in D(A) \equiv \equiv W_1^1(0, l)$ формулой

$$A(x) \equiv (\dot{x}(t) + f(t, x(t)); \ x(0) - a). \tag{11}$$

Напомним (см. п. 9.1), что пространство Соболева $W_1^1(0, l)$ состоит из абсолютно интегрируемых по Лебегу на $(0, l)$ функций, имеющих на $(0, l)$ обобщенную производную в смысле Соболева. Поскольку $W_1^1(0, l)$ вложено в $C[0, l]$, то элементы $W_1^1(0, l)$ можно считать обычными непрерывными функциями. Поэтому в формуле (11) определены все члены:

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{L}(0, l), \quad f(t, x(t)) \in C[0, l] \quad \text{и} \quad x(0).$$

Упражнение 1. Докажите вложение $W_1^1(0, l)$ в $C[0, l]$, следуя п. 9.4.

Для нахождения приближенного решения задачи (9), (10) воспользуемся методом Галёркина.

Пусть X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — подпространство кусочно линейных, непрерывных на $[0, l]$ функций, допускающих разрывы производной только в узлах равномерной сетки

$$\{t_k^{(n)}\}_{k=0}^n, \quad t_k = k\tau, \quad \tau = ln^{-1}.$$

Базисом в X_{n+1} является система функций $\bar{\varphi}^{(n)} = \{\varphi_k^{(n)}(t)\}_{k=0}^n$, введенная в п. 30.9 (см. рис. 15). Нетрудно убедиться в том, что $X_n \subset W_1^1(0, l)$. Для построения проекторов P_n рассмотрим систему линейных функционалов $\bar{\gamma}^{(n)} = \{\gamma_s^{(n)}\}_{s=0}^n$, которые определены на функциях $x(t)$ из $W_1^1(0, l)$ следующим образом:

$$\langle x(t), \gamma_s^{(n)} \rangle = x(t_s^{(n)}), \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Упражнение 2. Проверьте биортогональность систем $\bar{\varphi}^{(n)}$ и $\bar{\gamma}^{(n)}$.
Таким образом, операторы P_n задаются формулами

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \langle \cdot\,,\, \gamma_k^{(n)} \rangle \varphi_k^{(n)}(t). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь множество AX_n. Для этого возьмем галеркинское приближение

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k^{(n)} \varphi_k(t), \tag{13}$$

которое, согласно п. 29.1, можно трактовать как кусочно линейную интерполяцию со входными данными

$$\bar{x}_n = (x_k^{(n)})_{k=0}^{(n)}. \tag{14}$$

Следовательно, $x_n(t)$ можно записать еще в таком виде (см. формулу (4) п. 29.1):

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_{i-1}^{(n)} + \frac{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}}{\tau} \left(t - t_{i-1}^{(n)}\right) \right] \theta_i(t), \tag{15}$$

где $\theta_i(t) = 1$ на $[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}[$, $\theta_i(t) = 0$ вне $[t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}[$, т. е. $\theta_i(t)$ — характеристическая функция полуинтервала $[t_{i-1}, t_i[$.

Обобщенная производная $x_n(t)$ равна

$$x_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}}{\tau} \theta_i(t) \tag{16}$$

и представляет собой кусочно постоянную функцию на $[0, l]$, а $f(t, x_n(t))$ непрерывна на $[0, l]$. Доопределим теперь линейные функционалы $\gamma_s^{(n)}$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$ на функции $z(t)$, допускающие в узлах сетки разрывы 1-го рода. Положим

$$\langle z(t)\,,\, \gamma_s^{(n)} \rangle = z(t_s^n + 0), \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{17}$$

Наконец, зададим операторы Q_n формулой (см. (11))

$$Q_n A(x_n) = \sum_{s=0}^{n-1} \langle \dot{x}_n(t) + f(t, x_n(t)\,,\, \gamma_s^{(n)}) \rangle \varphi_s^{(n)}(t) + [x_0(0) - a]. \tag{18}$$

Согласно формулам (13), (15)–(18) имеем

$$Q_n A(x_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}}{\tau} + f(t_{k-1}^{(n)}, x_{k-1}^{(n)}) \right\} \varphi_{k-1}^{(n)}(t) + [x_0(0) - a]. \tag{19}$$

Система (2) в данном случае принимает вид (опускаем индекс n вверху)

$$\frac{x_s - x_{s-1}}{\tau} + f\,(t_{s-1},\, x_{s-1}) = 0, \qquad s = 1,\, \ldots,\, n, \tag{20}$$

$$x_0 - a = 0 \tag{21}$$

и совпадает с разностной схемой Эйлера (4), (5) п. 38.2. В том же пункте доказана сходимость разностной схемы Эйлера

$$\sigma_n = \max |x_k^{(n)} - x(t_k^{(n)})| \to 0 \quad \text{при } \ n \to +\infty, \tag{22}$$

где $\{x_k^{(n)}\}$ — решение системы (20), (21), а $x(t)$ — решение задачи (9), (10). Отсюда нетрудно получить сходимость нашей галеркинской схемы в $\mathcal{L}\,(0,\, l)$.

Заметим, что (см. (22) и (12))

$$\|x_n\,(t) - P_n x\,(t)\,\|_{\mathcal{L}(0,\,l)} =$$

$$= \int\limits_0^l \left| \sum_{k=1}^n x_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}\,(t) - \sum_{k=1}^n x(t_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)}\,(t) \right| dt \leqslant \sigma_n \sum_{k=1}^n \int\limits_0^l \varphi_k^{(n)}(t)\,dt.$$

Упражнение 3. Покажите, что

$$\sum_{k=1}^n \int\limits_0^l \varphi_k^{(n)}\,(t)\;dt = l.$$

Из упражнения и оценок (22) и (23) следует, что $\|x_n - P_n x\|_{\mathcal{L}(0,\,l)} \to$ $\to 0$, при $n \to \infty$. Осталось заметить, что $\|P_n x - x\| \to 0$, $n \to \infty$, для функций $x\,(t) \in W_1^1\,(0,\, l)$ (проверьте!). Нами обоснована сходимость так называемого *метода ломаных Эйлера.*

§ 39. Монотонные операторы

В функциональном анализе имеется несколько направлений, связанных с различными обобщениями на бесконечномерный случай понятия монотонной функции. Одно из таких обобщений связано, например, с введением в банаховом пространстве понятия частичной упорядоченности. Излагаемая здесь теория монотонных операторов является одной из новых глав функционального анализа, получившей наиболее глубокие и интересные, наш взгляд, приложения в теории уравнений с частными производными.

39.1. Понятия монотонного и коэрцитивного операторов. Начнем со следующей элементарной леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $E^1 = (-\infty, +\infty)$, со значениями в E^1. Если*

$$(x-y)\,[f(x)-f(y)] \geqslant 0, \tag{1}$$

$$xf(x) \to \infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \tag{2}$$

то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

имеет решение. Если условие (1) *выполнено в усиленном смысле*:

$$[f(x)-f(y)]\,(x-y) > 0 \ \text{ при } \ x \neq y. \tag{4}$$

то уравнение (3) *имеет при $x > y$ единственное решение.*

Доказательство. Пусть $x > y$; тогда из (1) следует, что $f(x) \geqslant f(y)$. т.е. $f(x)$ не убывает на E^1. Далее, из условий (2) и (1) вытекает, что существуют числа a и b такие, что $a < b$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (проверьте!). Рассмотрим $f(x)$ на $[a, b]$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции (см. [18]) существует $\xi \in (a, b)$, в которой $f(\xi) = 0$.

Если выполнено условие (4), то $f(x)$ строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$ и тогда нуль ξ функции $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$ единствен. Лемма 1 доказана.

Заметим, что требование непрерывности $f(x)$ в лемме 1 существенно. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & \text{при } x < -1, \\ x + 2 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^7 + 4 & \text{при } x > 1, \end{cases} \tag{5}$$

не являясь непрерывной на E^1, удовлетворяет остальным условиям леммы 1, но для этой функции уравнение (3) не имеет решения.

Обобщая ситуацию, рассмотренную в лемме, дадим теперь следующие общие определения.

Пусть X — вещественное сепарабельное нормированное пространство, а X^* — пространство, сопряженное к X. Рассмотрим нелинейный оператор A, действующий из X и X^* $(D(A) = X,\ R(A) \subset X^*)$. Как обычно, через $\langle x, f\rangle$ мы обозначаем значение линейного функционала $f \in X^*$ на элементе $x \in X$. Обобщением условия (1) является следующее определение.

Определение 1. Оператор $A\colon\ X \to X^*$ называется *монотонным*, если для любых $x, y \in X$

$$\langle x-y,\ A(x)-A(y)\rangle \geqslant 0. \tag{6}$$

Аналогично обобщается условие (4).

Определение 2. Оператор $A\colon\ X \to X^*$ называется *строго монотонным,* если он монотонный и равенство (6) возможно только при $x = y$.

Наконец, в приложениях оказывается полезным следующее определение.

Определение 2. Оператор $A\colon\ X \to X^*$ называется *сильно монотонным,* если для всех $x,\ y \in X$

$$\langle x-y,\ A(x)-A(y)\rangle \geqslant c(\|x-y\|)\,\|x-y\|, \tag{7}$$

где $c(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, заданная при $t \geqslant 0$ и такая, что $c(0)=0$, $c(t)>0$ при $t>0$, $c(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Упражнение 1. Пусть функция $f\colon\ E^1 \to E^1$ всюду на E^1 дифференцируема, причем $f'(x) \geqslant \delta$ для всех $x \in E^1$, где δ — постоянная. Покажите, что для всех $x,\ y \in E^1$

$$(x-y)\,[f(x)-f(y)] \geqslant \delta|x-y|^2$$

и, значит, f — монотонный оператор, если $\delta=0$, и сильно монотонный, если $\delta>0$ $(c(t)=\delta(t))$.

Упражнение 2. Покажите, что функция $f(x)=x^3+x-1$, $x\in E^1$, является сильно монотонным оператором.

Пример. Пусть задана функция (оператор) из E^2 в E^2: $A(x) = (f_1(x_1,\,x_2),\ f_2(x_1,\,x_2))$ для всех $x=(x_1,\,x_2)\in E^2$. Пусть, далее, координатные функции f_1 и f_2 имеют всюду в E^2 частные производные $\partial f_i/\partial x_j$ $(i,\,j=1,\,2)$, причем для всех $(x_1,\,x_2)\in E^2$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \geqslant \alpha,\quad i=1,\,2;\qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right| \leqslant \beta,\quad i\neq j;\quad i,\,j=1,\,2,$$

где α и β — постоянные. Докажем, что при $\beta\leqslant\alpha$ оператор $A(x)$ является монотонным в E^2, а если $\beta<\alpha$, то $A(x)$ является сильно монотонным в E^2 оператором, причем $c(t)=(\alpha-\beta)\,t$.

По формуле о конечных приращениях Лагранжа найдутся $\xi_1,\,\xi_2$ такие, что

$$f_1(x_1,\,x_2)-f_1(y_1,\,y_2) = [f_1(x_1,\,x_2)-f_1(y_1,\,x_2)] + [f_1(y_1,x_2) - \\ - f_1(y_1,\,y_2)] = \frac{\partial f_1(\xi_1,\,x_2)}{\partial x_1}\,(x_1-y_1) + \frac{\partial f_1(y_1,\,\xi_2)}{\partial x_2}\,(x_2-y_2).$$

Следовательно,

$$(x_1-y_1)\,[f_1(x_1,\,x_2)-f_1(y_1,\,y_2)] = \frac{\partial f_1(\xi_1,\,x_2)}{\partial x_1}\,(x_1-y_1)^2 + \\ + \frac{\partial f_1(y_1,\,\xi_2)}{\partial x_2}\,(x_1-y_1)\,(x_2-y_2) \geqslant \alpha|x_1-y_1|^2 - \beta|x_1-y_1|\,|x_2-y_2| \geqslant \\ \geqslant \alpha|x_1-y_1|^2 - \frac{1}{2}\,\beta|x_1-y_1|^2 - \frac{1}{2}\,\beta|x_2-y_2|^2.$$

Итак, доказано неравенство (мы воспользовались элементарным неравенством $|ab| \leqslant \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2$)

$$(x_1 - y_1)\left[f_1(x_1, x_2) - f_1(y_1, y_2)\right] \geqslant \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)|x_1 - y_1|^2 - \frac{\beta}{2}|x_2 - y_2|^2.$$

Аналогично имеем

$$(x_2 - y_2)\left[f_2(x_1, x_2) - f_2(y_1, y_2)\right] \geqslant -\frac{\beta}{2}|x_1 - y_1|^2 + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)|x_2 - y_2|^2.$$

Складывая полученные неравенства, получим

$$(x - y,\ A(x) - A(y)) \geqslant (\alpha - \beta)\,\|x - y\|^2.$$

Итак, доказано, что оператор $A(x)$ является сильно монотонным оператором в E^2 с $c(t) = (\alpha - \beta)\,t$, если $\alpha > \beta$. Если $\alpha = \beta$, то $A(x)$ — монотонный оператор.

Упражнение 3. Докажите, что функция

$$A(x) = (x_1^5 + 3x_1 - 2x_2 + 1,\ 2x_2^7 + x_1 + 5x_2 - 4),$$

где $x = (x_1, x_2) \in E^2$ является сильно монотонным оператором в E^2.

Следующее определение обобщает условие (2) леммы 1.

Определение 4. Оператор $A\colon\ X \to X^*$ называется *коэрцитивным*, если для всех $x \in X$

$$\langle x,\ A(x)\rangle \geqslant \gamma(\|x\|)\,\|x\|, \tag{8}$$

где $\gamma(t)$ — функция, заданная при $t \geqslant 0$ и такая, что $\gamma(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

В дальнейшем мы будем использовать функции $c(t)$ и $\gamma(t)$ из определений 3 и 4, не оговаривая их существование для сильно монотонного и коэрцитивного операторов соответственно. Впрочем, между этими функциями имеется связь, которая устанавливается в следующей лемме.

Лемма 2. *Если оператор* $A\colon\ X \to X^*$ *сильно монотонный, то* A — *коэрцитивный, причем можно принять*

$$\gamma(t) = c(t) - \|A(0)\|.$$

Доказательство. Из условия (7) при $y = 0$ имеем

$$\langle x,\ (x) - A(0)\rangle \geqslant c(\|x\|)\,\|x\|,$$

откуда

$$\langle x,\ A(x)\rangle \geqslant c(\|x\|)\,\|x\| + \langle x,\ A(0)\rangle \geqslant c(\|x\|)\,\|x\| - \|x\|\,\|A(0)\|,$$

ибо $|\langle x,\, A(0)\rangle| \leqslant \|x\|\,\|A(0)\,\|$, и, значит, $\langle x,\, A(0)\rangle \geqslant -\|x\|\,\|A(0)\,\|$. Полученное неравенство доказывает утверждение леммы 2.

З а м е ч а н и е. Если оператор $A\colon\ X \to X^*$ коэрцитивен, то $\|A(x)\,\| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$.

Действительно, имеем оценку

$$\|A(x)\,\|\,\|x\| \geqslant \langle x,\, A(x)\rangle \geqslant \gamma(\|x\|)\,\|x\|,$$

т. е. $\|A(x)\,\| \geqslant \gamma(\|x\|) \to \infty$, когда $\|x\| \to \infty$.

В заключение пункта приведем элементарную лемму о функции $c(t)$, фигурирующей в определении сильной монотонности.

Л е м м а 3. *Пусть дана непрерывная неотрицательная функция* c : $[0,\, +\infty] \to E^1$ *такая, что* $c(0) = 0$, $c(t) > 0$ *при* $t > 0$ *и* $c(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$. *Тогда из того, что* $t_m \geqslant 0$, $m = 1,\, 2, \ldots$, *и* $c(t_m) \to 0$ *при* $m \to \infty$, *вытекает, что* $t_m \to 0$ *при* $m \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_m = c(t_m) \to 0$ при $m \to \infty$, а $\{t_m\}$ не сходится к нулю. Тогда найдутся число $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{t_{m'}\}$ последовательности $\{t_m\}$ такие, что $t_{m'} \geqslant \delta > 0$ для всех m'; $\{t_{m'}\}$ ограничена. В противном случае нашлась бы ее подпоследовательность $\{t_{m''}\}$, $t_{m''} \to +\infty$, а тогда и $c\{t_{m''}\} \to +\infty$, что невозможно, ибо $\alpha_{m''} \to 0$. Итак, $\{t_{m'}\}$ ограничена. Тогда по теореме Больцано–Вейерштрасса найдется ее сходящаяся подпоследовательность $\{t_{m''}\}$, $t_{m''} \to t_0$, $m'' \to \infty$. По непрерывности $c(t_{m''}) \to c(t_0) > 0$, $m'' \to \infty$, а это тоже невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

39.2. Теоремы о существовании решений в конечномерном случае. Докажем две теоремы о существовании решений уравнений с монотонными операторами в евклидовом пространстве E^n. Эти теоремы послужат базой для рассмотрения в последующих пунктах бесконечномерного случая.

Следующая теорема является непосредственным обобщением леммы 1 предыдущего пункта на случай сильно монотонного оператора в E^n.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $A\colon\ E^n \to E^n$ *и непрерывен всюду в* E^n. *Если для всех* $x,\, y \in E^n$

$$(x - y,\ A(x) - A(y)) \geqslant c\|x - y\|^2, \tag{1}$$

где $c > 0$ *— некоторая постоянная, то уравнение*

$$A(x) = 0 \tag{2}$$

имеет единственное решение $x^* \in E^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство теоремы индукцией по размерности n пространства E^n. При $n = 1$ доказываемое утверждение верно. Действительно, условие (1) обеспечивает выполнение условий (3) и (2) леммы 1 п. 39.1 (условие (2) этой леммы следует из леммы 2 п. 39.1). Итак, при $n = 1$ теорема 1 справедлива. Допустим теперь, что она справедлива в E^{k-1}, $k \geqslant 2$, и покажем, что тогда она будет верна и в E^k. Пусть $A\colon\ E^k \to E^k$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (при $n = k$). Рассмотрим в E^k стандартный базис $\{e_i\}_{i=1}^k$ (т. е. $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^k$ $(i = 1, \ldots, k)$, δ_{ij} — символ Кронекера). Тогда в базисе $\{e_i\}_{i=1}^k$ оператор A задается набором своих координатных функций:

$$A(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^k, \qquad \text{где} \quad x = \sum_{j=1}^k x_j e_j.$$

Зафиксируем любое $t \in E^1$ и рассмотрим оператор $A_t : \; E^{k-1} \to E^{k-1}$, определяемый для всех $x = \sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i e_i$ следующей формулой:

$$A_t(x) = (f_i(x + te_k))_{i=1}^{k-1}.$$

Очевидно, оператор A_t непрерывен на E^{k-1} и для любых $x, y \in E^{k-1}$, согласно условию (1), для него выполняется следующее неравенство:

$$(x - y, \; A_t(x) - A_t(y)) = (t - t)\,[f_k(x + te_k) - f_k(y + te_k)] + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} (x_i - y_i)\,[f_i(x + te_k) - f_i(y + te_k)] \geqslant c\|x - y\|^2.$$

Это означает, что оператор A_t также удовлетворяет условию (1). По индуктивному предположению система уравнений

$$f_i(x + te_k) = 0, \qquad i = 1, \ldots, k - 1, \tag{3}$$

имеет единственное решение $\widehat{x} \in E^{k-1}$. Это утверждение справедливо при любом $t \in E^1$. Следовательно, определена вектор-функция $\widehat{x}\colon \; E^1 \to E^{k-1}$, ставящая в соответствие каждому $t \in E^1$ решение $\widehat{x}(t) = \sum\limits_{i=1}^{k-1} \widehat{x}_i(t)\, e_i$ системы уравнений (3), или, короче, уравнения $A_t(x) = 0$.

Покажем теперь, что функция $\widehat{x}(t)$ непрерывна на E^1. Для всех $t, s \in E^1$ имеем

$$0 \equiv (\widehat{x}(t) - \widehat{x}(s), \; A_t(\widehat{x}(t)) - A_s(\widehat{x}(s))) = \\ = (\widehat{x}(t) - \widehat{x}(s), \; A_t(\widehat{x}(t)) - A_t(\widehat{x}(s))) + J(t, s) \geqslant \\ \geqslant c\|\widehat{x}(t) - \widehat{x}(s)\|^2 + J(t, s),$$

где $J(t, s) = (\widehat{x}(t) - \widehat{x}(s), \; A_t(\widehat{x}(s)) -_s (\widehat{x}(s))) \geqslant -\|\widehat{x}(t) - \widehat{x}(s)\|\, \|A_t(\widehat{x}(s)) - A_s(\widehat{x}(s))\|$.

Таким образом, для всех $t, s \in E^1$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{x}(t) - \widehat{x}(s)\| \leqslant c^{-1}\|A_t(\widehat{x}(s)) - A_s(\widehat{x}(s))\|$$

(или $\widehat{x}(t) = \widehat{x}(s)$). Но при фиксированном s при $t \to s$

$$\|A_t(\widehat{x}(s)) - A_s(\widehat{x}(s))\|^2 = \sum_{i=1}^{k-1} |f_i(\widehat{x}(s) + te_k) - f_i(\widehat{x}(s) + se_k)|^2 \to 0$$

вследствие непрерывности координатных функций. Следовательно, $\widehat{x}(t)$ непрерывна на E^1.

Рассмотрим теперь функцию $\psi:\ E^1 \to E^1$

$$\psi(t) = f_k(\widehat{x}(t) + te_k).$$

Покажем, что для $\psi(t)$ выполнены условия леммы 1 п. 39.1. Прежде всего заметим, что $\psi(t)$ непрерывна, как суперпозиция непрерывных функций. Далее, согласно (3) $A_t(\widehat{x}(t)) \equiv 0$, $A_s(\widetilde{x}(s)) \equiv 0$, поэтому

$$\begin{aligned}(t-s)[\psi(t)-\psi(s)] &= (t-s)[f_k(\widehat{x}(t)+te_k) - f_k(\widehat{x}(s)+se_k)] + \\ &\quad + (x(t)-x(s),\ A_t(\widehat{x}(t)) - A_s(\widehat{x}(s))) = \\ &= (\{[\widehat{x}(t)+te_k] - [\widehat{x}(s)+se_k]\},\ A(\widehat{x}(t)+te_k) - \\ &\quad - A(\widehat{x}(t)+se_k)) \geqslant c\|\widehat{x}(t)-\widehat{x}(s)+(t-s)e_k\|^2 > 0 \quad \text{при } t \neq s.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\psi\,(t)$ удовлетворяет условию (4) п. 39.1. Проверим условие (2). Применяя ту же оценку, что в доказательстве леммы 2 п. 39.1, получим

$$\begin{aligned}t\psi(t) &= tf_n(x(t)+te_k) = tf_n(\widehat{x}(t)+te_k) + (\widehat{x}(t),\ A_t(\widehat{x}(t))) = \\ &= (\widehat{x}(t)+te_k,\ A(\widehat{x}(t)+te_k)) \geqslant c\|\widehat{x}(t)+te_k\|^2 - \|\widehat{x}(t)+te_k\|\,\|A(0)\,\|.\end{aligned}$$

Но $\|\widehat{x}(t)+te_k\| \geqslant |t|$ (покажите это, пользуясь определением нормы в E^k). Следовательно, при $t \to \infty$ имеем $t\psi(t) \to \infty$. Для функции $\psi(t)$ выполнены, таким образом, все условия леммы 1. Значит, существует такое единственное $\tau \in E^1$, что $\psi(\tau) = 0$. Но тогда уравнение (2) имеет единственное решение

$$x^* = \widehat{x}(\tau) + \tau e_k \in E^k.$$

Согласно методу математической индукции утверждение доказываемой теоремы справедливо в пространстве E^n любой размерности. Итак, теорема 1 доказана.

Докажем в заключение еще следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть* $A:\ \ E^n \to E^n$ — *непрерывный монотонный оператор, причем существует постоянная* $\lambda > 0$ *такая, что для всех* x *с* $\|x\| \leqslant \lambda$ *выполняется неравенство*

$$(x,\ A\,(x)) \geqslant 0.$$

Тогда уравнение (2) *имеет решение* x *с* $\|x\| > \lambda$.

Доказательство. Зададим последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим теперь последовательность операторов $\{A_k\}$, $A_k:\ E^n \to E^n$, определяемых так:

$$A_k\,(x) = \varepsilon_k\,(x) + A\,(x)\,. \tag{4}$$

Для каждого фиксированного номера k имеем, вследствие монотонности оператора A,

$$(x-y,\ A_k(x)-A_k(y)) = \\ = \varepsilon_k(x-y,\ x-y)+(x-y,\ A(x)-A(y)) \geqslant \varepsilon_k\|x-y\|^2$$

для всех $x,\ y\ \in\ E^n$. Значит, по лемме 3 п. 39.1 уравнение $A_k\,(x)\ =\ 0$ имеет единственное решение $x_k \in E^n$. при этом $\|x_k\| \leqslant \lambda\ (k=1,\ 2,\ \ldots)$. В противном случае для некоторого номера k оказалось бы, что

$$0=(x_k,\ A_k\,(x_k)) \geqslant \varepsilon_k\|x_k\|^2>0.$$

Итак, $\{x_k\} \subset E^n$ ограничена. По теореме Больцано–Вейерштрасса (см. [18]) из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{k'}\}$, сходящуюся к $x_0 \in E^n$. Подставим в (4) $k=k'$, $x=x_{k'}$ и получим

$$0=\varepsilon_{k'}x_{k'}+A\,(x_{k'})\,.$$

При $k' \to \infty$, пользуясь тем, что $\varepsilon_{k'} \to 0$, а оператора A непрерывен, в пределе получим $A\,(x_0)=0$. Теорема доказана.

39.3. О деминепрерывных операторах. Пусть X и Y — нормированные пространства. Поскольку в каждом из них мы имеем два вида сходимости: сходимость по норме, которую часто называют сильной сходимостью, и слабую сходимость, то при рассмотрении оператора A, действующего из X в Y, возможны четыре вида его непрерывности. Это:

1) слабая непрерывность, когда A любую слабо сходящуюся в X последовательность $\{x_n\} \subset D\,(A)$ переводит в слабо сходящуюся в Y последовательность $\{A\,(x_n)\}$;

2) сильная непрерывность (непрерывность по норме), когда A переводит всякую сильно сходящуюся в X последовательность $\{x_n\} \subset D\,(A)$ в сильно сходящуюся в Y последовательность $\{A\,(x_n)\}$;

3) ухудшающая непрерывность, когда A любую сильно сходящуюся в X последовательность $\{x_n\} \subset D\,(A)$ переводит в последовательность $\{A\,(x_n)\}$, слабо сходящуюся в Y;

4) улучшающая непрерывность, когда A любую слабо сходящуюся в X последовательность $\{x_n\} \subset D\,(A)$ переводит в сильно сходящуюся в Y последовательность $\{A\,(x_n)\}$.

В приложениях оказываются полезными все эти виды непрерывности операторов. До сих пор мы встречались с сильно непрерывными операторами, т. е. с непрерывными операторами в принятой нами терминологии. Кроме того, отмечалось (см. теорему п. 20.2), что линейные вполне непрерывные операторы обладают свойством улучшающей непрерывности.

В теории монотонных операторов нам понадобится ухудшающая непрерывность операторов, которую принято называть деминепрерывностью.

Определение 1. Оператор A с замкнутой областью определения $D\,(A)$ в банаховом пространстве X и со значениями в сопряженном пространстве X^* называется *деминепрерывным в точке* $x_0 \in D(A)$, если он переводит всякую сходящуюся $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, в слабо сходящуюся последовательность $\{A(x_n)\}$, $A(x_n) \to A(x_0)$ слабо при $n \to \infty$ в X^*.

Иначе говоря, A деминепрерывен в точке x_0, если из $\|x_n - x_0\| \to 0$, $n \to \infty$, следует, что для всякого $x \in X$

$$\langle x,\ A(x_n)\rangle \to \langle x,\ A(x_0)\rangle, \qquad n \to \infty.$$

Упражнение 1. Докажите, что если оператор $A\colon\ X \to X^*$ непрерывен в точке x_0, то он деминепрерывен в x_0.

Упражнение 2. Докажите, что если оператор $A\colon\ X \to X^*$ деминепрерывен в точке x_0, то он ограничен в некоторой ее окрестности.

Определение 2. Оператор A с замкнутой областью определения $D(A) \subset X$ и со значениями в X^* называется *деминепрерывным*, если он деминепрерывен в каждой точке $D(A)$.

Возникает вопрос: не будет ли всякий деминепрерывный оператор также и непрерывным? Ответ будет положительным в случае линейного оператора A. Пусть A не является непрерывным, т. е. является неограниченным. Тогда найдется последовательность $\{x_n\} \subset D(A)$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n\| > n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $y_n = x_n/n \to 0$, $n \to \infty$ сильно, то по условию деминепрерывности $Ay_n = \dfrac{1}{n} Ax_n \to 0$ слабо при $n \to \infty$. Но $\|Ay\| > n$. Полученное противоречие доказывает, что всякий линейный деминепрерывный оператор необходимо непрерывен.

В случае нелинейных операторов требование деминепрерывности оператора является более слабым и проверяется проще по сравнению с требованием его непрерывности. Содержательные примеры деминепрерывных операторов читатель может найти в монографии [7]. Примеры эти требуют специальных сведений из теории функций действительного переменного и выходят за рамки настоящей книги.

39.4. О методе Галеркина для уравнений с монотонными операторами. Пусть нелинейный оператор A действует из вещественного сепарабельного банахова пространства X $(D(A) = X)$ в сопряженное ему пространство X^*. Для нахождения приближенного решения уравнения

$$A(x) = 0 \tag{1}$$

воспользуемся следующим вариантом метода Галеркина. Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — линейно независимая, полная в X система элементов, а X_n — подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Галеркинское приближение решения x уравнения (1)

$$x_n = \sum_{l=1}^{n} c_l \varphi_l \tag{2}$$

будем разыскивать из системы уравнений Галеркина

$$\langle \varphi_k,\ A(x_n)\rangle = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Упражнение 1. Покажите, что $x_n \in X_n$ является решением системы (3) тогда и только тогда, когда для любого $u_n \in X_n$ выполняется тождество

$$\langle u_n,\ A(x_n)\rangle = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Лемма 1. *Если оператор A строго монотонный, то*

1) *уравнение* (1) *не может иметь более одного решения*;

2) *при каждом n система* (3) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Если u и v — решения уравнения (1), то $A(u) = 0$, $A(v) = 0$ и, значит, $\langle u - v,\ A(u) - A(v)\rangle = 0$, что возможно в силу строгой монотонности A лишь при $v = u$. Далее, если $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(2)}$ — решения системы (3), то, согласно (4), $\langle x_n^{(i)},\ A(x_n^{(j)})\rangle = 0$ для $i, j = 1, 2$. Следовательно, $0 = \langle x_n^{(1)} - x_n^{(2)},\ A(x_n^{(1)}) - A(x_n^{(2)})\rangle$, что возможно только при $x_n^{(2)} = x_n^{(1)}$. Лемма доказана.

Теперь дадим условия, обеспечивающие разрешимость системы уравнений Галёркина (3). Для этой цели мы воспользуемся теоремой 2 п. 39.2.

Лемма 2. *Пусть оператор A монотонный и деминепрерывный, и пусть найдется постоянная $\lambda > 0$ такая, что для всех $x \in X$ с $\|x\| > \lambda$ выполняется неравенство $\langle x,\ A(x)\rangle > 0$. Тогда для любого n система уравнений* (3) *имеет решение $x_n \in X_n$, причем $\|x_n\| \leqslant \lambda$.*

Доказательство. Запишем сначала систему (3) как одно уравнение в X_n:

$$\sum_{l=1}^{n} \langle \varphi_l,\ A(x_n)\rangle \varphi_l = 0. \tag{5}$$

Покажем, что уравнение (5) можно заменить эквивалентным ему уравнением в евклидовом пространстве E^n. Для этой цели введем линейный оператор $J_n \in \mathcal{L}(E^n,\ X_n)$. Для любого $\bar{c}_n = (c_l)_1^n$ положим

$$J_n \bar{c}_n = x_n, \tag{6}$$

где x_n задается формулой (2).

Упражнение 2. Покажите, что J_n — линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор и, значит, J_n осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между E^n и X_n. Покажите, что $\|J_n\| \leqslant (\sum_{l=1}^{n} \|\varphi_l\|^2)^{1/2}$.

Заметим теперь, что уравнение (5) эквивалентно следующей системе уравнений в E^n (записанной в стандартном базисе):

$$\langle \varphi_l,\ A(J_n \bar{c}_n)\rangle = 0, \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Введем в E^n оператор

$$A_n(\bar{c}_n) \equiv \{\langle \varphi_l,\ A(J_n \bar{c}_n)\rangle\}_{l=1}^n. \tag{8}$$

Теперь система (7) примет следующий вид:

$$A_n(\bar{c}_n) = 0. \tag{9}$$

Проверим для оператора A_n условия теоремы 2 п. 39.2. Оператор A_n непрерывен, так как непрерывны его координатные функции $\langle \varphi_l,\ A(J_n \bar{c}_n)\rangle$. Действительно, если последовательность $\bar{c}_n^{(m)} \to \bar{c}_n^{(0)}$ при $m \to \infty$ (в E^n), то при $m \to \infty$

$$x_n^{(m)} = J_n \bar{c}_n^{(m)} = \sum_{l=1}^{n} c_l^{(m)} \varphi_l \to \sum_{l=1}^{n} c_l^{(0)} \varphi_l = x_n^{(0)} \quad \text{в} \quad X_n.$$

А тогда в силу деминепрерывности оператора A при $m \to \infty$

$$\langle \varphi_l,\ A(x_n^{(m)})\rangle \to \langle \varphi_l,\ A(x_n^{(0)})\rangle = \langle \varphi_l,\ A(J_n \bar{c}_n^{(0)})\rangle.$$

Далее, для любых $\bar{a}_n = (a_l)_1^n$, $\bar{b}_n = (b_l)_1^n$ из E^n, согласно (8), (6) и (2), имеем

$$(\bar{a}_n - \bar{b}_n,\ A_n(\bar{a}_n) - A_n(\bar{b}_n)) = \sum_{l=1}^{n} (a_l - b_l)\langle \varphi_l,\ A(J_n \bar{a}_n) -$$
$$- A(J_n \bar{b}_n)\rangle = \langle J_n \bar{a}_n - J_n \bar{b}_n,\ A(J\bar{a}_n) - A(J\bar{b}_n)\rangle \geqslant 0$$

вследствие монотонности оператора A. Наконец, если $\|\bar{c}_n\|_{E^n} \geqslant \lambda \|J_{(n)}^{-1}\|$, то (проверьте!) $\|\bar{x}_n\|_{X_n} \geqslant \|J_n^{-1}\|^{-1} \|\bar{c}_n\|_{E^n} \geqslant \lambda$, а тогда

$$(\bar{c}_n, A_n(\bar{c}_n)) = \langle J_n \bar{c}_n,\ A(j_n \bar{c}_n)\rangle = \langle x_n,\ A(x_n)\rangle > 0.$$

По теореме 2 п. 39.2 уравнение (9) имеет решение $\bar{c}_n^*$, а тогда система (3) имеет (при любых n) решение $x_n^* = \sum_{l=1}^{n} c_l^* \varphi_l$. Осталось доказать, что $\|x_n^*\| \leqslant \lambda$. Допустим противное, что $\|x_n^*\| > \lambda$. Тогда по условию данной леммы $\langle x_n^*,\ A(x_n^*)\rangle > 0$, что невозможно. Итак, лемма 2 доказана.

Докажем еще одну лемму о галеркинских приближениях.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *и пусть* $\{x_n\}$ — *произвольная последовательность решений систем* (3). *Тогда последовательность* $\{A\,(x_n)\}$ *слабо сходится к нулю.*

Доказательство. Докажем сначала, что последовательность $\{A(x_n)\}$ ограничена. Из деминепрерывности оператора A в нуле следует (см. упражнение 2 п. 39.3) существование постоянных $\delta > 0$ и $M > 0$ таких, что $\|A(x)\,\| \leqslant M$ как только $\|x\| \leqslant \delta$. Тогда в шаре $S_\delta = \{x:\ \ \|x\| \leqslant \delta\}$ имеем

$$\langle x,\ A(x_n)\rangle = \langle x - x_n,\ A(x_n) - A(x)\rangle + \langle x_n, A(x)\rangle -$$
$$- \langle x_n,\ A(x)\rangle + \langle x_n,\ A(x_n)\rangle \leqslant \langle x,\ A(x)\rangle - \langle x_n,\ A(x)\rangle.$$

Мы воспользовались тем, что $\langle x_n,\ A(x_n)\rangle = 0$ (см. (4)), и монотонностью оператора A, согласно которой $\langle x - x_n,\ A(x_n) - A(x)\rangle \leqslant 0$. Следовательно, для $x \in S_\delta$

$$\langle x,\ A(x_n)\rangle \leqslant |\langle x,\ A(x)\rangle| + |\langle x_n,\ A(x)\rangle| \leqslant M(\delta + \lambda),$$

ибо $\|x_n\| \leqslant \lambda$. Меняя x на $-x$, получим также, что для всех $x \in S_\delta$

$$-M(\delta + \lambda) \leqslant \langle x,\ A(x_n)\rangle.$$

Таким образом, для всех $x \in S_\delta$ имеем

$$|\langle x,\ A(x_n)\rangle| \leqslant M(\delta + \lambda).$$

Далее, по определению нормы линейного функционала

$$\|A(x_n)\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle y,\ A(x_n)\rangle| = \sup_{\|x\| \leqslant \delta} \frac{1}{\delta} |\langle x,\ A(x_n)\rangle| \leqslant M\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right).$$

Доказана ограниченность последовательности $\{A(x_n)\}$.

Теперь покажем, что $\{A(x_n)\}$ слабо сходится к нулю на некотором плотном в X линейном многообразии. Воспользуемся полнотой системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$. Из нее следует, что линейное многообразие $\widetilde{X} = \bigcup_{k=1}^\infty X_k$ плотно в X. Пусть $x \in \widetilde{X}$; тогда $x \in X_m$ при некотором m и для всех $n \geqslant m$ $\langle x,\ A(x_n)\rangle = 0$, где x_n — решение системы (3). Следовательно, на плотном в X линейном многообразии $\widetilde{X}$ $\langle x,\ A(x_n)\rangle \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме Банаха–Штейнгауза (см. п. 11.5 и п. 17.1) $A(x_n) \to 0$, $n \to \infty$, слабо. Лемма 3 доказана.

39.5. Теоремы о существовании решений уравнений с монотонными операторами. В этом пункте будут доказаны основные теоремы теории монотонных операторов. Более подробное изложение можно найти в [7].

Теорема 1. *Пусть A — оператор, действующий из вещественного сепарабельного рефлексивного банахова пространства X в сопряженное пространство X^*,— является монотонным и деминепрерывным. Пусть, далее, существует постоянная $\lambda > 0$ такая, что для всех $x \in X$ с $\|x\| > \lambda$ выполняется неравенство*

$$\langle x,\ A(x)\rangle > 0.$$

Тогда уравнение

$$A(x) = 0 \tag{1}$$

имеет решение, причем $\|x\| \leqslant \lambda$.

Доказательство. По лемме 2 п. 39.4 для любого n система Галёркина имеет решение $x_n \in X_n$ с $\|x_n\| \leqslant \lambda$. Вследствие рефлексивности пространства X из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, слабо сходящуюся к $x_0 \in X$, при этом $\|x_0\| \leqslant \lambda$.

Далее, для любого $x \in X$, вследствие монотонности оператора A, имеем

$$I_{n'} = \langle x - x_{n'},\ A(x) - A(x_{n'})\rangle \geqslant 0.$$

Но $I_{n'} = \langle x - x_{n'},\ A(x)\rangle - \langle x,\ A(x_{n'})\rangle$, причем при $n' \to \infty$ $\langle x,\ A(x_{n'})\rangle \to$ $\to 0$, так как по лемме 3 п. 39.4 $A(x_{n'}) \to 0$ слабо при $n' \to \infty$. Следовательно, $I_{n'} \to \langle x - x_0,\ A(x)\rangle$ при $n' \to \infty$, и, значит, для всех $x \in X$

$$\langle x - x_0,\ A(x)\rangle \geqslant 0. \tag{2}$$

Если $A(x_0) = 0$, то теорема доказана. Пусть $A(x_0) \neq 0$. Тогда по следствию 1 (для X^*, $X^{**} = X$) из теоремы Хана–Банаха (см. п. 16.3) существует такой элемент $z_0 \in X$, что

$$\langle z_0, A(x_0)\rangle = \|A(x_0)\|. \tag{3}$$

Подставим в (2) $x = x_0 - tz_0$, где $t > 0$. Тогда $\langle z_0, A(z_0 - tz_0)\rangle \leqslant 0$. Отсюда при $t \to +\infty$ с учетом (3) имеем $\langle z_0, A(x_0)\rangle = \|A(x_0)\| \leqslant 0$. Значит, предположение о том, что $A(x_0) \neq 0$, неверно, и теорема 1 доказана.

Приведем два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то из любой последовательности решений системы Галёркина можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому решению уравнения* (1).

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 1 *оператор A строго монотонный, то для любого n система Галёркина* (3) *имеет единственное решение $x_n \in X_n$ и последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ этих решений слабо сходится к элементу $x_0 \in X$, являющемуся единственным решением уравнения* (1).

Для доказательства достаточно сослаться на лемму 1 п. 39.4.

Приведем теперь две теоремы существования решений для уравнения с правой частью:

$$A(x) = y, \quad y \in X^*. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть оператор A отображает вещественное сепарабельное банахово пространство X в пространство X^* и является монотонным, деминепрерывным и коэрцитивным. Тогда уравнение* (4) *имеет решение для любого $y \in X^*$.*

Доказательство. Зафиксируем любой элемент $y \in X^*$ и рассмотрим оператор $F\colon X \to X^*$, действующий по формуле

$$f(x) = A(x) - y. \tag{5}$$

Упражнение 1. Докажите, что $f(x)$ — монотонный и деминепрерывный оператор.

Далее, для всех $x \in X$ имеем (см. определение 4 п. 39.1)

$$\langle x, F(x)\rangle = \langle x, A(x)\rangle - \langle x, y\rangle \geqslant \\ \geqslant \gamma(\|x\|)\,\|x\| - \|y\|\,\|x\| = (\gamma(\|x\|) - \|y\|)\,\|x\|.$$

Отсюда вытекает, что существует такое число $\lambda > 0$, что для всех $x \in X$ с $\|x\| > \lambda$ выполняется неравенство $\langle x, F(x)\rangle > 0$. Значит, для оператора F выполнены условия теоремы 1, и, следовательно, уравнение $f(x) = 0$, т. е. уравнение (5), имеет решение. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Если в условиях теоремы* 2 *оператор A строго монотонный, то для любого $y \in X^*$ уравнение* (5) *имеет единственное решение, т. е. в этом случае существует оператор A^{-1}, обратный оператору A.*

Для доказательства следствия 3 достаточно выполнить следующее упражнение.

Упражнение 2. Покажите, что $f(x) = A(x) - y$ является строго монотонным оператором, если таковым является оператор $A(x)$.

Теорема 3. *Пусть оператор A действует из вещественного сепарабельного рефлексивного банахова пространства X в X^* и является деминепрерывным и сильно монотонным. Тогда для любого $y \in X^*$ при каждом n система Галёркина*

$$\langle \varphi_k,\ A(x_n)\rangle = \langle \varphi_k,\ y\rangle, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

имеет единственное решение $x_n \in X$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится (по норме) к решению $x_0 \in X$ уравнения (1)*, также единственному. Оператор A имеет обратный оператор A^{-1}, который непрерывен.*

Доказательство. Согласно лемме 2 п. 39.1 оператор $A(x)$ коэрцитивен, а значит, коэрцитивен и оператор $f(x) = A(x) - y$ (см. доказательство теоремы 2). Кроме того, A строго монотонен. По теореме 2 и следствию 3 система (6) имеет при каждом n единственное решение $x_n \in X_n$. При этом $x_n \to x_0$ слабо при $n \to \infty$, где $x_0 \in X$ — единственное решение уравнения (1) (см. следствие 2).

Далее, по лемме 3 п. 39.4 $A(x_n) \to A(x_0) = 0$ слабо при $n \to \infty$. Тогда имеем (см. определение 3 п. 39.1)

$$I_n = \langle x_n - x_0,\ A(x_n) - A(x_0)\rangle \geqslant c(\|x_n - x_0\|)\,\|x_n - x_0\|.$$

Но $I_n = -\langle -x_0,\ A(x_n)\rangle - \langle x_n - x_0,\ A(x_0)\rangle \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $c(\|x_n - x_0\|)\,\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Воспользуемся леммой 3 п. 39.1, приняв $\gamma(t) = c(t)\,t$. Согласно этой лемме $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Первая часть теоремы доказана.

Заметим теперь, что по следствию 3 существует оператор $A^{-1}\colon\ X^* \to X$, обратный к A. из неравенства (сильная монотонность A)

$$\langle u - v,\ A(u) - A(v)\rangle \geqslant c(\|u - v\|)\,\|u - v\|,$$

справедливого для всех $u,\ v \in X$, вытекает, что

$$\|A(u) - A(v)\,\| \geqslant c(\|u - v\|),$$

или, полагая $z = A(u)$, $W = A(v)$, имеем

$$\|z - w\| \geqslant c(\|A^{-1}(z) - A^{-1}(w)\,\|).$$

Если теперь $z \in X$ фиксировано, а $w = w_n \to z, n \to \infty$, в X, то по лемме 3 п. 39.1 $A^{-1}(w_n) \to A^{-1}(z)$ при $n \to \infty$, что и означает непрерывность оператора A^{-1}. Теорема 3 полностью доказана.

Следствие 4. *Если в условиях теоремы* 3 *оператор A непрерывен, то A осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между X и X^** (*такое соответствие принято называть гомеоморфизмом*).

39.6. Пример к теории монотонных операторов. Рассмотрим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}x(t) - f(t,\, x(t)) = 0, \qquad a < t < b \tag{1}$$

$$D^k x(a) = D^k x(b) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \tag{2}$$

с дифференциальным выражением ($m \geqslant 1$)

$$\mathcal{L}x(t) \equiv \sum_{l=0}^{m} (-1)^l D^l \{P_l(t) D^l x(t)\}. \tag{3}$$

Здесь $D = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Задачу (1), (2) будем рассматривать в пространстве Соболева $\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$ и, таким образом, речь пойдет о теореме существования и единственности обобщенного решения этой задачи. Это обстоятельство позволяет наложить довольно слабые ограничения на параметры задачи (1), (2).

Предположим, что коэффициенты $P_l(t)$ ($l = 0, 1, \ldots, m$) непрерывны на $[a, b]$. Пусть, кроме того, существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$ выполняется следующее неравенство

$$\int_a^b \left\{ \sum_{l=0}^{m} P_l(t) \left(D^l x(t)\right)^2 \right\} dt \geqslant \alpha \|x\|_{\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь в $\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$ нелинейный оператор суперпозиции $f(t, x(t))$ в предположении, что f непрерывна в полосе $t \in [a, b]$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Поскольку $H^m(a, b)$ вложено в $C[a, b]$, то для всех $x \in \overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$ функция $f(t, x(t))$ будет непрерывна. Предположим также, что для всех t, x_1 и x_2

$$[f(t, x_1) - f(t, x_2)](x_1 - x_2) \geqslant 0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь в $\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$ следующую квазибилинейную форму (функционал, линейный по z):

$$a(x, z) = \int_a^b \sum_{l=0}^{m} (P_l(t) D^l x(t) \cdot D^l z(t))\, dt + \int_a^b f(t, x(t)) z(t)\, dt \tag{6}$$

(см. пп. 17.3 и 30.7). Согласно теореме Рисса, при каждом $x \in \overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$ выражение $a(x, z)$ представляет собой линейный ограниченный функционал в $\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$, и, значит, представимо виде

$$a(x, z) = (A(x), z)_{\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)},$$

где $A(x)$ — нелинейный оператор, действующий в $\overset{\circ}{H}{}^m(a, b)$. Оператор $A(x)$ является сильно монотонным, так как

$$a(x_1, z) - a(x_2, z) \geqslant \alpha \|x_1 - x_2\|,$$

что вытекает из формул (4), (5) и (6).

Предположим еще, что функция $f\,(t,\,x)$ в каждом шаре $|x| \leqslant r$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|f\,(t,\,x_1) - f\,(t,\,x_2)\,| \leqslant c\,(r)\,|x_1 - x_2|.$$

Можно показать, что теперь оператор $A\,(x)$ непрерывен. Воспользуемся теоремой 1 и следствием 2 п. 39.5, из которых вытекает, что при наложенных нами ограничениях краевая задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение. Дальнейшие обобщения читатель может найти в книгах [3, 7] и [27], где имеются также приложения теории монотонных операторов к краевым задачам для эллиптических уравнений.

§ 40. Элементы теории экстремумов и выпуклого анализа

Вариационные методы широко применяются в различных областях математики и ее приложений. В этом параграфе приведены лишь отдельные фрагменты теории. В п. 40.1 даны необходимые и достаточные условия локального (безусловного) экстремума, а также часто работающая в приложениях теорема 3 о глобальном экстремуме. В п. 40.2 выяснены связи между экстремальными задачами для дифференцируемых выпуклых функционалов и задачами для монотонных операторов. Заметим, что аналогичные связи имеются между конечными выпуклыми функционалами и многозначными монотонными операторами. Этот круг вопросов, в частности фундаментальное понятие субдифференциала, не включен из-за ограниченного объема книги. В п. 40.3 и в п. 40.4 рассмотрены исключительно важные в приложениях теорема Люстерника и вытекающее из нее общее правило множителей Лагранжа. Довольно подробно освещаются в п. 40.5 и в последующих пунктах теоремы отделимости — база выпуклого анализа. Наконец, в п. 40.8 освещается круг вопросов, связанных с известной теоремой выпуклого программирования — теоремой Куна–Таккера. Дальнейшие сведения и многочисленные приложения можно найти в специальной литературе, например в [35, 15, 5]. Всюду в § 40 все пространства вещественные.

40.1. Задачи на экстремумы в нормированных и в банаховых пространствах. Пусть $\varphi(x)$ — функционал в нормированном пространстве X (т. е. оператор со значениями в E^1), определенный в окрестности S точки x_0. Говорят, что $\varphi(x)$ достигает в точке x_0 локального минимума (максимума), если найдется окрестность $S_1 \subset S$ точки x_0 такая, что

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) \quad (\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)) \quad \text{для всех } \ x \in S_1. \tag{1}$$

Если $\varphi\,(x)$ достигает в x_0 локального минимума или локального максимума, то говорят, что $\varphi\,(x)$ достигает в x_0 локального экстремума. Если (1) неравенства строги, то говорят о строгом локальном экстремуме (минимуме или максимуме).

Следующая теорема обобщает известную теорему Ферма, дающую необходимое условие экстремума (см. [21]).

Т е о р е м а 1. *Пусть функционал* $\varphi(x)$ *определен в окрестности точки* x_0, *достигает в* x_0 *локального экстремума и имеет в точке* x_0 *первую вариацию* $\delta\varphi(x_0;\,h)$. *Тогда* $\delta\varphi(x_0;\,h) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $h \in X$ рассмотрим числовую функцию $\alpha(t) = \varphi(x_0 + th)$. Так как она имеет в точке $t = 0$ экстремум, то

$$0 = \alpha'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x_0 + th) - \varphi(x_0)}{t} = \delta\varphi(x_0;\,h).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если в условиях теоремы* 1 *пространство* X *банахово, а функционал* $\varphi(x)$ *дифференцируем в точке* x_0 *в смысле Гато* (*Фреше*), *то* $\varphi'(x_0) = 0$.

Для доказательства заметим, что из дифференцируемости φ по Гато следует, что $\delta\varphi(x_0;\,h) = \varphi'(x_0)\,h$ (см. п. 32.6).

Следующая теорема обобщает известное достаточное условие строгого локального экстремума (см. [21]).

Т е о р е м а 2. *Пусть функционал* $\varphi(x)$ *дважды непрерывно дифференцируем в смысле Фреше в окрестности* S *точки* x_0 *банахова пространства* X, *причем* $\varphi'(x_0) = 0$. *Тогда, если квадратичный функционал* $\varphi''(x_0)\,h^2 \geqslant \gamma\|h\|^2$, $\gamma > 0$ (*положительно определен*), *то* x_0 — *точка строгого локального минимума*; *если же* $\varphi''(x_0)\,h^2$ *отрицательно определен, то* x_0 — *точка строгого локального максимума функционала* $\varphi(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой Тейлора. Для любых h таких, что $x_0 + h \in S$, имеем

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + \int_0^1 (1-\theta)\varphi''(x_0 + \theta h)\,d\theta\, h^2. \tag{2}$$

Доказательство этой формулы получается посредством интегрирования по частям в формуле Лагранжа (см. формулу (1) п. 32.2):

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \int_0^1 \varphi'(x_0 + \theta h)\,d\theta\, h =$$
$$= -\int_0^1 \varphi'(x_0 + \theta h)\,d(1-\theta)\, h =$$
$$= -(1-\theta)\varphi'(x_0 + \theta h)h\Big|_0^1 + \int_0^1 (1-\theta)\varphi''(x_0 + \theta h)\,d\theta\, h^2 =$$
$$= \varphi'(x_0)h + \int_0^1 (1-\theta)\varphi''(x_0 + \theta h)\,d\theta\, h^2.$$

Так как $\varphi'(x_0) = 0$, то формула (2) примет следующий вид:

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi''(x_0)\,h^2 + r(h),$$

где $r(h) = \int_0^1 (1-\theta)\,[\varphi''(x_0 + \theta h) - \varphi''(x_0)]\,d\theta h^2$.

Вследствие непрерывности $\varphi''(x)$ $r(h) \to 0$ при $n \to 0$ (проверьте!). Поэтому знак разности $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ определяется для всех достаточно малых по норме h знаком второго дифференциала $\varphi''(x_0)\,h^2$, что и доказывает наше утверждение.

Приведем теперь несколько более тонких фактов об экстремуме функционалов. Они используют следующее важное понятие.

Определение. Функционал $\varphi(x)$, определенный на множестве M банахова пространства X, называется *слабо полунепрерывным снизу* на M, если из того, что $x_n \to x_0$ слабо при $n \to \infty$, $x_n \in M$, $x_0 \in M$, следует, что

$$\varphi(x_0) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Теорема 3. *Слабо полунепрерывный снизу функционал $\varphi(x)$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве X, ограничен снизу и достигает наименьшего значения на каждом ограниченном слабо замкнутом множестве $M \subset X$.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — минимизирующая последовательность для $\varphi(x)$ на M, т. е. такая последовательность из M, что при $n \to \infty$

$$\varphi(x_n) \to \inf_{x\in M} \varphi(x) = d \geqslant -\infty.$$

Вследствие ограниченности M $\{x_n\}$ ограничена, а вследствие рефлексивности X существует ее слабо сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, $x_{n'} \to x_0$ слабо при $n \to \infty$. Далее, $x_0 \in M$, так как M слабо замкнуто. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = d = \varliminf_{n\to\infty} \varphi(x_0),$$

то из слабой полунепрерывности $\varphi(x)$ снизу вытекает, что $\varphi(x_0) \leqslant d$, т. е. $d > -\infty$ и $\varphi(x_0) = d$. Теорема доказана.

В приложениях иногда удобнее применять не саму теорему 3, ее частные случаи.

Следствие 2. *Слабо полунепрерывный снизу функционал в рефлексивном банаховом пространстве достигает своего наименьшего значения на каждом ограниченном замкнутом выпуклом множестве.*

Доказательство следует из того факта, что всякое выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства является слабо замкнутым.

Следствие 3. *Слабо полунепрерывный снизу функционал $\varphi(x)$, заданный всюду в рефлексивном банаховом пространстве, такой, что $\varphi(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to \infty$, достигает наименьшего значения на каждом непустом замкнутом выпуклом множестве Q.*

Доказательство. Возьмем $y \in Q$ и выберем $R > 0$ такое, что $\varphi(x) > \varphi(y)$ при всех x с $\|x\| \geqslant R$. Тогда на

$$M = \{x;\ x \in Q:\ \|x\| \leqslant R\},$$

по следствию 2, $\varphi(x)$ достигает минимума в некоторой точке x_0. Так как вне M или $\|x\| > R$, или $x \notin Q$, то $\varphi(x_0) = \min_{x \in Q} \varphi(x)$.

Задача. Покажите, что всякий слабо полунепрерывный снизу функционал в банаховом пространстве достигает своего минимума на каждом бикомпактном множестве (см. п. 19.1).

40.2. Выпуклые функционалы и монотонные операторы. В этом пункте рассмотрена связь выпуклых функционалов (см. п. 1.7) и монотонных операторов (см. определение 1 п. 39.1). Рассмотрены также простейшие вопросы экстремальной теории выпуклых функционалов.

Теорема 1. *Пусть функционал $\varphi(x)$ дифференцируем в смысле Гато в каждой точке банахова пространства X. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

1) *функционал $\varphi(x)$ выпуклый*;
2) *оператор $\varphi'(x)$ монотонен*;
3) *для любых $x,\ y \in X$*

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \varphi'(x)(y - x). \tag{1}$$

Доказательство. 1)⇒2). Рассмотрим при произвольных фиксированных $x, y \in X$ и $t \in (-\infty, +\infty)$ числовую функцию $\omega(t) = \varphi(x + t(y - x))$. Покажем, что $\omega(t)$ выпукла. Для любых t_1, t_2 и $\alpha \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned}\alpha\omega(t_1) + (1-\alpha)\,\omega(t_2) - \omega(\alpha t_1 + (1-\alpha)\,t_2) =\\ = \alpha\varphi(x + t_1(y-x)) + (1-\alpha)\,\varphi(x + t_2(y-x)) -\\ - \varphi(x + [\alpha t_1 + (1-\alpha)\,t_2](y-x)) \geqslant 0,\end{aligned}$$

ибо $x + [\alpha t_1 + (1-\alpha)\,t_2](y-x) = \alpha[x + t_1(y-x)] + (1-\alpha)[x + t_2(y-x)]$, а функционал φ — выпуклый. Далее, $\omega(t)$ дифференцируема и $\omega'(t) = \omega'(x + t(y-x))(y-x)$, причем $\omega'(t)$ возрастает, так как $\omega(t)$ выпукла (см. [18]). Но тогда $\omega'(1) \geqslant \omega'(0)$, т. е. $\varphi'(y)(y-x) \geqslant \varphi'(x)(y-x)$, или $[\varphi'(y) - \varphi'(x)](y-x) \geqslant 0$. Так как $\varphi'(x) \in \mathcal{L}(X, E^1) = X^*$, то последнее неравенство можно записать в форме, используемой в теории монотонных операторов: $\langle y - x,\ \varphi'(y) - \varphi'(x)\rangle \geqslant 0$. Доказана монотонность оператора $\varphi'(x)$.

2)⇒3). Вследствие монотонности $\varphi'(x)$ имеем

$$[\varphi'(x + t_1(y-x)) - \varphi'(x + t_2(y-x))](t_1 - t_2)(y-x) \geqslant 0.$$

Отсюда при $t_1 > t_2$ получаем неравенство

$$\varphi'(x + t_1(y-x))(y-x) \geqslant \varphi'(x + t_2(y-x))(y-x),$$

которое означает, что $\omega'(t)$ возрастает. Но тогда, пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, получаем ($\xi \in (0,\,1)$)

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \omega(1) - \omega(0) = \omega'(\xi) \geqslant \omega'(0) = \varphi'(x)(y-x).$$

Тем самым неравенство (1) доказано.

3)⇒1). Для любого $\alpha \in [0,\,1]$, пользуясь неравенством (1), получим

$$\begin{aligned}
&\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y) - \varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) = \\
&\quad = \alpha[\varphi(x) - \varphi(\alpha x + (1-\alpha)y)] + (1-\alpha)[\varphi(y) - \varphi(\alpha x + (1-\alpha)y)] \geqslant \\
&\qquad \geqslant \alpha\varphi'(\alpha x + (1-\alpha)y)(1-\alpha)(x-y) + \\
&\qquad\qquad + (1-\alpha)\varphi'(\alpha x + (1-\alpha)y)\alpha(y-x) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, функционал $\varphi(x)$ выпуклый. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. *Пусть $\varphi(x)$ — всюду определенный в нормированном пространстве X выпуклый функционал. Тогда каждая точка x_0 его локального минимума является точкой его глобального минимума.*

Воспользуемся справедливостью следствия 1 при $X = E^1$. Рассмотрим функцию $\psi(t) = \varphi(x_0 + th)$. Тогда

$$\varphi(x_0 + h) = \psi(1) \geqslant \psi(0) = \varphi(x_0),$$

так как $t = 0$ — точка глобального минимума $\psi(t)$. Из произвольности h вытекает наше утверждение.

Следствие 2. *Всякий заданный всюду в банаховом пространстве, дифференцируемый по Гато выпуклый функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу.*

Действительно, если $x_n \to x_0$ слабо при $n \to \infty$, то по неравенству (1)

$$\varphi(x)\,\varphi(x_n) + \varphi'(x)(x - x_n),$$
$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_n) + \varphi'(x)(x - x_n).$$

Переходя в этом неравенстве к нижнему пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\varphi'(x)(x - x_n) \to 0$, получаем $\varphi(x) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n)$.

Пусть в условиях теоремы 3 дополнительно M — уравновешенное множество. Тогда найдется $x^* \in X^*$ такой, что $|\langle x,\, x^*\rangle| \leqslant 1$ для любых $x \in M$, а $\langle x,\, x^*\rangle > 1$.

Теорема 2. *Пусть функционал $\varphi(x)$ определен на множестве Ω, является на нем выпуклым и дифференцируем в точке $x_0 \in \Omega$ в смысле Гато.*

Пусть $f \in X^*$. Если $\varphi'(x_0) = f$, то x_0 — точка локального минимума функционала $\varphi(x) - \langle x,\, f\rangle$.

Доказательство. Введем функционал $\psi(h) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) - \langle h,\, f\rangle$. Он является выпуклым на выпуклом множестве $\Omega - x_0$ и дифференцируем по Гато в точке 0, причем $\psi'(0) = \varphi'(x_0) - f$. Докажем, что точка 0 является его точкой минимума. Допустим противное, что это не так, т. е. утверждение теоремы неверно. Тогда найдется вектор $h_0 \in \Omega_0$ такой, что $\psi(h_0) = \alpha < 0$. Вследствие выпуклости ψ при $t \in (0, 1)$ $\psi(th_0) = \psi(th_0 + (1-t)0) \leqslant t\psi(h_0) = t\alpha$. Но тогда $(\psi(th_0) - \psi(0))/t \leqslant \alpha < 0$. В пределе при $t \to +0$ получим $\delta\psi(0, h_0) \leqslant \alpha < 0$, а это противоречит тому, что $\delta\psi(0, h_0) = \langle h_0, \varphi'(x_0) - f\rangle = 0$. Значит, x_0 — точка локального минимума $\varphi(x)$ и теорема доказана.

Замечание. При $f = 0$ мы получаем частичное обращение теоремы 1, п. 40.1 для выпуклого случая.

Таким образом, имеются глубокие связи между выпуклыми функционалами и монотонными операторами. Дальнейшие сведения, а также приложения можно найти в [9].

40.3. Теорема Люстерника. Пусть оператор $\Phi(x)$ отображает банахово пространство Xв банахово пространство Y. Пусть $y_0 \in R(A)$. Рассмотрим множество M решений уравнения

$$\Phi(x) = y_0. \tag{1}$$

M является нелинейным многообразием в X. Очевидно, $M = \Phi^{-1}(y_0)$, т. е. является множеством прообразов элемента y_0 при отображении, осуществляемым оператором Φ. Кроме того, M имеет ясную геометрическую интерпретацию: это поверхность уровня y_0 оператора Φ. Фиксируем точку $x_0 \in M$ так, что $\Phi(x_0) = y_0$. Пусть выполнены следующие условия.

I. Оператор $\mathcal{F}$ определен и непрерывно дифференцируем в смысле Фреше в окрестности S точки x_0.

II. $R(\Phi'(x_0)) = Y$.

III. $V = N(\Phi'(x_0))$ дополняемо в X, т. е. справедливо разложение X в прямую сумму подпространства V и еще одного подпространства U:

$$X = U \oplus V.$$

Заметим, что если выполнено условие II, т. е. оператор $\Phi'(x_0)$ отображает пространаство X на все пространство Y, то точка x_0 называется правильной (нормальной, регулярной) точкой многообразия M.

Далее будет получено параметрическое представление многообразия M вблизи точки x_0. Пользуясь условием III, положим в (1)

$$x = x_0 + u + v, \quad u \in U, \;\; v \in V \tag{2}$$

и заменим уравнение (1) равносильным ему уравнением

$$\mathcal{F}(u, v) \equiv Bu - \Phi(x_0 + u + v) + \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(u + v) = 0 \tag{3}$$

Здесь B — это сужение оператора $-\Phi'(x_0)$ на подпространство U. Согласно теореме Банаха об обратном операторе B непрерывно обратим и $B^{-1} \in \mathcal{L}(Y, U)$.

В уравнении (3) будем считать U неизвестным оператором, а V — параметром. Применим к (3) теорему о неявных операторах из п. 36.3. Тогда найдутся числа $\rho > 0$ и $r > 0$ такие, что для каждого $v \in S_\rho(0) \subset V$

уравнение (3) имеет в шаре $S_r(0) \subset U$ единственное решение $u = u(v)$. Оператор $u(v)$ дифференцируем на $S'_\rho(0)$ в смысле Фреше и $u'(0) = 0$. Действительно, $F_u(0, 0) = B$, а $F_v(0, 0) = 0$. Следовательно, возвращаясь к уравнению (1) мы видим, что многообразие M имеет вблизи точки x_0 следующее параметрическое представление

$$x = x_0 + v + u(v), \quad U \in S_\rho(0) \tag{4}$$

и, при этом,

$$u(v) = o(\|v\|), \quad v \to 0 \tag{5}$$

Определение. Аффинное многообразие T_{x_0}

$$x = x_0 + v, \quad v \in V \tag{6}$$

называется касательным многообразием к многообразию M в точке x_0.

Теорема. *Существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение друг в друга окрестностей точки x_0 в M и в T_{x_0}, причем соответствующие точки удалены друг от друга на расстояние высшего порядка малости сравнительно с их расстоянием до точки касания x_0.*

Доказательство. Указанное соответствие имеет вид $x_0 + v \leftrightarrow$ $\leftrightarrow x_0 + v + u(v)$. Расстояние между соответствующими точками равно $\|u(v)\|$ и наряду с (5) имеем также $\|u(v)\| = o(\|U + u(v)\|), \to 0$.

Замечание 1. В чуть более слабой форме теорема Люстерника справедлива и без предположения III. Здесь в доказательстве используется переход к фактор-пространствам и предложенный Люстерником специальный итерационный процесс (см. [25], гл. VIII, § 10).

Замечание 2. В тех же предположениях можно доказать, важные в приложениях, напремер в задачах оптимального управления, следующие варианты теоремы Люстерника.

Теорема о накрывании. *Существует окрестность S_1 точки y_0 и постоянная $c_1 > 0$ такие, что*

$$\inf_{x \in F^{-1}(y)} \|x_0 - x\| \leqslant c_1 \|y - y_0\|, \quad y \in S_1.$$

Теорема об оценке. *Существует окрестность S_2 точки x_0 и постоянная $c_2 > 0$ такие, что*

$$\inf_{\xi \in F^{-1}(y_0)} \|x - \xi\| \leqslant c_2 \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|, x \in S_2.$$

40.4. Задача об условном экстремуме. Пусть функционал $\varphi(x)$ определим в окрестности S точки x_0.

Рассмотрим в X множество M, имеющее непустые пересечения с S так что $x_0 \in M$. Точка x_0 называется точкой условного локального минимума (соответственно максимума) функционала φ при условии $x \in M$, если найдется ее окрестность S_0, в которой $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ (соответственно $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$) для любых $x \in S \bigcap M$.

В конкретных задачах множество G может задаваться различными способами, например, равенством или неравенством. Здесь мы ограничимся случаем, когда G задается уравнением.

$$\Phi(x) = 0 \tag{1}$$

так, что $\Phi(x_0) = 0$.

Пусть далее оператор Φ удовлетворяет условиям I–III предыдущего пункта. Ниже будет получено необходимое условие локального экстремума.

Теорема. *Пусть x_0 — точка локального условного экстремума функционала φ при условии* (1). *Тогда существует функционал $f_0 \in Y^*$ такой, что для любых $h \in X$*

$$\varphi'(x)h + \langle \Phi'(x_0)h,\, f_0 \rangle = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно условию III, п. 40.3 положим $h = u + v$, где $u \in U$, $v \in V = N(\Phi'(x_0))$. Покажем сначала, что $\varphi'(x_0)v_0 = 0$ для любого $v \in V$. Допустим противное, что найдется $v_0 \in V$ такое, что $\varphi'(x_0)v_0 = \alpha \neq 0$. Воспользуемся параметрическим представлением M в окрестности точки x_0 (см. (4) п. 40.3), и рассмотрим φ на лежащей в M кривой $x = x_0 + tv_0 + u(tv_0)$, где $\|u(tv_0)\| = o(t)$, $t \to 0$.

Пользуясь дифференцируемостью φ в точке x_0 получаем

$$\varphi(x_0 + tv_0 + u(tv_0)) = \varphi(x_0) + \alpha t + o(t), \quad t \to 0.$$

Так как по предположению $\alpha = \varphi'(x_0)v_0 \neq 0$, то вблизи x_0 имеются в зависимости от знака t как значения $\varphi(x_0)$ так и значения, меньше. Но тогда x_0 не является точкой локального экстремума φ на M. Значит $\varphi'(x_0)v = 0$ для всех $v \in V$. Обращаясь к левой части равенства (1) мы видим, что достаточно указать $f_0 \in Y^*$ такой, что

$$\varphi'(x_0)u + \langle \Phi'(x_0)u,\, f_0 \rangle = 0, \quad u \in U.$$

Этот функционал дается явной формулой

$$f_0 = (B^{-1}) * \varphi'(x_0).$$

Действительно,

$$\varphi'(x_0)u + \langle \Phi'(x_0)u,\, f_0 \rangle = \langle u,\, \varphi'(x_0) \rangle - \langle Bu,\, (B^{-1}) * \varphi'(x_0) \rangle = 0.$$

Замечание. Пусть $f \in Y^*$. Функционал (переменных $x \in X$, $f \in Y^*$) $l(x,\, f) = \Phi(x) + \langle \Phi(x),\, f \rangle$ называется функционалом Лагранжа. Задача на экстремум функционала φ при условии (1) называется задачей на экстремум, а f называется множителам Лагранжа. Необходимое условие (2) это необходимое условие локального экстремума для функционала Лагранжа в точке $(x_0,\, f_0)$. «Дифференцирование по f» в этой точке приводит к условию $\Phi(x_0) = 0$. Таким образом, это условие вместе с (2) дает систему уравнений для определения как возможной точки локального условного экстремума x_0, так и множителя Лагранжа f_0.

40.5. Конусы в линейных и в нормированных пространствах, частичная упорядоченность. Пусть E — линейное пространство.

Определение 1. Множество $K \subset E$ называется *конусом*, если для каждого $x \in K$ и для каждого $\alpha \geqslant 0$ элемент $\alpha x \in K$.

Определение 2. Конус K называется *выпуклым*, если всякий раз из $x \in K$, $y \in K$ следует, что $x + y \in K$.

Упражнение 1. Покажите, что выпуклый конус представляет собой выпуклое множество.

Рассмотрим простейшие примеры выпуклых конусов.

Пример 1. В $\mathbf{R}^m$ рассмотрим множество $\mathbf{R}_+{}^m$, (неотрицательный ортант), состоящее из всех векторов $x = (\xi_i)_1^m$ таких, что $\xi_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. $\mathbf{R}_+{}^m$ — выпуклый конус, так как $\alpha\xi_i + \beta\eta_i \geqslant 0$, если $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\xi_i \geqslant 0$, $\eta_i \geqslant 0$.

Пример 2. В $C[a, b]$ рассмотрим множество $C_+[a, b]$, состоящее из всех неотрицательных и непрерывных на $[a, b]$ функций. Очевидно, $C_+[a, b]$ — выпуклый конус.

Упражнение 2. В l_p $(p \geqslant 1)$ рассмотрим множество K элементов $x = (\xi_k)_1^\infty$, удовлетворяющих неравенствам

$$\xi_k \geqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\xi_i|^p \right)^{1/p}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Докажите, что K — выпуклый конус.

Если в линейном пространстве E задан выпуклый конус K, то в E можно ввести частичную упорядоченность: для некоторых пар элеметов x, $y \in E$ можно ввести понятие «больше или равно».

Определение 3. Пусть K — выпуклый конус в E. Если $x \in K$, то будем писать $x \geqslant 0$ и называть элемент x *неотрицательным*. Если x, $y \in E$ и $x - y \in K$, то будем писать $x \geqslant y$ и говорить, что *x больше или равен y*. При этом будем говорить, что пространство *E частично упорядочено конусом K*.

Упражнение 3. Покажите, что отношение $\geqslant$ обладает следующими свойствами:

1) $x \geqslant x$ (рефлексивность);
2) если $x \geqslant y$ и $y \geqslant z$, то $x \geqslant z$ (транзитивность);
3) если $x \geqslant y$ и $\alpha \geqslant 0$, то $\alpha x \geqslant \alpha y$ (положительная однородность);
4) если $x_1 \geqslant y_1$ и $x_2 \geqslant y_2$, то $x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2$ (аддитивность).

В дальнейшем будет использоваться также отношение $\leqslant$ (меньше или равно). Неравенство $y \leqslant x$, $x, y \in E$, будет означать, что $x - y \in K$, т. е. $x \geqslant y$.

Определение 4. Конус $K \subset E$, где E — нормированное пространство, называется *телесным*, если он имеет хоть одну внутреннюю точку (см. п. 3.1).

Упражнение 4. Покажите, что конусы $E_+{}^m$ и $C_+[a, b]$ (см. примеры 1 и 2) телесные. Здесь $E_+{}^m$ — неотрицательный ортант евклидова пространства E^m.

Пример 3. Покажем, что $l_+{}^2$ — множество тех элементов $x = (\xi_i)_1^\infty$ гильбертова пространства l_2, для которых все $\xi_i \geqslant 0$, является выпуклым конусом в l_2, но не является телесным конусом. Ясно, что если $x \in l_+{}^2$, то и $\alpha x \in l_+{}^2$ при $\alpha \geqslant 0$, т. е. $l_+{}^2$ — конус. Далее, если $x = (\xi_i)_1^\infty \in l_+{}^2$, $y = (\eta_i)_1^\infty \in l_+{}^2$, т. е. $\xi_i \geqslant 0$, $\eta_i \geqslant 0$, то и $x + y \in l_+{}^2$, ибо $\xi_i + \eta_i \geqslant 0$ для всех i, причем $x + y \in l_2$.

Покажем, что конус $l_+{}^2$ не является телесным. Пусть $x_0 = (\xi_{i0})_{i=1}^\infty \in$ $\in l_+{}^2$, т. е. $\xi_{i0} \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Если хоть одна координата точки $x_0 \xi_{k0} = 0$, то x_0 не является внутренней точкой $l_+{}^2$. Действительно, возьмем точку $x_k = (\xi_i)_{i=1}^\infty$, где $\xi_i = \xi_{0i}$ при $i \neq k$, а $\xi_k = -\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$. Имеем $\|x_k - x_0\| = \varepsilon/2$, т. е. $x_k \in S_\varepsilon(x_0)$ для любого $\varepsilon > 0$ и $x_k \notin l_+^2$. Пусть теперь точка $x_0 = (\xi_{i0})_{i=1}^\infty$ такова, что все $\xi_{i0} > 0$. Возьмем точку $x_k = (\xi_i)_{i=1}^\infty$, где $\xi_i = \xi_{i0}$ при $i \neq k$, а $\xi_k = -\xi_{k0}$.

Теперь $\|x_k - x_0\| = 2\xi_k \to 0$ при $k \to +\infty$, но $x_k \notin l_+{}^2$. Таким образом, ни одна точка $l_+{}^2$ не является внутренней, и, значит, этот конус не является телесным.

Упражнение 5. Выясните, какие из следующих конусов в E^3 являются выпуклыми и какие телесными: 1) $x^2 + y^2 \leqslant z^2$; 2) $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $z \geqslant 0$; 3) $|y| \leqslant x$, $z = 0$; 4) $|y| \leqslant |x|$, $z = 0$.

40.6. Теоремы о неотрицательных линейных функционалах. Определение. Пусть K — выпуклый конус в линейном пространстве E. Линейный функционал f, определенный на E, называется *неотрицательным*, если $\langle x, f\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in K$, т. е. для $x \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть линейное пространство E полуупорядочено телесным выпуклым конусом K. Тогда всякий линейный неотрицательный функционал f, определенный на E, необходимо ограничен.*

Доказательство. Вследствие телесности конуса K существует его внутренняя точка x_0. Но тогда найдется шар $S_r(x_0) \subset K$. Возьмем в E произвольный элемент $x \neq 0$ и рассмотрим элементы

$$x_0 \pm \frac{x}{2\|x\|}\, r \in S_r(x_0).$$

На этих элементах f неотрицателен, т. е.

$$\left\langle x_0 \pm \frac{xr}{2\|x\|},\ f \right\rangle \geqslant 0.$$

По линейности f отсюда получаем

$$-\frac{2\|x\|}{r}\langle x_0,\ f\rangle \leqslant \langle x,\ f\rangle \leqslant \frac{2\|x\|}{r}\langle x_0,\ f\rangle.$$

Следовательно,

$$|\langle x,\ f\rangle| \leqslant \frac{2\langle x_0,\ f\rangle}{r}\,\|x\|.$$

Это и означает ограниченность f, а также (см. п. 17.1) неравенство $\|f\| \leqslant 2\langle x_0, f\rangle/r$.

Нашей ближайшей целью будет доказательство теоремы, являющейся аналогом теоремы Хана–Банаха (см. § 16), для случая неотрицательного функционала. Как и в п. 16.1, рассмотрим сначала простейший случай продолжения линейного неотрицательного функционала.

Лемма (об элементарном продолжении). *Пусть E — вещественное нормированное пространство, частично упорядоченное выпуклым телесным конусом K. Пусть L — линейное многообразие в E, содержащее хоть одну внутреннюю точку конуса K. Пусть точка $x_0 \notin L$. Тогда любой определенный на L линейный неотрицательный функционал f можно продолжить с сохранением линейности и неотрицательности на линейное многообразие L_1 элементов вида $y + tx_0$, где $y \in L$, а $t \in E^1$.*

Доказательство. Покажем сначала, что для любой точки $x_0 \in E$, $x_0 \notin L$ найдутся в L точки y' и y'' такие, что

$$y' \leqslant x_0 \leqslant y''.$$

Действительно, пусть x_1 — внутренняя точка K, принадлежащая L. Тогда существует шар $S_r(x_1) \subset K$, а тогда

$$x_1 \pm \frac{x_0 r}{2\|x_0\|} \in S_r(x_1) \quad \text{и, значит,} \quad x_1 \pm \frac{x_0 r}{2\|x_0\|} \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$y' = -\frac{2\|x_0\|}{r}\, x_1 \leqslant x_0 \leqslant \frac{2\|x_0\|}{r}\, x_1 = y''.$$

Действительно, $x_1 \in L$, а L — линейное многообразие. Поэтому $y' \in L$ и $y'' \in L$, но тогда из неравенства $y' \leqslant y''$ следует, что $\langle y', f\rangle \leqslant \langle y'', f\rangle$.

Заметим теперь, что существует точная верхняя грань

$$c = \sup_{y' \leqslant x_0} \langle y', f\rangle. \tag{1}$$

При этом справедливо неравенство: $\langle y', f\rangle \leqslant c \leqslant \langle y'', f\rangle$.

Продолжим теперь f с L на L_1 следующим образом: для $x = y + tx_0 \in L_1$ положим

$$\langle x, f\rangle = \langle y, f\rangle + tc. \tag{2}$$

Докажем, что так определенный функционал будет линейным и неотрицательным. Если $x_1 = y_1 + t_1 x_0$, а $x_2 = y_2 + t_2 x_0$, то

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, f\rangle &= \langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, f\rangle + c(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2) = \\ &= \alpha_1\langle y_1, f\rangle + \alpha_2\langle y_2, f\rangle + c\alpha_1 t_1 + c\alpha_2 t_2 = \\ &= \alpha_1[\langle y_1, f\rangle + ct_1] + \alpha_2[\langle y_2, f\rangle + ct_2] = \alpha_1\langle x_1, f\rangle + \alpha_2\langle x_2, f\rangle.\end{aligned}$$

Итак, f линеен на L_1. Докажем, что f неотрицателен на L_1. Пусть $y + tx_0 \geqslant 0$. Тогда

$$x_0 \geqslant -y/t \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad x_0 \leqslant -y/t \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{3}$$

Из первого неравенства следует $\langle x_0,\, f\rangle \geqslant \langle -y/t,\, f\rangle$. Но $\langle x_0,\, f\rangle \leqslant c$ вследствие неравенства (1). Значит, $\langle -y/t,\, f\rangle \leqslant c$ при $t > 0$.

Следовательно, $\langle y/t,\, f\rangle + c \geqslant 0$, откуда по (2) при $t > 0$ $\langle y + tx_0,\, f\rangle \geqslant 0$. Аналогично, при $t < 0$ второе из неравенств (3) дает $c \leqslant \langle -y/t,\, f\rangle$, откуда $\langle y + tx_0,\, f\rangle \geqslant 0$. Таким образом, f неотрицателен на L_1. Лемма доказана.

Сформулируем теперь теорему М. Г. Крейна о продолжении линейного неотрицательного функционала.

Теорема 2. *Пусть линейное пространство E частично упорядочено выпуклым телесным конусом K. Пусть, далее, линейное многообразие L пространства E содержит хоть одну внутреннюю точку конуса K. Тогда любой линейный неотрицательный, заданный на L функционал можно продолжить до линейного неотрицательного функционала, определенного на всем пространстве E.*

Доказательство теоремы 2 проводится на основе доказанной леммы так же, как и доказательство теоремы Хана–Банаха (см. п. 16.1). Приведем теперь важное следствие.

Теорема 3. *Пусть вещественное нормированное пространство E частично упорядочено выпуклым телесным конусом K, не совпадающим со всем E. Тогда существует хотя бы один ненулевой неотрицательный линейный функционал, определенный на E.*

Доказательство. Пусть x_0 — внутренняя точка конуса K. Построим одномерное подпространство $L = \{x;\ x = tx_0,\ t \in E^1\}$. Зададим на L функционал f по формуле $\langle x,\, f\rangle = \langle tx_0,\, f\rangle = t$. Докажем, что f линеен и неотрицателен. Если $x_1 = t_1x_0$, $x_2 = t_2x_0$, то

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2,\, f\rangle &= \langle (\alpha_1t_1 + \alpha_2t_2)\, x_0,\, f\rangle = \\ &= \alpha_1t_1 + \alpha_2t_2 = \alpha_1\langle x_1,\, f\rangle + \alpha_2\langle x_2,\, f\rangle.\end{aligned}$$

Линейность f доказана. Для доказательства неотрицательности f покажем, что если $tx_0 \in K$, то $t \geqslant 0$. Допустим противное, что $t < 0$, но $tx_0 \in K$. Тогда $|t|x_0 \in K$ и по определению конуса $-x_0 \in K$. Покажем, что это невозможно. Так как x_0 — внутренняя точка K, то существует шар $S_r\,(x_0) \subset K$. Возьмем произвольный элемент $x \in E$; тогда $x_0 + rx/2\|x\| \in S_r(x_0)$.

Поскольку мы видели, что $x_0 \in K$, то, согласно определению 2 п. 40.3 выпуклости конуса K, сумма элементов

$$-x_0 + \left(x_0 + \frac{rx}{2\|x\|}\right) = \frac{rx}{2\|x\|} \in K.$$

Но тогда и $x \in K$. Так как x — произвольный элемент из E, то отсюда следует, что $K = E$, а по условию теоремы K не совпадает с E. Значит, предположение о том, что $tx_0 \in K$ и $t < 0$, приводит к противоречию.

Таким образом, из $tx_0 \in K$ следует, что $t \geqslant 0$. Но это означает, что функционал f неотрицателен на L: если $x = tx_0 \geqslant 0$, то $\langle x,\, f\rangle = \langle tx_0,\, f\rangle = t \geqslant 0$. Итак, f линеен и неотрицателен на L, причем L содержит внутреннюю точку K. По теореме 2 функционал f можно продолжить на все пространство E, в результате чего мы получим функционал, о существовании которого говорилось в условии теоремы. На этом доказательство теоремы 3 заканчивается.

40.7. Теоремы отделимости. Пусть X — нормированное пространство и в нем заданы множества M и N.

Определение. Будем говорить, что *линейный* ограниченный функционал x^* ($x^* \in X^*$ — пространству сопряженному к X) *разделяет множества* M и N, если для всех $x \in M$ и $y \in N$

$$\langle x,\, x^*\rangle \leqslant \langle y,\, x^*\rangle. \tag{1}$$

В этом пункте будет доказано несколько теорем отделимости о существовании функционала, разделяющего множества, в различных предположениях об этих множествах. Эти теоремы широко применяются в задачах оптимального управления (см. [14]).

Теорема 1 (об отделимости конусов). *Пусть в нормированном пространстве X задано два выпуклых конуса K_1 и K_2, причем конус K_1 телесный, а конус K_2 не пересекается с внутренностью K_1. Тогда существует линейный функционал $x^* \in X^*$, разделяющий конусы K_1 и K_2 в следующем смысле:*

$$\langle x,\, x^*\rangle \leqslant 0 \leqslant \langle y,\, x^*\rangle \tag{2}$$

для любых $x \in K_1$, $y \in K_2$.

Остановимся сначала на геометрическом смысле условия (2) разделения конусов K_1 и K_2. Множество точек $x \in X$, удовлетворяющих уравнению $\langle x,\, x^*\rangle = 0$, где $x^* \neq 0$ — фиксированный элемент из X^*, образует плоскость в X. Это плоскость делит X на два полупространства. Конус K_1 лежит в полупространстве $\langle x,\, x^*\rangle \leqslant 0$, а конус K_2 — в полупространстве $\langle x,\, x^*\rangle \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 1. Построим множество

$$K = K_1 - K_2 = \{z \in X\colon\ z = x - y,\ \ x \in K_1,\ \ y \in K_2\} \tag{3}$$

и докажем, что K является телесным выпуклым конусом в X, не совпадающим с X. Для доказательства того, что K представляет собой выпуклый конус, возьмем произвольные элементы $z_1,\, z_2 \in K$. Тогда, согласно (3), найдутся элементы $x_1,\, x_2 \in K_1$ и $y_1,\, y_2 \in K_2$ такие, что $z_1 = x_1 - y_1$, $z_2 = x_2 - y_2$. Для любых чисел $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\alpha_2 \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 &= \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2) = \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \in K, \end{aligned} \tag{40.1}$$

так как $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in K_1$, $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in K_2$. Итак, доказано, что K — выпуклый конус.

Далее, поскольку $K_1 \subset K$ и K_1 содержит внутренние точки, то и K обладает этим свойством, т. е. K — телесный конус.

Докажем, наконец, что $K \neq X$. Пусть x_0 — внутренняя точка конуса K_1. Докажем методом от противного, что тогда $-x_0 \notin K$. Допустим, что это не так. Тогда найдутся $x \in K_1$ и $y \in K_2$ такие, что $-x_0 = x - y$. Отсюда $x_0 + x = y$.

Докажем, что $x_0 + x$ — внутренняя точка конуса K_1. Так как x_0 — внутренняя точка K_1, то найдется шар $S_r(x_0) \subset K_1$. Но тогда, согласно определению выпуклого конуса, шар

$$x + S_r(x_0) = \{z \in X;\ z = x + x_0 + u,\ \ u \in X,\ \ \|u\| < r\}$$

также лежит в K_1. Следовательно, $x_0 + x$ — внутренняя точка K_1, но $x_0 + x = y \in K_2$. Оказалось, что конус K_2 пересекается с внутренностью K_1, что исключалось условием теоремы. Полученное противоречие доказывает, что $-x_0 \notin K$, т. е. $K \neq X$. Таким образом, для K выполнены все условия теоремы 3 предыдущего пункта и согласно этой теореме существует неотрицательный (в смысле конуса K) линейный функционал $x^* \in X^*$, не равный нулю. Для всех $z \in K$ имеем $\langle z, x^* \rangle \geqslant 0$, откуда $\langle x - y, x^* \rangle$ для любых $x \in K_1$, $y \in K_2$ (см. (3)). Следовательно, для всех $x \in K_1$, $y \in K_2$ выполняется неравенство (1). Так как $0 \in K_1$ и $0 \in K_2$, то этому неравенству можно придать вид (2). Теорема доказана.

Перейдем к теоремам отделимости для множеств, не являющихся конусами. Для этого нам понадобится следующая конструкция. Поставим каждому множеству $M \subset X$ в соответствие следующее множество:

$$K(M) = \{z \in X\colon\ z = \lambda x,\ \ \lambda \geqslant 0,\ \ x \in M\}.$$

Очевидно, $K(M)$ всегда является конусом.

Лемма 1. *Если множество M выпукло, то множество $K(M)$ есть выпуклый конус.*

Доказательство. Пусть $z_1, z_2 \in K(M)$; тогда $z_1 = \lambda_1 x_1$, $z_2 = \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $x_1, x_2 \in M$. Для любых $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ имеем

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = \alpha_1\lambda_1 x_1 + \alpha_2\lambda_2 x_2 = \\ = (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)\left[\frac{\alpha_1\lambda_1}{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2}\,x_1 + \frac{\alpha_2\lambda_2}{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2}\,x_2\right],$$

если $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 > 0$ (в противном случае $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0 \in K(M)$). Поскольку M выпукло (см. п. 1.7), то выражение в квадратных скобках принадлежит M, а тогда, по определению $K(M)$, $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in K(M)$.

Лемма 2. *Пусть M — выпуклое тело* (см. п. 35.1) *и $0 \notin M$. Тогда $K(M)$ не совпадает с X.*

Доказательство. Пусть x_0 — внутренняя точка M. Покажем, что $-x_0 \notin K(M)$. Если это не так и $-x_0 \in K(M)$, то найдутся $\lambda \geqslant 0$ и $x \in M$ такие, что $-x_0 = \lambda x$, причем $\lambda \neq 0$, иначе бы $0 \in M$. Но тогда $x = -\lambda^{-1} x_0 \in M$.

Поскольку и $x_0 \in M$, то вследствие выпуклости M $\alpha\lambda^{-1}(-x_0) + (1-\alpha)x_0 \in M$ для всех $\alpha \in [0, 1]$. Возьмем $\alpha = \lambda/(1+\lambda)$ и получим $\dfrac{-x_0}{(1+\lambda)} + \dfrac{x_0}{(1+\lambda)} = 0 \in M$. Но по условию $0 \notin M$. Полученное противоречие доказывает, что $-x_0 \notin K(M)$, и лемма 2, таким образом, доказана.

Лемма 3. *Пусть M — выпуклое тело и $0 \notin M$. Тогда на X можно определить линейный функционал $x^* \in X^*$ такой, что $x^* \neq 0$, $\langle x, x^*\rangle \geqslant 0$ для любых $x \in M$.*

Доказательство. Построим выпуклое тело $K(M) \neq X$ (см. леммы 1 и 2). По теореме 3 п. 40.4 существует линейный функционал $x^* \neq 0$ такой, что $\langle x, x^*\rangle \geqslant 0$ для всех $x \in K(M)$. Но $M \subset K(M)$ и, значит, x^* — искомый функционал. Лемма 3 доказана.

Теперь мы можем перейти к формулировке и доказательству теорем об отделимости множеств.

Теорема 2. *Пусть в нормированном пространстве X задано два выпуклых непересекающихся множества M и N, причем множество M имеет внутренние точки. Тогда существует линейный функционал $x^* \neq 0$, $x^* \in X^*$, разделяющий множества M и N.*

Доказательство. Построим множество

$$L = M - N = \{z \in X\colon\ z = x - y,\ x \in M,\ y \in N\}.$$

Множество L выпукло; далее, L имеет внутренние точки, так как $M \subset L$. Кроме того, $0 \notin M$. В противном случае $0 = x - y$, где $x \in M$, $y \in N$, откуда $x = y$, но M и N не пересекаются. Значит, $0 \notin M$. По лемме 3 существует $x^* \neq 0$, $x^* \in X^*$, неотрицательный на M, т. е. $\langle z, x^*\rangle \geqslant$ для всех $z \in M$. Но это значит, что

$$\langle x, x^*\rangle \geqslant \langle y, x^*\rangle \tag{4}$$

для всех $x \in M$ и $y \in N$. Теорема 2 доказана.

Обсудим геометрический смысл этой теоремы. Фиксируя $y \in N$ в (4), мы видим, что множество $\{\langle x, x^*\rangle,\ x \in M\}$ ограничено снизу, а потому существует $b = \inf\limits_{x\in M}\langle x, x^*\rangle$. Аналогично, существует $a = \sup\limits_{y\in N}\langle y, x^*\rangle$.

Пусть c заключено между a и b. Тогда для всех $x \in M$, $x \in N$ справедливо неравенство $\langle y, x^*\rangle \leqslant c \leqslant \langle x, x^*\rangle$. Множество всех $x \in X$, для которых $\langle x, x^*\rangle = c$, является гиперплоскостью в X. Эта гиперплоскость делит пространство X на два полупространства, в одном из которых $\langle x, x^*\rangle \leqslant c$, а в другом $\langle x, x^*\rangle \geqslant c$. В первом из них лежит множество N, а во втором — множество M.

Теорема 3. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в нормированном пространстве X и точка $x_0 \notin M$. Тогда точку x_0 можно строго отделить от M, т. е. существует $x^* \in X^*$ такой, что*

$$c = \sup_{x\in M}\langle x, x^*\rangle < \langle x_0, x^*\rangle. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим сначала, что неравенство (5) можно записать так: для всех $x \in M$

$$\langle x,\, x^*\rangle \leqslant c < \langle x_0,\, x^*\rangle. \tag{6}$$

Заметим теперь, что множество $X \backslash M$ — дополнение M — открыто и содержит точку x_0. Поэтому найдется шар $N = S_r(x_0)$, не пересекающийся с M. По теореме отделимости 2 множества M и N можно разделить ненулевым линейным функционалом $x^* \in X^*$, т. е. $\langle x,\, x^*\rangle \leqslant c \leqslant \langle y,\, x^*\rangle$ для любых $x \in M$, $y \in N$.

Последнее неравенство запишем в виде

$$\langle x,\, x^*\rangle \leqslant c \leqslant \langle x_0,\, x^*\rangle + \langle z,\, x^*\rangle,$$

где $z \in S_r(0)$. Так как $x^* \neq 0$, то $\inf_{z \in S_r(0)}\langle z,\, x^*\rangle < 0$. Значит, $c < \langle x_0,\, x^*\rangle$, и неравенство (6), а с ним и теорема 3, доказаны.

40.8. Принцип седловой точки и теорема Куна–Таккера. Пусть Q — множество в нормированном пространстве X и на Q определены функционалы $\varphi(x)$ и $\psi(x) = \{\psi_i(x)\}_1^n$ (n функционалов). Поставим задачу: найти $\min \varphi(x)$ при условиях $x \in Q$, $\psi(x) \leqslant 0$, т. е. все $\psi_i(x) \leqslant 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Кратко задачу можно записать так:

$$\min\{\varphi(x);\; x \in Q,\;\; \psi(x) \leqslant 0\}. \tag{1}$$

В случае, когда Q, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ выпуклы, задача (1) называется *задачей выпуклого программирования.*

Определение 1. *Функционалом Лагранжа* задачи (1) называется следующий функционал:

$$l(x,\, \lambda) = \varphi(x) + (\psi(x),\, \lambda), \tag{2}$$

где $\lambda = (\lambda_i)_1^n \in E^n$, а $(\psi(x),\, \lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i(x)$ — скалярное произведение в E^n. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называются *множителями Лагранжа.*

Функционал Лагранжа зависит, таким образом, от двух переменных: $x \in Q \subset X$ и $\lambda \in E^n$.

Определение 2. Точка x^0, λ^0, где $x^0 \in Q$, $\lambda^0 \in \mathbf{R}$, называется *седловой точкой* функционала Лагранжа (2), если для всех $x \in Q$ и всех $\lambda \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$l\left(x^0,\, \lambda\right) \geqslant l\left(x^0,\, \lambda^0\right) \geqslant l\left(x,\, \lambda^0\right) \tag{3}$$

(или противоположные им неравенства).

Неравенства (3) имеют простой геометрический смысл: $l\left(x^0,\, \lambda^0\right)$ есть минимум $l(x,\, \lambda^0)$ по переменной x и максимум $l(x^0,\, \lambda)$ по переменной λ. Подобным же образом устроена седловая точка $(0, 0)$ поверхности $z = x^2 - y^2$ в E^3.

Теорема 1 (принцип седловой точки). *Пусть* (x^0, λ^0) — *седловая точка функционала Лагранжа* (2); *тогда* x^0 *является решением экстремальной задачи* (1).

Доказательство. Запишем условие седловой точки (3) с учетом (2) подробнее. Для всех $x \in Q$ и $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеем

$$\varphi(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i(x^0) \leqslant \varphi(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \psi_i(x^0) \leqslant \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \psi_i(x). \quad (4)$$

Левое неравенство дает для всех $\lambda_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i(x^0) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \psi_i(x^0). \quad (5)$$

Отсюда следует, что все $\psi_i(x^0) \leqslant 0$. Если бы при некотором k оказалось $\psi_k(x^0) > 0$, то, выбрав $\lambda_i = 0$, $i \neq k$, а $\lambda_k > \lambda_k^0$, мы нарушили бы это неравенство. Итак, $\psi(x^0) \leqslant 0$, т. е. ограничения типа неравенства выполнены. Далее, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \psi_i(x^0) = 0$, так как если это выражение отрицательно, то (5) при $\lambda = 0$, а значит и (4), было бы невозможно. Заметим, что отсюда следуют равенства

$$\lambda_i^0 \psi_i(x^0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \quad (6)$$

С учетом (6) правую часть неравенства (4) можно записать в виде $\varphi(x^0) \leqslant \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \psi_i(x)$. Но тогда для всех $x \in Q$ таких, что $\psi_i(x) \leqslant 0$, имеем $\varphi(x^0) \leqslant \varphi(x)$, т. е. x^0 решает задачу (1). Теорема доказана.

Приложение данной теоремы в теории регуляризации некорректных задач см. в [11, с. 77–83].

Перейдем к задачам выпуклого программирования.

Определение 3. Будем говорить, что для задачи (1) выполнено *условие Слейтера*, если существует $\widehat{x} \in Q$ такой, что $\psi(\widehat{x}) < 0$.

Теорема 2 (Кун–Таккер). *Пусть множество* Q *и функционалы* φ *и* ψ *выпуклые, и пусть для задачи* (1) *выполнено условие Слейтера. Элемент* x^0 *является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда существует вектор* $\lambda^0 \in E^n$ *множителей Лагранжа такой, что*

$$l(x^0, \lambda^0) \leqslant l(x, \lambda^0), \quad (7)$$

и выполнены условия (6).

Доказательство достаточности. Нетрудно заметить, что из (6) и (7) вытекает условие седловой точки (3), и утверждение этой части теоремы следует из принципа седловой точки.

Доказательство необходимости. Пусть x^0 — решение задачи (1). Рассмотрим в E^{n+1} множество M, состоящее из векторов $\mu = (\mu_i)_{i=0}^{n}$, для каждого из которых существует вектор $x \in Q$ такой, что $\varphi(x) - \varphi\left(x^0\right) \leqslant \mu_0$, $\psi_i(x) < \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$. Множество M содержит внутренние точки: если $\mu > 0$, т. е. $\mu_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, то $\mu \in M$, а каждая точка — внутренняя.

Наконец, точка $0 \notin M$; иначе оказалось бы, что $\varphi(x) < \varphi\left(x^0\right)$, $\psi(x) < < 0$, $x \in Q$, т. е. x^0 не является решением задачи (1).

Согласно теореме 2 п. 40.5 множество M можно отделить от точки 0 функционалом $\lambda \in \left(E^{n+1}\right)^* = E^{n+1}$, $\lambda = (\lambda_i)_{i=0}^n \neq 0$. Это означает, что существуют числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю одновременно и такие, что для всех $\mu \in M$ $(\lambda, \mu) \geqslant 0$, т. е.

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mu_i \geqslant 0. \tag{8}$$

Из (8) следует, что все $\lambda_1 \geqslant 0$, ибо M содержит все $\mu > 0$. Полагая в (8) $\mu_i = \psi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и устремляя затем μ_0 к $\varphi(x) - \varphi\left(x^0\right)$, получим

$$\lambda_0 \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i(x) \geqslant \lambda_0 \varphi(x^0), \quad x \in Q. \tag{9}$$

Докажем теперь равенства (6). Очевидно, $\psi_i\left(x^0\right) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Допустим, что при $i = k$ $\psi_k\left(x^0\right) = -\alpha < 0$. Рассмотрим точку $\mu_\varepsilon \in Q$, все координаты которой суть $\varepsilon > 0$, кроме k-й, а $\mu_k = -\alpha$. Подставляя μ_ε в неравенство (8), получим $(\lambda, \mu_\varepsilon) = \varepsilon \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i - \alpha\lambda_k \geqslant 0$.

При $\varepsilon \to +0$ имеем неравенство $-\alpha\lambda_k \geqslant 0$, откуда $\lambda_k \leqslant 0$, а это возможно лишь при $\lambda_k = 0$. Значит, $\lambda_k \psi_k\left(x^0\right) = 0$, и равенства (6) доказаны. Воспользуемся теперь условием Слейтера. Из него следует, что $\lambda_0 \neq 0$. Иначе, из (9) мы получили бы, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i(x) \geqslant 0$ для всех $x \in Q$, причем не все λ_i равны нулю. Положив в этом неравенстве $x = \widehat{x}$, получим $0 > \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \psi_i(\widehat{x}) \geqslant 0$, что невозможно. Итак, $\lambda_0 > 0$.

Разделив (9) на λ_0, получим неравенство (с учетом (6))

$$\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_0^{-1}\lambda_i\right) \psi_i(x) \geqslant \varphi\left(x^0\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_0^{-1}\lambda_i^0\right) \psi_i\left(x^0\right),$$

т. е. неравенство (7). Наконец, для всех $x \in Q$ таких, что $\psi(x) \leqslant 0$, имеем $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\lambda_0^{-1}\lambda_i\right) \psi_i(x) \leqslant \varphi(x)$. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ, ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Мы рассмотрели в книге различные аспекты функционального анализа в нормированных, банаховых, гильбертовых и метрических пространствах. Этим далеко не исчерпывается функциональный анализ. Некоторые прикладные задачи требуют построения теории в более общих пространствах. Мы даем ниже краткое введение в теорию топологических пространств и надеемся, что это облегчит понимание книг и статей по функциональному анализу, основанных на топологических понятиях.

Общие топологические пространства. Пусть X — некоторое непустое абстрактное множество. Говорят, что в X задана топология τ, если в X указана система множеств τ так, что τ содержит пустое множество, само множество X, а также объединения множеств любой подсистемы из τ и пересечение множеств любой конечной подсистемы из τ.

Множество X с топологией τ называется топологическим пространством. При этом множества из τ называются открытыми множествами. Окрестностью точки x_0 называется любое открытое множество, содержащее x_0. Окрестностью множества $M \subset X$ называется любое открытое множество, содержащее M.

Точка x_0 называется предельной точкой множества M, если в любой окрестности точки x_0 найдется точка $x \in M$, $x \neq x_0$. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым.

Далее рассматриваются отделимые топологические пространства, в которых у двух разных точек из X существуют их непересекающиеся окрестности.

Семейство β подмножеств из X называется базисом топологии τ, если $\beta \subset \tau$ и если любое множество из τ есть объединение множеств из β. Поясним это определение. Часто, чтобы задать топологию τ, достаточно задать ее часть — базис β, по которому однозначно восстанавливается вся топология τ.

Пример. Всякое метрическое пространство X является топологическим пространством. В нем в качестве топологии τ рассматривается совокупность всех открытых в X множеств. Рассмотрим совокупность открытых в X шаров с центрами во всевозможных точках из X. Так как каждое открытое множество в X представимо в виде объединения открытых шаров, то β является базисом топологии τ.

Упражнение. Проверьте, что метрическое пространство является отделимым топологическим пространством.

Заметим, что многие понятия, например, полнота, компактность и др., переносятся в топологические пространства.

Дадим определение непрерывного отображения (оператора). Пусть X, Y — топологические пространства. Рассмотрим отображение $y = F(x)$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ определенный $y \in Y$. Отображение F называется непрерывным в точке x_0, если для любой окрестности U точки $F(x_0)$ найдется окрестность V точки x_0 такая, что если $x \in V$, то $F(x) \in U$. Отображение F называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке X.

Линейные топологические пространства. Пусть X — линейное пространство и в нем выбрана топология τ. Говорят, что топология τ согласована с линейной структурой X, если

1) операция сложения в X непрерывна в топологии τ по совокупности переменных, т.е. для любой пары $x, y \in X$ и любой окрестности U_{x+y} элемента $x + y$ найдется окрестность U_x точки x и окрестность U_y точки y, такие, что $U_x + U_y \subset U_{x+y}$,

2) операция уможения элемента из X на число непрерывна в топологии τ по совокупности переменных, т.е. для любого $x \in X$ и любого числа λ и любой окрестности $U_{\lambda x}$ числа λx найдутся окрестность U_x элемента x и окрестность Λ числа λ, такие, что $\mu U_x \subset U_{\lambda x}$ для любого $\mu \in \Lambda$.

Определение. Пусть в линейном пространстве X выбрана топология τ, согласованная с линейной структурой в X. Тогда X называется линейным топологическим пространством.

Определение. Система β_{x_0} окрестностей точки x_0 называется базисом окрестностей этой точки, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность V_{x_0} точки x_0 такая, что $V_{x_0} \subset U$ и $V_{x_0} \subset \beta_{x_0}$.

Замечание. Можно показать, что совокупность β базисов по всевозможным точкам X является базисом топологии τ. Если X — линейное топологическое пространство, то каждая окрестность точки $x_0 \in X$ имеет вид $x_0 + V$, где V — окрестность нулевого элемента в X. Поэтому, если V пробегает β_0 - базис окрестностей нуля в X, то $x_0 + V$ пробегает базис окрестности элемента x_0. Таким образом, в линейном топологическом пространстве достаточно указать, базис окрестностей нуля.

Многочисленные примеры линейных топологических пространств дают рассмотренные выше нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Локально выпуклые пространства. Согласованная с линейной структурой линейного пространства X топология может быть задана самыми различными способами. Часто это удобно сделать с помощью семейства полунорм.

Определение. Функция $p(x)$ переменного $x \in X$ с вещественными значениями называется полунормой, если для любых x, $y \in X$ и любого скаляра α $p(x)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$,

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Заметим, что из 1), 2) следует, что

3) $p(0) = 0$,

4) $p(x - y) \geqslant |p(x) - p(x)|$,

5) $p(x) \geqslant 0$.

Для доказательства 3) достаточно взять в 2) $\alpha = 0$. Далее из 1) имеем $p(x) \geqslant p(x+y) - p(y)$. Заменив x на $x - y$ получим $p(x-y) \geqslant p(x) - p(y)$ и аналогично $p(x - y) \geqslant p(x) - p(y)$, т.е. имеем 4). Полагая в 4) $y = 0$, получим 5).

Всякая норма является и полунормой. Обратное неверно, т. к. для полунормы не исключено, что $p(x) = 0$ при $x \neq 0$. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть $p(x)$ — полунорма в линейном пространстве X, а $c > 0$. Рассмотрим в X множество*

$$M = \{x \in X : \quad p(x) < c\}.$$

Тогда M является выпуклым, уравновешенным и поглощающим множеством в X.

О п р е д е л е н и е. Выпуклость M следует из аксиом полунорм. Если $p(x) < c$ и $p(y) < c$, то для любых $\alpha \in (0,\, 1)$ $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant p(\alpha x) + p((1-\alpha)y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y) < \alpha c + (1-\alpha)c = c$. Проверим уравновешенность M. Если $p(x) < c$ и $|\alpha \leqslant 1|$, то $p(\alpha x) \leqslant |\alpha| p(x) \leqslant p(x) < c$.

Проверим поглощаемость M: $p(\alpha^{-1}x) \leqslant \alpha^{-1}p(x) < c$, если $\alpha > p(x)c^{-1}$.

Поясним теперь каким образом с помощью систему полунорм можно в линейном пространстве X ввести топологию, согласованную с его линейной структурой.

Пусть $\{p_\gamma(x)\}_{\gamma\in\Gamma}$ — система полунорм в X, где Γ - множество индексов.

Рассмотрим всевозможные конечные подсистемы $\{p_{\gamma_i}(x)\}_{i=1}^N$ и рассмотрим множества ($\varepsilon_i > 0$)

$$U = \{x \in X : p_{\gamma_i}(x) < \varepsilon_i,\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N\}. \tag{1}$$

Эти множества и образуют базис окрестностей нуля в соответствующей топологии τ в X.

О п р е д е л е н и е. Линейное топологическое пространство называется локально выпуклым, если его топология содержит базис выпуклых окрестностей нуля.

Можно показать, что в каждом локально выпуклом пространстве существует система полунорм, определяющая его топологию (см. [12]). В нормированном пространстве топология определяется единственной полунормой, равной нулю при $x = 0$, т. е. нормой. Дадим примеры локально выпуклых пространств.

П р и м е р 1. В пространстве $C(R)$ всех непрерывных на оси Rфункций в качестве определяющей топологию системы полунорм возьмем

$$p_n(x) = \max_{[-n,\, n]} |x(t)|, n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Пример 2. Рассмотрим пространство $S(R)$ всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на R функций, для которых

$$\kappa_{k,\,e}(x) = \sup_{x \in R} |t^k x^{(l)}(t)| < +\infty$$

$$k,\, l = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

Упражнение. Проверьте, что $\kappa_{k,\,l}(x)$ являются полунормами.

Определим топологию в $S(R)$ посредством этой системы полунорм.

Пространство $S(R)$ называется пространством бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности. На его базе строится сопряженное ему пространство S' обобщенных функций.

Пример 3. Пусть X — банахово пространство, а X^* — сопряженное ему пространство.

Упражнение. Показать, что $p_f(x) = |\langle x,\, f\rangle|$, $f \in X^*$ являются полунормами в X.

Определим в X слабую топология для чего зададим базис окрестностей нуля в X формулами (1) с $p_{\gamma_i}(x) = |\langle x,\, f_{\gamma_i}\rangle|$.

Упражнение. Проверить, что сходимость в банаховом X в смысле слабой топологии это слабая сходимость в X.

В заключение заметим, что значительная часть определений и фактов теории нормированных пространств перенесена на локально выпуклые пространства. Сюда относятся, например, теорема Хана–Банаха, теория фредгольмовых операторов, теорема Шаудера о неподвижной точке и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы.— М.: Физматлит, 2001.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.
3. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе.— М.: Мир, 1974.
4. *Василенко В. А.* Теория сплайн-функций.—Новосибирск: НГУ, 1978.
5. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1988.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.
7. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1981.
8. *Гавурин М. К.* Лекции по методам вычислений.— М.: Наука, 1971.
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.
10. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.— М.: ИЛ, 1962; Спектральная теория.— М.: Мир, 1966.
11. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.
12. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.
13. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.
14. *Канторович Л В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Наука, 1984.
15. *Карманов В. Г.* Математическое программирование.—М.: Наука, 1986.
16. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа.— М.: Наука, 1988.
17. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1989.
19. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1975.
20. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1971.
21. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т I, II, III.— М.: Дрофа, 2001.
22. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1987.
23. *Лаврентьев М. А.* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений.— Новосибирск: НГУ, 1973.
24. *Лебедев В. И.* Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Физматлит, 2000.
25. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.
26. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными.— М.: Мир, 1977.
27. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1983.

28. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М.: Гостехиздат, 1954.
29. *Наймарк М. А., Мартынов В. В.* Функциональный анализ.— Долгопрудный: МФТИ, 1970.
30. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.
31. *Обэн Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ.— М.: Мир, 1988.
32. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1982.
33. *Рид. М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1976.
34. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М.: ИЛ, 1954.
35. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
36. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.
37. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1990.
38. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. IV, V.— М.: Наука, 1981.
39. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
40. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.
41. *Тихонов А. Н., Арсенин В Н.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
42. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
43. *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу.— М.: Наука, 1984.
44. *Эдвардс Д. А.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная погрешность 229
Абсолютно непрерывная функция 96, 106
Абстрактное интегрирование 253
Абстрактная функция 136, 137, 140
Абстрактный эллиптический оператор 354
Аффинное многообразие 13
Аналитический оператор 372, 415
Аналитичность резольвенты 252
Априорная оценка 148, 224
Арцела теорема 198
Асколи–Арцела теорема 200

Банаха теорема
— — о замкнутом графике 157
— — об обратном операторе 128
Банаха–Штейнгауза теорема 123
Банахово пространство 43
Базис
— линейного пространства 12, 60
— счетный 48, 60
Бесконечномерное линейное пространство 13
Бикомпактное множество 192
Биортогональная система 168
Броуэра принцип неподвижной точки 398

Вейерштрасса свойство 269
Выпуклая линейная комбинация 178, 399
Выпуклый функционал 16, 463, 475
Выпуклое множество 15
— тело 399
Вложение нормированных пространств 69, 96, 100
Вполне непрерывный оператор 242
Взаимно однозначный оператор 110

Гильберта–Шмидта оператор 206, 209
— — теорема о разложении по собственным векторам 245

Дефект линейного оператора 219
Декомплексификация 16
Деминепрерывный оператор 452
Диаграмма Ньютона 421
Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве 340, 351, 387
Дифференциальный оператор 117, 129
Дифференцирование абстрактной функции 137
— оператора в смысле Гато 378
— — — — Фреше 363
Дискретный метод Фурье 302, 307
Двуслойная разностная схема 347

Евклидово пространство 36

Жордана теорема о нормальной форме 242

Задача выпуклого программирования 475
— Дирихле 173, 299
— Коши 351, 359, 387

Индекс линейного оператора 219
Интеграл Лебега 65, 71
— Римана 91
— Стилтьеса 258
Инвариантное линейное многообразие 267
Итерационный процесс Ньютона 391
Изометрия нормированных пространств 36, 69
Изоморфизм 15, 69

Компактная ε-сеть 196
Компактное множество 194
Комплексификация 16
Конечная ε-сеть 195
Конус 468
— телесный 468
— выпуклый 468

Корень квадратный из неотрицательного оператора 269
Крейна теорема 471
Критерий компактности Хаусдорфа 194

Лагранжа формула конечных приращений 367
— множители 475
Лемма об элементарном продолжении 163, 470
— Рисса 32
— Шмидта 221
Левый обратный оператор 131
Линейная оболочка 57
Линейный оператор 111
— функционал 163
Линейное многообразие 13, 33, 54
— подпространство 29
— пространство 9
— уравнение 1-го рода 215, 236
— — 2-го рода 210
Ляпунова–Шмидта уравнение разветвления 430

Малого параметра метод 141, 347
Матрица Якоби 365
Мера обусловленности линейного оператора 230
Метод верхней релаксации 386
— Галеркина 323, 331, 334, 343, 441, 453
— замораживания коэффициентов 153
— конечных элементов 339
— ломаных Эйлера 445
— малого параметра 141, 347
— наименьших квадратов 330
— продолжения по параметру 146, 407
— простой итерации 383
— прямых 295
— сеток 300
Метрическое пространство 18
Множество меры нуль 71
— нулей (ядро) линейного оператора 126, 216
— слабо ограниченное 177
Множество I-й и II-й категории 49
Модифицированный итерационный процесс Ньютона 395
Монотонный оператор 445, 456, 463

Наилучший элемент приближения 30
Неограниченный линейный оператор 155
Неотрицательный линейный оператор 183
— функционал 469
Неподвижная точка нелинейного оператора 380
Непрерывно обратимый оператор 128
Непрерывность абстрактной функции 136
— линейного оператора 111, 112, 124
— ухудшающая 452
— улучшающая 452
Неравенство Бесселя 56
— Гёльдера 20, 25
— Коши–Буняковского 37
— Минковского 20, 25
Нётеров оператор 219
Невырожденность норм в приближенной схеме 282
Неявный оператор 408
Нигде не плотное множество 49
Никольского теорема 223
Норма вектора 17
— графика 160
— линейного оператора 117
— , подчинение 160
— , эквивалентность 28, 160
— k-линейного оператора 369
Нормально разрешимый оператор 216
Нормированное пространство 17, 43
Ньютона итерационный процесс 391
— модифицированный итерационный процесс 395

Область значений оператора 109
— определения оператора 109
Обобщенная производная (в смысле Соболева) 94
Обобщенное решение 172, 336
Ограниченность линейного оператора 112
— множества 20
— оператора 111
Оператор абстрактный эллиптический 354
— билинейный 126
— взаимно однозначный 110

Оператор в конечномерных пространствах 114
— в пространствах последовательностей 115
— вполне непрерывный 203, 206, 242, 399
— деминепрерывный 452
— дифференциальный 117, 129
— дифференцируемый 363, 378
— замкнутый 154
— интегральный 116
— коэрцитивный 448
— конечномерный 204
— кусочно линейной интерполяции 311
— линейный 111
— многозначный 109
— монотонный 445, 456, 463
— неограниченный 155
— неотрицательный 183
— непрерывный 112
— непрерывно обратимый 128
— неявный 408
— нормально разрешимый 218
— обратный 126, 133
— ограниченный 111
— продолжения (интерполяции) 310
— проектирования (проектор, ортопроектор) 187
— самосопряженный 181, 186
— симметрический 186
— сопряженный 178, 184
— сужения 282
Оператор-функция 136
Операторное неравенство 184, 347
Ортогональная система элементов 38
— сумма 60
Ортогональный базис 60
Ортогональное дополнение 53, 216
— разложение 60
Ортопроектор 187
Оснащенное банахово пространство 59
Отделимость множеств 472
Открытое множество 26
Открытое отображение 161
Относительная погрешность 229
Отношения между подпространствами и ортопроекторы 188
Отрезок в линейном пространстве 15
Парсеваля–Стеклова равенство 57
Первая вариация нелинейного оператора 378
Плотное линейное многообразие 33, 54
Подчинение нормы 160
Подпространство 29
— собственное 238
Пограничный слой 349
Погрешность вычисления 229
Полная ортогональная система 56
Полное линейное пространство 42
Пополнение пространств 61
Правый обратный оператор 131
Предел абстрактной функции 136
— оператора 111
— последовательности 19
— слабый 176
Предельная точка 27
Предельный переход в интеграле Лебега 82
Предельно плотная последовательность подпространств 325
Приближение банахова пространства 281
— элементами подпространства 30
Принцип вложенных шаров 49
— максимума 153, 301
— равномерной ограниченности 123
— седловой точки 476
— сжимающих отображений 380
— Шаудера 401, 406
Процесс ортогонализации Шмидта 40
Продолжение линейного оператора по непрерывности 125
Проектор 187
Произведение операторов 110, 121
Пространство банахово 42
— вполне непрерывных линейных операторов 203
— гильбертово 50
— евклидово 36, 39
— конечномерных линейных столбцов 19
— конечномерных столбцов 22
— кусочно непрерывных функций 40
— Лебега 64
— линейных операторов $\mathcal{L}(X, Y)$, $\mathcal{L}(X)$ 117, 120
— линейное 9
— метрическое 18

Пространство непрерывных функций с равномерной метрикой $C[a, b]$, $C(\overline{G})$ 44
— нормированные 17
— последовательностей l_p, m 23
— последовательностей l_p, m 23
— равномерно выпуклое 176
— рефлексивное 175, 201
— сепарабельное 48, 60
— со счетным базисом 48
— — скалярным произведением 36
— Соболева $W_p^l[a, b]$, $H^l[a, b]$,$W_p^l(G)$, $H^l(G)$, 92
— строго нормированное 31
— унитарное 37
Прямая сумма 153

Радиус сходимости степенного ряда 139, 372
Расстояние от точки до множества 29, 51
Расширение оператора 109
Равенство Парсеваля–Стеклова 57
— параллелограмма 41
Равномерная ограниченность 199
— сходимость линейных операторов 119
— — степенного ряда 138
Равномерно выпуклое пространство 176
Равностепенная непрерывность 199
Размерность линейного пространства 12
Разностная схема 291, 345
Разрывная функция 65
Рефлексивное пространство 175, 201
Регуляризация приближенного решения 233
Регулярное возмущение 347
Резольвента линейного оператора 247
Резольвентное множество 247
Рисса теорема 171
Рисса–Шаудера теория 210
Ряд в нормированном пространстве 46, 120
— Тейлора 141
— Фурье 54, 59

Самосопряженный оператор 181, 186
Сепарабельное множество 48
— пространство 48, 60
Сеточная гармоническая функция 301
Сеточное множество 295
Сфера 18
Сходимость в среднем 72
— по норме 19, 46
— почти всюду 72
— приближенной схемы 289, 329, 435
— слабая 176
Сильная сходимость линейных операторов 122
Сильно непрерывная полугруппа 353
Симметрический оператор 186
Сингулярное возмущение 348
Скалярное произведение 36, 41
Слабая сходимость 176, 205
— фундаментальная последовательность 201
Слабо ограниченное множество 177
— полное пространство 202
— полунепрерывный снизу функционал 462
— фундаментальная последовательность 201
Собственное значение и собственный вектор 238, 302
— линейное многообразие 238
Согласованность норм 283
Сопряженное пространство 169
Сопряженный оператор 178, 184
Спектр линейного оператора 248
Спектральная функция самосопряженного оператора 264
Спектральный радиус линейного оператора 249
Сплайн интерполяционный 310
— кубический 317
Средняя функция 34
Срезывающая функция 34
Степенной ряд 138, 369, 372, 376
Строго нормированное пространство 31
Суперпозиция операторов 110
Сужение оператора 109
Сжатие, сжимающий оператор 380

Теорема Арцела 199
— Банаха–Штейнгауза 123
— — о замкнутом графике 157
— — об обратном операторе 128
— Броуэра 398
— Бэра–Хаусдорфа 49

Теорема Вейерштрасса 47
— вложения 96, 99
— Крейна 471
— Куна–Таккера 474
— Лере–Шаудера 406
— Нётера 219
— Никольского 223
— о пополнении 61, 63
— отделимости 472
— Рисса 171
— Фредгольма 220
— Хана–Банаха 163
— Хаусдорфа 218
— Шаудера 205
Точка бифуркации 427
— ветвления 427

Умножение элементов 125
Унитарное пространство 37
Уравнение Лапласа 299
— теплопроводности 295, 305
Условие аппроксимации 286, 325, 433
— Липшица 368
— Слейтера 476
— устойчивости 288, 327, 434
Устойчивость приближенной схемы 288, 305

Фундаментальные последовательности 42, 61
Формула Тейлора 377
Фредгольмов оператор 219
Функционал выпуклый 16, 463, 475
— Лагранжа 475
— линейный 163
— слабо полунепрерывный снизу 462
Функция от оператора 122, 276

Хана–Банаха теорема 163
Хаусдорфа критерий компактности 194
— теорема о нормальной разрешимости 218

Частичная упорядоченность 468
Число нулей линейного оператора 219

Шаблон 301
Шаудера принцип неподвижной точки 401, 406
Шаудера теорема о сопряженном операторе 205
Шмидта лемма 221
— процесс ортогонализации 40

Экстремум функционала 461

Ядро усреднения 34

P-сходимость 325
T-сходимость 282
*-слабая сходимость 170