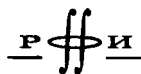


М.А. Ильгамов
А.Н. Гильманов

НЕОТРАЖАЮЩИЕ УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦАХ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2003



Ильгамов М. А., Гильманов А. Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 240 с. — ISBN 5-9221-0347-4.

Книга посвящена проблеме постановки корректных условий на искусственных границах расчетной области, анализу их свойств, численной реализации и эффективности. Это направление исследований зародилось сравнительно недавно. Оно оказалось настолько важным при математическом моделировании в акустике, механике, физике, технике, геофизике и в других науках, что к настоящему времени выполнено уже несколько сот работ разных авторов. Основное внимание в книге уделяется неотражающим условиям и полученным для них результатам в конкретных задачах.

Для специалистов в области вычислительной механики и физики, для студентов и преподавателей университетов, а также для всех, кто имеет дело с численным моделированием.

Оглавление

Предисловие	5
Введение. Предмет исследования	6
Глава 1. Пространственные и пространственно-временные экстраполяции	11
1.1. Анализ устойчивости и точности с учетом граничных условий в одномерных задачах. Линейное гиперболическое уравнение	11
1.2. Волновое уравнение. Система гиперболических уравнений	21
1.3. Другие примеры анализа устойчивости и точности с учетом граничных условий	24
1.4. Применение пространственно-временной экстраполяции для уравнений газовой динамики	30
1.5. Анализ в плоской задаче	35
1.6. Применение пространственно-временной экстраполяции в за- дачах теории упругости	37
1.7. Метод «полного отражения» в двумерных задачах теории упругости	40
Глава 2. Неотражающие условия для волнового уравнения	46
2.1. Линейные неотражающие условия в плоской задаче	46
2.2. Некоторые оценки приближений неотражающих условий	53
2.3. Адаптивные неотражающие граничные условия	56
2.4. Разновидности неотражающих условий для линейного волно- вого уравнения	59
2.5. Последовательность линейных условий, основанных на рас- смотрении расходящихся сферических волн	67
2.6. Применение условий, основанных на рассмотрении расходя- щихся сферических волн. Двумерные задачи	71
2.7. Дальнейшее рассмотрение многомерных волновых задач	76
2.8. Линейные условия, содержащие угол падения волны на ис- кусственную границу	83
2.9. «Радиационные граничные операторы»	87
2.10. Радиационные граничные условия и анизотропная коррекция для уравнений Гельмгольца	90
Глава 3. Неотражающие граничные условия для уравнений газовой динамики	95
3.1. Одномерные гиперболические уравнения	96
3.2. Неотражающие условия для сферически симметричных урав- нений Эйлера	102

3.3. Неотражающие граничные условия для нестационарных сжимаемых течений	106
3.4. Стационарные сжимаемые и несжимаемые течения	112
3.5. Применение неотражающих условий в задаче трансзвукового течения	114
3.6. Неотражающие условия для уравнений Эйлера	117
3.7. Численное исследование неотражающих условий для уравнений Эйлера	123
3.8. Неотражающие условия в задачах течения вязкого газа для нестационарных и установившихся течения сжимаемой и несжимаемой жидкости	130
3.9. Дозвуковое обтекание плоской пластины	132
3.10. Неотражающие условия в задачах астрофизики	136
3.11. Нелинейные неотражающие условия	137
Глава 4. Неотражающие условия в динамических задачах теории упругости и вязкости	144
4.1. Динамические задачи теории упругости	144
4.2. Линейные условия, содержащие угол падения	145
4.3. Граничные условия для упругих волн	149
4.4. Различные задачи теории упругости	157
4.5. Вязкоупругие среды	160
Глава 5. Неотражающие условия в задачах распространения поверхностных гравитационных волн	162
5.1. Линейные волны на поверхности жидкости	162
5.2. Нелинейные волны на поверхности жидкости	168
5.3. Двумерная свободная поверхность волн гравитации	171
Глава 6. Условия поглощения	173
6.1. Волновое уравнение с вязкостным членом	173
6.2. Комбинация условий поглощения и излучения	177
6.3. Уравнения Шредингера и Максвелла с вязкостным членом	179
6.4. Более общая модель поглощающего слоя	181
6.5. Уравнения газовой динамики	188
6.6. Некоторые модельные неотражающие условия	193
Глава 7. Условия для уравнения Лапласа	196
7.1. Некоторые оценки влияния внешних граничных условий на решение вблизи обтекаемого тела	196
7.2. Задача распределения статического электрического потенциала	201
7.3. Обтекание упругой пластины, находящейся в потоке идеальной несжимаемой жидкости	203
Заключение	207
Список литературы	208

Предисловие

Книга посвящена проблеме постановки корректных условий на искусственных границах расчетной области, анализу их свойств, численной реализации и эффективности. Это направление исследований зародилось сравнительно недавно. Оно оказалось настолько важным при математическом моделировании в акустике, механике, физике, технике, геофизике и в других науках, что к настоящему времени выполнено уже несколько сот работ разных авторов. Поэтому в настоящее время имеется настоятельная необходимость хотя бы кратко изложить полученные результаты и попытаться собрать всю доступную литературу по теме.

В численных методах всегда приходится сталкиваться с реализацией граничных условий. Об этом можно судить, например, по книге (Roache, 1976) и по другим известным изданиям. Но в данной книге мы касаемся только так называемых неотражающих условий (*nonreflecting conditions*) на границах расчетной области. Здесь широко применяются такие понятия, как ближнее поле, дальнее поле и искусственная (фиктивная) граница расчетной области.

Отметим некоторые особенности книги. Основное внимание в ней обращается на построение неотражающих условий и на полученные с их помощью результаты в конкретных задачах. В то же время теоретическое исследование этих условий, а также подробности численной реализации их почти не рассматриваются. При изложении отдельных подходов и результатов, как всегда, сыграли роль научные интересы авторов. Поэтому разные вопросы освещаются неодинаково подробно.

С целью расположения авторов по единому алфавиту и унифицирования списка литературы он дается только на английском языке. В книге не отражены результаты, полученные во всех приведенных источниках. Список литературы не является полным. Особенно это относится к работам последних лет, что объясняется прекращением поступления многих журналов в Россию.

Введение

Предмет исследования

При решении задач механики, физики, техники, геофизики и других наук конечно-разностными методами неограниченная область задания функции заменяется расчетной областью конечных размеров. Поэтому возникает проблема постановки условий на искусственных (фиктивных) границах этой расчетной области.

В качестве примера рассмотрим задачу о реакции упругой бесконечно длинной цилиндрической оболочки на динамическое воздействие (рис. 1а). Если вязкие эффекты слабы, волны вдоль оболочки от места возбуждения затухают медленно. Волны в упругой полуплоскости (рис. 1б) ослабевают по мере удаления от места возбуждения в силу двумерности, но область, где интенсивность их еще не мала, может быть значительной по размерам.

Отметим, что в случае статического воздействия в указанных задачах решения затухают намного быстрее, и затронутый здесь вопрос может не представлять большого интереса. Однако есть статические задачи, в которых он является также важным.

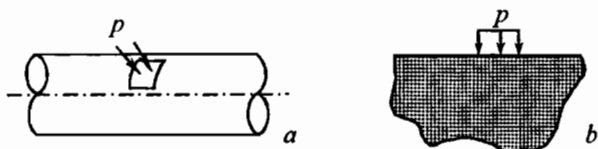


Рис. 1. Примеры необходимости использования неотражающих граничных условий

Представляется, что в механике твердого деформируемого тела класс задач с протяженными границами относительно узок. Иначе обстоит дело в механике жидкости и газа. Примером является нестационарное обтекание препятствия неограниченным потоком сжимаемой жидкости. Как известно, при решении за-

дачи многими аналитическими методами случай неограниченно удаленных границ проще, чем для близких границ. В обоих случаях имеется точное соответствие между порядком дифференциальных уравнений и числом граничных условий. Иначе обстоит дело при решении задачи конечно-разностными методами, когда такого соответствия может и не быть. Далее, вычислительные граничные условия не обязательно должны быть адекватны аналитическим. Если, например, для описания прилипания вязкой жидкости к стенке они совпадают, то условия на входе в канал и выходе из него могут иметь большое разнообразие и почти всегда будут отличаться от аналитических. Поэтому численное решение в целом не будет совпадать с аналитическим решением во всей области. Достаточно требовать, чтобы они были близки в области интереса (ближнего поля).

В численных методах нужно либо отображать неограниченную область на конечную путем преобразования системы координат, либо располагать границы расчетной области достаточно далеко от обтекаемого препятствия (приложенных к нему силовых факторов и т.д.), чтобы их влияние на интересующее нас ближнее поле было мало. Другой путь состоит в том, чтобы на близких искусственных границах ставить такие условия, которые не искажали бы поле внутри области, т.е. обеспечивали полное или частичное поглощение проходящих возмущений.

Первый из указанных подходов может быть использован далеко не всегда. Например, его нельзя применить, если рассматривается нестационарный процесс, или в решении имеются осцилляции и сингулярности в бесконечности. Могут быть и другие неблагоприятные обстоятельства. При втором подходе отраженные от границ нефизические возмущения несколько ослабевают, ввиду наличия аппроксимационной вязкости. Кроме того, иногда основной интерес представляет переходный процесс, включающий максимальные значения параметров в ближнем поле. В случае достаточно удаленных искусственных границ отраженные от них волны к этому времени могут и не дойти до него. При этом на границах могут быть поставлены самые простые и удобные условия, например, условия Дирихле или Неймана¹. Однако применение подхода тесно связано с возможностями вычислительной техники. Часто не удастся ставить границы достаточно далеко, что неизбежно вносит ошибки в расчеты.

Например, в задаче обтекания сферы потоком при малых

¹Общая идея о постановке на границах расчетной области аналитических условий, справедливых для «бесконечности», была предложена на заре развития численных методов решения (Richardson, 1910).

числах Рейнольдса аналитическое решение (Masliyash and Epstein, 1970) показывает следующее. Сопротивление сферы, вычисленное при задании параметров невозмущенного потока на бесконечности ($u = U_\infty$, $v = 0$, $p = p_\infty$) на искусственной сферической границе радиусом R , равно 10 радиусам сферического тела, на 18% больше, чем при постановке указанных параметров на «истинной бесконечно удаленной» границе ($R \rightarrow \infty$). А в практических вычислениях границы расчетной области берутся намного ближе, чем 10 габаритных размеров обтекаемого тела, что неизбежно приводит к ошибкам в расчетной области. Тем не менее, оба эти подхода широко используются в расчетной практике.

Для нас здесь представляет интерес формулировка и реализация условий на искусственных границах, обеспечивающих полное или частичное (но как можно большее) поглощение падающих на них волн. Применение таких условий позволяет уменьшить размеры области (число ячеек) без ущерба точности получаемых результатов. Это особенно важно, когда ближнее поле содержит обтекаемое тело, описание деформаций и взаимодействия которого с потоком представляет собой сложную и трудоемкую задачу (рис. 2).

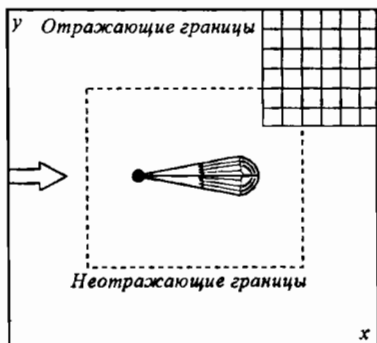


Рис. 2. Внешнее обтекание

последним десятилетиям. Причина состоит, вероятно, в том, что основное внимание всегда уделялось схемам во внутренних точках; задание численных граничных условий, например, для свободной поверхности, не привлекало равного внимания, несмотря на то, что на их важность указывалось с самого начала развития названных методов (Richardson, 1910), и что это оказывает существенное влияние на решение задачи конечно-разностными методами. «Следует удивляться, почему важность численных граничных условий не была широко признана в течение многих лет (и, возможно, недооценивается даже в настоящее время)» (Roache, 1976).

До середины шестидесятых годов полностью задавались известными значениями параметров на входной и выходной границах

области (например, скорости на входе в невозмущенном потоке $u = U_\infty$, $v = 0$). Здесь определенный выигрышный аспект состоит в том, что полное задание их на входной границе обеспечивает устойчивость схемы. Далее были предложены и реализованы менее жесткие условия (или «мягкие» условия). Обзор исследований по ним, в частности, по постановке граничных условий на входной и выходной границах дается во многих монографиях и статьях. Публикации за последние годы указывают на то, что сейчас этому вопросу уделяется большое внимание. В частности, появились работы, всецело посвященные выводу и анализу влияния на решение в ближнем поле различных неотражающих условий на искусственных границах расчетной области.

Проблема включает в себя: 1) построение неотражающих условий, теоретический анализ их свойств и точности; 2) численную реализацию уравнений внутри области и условий на ее границах в конкретной задаче, решение задачи; 3) анализ результатов решения с точки зрения эффективности различных условий, поставленных на искусственных границах.

В книге основное внимание уделяется первому (за исключением свойств и точности) и третьему пунктам. Не рассматриваются чисто теоретические вопросы. Приоритет отдается демонстрации существующих подходов для уменьшения нефизических отражений от искусственных границ.

Остановимся более подробно на первом пункте. Нельзя построить полностью неотражающие условия в общем виде. Более того, нельзя их построить для более узкого класса задач, например, линейных гиперболических уравнений (кроме одномерного случая). Желательно построить последовательность условий, годных для определенного класса задач и допускающих при необходимости дальнейшие уточнения. При этом неотражающие граничные условия должны быть простыми по реализации. В противном случае не получается выигрыша во времени счета по сравнению со вторым из указанных выше подходов (простое расширение области) или он будет незначительным. Построение частично поглощающих условий может быть достигнуто многими способами.

Приведем некоторые из них: 1) использование на границах линейных и нелинейных соотношений, описывающих работу амортизаторов, пружинного механизма с определенными массовыми, жесткостными и демпфирующими свойствами; 2) введение в рассмотрение вязкого слоя («губки») около границ расчетной области; 3) введение на границе импедансного соотношения (между скоростью и давлением), известного из классической акустики; 4) придание искусственной границе свойства

быстро гасить отражения при движении ее к бесконечности; 5) использование пространственных и пространственно-временных экстраполяций; 6) использование решений дифференциальных уравнений в области для вывода условий на искусственной границе.

Отметим, что наряду с термином неотражающие (nonreflecting) условия, применяются также названия поглощающие (absorbing), открытые (open), излучающие (radiation), дальнего поля (far-field), оттока (outflow), искусственные (artificial), однопроволочной волны (one-way wave), отправляющие (remote) условия.

Первыми исследованиями по «мягким» и неотражающим условиям были работы (Abramov, 1961), (Karp, 1961), (Nitta, 1962), (Godunov and Ryabenkii, 1963), (Godunov and Ryabenkii, 1964), (Matsuno, 1966), (Lysmer and Kuhlemeyer, 1969), (Claerbout, 1970), (Kreiss, 1971), (Gustafsson et al., 1972), (Lysmer and Waas, 1972), (Chen, 1973), (Elvius and Sundström, 1973), (Castellani, 1974), (Chu and Sereny, 1974), (Smith, 1974), (Gustafsson, 1975), (Lindman, 1975), (Majda and Osher, 1975a).

После этих публикаций вышли многие широко известные ныне работы, среди которых статьи (Godunov et al., 1976), (Orlanski, 1976), (Clayton and Engquist, 1977), (Engquist and Majda, 1977). Обзоры исследований по построению и применению неотражающих условий делались в лекциях (Turkel, 1983), (Gustafsson, 1985), в работе (Vichnevetsky, 1987) и других авторов. Специальные обзоры по указанной теме опубликованы в работах (Ilgamov, 1985a), (Ilgamov, 1985b), (Ilgamov, 1990b), (Givoli, 1991), а так же в монографии (Givoli, 1992a).

Пространственные и пространственно-временные экстраполяции

В настоящей главе рассматриваются работы, посвященные изучению влияния постановки условий с помощью различных экстраполяций переменных, анализу устойчивости и точности. Представлены методы определения устойчивости схем, включающих численные граничные условия. В западной литературе соответствующая теория получила название теории устойчивости GKS (Gustafsson, Kreiss, Sandström). Обсуждается методология постановки выходных граничных условий для ряда установившихся течений, получаемых интегрированием уравнений Навье-Стокса. Полученные при анализе линейной задачи результаты применяются при решении нелинейных одномерных уравнений газовой динамики. Были просчитаны течения в расширяющемся сопле при сверхзвуковом входе и выходе, а также при сверхзвуковом входе и дозвуковом выходе из сопла. Рассматривается решение плоской динамической задачи теории упругости. Уравнения движения Ляме аппроксимируются по явной схеме. Компоненты перемещения на искусственной границе вычисляются с использованием точных формул для полуплоскости, подверженной действию сосредоточенного импульса на поверхности.

1.1. Анализ устойчивости и точности с учетом граничных условий в одномерных задачах. Линейное гиперболическое уравнение

В конце шестидесятых и начале семидесятых годов было установлено, что численная постановка граничных условий оказывает существенное влияние на решение гидродинамических задач. Было достигнуто понимание необходимости ставить на

границах области «мягкие» условия, накладывающие на параметры меньшие ограничения, чем, например, в условиях твердой стенки. Были выполнены численные эксперименты с разными пространственными и пространственно-временными экстраполяциями параметров.

В работе (Chen, 1973) на примере уравнения Бюргерса было показано, что схемы высших порядков дают менее точные результаты, чем схемы первого порядка при сеточных числах Рейнольдса $Re_c > 1$, именно из-за граничных условий, и что ошибки на границах могут превышать ошибки аппроксимации во внутренних точках.

Результаты сравнения аналитического и численного решений одномерного и двумерного гиперболических уравнений содержатся в работах (Chu and Sereny, 1974), (Bramley and Sloan, 1977), (Roache, 1976) и других авторов.

Отмеченное во введении несоответствие численных и аналитических граничных условий также может служить причиной неустойчивости и неточности численного решения. В работе (Allen and Sheng, 1970) было показано, что разница в решениях с использованием линейной экстраполяции консервативных переменных и квадратичной, а также кубической экстраполяций незначительна.

Имеется большое число работ, посвященных изучению влияния постановки условий с помощью различных экстраполяций переменных, на анализ устойчивости и точности. Укажем, например, на статьи (Bramley and Sloan, 1977), (Gottlieb and Turkel, 1978), (Yee et al., 1982).

В работах (Kreiss, 1968), (Kreiss, 1971), (Gustafsson et al., 1972) и в других работах разработаны методы определения устойчивости схем, включающих численные граничные условия. В литературе, как отмечалось выше, соответствующая теория получила название теории устойчивости GKS (Gustafsson, Kreiss, Sandström). Представление о ней можно получить из рассмотрения гиперболического уравнения с начальным и граничным условиями:

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, & (0 \leq x \leq 1, \quad t > 0), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u(0, t) &= g(t), & (t \geq 0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь должно быть выполнено условие $f(0) = g(0)$. Последнее условие в (1.1) записано для случая вещественной постоянной $c > 0$, когда требуется ставить условие на границе $x = 0$

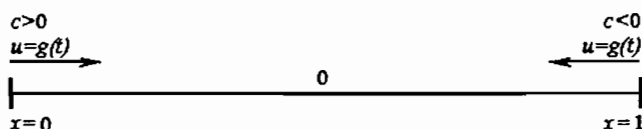


Рис. 1.1. Схема постановки условий на левой и правой границах

(рис. 1.1). При $c < 0$ ставится условие на границе $x = 1$. Следовательно в этом случае $u(1, t) = g(t)$.

Для решения уравнения (1.1) используется явная трехточечная схема второго порядка аппроксимации, которую можно представить в виде

$$u_i^{n+1} = F(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n). \quad (1.2)$$

Видно, что наряду с заданными в (1.1) граничными условиями необходимо ставить дополнительные численные граничные условия. Например, если $c < 0$, то вместе с $u(1, t) = g(t)$, дополнительно ставится условие

$$u_0^{n+1} = G(u_0^n, u_1^n, \dots) \quad (1.3)$$

для некоторой заданной функции G .

Для исследования устойчивости системы (1.2)–(1.3) принимаем $u_i^n = k^i z^n$, где k, z — комплексные скаляры. Условием устойчивости фон Неймана для основных дифференциальных схем является условие $|z| \leq 1$ и $|k| = 1$. Разностная схема краевых задач устойчива (Kreiss, 1968), (Gustafsson et al., 1972), если нет нетривиальных решений с $|z| > 1$ и $|k| < 1$ (схема неустойчива при $|z| > 1$ и $|k| < 1$). Случай $|z| = 1$, $|k| = 1$ требует дополнительного анализа (Gottlieb and Turkel, 1978).

Каждое из уравнений (1.2) может быть записано по разному. Рассмотрим первое из них. Например, по разностной схеме (Richtmyer and Morton, 1967) оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_i^n) + \frac{\tau}{2} (u_{i+1}^n - u_i^n), \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \tau \left(u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2} \right), \quad \tau = \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

По схеме (MacCormack, 1971) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i^n &= u_i^n + \tau (u_{i+1}^n - u_i^n), \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (u_i^n + \tilde{u}_i^n) + \frac{\tau}{2} (\tilde{u}_i^n - \tilde{u}_{i-1}^n).\end{aligned}\quad (1.5)$$

На эту схему далее будем ссылаться как на схему (FB), что означает разность вперед (Forward) по пространству на шаге «предиктор» и назад (Backwards) на шаге «корректор». Для этого варианта можно вычислять $\tilde{u}_i^n$ на границе $x = 0$, тогда как для u_i^{n+1} этого делать нельзя. Другой вариант схемы МакКормека, на который будем ссылаться как на схему (BF) (последовательность разностей вперед и назад меняется местами) дается соотношениями

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i^n &= u_i^n + \tau (u_i^n - u_{i-1}^n), \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (u_i^n + \tilde{u}_i^n) + \frac{\tau}{2} (\tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_i^n).\end{aligned}\quad (1.6)$$

Для этого варианта схемы уже нельзя определять $\tilde{u}_i^n$ на границе $x = 0$, что можно осуществить каким либо другим способом, однако можно на этой границе определять u_i^{n+1} .

Для линейных уравнений с постоянными коэффициентами все приведенные три схемы идентичны.

Далее запишем несколько вариантов уравнения (1.3), которое представляет собой граничное условие на левой границе $x = 0$ для $c < 0$. Линейная экстраполяция условия $u_{xx}^{n+1} = 0$ при $x = 0$, для времени $t^n + \Delta t$, имеет вид

$$\text{I. } u_0^{n+1} = 2u_1^{n+1} - u_2^{n+1}. \quad (1.7)$$

Запишем следующую группу разнородных экстраполяций:

$$\begin{aligned}\text{IIa. } u_{-1}^n &= 2u_0^n - u_1^n, \\ \text{IIb. } u_0^{n+1} &= u_0^n + \tau (u_1^n - u_0^n), \\ \text{IIc. } u_0^{n+1} &= \tilde{u}_0^n.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Формула (IIa) представляет собой линейную экстраполяцию в момент t^n с привлечением внешней точки $i = -1$, (IIb) — аппроксимацию дифференциального уравнения (1.1) с использованием

разностей вперед по времени и пространству, (IIc) — применима только для схемы (FB) и представляет собой равенство значения u_0^{n+1} и линейной аппроксимации $u(0, t^n + \Delta t)$. Эти условия объединены в одну группу, поскольку они идентичны для уравнений с постоянными коэффициентами. Соотношения (IIb) и (IIc) идентичны и для нелинейных задач.

Группа условий, общность которых будет видна из анализа устойчивости, имеет вид

$$\begin{aligned} \text{IIIa. } u_{-1/2}^{n+1/2} &= 2u_{1/2}^{n+1/2} - u_{3/2}^{n+1/2}, \\ \text{IIIb. } u_0^{n+1} &= u_1^{n+1} + u_0^n - u_1^n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Соотношение (IIIa) представляет собой линейную экстраполяцию для промежуточного шага схемы (1.4), соотношение (IIIb) эквивалентно условию $u_{xt} = 0$ ($x = 0$).

Условия, применимые для схем МакКормека, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \text{IVa. } \tilde{u}_{-1}^n &= 2\tilde{u}_0^n - \tilde{u}_1^n, \\ \text{IVb. } u_0^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_0^n + \tilde{u}_0^n) + \frac{\tau}{2}(\tilde{u}_1^n - \tilde{u}_0^n), \\ \text{IVc. } \tilde{u}_0^n &= u_0^n + \tau(u_1^n - u_0^n). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Первые два соотношения (IVa) и (IVb) применимы только для схемы (FB). Последнее соотношение (IVc) применимо только для схемы (BF).

Следующее условие представляет собой линейную экстраполяцию для схемы (BF):

$$\text{V. } \tilde{u}_0^n = 2\tilde{u}_1^n - \tilde{u}_2^n. \quad (1.11)$$

И, наконец, комбинация (1.11) с условием $u_0^{n+1} = \tilde{u}_0^n$ имеет вид

$$\text{VI. } u_0^{n+1} = 2\tilde{u}_1^n - \tilde{u}_2^n. \quad (1.12)$$

Принимая $u_i^n = k^i z^n$ и подставляя это в одну из систем (1.4)—(1.6) находим, что

$$kz = k + \frac{\tau}{2}(k^2 - 1) + \frac{\tau^2}{2}(k - 1)^2. \quad (1.13)$$

Из приведенных выше условий, при $x = 0$, рассмотрим условия (1.10), для которых

$$z = 1 + \tau(k - 1) + \frac{\tau^2}{2}(k - 1)^2. \quad (1.14)$$

Из (1.13) и (1.14) находим $k = 1$ или $k = 1 - \tau^{-1}$. Второму значению k соответствует $z = 1/2$, следовательно, в схемах (1.4), (1.5), (1.10) неустойчивости нет. Как показывает более тщательный анализ (Kreiss, 1968), первый случай с $k = 1$ и $z = 1$ также не дает неустойчивости.

В работах (Gustafsson et al., 1972), (Gottlieb and Turkel, 1978) и других показано, что условия (1.7), (1.8), (1.9), (1.11) также обеспечивают устойчивость всей схемы при $\tau < 1$, а (1.12) — при $\tau < 0,64$.

Что касается точности, то можно привести следующие оценки (Gottlieb and Turkel, 1978). Пусть $f(z, k) = 0$ представляет собой рассматриваемый граничный алгоритм, и $\epsilon = f(z, k)/f(z, k_1)$, где $z = \exp(2\pi i \Delta t)$, $k = \exp(2\pi i \Delta x/c)$, k_1 соответствует числу $z = 1$ для основной дифференциальной схемы. Например, для схемы Лакс-Вендрофа $k_1 = (\tau - 1)/(\tau + 1)$. Число точек на длину волны равно $M = c/\Delta x$. Для заданного уровня ошибки можно найти число узлов, на которое требуется разбить одну длину волны.

В первом столбце таблицы приведены варианты граничных схем, во втором — величины ϵ , в следующих — необходимое число точек M для достижения решения с погрешностью не более 1% для $\tau = 0,25$ и $0,75$. Как видно, наилучшими являются условия (1.8) и (1.11).

В работе (Gottlieb and Turkel, 1978) дается также анализ плоской задачи. К системе линейных гиперболических уравнений применяется схема Лакс-Вендрофа (Lax-Wendroff).

Задача (1.1) изучалась также полудискретным методом (методом прямых), когда она приводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений относительно времени (Strikwerda, 1980). Пусть (1.1) решается при $c = 1$, $x \geq 0$, $t \geq 0$. Аппроксимация по методу прямых дает уравнение

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

Записывая решение (1.15) в виде $u_i = k^i u_0$ и учитывая, что $du_i/dt = su_i$, находим $k = 1 + s\Delta x$ или

$$u_i = (1 + s\Delta x)^i u_0. \quad (1.16)$$

Таблица погрешностей

Условия	ε	M	
		$\tau = 0,25$	$\tau = 0,75$
I	$\pi^2(1 + \tau)^2 M^{-2}$	40	55
II	$\pi^2(1 - \tau^2) M^{-2}$	31	21
III	$\pi(1 + \tau) M^{-1}$	393	550
IV	$\pi^2(1 + \tau)^2 M^{-2}$	40	55
V	$\pi^2(1 - \tau)^2 M^{-2}$	31	21
VI	$\pi^2(2 + \tau + \tau^2)(1 + \tau)$ $(2 + \tau)^{-1} M^{-2}$	36	неуст.

Задача хорошо поставлена (well-posed), т.е. устойчива, если она не имеет собственного решения, которое определяется следующим образом: для $Re(s) \geq 0$ функция u_i ограничена при $x \rightarrow \infty$. По этому определению (1.16) является собственным решением, следовательно, схема (1.15) неустойчива. Наоборот, схема

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \\ \frac{du_0}{dt} &= \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

является устойчивой (здесь $Re(s) = 0$).

В работе (Strikwerda, 1980) дается также анализ аппроксимаций внутри области и на границах и сравнение решений (на границе $i = I$). Устойчивость схемы в полудискретном случае не зависит от числа I , в то время как по определению, принятому в работе (Gary, 1978), она зависит от числа I . В работе (Gary, 1978) представлено большое число экспериментов по определению устойчивости аппроксимации граничных условий гиперболической системы уравнений. Рассматривается полностью дискретная схема «чехарда» («leap-frog») и метод прямых, использующий конечно-разностную аппроксимацию по пространству и решение обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. Особый интерес представляет схема

4-го порядка точности. Анализируются граничные аппроксимации для метода прямых посредством численного изучения собственных чисел и нормы матрицы для полудискретной системы.

При решении дифференциальных уравнений в частных производных численно с помощью конечно-разностных методов возникает необходимость постановки дополнительных граничных условий. При этом не любые условия обеспечивают устойчивое решение. В случае гиперболических уравнений вопросы устойчивости решаются на основе теории GKS.

В работе (Trefethen, 1983) показано, что теория устойчивости для разностных схем гиперболических начально-краевых задач GKS имеет физическую интерпретацию в терминах групповой скорости распространения возмущений. Если конечно-разностная модель вместе с ее граничными условиями может поддерживать ряд волн на границе с групповой скоростью, направленной в сторону расчетной области, то она неустойчива. Эта интерпретация обоснована как для диссипативных, так и для недиссипативных схем. Простые аргументы объясняют, почему такого рода волны являются неустойчивыми. Используется новая теорема, показывающая вид неустойчивостей, возрастания которых можно ожидать. Примеры приведены как для одной, так и двух пространственных переменных.

Рассмотрим модельную задачу

$$u_t = u_x, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t \in [0, \infty), \quad (1.18)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x). \quad (1.19)$$

Это — задача Коши, точное решение которой можно представить в виде $u(x, t) = f(x + t)$. Если представить это решение в виде $u(x, t) = \exp i(\omega t - \xi x)$, то получим связь между частотой ω и волновым числом ξ в виде $\omega = -\xi$, что представляет собой дисперсионное соотношение для исходного уравнения. Величина $c = \omega/\xi$ — фазовая скорость.

Применяя подобные рассуждения для схемы «чехарда»

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (1.20)$$

можно получить соотношение, связывающее частоту и волновое число

$$\sin \omega \Delta t = -\lambda \sin \xi \Delta x. \quad (1.21)$$

Здесь это соотношение между ω и ξ уже не является линейным. Говорят, что схема «чехарда» является дисперсионной.

Согласно теории (Brillouin, 1960) энергия, связанная с волновым числом ξ , будет распространяться с групповой скоростью $C = d\omega/d\xi$, которая отличается от фазовой скорости. Для схемы (1.20) эта скорость равна

$$C = -\frac{\cos \xi \Delta x}{\cos \omega \Delta t}. \quad (1.22)$$

Отсюда следует, что энергия, связанная с различными длинами волн, будет распространяться с разными скоростями. Если начальная форма не является монохроматической, она будет меняться со временем. Для волн, которые на заданной достаточно мелкой по пространству и времени сетке ($\xi h \approx 0$ и $\omega k \approx 0$) могут быть хорошо разрешены, из (1.21) можно получить $\omega k \approx -\lambda \xi h$. Откуда следует, что групповая скорость в этом случае может быть представлена в виде

$$C = -1 + \frac{1}{2}(1 - \lambda^2)(\xi h)^2 + O((\xi h)^4). \quad (1.23)$$

Таким образом типичный сигнал распространяется со скоростью, меньшей чем 1, и чем больше волновое число, тем большее отличие от точной скорости. Подобная дисперсия волновых чисел приводит к осцилляциям в окрестности разрывов. В работе показано, что подобное явление наблюдается не только для хорошо разрешенных (в смысле достаточно мелких шагов) волн, а для всех волн, представленных на данной сетке, с реальными частотами и волновыми числами. На самом деле для многих волн групповая скорость имеет неверный знак, так что энергия распространяется в неверном направлении.

В работе (Vichnevetsky, 1986) доказывается, что амплитуда отраженной волны от границы в полностью дискретном и полудискретном случаях идентичны. На рис. 1.2 приведена эволюция во времени численного решения для случая взаимодействия с границей и частичного отражения от нее. Как падающая, так и отраженная волны представляют собой пакет волн с волновыми числами $\xi_p = 0$ и $\xi_q = \pi/h$ соответственно. Групповая скорость отраженной волны $G_q = -C$. Ее фазовая скорость равна нулю. На рис. 1.3 приведена зависимость отраженной энергии при изменении пространственного шага для схемы Адамса 1-го порядка точности и консервативной полудискретной схемы.

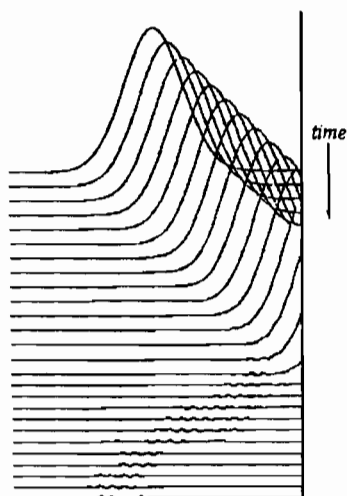


Рис. 1.2. Численное решение для случая частичного отражения от границы

требуются только для экстраполяции. Специфические переменные могут быть заданы для ряда физических величин так, чтобы задача осталась хорошо поставленной.

Энергия отраженной волны при постоянном пространственном шаге Δx не зависит от величины временного шага Δt .

В работах (Abarbanel and Gottlieb, 1979), (Ivanov and Masyutina, 1983) разбираются различные пространственно-временные аппроксимации простых условий на границах области. Многие из рассмотренных выше вопросов анализируются в лекциях (Gustafsson, 1985). Рассматривается применение теории устойчивости к выбору граничных условий. Для одномерных уравнений Эйлера в неконсервативной форме приводятся условия на входе и выходе. Согласно данному в работе анализу характеристические переменные

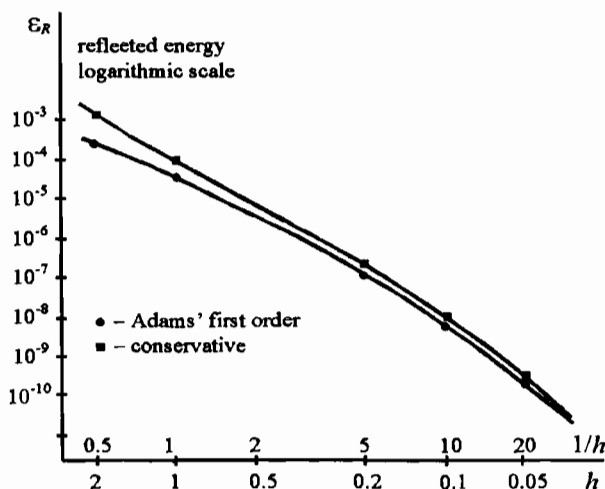


Рис. 1.3. Зависимость отраженной энергии от пространственного шага сетки для схемы Адамса и полудискретного метода Кранка-Николсона

1.2. Волновое уравнение. Система гиперболических уравнений

В работе (Halpern, 1982) рассматривается случай одномерных акустических волн. Предлагается метод получения устойчивых граничных условий для волновых уравнений в одномерном случае. Граничные условия на искусственных границах должны быть либо «прозрачными» (transparent), т.е. такими, чтобы решение граничной задачи было точным решением начальной задачи, либо условия на искусственных границах должны обладать «поглощающими» свойствами.

Рассматривается решение следующего скалярного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1.24)$$

Используется следующий известный результат: для задачи (1.24) прозрачными граничными условиями на границе $x = 0$ являются условия

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.25)$$

Для начально-краевой задачи, полученной дискретизацией только пространственных переменных, показано, что граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0 - u_{-1}}{h} &= 0, \\ \frac{du_{-1}}{dt} + \frac{u_0 - u_{-1}}{h} &= 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0 - u_{-1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{d^2 u_0}{dt^2} &= 0, \\ \frac{du_{-1}}{dt} + \frac{u_0 - u_{-1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{d^2 u_{-1}}{dt^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0 - u_{-1}}{h} - \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_0 - u_{-1}}{h} \right) &= 0, \\ \frac{du_{-1}}{dt} + \frac{u_0 - u_{-1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_0 - u_{-1}}{h} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

являются устойчивыми. Более того, условие (1.26) является поглощающим.

Для конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих исходное уравнение (1.24), устойчивые граничные условия представляются в виде

$$D_0^t(u_{-1}^n) + D_-^x(u_0^n) = 0, \quad (1.29)$$

$$D_0^t(u_0^n) + D_-^x(u_0^n) + \frac{\Delta x}{2} \frac{D_+^t - D_-^t}{\Delta t}(u_0^n) = 0. \quad (1.30)$$

Условие (1.29) является поглощающим, а (1.30) — прозрачным при $\Delta x = \Delta t$. Граничные условия (1.30) близки к условиям, полученным в работе (Engquist and Majda, 1977). Здесь используются обозначения

$$D_+^t(u_j^n) = u_j^{n+1} - u_j^n, \quad D_-^t(u_j^n) = u_j^n - u_j^{n-1},$$

$$D_+^x(u_j^n) = u_{j+1}^n - u_j^n, \quad D_-^x(u_j^n) = u_j^n - u_{j-1}^n,$$

$$D_0^t(u_j^n) = \frac{D_+^t + D_-^t}{2}, \quad D_0^x(u_j^n) = \frac{D_+^x + D_-^x}{2}.$$

Как указывалось выше, неустойчивость всей схемы может иметь место из-за аппроксимации условия на границе ($i = I$). Это связано с тем, что общая дискретная начально-краевая задача получается плохо поставленной. Предлагаются следующие неотражающие устойчивые схемы для условия в точке $i = 0$:

$$\begin{aligned} u_{-1}^{n+1} - u_{-1}^{n-1} - 2\tau(u_{-1}^n + u_0^n) &= 0, \\ u_0^{n+1} - u_0^{n-1} - 2\tau(u_0^n - u_{-1}^n) + \\ &+ \frac{1}{\tau}(u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}) = 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Последнее из них сводится к условию, данному ранее в работе (Abarbanel and Gottlieb, 1979), однако оно здесь получено исходя из энергетических оценок.

В работе (Gustafsson et al., 1972) рассматривается одномерный случай:

$$u_t = Au_x = F_x, \quad 0 \leq x < \infty,$$

где A — положительная диагональная матрица. Показано, что определение граничных условий экстраполяцией на том же временном слое приводит к неустойчивости. Были предложены три

устойчивые процедуры. Эти условия для $x = 0$ имеют вид

$$\text{I. } u_0^{n+1} = 2u_1^n - u_2^{n-1},$$

$$\text{II. } u_0^{n+1} = u_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A(u_1^n - u_0^n),$$

$$\text{III. } u_0^{n+1} + u_1^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A(u_1^{n+1} - u_0^{n+1}) = u_0^n + u_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A(u_1^n - u_0^n).$$

Все эти три условия являются устойчивыми при $\Delta t \leq \Delta x / \rho(A)$, где $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A .

В работе (Abarbanel and Gottlieb, 1979) обсуждаются граничные условия (I) и (II) для двумерной схемы «чехарда» и модифицированной схемы «чехарда» («leap-frog»). Система гиперболических уравнений рассматривается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}, \quad (1.32)$$

где u , $F(u)$ и $G(u)$ являются векторами. Схема «чехарда», аппроксимирующая исходную систему уравнений, представляется в виде

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1,k}^n - F_{j-1,k}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{j,k+1}^n - G_{j,k-1}^n). \quad (1.33)$$

Линейная начально-краевая задача устойчива при условии $\Delta t \leq 1/[(\rho(A)/\Delta x) + (\rho(B)/\Delta y)]$, где $\rho(A)$, $\rho(B)$ — спектральные радиусы матриц $A = \partial F / \partial u$ и $B = \partial G / \partial v$ соответственно.

В работе (Abarbanel and Gottlieb, 1976) показано, что условия устойчивости схемы «чехарда» можно заметно улучшить, используя следующую модифицированную схему «чехарда»:

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_{j+1,k}^n - \tilde{F}_{j-1,k}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{G}_{j,k+1}^n - \tilde{G}_{j,k-1}^n), \quad (1.34)$$

где

$$\tilde{F}_{j,k}^n = F\left(\frac{1}{2}(u_{j,k+1} + u_{j,k-1})\right), \quad \tilde{G}_{j,k}^n = G\left(\frac{1}{2}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k})\right).$$

Модифицированная схема имеет не только лучшие условия устойчивости $\Delta t \leq \min(\Delta x/\rho(A), \Delta y/\rho(B))$, но и меньшую фазовую ошибку.

Приведенные ранее условия (I) и (II) могут быть различными способами распространены на двумерный случай. Так, например, для (I) можно получить, что

$$u_{0,k}^{n+1} = 2u_{1,k}^n - u_{2,k}^{n-1}. \quad (1.35)$$

С другой стороны можно рассматривать (I) как экстраполяцию вдоль характеристического направления в плоскости (x, t) . Тогда разумно было бы распространить (I) как экстраполяцию вдоль характеристики в пространстве (x, y, t) :

$$u_{0,k}^{n+1} = 2u_{1,k+1}^n - u_{2,k+2}^{n-1}. \quad (1.36)$$

Аналогично, одномерные условия (II) могут быть распространены на двумерный случай следующим образом:

$$u_{0,k}^{n+1} = u_{0,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{1,k}^n - F_{0,k}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta y} (G_{0,k+1}^n - G_{0,k-1}^n), \quad (1.37)$$

или так:

$$u_{0,k}^{n+1} = u_{0,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{F}_{1,k}^n - \tilde{F}_{0,k}^n \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{G}_{0,k+1}^n - \tilde{G}_{0,k}^n \right), \quad (1.38)$$

где $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ определяются следующим образом:

$$\tilde{F}_{1,k} = F \left(\frac{1}{2}(u_{1,k+1} + u_{1,k}) \right), \quad \tilde{G}_{0,k} = G \left(\frac{1}{2}(u_{1,k} + u_{0,k}) \right).$$

Проведенные исследования устойчивости рассматриваемых граничных условий в сочетании с одной из схем удобно представить в виде таблицы, где знаком «+» отмечаются устойчивые схемы с соответствующими граничными условиями, а знаком «-» — неустойчивые, $\lambda = \Delta t/\Delta x$.

1.3. Другие примеры анализа устойчивости и точности с учетом граничных условий

В работах (Oliger, 1974, 1976) рассматриваются соответственно нецентральные и центральные разностные аппроксимации уравнений (1.1) высоких порядков точности по пространственной координате внутри расчетной области. Они сочетаются со схемами третьего и второго порядков около границ. Дается их

Таблица устойчивости граничных условий

Метод	Усл. (1.35)	Усл. (1.36)	Усл. (1.37)	Усл. (1.38)
(1.33) $\lambda = 0,39$	+	—	+	—
(1.33) $\lambda = 0,41$	+	—	+	—
(1.33) $\lambda = 0,47$	+	—	—	—
(1.33) $\lambda = 0,49$	+	—	—	—
(1.34) $\lambda = 0,9$	—	+	—	+
(1.34) $\lambda = 0,99$	—	+	—	+

анализ, исходя из теории устойчивости GKS (Brown, 1984), а также сравнение результатов. Укажем также на работы (Goldberg and Tadmor, 1978), (Gottlieb et al., 1982).

В работе (Abarbanel et al., 1986) предлагается методология постановки выходных граничных условий для ряда установившихся течений, получаемых интегрированием уравнений Навье–Стокса. Основная идея состояла в получении возмущенных уравнений около некоторого приближенного установившегося течения. Линеаризованные в частных производных уравнения для возмущенных величин затем преобразовывались с использованием модальной формы. Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения представляли собой задачу на собственные значения, которая решалась в предположении очень длинных волн. Для построения граничных условий использовалась модальная форма возмущенного решения. Полученные результаты показали, что эти граничные условия могут оказаться эффективными для ускорения сходимости к стационарному решению при небольшой потере точности. Метод применим к несжимаемым и сверхзвуковым течениям.

Применение одного из видов схемы «чехарда» к задаче (1.1) при $c > 0$ дает

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \tau (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad 1 < i < I,$$

$$u_0^{n+1} = g(t_{n+1}), \quad (1.39)$$

$$u_I^{n+1} = u_I^{n-1} - 2\tau (u_{I+1}^n - u_{I-1}^n), \quad \tau = c\Delta t/\Delta x.$$

Данная аппроксимация на правом конце ($i = I$) служит

причиной неустойчивости системы (1.1). Если ее заменить односторонней аппроксимацией

$$u_I^{n+1} = u_I^n - \tau (u_I^n - u_{I-1}^n), \quad (1.40)$$

то система (1.1) становится устойчивой. Использование в ней пространственных разностей четвертого порядка внутри области и односторонних разностей третьего порядка около границы приводит к неустойчивости.

Для стабилизации этой схемы используется усреднение по времени в точках около границы (Oligier, 1974):

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{\tau}{6} [u_{i-2}^n - 8u_{i-1}^n + 8u_{i+1}^n - u_{i+2}^n], \quad 2 \leq i \leq I-2$$

$$u_1^{n+1} = u_1^{n-1} - \frac{\tau}{3} [-2u_0^n - \frac{3}{2}(u_1^{n+1} + u_1^{n-1}) + 6u_2^n - u_3^n],$$

$$u_{I-1}^{n+1} = u_{I-1}^{n-1} - \frac{\tau}{3} [u_{I-3}^n - 6u_{I-2}^n + \frac{3}{2}(u_{I-1}^{n+1} + u_{I-1}^{n-1}) + 2u_I^n],$$

$$u_I^{n+1} = u_I^{n-1} - \frac{\tau}{3} [-2u_{I-3}^n + 9u_{I-2}^n - 18u_{I-1}^n + \frac{11}{2}(u_I^{n+1} + u_I^{n-1})]. \quad (1.41)$$

Применение указанного усреднения в (1.39) также приводит к устойчивой схеме. При этом аппроксимация граничных условий может быть дана в виде

$$\begin{aligned} u_I^{n+1} &= u_I^{n-1} - 2\tau \left[\frac{1}{2} (u_I^{n+1} + u_I^{n-1}) - u_{I-1}^n \right] = \\ &= u_I^{n-1} - 2\tau (u_I^n - u_{I-1}^n) - \tau (u_I^{n+1} - 2u_I^n + u_I^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.42)$$

и может рассматриваться как дополнительный стабилизирующий член в аппроксимации граничных условий.

Дальнейшее развитие этого подхода (стабилизация схемы) приводится в статье (Garu, 1978) и других работах. Используется схема «чехарда» к задаче (1.1). Первое и второе уравнения системы (1.39) остаются теми же. Вместо третьего уравнения

используется следующее соотношение:

$$u_I^{n+1} = u_I^{n-1} - 2\tau (u_I^n - u_{I-1}^n) - \mu\tau (u_I^{n+1} - 2u_I^{n+1} + u_I^{n-1}). \quad (1.43)$$

Параметр μ определяет устойчивость и точность схемы. Аналитическое решение задачи (1.1) $u = \sin 2\pi(x - t)$ при $(c = 1)$ позволяет судить о точности.

Более подробно скажем об анализе устойчивости. Расчет осуществлялся для $I = 10$ до момента времени $t = 160$. Было принято, что схема является неустойчивой, если $\max_i |u_i^n| > 2$. Численные расчеты позволили установить границы изменения μ . Для $\lambda = 0,9$ схема устойчива при $0,7 \leq \mu \leq 1,8$. Для меньшего значения, $\lambda = 0,5$, границы изменения параметра μ расширяются: $0,6 \leq \mu \leq 7,0$. Аналогичный анализ дается также для схемы четвертого порядка аппроксимации.

Были также проанализированы аппроксимации граничных условий для метода прямых с помощью численного изучения собственных значений и норм матрицы для полудискретной системы. Все это проверялось интегрированием системы уравнений с использованием стандартных программ.

В работах (Gary, 1978), (Gustafsson, 1980) предметом изучения являются также вопросы согласованности разностных схем.

Приведенные выше схемы могут быть обобщены и на нелинейный случай (Turkel, 1980). Рассматривается следующее уравнение:

$$u_t + f_x = 0, \quad (1.44)$$

или в неконсервативной форме:

$$u_t + Au_x = 0. \quad (1.45)$$

Для схемы «чехарда»,

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_{j-1}^n), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (1.46)$$

применяются следующие граничные условия:

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_1^n - f_0^n). \quad (1.47)$$

Эта схема с приведенными граничными условиями устойчива при $A\Delta t/\Delta x \leq 1$ (Gustafsson et al., 1972).

Схема четвертого порядка аппроксимации, предложенная (Kreiss and Olinger, 1973), имеет вид

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{6\Delta x} [8(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) - (f_{j+2}^n - f_{j-2}^n)]. \quad (1.48)$$

Схема имеет 4-й порядок по пространству и 2-й по времени и устойчива при $A\Delta t/\Delta x \leq 0,72$. Увеличение шаблона приводит к затруднениям с постановкой граничных условий. В работе (Olinger, 1974) были предложены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_0^{n-1} - \frac{\Delta t}{3\Delta x} \left[-\frac{11}{2} (f_0^{n+1} + f_0^{n-1}) + 18f_1^n - 9f_2^n + 2f_3^n \right], \\ u_1^{n+1} &= u_1^{n-1} - \frac{\Delta t}{3\Delta x} \left[-2f_0^n - \frac{3}{2} (f_1^{n+1} + f_1^{n-1}) + 6f_2^n - f_3^n \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Аналогичные условия ставятся и на правой границе. Из-за неявности этих условий они менее удобны для нелинейных уравнений.

Методы «чехарда» недиссипативны. Во многих задачах с большими градиентами желательно использовать схему, обладающую диссипативными свойствами, например, схему Лакс-Вендорфа или МакКормека. Для схемы (MacCormack, 1971)

$$u_j^{(1)} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1} - f_j), \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (1.50)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_j^n + u_j^{(1)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_j^{(1)} - f_{j-1}^{(1)}) \right], \quad j = 1, \dots, N.$$

Другой вариант схемы использует разность назад на первом шаге и разность вперед — на втором. Схема устойчива при $A\Delta t/\Delta x \leq 1$. Граничные условия — следующие:

$$u_N^{(1)} = u_N^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_N - f_{N-1}), \quad (1.51)$$

$$u_0^{n+1} = \frac{1}{2} \left[u_0^n + u_0^{(1)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_1^{(1)} - f_0^{(1)}) \right].$$

Экстраполяция потока

$$\begin{aligned} f_{N+1}^n &= 2f_N^n - f_{N-1}^n, \\ f_{-1}^{(1)} &= 2f_0^{(1)} - f_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

с подстановкой (1.52) в первое и второе уравнения (1.50), при $j = N$ и $j = 0$, соответственно, приводит к граничным условиям (1.51).

Расширение схемы (1.50) до схемы 4-го порядка (Gottlieb and Turkel, 1976) имеет вид

$$\begin{aligned} u_j^{(1)} &= u_j^n + \frac{\Delta t}{6\Delta x} (7f_j^n - 8f_{j+1}^n + f_{j+2}^n), \quad j = 0, \dots, N-2 \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + u_j^{(1)} - \frac{\Delta t}{6\Delta x} (7f_j^{(1)} - 8f_{j-1}^{(1)} + f_{j-2}^{(1)}) \right], \\ &\quad j = 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Как и в предыдущем случае, существует другой вариант:

$$\begin{aligned} u_j^{(1)} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{6\Delta x} (7f_j^n - 8f_{j-1}^n + f_{j-2}^n), \quad j = 2, \dots, N \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[u_j^n + u_j^{(1)} + \frac{\Delta t}{6\Delta x} (7f_j^{(1)} - 8f_{j+1}^{(1)} + f_{j+2}^{(1)}) \right], \\ &\quad j = 0, \dots, N-2. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Для того чтобы получить четвертый порядок точности в нелинейных задачах, необходимо использовать схемы (1.53) и (1.54) поочередно (схема чередующихся шагов).

Предиктор (1.53) не может быть использован при $j = N-1, N$. В этих точках

$$\begin{aligned} u_{N-1}^{(1)} &= u_{N-1}^n - \frac{\Delta t}{6\Delta x} (4f_N^n - f_{N-1}^n - 4f_{N-2}^n + f_{N-3}^n), \\ u_N^{(1)} &= u_N^n - \frac{\Delta t}{6\Delta x} (15f_N^n - 28f_{N-1}^n + 17f_{N-2}^n - 4f_{N-3}^n). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Аналогично, для корректора (1.54)

$$\begin{aligned}
 u_0^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \left[u_0^n + u_0^{(1)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Delta t}{6\Delta x} \left(4f_3^{(1)} - 17f_2^{(1)} + 28f_1^{(1)} - 15f_0^{(1)} \right) \right], \\
 u_1^{(n+1)} &= \frac{1}{2} \left[u_1^n + u_1^{(1)} - \frac{\Delta t}{6\Delta x} \left(-f_3^{(1)} + 4f_2^{(1)} + f_1^{(1)} - 4f_0^{(1)} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.56}$$

Как и ранее, эти формулы эквивалентны экстраполяции потока. Схема устойчива при $A\Delta t/\Delta x \leq 2/3$.

В работе (Gottlieb and Turkel, 1976) также дается обзор внутренних и граничных схем высокого порядка для нелинейной задачи и их эффективности на основании сравнения с аналитическим решением для продольных волн в интервале $0 \leq x \leq 1$. В работе (Tutkcl, 1983) дано также исследование в многомерном случае.

1.4. Применение пространственно-временной экстраполяции для уравнений газовой динамики

В работе (Yee et al., 1982) проверяется применимость некоторых полученных ранее результатов анализа устойчивости разностных аппроксимаций к решениям краевых задач для системы уравнений гиперболического типа. Численные эксперименты проводятся на примере одномерных уравнений газовой динамики в форме законов сохранения. В линейном случае рассматривается то же гиперболическое уравнение (1.1). Применяются некоторые из приведенных выше условий на границе области с использованием как пространственной, так и пространственно-временной экстраполяций.

Полученные при анализе линейной задачи результаты применяются при решении нелинейных одномерных уравнений газовой динамики. Были просчитаны течения в расширяющемся сопле при сверхзвуковом входе и выходе, а также при сверхзвуковом входе и дозвуковом выходе из сопла. Применялось неявное условие (1.7). Численные результаты совпадают с точными

аналитическими решениями. Такие же хорошие результаты получены для суживающегося-расширяющегося сопла (при наличии скачка и без него).

Точность решения системы уравнений газодинамики в одномерной нелинейной постановке изучалась ранее (Chu and Sereny, 1974). К уравнениям в лагранжевых координатах применяется двухшаговая схема Лакс-Вендрофа. В численном эксперименте принимаются условия на границе $i = 0$.

I. Плотность постоянна, $\rho = \text{const}$.

II. Экстраполяция первого порядка, $\rho_0 = \rho_1$.

III. Экстраполяция второго порядка, $\rho_0 = 2\rho_1 - \rho_2$.

IV. Условие на характеристике имеет вид

$$\begin{aligned} R_-(t + \Delta t, 0) &= R_-(t, \alpha \Delta \xi) = \\ &= (1 - \alpha)R_-(t, 0) + \alpha R_-(t, \Delta \xi) \alpha = \alpha \rho(t, \alpha \Delta \xi) \Delta t / \Delta \xi. \end{aligned}$$

V. Односторонняя разность первого порядка по пространству и времени,

$$\frac{V_0^{n+1} - V_0^n}{\Delta t} - \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta \xi} = 0.$$

VI. Односторонняя разность второго порядка по пространству,

$$\frac{V_0^{n+1} - V_0^n}{\Delta t} - 2 \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta \xi} + \frac{u_2^n - u_0^n}{2\Delta \xi} = 0.$$

VII. «Вох» схема второго порядка точности по времени и пространству,

$$\frac{V_0^{n+1} - V_0^n}{\Delta t} + \frac{V_1^{n+1} - V_0^n}{\Delta t} - \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{\Delta \xi} - \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta \xi} = 0.$$

Условие (I) впервые было предложено в работе (Parter, 1962), где изучались схемы Лакс-Вендрофа и Лакс-Фридрикса для модельного уравнения $u_t + u_x = 0$. Было отмечено, что если переопределенное граничное условие равномерно ограничено, то схема устойчива, и решение сходится к корректному значению, исключая тонкие пограничные слои у поверхности. Условие (II) представляет собой стандартную экстраполяцию и во многом подобно наиболее общему условию: симметричному отражению по отношению к границе. Это условие эквивалентно

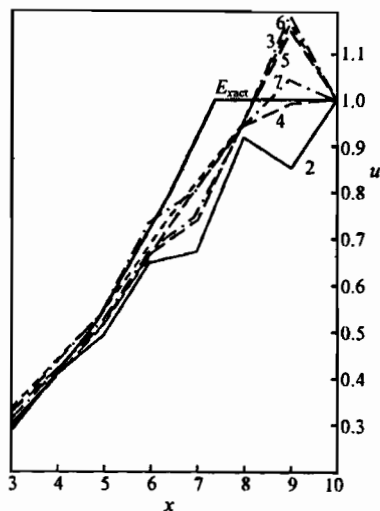


Рис. 1.4. Скорость около поршня при $t = 10$ для различных способов постановки граничных условий. Сплошной линией показано точное решение, числа соответствуют номеру граничного условия

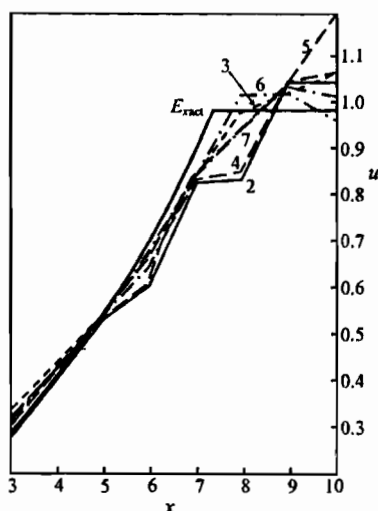


Рис. 1.5. Скорость около открытой границы при $t = 10$ для различных способов постановки граничных условий. Сплошной линией показано точное решение, числа соответствуют номеру граничного условия

условию $\partial \rho / \partial x = 0$ на границе. Условие (III) является условием второго порядка экстраполяции. Условие (IV) представляет результат интегрирования вдоль характеристики на границе. В этом случае, благодаря инвариантам Римана, постановка граничного условия упрощается. Условия (V), (VI) и (VII) представляют собой односторонние конечно-разностные уравнения для переменной ρ . Все рассматриваемые граничные условия являются устойчивыми для схемы Лакс-Вендрофа.

Полученные результаты сравниваются с точным аналитическим решением. Показаны погрешности каждого варианта задания «мягких» граничных условий. Например, на рис. 1.4 и 1.5 приведены распределения скоростей около поршня для различных способов постановки граничных условий при $t = 10$. Делается вывод, что наилучшее приближение к точному решению дает применение соотношения на характеристике в качестве граничного условия (кривая 4).

В заключении делается вывод о том, что граничные условия отражают решение с усилением его или сглаживанием. Послед-

ний вид условий предпочтительней, так как они не приводят к большим осцилляциям.

В статье (Gustafsson and Kreiss, 1979) обсуждается процедура сведения решения для ограниченной области к решению исходной задачи с бесконечно удаленными границами. Необходимым условием для этого является его плавное изменение за пределами рассматриваемой области. Показано, что многие обычно используемые методы дают плохие результаты. Предложенный подход развит для случая, когда известно асимптотическое поведение матричных коэффициентов.

Рассматривается модельное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad t = 0,\end{aligned}\tag{1.57}$$

которое решается по схеме Лакс-Вендрофа ($\Delta t/\Delta x < 1$):

$$\begin{aligned}u_i^{n+1} &= \left(1 + \Delta t D_0 + \frac{\Delta t^2}{2} D_+ D_-\right) u_i^n, \\ u_i^0 &= f_i, \quad 0 < i < I,\end{aligned}\tag{1.58}$$

где

$$\begin{aligned}D_0 u_i &= \frac{(u_{i+1} - u_{i-1}))}{2\Delta x}, \quad D_+ u_i = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{\Delta x}, \\ D_- u_i &= \frac{(u_i - u_{i-1}))}{\Delta x}, \quad i = 0, 1, \dots, I.\end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения (теоремы).

1. Решение (1.58) с условиями на концах интервала,

$$D_+^p u_0^n = 0, \quad u_I^n = g \quad (p \geq 1),\tag{1.59}$$

экспоненциально сходится к стационарному решению $u_i \equiv g$ ($i = 0, 1, \dots, I$) при $n \rightarrow \infty$.

2. Для простоты положим $p = 1$ и рассмотрим условия

$$D_+ u_0^n = D_+ u_{I-1}^n = 0.\tag{1.60}$$

Кроме того, примем, что $v(x, 0) = f(x)$ — плавная функция, ее производная $df(L)/dx \rightarrow 0$. Тогда решение (1.58), (1.60) при

$\Delta x \rightarrow 0$ сходится к решению (1.57), которое удовлетворяет граничному условию

$$u(L, t) = f(L). \quad (1.61)$$

3. Примем, что удовлетворяются условия предыдущего утверждения. Тогда решение (1.58) при условиях

$$u_0^n = g, \quad D_+ u_{I-1}^n = 0 \quad (1.62)$$

для $\Delta x \rightarrow 0$ и конечной области $\delta \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$ сходится к решению (1.57), (1.61).

4. При фиксированных Δt , Δx и $n \rightarrow \infty$ решение (1.58), (1.62) сходится к равномерному стационарному состоянию $u_i^\infty \equiv g$ ($i = 0, 1, \dots, I$), только если I нечетно. Имеет место очень слабая скорость сходимости.

Подобные теоремы доказываются также для уравнения (1.1) с переменными коэффициентами, для двумерного уравнения, для системы уравнений.

В работе (Elvius and Sundström, 1973) обсуждается метод построения поглощающего условия на границах с использованием информации о характеристиках волнового уравнения. Этот подход подробно рассматривается далее.

Устойчивость одномерного параболического уравнения $u_t = bu_{xx}$ и граничных условий на обоих концах отрезка исследуется в варианте схемы МакКормека. Показывается, что схема устойчива для условий

$$u_{-1}^n = 3u_0^n - 3u_1^n + u_2^n,$$

$$\tilde{u}_0^n = g_0(t + \Delta t),$$

$$\tilde{u}_0^n = 3\tilde{u}_1^n - 3\tilde{u}_2^n + \tilde{u}_3^n,$$

$$\tilde{u}_0^n = u_0^n + \sigma(u_2^n - 2u_1^n + u_0^n),$$

$$u_1^{n+1} = \tilde{u}_1^n,$$

$$u_1^{n+1} = \frac{1}{2}(u_0^{n+1} + u_2^{n+1}),$$

где $g_0(t)$ — значение функции при $x = 0$, $\sigma = b\Delta t/(\Delta x)^2$.

1.5. Анализ в плоской задаче

Приведем результаты по анализу некоторых разностных схем и граничных условий в двумерном случае (Abarbanel and Murgan, 1982). Рассмотрена явная схема,

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1/2} &= \mu_x \mu_y u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} (\delta_x \mu_y u_{i,j}^n + \delta_y \mu_x u_{i,j}^n), \\ u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t (\delta_x \mu_y u_{i,j}^{n+1/2} + \delta_y \mu_x u_{i,j}^{n+1/2}), \end{aligned} \quad (1.63)$$

для уравнения $u_t = u_x + u_y$. Здесь использованы следующие операторы:

$$\begin{aligned} \delta_x u_{i,j}^n &= \frac{1}{\Delta x} (u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n), \\ \delta_y u_{i,j}^n &= \frac{1}{\Delta y} (u_{i,j+1/2}^n - u_{i,j-1/2}^n), \\ \mu_x u_{i,j}^n &= \frac{1}{2} (u_{i+1/2,j}^n + u_{i-1/2,j}^n), \\ \mu_y u_{i,j}^n &= \frac{1}{2} (u_{i,j+1/2}^n + u_{i,j-1/2}^n). \end{aligned}$$

С помощью метода GKS исследована устойчивость (1.63) совместно с граничными условиями

$$u_{o,j}^{n+1} = 2u_{1,j}^{n+1} - u_{2,j}^{n+1}, \quad (1.64)$$

$$u_{o,j}^{n+1} = 2u_{1,j+1}^{n+1} - u_{2,j+2}^{n+1}, \quad (1.65)$$

являющимися обобщениями условия (1.7) в двумерном случае. Показывается, что схема (1.63) совместно с (1.64) является устойчивой, а совместно с (1.65) — неустойчивой.

Далее показана устойчивость схемы (1.63), применяемой совместно с условием

$$u_{o,j}^{n+1} = 2u_{1,j}^n - u_{2,j}^{n-1}, \quad (1.66)$$

и ее неустойчивость, если

$$u_{o,j}^{n+1} = 2u_{1,j+1}^n - u_{2,j+2}^{n-1}. \quad (1.67)$$

Отметим, что система разностных уравнений по схеме МакКормека и каждого из указанных граничных условий (1.64), (1.65), (1.66), (1.67) устойчива.

Рассматриваются двумерные разностные уравнения по неявным схемам Эйлера,

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t (\delta_x \mu_x + \delta_y \mu_y) u_{i,j}^{n+1}, \quad (1.68)$$

и Кранк-Никольсона,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} \Delta t \delta_x \mu_x\right) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta t \delta_y \mu_y\right) u_{i,j}^{n+1} = \\ = \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t \delta_x \mu_x\right) \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t \delta_y \mu_y\right) u_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Разностная схема (1.68) совместно с условием (1.64), а также с условием (1.66), устойчива. Однако она совместно с условиями (1.65) и (1.67) неустойчива. Разностное уравнение (1.69) совместно с (1.64) и (1.67) устойчиво, а совместно с (1.66) и (1.67) — неустойчиво.

Иными словами, граничные условия (1.64) и (1.66), полученные экстраполяцией по нормали к плоскости (y, t) , устойчивы для всех рассмотренных разностных схем. Граничное условие (1.67), которое получается экстраполяцией вдоль характеристики, и условие (1.65), получающееся ее проецированием на плоскость $t = \text{const}$, неустойчивы для всех рассмотренных схем, кроме схемы МакКормека.

В последние годы были развиты неявные конечно-разностные схемы для систем нелинейных гиперболических уравнений. Соответствующие алгебраические уравнения решаются без использования итераций. При применении этих схем к линейным задачам они безусловно устойчивы (А-устойчивы). В практических расчетах нелинейных задач они часто приводят к жесткому ограничению временного шага. Основная причина этих трудностей заключается в постановке численных граничных условий. Глубокий анализ вопросов, относящихся к сказанному, содержится в статьях (Beam et al., 1982), (Bell et al., 1982), (Blottner, 1982), (Thompkins and Bush, 1982) и в последующих публикациях.

Метод полного отражения линейных волн в плоской задаче обсуждается в работе (Smith, 1974). В случае скалярного волнового уравнения

$$\varphi_{tt} = c^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}),$$

где c — скорость распространения волны, падающая под углом θ на границу $x = 0$ волна единичной амплитуды может быть представлена в виде

$$\varphi = \exp [(\bar{i}\omega/c) (x \cos \theta + y \sin \theta - ct)].$$

Отраженная волна с амплитудой R записывается следующим образом:

$$\varphi = R \exp [(\bar{i}\omega/c) (-x \cos \theta + y \sin \theta - ct)].$$

Условия Неймана $\partial\varphi/\partial x=0$ ($x=0$) и Дирихле $\varphi=0$ ($x=0$) дают соответственно $R=1$ и $R=-1$. Поэтому сложение этих решений полностью устраняет отражение волн поверхностью $x=0$. Заметим, что наличие сил трения в уравнении не меняет этого результата. На рис. 1.6 показана конечно-элементная модель, иллюстрирующая задачу. На рис. 1.7 представлена картина взаимодействия волн с границей. Для реализации неотражающих условий на границе осуществляется суммирование 4-х решений, необходимых для исключений отражения от нижней и правой границ расчетной области. Таким образом показано, что отражения в задачах распространения волн могут быть исключены с помощью наложения решений, которые удовлетворяют граничным условиям Дирихле и Неймана. Показано, что такая постановка граничных условий применима и для пространственных задач. Если перемещения неоднородные, то эти условия применяются поочередно к каждой компоненте.

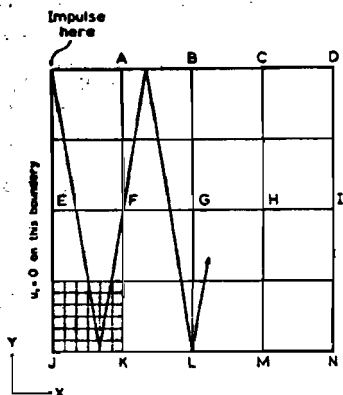


Рис. 1.6. Конечно-элементная модель, используемая для иллюстрации. В точках A—N наблюдаются перемещения, показанные на рис. 1.7

1.6. Применение пространственно-временной экстраполяции в задачах теории упругости

В статьях (Dyatlovitsky et al., 1979), (Turov, 1976) рассматривается решение плоской динамической задачи теории упругости. Уравнения движения Ляме аппроксимируются по явной схеме.

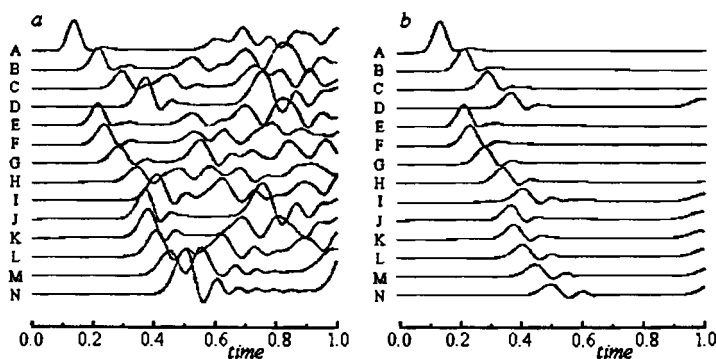


Рис. 1.7. Перемещения для скалярного волнового уравнения без использования неотражающих условий (а) и с применением неотражающих условий (б)

В первой статье компоненты перемещения на искусственной границе вычисляются с использованием точных формул для полуплоскости, подверженной действию сосредоточенного импульса на поверхности. Рассматривается схема работы плотины, когда на боковую ее поверхность действует динамическое давление. Во второй работе к границе упругой полуплоскости прикладывается равномерно распределенная динамическая нагрузка длиной $5\Delta x$. Прямоугольная расчетная область прилегает к границе полуплоскости симметрично по отношению к нагрузке (рис. 1б).

За эталонное принимается решение, когда отраженная от границ области волна не приближается к области приложения нагрузки. В этом решении (вариант 0) условный контур взят отдаленным, а время счета берется таким, чтобы выявились характерные особенности задачи. В варианте 1 граница расчетной области является абсолютно жесткой стенкой ($u = v = 0$).

В работе (Dyatlovitsky et al., 1979) были предложены условия на границе аналогичные условиям для распространения одномерной волны. Рассмотрим правую границу (I, j) прямоугольной расчетной области. В одномерной волне перемещение узла I, j в момент $t + \Delta t$ равно перемещению узла $I - 1, j$ в момент t :

$$u_{I,j}^{n+1} = u_{I-1,j}^n. \quad (1.70)$$

По аналогии с этим для границы I, j записываются условия (вариант 2)

$$u_{I,j}^{n+1} = u_{I-1,j}^n, \quad v_{I,j}^{n+1} = v_{I-1,j}^n. \quad (1.71)$$

В статье (Dyatlovitsky et al., 1979) для удовлетворения этим условиям используется точное решение Лэмба; в работе (Тугов, 1976) предлагается другая процедура, которую приведем ниже.

Продольная волна проходит расстояние Δx за время $\Delta t = \Delta x/c_l$, поперечная — за время $\Delta t/\gamma$, где $\gamma = c_s/c_l$ — отношение скоростей распространения волн сдвига и растяжения. Принимается приближенно, что вдоль границы области перемещения u создаются продольной волной, а v — поперечной. Следовательно,

$$v_{I,j}^{n+1/\gamma} = v_{I-1,j}^n. \quad (1.72)$$

Значение $v_{I,j}^{n+1}$ может быть найдено с помощью интерполяции. Кроме того, границы прямоугольной области, совпадающей верхней стороной с границей полуплоскости, содержат на 4 узла больше, чем прилегающие внутренние. Так как поток энергии, пересекающий обе эти границы, одинаков, то интенсивность возмущения на внешней границе меньше, чем на прилегающей внутренней. Поэтому вводится коэффициент переноса K . Условия приобретают вид

$$\begin{aligned} u_{I,j}^{n+1} &= K u_{I-1,j}^n, \\ v_{I,j}^{n+1} &= K \left[\gamma v_{I-1,j}^n + (1 - \gamma) v_{I,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (1.73)$$

На основании серии численных экспериментов предлагается принимать

$$K = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{M-4}{M}} \right),$$

где M — число узлов на границе области. Параметр M варьировался от 25 до 102. Описанная процедура представляет собой вариант 3.

В работе (Тугов, 1976) дается сопоставление результатов, полученных с помощью граничных условий для различных вариантов. Решение, полученное с применением условий жесткой стенки (вариант 1), качественно не совпадает с эталонным (вариант 0). Вариант 2 дает удовлетворительные результаты по напряжениям. Однако вертикальные перемещения v оказываются завышенными (в зоне максимума — на 1%). Кроме того, функция v стремится к некоторой постоянной величине для всех точек при $t \rightarrow \infty$, а не к нулю, как это должно быть. Как следовало

ожидать, наилучшее приближение к варианту 0, как по перемещениям, так и по напряжениям, дает вариант 3, учитывающий разницу скоростей распространения продольной и поперечной волн и количество узлов на границе области и на прилегающей к ней внутренней границе.

Способ сужения области интегрирования в интересующей зоне в плоской задаче теории упругости предлагается в работе (Gulin and Terentyev, 1974).

Рассмотренными работами не исчерпывается обзор исследований условий на искусственных границах в задачах теории упругости. К ним мы будем возвращаться по ходу изложения других вариантов неотражающих условий. В следующем параграфе остановимся на подходе, который был изложен для скалярного волнового уравнения в конце предыдущего параграфа.

1.7. Метод «полного отражения» в двумерных задачах теории упругости

Для уравнений теории упругости предположение об отсутствии x -компоненты перемещения и касательного напряжения на границе $x = 0$,

$$u = 0, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad x = 0, \quad (1.74)$$

приводит к условию Неймана для y -компоненты перемещения

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad x = 0. \quad (1.75)$$

С другой стороны, предположение

$$v = 0, \quad \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad x = 0, \quad (1.76)$$

дает

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = 0. \quad (1.77)$$

Как известно из теории упругости,

$$u = \frac{\partial \psi_l}{\partial x} - \frac{\partial \psi_s}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi_l}{\partial y} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x}, \quad (1.78)$$

где функция ψ_l описывает продольное, ψ_s — поперечное движение частиц.

Пусть на границу $x = 0$ падает продольная волна под углом θ . Тогда под тем же углом от нормали к границе отразится продольная волна, и под углом θ_s — поперечная волна. Тогда получим (Smith, 1974)

$$\psi_l = \exp[(i\omega/c_l)(x \cos \theta + y \sin \theta - c_l t)] + \\ + R \exp[(i\omega/c_l)(-x \cos \theta + y \sin \theta - c_l t)], \quad (1.79)$$

$$\psi_s = Q \exp[(i\omega/c_s)(-x \cos \theta + y \sin \theta - c_s t)].$$

Здесь c_l , c_s — скорости распространения волн сжатия-растяжения и сдвига.

Подставляя (1.78), (1.79) в (1.75) и в первое условие (1.74) и используя формулу $c_l^{-1} \sin \theta = c_s^{-1} \sin \theta_s$ (закон Снелла), находим

$$(1 - R) c_l^{-1} \cos \theta = Q c_s^{-1} \sin \theta_s, \\ (1 - R) c_l^{-2} \cos \theta \sin \theta = -Q c_s^{-2} \cos^2 \theta_s,$$

откуда $R = 1$, $Q = 0$. Имеет место полное отражение продольной волны (в фазе) и полное поглощение поперечной волны.

Первое из условий (1.76) и условие (1.77) дают

$$(1 + R) c_l^{-1} \sin \theta = Q c_s^{-1} \cos \theta_s, \\ (1 + R) c_l^{-2} \cos^2 \theta = -Q c_s^{-2} \sin \theta_s \cos \theta_s,$$

откуда следует, что $R = -1$, $Q = 0$. Продольная волна отражается в противофазе без изменения амплитуды, поперечная — полностью поглощается. Поэтому сложение указанных двух решений обеспечивает отсутствие отражения.

Если падающей на границу является поперечная волна, то можно добиться полного ее поглощения аналогичным способом.

В работе (Smith, 1974) приведенная выше процедура построения решения без отражения от границы области $x = 0$ применяется также к трехмерному случаю, к волнам Лява, Рэлея. Для наклонных к координатным осям границ метод также легко применим. Случай криволинейных границ представляет большие трудности. Если, например, граница является вогнутой, может иметь место двукратное отражение волны от нее. Поэтому целесообразно использовать плоские границы.

При кратном отражении от прямолинейных границ, например, около прямого угла расчетной области, число решений, которые необходимо сложить для подавления отраженных волн, увеличивается. В случае n границ нужно сложить 2^n решений (для скалярного волнового уравнения).

Приводится численная реализация метода для плоской прямоугольной области конечно-элементным методом.

В работе (Lindman, 1975) указывается на вычислительную неэффективность изложенного подхода, в частности, по причине указанной выше необходимости сложения 2^n решений для n границ. В ней рассматривается двумерное волновое уравнение

$$\left(\frac{\Delta_x^2}{h_x^2}\right) A + \left(\frac{\Delta_y^2}{h_y^2}\right) A = \left(\frac{\Delta_t^2}{c^2 \tau^2}\right) A, \quad (1.80)$$

где Δ_x^2 , Δ_y^2 — вторые центральные разности, h_x , h_y — шаги сетки, τ — шаг по времени. Его решение представляется в виде плоских волн:

$$A = A_{l,m}^n = [\exp(i\vec{k}_x l h_x) + R \exp(-i\vec{k}_x l h_x)] \times \\ \times \exp i(k_y m h_y - \omega n \tau), \quad (1.81)$$

где ω , k_x и k_y удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\sin^2 \frac{\omega \tau}{2} = \left(\frac{c\tau}{h_x}\right)^2 \sin^2 \frac{k_x h_x}{2} + \left(\frac{c\tau}{h_y}\right)^2 \sin^2 \frac{k_y h_y}{2}. \quad (1.82)$$

Рассматривается граничное условие

$$\Delta_t (A_{l,m}^n + A_{l+1,m}^n) \pm \tau_x \hat{G} \Delta_x (A_{l,m}^n + A_{l+1,m}^n) = 0, \quad (1.83)$$

где $\hat{G}$ — некоторый оператор. Подставляя (1.81) в (1.83), находим коэффициент отражения на границе $x = 0$:

$$R = \frac{G - G_0}{G + G_0}, \quad (1.84)$$

$$G_0 = \frac{1}{\tau_x} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \omega \tau \right) / \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} k_x h_x \right) \right], \quad \left(\tau_x = \frac{c\tau}{h_x} \right).$$

Здесь через G обозначен тот же оператор $\hat{G}$, но в (ω, k) — пространстве. Если $G = G_0$, то имеет место полное поглощение. Таким образом, задача сводится к нахождению численно полезных аппроксимаций к оператору G_0 .

Заметим, что при $\tau, h_x, h_y \rightarrow 0$ имеет место соотношение $G_0 = \omega / ck_x = \sec \theta$, где θ — угол между направлением волны k и осью x . В одномерном случае $G_0 = 1$.

Полезное приближение к G_0 может быть получено следующим образом. Так как $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2)$, то

$$G_0 = \frac{\omega}{ck_x} = \left[1 - \left(\frac{ck_y}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (\tau, h_x, h_y \rightarrow 0).$$

Соответственно

$$\hat{G}_0 \approx \left[1 - \tau_y^2 \left(\frac{\Delta_y^2}{\Delta_t^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad \left(\tau_y = \frac{c\tau}{h_y} \right).$$

Путем усечения степенных рядов можно получить разные приближения $\hat{G}_0$, однако это может привести к численной неустойчивости. При $ck_y/\omega < 1$ выражение

$$\hat{G} = 1 + \sum_{j=1}^J \hat{g}_j, \quad \hat{g}_j = \frac{\alpha_j \tau_y^2 (\Delta_y^2 / \Delta_t^2)}{1 - \beta_j \tau_y^2 (\Delta_y^2 / \Delta_t^2)}, \quad (1.85)$$

дает хорошую точность и обеспечивает устойчивость.

Подстановка (1.85) в (1.83) дает следующее граничное условие:

$$\Delta_t (A_{l,m}^n + A_{l+1,m}^n) \pm \tau_x \left[\Delta_x (A_{l,m}^n + A_{l,m}^{n+1}) + \sum_{j=1}^J h_{j,m}^{n+1/2} \right] = 0,$$

$$h_{j,m}^{n+1/2} = \hat{g}_j \Delta_x (A_{l,m}^n + A_{l,m}^{n+1}).$$

За счет членов $h_{j,m}^{n+1/2}$ учитывается неоднородность задачи. Для того, чтобы получить коэффициент отражения $R \leq 10^{-2}$ в диапазоне углов θ от 0° до 89° , требуется взять в $\hat{G}$ три члена ($J = 3$). Коэффициенты α_j, β_j получаются минимизированием

функции

$$F = \sum_{\theta=1}^{89} w(\theta) [R(\alpha_j, \beta_j, \theta)]^2.$$

Наилучшие результаты были получены с использованием весовой функции $w(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$.

В случае, когда волны должны поглощаться с высокой степенью точности, форму $\hat{G}$ необходимо модифицировать. Отмечается также, что условие Куранта для граничных условий менее жестко, чем для внутренней области.

Волны, экспоненциально затухающие по оси x , получаются заменой K_x на $i\bar{K}_x$ ($\bar{K}_x > 0$). При этом $CK_y/\omega > 0$, и приведенное выше условие на границе непригодно. Для области $\bar{K}_x^2 > 0$, $0 \leq |CK_y/\omega| \leq \infty$,

$$G_0 = \frac{1}{\tau_x} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \omega \tau \right) / i \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \bar{K}_x h_x \right).$$

При $h_x, h_y, \tau \rightarrow 0$ имеем

$$G_0 = \frac{-i\omega}{c\bar{K}_x} = - \frac{-i\omega}{\left[1 - (\omega/cK_y)^2\right]^{1/2} c|K_y|}.$$

Далее приемами, изложенными выше, можно получить более общие выражения для оператора $\hat{G}$:

$$\hat{G} = \sum_{j=1}^J \left[1 + \frac{\tau_y^2 (\Delta_y^2 / \Delta_t^2) + (2/\sigma_t)(1 - \gamma_j)\tau_y (|\Delta_y| / \Delta_t)}{1 + (\sigma_t/2)\gamma_j\tau_y (|\Delta_y| / \Delta_t) - \tau_y^2 (\Delta_y^2 / \Delta_t^2)} \right], \quad (1.86)$$

где $\tau_y = (c\tau/h_y)$, $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$, $\sum_{j=1}^J \alpha_j \gamma_j = 1$. Соответствующие условия на расчетной границе имеют следующий вид:

$$\Delta_t (A_{l,m}^n + A_{l+1,m}^n) \pm \tau_x \left[\Delta_x (A_{l,m}^n + A_{l,m}^{n+1}) + \sum_{j=1}^J h_{j,m}^{n+1/2} \right] = 0. \quad (1.87)$$

Корректирующая функция $h_{j,m}^{n+1/2}$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \left(\Delta_t^2 + \frac{1}{2} \gamma_j F_m \sigma_t \Delta_t + F_m^2 \right) h_{j,m}^{n+1/2} = \\ = \alpha_j \left[-F_m^2 \sigma_t + 2(1 - \gamma_j) F_m \Delta_t \right] \Delta_x A_{l,m}^n, \quad (1.88) \end{aligned}$$

где в левой части уравнения $0,5 \sigma_t \Delta_t$ означает среднюю производную по времени, центрированную в $j + 1/2$, $F_m = (2c\tau/h_y) |\sin(\pi m/M)|$.

Неотражающие условия для волнового уравнения

В этой главе рассматриваются преимущественно граничные условия для волновых уравнений. Рассматривается ряд подходов к построению неотражающих граничных операторов. Это — метод взаимного уничтожения (аннигиляция), односторонняя аппроксимация волнового уравнения и т.д. Идея метода взаимного уничтожения впервые была представлена в работе (Sommerfield, 1949), в которой даны радиационные условия, названные условиями Зоммерфельда. Оно обеспечивает решения по угловой координате. Для скалярного волнового уравнения наряду с линейными рассматриваются и нелинейные неотражающие адаптивные граничные условия (NRBC), которые обеспечивают уменьшение отражения от искусственных границ по сравнению с классическими локальными граничными условиями для волновых уравнений. Большое внимание уделено построению неотражающих условий в двумерном случае.

2.1. Линейные неотражающие условия в плоской задаче

В статьях (Clayton and Engquist, 1977), (Engquist and Majda, 1977) строится неотражающее условие на границе для волнового уравнения

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}, \quad x \geq 0.$$

Решение его в виде волны, бегущей в отрицательном направлении x , имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \exp \bar{i} \left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} x + \beta y + \omega t \right), \\ \bar{i} &= \sqrt{-1}, \quad \omega > 0, \quad \omega^2 - \beta^2 > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнение

$$\left(\frac{d}{dx} - \bar{i} \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \right) \varphi = 0, \quad (x = 0), \quad (2.2)$$

при заданных ω и β , является неотражающим условием для волн типа (2.1). Оно обеспечивает полное поглощение волны, падающей на границу $x = 0$.

Построенное граничное условие должно быть локальным и приводить к хорошо поставленной смешанной краевой задаче для волнового уравнения. Первое необходимо для ведения счета, второе — для устойчивости разностных аппроксимаций.

При $(\beta/\omega)^2 < 1$, представляя (2.2) в виде

$$\left[\frac{d}{dx} - \bar{i} \omega \left(1 - \frac{\beta^2}{2\omega^2} + \dots \right) \right] \varphi = 0 \quad (2.3)$$

и принимая во внимание только первый член разложения $\bar{i} \omega$ и учитывая, что он соответствует оператору $\partial/\partial t$, получаем первое приближение неотражающего условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad x = 0. \quad (2.4)$$

Сохраняя два члена разложения и умножая (2.3) на $\bar{i} \omega$, получаем второе приближение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad x = 0. \quad (2.5)$$

Третье и четвертое приближения содержат, соответственно, производные третьего и четвертого порядков. Показано, однако, что их строить сложнее, т.к. прямое использование разложения бинома (2.3) приводит к плохо поставленным условиям. К этому вопросу мы вернемся в дальнейшем.

Что касается (2.4) и (2.5), то они удовлетворяют необходимым критериям. Они обеспечивают полное поглощение перпендикулярно падающих на поверхность $x = 0$ волн. Первое из них дает поглощение только нормальных волн, второе — поглощение нормальных волн и частичное поглощение волн, падающих на границу под углом.

Можно дать оценки отраженных косых волн. Если в (2.1) принять $\beta/\omega = \sin \theta$, $\sqrt{1 - (\beta/\omega)^2} = \cos \theta$, где θ — угол между

нормалью к поверхности $x = 0$ и направлением волны, то отношение амплитуд отраженной и падающей волн для условия (2.4) можно представить в виде

$$R = \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1}. \quad (2.6)$$

Это же отношение для условия (2.5) имеет вид

$$R = \left(\frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} \right)^2. \quad (2.7)$$

Из них следует, что для волны с углом падения, например, $\theta = 45^\circ$ условие (2.4) дает $R = -0,17$, а (2.5) дает $R = 0,03$. В силу такой хорошей точности применение третьего и тем более четвертого приближений, сопряженных с преодолением сложностей высокого порядка уравнений, не всегда оправдано.

В указанных работах метод распространяется на случай системы гиперболических уравнений. В качестве примеров рассмотрены смешанные краевые задачи с поглощающими свойствами для волнового уравнения и уравнений линеаризованной теории мелкой воды с помощью различных схем.

Отметим, что условия (2.4) и (2.5) для волны, распространяющейся в положительном направлении x и падающей на сечение $x = L$, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \quad x = L. \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование условий (2.4), (2.5) и высших приближений, в том числе для плоской задачи теории упругости, дано в работе (Engquist and Majda, 1979). В соответствии с этой работой присоединим к волновому уравнению условие $\varphi = g(y, t)$ на границе $x = L$, где $g(y, t)$ — произвольная функция. Обозначим через T время, в течение которого происходит M отражений от искусственной границы $x = L$. Показывается, что (2.4), (2.5) являются локальными, хорошо поставленными граничными условиями для волнового уравнения. Для заданной погрешности δ решения и произвольной функции $g(y, t)$, удовлетворя-

ющей условию

$$\left(\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g|^2 dy dt \right)^{1/2} < \infty,$$

существуют $L_0 \leq L$ и номер приближения N в граничных условиях (в (2.4) $N = 1$, в (2.5) $N = 2$) такие, что, если φ_N представляют собой решения задачи с соответствующим граничным условием, то

$$\left(\int_0^T \int_0^{L_0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi - \varphi_N|^2 dy dx dt \right)^{1/2} < \delta, \quad 0 \leq T \leq 2LM.$$

Если волновое уравнение содержит переменный коэффициент, например,

$$(1+x) \varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0, \quad (2.8)$$

то можно поступить двояко. Можно принять значение переменного коэффициента в точке расчетной области ($x = L$) и применить условия (2.4) и (2.5), которые теперь примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1+L)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 0, \quad x = L, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + (1+L)^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2(1+L)^{1/2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Более строгий вывод с использованием уравнения (2.8) дает следующие неотражающие условия в первом и втором приближениях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1+L)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{4(1+L)} &= 0, \quad x = L, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + (1+L)^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{(1+L)^{1/2}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\ + \frac{1}{4(1+L)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{5\varphi}{32(1+L)^{5/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Приводятся оценки погрешностей этих соотношений. Обозначим

$$z(\omega, \beta, L) = (\bar{i}\omega)^{2/3} \left(1 + L - \frac{\beta^2}{\omega^2} \right).$$

Асимптотический анализ при $|z(\omega, \beta, L)| \rightarrow \infty$ дает значения коэффициентов отражения для первого и второго приближений:

$$R = \frac{1 - (1 - \alpha)^{1/2}}{1 + (1 - \alpha)^{1/2}}, \quad R = \frac{(1 - 0,5\alpha) - (1 - \alpha)^{1/2}}{(1 - 0,5\alpha) + (1 - \alpha)^{1/2}}, \quad (2.11)$$

где для каждой пары значений (ω_0, β_0) обозначено $\alpha = \beta_0^2 \omega_0^{-2} (1 + L)^{-1}$.

Условие в угловой точке (например, $x = 0, y = 0$) в первом приближении в соответствии с (2.4) можно записать, как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, & x = 0, & y \geq 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0, & y = 0, & x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Аналогично можно записать уточненное условие в виде двух уравнений в соответствии с (2.5). Они обеспечивают эффективное поглощение волн на искусственных границах. Однако первое из них содержит вторую производную по y , а второе — по x , и неясно, как сочетать дискретные аналоги этих уравнений в угловых точках. Более того, численные эксперименты показывают, что невнимательное использование условия типа (2.5) может генерировать неустойчивость.

В то же время, как показывает выражение для энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varphi_t^2 + |\nabla \varphi|^2) d\Omega = \int_s \varphi_t \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

условия (2.12) являются хорошо поставленными в угловых точках; кроме того, первое из них не содержит производную по y , а второе — по x . Следовательно, уравнения (2.12) легко сочетаются в угловой точке области. Но они дают значительное отражение в область волн, падающих на границу вне угловых точек. Предлагается условие

$$\sqrt{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad (2.13)$$

которое должно аппроксимироваться для углового узла и двух ближайших узлов сетки на прилегающих границах.

Далее в работе (Engquist and Majda, 1979) предлагаются конечно-разностные соотношения на примере одномерных волнового уравнения и условия (2.4). Явные разностные схемы имеют следующий вид:

$$(D_+^t D_-^t - D_+^x D_-^x) \varphi_i^n = 0,$$

$$D_0^t \left(\frac{\varphi_0^n + \varphi_1^n}{2} \right) - \gamma D_+^x \varphi_0^n - (1 + \gamma) D_+^x \left(\frac{\varphi_0^{n+1} + \varphi_0^{n-1}}{2} \right) = 0, \quad (2.14)$$

где операторы D_+ и D_- означают разности вперед и назад $D_+^t \varphi_i^n = (\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n) / \Delta t$; $D_-^t \varphi_i^n = (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}) / \Delta t$; $D_0 = (D_+ + D_-) / 2$ — оператор центральной разности, γ — действительное число.

Предполагается условие $\lambda = \Delta t / \Delta x < 1$, что гарантирует устойчивость задачи Коши. По второму уравнению (2.14) граничное значение φ_0^{n+1} определяется по данным φ_1^{n+1} , φ_0^n , φ_1^n , φ_0^{n-1} . Устанавливается, что при $\gamma = (4\lambda^2 - 1) / 6\lambda^2$ второе разностное уравнение аппроксимирует дифференциальное уравнение с точностью до четвертого порядка.

Решение первого разностного уравнения (2.14) имеет вид

$$\varphi_i^n = \exp i(\omega n \Delta t + \alpha i \Delta x) + R \exp i(\omega n \Delta t - \alpha i \Delta x).$$

Справедливо равенство $\sin(0,5\omega)\Delta t = \lambda \sin(0,5\alpha)\Delta x$. Если обозначить через $D(\omega\Delta t, \alpha\Delta x)$ оператор граничного условия, то

$$R = \frac{D(\omega\Delta t, \alpha\Delta x)}{D(\omega\Delta t, -\alpha\Delta x)}, \quad -\pi \leq \omega, \quad \alpha \leq \pi.$$

На рис. 2.1 приведена зависимость коэффициента отражения $|R|$ от волнового числа $\alpha\Delta x$. Здесь кривые 1 и 2 представляют собой результаты для случаев аппроксимации условия (2.4):

$$(D_-^t - D_+^x) \varphi_0^{n+1} = 0,$$

$$D_+^t \left(\frac{\varphi_0^n + \varphi_0^n}{2} \right) - D_+^x \left(\frac{\varphi_0^n + \varphi_0^{n+1}}{2} \right) = 0,$$

соответственно, с первым и вторым порядком точности. Кривые 3 и 4 построены для условия (2.14) и, соответственно, следующих значений γ :

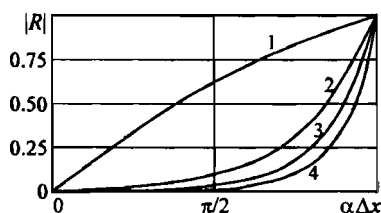
$$\gamma = \frac{4\lambda^2 - 1}{6\lambda^2}, \quad \gamma = \frac{3\lambda^2 - 1}{4\lambda^2}, \quad (\lambda = 3/4).$$

Таким образом, наименьшее отражение получается по условию (2.14) со вторым из указанных значений γ . Отметим, что $R = 0[(\alpha\Delta x)^2]$ при первом значении γ , $R = 0[(\alpha\Delta x)^4]$ — при втором. Для $\lambda = 3/4$ значение γ , обеспечивающее наибольшее поглощение, равно 0,27.

Полное отражение волн от границы ($R = 1$) происходит при волновом числе $\alpha\Delta x = \pi$.

Численные эксперименты с (2.14) дают результаты, которые находятся в полном согласии с приведенными оценками.

Рис. 2.1. Зависимость коэффициента отражения от волнового числа



Далее даются дискретные условия на границе в двумерном случае, в том числе для уравнения с переменными коэффициентами.

Для волнового уравнения с переменным коэффициентом $\nu^2(x)$ при второй производной по времени

$$\nu^2(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$$

неотражающее условие во втором приближении ($x = L$) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\nu_x}{2\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{4\nu^2} \left[\nu_{xx} - \frac{3\nu_x^2}{2\nu} \right] \varphi = 0.$$

Это же условие для границы $y = b$ представляется в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\nu_x}{2\nu^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{4\nu^2} \left[\nu_{xx} - \frac{\nu_x^2}{\nu} \right] \varphi = 0.$$

Эти условия аппроксимируются на границах $x_I = L$ и $y_J = b$, соответственно, по формулам

$$D_-^x D_0^t \varphi_{I,j}^n + \left(\frac{\nu}{2} D_+^t D_-^t + \frac{\nu_x}{4\nu} D_0^t \right) (\varphi_{I-1,j}^n + \varphi_{I,j}^n) - \\ - \left(\frac{1}{4\nu} D_+^y D_-^y - \frac{\nu_{xx}}{8\nu^2} + \frac{3\nu_x^2}{16\nu^3} \right) (\varphi_{I-1,j}^{n+1} + \varphi_{I,j}^{n-1}) = 0,$$

$$D_-^y D_0^t \varphi_{i,J}^n + \left(\frac{\nu}{2} D_+^t D_-^t + \frac{\nu_x}{4\nu^2} D_0^x \right) (\varphi_{i,J-1}^n + \varphi_{i,J}^n) - \\ - \left(\frac{1}{4\nu} D_+^x D_-^x - \frac{\nu_{xx}}{8\nu^2} + \frac{\nu_x^2}{8\nu^3} \right) (\varphi_{i,J-1}^{n+1} + \varphi_{i,J}^{n-1}) = 0,$$

где

$$\nu = \nu(x_{I-1/2}), \nu_x = \frac{\partial}{\partial x} \nu(x_{I-1/2}), \nu_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nu(x_{I-1/2}).$$

Приводятся также разностные условия на границах для расчетной области в упругой среде.

2.2. Некоторые оценки приближений неотражающих условий

В работе (Watson et al., 1995) осуществлена оценка ряда неотражающих граничных условий для распространения звука (уравнения акустики) в канале с «мягкими» стенками для разных источников звуков, частот и длин канала. Показано, что нелокальные граничные условия (Zorumski et al., 1994) дают большее приближение к точному аналитическому решению в широком диапазоне акустических параметров, чем локальные граничные условия. Расчеты показывают также, что эти условия более точны для коротких каналов (рис. 2.2).

В работе оценивается эффективность ряда неотражающих граничных условий: (Engquist and Majda, 1977), (Hedstrom, 1979), (Thompson, 1987), (Bayliss and Turkel, 1980), (Giles, 1989). К сожалению, опыт показывает, что условия, предложенные в этих работах, являются отражающими для большого класса задач аэроакустики. Это особенно относится к классам задач, в которых волны падают не по нормали к границе.

Граничные условия строятся на основе «радиационных» условий на бесконечности. Эти условия в общем случае не являются локальными, т.е. переменная в заданной точке на поверхности зависит от переменных в других точках этой поверхности. Такие условия называют нелокальными.

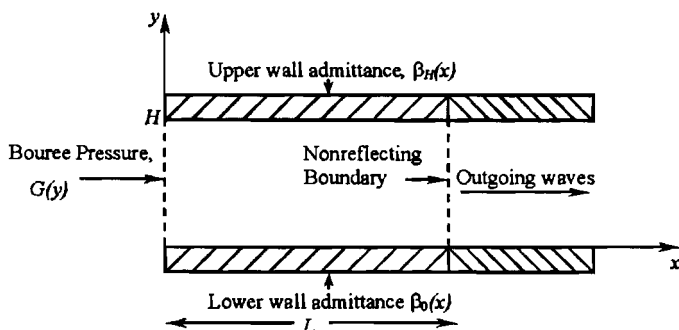


Рис. 2.2. Двумерный канал и координатная система

Рассмотрена двумерная прямоугольная область канала без среднего течения (рис. 2.2). На искусственной границе $x = L$ рассматривались следующие условия.

I. Локальные граничные условия (Giles, 1989)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = 0. \quad (2.15)$$

II. Нелокальные граничные условия (Zorumski et al., 1994)

$$p_i = [Z_{ij}]u_j, \quad (2.16)$$

где p_i , u_j — векторы, содержащие величины частотных характеристик области акустического давления и нормальной скорости на границе в узле i и j , соответственно, $[Z_{ij}]$ — коэффициенты импедансной матрицы в узлах.

III. Локальные сильно поглощающие граничные условия (Engquist and Majda, 1977)

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} = 0. \quad (2.17)$$

Каждое из представленных граничных условий соответствует внешней среде без среднего течения и перемещающейся правой волне. Неотражающее граничное условие (2.15) подобно условию, предложенному (Hedstrom, 1979). Это условие часто использовалось для акустических задач в каналах и на него часто ссылаются как на ρc условие. В работе (Engquist and Majda, 1977) было показано, что условие (2.17) приводит к значительно

меньшим отражениям, чем условие (2.1), если на стенках используются условия Неймана.

На рис. 2.3 дано сравнение рассматриваемых граничных условий при $L = H$. Нелокальные граничные условия (2.16) прекрасно согласуются с точным решением. Условия (2.15) более точны по сравнению с условиями (2.17) для $x/L < 0,65$, а при $x/L > 0,65$ более точным являются условия (Engquist and Majda, 1977). Все кривые, за исключением (Engquist and Majda, 1977) линейны, что естественно для одной моды колебаний. Осцилляции для (Engquist and Majda, 1977) являются следствием отражений от границы. Для оценки свойств граничных условий использовалась величина

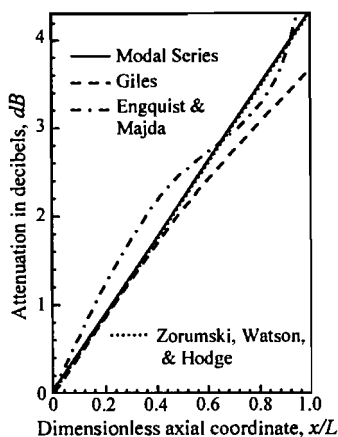


Рис. 2.3. Сравнение для наименьшего порядка моды при частоте 100 Гц и $L = H$

отражений от границы. Для оценки свойств граничных условий использовалась величина

$$I(x, y) = \frac{1}{4\pi f \rho_0} \mathcal{R} \left\{ p(x, y) \left[\bar{i} \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right]^* \right\},$$

где звездочка означает комплексно сопряженную величину, ρ_0 — средняя плотность в канале, $\mathcal{R}$ — реальная часть комплексной величины. Величина смягчения в децибелах дается выражением

$$dB(x) = 10 \log_{10} \frac{W(0)}{W(x)},$$

$$W(x) = \int_0^H I(x, y) dy.$$

На рис. 2.4 показаны аналогичные кривые, но для другого положения границы $x = 0,2 H$. Хотя в данном случае затухание волны меньше из-за более близкого расположения границы, предыдущие данные согласуются с приведенными на рассматриваемом рисунке. На рис. 2.5 приведены данные расчета, полученные для распределенного источника звука, какими являются, например, авиационные двигатели. В данном случае также наблюдается хорошее приближение к точному решению.

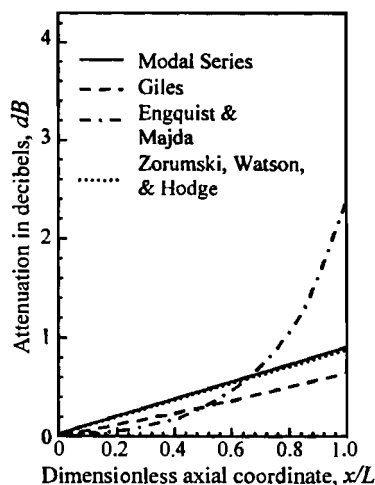


Рис. 2.4. Сравнение для наименьшего порядка моды при частоте 100 Гц и $L = 0, 2H$

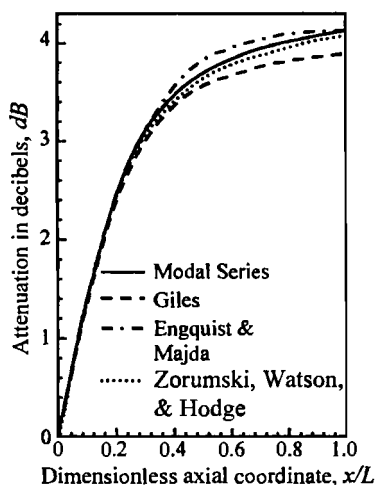


Рис. 2.5. Сравнение для наименьшего порядка моды при распределенном источнике с частотой 100 Гц и $L = H$

Представленные результаты показывают, что нелокальные граничные условия (Zorumski et al., 1994) дают результаты, согласующиеся с точными аналитическими данными в широком диапазоне изменения акустических параметров.

2.3. Адаптивные неотражающие граничные условия

В работе (Luchini and Tognaccini, 1996) рассматриваются нелинейные неотражающие адаптивные граничные условия (NRBC), которые обеспечивают уменьшение отражения от искусственных границ по сравнению с классическими локальными граничными условиями для волновых уравнений. Нелинейная процедура позволяет значительно улучшить точность граничных условий, даже если исходные уравнения являются линейными.

Рассмотрим двумерное волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad (2.18)$$

которое решается в области $x > 0$ с помощью разностной схемы

$$u_{i,j}^{n+1} = -u_{i,j}^{n-1} + \frac{1}{2}[u_{i+1/2,j+1/2}^n + u_{i-1/2,j+1/2}^n + u_{i-1/2,j-1/2}^n + u_{i+1/2,j-1/2}^n]. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.19) недиссипативны, второго порядка точности по пространству. Основные неотражающие граничные условия, которые могут быть связаны с уравнением (2.19), на границе $x = 0$ имеют вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right]_{x=0}^m u = 0. \quad (2.20)$$

С $m = 1$ и $m = 2$ получаются граничные условия первого (2.4) и второго (2.5) порядка соответственно (Engquist and Majda, 1977).

В случае $m = 1$ аппроксимация может быть представлена в виде

$$u_{0,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [u_{1/2,j-1/2}^n + u_{1/2,j+1/2}^n]. \quad (2.21)$$

Можно показать, что эти условия не дают отражения волн, перемещающихся параллельно оси x в направлении этой оси. Если же волны падают под углом к границе, возникают заметные отражения. Как известно, при этом коэффициент отражения определяется по (2.6):

$$R \approx -\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}. \quad (2.22)$$

Для уменьшения отражения волн можно использовать нелинейную адаптивную стратегию. Сначала уравнения (2.21) преобразуются таким образом, чтобы не давать отражения для простой плоской волны перемещающейся, под некоторым углом. Простейшим способом является использование весовых коэффициентов w^+ и w^- ,

$$u_{0,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [w^- u_{1/2,j-1/2}^n + w^+ u_{1/2,j+1/2}^n], \quad (2.23)$$

где w^+ и w^- — весовые коэффициенты, которые определяются так, чтобы уравнения (2.23) выражали точное неотражающее условие для волны, перемещающейся в направлении $\mathbf{d}$. Пусть $\mathbf{d} = (-\cos \theta, \sin \theta)$ — общий единичный вектор. Тогда эти весовые

коэффициенты будут иметь вид

$$\begin{aligned}w^- &= 1 + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \\w^+ &= 1 - \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

После того, как получено неотражающее условие для волны, перемещающейся в заданном направлении, следует установить зависимость этого направления с приходящей к границе волной. Тем самым будет осуществляться адаптация.

Эффективное выражение для (2.24) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= u_{1/2,j+1/2} - u_{3/2,j-1/2}, \\ \Delta_2 &= u_{1/2,j-1/2} - u_{3/2,j+1/2}, \\ \Delta_0 &= \text{sign}(1, \Delta_1 + \Delta_2) \sqrt{0,5(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)}, \\ w^- &= \frac{2|\Delta_0 - \Delta_2|}{|\Delta_0 - \Delta_2| + |\Delta_0 - \Delta_1|}, \\ w^+ &= \frac{2|\Delta_0 - \Delta_1|}{|\Delta_0 - \Delta_2| + |\Delta_0 - \Delta_1|}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Коэффициент отражения для условия (2.23) и для длинных волн имеет вид

$$R \approx -\frac{1 - \cos \theta - 0,5 \sin \theta (w^- - w^+)}{1 + \cos \theta - 0,5 \sin \theta (w^- - w^+)}.\tag{2.26}$$

На рис. 2.6 приведена зависимость коэффициента отражения $|R|$ от угла θ для случаев $(w^- = 1, w^+ = 1)$ и $(w^- = 1,41, w^+ = 0,59)$. Второй случай соответствует весам для угла $\theta = 45^\circ$. Как и ожидалось, для этого угла $|R| = 0$.

Полученные граничные условия проверялись численно решением следующей задачи. Для расчетной области $\Omega = \{(x, y) : -0,96 < x < 4, -4 < y < 4\}$ с сеточным шагом $h = 0,08$, неотражающее граничное условие ставилось при $x = -0,96$. Начальные условия задачи задавались в виде

$$\begin{aligned}u(x_i, y_j, 0) &= e^{-30r_{i,j}^2}, \quad r_{i,j} < 0,45, \\ u(x_i, y_j, 0) &= 0, \quad r_{i,j} \geq 0,45, \\ u_t(x_i, y_j, 0) &= 0,\end{aligned}\tag{2.27}$$

где $r_{i,j}^2 = x_i^2 + y_j^2$, $i = \{0, 1, 2, \dots, 62\}$, $j = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$. На рис. 2.7 и 2.8 показаны результаты решения этой задачи в виде изолиний. Неотражающие граничные условия ставятся на левой границе. Решение представляется в виде сферических возмущений, которые со временем расширяются. Для момента времени $t = 1, 6$ результаты решения приведены на рис. 2.7, для $t = 3, 2$ — на рис. 2.8.

По изолиниям рис. 2.7 можно судить о том, что неотражающее условия первого порядка (Engquist and Majda, 1977) приводит к большим возмущениям решения, чем остальные три условия. Условия второго порядка (рис. 2.7,а,d) мало отличаются по степени искажения решения при взаимодействии с левой границей.

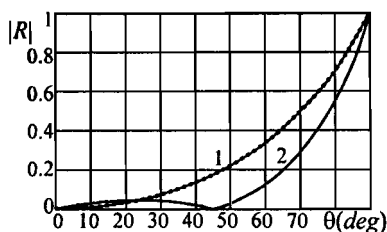


Рис. 2.6. Зависимость коэффициента отражения от угла θ . Кривая 1 соответствует условию первого порядка (Engquist and Majda, 1977), кривая 2 представляет условие (2.26) с $w^- = 1,41$, $w^+ = 0,59$.

2.4. Разновидности неотражающих условий для линейного волнового уравнения

Большое внимание уделено построению неотражающих условий в двумерном случае (Reynolds, 1978), (Feng and Kang, 1984), (Trefethen, 1984), (Zhang, 1985), (Trefethen and Halpern, 1986), (Gustafsson, 1987a), (Howell and Trefethen, 1987).

Оператор волнового уравнения имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{1/2} \right] \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{1/2} \right] = 0.$$

Следовательно, уравнения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \pm \sqrt{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 0, \quad (2.28)$$

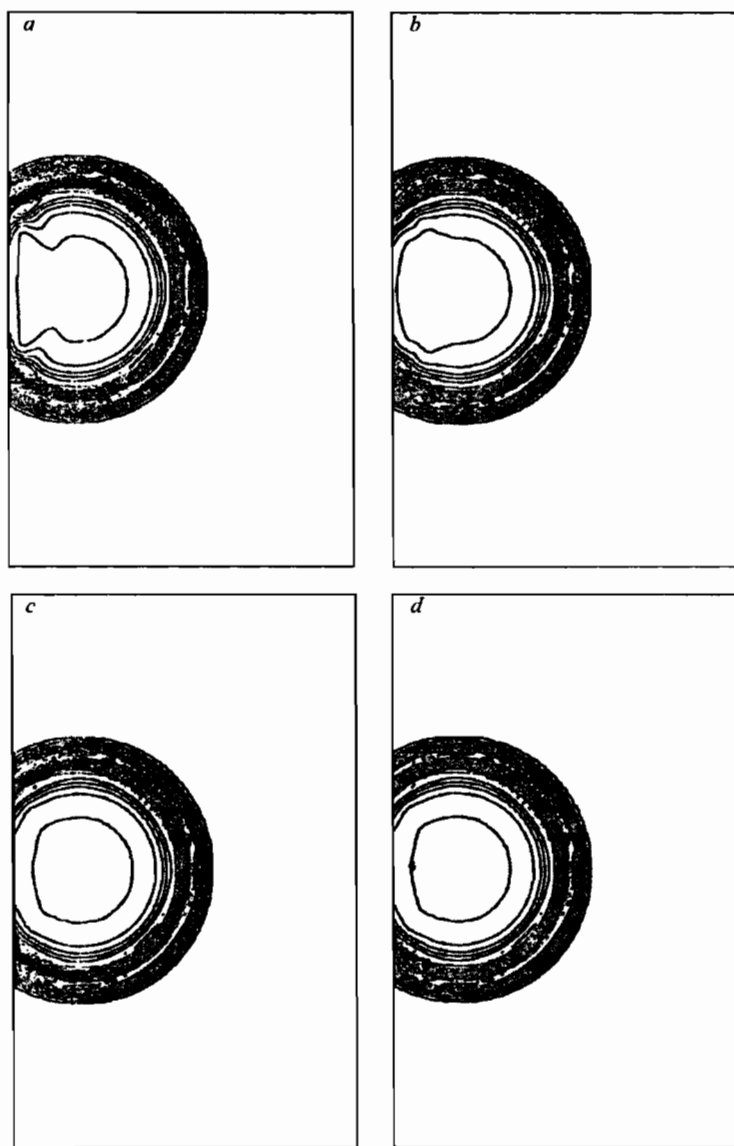


Рис. 2.7. Изолинии численного решения при $t = 1,6$: a — неотражающие условия первого порядка (Engquist and Majda, 1977); b — нелинейное адаптивное неотражающее условие первого порядка (2.23)–(2.25); c — неотражающие условия второго порядка (Engquist and Majda, 1977); d — нелинейное адаптивное неотражающее условие второго порядка (2.23)–(2.25)

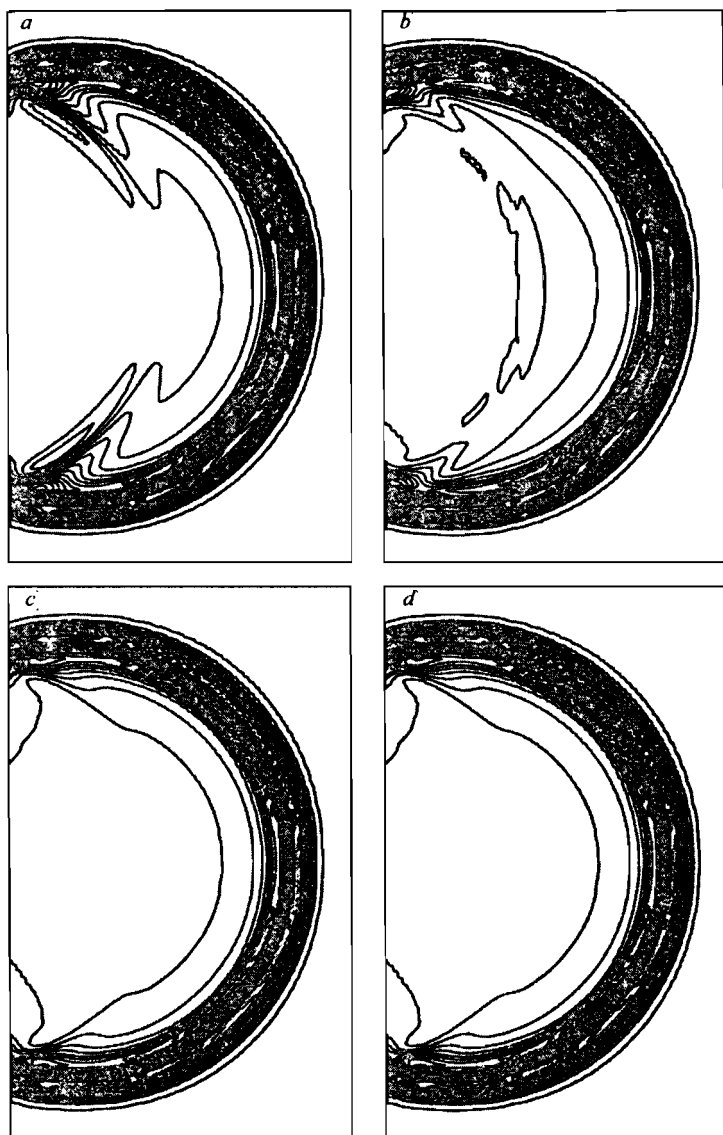


Рис. 2.8. Изолинии численного решения при $t = 3, 2$: a — неотражающие условия первого порядка (Engquist and Majda, 1977); b — нелинейное адаптивное неотражающее условие первого порядка (2.23)–(2.25); c — неотражающие условия второго порядка (Engquist and Majda, 1977); d — нелинейное адаптивное неотражающее условие второго порядка (2.23)–(2.25)

являются неотражающими условиями на границах области. Однако они не могут быть использованы практически, так как явно зависят от волнового числа. В статье (Reynolds, 1978) иным путем, независимо и почти одновременно с работами (Abarbanel and Gottlieb, 1979), (Gustafsson, 1980), получены условия второго приближения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & x = L, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & x = -L. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В статье (Reynolds, 1978) даны результаты численных расчетов, а также сравнение их с результатами, полученными при применении на границах области условия Дирихле.

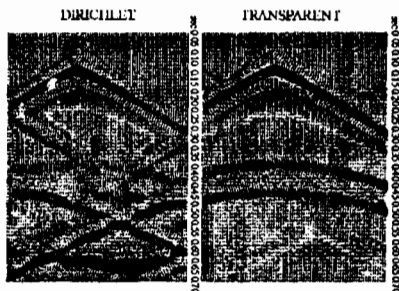


Рис. 2.9. Решения двумерных уравнений акустики, полученные с условиями Дирихле и «прозрачными (transparent)» граничными условиями для физической модели среды с разными свойствами

На рис. 2.9–2.11 приведены результаты расчета, показывающие характер взаимодействия возмущений с границами, на которых ставятся различные граничные условия при различных (указаны на рисунках) расположениях возмущений, глубины расчетной области и т.д.

Эти же условия получены также в работе (Zhang, 1985). В силу трудностей численной реализации условий высоких приближений, когда порядок производных возрастает, предлагаются условия, которые содержат производные более низких порядков. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{c} \sum_{l=1}^{n/2} \frac{\partial v_l}{\partial t}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_l}{\partial t^2} - \alpha_{n,l}^2 \frac{\partial^2 v_l}{\partial y^2} &= \beta_{n,l} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (l = 1, \dots, n/2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

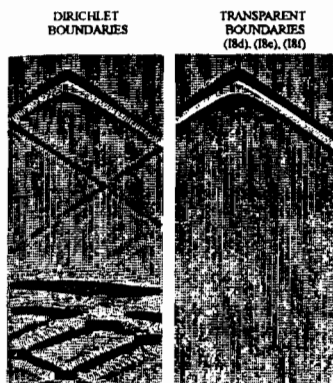


Рис. 2.10. Решения двумерных уравнений акустики, полученные с условиями Дирихле и «прозрачными (transparent)» граничными условиями (источник возмущения у поверхности)

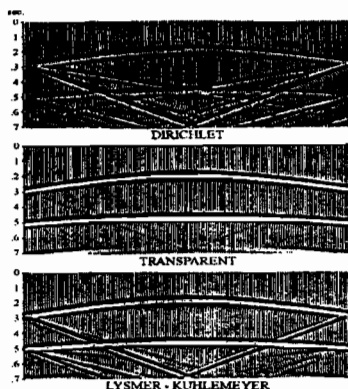


Рис. 2.11. Решения двумерных уравнений акустики, полученные с условиями Дирихле «прозрачными (transparent)» граничными условиями и условиями (Lysmer and Kuhlemeyer, 1969) (источник возмущения в центре расчетной области на глубине)

где

$$\alpha_{n,l} = \cos(l\pi/(n+1)),$$

$$\beta_{n,l} = \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_{n,l} - \alpha_{n-1,j}) / \prod_{j \neq l}^n (\alpha_{n,l} - \alpha_{n,j}).$$

Справедливо следующее:

$$\alpha_{n,l} > \alpha_{n-1,l} > \dots > \alpha_{n-1,n-1} > \alpha_{n,n}, \quad \alpha_{n,l} = -\alpha_{n,n+1-l},$$

$$\beta_{n,l} = -\beta_{n,n+1-l} > 0, \quad \sum_{l=1}^n \beta_{n,l} = 1.$$

Система (2.13) может быть приведена к виду

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \sum_{l=1}^{n/2} \alpha_{n,l}^2 \frac{\partial^2 v_l}{\partial y^2},$$

что может рассматриваться как уточненное условие второго приближения (2.2). Правая часть представляет собой это уточнение. В работе (Zhang, 1985) нет применения полученных соотношений в численных расчетах.

Неоднородные условия первого и второго приближений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = g(y, t), \quad (x = 0), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(y, t), \quad (2.32)$$

анализируются в статье (Gustafsson, 1987a). Они возникают в том случае, когда, например, имеются источники вне расчетной области. Во всех этих работах большое место занимают вопросы корректной и некорректной постановки задач (хорошо поставленные, плохо поставленные задачи).

Рассмотрим более подробно статьи (Trefethen and Halpern, 1986), (Howell and Trefethen, 1987). В первой из них указанные свойства устанавливаются в зависимости от степеней m и n действительных полиномов p_m и q_n ($m \geq 0$, $n \geq 0$) в дисперсионном соотношении

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{c\beta}{\omega} \right)^2} = \frac{\omega}{c} r(s) = \frac{\omega}{c} \frac{p_m(s)}{q_n(s)}, \quad s = \frac{c\beta}{\omega}, \quad (2.33)$$

для волны $\exp i(\alpha x + \beta y + \omega t)$. Необходимо с помощью полиномов p_m , q_n добиваться наилучшего приближения функции $r(s)$ в интервале $[-1, 1]$.

Как известно, учет первых двух членов разложения $r(s) = 1 - s^2/2$, которое можно рассматривать как разложение Паде порядка (2,0), дает второе приближение (2.32) (при $c = 1$, $g = 0$). Разложение Паде порядка (2,2),

$$r(s) = (1 - 3s^2/4) / (1 - s^2/4),$$

дает третье приближение неотражающего условия (принято $c = 1$):

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{3}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial t} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0. \quad (2.34)$$

Неотражающее условие второго приближения (2.32) называют «15°-уравнением», а третье приближение (2.34) — «45°-уравнением». Эти названия связаны с тем, что уравнения (2.32) и (2.34) обеспечивают приемлемое поглощение волн, падающих на границу в пределах указанных углов.

В ряде работ обсуждаются для $r(s)$ приближения Паде, Чебышёва и наименьших квадратов. Отметим, что первое из них дает хорошие результаты около $s = 0$ и плохие — вблизи сингулярностей $s = \pm 1$. Соответственно, при углах $\theta \approx \pi/2, 3\pi/2$ (θ — угол между направлением волны и нормалью к границе) все приближения (2.32), (2.34) являются неудовлетворительными. В частности, в работе (Fedorchenko, 1986) было показано, что применение разложения Паде приводит к хорошо поставленной задаче при всех $m = n$ и $m = n + 2$, но к плохо поставленной задаче для случая (4,0).

В том случае, когда $r(s)$ представляется постоянной, линейной или гиперболической функциями ((Fedorchenko, 1986), (Howell and Trefethen, 1987)),

$$r(s) \approx a_0, \quad r(s) \approx b_0 + c_0 s, \quad r(s) \approx \frac{d_0 + e_0 s}{1 + f_0 s},$$

то соответствующие им уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} B1: \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + a_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ B2: \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u}{\partial t} - c_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ B3: \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + d_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - e_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - f_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Эти условия на левой границе области рассмотрены совместно с уравнениями (2.31), (2.32), (2.34) (при $c = 1, g = 0$). Отметим, что (2.31), (2.32), (2.34) называются также уравнениями миграции, уравнениями однонаправленной волны (one-way wave equation) (Reynolds, 1978), (Feng and Kang, 1984), (Claerbout, 1985), (Zhang, 1985), (Trefethen and Halpern, 1986), (Howell and Trefethen, 1987) и др. Показано (Howell and Trefethen, 1987), что условие B2 в комбинации с уравнениями миграции (2.34) является плохо-поставленным.

Коэффициенты отражения R на границе $x = 0$ в волне

$$u = \exp i(\alpha x + \beta y + \omega t) + R \exp i(\alpha x + \beta y + \omega t)$$

имеют следующий вид:

$$B1: \quad R = \frac{\alpha - a_0\omega}{\alpha + a_0\omega},$$

$$B2: \quad R = \frac{\alpha - b_0\omega - c_0\beta}{\alpha + b_0\omega + c_0\beta},$$

$$B3: \quad R = \frac{\alpha\omega - d_0\omega^2 - e_0\beta\omega + f_0\alpha\beta}{\alpha\omega + d_0\omega^2 + e_0\beta\omega + f_0\alpha\beta}.$$

На рис. 2.12 показана зависимость $|R|$ от k_x/ω . Для $B1$, $B2$ коэффициент $|R| \leq 1$. Но для $B2$ значение $|R|$ неограниченно возрастает при $k_x\omega \approx 8$. Это значение коэффициента отражения соответствует плохо поставленному условию. Но на самом деле волновое число при $k_x/\omega = 2$ оказывается более важным, т.к. в этом случае групповая скорость становится бесконечной (рис. 2.13).

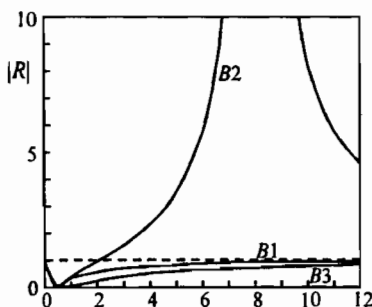


Рис. 2.12. Коэффициент отражения $|R|$ для 45°-уравнения с граничными условиями $B1$, $B2$, $B3$

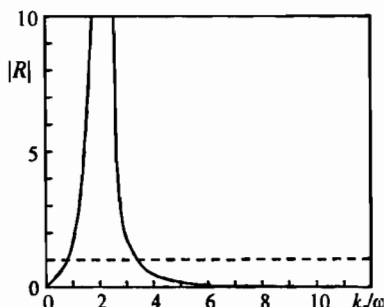


Рис. 2.13. Групповая скорость $|C|$ для 45°-уравнения

На рис. 2.14 а, б, с приведены результаты численного эксперимента в виде распространения возмущений, которые взаимодействуют с вертикальными границами. Решение приведено для граничных условий $B2$ (рис. 2.14 а, б) и $B3$ (рис. 2.14 с). Из рисунков видно, что условие $B2$ на мелкой сетке неустойчиво. Решение с граничными условиями $B3$ (рис. 2.14 с) устойчиво, и практически нет нефизических отражений от границ. В работе (Howell and Trefethen, 1987) дана конечно-разностная аппроксимация задачи.

Укажем также на лекцию (Gustafsson and Ferm, 1986), где рассмотрены относящиеся сюда вопросы.

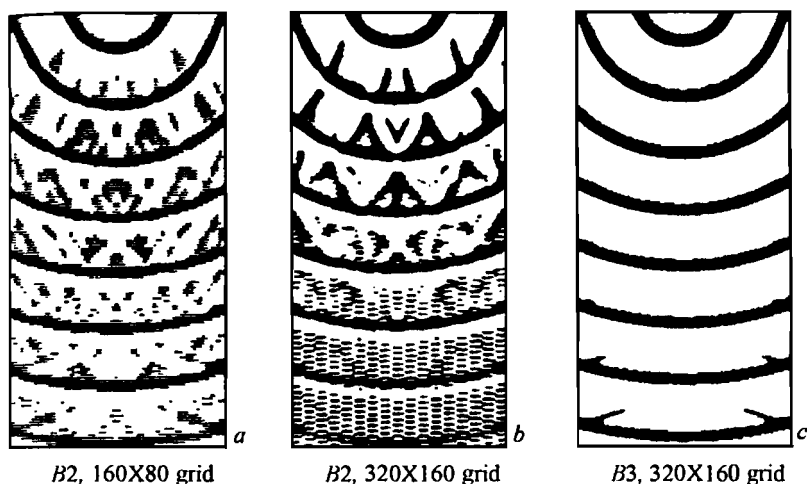


Рис. 2.14. Распространение возмущений для 45° -уравнения

2.5. Последовательность линейных условий, основанных на рассмотрении расходящихся сферических волн

В некоторых работах развивается иной подход построения иерархии неотражающих граничных условий. Идея построения их была использована еще в начале шестидесятых годов (Karp, 1961). Дадим изложение этого подхода, следуя работам (Bayliss and Turkel, 1980), (Bayliss and Turkel, 1982), (Maestrello et al., 1981), (Bayliss et al., 1982).

Утверждается, что в общем случае нельзя построить неотражающие условия. Поэтому, вместо этого предлагается построение последовательности граничных условий, которые последовательно улучшали бы в некотором смысле неотражающие свойства граничных условий. Эти свойства можно определить по разному. Одно из таких определений — следующее:

- 1) отражение быстро уменьшается по мере удаления границы;
- 2) отражение меньше для более коротких волн;
- 3) отражение уменьшается по мере того, как падающая волна приближается к некоторому предпочтительному направлению;
- 4) отражение уменьшается таким образом, что приближение к установившемуся течению ускоряется.

Один из подходов уменьшения отражения состоит в введе-

нии пористого слоя (Orlanski, 1976). Для этого подхода не совсем ясно, каково воздействие тонкого слоя на решение внутри расчетной области. О близком к этой идее методе будет сказано в главе 6.

Условия (2) и (3) были использованы в работах (Engquist and Majda, 1977), (Engquist and Majda, 1979) для построения асимптотического ряда неотражающих условий с помощью теории псевдодифференциальных операторов. Эти условия имеют высокий порядок и требуют для устойчивости применения аппроксимации Паде.

В работе (Rudy and Strikwerda, 1979) построены, на основе эвристической аргументации, радиационные граничные условия, основанные на идее (4). В некоторых случаях возможно построить граничные условия, основанные на разделении переменных или с помощью интегральных уравнений, удовлетворяющих требуемому решению. Этот метод использовался (Fix and Marin, 1978) для уравнения Гельмгольца. Так как получающиеся граничные условия не являются локальными, т.е. решение в рассматриваемой точке зависит от решения в других граничных точках, это затрудняет их использование стандартными конечно-разностными методами. Поэтому в (Bayliss and Turkel, 1980), (Bayliss and Turkel, 1982), (Maestrello et al., 1981), (Bayliss et al., 1982) основное внимание было уделено развитию локальных граничных условий.

В работе (Gustafsson and Kreiss, 1979) показано, что в общем случае нельзя построить неотражающие граничные условия, если неизвестно поведение решения на бесконечности. Эта концепция была использована в работе (Bayliss and Turkel, 1980) при конструировании граничных условий, основанных на асимптотическом расширении решения, справедливого на больших расстояниях.

Решение трехмерного волнового уравнения

$$p_{tt} - \Delta p = 0$$

представляется в виде разложения

$$p(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k} f_k(t - r, \theta, \varphi), \quad (2.36)$$

где r, θ, φ сферические координаты. Если функция $f_k(s, \theta, \varphi)$ является аналитической от θ и φ , то ряд (2.36) сходится.

Вводятся в рассмотрение операторы

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

$$B_m = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2m-1}{r} \right) B_{m-1}, \quad (m = 2, 3, \dots). \quad (2.37)$$

Они могут быть представлены также в виде

$$B_m = \prod_{l=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2l-1}{r} \right).$$

Применение этих операторов к ряду (2.36) приводит к уничтожению первых m его членов, а оставшиеся имеют порядок $B_m p = O(r^{-2m-1})$. Это свойство оператора (2.37) и ряда (2.36) выводится использованием только формальных манипуляций с ними и не основано на каких-то других особенностях волнового уравнения. Справедливость его может быть проверена непосредственными вычислениями.

Следовательно семейство условий на искусственной границе может быть представлено в виде

$$B_m p = 0. \quad (2.38)$$

С увеличением m точность (2.38) возрастает по отрицательным степеням r .

Справедливо следующее *утверждение*. Пусть Q — линейный дифференциальный оператор, который уничтожает функцию $r^{-k} f_k(t-r, \theta, \varphi)$ при $k = 1, \dots, m$ для произвольной функции f_k . Тогда порядок Q есть m , и $Q = c B_m$ для любой функции $c(r, t)$.

Отметим, что первое приближение (2.4) может рассматриваться как двумерный вариант условия $B_1 p = 0$. Однако последовательность условий (2.4), (2.5) и т.д. выводится разложением по углу падения волны. Здесь же граничные операторы являются асимптотическими по степеням r^{-k} .

Можно ввести еще оператор $L = \partial/\partial t + \partial/\partial r$ и рассмотреть некоторые аналогии. В размерных переменных имеем выражение $Lp = p_t + c_0 p_r$, что в гармоническом случае по времени $\exp(-i\omega t)$ дает $c_0(-i\alpha + \partial/\partial r)$, где $\alpha = \omega/c_0$ — волновое число. Следовательно $Lp = O(r^{-1})$, при $r \rightarrow \infty$, есть широко известное условие излучения Зоммерфельда.

При конечном радиусе условие $Lp = 0$ не является удовлетворительным даже для первого члена разложения (2.36). Если, однако, оператор L модифицировать введением $B_1 = L + c_0/r$, то $B_1p = 0$ является точным условием поглощения решений, описываемых первым членом (2.36). Следовательно $B_1p = 0$ можно трактовать как условие излучения Зоммерфельда (или типа Зоммерфельда) для конечной области. Оно впервые было предложено и применено в работе (Kriegsmann and Morawetz, 1978) для уравнения Гельмгольца.

Если искусственная граница приближается, а источник отличается от монополя, то условие $B_1p = 0$ не будет достаточно удовлетворительным. Чтобы получить приемлемые граничные условия в таких случаях, вводятся высшие формы B_m .

В случае искусственных границ несферической формы вместо оператора $\partial/\partial r$ появляются производные по нормали и по касательной к границе. Для производных по нормали должны быть использованы односторонние разности. Для больших значений m могут появиться трудности, связанные с неустойчивостью схемы.

Если ввести местную декартову систему координат, то волновое уравнение $p_{tt} = \Delta p$ может быть использовано для выражения производных по нормали через производные по касательной к границе и по времени.

Если вместо волнового уравнения привлекается соответствующая система с первыми производными

$$p_t + \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w}_t + \operatorname{grad} p = 0, \quad (2.39)$$

то первая производная p по нормали может быть исключена с помощью производной по времени. Уравнения (2.39) удобнее еще потому, что граничные значения p и $\mathbf{w}$ могут быть получены с помощью стандартных конечно-разностных алгоритмов.

В цилиндрической системе координат z, R (с соответствующими компонентами u, v) введем обозначения $r^2 = z^2 + R^2$, $\operatorname{tg} \theta = R/z$, $w = u \cos \theta + v \sin \theta$. Тогда первые два граничных условия можно записать как

$$\begin{aligned} B_1p &= p_t + w_t + \frac{p}{r} = 0, \\ B_2p &= p_{tt} - 2w_{tt} - w_{tr} - w_t + \frac{4}{r}p_t + \frac{2p}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В указанных выше размерных величинах первое из них имеет вид

$$p_t - \rho_0 c_0 w_t + c_0 r^{-1} p = 0.$$

Таким образом, построенная последовательность операторов B_m приводит к соответствующей последовательности все более точных граничных условий.

2.6. Применение условий, основанных на рассмотрении расходящихся сферических волн. Двумерные задачи

С помощью условий $B_1 p = 0$, $B_2 p = 0$ из предыдущего раздела были произведены численные эксперименты для осесимметричных задач. По радиусу расчетной области было взято 30 ячеек, по длине — 50 ячеек. Источник давления располагался на

оси вращения и был задан в виде $\cos \omega t \delta(|x - x_0|)$ (рис. 2.15). В первую очередь сравнивались решения с использованием характеристических условий $p_t + p_r = 0$ и $B_1 p = 0$ на всех границах. Первое из них послужило причиной появления ложных отражений значительной интенсивности от границ (рис. 2.16). Применение второго дало более удовлетворительные результаты (рис. 2.17). Многочисленные расчеты показали, что в простых задачах условие $B_1 p = 0$ приводит к таким же результатам, что и второе приближение неотражающего условия $B_2 p = 0$ (Bayliss and Turkel, 1980). На рис. 2.18 приводится сравнение решений, где видно также отличие их от аналитического решения. Амплитуда колебаний принята равной 1

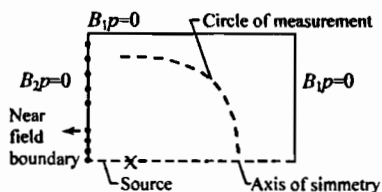


Рис. 2.15. Расчетная область и расположение неотражающих граничных условий

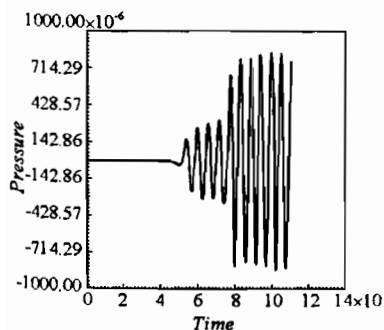


Рис. 2.16. Результаты при использовании условия Зоммерфельда

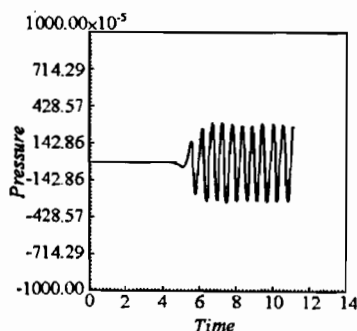


Рис. 2.17. Результаты при использовании условия $B_1 p = 0$

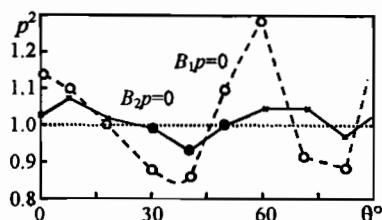


Рис. 2.18. Относительная интенсивность для различных граничных условий

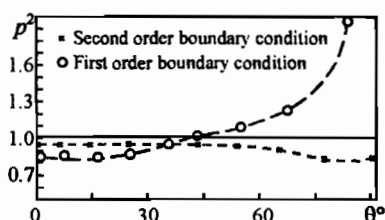


Рис. 2.19. Относительная интенсивность для квадрупольного источника

для сферической поверхности, отстоящей от источника на некотором расстоянии (показано штриховой линией). По горизонтали отложены значения углов θ ($\operatorname{tg} \theta = R/z$), а по вертикали — квадрата давления.

В качестве другого примера рассматривается квадрупольный источник. Решение этой задачи дано в (Morse and Ingard, 1968) в сферических координатах:

$$p(t, r, \theta) = \frac{\omega^4}{4\pi r} [-\sin(\omega(t-r))\cos^2\theta + \\ + \frac{3\cos^2\theta - 1}{\omega r} \cos(\omega(t-r)) + \sin \frac{(\omega(t-r))}{(\omega r)^2} (3\cos^2\theta - 1)]. \quad (2.41)$$

Решение (2.41) показывает, что главный член в разложении (2.36) становится равным нулю при $\theta = \pi/2$. Поэтому, если будет использоваться условие $B_1 p = 0$, численное решение будет искажаться для углов, близких к 90° . На рис.2.19 приведены p^2 в зависимости от изменения угла θ для граничных условий первого и второго порядков. По характеру поведения кривых видно, что условия первого порядка менее точны даже для углов, близких к нулю.

Приведенные условия были использованы во многих задачах, например, для изучения взаимодействия двух точечных источников, для получения информации об источнике по замеренным данным в дальнем поле (Maestrello et al., 1981) и т.д.

Рассматриваемый метод распространяется в статье (Bayliss and Turkel, 1982) на случай, когда имеется равномерное среднее движение идеальной сжимаемой жидкости с параметрами u_∞ , v_∞ , p_∞ , ρ_∞ , c_∞ . Тогда линеаризованные уравнения Эйлера в плоской задаче относительно возмущений параметров

$\hat{u} = u - u_\infty$, $\hat{p} = p - p_\infty$, $\hat{\rho} = \rho - \rho_\infty$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{u}_t + u_\infty \hat{u}_x + \frac{1}{\rho_\infty} \hat{p}_x &= 0, \\ \hat{v}_t + u_\infty \hat{v}_x + \frac{1}{\rho_\infty} \hat{p}_y &= 0, \\ \hat{\rho}_t + u_\infty \hat{\rho}_x + \rho_\infty c_\infty^2 (\hat{u}_x + \hat{v}_y) &= 0.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Исключение отсюда $\hat{u}$, $\hat{v}$ и введение новых координат,

$$\begin{aligned}\xi &= (1 - M_\infty^2)^{-1/2} x, \\ \tau &= c_\infty (1 - M_\infty^2)^{-1/2} t + M_\infty \xi,\end{aligned}\tag{2.43}$$

приводит к уравнению

$$\hat{p}_{\tau\tau} = \hat{p}_{\xi\xi} + \hat{p}_{yy}.\tag{2.44}$$

Поэтому в указанных координатах, например, условие $B_1 p = 0$ имеет вид

$$\hat{p}_\tau + \hat{p}_r + \frac{\hat{p}}{2r} = 0, \quad (r^2 = \xi^2 + y^2).\tag{2.45}$$

Когда условие (2.45) записано в физических координатах t , x , y и относительно общего давления $p = p_\infty + \hat{p}$, в нем появятся производные p_x, p_y . Так же, как выше в (2.40), удобно для вычислений исключить в нем пространственные производные. Из первых уравнений (2.42) имеем $p_x = (p_\infty + \hat{p})_x = -\rho_\infty(u_t + u_\infty u_x)$, $p_y = -\rho_\infty(v_t + u_\infty v_x)$. Так как часто u и v на границе области определяются экстраполяцией нулевого порядка (которая равносильна $u_x = 0$, $v_x = 0$), то можно принять $p_x \approx -\rho_\infty u_t$, $p_y \approx -\rho_\infty v_t$. Поэтому вместо (2.45) неотражающее условие, не содержащее пространственных производных, будет иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_\infty (1 - M_\infty^2)^{1/2}} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_\infty x}{(1 - M_\infty^2) r} \frac{\partial u}{\partial t} - \\ - \frac{\rho_\infty y}{r} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{p - p_\infty}{2r} = 0.\end{aligned}\tag{2.46}$$

Из (2.46) следует, что в установившемся режиме $p = p_\infty$. Но это имеет место тогда, когда градиент скоростей на границе

равен нулю, как это указано выше. Условие (2.46) справедливо для дозвукового потока.

Приводятся тестовые примеры. В первом из них рассматривается наложение сжимаемого вихря на равномерный поток с компонентами скорости $u = u_0$, $v = 0$ в прямоугольной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Вихрь с циркуляцией Γ моделируется соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Gamma}{\pi r^2} \left(y - \frac{1}{2} \right), \quad v = -\frac{\Gamma}{\pi} \left(x - \frac{1}{2} \right) r^2, \\ r^2 &= R^2 + \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2, \\ \Gamma &= 2\pi R (v_\theta)_{\max}, \quad R = 0,15. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Температура считается постоянной, давление вычисляется для изэнтропического процесса. Так как вихрь сносится потоком, то установившееся состояние в прямоугольной области представляет собой равномерное течение. Число временных шагов, необходимое для установления, зависит от способности выходной границы не отражать падающие возмущения. Применяются схема МакКормака для уравнения движения жидкости ($M_\infty = 0,4$) и условие (2.46).

Сходимость к установившемуся состоянию определяется условием

$$\left| \Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n \right| \leq \epsilon, \quad (2.48)$$

в каждой точке (i, j) , где под Φ понимается любой параметр потока. Принято, что $\epsilon = 10^{-7}$. Это условие рассматривается в зависимости от положения начала координат. При $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$, $(0, 0)$ число временных шагов соответственно равно 2251, 2878, 2530.

Интересно заметить, что если вместо (2.46) поставить на границе расчетной области условие $p = p_\infty$, то необходимое для сходимости количество шагов равно более $2 \cdot 10^4$. При применении условия (3.54), приведенного в главе 3, оно равно 7860. Этот пример показывает большое достоинство приближенного неотражающего условия (2.46).

Следующим примером является задача развития дозвукового пограничного слоя на плоской пластине. Постановка ее изложена более подробно в разделе 3.9. (см. рис. 3.27). В частности,

там подробно исследовано влияние условий на входе в область и на выходе. Верхняя граница области является характеристической линией, нижней служит пластина.

В работе (Bayliss and Turkel, 1982) снова исследуется влияние положения начала координат на скорость сходимости. При их значениях $(1, 0)$ и $(0, 0)$ количество временных шагов для установления по условию (2.46), соответственно, равно 12500 и 14000. Эта цифра в случае применения условия $p = p_\infty$ равна $2 \cdot 10^4$, а в случае применения указанного выше условия (3.54) со значением коэффициента $\alpha = 0, 3$, равна 12800.

Изучено поведение решения при опускании верхней границы (т.е. уменьшении расчетной области). Выше и здесь все параметры на верхней границе определяются экстраполяцией. В данном случае указанное опускание приводит к появлению осцилляций в решении, что замедляет достижение установившегося состояния. Необходимое количество шагов при уменьшении высоты области до 0,4 увеличивается до 14000 (вместо 12500 при высоте 1,0). При этом, установившееся состояние значительно отличается от состояния, полученного интегрированием уравнений в большей области.

Ускорение сходимости может быть достигнуто применением к верхней границе условия (2.46) или соотношения

$$p_t - \rho_\infty c_\infty v_t = 0,$$

вытекающего из (2.46), на характеристике. Характеристическое условие может использоваться и для сверхзвукового течения. Количество временных шагов для установления теперь равняется 8800, т.е. в полтора раза меньше, чем при дозвуковом течении.

При опускании верхней границы до высоты 0,4 количество временных шагов до установления в сверхзвуковом потоке равняется 9400 (против 8800 при высоте 1,0). Параметры установившегося состояния были одинаковы с теми, которые получались из решения в большей расчетной области. В этом случае вместо p_∞ бралось значение p из предыдущего временного шага, т.к. равенство $p = p_\infty$ на границе не имеет места при сильном сужении расчетной области.

Если на выходной границе ставится не условие (2.46), а (3.54) из последующей главы, при том же условии (2.46) на верхней границе, то получается 12850 шагов. Почему не происходит ускорения сходимости в этом случае, остается неясным.

Дано также сравнение результатов, получаемых с применением условий $B_1 p = 0$ и $B_2 p = 0$ в задаче о звуковом поле, возбуждаемом квадрупольным источником.

Выше всюду предполагалась зависимость решения от времени в неявной форме. В том случае, когда она известна заранее, неотражающие условия несколько изменятся. Если имеет место решение в виде $\exp(i\omega t)$, то задача для области $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq \pi$ с непроницаемыми жесткими стенками может быть поставлена так:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \omega^2 \varphi = 0,$$

$$\partial\varphi/\partial y = 0, \quad (y = 0, \pi), \quad \varphi = f, \quad (x = 0).$$

Ее общее решение имеет вид

$$\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \cos jy \left(e^{-i\alpha_j x} + R_j e^{i\alpha_j x} \right), \quad \alpha_j = \sqrt{\omega^2 - j^2}.$$

Для $j \leq \omega$ уходящие от начала координат волны описываются незатухающими членами $\exp(-i\alpha_j x)$, при $j > \omega$ — затухающими членами $\exp(-\sqrt{j^2 - \omega^2} x)$. Таким образом, волновые числа меняются в зависимости от моды.

Граничное условие, не отражающее на границе $x = L$ первые $j \leq \omega$ моды, по аналогии с (2.49) из предыдущего параграфа имеет вид

$$B_j \varphi = \prod_{j=1} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_j \right) \varphi = 0, \quad (x = L).$$

Погрешность этого условия экспоненциально падает с увеличением L . Рассмотрены также неотражающее условие в цилиндрической системе координат для круговой расчетной области.

Отметим, что в работе (Fix and Marin, 1978) для уравнения Гельмгольца были предложены граничные условия, которые, однако, являются нелокальными и поэтому не могут быть легко применены в стандартных конечно-разностных способах.

2.7. Дальнейшее рассмотрение многомерных волновых задач

Продолжим обзор способов постановки условий на искусственных границах для многомерных волновых задач. О них говорилось в предыдущем параграфе.

В статье (Fix and Gunzburger, 1980) изучается решение уравнений, записанных относительно малых возмущений в газе. Среднее движение предполагается равномерным. Используются условия излучения Зоммерфельда на внешней границе. Доказывается единственность решения. Очевидно, что эта работа уже не отражает современного состояния теории неотражающих условий.

В плоском канале, в котором находится препятствие — отражатель волн, могут быть поставлены условия, подобные тем, которые описаны в предыдущих параграфах этой главы. Если канал имеет ширину H , то, исключая временный множитель $\exp(-i\omega t)$, запишем в безразмерных координатах уравнение Гельмгольца (Kriegsmann, 1982):

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + k^2 u &= 0, \quad k^2 = (H\omega/c)^2, \\ |x| < \infty, \quad 0 < y < 1, \end{aligned} \quad (2.49)$$

с условиями на стенках $y = 0, 1$ и на препятствии

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad |x| < \infty, \quad u = 0(\Gamma). \quad (2.50)$$

Могут быть использованы операторы

$$B_m = \partial/\partial x - \bar{i}k_m, \quad k_m = \sqrt{k^2 - m^2 n^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Применение оператора B_1 к отраженной волне в канале дает

$$B_1 u_R = \bar{i} \sum_{m=2}^{\infty} (k_m - k_1) R_m e^{\bar{i}k_m x} \sin m\pi y = O\left(e^{-|k_2|x}\right).$$

И далее можно показать, что

$$B_2 B_1 u_R = O\left(e^{-|k_3|x}\right).$$

Так как $|k_3| > |k_2|$ для любого k , то последнее условие обеспечивает меньшее отражение волн. В отличие от работ (Bayliss and Turkel, 1980), (Maestrello et al., 1981), (Bayliss et al., 1982), (Bayliss and Turkel, 1982), в статье (Kriegsmann, 1982) показано применение условий в случае плоского канала.

В работах (Bayliss et al., 1983), (Bayliss et al., 1985) дается дальнейшее развитие теории, развитой в указанных выше работах. В первой из них решение задачи

$$\begin{aligned}\Delta u + k^2 u &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \\ u_x(0, y) &= f, \\ u_x(\pi, y) &= g, \\ u_y(0, y) = u(x, \pi) &= 0,\end{aligned}\tag{2.51}$$

сравнивается с решением, когда при $x = \pi$ условие Неймана $u_x = g$ заменяется условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \bar{i} \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} \right) u = 0, \quad (x = \pi),$$

(в формуле (3.5с) работы (Bayliss et al., 1983) имеется опечатка), а также условием более высокого порядка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \bar{i} \sqrt{k^2 - \frac{9}{4}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \bar{i} \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} \right) u = 0, \quad (x = \pi).$$

Другим примером является излучение волны сферой радиусом $r = r_0$. Условие на радиусе R ($R > r_0$) имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} - 2\bar{i}k \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{2}{r} - 4\bar{i}k \right) \frac{u}{r} - k^2 u = 0.$$

Аналізу точности решений этих задач посвящена статья (Bayliss et al., 1985).

К этим работам примыкает статья (Goldstein, 1986). Упоминание об условиях, приведенных выше, содержится также в лекциях (Gustafsson, 1985).

В статьях (Higdon, 1986b), (Higdon, 1986a) рассматриваются несколько условий на границе для двумерного волнового уравнения (2.49). Здесь принято $k^2 = \omega^2$.

Введем обозначения: I — единичный оператор, $K u_{i,j}^n = u_{i+1,j}^n$, $Z u_{i,j}^n = u_{i,j}^{n+1}$. Условие на границе $i = 0$ по методу «усреднения» дается в виде

$$\left[I - \frac{1}{4} (I + Z^{-1}) (I + K) \right]^P u_{0,j}^{n+1} = 0, \tag{2.52}$$

где p — положительное целое число — порядок приближения.

Условие первого порядка ($p = 1$) имеет вид

$$\left[I - \frac{1}{3} (K + Z^{-1} + Z^{-1}K) \right] u_{0,j}^{n+1} = 0$$

или

$$u_{0,j}^{n+1} = \frac{1}{3} (u_{1,j}^{n+1} + u_{0,j}^n + u_{1,j}^n). \quad (2.53)$$

Коэффициент отражения условия (2.52) равен

$$R = - \left(\frac{\tau - \cos \theta}{\tau + \cos \theta} \right)^p + 0(\omega \Delta t). \quad (2.54)$$

Здесь $\tau = \Delta t / \Delta x$, θ — угол между нормалью к границе и направлением падающей волны.

Условие (2.52) находится в согласии с аналитическим условием

$$(\tau \partial / \partial t - \partial / \partial x)^p u = 0. \quad (2.55)$$

Это можно увидеть из представления (2.52) в виде

$$\left[\tau \left(\frac{I - Z^{-1}}{\Delta t} \right) - \left(\frac{I + Z^{-1}}{2} \right) \left(\frac{K - I}{\Delta x} \right) \right]^p u_{0,j}^{n+1} = 0.$$

Во введенных выше операторах пространственно-временную аппроксимацию представим в виде

$$(I - Z^{-1}K)^p u_{0,j}^{n+1} = 0. \quad (2.56)$$

При $p = 1$ и $p = 2$ имеем условия

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{1,j}^n, \quad u_{0,j}^{n+1} = 2u_{1,j}^n - u_{2,j}^{n-1}, \quad (2.57)$$

которые исследовались в первой главе.

Отметим, что (2.56) дает такое же значение коэффициента отражения (2.54) и соответствует тому же аналитическому условию (2.55).

При $\tau = \cos \alpha$, $p = 1$ (2.55) не дает отражения волны, падающей под углом $\pm \alpha$. Условие

$$\left[\prod_{m=1}^p \left(\cos \alpha_m \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0, \quad (2.58)$$

является точно неотражающим для углов $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_p$ (здесь $|\alpha_m| < \pi/2$ для всех m).

Для (2.58) коэффициент отражения равен

$$R = - \prod_{m=1}^p \left(\frac{\cos \alpha_m - \cos \theta}{\cos \alpha_m + \cos \theta} \right), \quad (2.59)$$

где θ — по прежнему действительный угол падения волны.

Рассмотрим более подробно (2.58) для $p = 2$:

$$\left(\cos \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\cos \alpha_2 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (2.60)$$

Один путь применения (2.60), очевидно, состоит в том, чтобы раскрыв скобки, получить линейную комбинацию членов u_{tt} , u_{xt} , u_{xx} . В этом случае появляется необходимость аппроксимировать u_{xx} односторонними разностями, что представляет трудности для получения устойчивой схемы. С помощью уравнения внутри области $u_{xx} = u_{tt} - u_{yy}$ можно получить условие второго приближения (2.31) (при $g = 0$) из раздела 2.4.

Другой подход состоит в том, чтобы аппроксимировать каждый сомножитель в (2.60) с дифференциальным оператором первого порядка, что имеет то преимущество, что даже для условий высоких порядков присутствуют лишь одномерные производные. При этом исключаются трудности, связанные с узлами около углов области. Кроме того, упрощается анализ устойчивости схемы.

Относительно углов α_1 , α_2 можно сказать, что они определяются «экспериментально», исходя из задачи.

Отметим, что условие второго порядка из статьи (Wagatha, 1983) имеет вид

$$\frac{21\pi}{64} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{15\pi}{64} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

что соответствует в (2.59) углам $\alpha_1 = 22, 14^\circ$ и $\alpha_2 = 64, 42^\circ$.

Дальнейший анализ двумерных и трехмерных условий дан в статье (Keller and Givoli, 1989). Решение задачи для волнового уравнения в неограниченной области сводится к решению

следующей задачи:

$$\begin{aligned}\Delta u + k^2 u + f &= 0, & \text{в } \mathcal{R}, \\ u &= g, & \text{на } \Gamma_g, \\ u_n &= h, & \text{на } \Gamma_h, \\ u_n &= -Mu, & \text{на } \mathcal{B},\end{aligned}\tag{2.61}$$

где Γ_g , Γ_h — внутренние границы, на которых ставятся условия Дирихле и Неймана, соответственно, $\mathcal{B}$ — внешняя «искусственная» граница, на которой ставятся предложенные (Keller and Givoli, 1989) условия, названные Дирихле–Неймана (DtN) условиями, M — оператор. Условие DtN является нелокальным и определяется следующими соотношениями:

$$u_n(R, \theta, \phi) = - \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathcal{B}} m_i(\theta, \phi, \theta', \phi') u(R, \theta', \phi') d\mathcal{B}', \tag{2.62}$$

где

$$\begin{aligned}m_i(\theta, \phi, \theta', \phi') &= \sum_{j=0}^i \beta_{ji} P_i^j(\cos \phi) P_i^j(\cos \phi') \cos j(\theta - \theta'), \\ \beta_{ji} &= - \frac{(2i+1)(i-j)! \gamma_i}{2\pi R^2 (i+j)!},\end{aligned}\tag{2.63}$$

$$\gamma_i = \frac{(\partial/\partial R)[R^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)]}{R^{-1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)}.$$

Здесь $H_{n+1/2}^{(1)}(kR)$ — функция Ханкеля 1-го рода.

Решены плоские волновые задачи с применением следующих условий на внешней границе (ω — частота, n — внешняя нор-

маль, R — радиус, θ — угол):

$$\begin{aligned}
 E_1: \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= \left(\bar{i}\omega - \frac{1}{2R} \right) u, \\
 E_2: \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= \left(\bar{i}\omega - \frac{1}{2R} \right) u + \left(\frac{\bar{i}}{2\omega R^2} + \frac{1}{2\omega^2 R^3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \\
 A_3: \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= \left(\bar{i}\omega - \frac{1}{2R} + \frac{\bar{i}}{8\omega R^2} - \frac{1}{8\omega^2 R^3} \right) u + \\
 &\quad + \left(\frac{\bar{i}}{2\omega R^2} + \frac{1}{2\omega^2 R^3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Первые два из них соответствуют известным соотношениям (Engquist and Majda, 1979), (Engquist and Majda, 1981), а последнее применялось в статье (Feng and Kang, 1984). Найдены также погрешности.

На рис. 2.20 приведено сравнение решений, полученных с применением различных граничных условий на внешней границе. Условие DtN достаточно хорошо передает точное решение, тогда как условия E_1 , E_2 , A_3 заметно отклоняются от точного. Условие Зоммерфельда еще менее точно. На рис. 2.21 показаны изолинии решения, полученного с применением условий DtN.

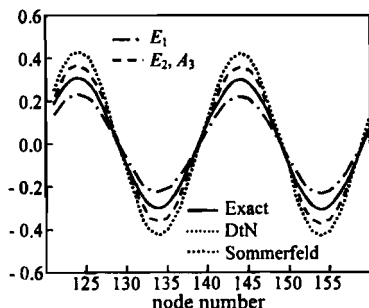


Рис. 2.20. Сравнение решений для различных граничных условий на внешней границе

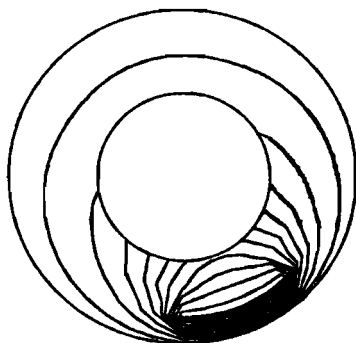


Рис. 2.21. Изолинии решения для DtN условия

2.8. Линейные условия, содержащие угол падения волны на искусственную границу

Рассмотрим распространение линейного возмущения в области $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ (Илгамов, 1985а). Волна, падающая на границу $x = 0$ и отраженная от нее, описывается потенциалом скорости

$$\varphi = \exp \left[(i\omega/c_0) (x \cos \theta + y \sin \theta + c_0 t) \right] + R \exp \left[(i\omega/c_0) (-x \cos \theta + y \sin \theta + c_0 t) \right], \quad (2.65)$$

где c_0 , ω — скорость и частота, R — коэффициент отражения волны от искусственной границы $x = 0$. Угол падения θ — угол между направлением падающей волны и нормалью к границе. Он определяется для каждой границы отдельно. Следует учитывать, что для лучей 1 на рис. 2.22 угол $\theta_1 > 0$, а для лучей 2 угол $\theta_2 < 0$.

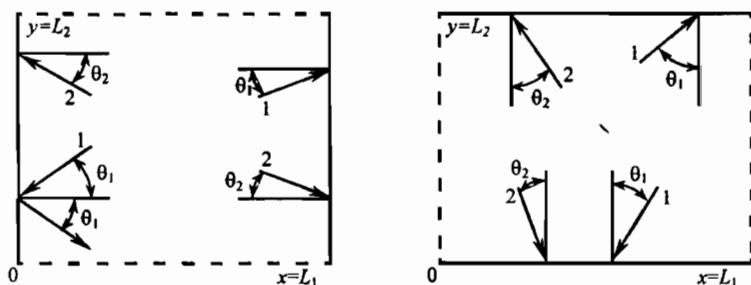


Рис. 2.22. Распространение линейного возмущения в области

Следуя работе (Илгамов, 1985а), в акустическом импедансном соотношении введем функцию $a(\theta)$ угла θ :

$$u = ap, \quad \left(u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.66)$$

Здесь u , p — возмущения скорости по оси x и давления.

Подставляя сюда (2.65), находим

$$a = -\frac{1 - R \cos \theta}{1 + R \rho_0 c_0}. \quad (2.67)$$

Таким образом, для случая полного поглощения волны ($R = 0$) на искусственной границе из (2.66) и (2.67) получаем

$$u = - (p/\rho_0 c_0) \cos \theta, \quad (x = 0). \quad (2.68)$$

Это соотношение при известном угле θ является условием, обеспечивающим полное поглощение.

Из него могут быть получены приближения (2.4) и (2.5). Для этого первый член (2.65) представим в виде $\exp i(\alpha x + \beta y + \omega t)$. Из сравнения их аргументов следует, что

$$\alpha = \frac{\omega}{c_0} \cos \theta, \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \sin \theta, \quad \alpha = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \beta^2}.$$

Через потенциал φ правая часть (2.68) может быть представлена как $c_0^{-1} \cos \theta \partial \varphi / \partial t$ или $(\alpha/\omega) \partial \varphi / \partial t$. Поэтому (2.68) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{c_0 \beta}{\omega}\right)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.69)$$

Так же, как в главе 2, при сохранении первого члена разложения корня в (2.69) получаем первое приближение (2.4), а при сохранении двух членов разложения — второе приближение (2.5). В последнем случае следует положить $(i\omega)^{-1} \partial \varphi / \partial t = \varphi$. Отметим, что в (2.4) и (2.5) принимается $c_0 = 1$. Эти два приближения приводят к следующим уравнениям:

$$u = -\frac{1}{\rho_0 c_0} p, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c_0}{2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.70)$$

где $v = \partial \varphi / \partial y$ скорость частиц среды по направлению оси y .

Анализ условий (2.4) и (2.5) дан в работах, обзор которых приведен в указанной выше главе. Поэтому здесь рассмотрим лишь условие (2.68), содержащее угол падения θ .

Этот угол можно определять в процессе численного счета во внутренней области. Во многих случаях угол θ известен до решения задачи (например, в задаче о первом приходе волны к границам прямоугольной области от точечного источника, в задаче, где обтекаемое тело имеет размеры, малые по сравнению с расчетной областью и т.д.).

Дадим оценки точности условия при неточном знании угла падения волны на границу. Обозначим угол, определенный

неточно, через $\theta + \delta\theta$, где $\delta\theta$ — отклонение от точного значения угла θ . Для этого угла из (2.66) и (2.67) имеем соотношение, где коэффициент отражения не равняется нулю,

$$u = -\frac{1 - R \cos(\theta + \delta\theta)}{1 + R} \frac{\rho_0 c_0}{p}. \quad (2.71)$$

Поделив (2.71) на соотношение (2.68), записанное для точного угла падения θ , получаем значение коэффициента отражения, обусловленного неточным знанием угла падения:

$$R = \frac{\cos(\theta + \delta\theta) - \cos\theta}{\cos(\theta + \delta\theta) + \cos\theta}. \quad (2.72)$$

На рис. 2.23 приведена зависимость R от $\delta\theta/\theta$ для трех значений θ . Из них можно вывести следующее заключение. Когда неизвестен угол падения, то из всех возможных его значений нужно брать большее. При этом отклонения $\delta\theta$ будут в отрицательную сторону (левая часть от оси R), когда амплитуда отраженных волн сравнительно мала. Если линия между точками 1 и 2 на рис. 2.24 является источником возмущений, то угол θ нужно брать ближе к θ_2 , чем к θ_1 .

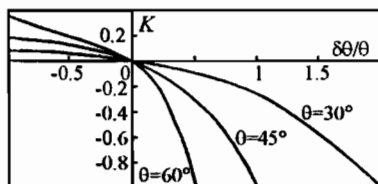


Рис. 2.23. Зависимость коэффициента отражения R от изменения угла $\delta\theta/\theta$

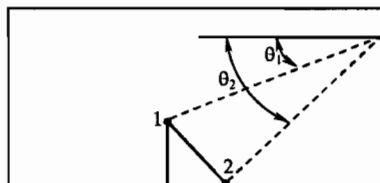


Рис. 2.24. Выбор угла падения θ в зависимости от источника возмущения

Легко получить условия (2.68), (2.70) для правой границы $x = L_1$. Для этого в (2.65) нужно изменить знаки перед x и y на противоположные. Тогда первый член (2.65) будет описывать волну, распространяющуюся слева к границе $x = L_1$, а второй — отраженную от нее волну. При этом вместо (2.68) имеем

$$u = (p/\rho_0 c_0) \cos\theta, \quad (x = L_1), \quad (2.73)$$

а вместо (2.70) условие

$$u = \frac{p}{\rho_0 c_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_0}{2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (x = L_1). \quad (2.74)$$

Таким образом, (2.73), (2.74) получаются из (2.68) и (2.70) изменением знака у скорости u и ее производной $\partial u / \partial t$.

Для получения условий на искусственной границе $y = 0$ первый член (2.65) представим в виде

$$\varphi = \exp \left[(i\omega/c_0) (x \sin \theta + y \cos \theta + c_0 t) \right].$$

Подставляя его в условие $v = ap$, ($v = \partial \varphi / \partial y$, $p = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$) находим $a(\theta)$. Аналогично определяем $a(\theta)$ для границы $y = L_2$ для чего в выражении φ необходимо изменить знаки перед x, y на противоположные. Таким образом, полностью неотражающие условия на нижней и верхней искусственных границах имеют вид

$$v = \pm (p/\rho_0 c_0) \cos \theta, \quad (y = 0, \quad y = L_2). \quad (2.75)$$

Приближения типа (2.70), (2.74) записываются по аналогии:

$$v = \pm p/\rho_0 c_0, \quad (2.76)$$

$$\pm \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c_0}{2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (y = 0, \quad y = L_2).$$

В заключение отметим, что при наличии равномерного среднего течения со скоростью U_∞ сжимаемой идеальной жидкости, на которое накладываются возмущения с потенциалом φ , условие (2.73) не меняется. Это легко показать, используя вместе (2.66) выражение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -a \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (2.77)$$

где φ будет иметь вид (заранее полагаем $R = 0$)

$$\varphi = \exp i\omega \left(-\frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c_0 + U_\infty \cos \theta} + t \right). \quad (2.78)$$

Подставляя (2.78) в (2.77), находим то же значение $a = (\rho_0 c_0)^{-1} \cos \theta$.

Если установившееся течение не является равномерным, то наложенное на него возмущение будет изменять свое направление в области. В этом случае угол падения волны на искусственную границу не будет совпадать с углом, образованным между нормалью к границе и линией, соединяющей точку 1 (или 2) и точку границы (рис. 2.24). Тогда он может быть определен в процессе счета.

2.9. «Радиационные граничные операторы»

В работе (Moore et al., 1988a) приводится небольшой обзор по теории «радиационных граничных операторов». Рассматриваются два основных подхода к построению радиационных граничных операторов. Первый — метод взаимного уничтожения (аннигиляция), второй — односторонняя аппроксимация волнового уравнения. В конечно-разностных и конечно-элементных подходах радиационные граничные операторы используются для сокращения расчетной области без потери решения, соответствующего неограниченной области.

Идея метода взаимного уничтожения впервые была представлена в работе (Sommerfeld, 1949), в которой даны радиационные условия, названные условиями Зоммерфельда, представляющие «уничтожение» первой моды в разложении решения. Для скалярного волнового уравнения

$$\nabla^2 U - U_{tt} = 0$$

и связанного с ним уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0,$$

условия Зоммерфельда имеют вид

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R(U_R - jkU) = 0,$$

где U_R , U_t — производные по соответствующей переменной, а решение U представляется в виде разложения в ряд:

$$U(R, \theta, \varphi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{R^i} f_i(t - R, \theta, \varphi).$$

Таким образом, условие Зоммерфельда можно рассматривать как оператор распространения на дальнее поле U , дающее асимптотический результат

$$\left(\frac{\partial}{\partial R} - ik \right) U = O(R^{-2}),$$

при $R \rightarrow \infty$.

Позже (Kriegsmann and Morewetz, 1979), (Bayliss and Turkel, 1980) развили теорию Зоммерфельда и предложили операторы

более высоких степеней. В общем случае эти условия представляются в виде

$$B_n U = O(R^{-2n-1}),$$

где оператор B_n определяется из рекуррентного соотношения

$$B_n = \left(L + \frac{2n-1}{R} \right) B_{n-1}, \quad L \equiv \frac{\partial}{\partial R} - jk.$$

Другой подход, в котором допускается распространение волн только в одном направлении, называется методом «однонаправленных волновых уравнений» («one-way wave equations»).

На рис. 2.25 приведена двумерная расчетная область Ω , во внутренних точках которой справедливо волновое уравнение

$$U_{xx} + U_{yy} - U_{tt} = 0.$$

Таким образом, внутри расчетной области волны могут распространяться во всех направлениях. На границах $\partial\Omega$ разрешается распространение волн только из расчетной области. Схемы, которые предписывают однонаправленные волновые уравнения на границах называются «радиационными граничными условиями» («radiation boundary condition» — RBC).

Для двумерного волнового уравнения

$$LU = 0, \quad L \equiv D_x^2 + D_y^2 - D_t^2,$$

где

$$D_x^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_y^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_t^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

волновой оператор L можно представить в следующем виде:

$$LU = L^+ L^- U = 0,$$

где

$$L^- = D_x - D_t \sqrt{1 - S^2}, \quad L^+ = D_x + D_t \sqrt{1 - S^2}, \quad S = D_y / D_t.$$

В работе (Engquist and Majda, 1977) показано, что на границе $x = 0$ применение к решению U оператора L^- приводит к полному поглощению плоской волны, падающей под любым углом к ней и распространяющейся в направлении x . Поэтому условие

$$L^- U = 0$$

на границе $x = 0$ является точным аналитическим РВС условием, поглощающим все приходящие из внутренней области волны. Оператор L^+ осуществляет те же самые функции для волн, распространяющихся в положительном направлении x . Оператор L^- классифицируется как псевдодифференциальный оператор, который является нелокальным как по пространственной, так и по временной переменным. Это нежелательное свойство препятствует использовать этот оператор в качестве РВС условия. Используются различные аппроксимации радикала, позволяющие построить РВС условия.

Например, разложение в ряд Тейлора,

$$\sqrt{1 - S^2} \approx 1 - \frac{1}{2}S^2,$$

приводит к следующей аппроксимации аналитических РВС условий на границе $x = 0$:

$$U_{xt} - U_{tt} + \frac{1}{2}U_{yy} = 0,$$

которая уже встречалась в предыдущих разделах книги.

В работе (Trefethen and Halpern, 1986) дано построение численных поглощающих условий, сводящихся к аппроксимации $\sqrt{1 - S^2}$ рациональной функцией $r(s) = p_m(s)/q_n(s)$, где p и q — полиномы степени m и n , а r представляется типом (m, n) . Например, высокого порядка аппроксимация типа $(2, 2)$, предложенная в работе (Trefethen and Halpern, 1986), может быть представлена в виде

$$\sqrt{1 - S^2} \approx \frac{p_0 + p_2 S^2}{q_0 + q_2 S^2}.$$

Этой аппроксимации соответствует приближенное аналитическое РВС условие

$$q_0 U_{xtt} + q_2 U_{xyy} - p_0 U_{ttt} - p_2 U_{tyy} = 0.$$

Выбор коэффициентов определяется с помощью интерполяции. Для получения свойств РВС в широком диапазоне падающих волн используются аппроксимации Чебышёва или Паде.

Представленные численные эксперименты дают меру отклонения нефизического отражения для заданных РВС условий, при прохождении импульса возмущения через границу. На рис. 2.25а показана расчетная область, состоящая из двух областей: Ω_B и Ω_T , первая из которых больше и включает вторую область. Таким образом, на границе области Ω_T , где

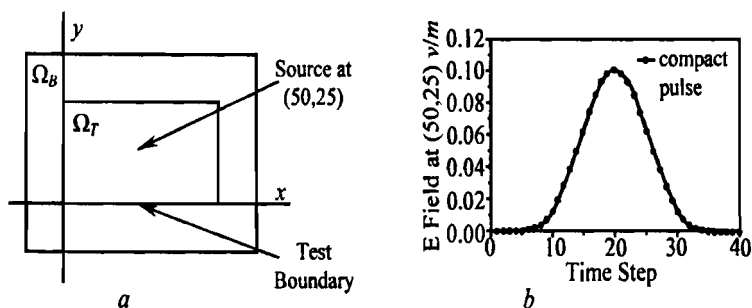


Рис. 2.25. Расчетная область в задаче взаимодействия импульса с границей (a); форма импульса (b)

ставятся RBC условия, известно точное решение, определяемое для области Ω_B .

На рис. 2.26 приведена локальная ошибка RBC условия для аппроксимации Паде типа (2,2) и (2,0). Повышение типа аппроксимации приводит к уменьшению ошибки. Аналогичные результаты для аппроксимации Чебышёва незначительно отличаются от аппроксимации Паде. Результаты для третьего порядка аппроксимаций приведены на рис. 2.27.

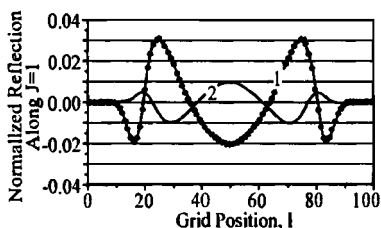


Рис. 2.26. Ошибка, возникающая при отражении импульса от границы, на которой ставятся RBC условия. Аппроксимация Паде типов (2,0) (кривая 1) и (2,2) (кривая 2)

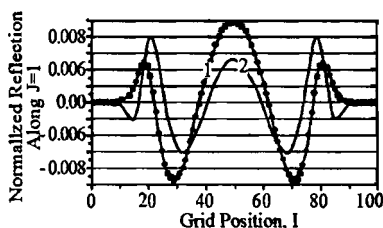


Рис. 2.27. Мера ошибки постановки RBC условия для аппроксимаций 3-го порядка Чебышёва (кривая 1) и Паде (кривая 2)

2.10. Радиационные граничные условия и анизотропная коррекция для уравнений Гельмгольца

В работе (Christopher and Webb, 1994) рассматриваются вопросы постановки неотражающих граничных условий для уравнения Гельмгольца. Отмечается, что неотражающие граничные условия (Bayliss and Turkel, 1980), (Bayliss et al., 1982), (Bayliss

and Turkel, 1982) при использовании аппроксимации исходных уравнений со вторым порядком точности дают приемлемые результаты при достаточно мелких сетках. Однако при более грубых сетках наблюдаются значительные отражения возмущений от границ. Это происходит из-за несогласованности между исходными разностными уравнениями и радиационными граничными условиями (Bayliss and Turkel, 1980), (Bayliss et al., 1982), (Bayliss and Turkel, 1982). Указанные условия были получены из асимптотического решения уравнений в частных производных. Для того, чтобы система разностных уравнений была совместной, необходимо граничные условия получать из асимптотического решения конечно-разностных уравнений. Приведенные ниже примеры доказывают это утверждение.

Рассматривается уравнение

$$\nabla^2 p + k^2 p = f, \quad (2.79)$$

где p — давление, f — источниковый член, k — волновое число. Решение уравнения (2.79), удовлетворяющее уходящей волне в дальнем поле имеет вид

$$p = \frac{\bar{i}}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (2.80)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода.

Радиационные граничные условия (Bayliss and Turkel, 1980), (Bayliss et al., 1982), (Bayliss and Turkel, 1982) первого порядка для уравнения Гельмгольца могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \left(\bar{i}k - \frac{1}{2r} \right) p = 0. \quad (2.81)$$

Разностная аппроксимация уравнения (2.81) для граничной точки (m, n) в полярной системе координат $(r_{m,n}, \theta_{m,n})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \theta_{m,n} \frac{p_{m+1,n} - p_{m-1,n}}{2\Delta x} + \sin \theta_{m,n} \frac{p_{m,n+1} - p_{m,n-1}}{2\Delta y} \\ - \left(\bar{i}k - \frac{1}{2r_{m,n}} \right) p_{m,n} = 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Уравнение (2.82) позволяет определять p в фиктивных узлах вне расчетной области.

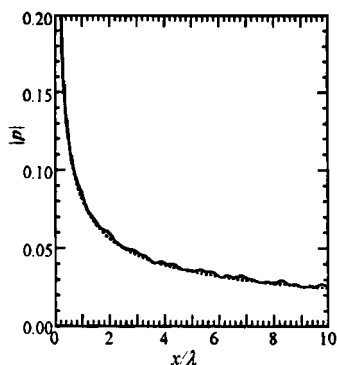


Рис. 2.28. Распределение интенсивности давления вдоль x координаты ($\lambda/\Delta y = 10$). Сплошная линия — численное решение, штриховая — точное решение

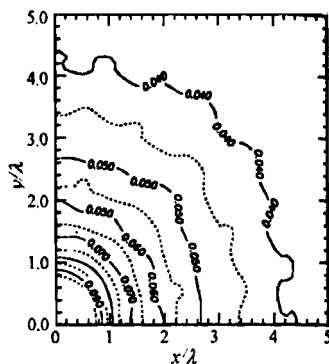


Рис. 2.29. Линии равной интенсивности давления $|p| = \text{const}$ в плоскости (x, y)

На рис. 2.28 приведено решение поставленной задачи, полученное на сетке 20×20 с источником в начале координат:

$$f = -\delta(x)\delta(y). \quad (2.83)$$

В рассматриваемом примере на длину волны приходится 10 узлов разностной сетки. Однако видно, что имеются небольшие колебания кривой. На рис. 2.29 приведены соответствующие линии постоянного модуля давления $|p| = \text{const}$ в плоскости x, y . Отклонение контуров от круговых линий указывает на возмущения, возникающие на искусственных границах.

Для более грубой сетки с числом ячеек на длину волны равным 5, т.е. $\lambda/\Delta y = 5$, получаются результаты, приведенные на рис. 2.30—2.33

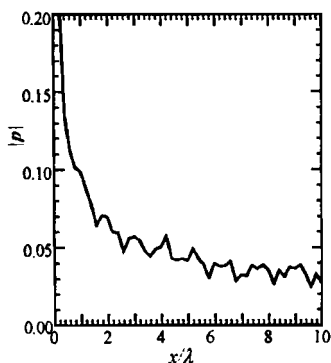


Рис. 2.30. Распределение давления вдоль x координаты ($\lambda/\Delta y = 5$). Используются радиационные граничные условия Bayliss-Turkel

При обсуждении вопросов численного решения задач распространения волн в работах (Vichnevetsky, 1987), (Trefethen, 1984) отмечается, что фазовая и групповая скорости волн, полученные с помо-

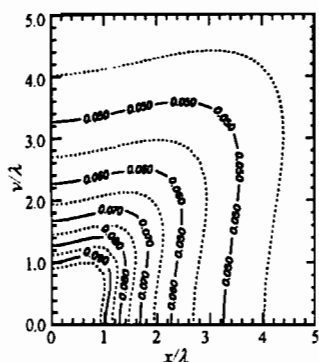


Рис. 2.31. Линии равной звуковой интенсивности $|p| = \text{const}$ ($\lambda/\Delta y = 5$). Используются улучшенные радиационные граничные условия

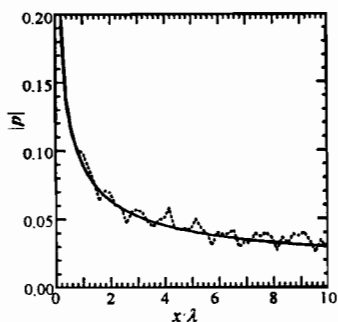


Рис. 2.32. Распределение давления вдоль x координаты ($\lambda/\Delta y = 5$). Сплошная кривая — улучшенные граничные условия, пунктирная линия — радиационные условия Bayliss-Turkel

щью разностных уравнений являются анизотропными даже если сами волны, описываемые дифференциальными уравнениями, изотропны. Анизотропия групповой скорости приводит к искажению волнового фронта.

Были получены следующие граничные условия:

$$p_{m,N+1} = 2 \left(\frac{r_{m,N}}{r_{m,N+1}} \right)^{1/2} e^{\tilde{i}(K_{m,N+1}r_{m,N+1} - K_{m,N}r_{m,N})} p_{m,N} - \left(\frac{r_{m,N-1}}{r_{m,N+1}} \right)^{1/2} e^{\tilde{i}(K_{m,N+1}r_{m,N+1} - K_{m,N-1}r_{m,N-1})} p_{m,N-1}. \quad (2.84)$$

Условия (2.84) записаны для верхней границы. Для границы, параллельной оси y аналогичные соотношения имеют вид

$$p_{M+1,n} = 2 \left(\frac{r_{M,n}}{r_{M+1,n}} \right)^{1/2} e^{\tilde{i}(K_{M+1,n}r_{M+1,n} - K_{M,n}r_{M,n})} p_{M,n} - \left(\frac{r_{M-1,n}}{r_{M+1,n}} \right)^{1/2} e^{\tilde{i}(K_{M+1,n}r_{M+1,n} - K_{M-1,n}r_{M-1,n})} p_{M-1,n}. \quad (2.85)$$

Для проверки точности и эффективности предложенных радиационных граничных условий решена задача с монопольным источником. На рис. 2.32–2.33 приведены распределения давления вдоль оси x (рис. 2.32) и вдоль прямой, направленной под

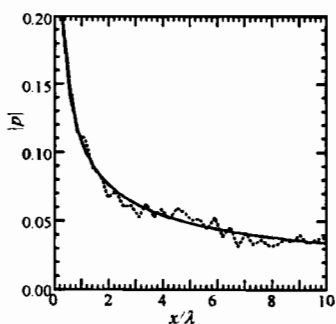


Рис. 2.33. Распределение давления вдоль линии, расположенной под углом 45° к оси x , ($\lambda/\Delta y = 5$). Сплошная кривая — улучшенные граничные условия, пунктирная линия — радиационные условия Bayliss-Turkel

говорит об отсутствии отражений от искусственных границ, но они заметно отличаются от ожидаемых круговых линий. Полученные данные указывают на анизотропный характер исходных конечно-разностных уравнений.

Один из способов, позволяющий получать достоверное решение исходного уравнения в частных производных с помощью конечно-разностных уравнений, состоит в коррекции эффекта анизотропии.

Предлагается корректировать полученное решение с помощью следующего множителя:

$$D(\theta, k\Delta x, k\Delta y) \equiv \frac{|p|_{\text{Helmholtz eq.}}}{|p|_{\text{finite difference eq.}}} =$$

$$= \frac{2}{\Delta x |k|^{1/2}} |\beta_+''(\alpha_s)^{1/2} \eta(\alpha_s) \cos(\beta_+(\alpha_s)\Delta y/2) \sin^{1/2}\theta|. \quad (2.86)$$

Величина $D(\theta, k\Delta x, k\Delta y)$ не зависит от источника возмущения. Этот корректирующий член может быть вычислен один раз. Изолинии $|p| = \text{const}$, полученные с применением корректирующего множителя, круговые и неотличимы от точного решения (Christopher and Webb, 1994).

углом 45° к оси x (рис. 2.33) для $\lambda/\Delta y = 5$. Видно, что расчетные данные близки к точному решению. Здесь же приведены кривые (штриховые линии), полученные для граничных условий (Bayliss and Turkel, 1980), (Bayliss et al. 1982), (Bayliss and Turkel, 1982).

Использование конечно-разностных аппроксимаций неизбежно приводит к анизотропии решения, даже если исходные уравнения были изотропными. На рис. 2.31 приведено решение в виде изолиний $|p| = \text{const}$. Хотя изолинии и гладкие, что гово-

Неотражающие граничные условия для уравнений газовой динамики

Проблема неотражающих граничных условий возникает при решении уравнений газодинамических процессов конечно-разностными методами в задачах с неограниченным пространством. В численных подходах расчетная область должна быть конечной, вследствие чего возникают внешние, искусственные границы. Из-за отсутствия точных краевых условий, заменяющих условия на бесконечности для исходной задачи с неограниченной областью, постановку краевых условий приходится реализовать приближенно. Возмущения, дойдя до внешней границы, частично отражаются от них, искажая решение внутри расчетной области. Следовательно, конечные размеры расчетной области, как правило, затрудняют изучение длительных по времени процессов, а в некоторых стационарных задачах не позволяют получать приемлемые результаты. Можно ослабить нежелательные влияния границ, удалив их от источников возмущения. Однако при этом из-за увеличения числа расчетных узлов значительно возрастают затраты машинного времени. Таким образом, проблема отыскания краевых условий на искусственных границах расчетной области, которые не отражали бы приходящие к ним возмущения, является актуальной и важной как с точки зрения сокращения затрат времени счета, так и получения достоверных результатов на грубых сетках в широком интервале времен.

В настоящей главе обсуждаются работы, представляющие единую линейную теорию для конструирования стационарных и нестационарных неотражающих граничных условий для уравнений Эйлера. Основной целью построения неотражающих граничных условий является предотвращение нефизических отражений от входной и выходной границ, таким образом, чтобы

результаты расчетов были независимы от расположения этих границ. Рассматривается решение сферически симметричной системы уравнений Эйлера. Решается задача о пульсирующем поведении сферы в сжимаемой среде. При этом для точного численного решения требуются граничные условия на искусственной границе, которые моделировали бы распространение нелинейных волны без отражения от границ. Представлены нелинейные неотражающие адаптивные граничные условия, которые обеспечивают уменьшение отражения от искусственных границ по сравнению с классическими локальными граничными условиями для волновых уравнений. Нелинейная процедура позволяет значительно улучшить точность граничных условий, даже если исходные уравнения являются линейными. Обсуждаются работы, в которых детально рассматривалась численная реализация простых условий (экстраполяция нулевого и первого порядков) на границах расчетной области при моделировании уравнений Навье-Стокса. Рассматривается модификация неотражающих граничных условий при газодинамическом моделировании в астрофизике.

3.1. Одномерные гиперболические уравнения

В работе (Karni, 1991) дается тщательное численное исследование отражения от искусственной границы и рассматриваются параметры, от которых зависит уровень абсорбции. Приводятся расчеты для задач распространения возмущений, в частности, для одномерных уравнений Эйлера.

В приведенных тестовых расчетах рассматриваются пять граничных условий в предположении дозвуковой дальней границы.

I. Устанавливается давление $p = p_\infty$, а остальные переменные экстраполируются по уходящим характеристикам.

II. Полагается равным нулю приходящий риманов инвариант, а остальные переменные экстраполируются по уходящим характеристикам.

Накладываются условия (Roe, 1989) при рассмотрении акустических волн.

IV. Переопределение — определяются все переменные.

V. Недоопределение — применяется нулевая экстраполяция для всех переменных.

Различные варианты (I) широко используются в аэродинамических расчетах (Bayliss and Turkel, 1980), (Rudy and Strikwerda, 1980). Эти условия обосновывают тем, что на бесконечности давление должно принимать невозмущенное значение p_∞ . Насколько близко можно расположить искусственную границу с этим приближенным граничным условием, необходимо показывать с помощью численных экспериментов.

Условие (II), вероятно, наиболее широко используется для внешних задач аэродинамики. Полученное из одномерной теории, это условие обладает хорошими неотражающими свойствами для волн, приходящих к границе по нормали. Для двумерного случая этот подход нуждается в применении асимптотического расширения (Engquist and Majda, 1977).

Градиентная форма (II), (III) и (V) предполагает, что сходимость к установившемуся состоянию зависит от начальных данных и, следовательно, невысока. Для улучшения сходимости добавляют корректирующий член (Rudy and Strikwerda, 1980).

Включение недоопределенных и переопределенных условий обосновывается тем, что во многих задачах тип граничных условий либо неизвестен априори либо изменяется каким-то произвольным образом в нестационарной задаче. Поэтому тип граничных условий много раз переопределяется. Интересно отметить, что во многих случаях эти условия работают не хуже, чем другие, лучше поставленные граничные условия.

В качестве численного примера дано решение о распространении контактного разрыва, перемещающегося слева направо (рис. 3.1). Представленный расчет был проведен для граничного условия (II) с разными отношениями k/h (рис. 3.1a,b) и на неравномерной сетке: $h_{j+1}/h_j = 1,05$ (рис. 3.1c). Видно, что уменьшение числа Куранта приводит к уменьшению поглощающих свойств граничного условия (II). Достаточно небольшие деформации сетки приводят к заметным колебаниям, которые приводят к отражению от границы. Аналогичные результаты наблюдаются и с граничными условиями (III) и (V).

Решение следующей задачи получено для нестационарного линеаризованного уравнения Эйлера с аксиальной симметрией:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q/r \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Линеаризация осуществлена относительно состояния покоя: $\rho = 1$, $c = 1$, где $q = u \cos \theta + v \sin \theta$ — радиальная скорость. Эта система может быть представлена в характеристических

результаты расчетов были независимы от расположения этих границ. Рассматривается решение сферически симметричной системы уравнений Эйлера. Решается задача о пульсирующем поведении сферы в сжимаемой среде. При этом для точного численного решения требуются граничные условия на искусственной границе, которые моделировали бы распространение нелинейных волн без отражения от границ. Представлены нелинейные неотражающие адаптивные граничные условия, которые обеспечивают уменьшение отражения от искусственных границ по сравнению с классическими локальными граничными условиями для волновых уравнений. Нелинейная процедура позволяет значительно улучшить точность граничных условий, даже если исходные уравнения являются линейными. Обсуждаются работы, в которых детально рассматривалась численная реализация простых условий (экстраполяция нулевого и первого порядков) на границах расчетной области при моделировании уравнений Навье-Стокса. Рассматривается модификация неотражающих граничных условий при газодинамическом моделировании в астрофизике.

3.1. Одномерные гиперболические уравнения

В работе (Karni, 1991) дается тщательное численное исследование отражения от искусственной границы и рассматриваются параметры, от которых зависит уровень абсорбции. Приводятся расчеты для задач распространения возмущений, в частности, для одномерных уравнений Эйлера.

В приведенных тестовых расчетах рассматриваются пять граничных условий в предположении дозвуковой дальней границы.

I. Устанавливается давление $p = p_\infty$, а остальные переменные экстраполируются по уходящим характеристикам.

II. Полагается равным нулю приходящий риманов инвариант, а остальные переменные экстраполируются по уходящим характеристикам.

Накладываются условия (Roe, 1989) при рассмотрении акустических волн.

IV. Переопределение — определяются все переменные.

V. Недоопределение — применяется нулевая экстраполяция для всех переменных.

Различные варианты (I) широко используются в аэродинамических расчетах (Bayliss and Turkel, 1980), (Rudy and Strikwerda, 1980). Эти условия обосновывают тем, что на бесконечности давление должно принимать невозмущенное значение p_∞ . Насколько близко можно расположить искусственную границу с этим приближенным граничным условием, необходимо показывать с помощью численных экспериментов.

Условие (II), вероятно, наиболее широко используется для внешних задач аэродинамики. Полученное из одномерной теории, это условие обладает хорошими неотражающими свойствами для волн, приходящих к границе по нормали. Для двумерного случая этот подход нуждается в применении асимптотического расширения (Engquist and Majda, 1977).

Градиентная форма (II), (III) и (V) предполагает, что сходимость к установившемуся состоянию зависит от начальных данных и, следовательно, невысока. Для улучшения сходимости добавляют корректирующий член (Rudy and Strikwerda, 1980).

Включение недоопределенных и переопределенных условий обосновывается тем, что во многих задачах тип граничных условий либо неизвестен априори либо изменяется каким-то произвольным образом в нестационарной задаче. Поэтому тип граничных условий много раз переопределяется. Интересно отметить, что во многих случаях эти условия работают не хуже, чем другие, лучше поставленные граничные условия.

В качестве численного примера дано решение о распространении контактного разрыва, перемещающегося слева направо (рис. 3.1). Представленный расчет был проведен для граничного условия (II) с разными отношениями k/h (рис. 3.1a,b) и на неравномерной сетке: $h_{j+1}/h_j = 1,05$ (рис. 3.1c). Видно, что уменьшение числа Куранта приводит к уменьшению поглощающих свойств граничного условия (II). Достаточно небольшие деформации сетки приводят к заметным колебаниям, которые приводят к отражению от границы. Аналогичные результаты наблюдаются и с граничными условиями (III) и (V).

Решение следующей задачи получено для нестационарного линеаризованного уравнения Эйлера с аксиальной симметрией:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q/r \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Линеаризация осуществлена относительно состояния покоя: $\rho = 1$, $c = 1$, где $q = u \cos \theta + v \sin \theta$ — радиальная скорость. Эта система может быть представлена в характеристических

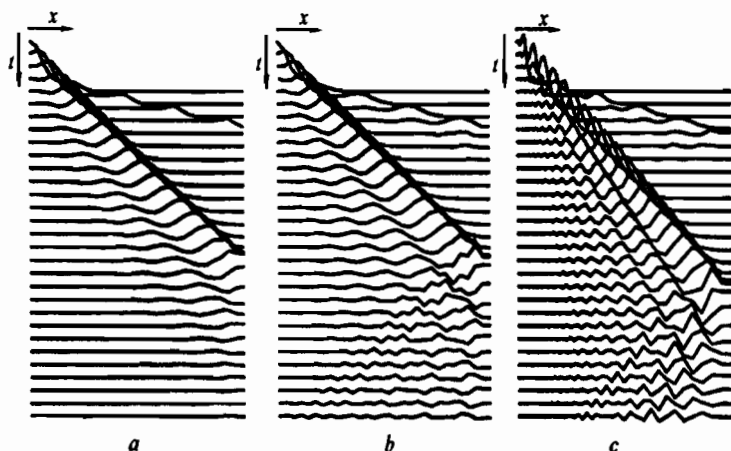


Рис. 3.1. Распространение профиля плотности для граничного условия (П)
 $k/h = 0,5$ (a); $k/h = 0,05$ (b); $h_{j+1}/h_j = 1,05$ (c)

переменных:

$$dp - dq - \int \frac{q}{r} dr = 0, \quad \text{на } \frac{dr}{dt} = -1,$$

$$dp + dq + \int \frac{q}{r} dr = 0, \quad \text{на } \frac{dr}{dt} = 1.$$

В качестве начального условия задавался высокочастотный волновой пакет $q = 0$, $p = 1 + \exp[-\sigma(r-r_0)^2] \cos \pi r$, который должен распасться на два волновых пакета, с в два раза меньшей амплитудой по сравнению с начальной волной, перемещающихся в противоположных направлениях.

Численный подход позволяет сконструировать граничное условие, специально приспособленное для поглощения высокочастотных волн. Следуя (Higdon, 1986a), рассматривается главный граничный оператор в виде

$$B(\mathbb{K}^{-1}, \mathbb{Z}^{-1})u_{j_{\max}}^{n+1} = 0, \quad (3.1)$$

где $\mathbb{K}$ и $\mathbb{Z}$ — сдвиговые операторы $\mathbb{K}u_j^n = u_{j+1}^n$, $\mathbb{Z}u_j^n = u_j^{n+1}$, а B — полином этих операторов. Если допустимая дискретная волна вида $u_j^n = Z_0^n k_0^j$ поглощается условием (3.1), то $B(k_0^{-1}, Z_0^{-1}) = 0$. Для пилообразной волны $k_0 = -1$, $Z_0 = 1 - 2\nu^2 \simeq 1$ для $|\nu| \ll 1$.

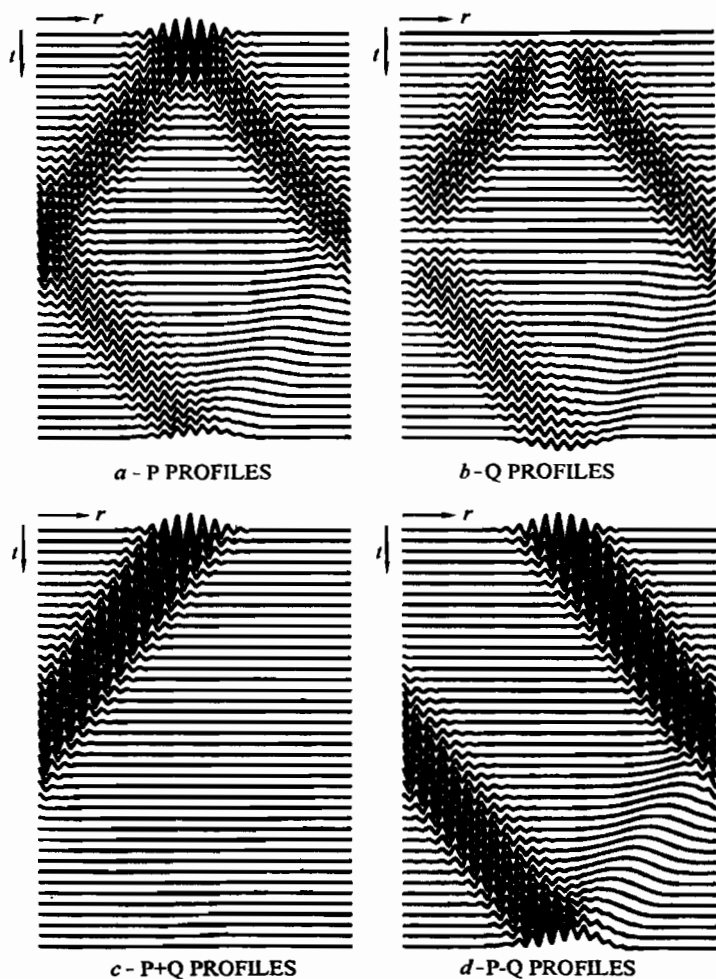


Рис. 3.2. Распространение высокочастотной волны давления, отражающейся от искусственной границы для граничного условия (II)

Не все подобные граничные условия устойчивы, но можно показать, что условие

$$B(\mathbb{K}^{-1}, \mathbb{Z}^{-1})u_{j_{\max}}^{n+1} = 0, \quad B = \left\{ I - \frac{I + \mathbb{Z}^{-1}}{2} \frac{I - \mathbb{K}^{-1}}{2} \right\} \quad (3.2)$$

устойчиво. Здесь условие (3.2) применяется двумя способами.

1. Для римановых инвариантов в (II) пренебрегают неоднородными членами вблизи границы:

$$B(\mathbb{K}^{-1}, \mathbb{Z}^{-1})(p-q)_{j_{\max}}^{n+1} = 0, \quad B(\mathbb{K}, \mathbb{Z}^{-1})(p+q)_{j_{\max}}^{n+1} = 0. \quad (3.3)$$

2. Для граничного условия (III) пренебрегают неоднородными членами вблизи границы:

$$B(\mathbb{K}^{-1}, \mathbb{Z}^{-1})p_{j_{\max}}^{n+1} = 0, \quad B(\mathbb{K}, \mathbb{Z}^{-1})q_{j_{\max}}^{n+1} = 0. \quad (3.4)$$

Низкочастотные колебания с помощью этой процедуры не поглощаются. Это подтверждается расчетами, приведенными на рис. 3.3.

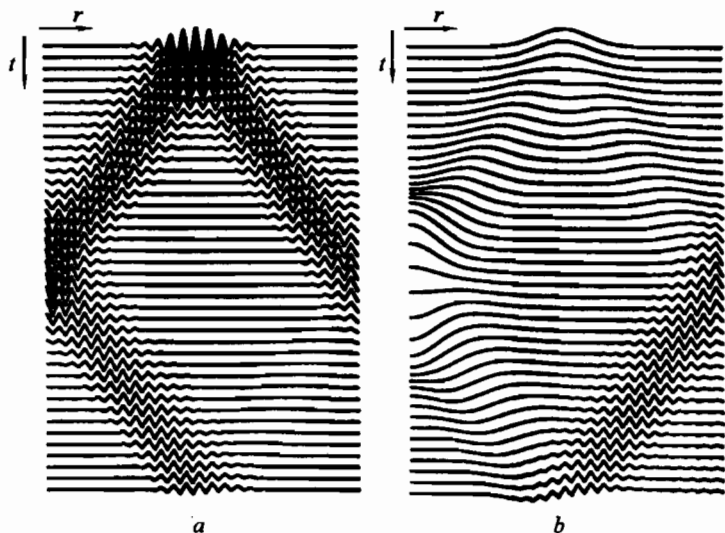


Рис. 3.3. Осесимметричные линеаризованные уравнения Эйлера: *a* — поглощение высокочастотной волны; *b* — отражение низкочастотной составляющей волны давления для граничного условия (3.3)

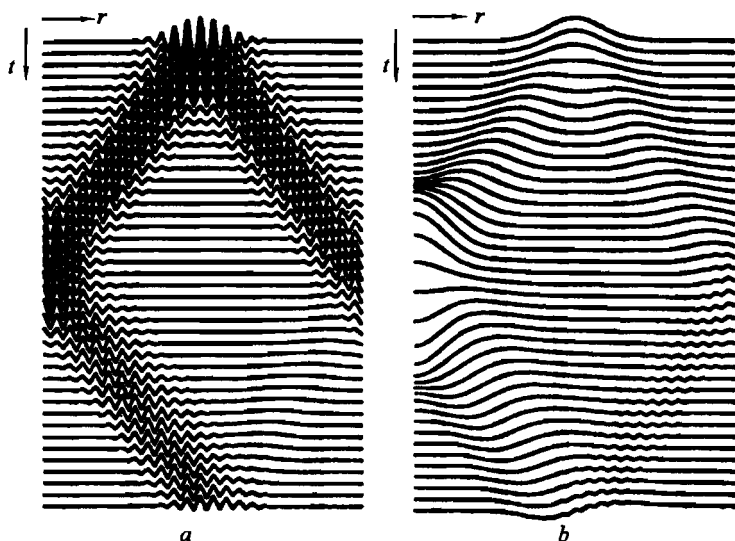


Рис. 3.4. Осесимметричные линеаризованные уравнения Эйлера: *a* — поглощение высокочастотной волны; *b* — отражение низкочастотной составляющей волны давления для граничного условия (3.5)

Граничные условия, поглощающие как высокочастотные, так и низкочастотные волны могут быть представлены в виде

$$\left\{ I - \frac{I + Z^{-1}}{2} \frac{I - K^{-1}}{2} \right\} (p - q)_{J_{\max}}^{n+1} = 0, \quad (3.5)$$

$$\left\{ I - \frac{I + Z^{-1}}{2} \frac{I + K^{-1}}{2} \right\} (p + q)_{J_{\max}}^{n+1} = 0.$$

На рис. 3.4 приведены результаты расчета распространения волн с использованием условия (3.5). Видно, что эффективно поглощаются как высокочастотные, так и низкочастотные колебания. Очень слабые отражения для низкочастотных колебаний имеют место из-за чувствительности граничного условия (3.5) к локальным волновым числам.

Другие высокочастотные граничные условия, предложенные в работе (Vichnevetsky and Pariser, 1986), получаются комбинацией со стандартной процедурой экстраполяции первого

порядка. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \{I + \mathbb{K}^{-1}\} (p - q)_{\text{max}}^{n+1} &= 0, \\ \{I - \mathbb{Z}^{-1}[\nu \mathbb{K}^{-1} + (1 - \nu)I]\} (p + q)_{\text{max}}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эти условия удовлетворительно поглощают высокочастотные волны, но приводят к частичному отражению низкочастотных волн, что может быть объяснено процедурой первого порядка экстраполяции.

В работе (Karni, 1992) рассматриваются вопросы ускорения сходимости численного решения уравнений Эйлера использованием демпфирующих операторов, которые подавляют отраженные от искусственных границ возмущения. Демпфирующие операторы имеют следующие свойства: 1) не появляются возмущения, отражающиеся от границ; 2) различные волновые системы могут демпфироваться с различными скоростями.

3.2. Неотражающие условия для сферически симметричных уравнений Эйлера

В работе (Hariharan and Johnson, 1995) рассматривается решение сферически симметричной системы уравнений Эйлера. Решается задача о пульсирующем поведении сферы в сжимаемой среде. При этом для точного численного решения требуются граничные условия на искусственной границе, которые моделировали бы распространение нелинейных волн без отражения от границ.

Решалась следующая система уравнений для сферически симметричной задачи:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = -\mathbf{W}, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} z \\ z^2/\rho + \rho^\gamma/\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 2z/r \\ 2z^2/(\rho r) \end{pmatrix},$$

$z = Mr$, M — число Маха.

Рассматриваются пять подходов решения поставленной задачи.

I. Подход состоит в физической аппроксимации условий на внешней границе:

$$\rho(L, t) = 1, \quad z(L, t) = 0. \quad (3.8)$$

II. Во втором подходе используется метод (Thompson, 1987), в котором пренебрегаются потоковые члены исходного уравнения для инварианта Римана $S = z/\rho - G(\rho)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{2z\rho^{(\gamma-3)/2}}{r}, \quad G(\rho) = \int \frac{\sqrt{f'(\rho)}}{\rho} d\rho = \frac{2}{\gamma-1} \rho^{(\gamma-1)/2}. \quad (3.9)$$

III. В третьем варианте полностью подавляются приходящие волны, т.е.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.10)$$

IV. Этот подход представляет собой линеаризованную версию варианта (III):

$$R = \frac{2}{\gamma-1} + (\rho-1) + z, \quad S = -\frac{2}{\gamma-1} - (\rho-1) + z; \quad (3.11)$$

затем используется условие

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

и уравнение (3.12) для изменения R и S .

V. Лучшие результаты были получены постановкой граничных условий (Hangstrom and Hariharan, 1988) вида

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{r=L} = \frac{R(L, t) - 2/(\gamma-1)}{2L}, \quad (3.12)$$

где L — радиус, ограничивающий область. В рассматриваемых граничных условиях необходимо привлекать еще и уравнение для R :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + C(\rho, z) \frac{\partial R}{\partial r} = H(\rho, z).$$

После определения R, S переменные ρ, z могут быть вычислены из соотношений

$$\rho = \left[\frac{\gamma-1}{4} (R-S) \right]^{2/(\gamma-1)}, \quad z = \frac{1}{2} (R+S) \rho.$$

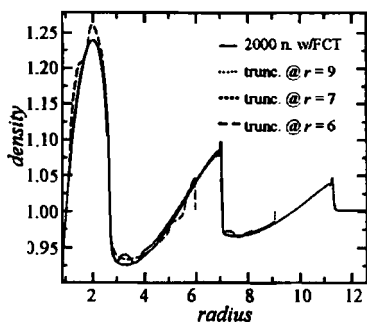


Рис. 3.5. Физическая аппроксимация граничного условия для $r = 6$, $r = 7$, $r = 9$. Вариант (I)

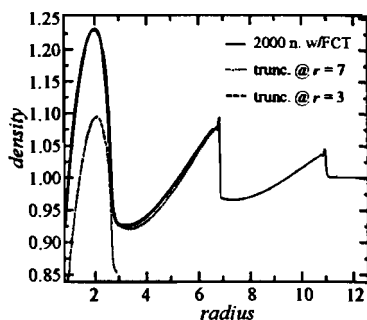


Рис. 3.6. Вариант (II). Граничное условие, предложенное в работе (Thompson, 1987)

Тестовая задача представляет собой пульсирующую сферу, на поверхности которой скорость меняется по закону $u = M \sin(\omega t)$. Первоначально было получено решение на расчетной области большей, чем радиус распространения возмущений для выбранного момента времени ($t = 10$). Полученное решение не зависит от граничных условий и служит для оценки выбранного граничного условия.

На рис. 3.5 приведено решение в виде изменения плотности, для для трех положений внешней границы. Видно, что решение искажается внутри области распространения.

Второй способ постановки граничных условий приведен на рис. 3.6. Решение представлено для трех разных ограничивающих радиусов: $L = 21$, $L = 7$ и $L = 3$. Если бы рассматриваемые условия были корректными, профили плотности для $L = 3$ и $L = 7$ совпадали бы с решением, полученным при $L = 21$. Однако при $L = 3$ видно заметное отклонение от эталонного решения.

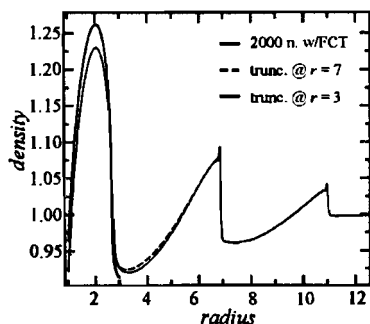


Рис. 3.7. Граничное условие метода (III)

При тех же внешних границах рассматривался способ (III) постановки граничных условий (нелинейное подавление приходящих волн), результаты которого приведены на рис. 3.7. Основные трудности здесь состоят в том, что несмотря на использование

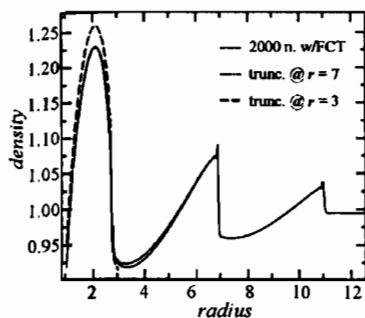


Рис. 3.8. Граничное условие метода (IV)

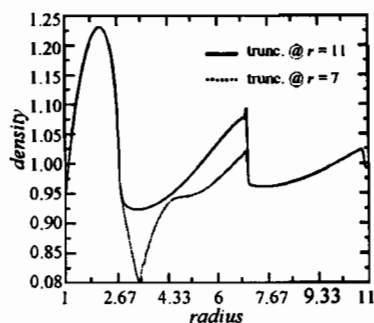
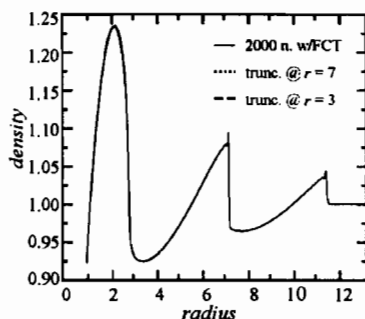
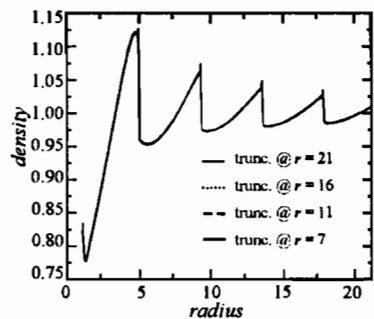


Рис. 3.9. Линеаризованные граничные условия (Bayliss and Turkel, 1980))

Рис. 3.10. Граничное условие метода (V), $t = 10$ Рис. 3.11. Граничное условие метода (V), $t = 100$.

инвариантов Римана, этот подход не моделирует движение волн, т.к. имеет точность только $O(1/L)$. Результаты этого подхода такие же или чуть лучше способа (II). Для варианта (IV) результаты приведены на рис. 3.8. Хотя они несколько отклоняются от эталонного решения, но приводят к неплохому решению в пределах временного интервала $t \leq 10$. Однако для больших времен этот метод дает постоянно отклоняющееся от эталонного решение. На рис. 3.9 приведены результаты для линеаризованной версии (Bayliss and Turkel, 1980), которые показывают на необходимость нелинейных условий:

$$\frac{1}{\sqrt{f'(\rho_\infty)}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho - \rho_\infty}{L} = 0.$$

Результаты метода (V) приведены на рис. 3.10, 3.11 для

моментов времени $t = 10$ и $t = 100$ соответственно. Полученные кривые для $L = 3$ и $L = 7$ практически совпадают с эталонным решением $L = 21$.

3.3. Неотражающие граничные условия для нестационарных сжимаемых течений

Этим вопросам посвящены работы (Moretti, 1982), (Ferr and Gustafsson, 1986), (Saltanov, 1979), (Osher and Chakravarthy, 1983), (Cox et al., 1983), (Guerra and Gustafsson, 1986), (Gustafsson, 1987a), (Thomas, 1979), (Nallasamy et al., 1988), (Ilgamov and Plyushin, 1989), (Plyushin, 1987).

В статье (Moretti, 1982) рассматривается плоское течение в канале с плавным выступом одной из стенок. Оба конца канала соединены с бесконечно большими полостями. Уравнения, используемые на входе, имеют вид

$$Tp_t + u \left(1 + \frac{v^2}{u^2} \right) u_t = T_0 p_{0t}, \quad (3.13)$$

$$\alpha p_t - \gamma u_t = R,$$

где знак величины с индексом 0 относится к полости, u , v — компоненты скорости; R вычисляется по стандартным правилам; между полным давлением и температурой задана связь $p = \gamma(\gamma - 1)^{-1} \ln T$. Последнее уравнение из (3.13) представляет собой уравнение левой характеристики.

Модель выхода из канала проще, т.к. v определяется из информации во внутренней области. В данном случае давление на выходе приравнивается давлению в бесконечной полости. Уравнения имеют следующий вид:

$$\rho u p_t + \gamma \rho u_t = \rho_\infty u_\infty p_{\infty t} + \gamma \rho_\infty u_{\infty t},$$

$$Tp_t + uu_t + vv_t = T_\infty p_{\infty t} + u_\infty \left(1 + \frac{v_\infty^2}{u_\infty^2} \right) u_{\infty t}, \quad (3.14)$$

$$\alpha p_t + \gamma u_t = R.$$

В (3.14) v_t вычисляется стандартным образом; производная $u_{\infty t}$ — неизвестна, но она может быть исключена; R — то же, что в (3.13).

Дозвуковое течение в плоском канале рассмотрено также в работе (Ferm and Gustafsson, 1986). На входе $x = 0$ инварианты Римана представляются в виде

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= \rho - \frac{1}{c^2} p, \\ r^{(2)} &= u + \frac{2c}{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Предполагается, что

$$\begin{aligned} r^{(1)}(0, y, t) &= g(y), \\ r^{(2)}(0, y, t) &= v(0, y, t) = v_0(y). \end{aligned} \quad (3.16)$$

В сечении $x = 0$ ($i = 0$)

$$r_{0j}^{(1)} = 2r_{1j}^{(1)} - r_{2j}^{(1)}. \quad (3.17)$$

В выходном сечении ($i = I$)

$$u_{Ij} = 2u_{I-1,j} - u_{I-2,j}, \quad v_{Ij} = 2v_{I-1,j} - v_{I-2,j}. \quad (3.18)$$

Подобный подход использовался и в других работах, например, (Guerra and Gustafsson, 1986). Строгий анализ дан в (Gustafsson, 1987a). Весьма подробное исследование применения инвариантов Римана в построении разностной схемы внутри области и на границах, на основе методов Годунова и Ошера, приведены в работе (Osher and Chakravarthy, 1983). Околовзвукое потенциальное обтекание осциллирующего профиля с применением линейного условия Зоммерфельда рассмотрено в работе (Cox et al., 1983). Результаты аналогичного исследования приведены в статье (Nallasamy et al., 1988).

Предложенные в работе (Ilgamov, 1985a) нелинейные условия были исследованы в одномерном случае (Gilmanov and Aganin, 1985); результаты сравнивались с данными, полученными по другим условиям (в частности, (3.18)). В продолжении этих работ (Ilgamov and Ilyushin, 1989), (Ilyushin, 1987) были рассмотрены двумерные задачи до- и сверхзвукового нестационарного обтекания цилиндра и шара. Исследован нестационарный отрыв потока при больших числах Рейнольдса, дано сравнение с физическим экспериментом.

Рассмотрим более подробно работу (Thompson, 1987). Она представляет собой дальнейшее развитие работы (Hedstrom, 1979). В отличие от последней рассматривается и двумерный случай. Изложим лишь одномерную задачу.

Нелинейные неотражающие условия получаются для уравнений газовой динамики в виде законов сохранения,

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{q}' = 0, \quad (3.19)$$

и в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{q} = 0. \quad (3.20)$$

Здесь $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}$ — члены, появляющиеся при использовании непрямоугольных координат, а векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{q}$ представляются в виде

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{p}{\rho s} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{n\rho u}{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

где $c^2 = \gamma p / \rho$, $s = p / \rho^\gamma$, $n = 0, 1, 2$ — для прямоугольной, цилиндрической и сферической систем координат соответственно.

Соответствующее (3.20) характеристическое уравнение имеет вид

$$\mathbf{l}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{l}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{l}_i \mathbf{q} = 0, \quad (3.22)$$

где λ_i , $\mathbf{l}_i$ — собственные значения и левые собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$. В данном случае $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + c$, $\mathbf{l}_1 = (-c, \rho, -p/sc)$, $\mathbf{l}_2 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{l}_3 = (c, \rho, p/sc)$.

Исключая функцию s ввиду неудобств ее применения в численном анализе, получаем для системы (3.20), (3.21) из (3.22) следующие характеристические уравнения:

$$\begin{aligned} p_t - \rho c u_t + (u - c)(p_x - \rho c u_x) + \frac{n}{x} \rho c^2 u &= 0, \\ p_t - c^2 \rho_t + u(p_x - c^2 \rho_x) &= 0, \\ p_t + \rho c u_t + (u + c)(p_x + \rho c u_x) + \frac{n}{x} \rho c^2 u &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Переход из (3.23) к условиям в переменных в варианте (3.19) осуществляется по соотношениям

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_t, \quad m_t = u\rho_t + \rho u_t, \\ e_t &= \frac{1}{2}u^2\rho_t + \rho u u_t + \frac{1}{\gamma - 1}p_t.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Здесь $m = \rho u$, $e = \rho u^2/2 + (\gamma - 1)^{-1}p$.

В двумерном случае уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0, \quad (3.25)$$

где вектор переменных $\mathbf{u}$ и матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (\rho \quad u_x \quad u_y \quad s)^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} u_x & \rho & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u_x & 0 & \frac{p}{\rho s} \\ 0 & 0 & u_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} u_y & 0 & \rho & 0 \\ 0 & u_y & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & u_y & \frac{p}{\rho s} \\ 0 & 0 & 0 & u_y \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.26)$$

верхний индекс T означает транспонирование. Собственные значения $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равны, соответственно, $\lambda_1 = u_x - c$, $\lambda_2 = \lambda_3 = u_x$, $\lambda_4 = u_x + c$, $\mu_1 = u_y - c$, $\mu_2 = \mu_3 = u_y$, $\mu_4 = u_y + c$.

Для уравнений газовой динамики во внутренних узлах используются центральные разности по пространственным переменным.

Граничные условия представляются в виде

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} - \rho_i c_i \frac{du}{dt} + \mathcal{L}_{1i} + \frac{n}{x_i} \rho_i c_i^2 u_i &= 0, \\ \frac{dp_i}{dt} - c_i^2 \frac{d\rho_i}{dt} + \mathcal{L}_{2i} &= 0, \\ \frac{dp_i}{dt} + \rho_i c_i \frac{du_i}{dt} + \mathcal{L}_{3i} + \frac{n}{x_i} \rho_i c_i^2 u_i &= 0,\end{aligned}\quad (3.27)$$

где $\mathcal{L}_{ki}$ равны нулю, если λ_k для x_i имеет направление внутрь (неотражающие граничные условия), или вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1i} &= (u_i - c_i) \frac{1}{\Delta x} [p_{i+1} - p_i - \rho_i c_i (u_{i+1} - u_i)], \\ &\quad i < 0, \quad u_i - c_i < 0, \\ \mathcal{L}_{1i} &= (u_i - c_i) \frac{1}{\Delta x} [p_i - p_{i-1} - \rho_i c_i (u_i - u_{i-1})], \\ &\quad i > I, \quad u_i - c_i > 0;\end{aligned}\quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2i} &= u_i \frac{1}{\Delta x} [p_{i+1} - p_i - c_i^2 (\rho_{i+1} - \rho_i)], \quad i < 0, \quad u_i - c_i < 0, \\ \mathcal{L}_{2i} &= u_i \frac{1}{\Delta x} [p_i - p_{i-1} - c_i^2 (\rho_i - \rho_{i-1})], \quad i > I, \quad u_i - c_i > 0;\end{aligned}\quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{3i} &= (u_i + c_i) \frac{1}{\Delta x} [p_{i+1} - p_i + \rho_i c_i (u_{i+1} - u_i)], \\ &\quad i < 0, \quad u_i - c_i < 0, \\ \mathcal{L}_{1i} &= (u_i + c_i) \frac{1}{\Delta x} [p_i - p_{i-1} + \rho_i c_i (u_i - u_{i-1})], \\ &\quad i > I, \quad u_i - c_i > 0.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Зная $\mathcal{L}$, можно определить пространственные производные:

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= -\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{3i} + \mathcal{L}_{1i}) - n x_i^{-1} \rho_i c_i^2 u_i, \\ \frac{du_i}{dt} &= -\frac{1}{2\rho_i c_i}(\mathcal{L}_{3i} - \mathcal{L}_{1i}), \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{1}{c_i^2} \left(\frac{dp_i}{dt} + \mathcal{L}_{2i} \right).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Аналогично граничные условия определяются для пространственного случая. С применением этих граничных условий рассмотрены задачи о распространении плоской ударной волны (рис. 3.12–3.14), а также цилиндрической и сферической волн. Для неотражающих условий (3.27) в плоском случае приведен

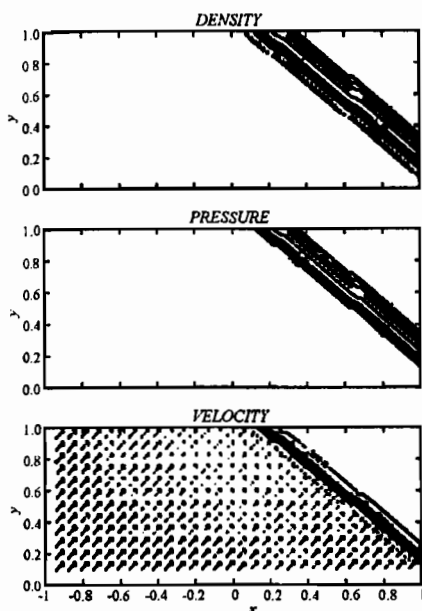


Рис. 3.12. Распространение скачка под углом 45° . Шаг равен 1; $t = 0,03$

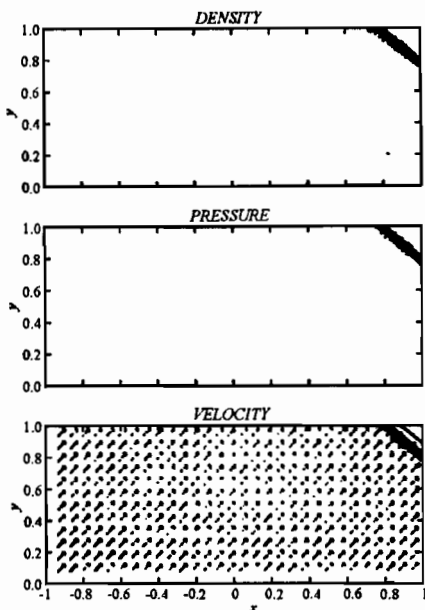


Рис. 3.13. Распространение скачка под углом 45° . Шаг равен 50; $t = 0,14$

соответствующий численный эксперимент. В этих примерах достигнуто малое отражение волн от искусственной границы.

На рис. 3.12–3.14 приведены результаты решения задачи о распространении ударной волны под углом 45° по отношению к оси x . Решение представлено в виде изолиний плотности, давления и векторов скорости.

В момент $t = 0,14$ скачок достиг угла расчетной области. Отраженные от границ возмущения небольшие. Для момента $t = 0,58$ скачок вышел из расчетной области. Заметны возмущения, образовавшиеся в результате отражения от границ. Значение возмущения давления составляет около 4% от значения за фронтом скачка.

Ценность (3.27) представляется еще в том, что все три необходимых условия на границе расчетной области являются неотражающими. В некоторых других изложенных выше подходах только одно условие из них — неотражающее, а остальные берутся в виде «мягких» условий (экстраполяция нулевого и первого порядка). К таким исследованиям можно отнести работы (Gustafsson, 1987a), (Gustafsson, 1987b), (Il'gamov and Plyushin, 1989), (Plyushin, 1987) и др.

3.4. Стационарные сжимаемые и несжимаемые течения

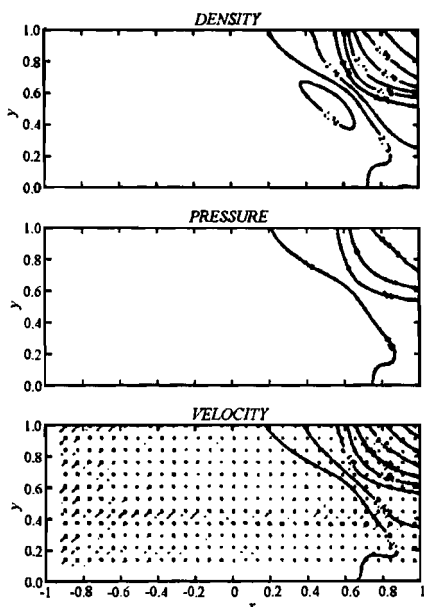


Рис. 3.14. Распространение скачка под углом 45° . Шаг равен 200; $t = 0,58$

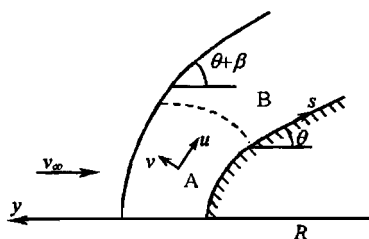


Рис. 3.15. Согласованная с телом координатная система

В приведенных в предыдущем разделе нестационарных задачах рассматривался также выход на стационарный режим. Другая группа работ посвящена определению стационарного обтекания непосредственно (Gustafsson and Wahlund, 1980), (Hänel and Giese, 1983), (Gustafsson, 1985), (Ferm, 1988), (Ferm and Gustafsson, 1986).

В работе (Gustafsson and Wahlund, 1980) определяется течение между затупленным телом (его носовой частью) и головным скачком уплотнения. Обозначения на рис. 3.15 следующие: s — координата вдоль поверхности тела; y — координата, ортогональная поверхности тела; φ — угол, измеряемый от оси симметрии; θ — угол между касательной к телу и осью симметрии; $\theta + \beta$ — угол между касательной к фронту ударной волны и осью симметрии; R — радиус носика тела; u — скорость параллельная, v — касательная к поверхности тела. На ударной волне ($j = J$) ставятся условия Рэнкина-Гюгонио в виде

$$u_{i+1,J} = V_\infty [\cos(\theta + \beta_{i+1}) \cos \beta_{i+1} + \\ + \sin(\theta + \beta_{i+1}) \sin \beta_{i+1} (2/m_\infty^2 + \gamma - 1)/(\gamma + 1)], \\ v_{i+1,J} = V_\infty [\cos(\theta + \beta_{i+1}) \sin \beta_{i+1} - \\ - \sin(\theta + \beta_{i+1}) \cos \beta_{i+1} (2/m_\infty^2 + \gamma - 1)/(\gamma + 1)],$$

$$P_{i+1,J} = P_{\infty} + 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 \sin^2(\theta + \beta_{i+1}) (1 - 1/m_{\infty}^2) / (\gamma + 1),$$

$$h_{i+1,J} = \gamma P_{i+1,J} \frac{2/m_{\infty}^2 + \gamma - 1}{\rho_{\infty} (\gamma - 1) (\gamma + 1)},$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \frac{\Delta S}{2} [\operatorname{tg} \beta_i (1 + k_i \delta_i) + \operatorname{tg} \beta_{i+1} (1 + k_{i+1} \delta_{i+1})].$$

Здесь $m_{\infty} = M_{\infty} \sin(\theta + \beta)$, $k = -d\theta/ds$, $\delta(s)$ — расстояние от обтекаемого тела до ударной волны, h — удельная энергия.

Процедура вычислений следующая: $P_{i+1,J}$ определяется путем экстраполяции $P_{i+1,J} = 2P_{i,J-1} - P_{i-1,J-2}$. Затем из третьего уравнения определяется β_{i+1} , после чего находятся остальные переменные: $u_{i+1,J}$, $v_{i+1,J}$, $h_{i+1,J}$, δ_{i+1} . Исследовано обтекание полусферы при числах $M_{\infty} = 10$; 20; 40 и части сферы, сопряженной с конусом при $M_{\infty} = 10$.

В работах (Gustafsson, 1985), (Ferm, 1988) рассматривается установившееся течение в канале переменного сечения. Решение строится исходя из следующей идеи. Изменение сечения канала содержится в расчетной области, далее предполагается постоянное сечение канала, и вдали поперечная составляющая скорости v обращается в нуль; другие параметры ($\bar{u}$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\bar{c}$) не зависят от координат. Уравнение Эйлера тогда принимает вид

$$\bar{A}W_x + \bar{B}W_y = 0,$$

где

$$W = (\rho \quad u \quad v \quad p)^T,$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{c}^2 \bar{\rho} & 0 & \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}^2 \bar{\rho} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Второе из уравнений (3.32) и нелинейная комбинация первого и четвертого уравнений дают

$$p_x + \bar{\rho} u u_x = 0, \quad p_x - \bar{c}^2 \rho_x = 0,$$

откуда получаем граничные условия в сечении $x = 0$:

$$\begin{aligned} p(0, y) - p_{-\infty} + \bar{\rho} u [u(0, y) - u_{-\infty}] &= 0, \\ p(0, y) - p_{-\infty} - \bar{c}^2 [\rho(0, y) - \rho_{-\infty}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Используется разложение по собственным функциям параметров p , u , ρ по ширине канала с твердыми стенками. Тогда возникают некоторые дополнительные соотношения.

Анализу вопросов устойчивости схемы при различных вариантах моделирования граничных условий посвящена статья (Hänel and Giese, 1983).

Во многих исследованиях одновременно рассматривались стационарные невязкие и вязкие течения. Например, в работах (Wagatha, 1983), (Goldstein, 1981), (Han et al., 1983), (Osher and Chakravarthy, 1983) и других предложен численный метод решения двумерных задач обтекания тел потоком несжимаемой жидкости. Вводится функция тока. Неограниченная область течения заменяется конечной областью круговой формы. В работе (Osher and Chakravarthy, 1983) применялась вариационная формулировка задачи. В этом направлении имеется значительное количество работ. Требуется их специальный обзор. Некоторые из них кратко рассматриваются в следующем разделе.

3.5. Применение неотражающих условий в задаче трансзвукового течения

В работе (Engquist and Majda, 1981) метод конструирования поглощающих условий применяется для случая трансзвукового течения.

Как известно, при этом уравнение относительно потенциалов скорости φ не может быть линеаризовано даже в случае обтекания тонкого тела. Это уравнение имеет вид

$$2\varphi_{xt} = K^* \varphi_{xx} + \varphi_{yy}, \quad K^* \equiv K - (\gamma + 1) \varphi_x. \quad (3.34)$$

При местном дозвуковом течении $K^* > 0$, при сверхзвуковом — эта величина отрицательна, $K^* < 0$. В приближенном решении коэффициент K^* считается фиксированной константой. Тогда при рассмотрении условий на боковых стенках, $y = \pm b$, решение (3.34) может быть представлено в виде

$$\varphi = \exp i(\beta_{\mp} y + \alpha x + \omega t), \quad \omega > 0, \quad (3.35)$$

$$\beta_{\mp} = \mp (2\alpha\omega - K^* \alpha^2)^{1/2} = \mp \omega (2n - K^* n^2)^{1/2}, \quad n = \alpha/\omega.$$

Так же, как выше в (2.2), можно записать следующее условие:

$$\left[\partial/\partial y \pm i\omega (2n - K^* n^2)^{1/2} \right] \varphi = 0 \quad (y = \pm b). \quad (3.36)$$

Для получения приближенных условий применяется разложение квадратного корня в ряд в окрестности $n = 0$. В дозвуковом и сверхзвуковом случаях условия первого приближения соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \pm \sqrt{K^*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \pm \sqrt{-K^*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \quad (y = \pm b).\end{aligned}\tag{3.37}$$

Даются также условия второго приближения в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + r_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + r_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (y = \pm b),$$

где коэффициенты r_1, r_2 зависят от K^* . Характерно, что при трансзвуковом течении в условиях первого приближения отсутствуют производные по времени.

Коэффициент отражения равен

$$|R(n)| = \left| \frac{\sqrt{K^* n} - \sqrt{2n - K^* n^2}}{\sqrt{K^* n} + \sqrt{2n - K^* n^2}} \right|, \quad 0 \leq n \leq 2/K^*.$$

Это число существенно меньше единицы в указанных пределах n . Если, например, $n = 1/K^*$, $n = 1/2K^*$, то соответственно $R = 0$, $R = (1 - \sqrt{3})/(1 + \sqrt{3})$.

Условия на входной и выходной границах $x = 0, L$ в дозвуковом случае легко получить аналогично (2.31) и (2.32). Представляя решение (3.34) в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= \exp i(\lambda^\pm x + \beta y + \omega t), \\ \lambda^\pm &= \omega \left(1 \pm \sqrt{1 - K^* n^2} \right) / K^*, \quad n = \beta / \omega,\end{aligned}$$

запишем уравнение типа (2.29). Производя разложение корня в окрестности $\beta = 0$ ($n = 0$), получаем условия в первом приближении,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{K^*}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \quad (x = 0), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \quad (x = L),\end{aligned}$$

и во втором приближении,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{2}{K^*} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (x = 0),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (x = L).$$

В работе (Engquist and Majda, 1981) приводятся также дискретизация полученных соотношений и численные эксперименты. Принимается $K = 0,9$. Решения с использованием приведенных условий сравниваются с полученным для стандартных отражающих условий на границах расчетной области: $\varphi = 0$ ($y = \pm b$), $\varphi = 0$ ($x = 0$), $\partial \varphi / \partial x = 0$ ($x = L$).

Нормированная к последнему решению максимальная величина отражения в случае условия первого приближения на боковых границах ($y = \pm b$) равна 0,37, а во втором приближении — 0,18. Та же величина для φ при применении первого приближения на входной границе составляет 0,08, а для $\partial \varphi / \partial x = 0$ — 0,38. Далее сравниваются решения, полученные с условиями $\partial \varphi / \partial x = 0$ ($\partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ на выходной границе. В первом случае величина отражения для φ равна единице, а во втором — 0,81 (для $\partial \varphi / \partial x$ соответственно, 1 и 0,29).

Таким образом, применение предложенных условий обеспечивает значительное поглощение падающих на границы возмущений.

Приведенные условия на границах области применены в работе (Kwak, 1981) для расчета неустановившегося трансзвукового обтекания тонкого профиля в рамках теории малых возмущений. Границы области располагаются на расстоянии 857 хорд от профиля по оси y и 200 хорд от его передней кромки по оси x . Сетка неравномерна — шаг возрастает к периферии в обоих направлениях. Решения, полученные с отражающими условиями на границах, не отличаются при уменьшении числа узлов с 113×97 до 103×81 . Для сетки 93×79 уже имеется отличие в коэффициенте подъемной силы, как это видно из рис. 3.16. Здесь

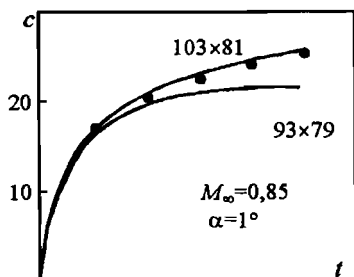


Рис. 3.16. Коэффициент подъемной силы для различных разбиений расчетной области.

же кружочками указаны результаты с поглощающими условиями при той же сетке 93×79 . Эти результаты относятся к случаю, когда угол атаки профиля ступенчато изменяется на $\alpha = 1^\circ$ при $t = 0$. В приближении низких частот это вызывает постепенный рост значений коэффициентов подъемной силы (t отнесено ко времени, за которое поток проходит расстояние, равное хорде профиля).

Найдено, что применение условий первого приближения (2.31) позволяет располагать границы расчетной области по оси x на расстоянии 3,8 хорды от передней кромки профиля. Уменьшение протяженности области по оси y за счет применения условия (2.32) не приводит к уменьшению времени счета из-за роста объема вычислений.

Другими примерами, при решении которых исследуется влияние условий поглощения, являются обтекание профиля с колеблющимся закрылком, а также мгновенный разгон профиля.

На основании этих экспериментов в работе (Kwak, 1981) сделан вывод, что применение полученных неотражающих условий позволяет значительно уменьшить размеры расчетной области. Однако в случае использованного алгоритма это не приводит к пропорциональному уменьшению числа расчетных точек вследствие неравномерного шага сетки. Поэтому уменьшение времени счета зависит от конкретной задачи и программной реализации и в рассматриваемых случаях составляет около 10–24%.

Еще большего уменьшения размеров области можно достичь при применении условий более высокого приближения, однако это приводит к дополнительным затратам машинного времени, сокращая выигрыш, связанный с уменьшением расчетной области.

В работе (Fung, 1984) дано решение, описывающее течение на больших расстояниях от профиля. Оно используется для задания условий на границах расчетной области, в которых учитывается запаздывание по времени между образованием волн возмущений и их приходом к границам области.

3.6. Неотражающие условия для уравнений Эйлера

В работе (Giles, 1990) рассматривается единая линейная теория для конструирования стационарных и нестационарных неотражающих граничных условий для уравнений Эйлера. Основной целью построения неотражающих граничных условий является предотвращение нефизических отражений от

входной и выходной границ, таким образом, чтобы расчеты были независимы от расположения этих границ. Теоретической основой неотражающих граничных условий является работа (Engquist and Majda, 1977), в которой обсуждаются как иде. неотражающих граничных условий, так и метод построения аппроксимирующих форм и работа (Kreiss, 1970), в которой рассматривается хорошо поставленная начально-краевая задача для гиперболических систем уравнений. В работах (Giles 1989, 1990) подробно рассматриваются вопросы формулировки неотражающих граничных условий для уравнений Эйлера, также их приложения к двумерным задачам обтекания решето турбин.

Для двумерной гиперболической системы уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0,$$

где $\mathbf{U}$ — N -компонентный вектор-столбец, A, B — постоянные $N \times N$ матрицы. Решение рассматривается в виде

$$\mathbf{U}(x, y, t) = e^{i(kx + ly - \omega t)} \mathbf{u}^R,$$

где $\mathbf{u}^R$ — правый вектор-столбец сингулярной матрицы $\| -\omega I + kA + lB \|$. Нетривиальное решение обеспечивается дисперсионным соотношением

$$\det(-\omega I + kA + lB) = 0.$$

Преобразуя это соотношение, можно записать, что

$$\det\left(-I + \frac{k_n}{\omega} A + \frac{l}{\omega} B\right) = 0;$$

здесь показана зависимость k_n/ω от l/ω . Таким образом величина $\lambda = l/\omega$ будет играть значительную роль в построении граничных условий. Построение неотражающего условия требует, чтобы

$$\mathbf{v}^L A^{-1} (-\omega I + kA + lB) = 0,$$

где $\mathbf{v}^L$ — левый вектор-столбец. Одной из важных особенностей этого левого нуля-вектора является его ортогональность к вектору $\mathbf{u}^R$.

Рассматривая постановку неотражающего условия на границе $x = 0$, разлагая $\mathbf{U}$ на составляющие Фурье, можно, считая

что все приходящие волны имеют нулевую амплитуду, получить неотражающие граничные условия в виде

$$\mathbf{v}_n^L \mathbf{U} = 0,$$

где n соответствует приходящим модам. В общем это точное граничное условие может быть использовано при численной реализации. Необходимо для определения $\mathbf{v}_n^L$ осуществить фурье-преобразование по y и преобразование Лапласа по t . С вычислительной точки зрения это и трудно, и требует значительных компьютерных затрат. Рассмотрим три возможных типа аппроксимации граничных условий, не требующих преобразования Лапласа.

1. Одномерные нестационарные граничные условия. Эти условия получаются при $\lambda = l/\omega = 0$ и представляются в виде

$$\mathbf{w}_n^L \mathbf{U} = 0,$$

где $\mathbf{w}_n^L = \mathbf{v}_n^L|_{\lambda=0}$ для всех n , соответствующих приходящим волнам.

2. Точное стационарное двумерное условие. Это условие может рассматриваться как предел идеального граничного условия при $\omega \rightarrow \infty$. Осуществляя преобразование фурье-решения, которое предполагается периодичным вдоль y с периодом 2π , получаем

$$\mathbf{U}(0, y, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{U}}_l(t) e^{ily},$$

где

$$\hat{\mathbf{U}}_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{U}(0, y, t) e^{-ily} dy.$$

Граничное условие для $l \neq 0$ имеет вид

$$s_n^L \hat{\mathbf{U}}_l = 0$$

для всех приходящих волн n . Граничное условие для $l = 0$ имеет вид

$$\mathbf{v}_n^L(0) \hat{\mathbf{U}}_0 = 0$$

для всех приходящих волн n .

3. Приближенное двумерное нестационарное условие
 Последовательность приближенных неотражающих граничных условий может быть получена разложением $\mathbf{v}_n^L$ в ряд Тейлора:

$$\mathbf{v}_n^L(\lambda) = \mathbf{v}_n^L|_{\lambda=0} + \lambda \frac{d\mathbf{v}_n^L}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} + \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{d^2\mathbf{v}_n^L}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=0} + \dots$$

Первый порядок аппроксимации, получаемый удержанием только одного члена, приводит к одномерному граничному условию. Второй порядок аппроксимации приводит к условию

$$\left(\mathbf{v}_n^L|_{\lambda=0} + \frac{l}{\omega} \frac{d\mathbf{v}_n^L}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \right) \mathbf{U} = 0.$$

Умножая на $-\bar{i}\omega$ и заменяя $\bar{i}\omega$ и $\bar{i}l$ на $-\partial/\partial t$ и $\partial/\partial y$ получаем

$$\mathbf{v}_n^L|_{\lambda=0} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{d\mathbf{v}_n^L}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0.$$

Это локальное граничное условие имеет порядок основных дифференциальных уравнений, поэтому может быть использовано без больших затруднений.

Приведем граничные условия для системы линеаризованных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = (\delta\rho \quad \delta u \quad \delta v \quad \delta p)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/p \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/p \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}.$$

Одномерные нестационарные граничные условия на входе представляются в виде

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

На выходе ставится следующее условие:

$$c_4 = 0.$$

Точные двумерные стационарные граничные условия на входе имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\hat{c}_1 \\ -\left(\frac{c\beta + v}{c + u}\right) \hat{c}_4 - \hat{c}_2 \\ \left(\frac{c\beta + v}{c + u}\right)^2 \hat{c}_1 - \hat{c}_3 \end{pmatrix},$$

а на выходе граничное условие записывается в виде соотношения

$$\frac{\partial \hat{c}_4}{\partial t} = \alpha \left[\left(\frac{2u}{c\beta - v} \right) \hat{c}_2 - \left(\frac{c\beta + v}{c\beta - v} \right) \hat{c}_3 - \hat{c}_4 \right].$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \begin{cases} i \operatorname{sign}(l\sqrt{1 - M^2}), & M < 1, \\ -\operatorname{sign}(v\sqrt{M^2 - 1}), & M > 1. \end{cases}$$

Двумерные нестационарные условия на входной границе имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \frac{c+u}{2} & c - \frac{u}{2} \\ 0 & \frac{c-u}{2} & v & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0,$$

а на выходной границе представляются уравнением

$$\frac{\partial c_4}{\partial t} + (0 \ u \ 0 \ v) \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Характеристические переменные c_1, c_2, c_3, c_4 и приращения $\delta\rho, \delta u, \delta v, \delta p$ связаны прямым и обратным преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \rho c & 0 \\ 0 & \rho c & 0 & 1 \\ 0 & -\rho c & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 & 1/(2c^2) & 1/(2c^2) \\ 0 & 0 & 1/(2\rho c) & -1/(2\rho c) \\ 0 & 1/(\rho c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

На рис. 3.17–3.19 приводятся результаты решения задачи об обтекании каскада решеток турбины в виде линий постоянного давления. Результаты дозвукового обтекания решеток

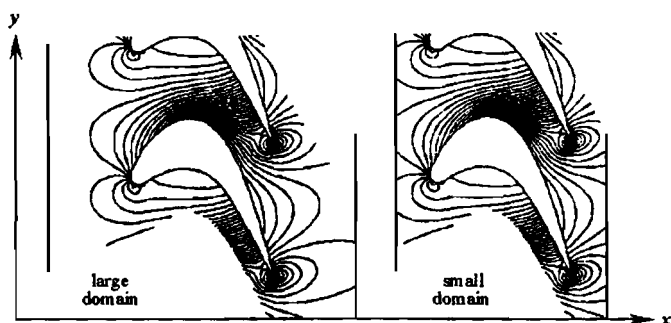


Рис. 3.17. Распределение изобар при использовании неотражающих граничных условий при дозвуковом обтекании с числом Маха $M = 0,75$

($M = 0,75$) с применением неотражающих граничных условий показаны на рис. 3.17. Для сверхзвукового режима обтекания ($M = 1,1$) с неотражающими граничными условиями расчет приведен на рис. 3.18. Применение условий, которые не обладают неотражающими свойствами для режима с $M = 1,1$, показано на

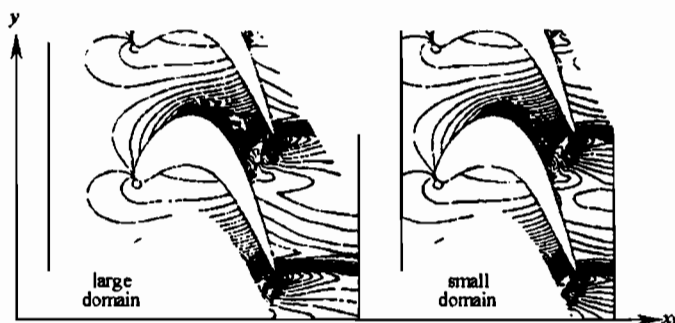


Рис. 3.18. Распределение изобар при использовании неотражающих граничных условий при сверхзвуковом обтекании с числом Маха $M = 1,1$

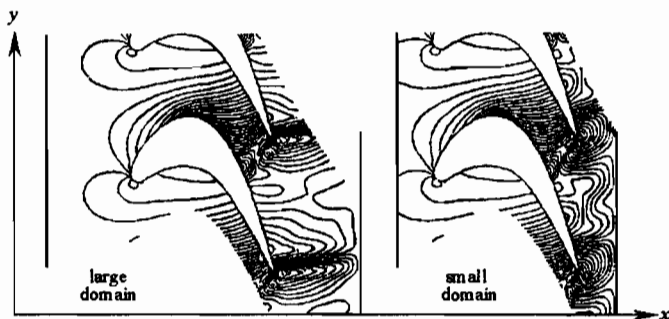


Рис. 3.19. Распределение изобар при использовании отражающих условий с числом Маха $M = 1,1$

рис. 3.19. Здесь достаточно четко демонстрируется роль неотражающих граничных условий. Видно, что влияние границы привело к исчезновению скачков на краях лопаток.

3.7. Численное исследование неотражающих условий для уравнений Эйлера

В работах (Gilmanov and Aganin, 1985), (Gilmanov, 2000) на примере решения одномерных задач численно изучаются пять следующих граничных условий.

I. Экстраполяция нулевого порядка скорости v , плотности ρ , удельной внутренней энергии ϵ .

II. Экстраполяция первого порядка v , ρ , ϵ .

III. Нулевая экстраполяция ρ , ϵ и

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\rho / \rho_{\infty} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} - 1 \right]. \quad (3.38)$$

IV. Нулевая экстраполяция ρ , ϵ и

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(p / p_{\infty} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right]. \quad (3.39)$$

V. Нулевая экстраполяция ρ , ϵ и

$$v = \frac{1}{a_{\infty}} \sqrt{\frac{(p - p_{\infty})(\rho - \rho_{\infty})}{\rho \rho_{\infty}}}. \quad (3.40)$$

Здесь a_{∞} , ρ_{∞} , p_{∞} — скорость звука, плотность и давление в невозмущенном потоке газа; γ — отношение удельных теплостей. Граничные условия (I), (II) являются простейшими и наиболее часто применяются в разностных методах газовой динамики. Соотношения (3.38), (3.39) были предложены для использования в качестве граничных условий в работе (Ilgamov, 1985a). Формула (3.40) получается из условий Гюгонио на скачке уплотнения.

Для изучения граничных условий (I)–(V) решались уравнения газовой динамики произвольным лагранжево-эйлеровым методом (Hirt et al., 1974) с использованием неподвижной конечно-разностной сетки.

Изучение граничных условий проводилось на основе решения одномерных задач о распространении возмущений в трубе. Предварительно было получено решение для «бесконечной» области, размеры которой выбирались достаточно большими, а процесс исследовался до момента достижения возмущениями внешней границы. Благодаря этому исключалось ее влияние на решение внутри области. Полученные данные, например, изменение во времени скорости в фиксированной точке y^* , были приняты за эталонные. В последующих расчетах граница вычислительной области, на которой ставились условия (I)–(V), переносилась вплотную к точке y^* , и решение отыскивалось заново. Но в отличие от предыдущего случая здесь, в той или иной степени, проявлялось влияние границы. По отклонению полученных

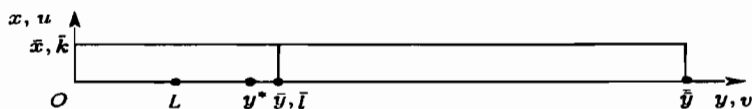


Рис. 3.20. Расчетная область для исследования граничных условий $y = \bar{y}$ и эталонная область $y = \bar{y}$

данных от эталонного решения можно было судить об отражающих или неотражающих свойствах рассматриваемых условий (I)–(V).

На рис. 3.20 схематично показана вычислительная область, которая имеет максимальные размеры: $x = \bar{x} = 0,5$, $y = \bar{y} = 2,0$, а для эталонного варианта $y = \bar{y} = 6,0$, Oy — ось симметрии, y^* — точка, в которой изучалось изменения во времени выбранных газодинамических переменных.

Граничные условия для всех приведенных вариантов счета следующие: на левой границе $y = 0$, на оси симметрии $x = 0$ и на верхней стенке $x = \bar{x}$ выполнялись условия непротекания:

$$\begin{aligned} u_{k,1}^n &= u_{k,2}^n, & v_{k,1}^n &= 0, & 1 \leq k \leq \bar{k}, \\ u_{1,l}^n &= 0, & v_{1,l}^n &= v_{2,l}^n, & 2 \leq l \leq \bar{l} - 1, \\ u_{\bar{k},l}^n &= 0, & v_{\bar{k},l}^n &= v_{\bar{k}-1,l}^n, & 2 \leq l \leq \bar{l} - 1, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где верхним индексом n указывается на значение функции в момент времени $t^n = t^{n-1} + \Delta t^n$; нижними индексами k, l — номера узлов конечно-разностной сетки; Δt — шаг интегрирования по времени, $\bar{k}, \bar{l}$ — размеры сетки вдоль соответствующих осей.

На правой границе области $y = \bar{y}$ ставились условия (I)–(V), разностное представление которых имеет вид

$$\begin{aligned} \text{I. } f_{k,\bar{l}}^n &= f_{k,\bar{l}-1}^n, \quad f = [v, \rho, \varepsilon], \quad 1 \leq k \leq \bar{k}, \\ \text{II. } f_{k,\bar{l}}^n &= 2f_{k,\bar{l}-1}^n - f_{k,\bar{l}-2}^n, \quad 1 \leq k \leq \bar{k}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Для граничных условий (III)–(V) плотность и удельная внутренняя энергия определялись нулевой экстраполяцией (I), а

скорости находились из соотношений (3.38)–(3.40):

$$\text{III. } v_{k,\bar{l}}^n = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\rho_{k,\bar{l}}^n / \rho_\infty \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} - 1 \right],$$

$$\text{IV. } v_{k,\bar{l}}^n = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(p_{k,\bar{l}}^n / p_\infty \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right], \quad (3.4^*)$$

$$\text{V. } v_{k,\bar{l}}^n = \sqrt{(p_{k,\bar{l}}^n - p_\infty)(\rho_{k,\bar{l}}^n - \rho_\infty) / \rho_{k,\bar{l}}^n \rho_\infty / a_\infty},$$

где $1 \leq k \leq \bar{k}$.

Были рассмотрены три случая, различающиеся по виду во действующего на границу возмущения. Одним из них является ударная волна. Состояние газа в начальный момент задавалось следующими граничными условиями:

$$u_{k,l} = 0, \quad v_{k,l} = 2, \quad \rho_{k,l} = 3, \quad \varepsilon_{k,l} = 3,3, \quad 0 \leq y \leq 1,8,$$

$$u_{k,l} = 0, \quad v_{k,l} = 0, \quad \rho_{k,l} = 1, \quad \varepsilon_{k,l} = 0,9, \quad 1,8 \leq y \leq \bar{y}(\bar{y}).$$

Эти данные определяют устойчивую ударную волну интенсивности $z = (p_2 - p_1) / p_1 = 10$, которая движется вдоль оси тры слева направо в сторону границы $y = \bar{y}$; p_1, p_2 — давления разных сторон скачка. На рис. 3.21 показано изменение во времени скорости v в точке $y^* = 1,9$. Цифрой 0 отмечено эталонное решение. Нумерация остальных

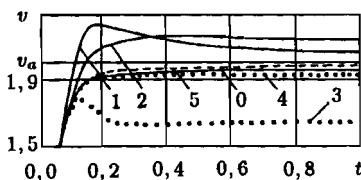


Рис. 3.21. Изменение во времени скорости. Цифрами отмечены кривые, соответствующие номеру граничных условий

решение. Нумерация остальных кривых соответствует номера граничных условий, приведенным ранее. Здесь и на всех рисунках далее сплошной линией даются граничные условия (I) (II), пунктирной — (III), (IV) штриховой — (V).

Наибольшее отклонение от эталонного решения наблюдается для граничных условий (I), (II)

(III). В этой задаче известно точное решение: скорость в точке y^* после прохождения ударной волны равна скорости за фронтом скачка, $v_a = 2$.

Отклонение от точного решения в виде абсолютной ошибки для эталонного варианта при $t = 1$ равно $\delta_0 \approx 0,04$, а для (I)–(V) — $\delta_1 \approx 0,06$, $\delta_2 \approx 0,14$, $\delta_3 \approx 0,36$, $\delta_4 \approx 0,08$, $\delta_5 \approx 0,01$, соответственно. Наилучший результат дает граничное условие (V), что вполне естественно, так как оно является следствием соотношений, справедливых на ударных волнах. Большая ошибка варианта (III), вероятно, объясняется тем, что на ударных волнах равенство (I), устанавливающее зависимость скорости только от плотности, нарушается. Если подставить значения $\rho_1 = 1$ и $\rho_2 = 3$ с двух сторон скачка уплотнения в (I), то получится $v = 1,32$, что на 34% отличается от точной скорости $v_a = 2$. Наряду с этим результаты счета вполне удовлетворительны для граничного условия (IV), где в отличие от (III) в формуле (3.38) учитывается изменение внутренней энергии. Скорость, вычисленная по этой формуле, равна $v = 1,85$ и отличается от точной на 7%.

В следующей задаче рассматривался распад разрыва, задаваемого начальными условиями

$$u_{k,l} = 0, \quad v_{k,l} = 0, \quad \rho_{k,l} = 4,48, \quad \varepsilon_{k,l} = 0,9, \quad 0 \leq y \leq 1,8,$$

$$u_{k,l} = 0, \quad v_{k,l} = 0, \quad \rho_{k,l} = 1,0, \quad \varepsilon_{k,l} = 0,9, \quad 1,8 \leq y \leq \bar{y}.$$

Этот разрыв распадается на ударную волну интенсивности $z = 1$, контактный разрыв и волну разрежения. Характер перемещения возмущений виден из рис. 3.22, 3.23, на которых приве-

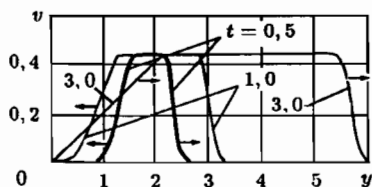


Рис. 3.22. Распад разрыва. Профиль скорости в три момента времени

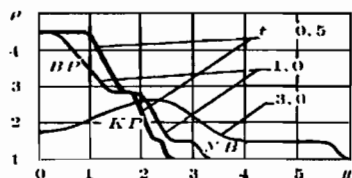


Рис. 3.23. Распределение плотности вдоль оси в три момента времени

дены для эталонного решения распределения скорости v и плотности ρ вдоль оси трубы для моментов времени $t = 0,5; 1,0; 3,0$. Вправо движутся ударная волна и контактный разрыв, влево — волна разрежения. К моменту $t \approx 1$ волна разрежения достигает левой стенки и, отразившись от нее, перемещается в обратном направлении. Таким образом, на границу $y = \bar{y}$ последовательно воздействуют ударная волна, контактный разрыв и, наконец, отраженная от левой стенки волна разрежения.

Это можно видеть из рис. 3.24, на котором приведено изменение во времени скорости v в точке y^* . Уже с момента $t \approx 0,25$ кривые 1 и 2 отклоняются от эталонного решения

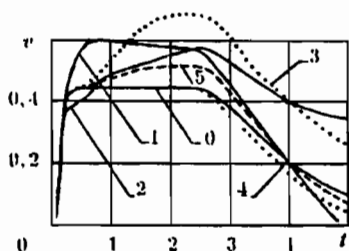


Рис. 3.24. Изменение во времени скорости v в точке y^*

правильно описывающего прохождение ударной волны через границу. Начиная с $t \approx 2,5$, на границу воздействует контактный разрыв, длительность прохождения которого обусловлена величиной размазывания (6—8 ячеек) и небольшой скоростью распространения ($v \approx 0,447$). В указанном интервале времени кривая практически совпадает с эталонной, а 3 и 5 заметно отклоняются от нее. Это объясняется тем, что на контактном разрыве скорость и давление непрерывны, плотность терпит разрыв. Поэтому формула (3.39), выражающая зависимость скорости от давления $v = v(p)$, не будет искажать проходящего через границу возмущения в виде контактного разрыва, тогда как соотношения (3.38) и (3.40), для которых скорости зависят от плотности $v = v(\rho)$, $v = v(\rho, p)$, будут искажать решение. При $t \approx 2,5$ к границе подходит отраженная от левой стенки волна разрежения. Наибольшее отклонение от эталонного решения наблюдается здесь и для варианта (IV). Максимальные абсолютные ошибки вариантов (I)—(V) в рассматриваемом интервале времени равны, соответственно, $\delta_1 \approx 0,11$, $\delta_2 \approx 0,22$, $\delta_3 \approx 0,25$, $\delta_4 \approx 0,05$, $\delta_5 \approx 0,07$.

В последней задаче рассматривался распад разрыва, заданного в виде следующих скачков плотности:

$$u_{k,l} = 0, \quad v_{k,l} = 0, \quad \varepsilon_{k,l} = 0,9, \quad 0 \leq y \leq \bar{y}(\bar{y}),$$

$$\rho_{k,l} = 1, \quad 0 \leq y \leq 0,5, \quad \rho_{k,l} = 4,48, \quad 0,5 \leq y \leq 1,0$$

$$\rho_{k,l} = 1,21, \quad 1,0 \leq y \leq 1,8, \quad \rho_{k,l} = 1,0, \quad 0,5 \leq y \leq \bar{y}(\bar{y}),$$

На рис. 3.25 а показано распределение вдоль оси Oy давления p в начальный (заштриховано) и последующие ($t = 1, 2, 3, 5$) моменты времени. В результате распада такой системы скачков и отражения возмущений от левой жесткой стенки возникают две волны, перемещающиеся слева направо. Они и определяют характер изменения во времени в точке y^* скорости v (см. рис. 3.25 б). Первый всплеск является следствием прохождения

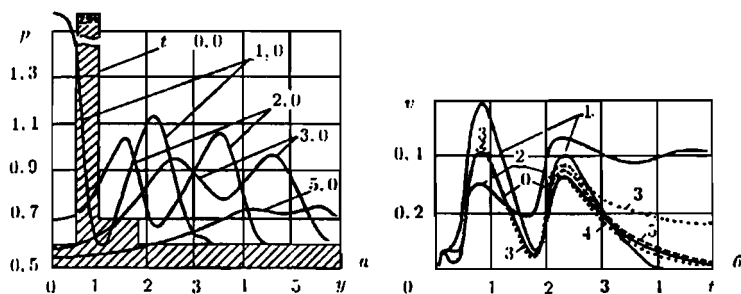


Рис. 3.25. Распределение давления сложного распада разрыва в начальный (заштриховано) и в последующие четыре, указанные на рисунке, момента времени (а), изменение во времени скорости при воздействии на границу сложного спектра возмущений (б)

ударной волны, образовавшейся из распада разрыва при $y = 1,8$. Уже здесь заметно отклонение вариантов (I), (II) от эталонного решения. Начиная с момента $t \approx 0,4$ на границу действует ударная волна от разрыва $y = 1$. Достигнув наибольшей величины, скорость с момента $t \approx 0,8$ начинает уменьшаться из-за подошедшей волны разрежения от разрыва, $y = 0,5$.

При $t \approx 1,8$ к границе подходит отраженное от левой стенки возмущение, вызывая увеличение скорости вплоть до момента $t \approx 2,3$. Далее скорость уменьшается. Эталонное решение и варианты (IV), (V) приводят после выхода всех возмущений из расчетной области к состоянию покоя, $v = 0$. Граничные условия (I)–(III) дают нефизические решения с течением газа в отрицательном или положительном направлениях. Максимальные абсолютные ошибки вариантов (I)–(V) составили, соответственно, $\delta_1 \approx 0,17$, $\delta_2 \approx 0,4$, $\delta_3 \approx 0,15$, $\delta_4 \approx 0,03$, $\delta_5 \approx 0,04$.

Для более полного анализа поглощающих свойств граничных условий проводилось сравнение вариантов (I)–(V) с эталонным решением во всей расчетной области.

На рис. 3.26 изображена

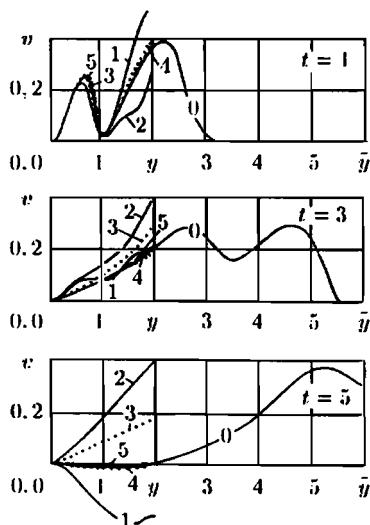


Рис. 3.26. Зависимости скорости от пространственной координаты в три указанные момента времени

зависимость скорости u от координаты y в моменты времени $t = 1, 3, 5$. Граница области $y = \bar{y}$, на которой ставились условия (I)–(V), отмечена толстой линией. Видно, что уже при $t = 1$ граничное условие (I), (II) искажает решение внутри области и к моменту $t = 5$ получаются результаты, ничего общего с эталонным расчетом не имеющие. Граничные условия (IV), (V) практически точно воспроизводят эталонное решение в всей области для любого из выбранных моментов времени. Отметим, что хотя длина волны проходящего возмущения больше размеров расчетной области, тем не менее кривые 4, достаточно хорошо воспроизводят эталонное решение, которое при $y \leq \bar{y}$ правильно описывает физический процесс.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что из рассматриваемых граничных условий (I)–(V) условия (IV), (V) являются лучшими. Возмущения проходят через грани практически без отражения. Из условий (IV), (V) первое является более предпочтительным, так как оно наиболее правильно реагирует на любой вид возмущений (волны разрежения и сжатия, контактные разрывы). К использованию граничных условий (I), (II) следует подходить осторожно, тщательно проверяя их в контрольных расчетах, так как в ряде случаев они могут полностью исказить решение.

3.8. Неотражающие условия в задачах течения вязкого газа для нестационарных и установившихся течения сжимаемой и несжимаемой жидкости

В многочисленных работах отечественных и зарубежных авторов детально рассматривалась численная реализация простых условий (экстраполяция нулевого и первого порядков) на границах расчетной области при моделировании уравнений Навье-Стокса. Можно указать, например, на работы типа (Kurdyumov and Likhovsev, 1987), (Gustafsson and Ferm, 1986).

В работе (Ilgamov, 1985a) исследованы неотражающие условия, предложенные и использованные в статье (Rudy and Strikwerda, 1980). Нелинейное условие в одномерной задаче имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(p - p_\infty) = 0. \quad (3.44)$$

В статье (Abarbanel et al., 1986) иным путем получено условие, аналогичное (3.44). Рассматривается дозвуковое течение

около жесткой полубесконечной пластины при больших числах Рейнольдса. Выходная граница расчетной области отстоит от передней кромки пластины на L . Получено приближенное условие на выходной границе

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 0,3 U_{\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_{\infty}}{9L|\lambda_0|} (p - p_{\infty}) = 0. \quad (3.45)$$

Входящая сюда величина $1/|\lambda_0|$ зависит от числа Маха M_{∞} . В работе (Abarbanel et al., 1986) дано сравнение составляющих скорости U и V в узлах, отстоящих от пластины на одну ячейку, с применением как ранее известного условия (3.44), так и нового условия (3.45). В целом получены результаты, близкие по значениям. При $L = 3$ фута (1 фут = 0,305 м) установившееся состояние течения по (3.45) достигается за 30880 временных шагов. Использование (3.44) дает установление за 97020 шагов (при $\alpha = 1,45$). При $L = 2,067$ фута по (3.45) и (3.44) время установления получается, соответственно, 20960 и 52080 шагов (принято $\alpha = 2,71$). Эти результаты показывают, что сходимость к установившемуся режиму течения лучше у (3.45). В рассмотренной задаче найдена также слабая зависимость результатов от значения коэффициента перед разностью $p - p_{\infty}$ в (3.45).

Было бы ценным сравнение результатов по установившемуся состоянию с данными, полученными другими методами, например, в статье (Ng and Reid, 1980).

В работе (Fedorchenko, 1981) предложены ряд расчетных моделей для решения нелинейных задач о нестационарных дозвуковых течениях на конечном участке канала. Исследуется зависимость акустической проводимости сечения от частоты. Связь между скоростью и давлением принимается линейной. Приведена разностная схема интегрирования полной системы уравнений Навье-Стокса для сжимаемой среды. Рассмотрен ряд нестационарных задач о развитии осесимметричного течения в коротком цилиндрическом канале.

Некоторые общие проблемы численного моделирования нестационарных пространственных течений и постановки условий на границах (проницаемые границы) рассмотрены в работе (Fedorchenko, 1982). В качестве конкретных примеров приведена серия численных решений задачи об осесимметричном течении в сопловом канале.

Укажем также на работы (Halpern, 1985), (Fuchs, 1985), (Garopov, 1987).

3.9. Дозвуковое обтекание плоской пластины

В работе (Rudy and Strikwerda, 1981) полученное неотражающее условие применялось наряду с другими условиями в задаче дозвукового обтекания вязкой жидкостью пластины, расположенной вдоль потока (рис. 3.27). При этом число Маха было равно $M_\infty = 0,8$, число Рейнольдса $Re = 1,535 \cdot 10^5$.

В случае применения уравнений Навье-Стокса на каждой границе должны быть заданы по четыре численных условия. На пластине были приняты условия $u = v = 0$, $T = T_\infty$, плотность определялась по соотношению $\partial p / \partial y = 0$, с учетом уравнения состояния. На верхней границе расчетной области u , v , T , ρ определялись экстраполяцией нулевого порядка. Отметим, что верхняя граница находилась на расстоянии 10 толщин пограничного слоя стенки.

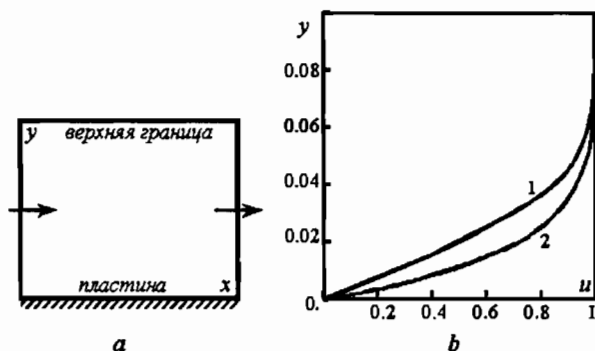


Рис. 3.27. Дозвуковой поток вязкого газа над плоской пластиной

На входе в область были заданы следующие условия.

I. Задание u_{1j}^{n+1} , v_{1j}^{n+1} , T_{1j}^{n+1} и $\rho_{1j}^{n+1} = p_{1j}^{n+1} / (\gamma - 1) T_{1j}^{n+1}$, где в последнем выражении давление находится экстраполяцией характеристической переменной для уравнения $\Delta p - \rho c \Delta u = 0$ т.е.

$$p_{1j}^{n+1} = p_{2j}^{n+1} - \rho_{1j}^{n+1} c_{1j}^n (u_{2j}^{n+1} - u_{1j}^{n+1}). \quad (3.46)$$

II. Задание u_{1j}^{n+1} , v_{1j}^{n+1} , ρ_{1j}^{n+1} и $T_{1j}^{n+1} = p_{1j}^{n+1} / (\gamma - 1) \rho_{1j}^{n+1}$, где давление берется из (3.46).

III. Задание u_{1j}^{n+1} , v_{1j}^{n+1} , T_{1j}^{n+1} и экстраполяция $\rho_{1j}^{n+1} = \rho_{2j}^{n+1}$.

IV. Задание u_{1j}^{n+1} , v_{1j}^{n+1} , ρ_{1j}^{n+1} и экстраполяция $T_{1j}^{n+1} = T_{2j}^{n+1}$.

V. Задание u_{1j}^{n+1} , v_{1j}^{n+1} , ρ_{1j}^{n+1} , T_{1j}^{n+1} .

Условия на выходе из расчетной области были следующие.

I. Экстраполяции u , v , T нулевого порядка ($u_{Ij}^{n+1} = u_{I-1,j}^{n+1}$) и $\rho_{Ij}^{n+1} = p_{\infty} / (\gamma - 1) T_{Ij}^{n+1}$, где использовано постоянное значение давления p_{∞} .

II. Экстраполяции u , v , ρ нулевого порядка и

$$T_{Ij}^{n+1} = p_{\infty} / (\gamma - 1) \rho_{Ij}^{n+1}.$$

III. Экстраполяции u , v , T нулевого порядка и

$$\rho_{Ij}^{n+1} = p_{Ij}^{n+1} / (\gamma - 1) T_{Ij}^{n+1},$$

где давление определяется по неотражающему условию (3.58).

IV. Экстраполяция u , v , ρ нулевого порядка и

$$T_{Ij}^{n+1} = p_{Ij}^{n+1} / (\gamma - 1) \rho_{Ij}^{n+1},$$

где p_{Ij}^{n+1} определяется согласно (3.58).

V. Экстраполяции u , v , T , ρ нулевого порядка.

В большинстве расчетов профили u , v , T , ρ на входе были получены из решений пограничного слоя. Профиль компоненты скорости u показан на рис. 3.27 цифрой 1. Компонента v задается формулой $v = v_0 [1 - (3/8)y^2]$, где v_0 — значение скорости на кромке пограничного слоя. Так как в данной задаче плотность в свободном потоке должна быть почти постоянной, то было принято ее значение для несжимаемой жидкости.

На рис. 3.27 кривой 2 показан также экспоненциальный профиль компоненты $u = 1 - \exp(-60y)$. При этом было принято $v = 0$, $T = T_{\infty}$, $\rho = \rho_{\infty}$. Целью использования этих входных данных являлось изучение влияния неточных значений на входе на решение в области.

При $t = 0$ расчеты начинаются с задания во всех точках области значений параметров, равных входным данным ($x = 0$). Предполагалось, что выход на стационарное состояние достигается, если в каждой точке области выполняется условие

$$|\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-6}$, а ϕ представляет каждую из зависимых переменных u , v , ρ , T .

Результаты расчетов сравнивались с данными теории пограничного слоя. Наилучшее согласие получено в случае применения условий (I) на входе и (III) на выходе при задании профиля параметров на входе по теории пограничного слоя (разница менее одного процента).

Что касается влияния других условий на входе и выходе, то численные эксперименты показали следующее. Когда применяется вариант (V) на входе, возникают осцилляции большой амплитуды в решении вдоль пластины. Они могут иметь большее влияние на решение в задачах с более сложной картиной течения. Когда вариант (V) на входе применяется с более точным значением входных данных (т.е. по теории пограничного слоя), осцилляции имеют меньшую интенсивность при всех условиях (I)–(IV) на выходе из области. Это указывает на то, что эти осцилляции являются прямым следствием переопределения данных на входе.

При применении любых входных условий (I)–(V) в сочетании с выходными условиями (V) не было достигнуто сходящихся решений. Решение с условиями (I) и (II) на входе с течением времени постепенно падает; за $2 \cdot 10^4$ шагов давление доходит до 85% значения для установившегося потока. Это является следствием применения неполных данных на границе.

Когда используются условия (V) на входе и на выходе, решение расходится. Эта комбинация граничных условий является подходящей для сверхзвуковых, а также для околозвуковых скоростей (хорошие результаты были получены при $M_\infty = 0,95$). Однако она в общем не подходит для дозвуковых скоростей.

Применение неотражающих условий на выходе из области существенно уменьшает число шагов по времени, требуемых для установления параметров, по сравнению с выходными условиями с постоянным давлением. Это число шагов незначительно отличается для случаев (II) и (IV) на выходе.

Для рассматриваемой задачи оптимальное с точки зрения сходимости значение α в выходных условиях (III) и (IV) находится в пределах 0,3–0,4. Это значение α , найденное из решения линейной одномерной задачи, дано в (3.56). В данном случае длина области $L = 2$. Поэтому из (3.56) получаем $\alpha^* = 0,1$ около пластины и $\alpha^* = 0,06$ вдали от нее. Заметим, что в работе (Hedstrom, 1979) рассматривается случай $\alpha = 0$.

На основе проведенных численных экспериментов делается вывод, что ошибки в данных на входе могут приводить к значительным ошибкам внутри области для всех испытанных входных граничных условий. Поэтому важно обеспечить точность

задания данных на входе в область. На скорость сходимости решения к стационарному значению наибольшее влияние оказывают граничные условия на выходе из области. В этом смысле наилучшими оказываются неотражающие условия.

В статье (Bayliss and Turkel, 1982), посвященной анализу линейных неотражающих условий (построенных на основе рассмотрения расходящихся в пространстве волн), рассматривается также пример квазиодномерного течения идеального газа в сопле переменного поперечного сечения в нелинейной постановке. Так как одномерные бегущие волны не ослабевают по координате, то условия типа (2.38), (2.46) не могут быть применены. Поэтому рассматривается (3.54). Анализ показал, что неотражающее условие на выходе может существенно ускорить сходимость. Исследовано также влияние значения коэффициента α на достижение установившегося состояния. Найдено, что количество временных шагов для этого при $\alpha = 0,278$ равно 118, а с увеличением α от 1 до ∞ оно находилось в пределах 160–180 шагов. При $\alpha = 0$ необходимое количество временных шагов было минимальным (52 шага). Этот результат противоречит тем данным, которые приведены выше в этом разделе относительно оптимальных значений α^* .

Нелинейные задачи гидромеханики с протяженными границами и сведение их к области с конечными размерами рассматриваются в работе (Moretti and Pandolfi, 1981) и в других работах.

Проблема вывода вихрей в дозвуковом потоке через искусственную границу обсуждается в работах (Fedorchenko, 1983, 1986). Способы задания локальных условий, изложенных выше, неприемлемы для рассматриваемого случая. Их формальное применение может вызывать преобразование вихревых возмущений в акустические на рассматриваемом участке границы. С целью устранения таких явлений предложены способы вывода вихрей из расчетной области, которые предполагают либо задание нелокальных граничных условий специального вида, либо объемное управление потоком вблизи границы. Необходимо выделить и анализ перемещающихся вихревых структур в процессе численного решения задачи.

Построению условий и процедур в случае вязкой несжимаемой жидкости посвящена работа (Anderson, 1986), а также статьи (Volkov, 1966), (Garonov, 1987). Точность реализации условий в случае вязкой жидкости рассмотрена, например, в работе (Gupta and Manohar, 1979).

3.10. Неотражающие условия в задачах астрофизики

В работе (Pogorelov and Semenov, 1996) рассматривается модификация неотражающих граничных условий при газодинамическом моделировании в астрофизике.

Предлагаются следующие граничные условия:

$$c_g = c_N, \quad u_g = u_N, \quad \rho_g = \rho_N, \quad \text{при } M_N \geq 1, \quad (3.47)$$

$$C_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_N + \frac{2}{\gamma - 1} C_N \right), \quad (3.48)$$

$$u_g = c_g, \quad \rho_g = \rho_N \left(\frac{c_g}{c_N} \right)^{2/(\gamma-1)}, \quad \text{при } M_N \leq 1,$$

$$c_g = c_N, \quad u_g = u_N, \quad \rho_g = \rho_N, \quad (3.49)$$

при $M_0 - \varepsilon_0 \leq M_N \leq M_0 + \varepsilon_0$, если $m_0 < 1$.

Нижний индекс g отмечает переменную на границе, ε_0 — малое число, задающее точность сохранения начальных условий в численных расчетах однородного постоянного дозвукового потока, M_0 — число Маха в этом потоке. Предполагается, что течение в окрестности границы близко к одномерному. Условия (3.47) — экстраполяция нулевого порядка для сверхзвукового потока, (3.48) — следует из соотношений в левой волне разрежения с центром на границе g в звуковой точке $u = c$, (3.49) — позволяет поддерживать невозмущенным однородным дозвуковым поток до тех пор, пока уровень приходящих возмущений не превысит некоторую границу ε_0 .

На рис. 3.28 приведено решение задачи о взаимодействии звездного ветра с локальной межзвездной средой в виде изолиний плотности и изолиний давления. Расчеты (рис. 3.28 а) проведены для области с $R_{\min} = 10$ и $R_{\max} = 500$ на сетке 50×60 , а на рис. 3.28б для области с $R_{\min} = 20$ и $R_{\max} = 1000$ на сетке 99×116 , при том же пространственном разрешении. Наблюдаются все особенности присущие данной задаче, при этом различия по плотности не превышает 15%.

Более характерной иллюстрацией влияния граничных условий являются числа Маха. На рис. 3.29 приведены линии

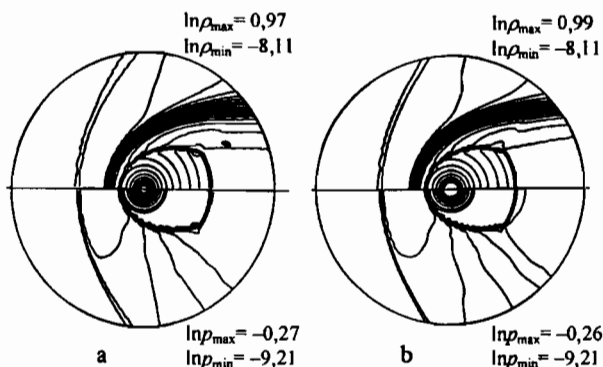


Рис. 3.28. Изолинии плотности (верхняя половина) и давления (нижняя половина рисунка) на сетках 50×60 (a) и 99×116 (b)

равных чисел Маха в области $R_{\min} = 10$ и $R_{\max} = 490$. На нижней половине (рис. 3.29) размер ячейки составляет 5 а.е. (1 а.е. = $1,5 \cdot 10^{11}$ м — одна астрономическая единица), а на верхней — 7 а.е. Видно, что рассматриваемые граничные условия ускоряют поток вблизи границы.

Примеры расчетов для нестационарных задач с применением описанных граничных условий изложены в работе (Pogorelov, 1995).

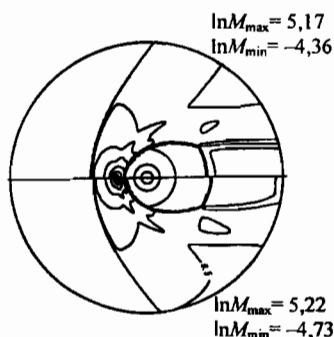


Рис. 3.29. Линии равных чисел Маха

3.11. Нелинейные неотражающие условия

В последние годы были предприняты усилия для построения неотражающих условий на искусственных границах расчетной области в нелинейной постановке. По-видимому, первой работой в этом направлении является (Hedstrom, 1979). В ней обсуждались неотражающие условия на границе $x = 0$ для нелинейных уравнений гиперболического типа (u — вектор):

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad u(x, 0) = g(x) \quad (x > 0, t > 0). \quad (3.50)$$

Допускается, что собственные значения λ_j ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_J$) функции $A(u)$ до $j = m < J$ отрицательны, остальные ($j = m + 1, \dots, J$) — положительны на границе $x = 0$. Таким образом, имеются m уходящих от $x = 0$ и $J - m$ приходящих характеристик. Если l_j левые собственные векторы функции $A(u)$, то $l_j A(u) = \lambda_j l_j$. Условие

$$l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (m < j \leq J) \quad (3.51)$$

не дает отражения падающих на $x = 0$ простых волн. Если падающий скачок интенсивности имеет значение ε , то условие (3.51) порождает отражение волн с интенсивностью $O(\varepsilon^3)$. В работе (Hedstrom, 1979) дается доказательство соответствующей теоремы.

Условие (3.51) конкретизируется для уравнений одномерной газовой динамики:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0,$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0,$$

$$S_t + uS_x = 0.$$

С учетом закона политропного идеального газа,

$$p = \rho^\gamma (\gamma - 1) e^{(S - S_0)/C_v},$$

матрица A в (3.50) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{\gamma p}{\rho^2} & u & \frac{p}{\rho c_v} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения имеют вид

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c \quad (c^2 = \gamma p / \rho).$$

Предположим, что на границе $x = 0$ поток является дозвуковым ($|u| < c$), так что $\lambda_1 < 0$, $\lambda_3 > 0$. Если $\lambda_2 > 0$, то граница $x = 0$ является входной, а при $\lambda_2 < 0$ — выходной.

Левые собственные векторы

$$l_2 = (0, 0, 1), \quad l_3 = (c, \rho, \rho p / c_v \gamma).$$

Поэтому, если $x = 0$ является выходной границей, то неотражающее условие (3.51) имеет вид

$$c\rho_t + \rho u_t + \left(\frac{c\rho}{c_v\gamma}\right) S_t = 0. \quad (3.52)$$

Если $x = 0$ является входной границей, то условие (3.51) дает (3.52) совместно с $S_t = 0$. Поэтому на входной границе

$$c\rho_t + \rho u_t = 0, \quad S_t = 0. \quad (3.53)$$

В качестве примера применения этих неотражающих условий рассмотрено решение одномерных уравнений газовой динамики в форме законов сохранения в области $0 < x < 1$. Предполагается, что поток дозвуковой, и $u > 0$, следовательно, $x = 0$ является входной, а $x = 1$ — выходной границами. Применена схема Лакс-Вендрофа.

На рис. 3.30 показаны некоторые результаты расчетов распространения разрыва в виде распределения скорости вдоль оси x и их сравнение с точным аналитическим решением (сплошные линии). Начальное значение давления в левой части области в десять раз больше, чем в правой. На втором рисунке в момент $t = 0,144$ волна проходит правую границу, где наблюдается незначительное расхождение с аналитическим решением. Исходя из аналогии с полученными в работах (Engquist and Majda, 1977), (Hedstrom, 1979) условиями, в работе (Rudy and Strikwerda, 1980) неотражающее условие на границе расчетной области предлагается в виде (одномерная задача)

$$p_t - \rho c u_t + \alpha(p - p_0) = 0, \quad (3.54)$$

где u , ρ , p , c — скорость, плотность, давление, скорость распространения возмущений, p_0 — установившееся значение давления; параметр α необходимо определить, о чем будет сказано ниже.

Если достигается установившееся состояние, то из (3.54) следует, что $p = p_0$. Недостаток условия (3.54) состоит в том, что

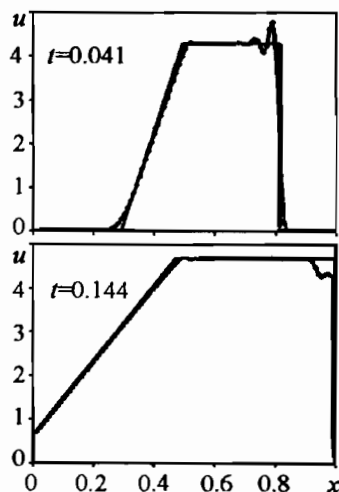


Рис. 3.30. Решение задачи о распаде разрыва

нужно знать параметр α . Его оптимальное значение подбирается таким, чтобы установившееся состояние системы достигалось за наикратчайшее время.

В работе (Rudy and Strikwerda, 1980) это время определяется исходя из линеаризованных уравнений газовой динамики (2.42) в одномерном случае. Предполагается, что $u_\infty < c_\infty$. Условия на концах отрезка имеют вид

$$\hat{u} = 0 \quad (x = 0), \quad \hat{p}_t - \rho_\infty c_\infty \hat{u}_t + \alpha \hat{p} = 0 \quad (x = L). \quad (3.55)$$

Представляя решение уравнений (2.42) в одномерном случае в виде суперпозиции двух бегущих волн (со скоростями $c_\infty + u_\infty$ и $c_\infty - u_\infty$, с волновым числом k) и удовлетворяя условиям (3.55), получаем $2k = \alpha (1 + e^{k\tau})$, где обозначено $\tau = 2Lc_\infty / (c_\infty^2 - u_\infty^2)$. Оптимальным является то значение α , для которого вещественная часть бесконечного ряда комплексных функций для волнового числа $k_m(\alpha)$ наибольшая. С помощью довольно сложного анализа в работе (Rudy and Strikwerda, 1980) найдено выражение для оптимального α^* :

$$\alpha^* = 0,278 (c_\infty^2 - u_\infty^2) / c_\infty L. \quad (3.56)$$

Рассматривается следующий пример. В прямоугольной области 1 (рис. 3.31) с параметрами $p_\infty, \rho_\infty, T_\infty, u_\infty = 0, v_\infty = 0$ в момент времени $t = 0$ находится прямоугольник 2 меньшего размера с параметрами $2p_\infty, 2T_\infty, u = 0, v = 0$. Применяются уравнения Навье-Стокса, поток дозвуковой. Для области 1 принимались числа Маха 0,8; 0,6; 0,4; для области 2 — числа Маха 0,283; 0,212; 0,141. Соответствующие числа Рейнольдса равняются 3488; 2932; 2129.

Область 1 покрыта равномерной сеткой 21×21 , а 2 — сеткой 7×7 . На входной искусственной границе три параметра u, v, T задаются (при этом задача является хорошо поставленной). Четвертый параметр находится из экстраполяции нулевого порядка. На боковых искусственных границах все параметры определяются по экстраполяции нулевого порядка ($u_{i0}^{n+1} = u_{i1}^{n+1}, v_{i0}^{n+1} = v_{i1}^{n+1}, \rho_{i0}^{n+1} = \rho_{i1}^{n+1}, T_{i0}^{n+1} = T_{i1}^{n+1}$). Что касается выходной границы, то u, v, T находятся из экстраполяции нулевого порядка, а ρ вычисляется по формуле

$$\rho_{Ij}^{n+1} = \frac{p_{Ij}^{n+1}}{(\gamma - 1) T_{Ij}^{n+1}}. \quad (3.57)$$

Рассмотрены три варианта применения последнего выражения.

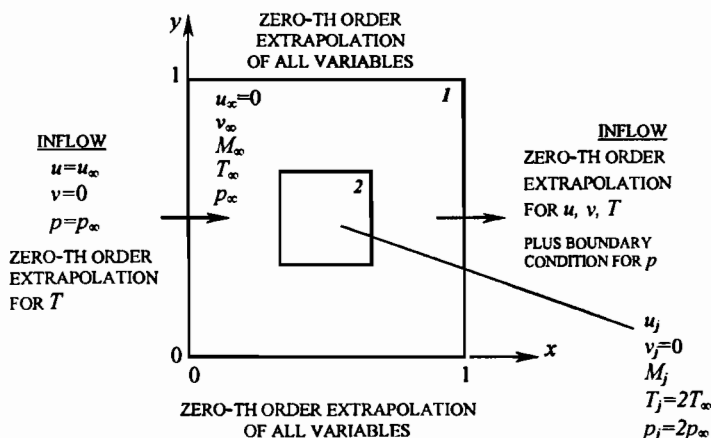


Рис. 3.31. Расчетная область, начальные и граничные условия

I. Значение p_{Ij}^{n+1} вычисляется согласно условию (3.54),

$$p_{Ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha \Delta t} \left[p_{Ij}^n + \alpha \Delta t p_\infty + \rho_{Ij}^n c_{Ij}^n \left(u_{Ij}^{n+1} - u_{Ij}^n \right) \right], \quad (3.58)$$

а T_{Ij}^{n+1} в (3.57) и u_{Ij}^{n+1} в (3.58) — по экстраполяции.

II. В (3.57) полагается $p_{Ij}^{n+1} = p_\infty$, а T_{Ij}^{n+1} определяется по экстраполяции нулевого порядка.

III. Непосредственная экстраполяция плотности, $\rho_{Ij}^{n+1} = \rho_{I-1,j}^{n+1}$, взамен выражения (3.57).

Во всех этих случаях граничные условия на выходе ставились после шага коррекции. Заметим, что вариант (II) получается из (I) при стремлении α к бесконечности.

Сходимость к стационарному режиму определяется условием

$$|\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-8}$, а ϕ представляет каждую из зависимых переменных u, v, ρ, T .

В работе даны наглядные графические изображения переходного процесса. На рис. 3.32 иллюстрируется преимущество неотражающих граничных условий (I) по сравнению с постоянным давлением на выходе (II). На рис. 3.32 показаны разности между вычисленным и установившимся давлением ($p - p_\infty$) для

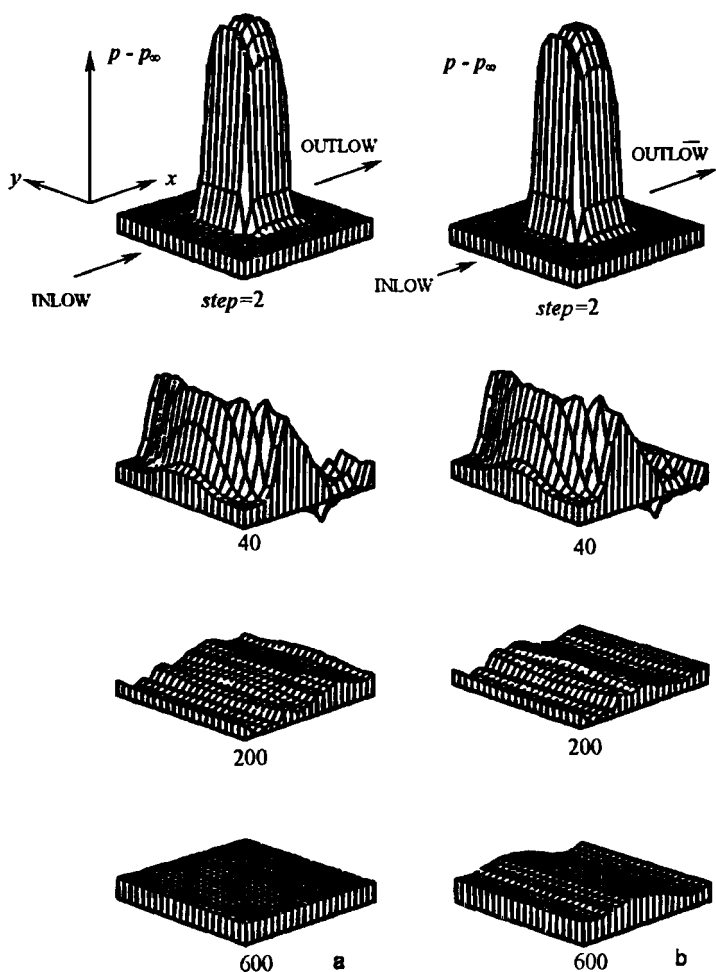


Рис. 3.32. Статическое давления ($p - p_\infty$) для выбранных моментов времени; **a** — на выходе задано неотражающее граничное условие ($\alpha = 0,25$); **b** — на выходе задано постоянное давление

четырех выбранных временных шагов при выполнении условий (II) на выходе. Первый график показывает распределение давления после двух шагов по времени. После десяти шагов начальное возмущение достигло выходной границы. Расчеты показывают, что возмущения продолжают перемещаться по расчетной области отражаясь от границы. По величине возмущения уменьшаются, но даже после 20000 шагов сходимость с заданным $\epsilon = 10^{-8}$ не достигается, однако наибольшие изменения переменных от своего установившегося значения не превышают 0,2%. Сопоставление результатов, представленных на рис. 3.32a и рис. 3.32b показывает, что до момента $step = 40$ результаты для граничных условий (I) и (II) практически совпадают. Однако далее видно, что условие (I) приводит к значительно более быстрому выходу на установившийся режим по сравнению с (II). Применение (3.57), (3.58) и (I) со значением $\alpha = 0,25$ приводит к выполнению условия сходимости после 3383 шагов.

Для изучения влияния значения α на сходимость к стационарному режиму были проведены расчеты при разных α . Установленные численно оптимальные значения его следующие: $\alpha = 0,25$ (для $M_\infty = 0,8$); $\alpha = 0,60$ (для $M_\infty = 0,6$); $\alpha = 1,2$ (для $M_\infty = 0,4$). Заметим, что по (3.56) значение α^* в два раза меньше, чем найденные численно в плоской нелинейной задаче.

С применением варианта (III) на выходной границе расчеты были выполнены для $M_\infty = 0,8$. Этот вид условий (т.е. когда все четыре параметра определяются экстраполяцией) не является математически корректным. Анализ показывает, что один из параметров должен быть задан. Однако эти граничные условия могут быть полезными для некоторых задач, в которых значения параметров на границе неизвестны. В численном эксперименте решение сходилось всего лишь через 2031 временной шаг, но к значениям температуры и, следовательно, давления, несколько отличным от T_∞, p_∞ .

Если принять $\alpha = 0$, то сходимость достигается за 1924 шага (при $M_\infty = 0,8$). При этом значение температуры также несколько отличается от T_∞ . Отметим, что на входной границе T находится экстраполяцией.

Таким образом, показана эффективность применения граничного условия (3.58) по сравнению с условиями экстраполяции или задания невозмущенных параметров для уравнений Навье-Стокса.

Неотражающие условия в динамических задачах теории упругости и вязкости

В данной главе рассматриваются неотражающие условия на искусственных границах в задачах динамической теории упругости, полученные с помощью подходов, используемых для двумерного скалярного волнового уравнения. Неотражающие граничные условия для уравнений акустики были обобщены применительно к уравнениям упругости. Эти условия основаны на композиции простых дифференциальных операторов первого порядка. Представлены эффективные поглощающие граничные условия для двумерных и трехмерных задач распространения волн в упругой среде. Метод пропускания падающих на границу области волн применен для расчета взаимодействия системы конструкция-грунт при возбуждении типа землетрясения. Данное обобщение неотражающих условий в плоской динамической теории упругости.

4.1. Динамические задачи теории упругости

С помощью тех же подходов, что и для двумерного скалярного волнового уравнения (см. главу 2), в работах (Clayton and Engquist, 1977), (Engquist and Majda, 1977), (Engquist and Majda, 1979) рассматриваются неотражающие условия на искусственных границах в задачах динамической теории упругости.

Рассматривается следующая постановка задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} &= g, \\ u &\text{ исчезает для } t < 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $g = (g_1, g_2)^T$ — вектор, компоненты которого представляют собой интегрируемые с квадратом функции, $u = (u, v)^T$ — вектор перемещения. Оператор $\mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \left[\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} 0 & d_1 - d_2 \\ d_1 - d_2 & 0 \end{pmatrix} u_{xy} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} u_{yy} \right] - u_{\tau\tau}, \quad (4.2)$$

где $d_1 = \lambda + 2\mu$, $d_2 = \mu$, λ и μ — параметры Ламе.

В первом приближении локальные радиационные неотражающие граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \mu^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (x = L). \quad (4.3)$$

Эти же условия во втором приближении ($x = L$) имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{1}{(\lambda + 2\mu)^{1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)^{1/2} - \mu^{1/2}}{(\lambda + 2\mu)^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \\ + \left[\frac{1}{2} (\lambda + 2\mu)^{1/2} - \mu^{1/2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{1}{\mu^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)^{1/2} - \mu^{1/2}}{\mu^{1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \\ - \left[(\lambda + 2\mu)^{1/2} - \frac{1}{2} \mu^{1/2} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

В работе (Engquist and Majda, 1979) подробно обсуждаются способы постановки неотражающих граничных условий в угловых точках.

4.2. Линейные условия, содержащие угол падения

Примем стандартные обозначения теории упругости: σ_{xx} , σ_{xy} — компоненты тензора напряжения, u , v — компоненты вектора перемещения по осям x и y .

Здесь будем следовать тому же способу получения неотражающего условия, что и в разделе 2.8. А именно, вместо (2.6) эти условия разыскиваем в форме (Ilgamov, 1985a)

$$\begin{aligned}\partial u / \partial t &= a \sigma_{xx}, \\ \partial v / \partial t &= b \sigma_{xy}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Рассматривается прямоугольная расчетная область $0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$ линейно-упругого тела.

В разделе 1.7. приведены формулы (1.78) и (1.79) для продольной и сдвиговой волн (функции ψ_l, ψ_s). В дальнейшем воспользуемся ими.

Отметим, что в разделе 2.8, при получении условия (2.68) в выражении (2.65) заранее можно было принять коэффициент отражения равным нулю ($R = 0$). Желая получить из (4.5) условия полного поглощения возмущений на границе $x = 0$, в состав указанных выше функций ψ_l и ψ_s заранее полагаем коэффициенты отражения продольных и сдвиговых волн равными нулю ($R = Q = 0$). Тогда имеем

$$\begin{aligned}u &= (\bar{i}\omega/c_l) \cos \theta \exp [(\bar{i}\omega/c_l)(x \cos \theta + y \sin \theta + c_l t)], \\ v &= (\bar{i}\omega/c_l) \sin \theta \exp [(\bar{i}\omega/c_l)(x \cos \theta + y \sin \theta + c_l t)].\end{aligned}\quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в (4.5) с учетом формул

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

находим функции a и b . Условия (4.5) приобретают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{c_l} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2 \cos \theta}{c_l} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (x = 0).\end{aligned}\quad (4.7)$$

Так как для изотропного упругого тела $\lambda/(\lambda + 2\mu) = \nu/(1 - \nu)$, где ν — коэффициент Пуассона материала, то они могут быть представлены также в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{c_l} \left(1 + \frac{\nu}{1 - \nu} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2 \cos \theta}{c_l} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (x = 0).\end{aligned}\quad (4.8)$$

При малых углах θ , когда $\operatorname{tg}^2 \theta \ll (1 - \nu)/\nu$, правая часть первого условия (4.8) упрощается. При $\nu = 0,3$ это упрощение справедливо до значения угла $\theta < 30^\circ$.

Формально условия (4.7) и (4.8) являются полностью неотражающими. Относительно знака углов θ справедливы правила, которые были сформулированы в разделе 2.8. Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.8, с условием для скалярного волнового уравнения, в (4.7) и (4.8) можно исключить угол θ . При этом в разных приближениях порядок производных по координатам и по времени будет разный.

Здесь так же, как в разделе 2.8., имеют место соотношения

$$\alpha = (\omega/c_l) \cos \theta, \quad \beta = (\omega/c_l) \sin \theta,$$

$$\alpha = \sqrt{(\omega/c_l)^2 - \beta^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \beta/\alpha.$$

С учетом (4.7) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{c_l} \sqrt{1 - \left(\frac{c_l \beta}{\omega}\right)^2} \times \\ \times \left[1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{(c_l \beta/\omega)^2}{1 - (c_l \beta/\omega)^2} \right] \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2}{c_l} \sqrt{1 - \left(\frac{c_l \beta}{\omega}\right)^2} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Сохраняя в правых частях лишь члены, не зависящие от β , получаем первое приближение неотражающих условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{c_l} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{c_l} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (x = 0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Сохраняя в правых частях также члены, содержащие $(c_l \beta/\omega)^2$, и учитывая, что $(i\omega)^{-1} \partial u / \partial t = u$, получаем второе приближение неотражающих условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} - \frac{c_l (\lambda - 2\mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c_l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + c_l \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{c_l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (x = 0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Сравним их с аналогичными условиями (4.3) и (4.4) из предыдущего параграфа. Разница в знаках перед некоторыми членами обусловлена тем, что (4.3) и (4.4) записаны для правой поверхности $x = L_1$.

Первое приближение (4.10) не совпадает с (4.3). Большее согласие между ними получается, если отбросить производные u и учесть, что $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$. В формулах (4.3), (4.4) принято значение $\rho = 1$. При этом первые условия (4.10) и (4.3) совпадают (знак минус в (4.10) появляется ввиду рассмотрения границы $x = 0$). Однако вторые условия (4.10) и (4.3) отличаются коэффициентами при $\partial v / \partial t$. В (4.3) фигурирует скорость распространения волны сдвига $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, в то время как в данном параграфе рассматривается только падающая волна растяжения и сжатия (u, v — соответствующие компоненты перемещения) и, поэтому, с самого начала отсутствует величина c_s . Однако численно коэффициенты при $\partial v / \partial t$ отличаются незначительно. Их отношение равно $[(\lambda + 2\mu)/4\mu]^{1/2} = [(1 - \nu)/2(1 - 2\nu)]^{1/2}$, что для $\nu = 0,3$ составляет 0,93.

Необходимо отметить, что условия (4.10) применимы и в случае ненулевого угла θ . Когда $\theta = 0$, второе из них не имеет места, а первое представляет собой точное неотражающее условие.

Рассмотрим вторые приближения. В первых уравнениях (4.11) и (4.4) отношения коэффициентов при членах $\partial^2 v / \partial y \partial t$ и $\partial^2 u / \partial y^2$ имеют вид

$$\frac{(\sqrt{\lambda + 2\mu} - \sqrt{\mu}) / \sqrt{\lambda + 2\mu}}{\lambda / (\lambda + 2\mu)} = \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}\right) \frac{1 - \nu}{\nu}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}/2 - \sqrt{\mu}}{(\lambda - 2\mu)/2\sqrt{\lambda + 2\mu}} = \frac{1 - \nu - \sqrt{2(1 - \nu)(1 - 2\nu)}}{3\nu - 1}.$$

При $\nu = 0,3$ первое из них составляет 1,09, а второе равно 0,48. Таким образом, наибольшее отличие имеет место в поправочном члене.

Во вторых уравнениях (4.11) и (4.4) отношения коэффициентов при членах $\partial^2 u / \partial y \partial t$ и $\partial^2 v / \partial y^2$ имеют вид

$$\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}} - 1,$$

$$\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu} - \sqrt{\mu}/2}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}}.$$

При $\nu = 0,3$ они составляют соответственно 0,87 и 0,73. Отметим, что коэффициенты в условиях (4.10), (4.11) имеют более простую структуру.

Для правой границы области ($x = L_1$) условия получаются из (4.7) и (4.8) заменой знаков на противоположные перед членами в правых частях. В (4.10) и (4.11) изменятся знаки перед $\partial u / \partial t$, $\partial v / \partial t$, $\partial^2 u / \partial t^2$, $\partial^2 v / \partial t^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 v / \partial y^2$.

Условия на нижней и верхней границах области имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u}{\partial x} &= \pm \frac{\cos \theta}{c_l} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \operatorname{tg}^2 \theta \right) \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= \pm \frac{2 \cos \theta}{c_l} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \left(\begin{array}{l} y = 0 \\ y = L_2 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Так же, как в предыдущем разделе, здесь не обсуждаются вопросы дискретизации полученных соотношений и их применимости в конечно-разностных решениях задач.

4.3. Граничные условия для упругих волн

В работах (Higdon, 1990, 1991) неотражающие граничные условия для уравнений акустики были обобщены для уравнений упругости. Эти условия основаны на композиции простых дифференциальных операторов первого порядка.

Рассмотрим акустическую волну, перемещающуюся в области $x > 0$. На границе $x = 0$ акустические неотражающие условия имеют общую форму,

$$\left[\prod_{j=1}^m \left(\cos \alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0, \quad (4.14)$$

где $|\alpha_j| < \pi/2$ для всех j . Обоснование формы (4.14) следующее. Пусть в области $x > 0$ перемещается плоская волна со скоростью c под углом α . В двумерном случае такая волна может быть представлена в виде

$$f(x \cos \alpha + z \sin \alpha + ct), \quad (4.15)$$

где f некая функция. Применение оператора

$$\cos \alpha \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.16)$$

к функции f дает тождественный нуль. Поэтому граничное условие (4.14) удовлетворяет точно любой плоской волне, перемещающейся в области $x > 0$ со скоростью c под произвольным углом α .

В общем случае нет универсального критерия выбора α_j . Однако численные эксперименты показывают, что величина отражения не очень чувствительна к величине этих углов и, поэтому они могут быть выбраны достаточно приближенно.

Для упругих волн пусть x, z — пространственные координаты, а u, v — соответствующие перемещения. Для области $x > 0$ простейшими граничными условиями на границе $x = 0$ будут условия

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_p \frac{\partial}{\partial x} \right) u &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_s \frac{\partial}{\partial x} \right) w &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Эта форма основана на том, что плоские волны, распространяющиеся нормально к x , в направлении x имеют скорость c_p — продольная волна (Р-волна), а в направлении z скорость распространения возмущения равна c_s — поперечная волна (S-волна). Поэтому условия (4.17) являются полностью неотражающим. Эти условия являются условиями первого порядка (Clayton and Engquist, 1977), (Engquist and Majda, 1979).

Указанные граничные условия не удовлетворяют точно плоским волнам, распространяющимся в направлении отличном от нормального направления по отношению к границе. По аналогии с акустическими волнами предлагается следующий оператор:

$$\left(\cos \alpha_p \frac{\partial}{\partial t} - c_p \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\cos \alpha_s \frac{\partial}{\partial t} - c_s \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (4.16)$$

где α_p и α_s — параметры, которые должны быть подобраны для рассматриваемой задачи.

Более общие граничные условия могут быть получены применением оператора

$$\prod_{j=1}^m \left(\beta_j \frac{\partial}{\partial t} - c_p \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4.17)$$

к каждой компоненте перемещения на границе. Здесь параметры β_j — положительные безразмерные константы.

В качестве тестовой задачи рассматривается распространение волн в однородной среде, которые возникают в результате действия возмущения

$$q(x, t) = \cos^2 \left(\frac{\pi(x - C)}{2J_0 \Delta x} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi(t - (N_0 + 1)\Delta t)}{2N_0 \Delta t} \right), \quad (4.20)$$

где для рассматриваемой задачи, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, возмущение (4.20) центрируется при $x = 1$, распространяется на 8 сеточных интервалов и действует в течение 12 временных шагов. Значения скоростей равны: $c_p = 1$, $c_s = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$.

Расчеты с использованием рассматриваемых граничных условий приведены на рис. 4.1–4.12. Горизонтальные перемещения показаны на левых рисунках, а вертикальные — на правых. Каждая кривая представляет величину перемещения вдоль вертикальной линии.

Точное решение, полученное на большой сетке, показано сплошными линиями на рис. 4.1–4.4 для моментов времени $t = 1,5$ и $t = 2,5$. Решение с поглощающими граничными условиями показано здесь же штриховыми линиями. На рисунках видны две различные волны, перемещающиеся вниз по среде. Передняя волна — продольная волна (волна сжатия, Р-волна), следующая за ней — поперечная волна (сдвиговая, S-волна).

На рис. 4.5–4.8 показано решение с применением условий Дирихле, $u = w = 0$. Видно, что эти граничные условия значительно искажают решение, внося в расчетную область сильные возмущения.

На рис. 4.9–4.12 показаны расчеты с применением неотражающих граничных условий третьего порядка ($m = 3$) (4.19) с $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \sqrt{3}$, $\beta_3 = 1,3$. Представленное решение ближе к точному по сравнению с рис. 4.1–4.4.

В работе (Randall, 1988) представлены эффективные неотражающие граничные условия для двумерных и трехмерных задач распространения волн в упругой среде. Граничные условия основаны на обобщении схемы (Lindman, 1975) для скалярных волн.

Рассмотрим плоскую волну, падающую на правую границу $x = x_{\max}$ под углом θ . Величина скалярного поля $\phi(x, y, t) = \phi(x \cos \theta + y \sin \theta - ct)$, где ось y — ортогональна к x , c — скорость распространения волны. Граничные условия, полностью поглощающие падающую волну, имеют вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{c}{\cos \theta} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (4.21)$$

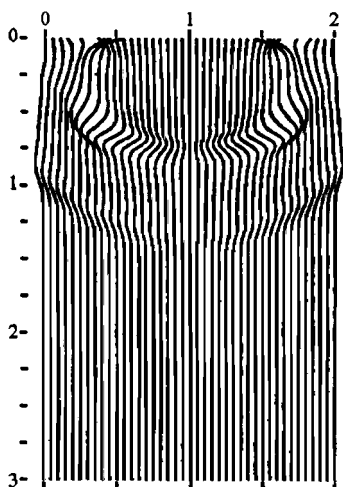


Рис. 4.1. Горизонтальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 2-го порядка при $t = 1,5$

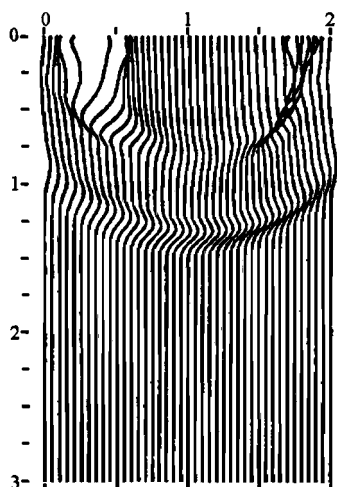


Рис. 4.2. Вертикальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 2-го порядка при $t = 1,5$

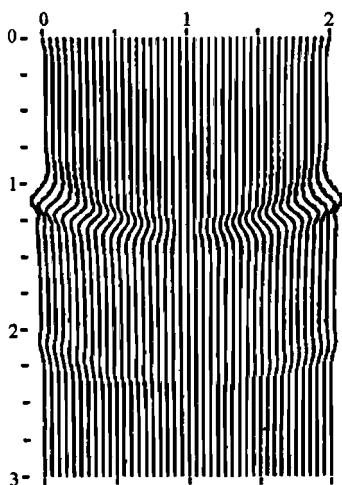


Рис. 4.3. Горизонтальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 2-го порядка при $t = 2,5$

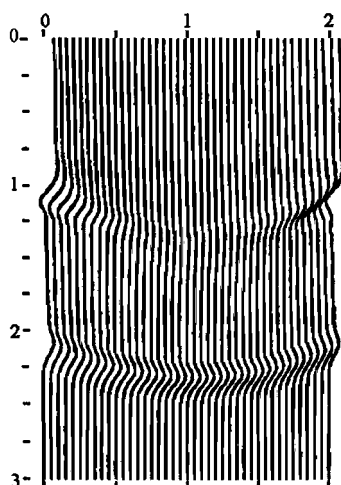


Рис. 4.4. Вертикальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 2-го порядка при $t = 2,5$

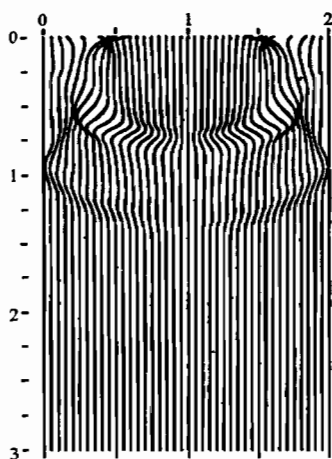


Рис. 4.5. Горизонтальные перемещения. Условие Дирихле при $t = 1,5$

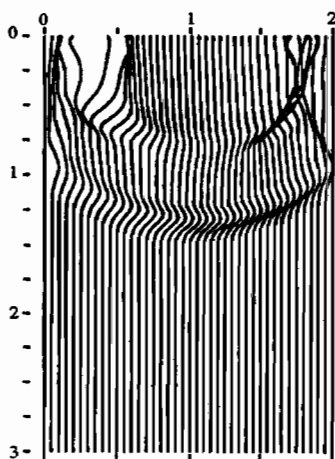


Рис. 4.6. Вертикальные перемещения. Условие Дирихле при $t = 1,5$

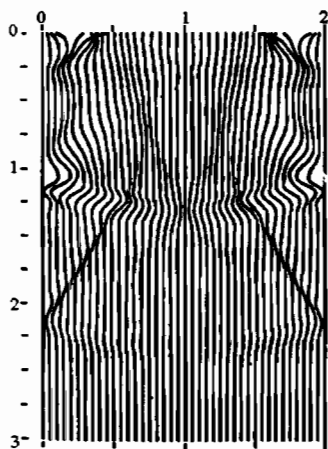


Рис. 4.7. Горизонтальные перемещения. Условие Дирихле при $t = 2,5$

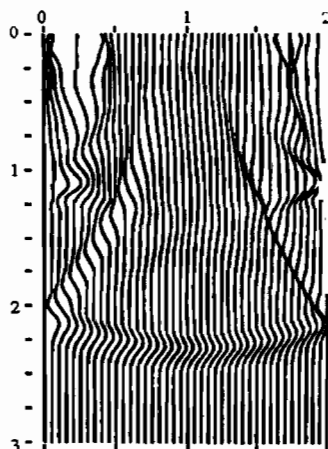


Рис. 4.8. Вертикальные перемещения. Условие Дирихле при $t = 2,5$

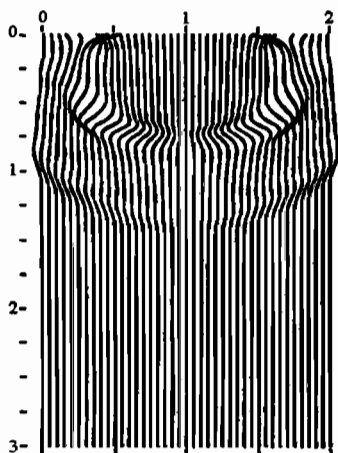


Рис. 4.9. Горизонтальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 3-го порядка при $t = 1, 5$

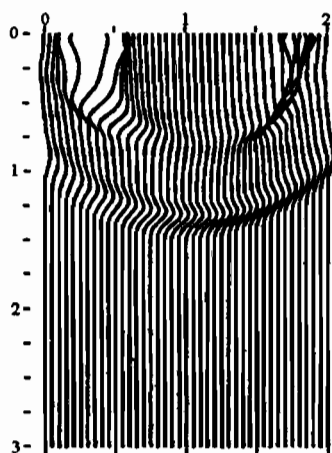


Рис. 4.10. Вертикальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 3-го порядка при $t = 1, 5$

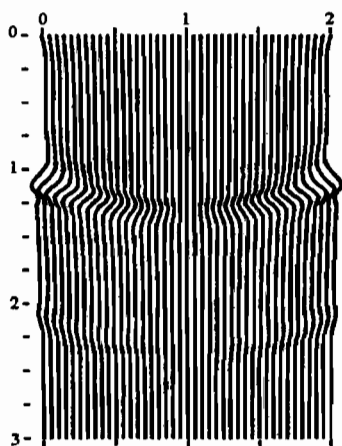


Рис. 4.11. Горизонтальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 3-го порядка при $t = 2, 5$

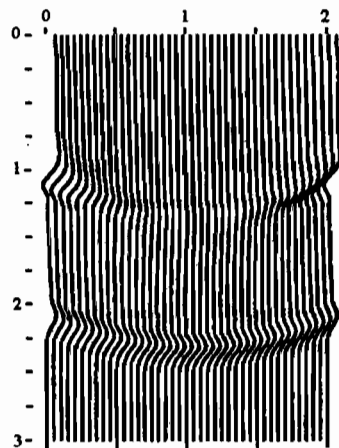


Рис. 4.12. Вертикальные перемещения. Точное решение и решение с граничным условием 3-го порядка при $t = 2, 5$

Наиболее часто, однако, поле волны составляет спектр плоских волн. Используя разложение в ряд Фурье, рациональную аппроксимацию ($1/\cos \theta$) и осуществляя обратное преобразование Фурье (Randall, 1988), можно получить поглощающее граничное условие в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \sum_{m=1}^{m=M} h_m, \quad (4.22)$$

где

$$\frac{\partial^2 h_m}{\partial t^2} - \beta_m c^2 \frac{\partial^2 h_m}{\partial y^2} = \alpha_m c^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(c \frac{\partial \phi}{\partial x} \right). \quad (4.23)$$

Более общее скалярное поглощающее условие имеет вид (Randall, 1988)

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + c \left(\sum_{m=1}^{m=M} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \sum_{m=1}^{m=M} \tilde{h}_m, \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{h}_m}{\partial t^2} + c \gamma_m |k_y| \frac{\partial \tilde{h}_m}{\partial t} + c k_y^2 \tilde{h}_m = \\ = \alpha_m \left[-c^2 k_y^2 + (1 - \gamma_m) c |k_y| \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(c \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь знак тильда означает трансформированную величину. Коэффициенты α_m и γ_m получаются в результате минимизации осредненных коэффициентов отражения. Эти наиболее общие поглощающие граничные условия дают хорошие результаты с шестью членами в разложении ряда ($M = 6$).

Для уравнений теории упругости переменной является вектор перемещений $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Соотношения между компонентами Фурье вектора перемещений $\mathbf{u}$ и его градиентом определяется с помощью матрицы. Скалярные волновые поглощающие граничные условия не могут быть применены непосредственно к компонентам вектора перемещений. Матричные соотношения компонент Фурье вектора перемещений и его градиентов достаточно сложные. Простое применение описанной ранее процедуры — не лучший способ получения поглощающих условий для

уравнений упругости. Более предпочтительно использовать промежуточные переменные: скалярный и векторный потенциалы.

Для уравнений, описывающих изотропное деформируемое тело,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (4.26)$$

вектор перемещений может быть представлен в виде

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.27)$$

где ϕ — скалярный (упругий) потенциал, а $\mathbf{A}$ — векторный (сдвиговой) потенциал. Потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = s^2 \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (4.29)$$

Учитывая вид (4.27), правые части уравнений (4.28) и (4.29) могут быть выражены через вектор перемещений:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \cdot \mathbf{u}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -s^2 \nabla \times \mathbf{u}. \quad (4.31)$$

Потенциал ϕ и декартовы компоненты векторного потенциала $\mathbf{A}$ удовлетворяют несвязанным скалярным волновым уравнениям и, поэтому, к ним может быть применен описанный выше метод (Lindman, 1975).

Таким образом, поглощающие граничные условия для уравнений упругости могут быть получены в результате выполнения следующих шагов. Сначала используются уравнения (4.30) и (4.31) для определения через вектор перемещений четырех независимых переменных, представляющих скалярный потенциал ϕ и три компоненты вектора $\mathbf{A}$. Далее используются скалярные уравнения (4.24), (4.25). И окончательно используется уравнение (4.27) для определения вектора перемещений через потенциалы. На рис. 4.13 приведены результаты расчета распространения волн в упругом теле в виде изолиний $\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{const}$ и

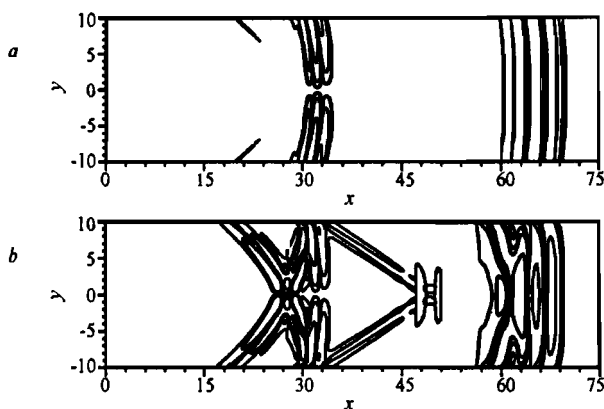


Рис. 4.13. Новые неотражающие граничные условия вдоль нижней и верхней границ (а). Параксиальные граничные условия второго порядка (б)

$|\nabla \times \mathbf{u}| = \text{const}$. Волна возмущения в окрестности $x = 32$ представляет собой контуры $|\nabla \times \mathbf{u}| = \text{const}$, т.е. сдвиговые волны, а в окрестности $x = 64$ — $\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{const}$, т.е. волны сжатия. Видно, что волны сжатия представляют собой расширяющиеся цилиндрические волны, вслед за которыми перемещаются с меньшей скоростью сдвиговые волны. Для рассматриваемых граничных условий видны очень небольшие возмущения, являющиеся следствием взаимодействия волн с границей (рис. 4.13 а). Приведенные на рис. 4.13 б результаты расчета с параксиальными неотражающими граничными условиями второго порядка показывают значительные возмущения как для сдвиговых волн, так и для волн сжатия.

4.4. Различные задачи теории упругости

Метод пропускания падающих на границу области волн, изложенный ранее в разделе 1.7, применен в работе (Miura et al., 1983) для расчета взаимодействия системы конструкция — грунт при возбуждении типа землетрясения. Решения уравнений плоской теории упругости представляются в виде

$$u_1 = \bar{i}k \left[\pm e^{\alpha x_2 \pm \bar{i}k x_1} \pm e^{-\alpha x_2 \pm \bar{i}k x_1} \right] A + \\ + \beta \left[\pm e^{\pm \beta x_2 + \bar{i}k x_1} \pm e^{\pm \beta x_2 - \bar{i}k x_1} \right] B, \quad u_2 = \dots,$$

где

$$\alpha^2 = k^2 - (\omega/c_p)^2, \quad \beta^2 = k^2 - (\omega/c_s)^2,$$

$$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_s = \sqrt{\mu/\rho},$$

k , ω — волновое число и частота. Константы

$$A = [A_1, A_2, A_3, A_4]^T, \quad B = [B_1, B_2, B_3, B_4]^T.$$

Составляются комбинации условий $u_1 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, чему соответствуют $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$, $B_1 = -B_2$, $B_3 = -B_4$, и т.д. Даны графики расчетов полей $|u_1|$ в зависимости от частоты возбуждения для прямоугольной области грунта и области со сложной свободной поверхностью (конструкция находится на поверхности).

Влияние конструкции, находящейся под землей, на сейсмические колебания поверхности земли изучено в работе (Crichlow, 1982).

В работе (Scandrett et al., 1986) выводятся и используются условия, близкие к рассмотренным в разделе 2.5. В цилиндрической системе координат они имеют вид

$$Au = O(R^{-2}),$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\beta - \alpha}{\beta r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\beta - \alpha}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} + \beta \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

где $\alpha = a\tau^{1/2}/c_p$, $\beta = a\tau^{1/2}/c_s$, a и R — радиусы полости и искусственной границы, τ — мера интервала времени между пиками падающего на границу импульса. Элементы $\bar{A}$ в прямоугольной системе координат ($Au = \bar{A}U$) представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} = & \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \sin^2 \theta\right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha}{\beta} \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \\ & + \frac{2\alpha - \beta}{2\beta R} \cos \theta + \alpha \cos \theta \frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{12} = & \frac{\alpha}{\beta} \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \cos^2 \theta\right) \frac{\partial}{\partial y} + \\ & + \frac{2\alpha - \beta}{2\beta R} \sin \theta + \alpha \sin \theta \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Элементы $\bar{A}_{22}$ и $\bar{A}_{21}$ получаются из $\bar{A}_{11}$ и $\bar{A}_{12}$ взаимной заменой α и β и изменением знака $\bar{A}_{21}$. Поэтому в прямоугольной системе

$$\bar{A}BU = O(R^{-2}),$$

где $B = \partial/\partial x \pm \gamma\partial/\partial t$ — оператор одномерной волны.

Решены задачи при $R = 5$, $\alpha = 0,8$, $\beta = 1,6$, $\Delta r = 0,1$, $\Delta\theta = \pi/30$, $\Delta t = 0,06$. Учитывается также наличие свободной границы, а импульс прикладывается на поверхность внутренней полости.

С использованием условий из работы (Clayton and Engquist, 1977) или из раздела 4.1. рассматривается задача об отражении волн Рэлея от одиночной неоднородности (выемки) на поверхности полуплоскости (Fuyuki and Matsumoto, 1980). Условие на нижней границе имеет вид ($i = I$, $3 \leq j \leq J - 2$)

$$D_-^x D_0^t u_{I,j}^n + \frac{C_1}{2} D_+^t D_-^t (u_{I,j}^n + u_{I-1,j}^n) + \\ + \frac{C_2}{2} D_+^t D_0^x (u_{I,j}^{n-1} + u_{I-1,j}^{n-1}) + \frac{C_3}{2} D_+^x D_-^x (u_{I,j}^{n-1} + u_{I-1,j}^{n+1}) = 0,$$

где обозначено

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_s^{-1} & 0 \\ 0 & c_p^{-1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = (c_p - c_s) \begin{pmatrix} 0 & c_s^{-1} \\ c_p^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_s - 2c_p & 0 \\ 0 & c_p - 2c_s \end{pmatrix},$$

а D_+^q , D_-^q , D_0^q представляют собой операторы разностей вперед, назад и центрированной разности:

$$D_+^x u_{i,j}^n = \frac{1}{h} (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n), \quad D_0^x u_{i,j}^n = \frac{1}{2h} (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n).$$

В нижнем правом углу $[(i, j) = (I, J - 1), (I - 1, J), (I, J)]$ расчетной области условие имеет вид

$$(D_-^x + D_-^x + M) u_{i,j}^n = 0,$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_p^{-1} + c_s^{-1} & c_p^{-1} - c_s^{-1} \\ c_p^{-1} - c_s^{-1} & c_p^{-1} + c_s^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Аналогично реализуются другие условия.

Задачи динамической теории упругости с условиями излучения рассмотрены в работах (Vorovich and Babeshko, 1979), (Mirsaidov et al., 1982), (Mirsaidov and Troyanovsky, 1980), (Seymov, 1983) и в других работах.

Остановимся на исследовании (Barry et al., 1988), относящемся к построению неотражающих условий в одномерной упругой задаче:

$$\rho(x) u_{tt}(x, t) = [\mu(x) u_t(x, t)]_x, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$\sigma(0, t) = \psi(t), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

Здесь u , σ — перемещение и напряжение в упругом теле.

Получена последовательность условий для правого конца ($x = L$):

$$\sigma(L, t) = \alpha_{-1} u_t(L, t),$$

$$\sigma(L, t) = \alpha_{-1} u_t(L, t) + \alpha_0 u(L, t),$$

$$\sigma(L, t) = \alpha_{-1} u_{tt}(L, t) + \alpha_0 u_t(L, t) + \alpha_1 u(L, t).$$

Получена также модификация последнего из этих соотношений путем введения параметра δ :

$$\sigma_t + \delta \sigma = \alpha_{-1} u_{tt} + (\alpha_0 + \alpha_{-1} \delta) u_t + (\alpha_1 + \alpha_0 \delta) u, \quad (x = L).$$

Дана обычная механическая интерпретация членов в правой части (пружины, поршни, их последовательное соединение). Расчеты при гармоническом возбуждении ($\psi = \sin 2\pi \lambda t$) показывают высокую эффективность модифицированного условия. Дано обобщение на двумерный случай.

4.5. Вязкоупругие среды

Обобщение неотражающих условий в плоской динамической теории упругости (Clayton and Engquist, 1977), (Engquist and Majda, 1979) при учете вязкоупругих свойств дано в статье (Arseniev-Obraztsov and Zhukova, 1987). Если в уравнениях теории упругости добавляется член εu_t (компоненты вектора перемещения u , v), то условия первого приближения приобретают вид (для правой границы)

$$u_x + c_p u_x + (\varepsilon/2) u = 0,$$

$$u_t + c_s u_x + (\varepsilon/2) u = 0.$$

Для угловых точек области вычислений условия получаются аналогично — соответствующим поворотом исходной системы координат. Например, для правого нижнего угла

$$u_x + u_y + Mu_t + (\varepsilon/2) Mu = 0,$$

$$v_x + v_y + Mv_t + (\varepsilon/2) Mv = 0,$$

где величина M приведена в (4.33).

В работе (Arseniev-Obraztsov and Zhukova, 1987) получены и условия второго приближения, которые представляют собой некоторое обобщение (4.4). Рассмотрен также случай тела Максвелла-Кельвина-Фойхта.

В статье (Kurduyuk and Likhovsev, 1987) предложен алгоритм для оценки интенсивности сейсмических колебаний водонасыщенных грунтовых оснований сооружений с учетом механизма деформирования многокомпонентных сред. При водонасыщенности более 0,9 грунт представляется состоящим из скелета и поровой жидкости, в которой растворен газ. На искусственных границах используются условия из работы (Lysmer and Kuhlemeyer, 1969), которые в стандартных обозначениях в плоской задаче имеют вид $\sigma = arc_p u_t$, $\tau = brc_s v_t$ (a , b — безразмерные коэффициенты). Рассматривается динамика слоя конечной толщины при гармоническом воздействии на поверхности грунта.

Вариационная постановка задачи динамики упругого и вязкоупругого основания используется в работе (Mirsaidov, 1985). В плоской задаче, так же как в упругой постановке (Mirsaidov et al., 1982), (Mirsaidov and Troyanovsky, 1980), используются одномерные условия на искусственных границах $u_x \pm C_R^{-1} u_t = 0$, где C_R — комплексная скорость волн Рэлея.

Изучению одномерных неотражающих условий для упруговязкопластических сред посвящена работа (Gafurov and Abdrashitov, 1989). Принимаются для исследования поглощающих свойств следующие соотношения:

$$u_t = [P(1 - V)/\rho_0]^{1/2},$$

$$u_t = c(1 - V),$$

$$u_t = -\sigma_x/a\rho_0 c,$$

$$u_t = [|\sigma_x|(1 - V)/\rho_0]^{1/2},$$

где $V = \rho_0/\rho$, $P = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$, c — скорость звука, a — безразмерный параметр. Нагружение производится по различным законам.

Неотражающие условия в задачах распространения поверхностных гравитационных волн

В главе рассматриваются работы, посвященные построению и применению неотражающих условий в задачах распространения поверхностных волн. Для волн цунами строятся нелинейные условия для описания открытых искусственных границ. Предлагается простая процедура для обеспечения поглощения уходящих волн в линейном и нелинейном моделировании двумерной свободной поверхности волн гравитации. Постановка начально-краевой задачи основана на модели невязкой несжимаемой жидкости без учета поверхностного натяжения. На поверхность действует постоянное давление. Учитывается сила тяжести, приводящая к поверхностным волнам.

5.1. Линейные волны на поверхности жидкости

В работе (Chen, 1973) рассматриваются разные условия на концах отрезка для линеаризованной системы уравнений мелкой воды:

$$\begin{aligned} u_t + u_x + \varphi_x &= 0, \\ \varphi_t + \varphi_x + a^2 u_x &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где u и φ — безразмерные скорость и потенциал, a^2 — постоянная. Аналитическое решение, удовлетворяющее некоторым начальным и граничным условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \sin 2\pi [x - (a + 1)t] - \sin 4\pi [x + (a - 1)t], \\ au &= \sin 2\pi [x - (a + 1)t] + \sin 4\pi [x + (a - 1)t]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Подробно изучено решение для следующих вариантов условий на левой и правой границах области.

I. Значения u , φ на обоих концах ($i = 1$ и 39) определяются в соответствии с (5.2). Это переопределенный случай («over-specified case»).

II. То же, что в (5.1). Кроме того применяется локальное сглаживание в точках $i = 2$ и 38 для всех значений t . Например, u_2 рассматривается как $u_2/2 + (u_1 + u_3)/4$. Эти условия также представляют собой переопределенный случай.

III. Значения u , φ определяются в $i = 1$, а в $i = 39$ экстраполируются на основе схемы «upwind» с разностями против потока. При этом имеет место переопределение (over-specification) на левой границе и недоопределение (under-specification) на правой границе. Поэтому данное условие не является хорошо поставленным («not well-posed»).

IV. Значение u определяется на обоих концах, а функция φ экстраполируется с помощью разностей против потока «upwind» на левом и правом концах с применением соответственно уравнений на отрицательной и положительной характеристиках:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (1 - a) \frac{\partial}{\partial x} \right] (\varphi - au) = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (1 + a) \frac{\partial}{\partial x} \right] (\varphi + au) = 0.$$

Эти граничные условия соответствуют случаю хорошо поставленных («well-posed») условий.

V. Значение u определяется на обоих концах, а φ в точке $i = 1$ экстраполируется вдоль отрицательной характеристики с разностями против потока, как в (IV), а в точке $i = 39$ осуществляется экстраполяция с разностям против потока, как в (III). Это определение является также хорошо поставленным.

VI. Значение u определяется на обоих концах, φ экстраполируется назад по времени на обоих концах с применением уравнений характеристик. Это условие является хорошо поставленным.

Решения, полученные с применением этих шести вариантов граничных условий, сравниваются с (5.2). На рис. 5.1, 5.2 приведены решения в виде распределения потенциала φ_j и скорости u_j для указанных способов постановки граничных условий. Максимальное отличие их, за исключением (III), от аналитического решения (5.2) составляет 20–30%. Вариант (III) в области,

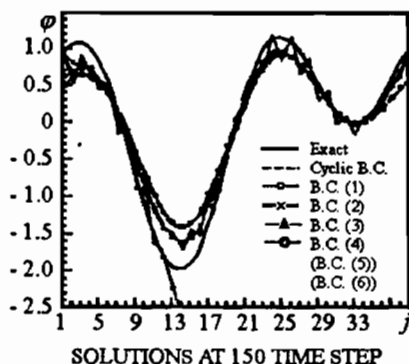


Рис. 5.1. Изменение потенциала для различных способов постановки граничных условий

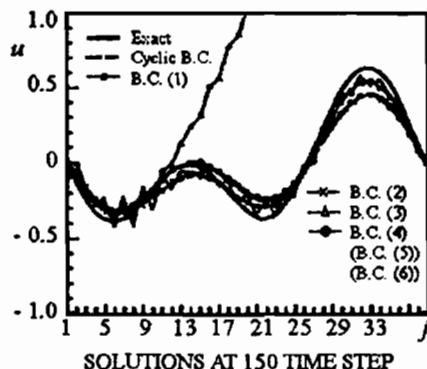


Рис. 5.2. Изменение скорости для различных способов постановки граничных условий

прилегающей к левому краю, удовлетворительно согласуется с аналитическим, в остальной части расходится.

В статье (Bennet, 1976) даны ссылки на предшествующие работы. Если обозначить через $u(x, t)$, $h(x, t)$ — горизонтальную составляющую скорости и возмущение уровня жидкости, а через g и H — гравитационное ускорение и глубину невозмущенной жидкости, то

$$u_t = -gh_x, \quad h_t = -Hu_x. \quad (5.3)$$

Относительно h они приводятся к уравнению $h_{tt} - c^2 h_{xx} = 0$, где $c = (gH)^{1/2}$. Поэтому, как это известно из предыдущих глав, на границе $x = 0$ (области интереса соответствует $x > 0$) неотражающее условие будет иметь вид

$$h_t - ch_x = 0, \quad \text{либо} \quad h + (H/g)^{1/2} u = 0. \quad (5.4)$$

Последнее более удобно при решении системы (5.3).

Рассмотрены три типа волн (Bennet, 1976). Инерционно-гравитационные волны на свободной поверхности — обобщение (5.3) на двумерный случай — описываются системой уравнений

$$h_t = -H(u_x + v_y), \quad u_t - fv = -gh_x, \quad v_t + fu = -gh_y, \quad (5.5)$$

где f — параметр Кориолиса. Показано, что условие излучения

на границе $x = 0$ имеет вид

$$h - c \int_0^t dt' \int_{y-c(t-t')}^{y+c(t-t')} dy' F(y - y', t - t') h_x(0, y', t') = 0, \quad (5.6)$$

где обозначено

$$F(y, t) = \pi^{-1} (c^2 t^2 - y^2)^{-1/2} \cos \left[(f/c) (c^2 t^2 - y^2)^{-1/2} \right].$$

Это условие представляет собой обобщение второго условия (5.4). В работе (Venet, 1976) приводится также обобщение первого условия (5.4).

В случае баротропных волн Росби, вводя функцию тока Ψ , ($u = -\Psi_y$, $v = \Psi_x$), получаем из (5.5)

$$(\Psi_{xx} + \Psi_{yy})_t + \beta \Psi_x = 0. \quad (5.7)$$

Соответствующее условие на границе $x = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi - \int_0^t dt' \int_{y-c(t-t')}^{y+c(t-t')} dt' y F(y - y', t - t') \Psi_x(0, y', t') - \\ - \frac{\beta}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} dy' F(y - y', t - t'') \Psi_x(0, y', t'') = 0, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где обозначено

$$F(y, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^{\infty} J_0(2u\beta y t)^{1/2} \frac{\partial u}{(u^2 - 1)^{1/2}},$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Третьим типом рассмотренных волн являются внутренние гравитационные волны, которые описываются уравнением

$$(W_{xx} + W_{yy} + W_{zz})_{tt} + N^2 (W_{xx} + W_{yy}) = 0, \quad (5.9)$$

где W — вертикальная составляющая скорости, N — частота.

Условие на границе $x = 0$ имеет вид

$$\int_0^t dt' J_0 [N(t-t')] W(0, y, z, t') - \\ - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' F(y-y', z-z', t-t') W_x(0, y', z', t') = 0, \quad (5.10)$$

$$F(y, z, t) = (2\pi)^{-1} (y^2 + z^2)^{-1/2} J_0 [z N t (y^2 + z^2)^{-1/2}].$$

Применение полученных довольно сложных условий (5.6), (5.8), (5.10) в случае ограниченных областей показано в статье (Bennet, 1976) для прямоугольника и круга. Характерно, что эти условия не содержат производных более высокого порядка, чем в уравнении переноса. В этом отношении они перекликаются с условиями (2.30) в главе 2. В статье (Bennet, 1976) отсутствует применение их в численном моделировании. Другие исследования в этом направлении также неизвестны.

В статье (Orlanski, 1976) изучалась конечно-разностная процедура применения условия типа (5.4). В приближении теории мелкой воды ее применению посвящена статья (Camerlengo and O'Brien, 1980).

Условие $u_t + F u_x = 0$ по этой процедуре имеет вид

$$\frac{u_{I-1}^n - u_{I-1}^{n-2}}{2\Delta t} + \frac{F_u}{\Delta x} \left[\frac{u_{I-1}^n - u_{I-1}^{n-2}}{2} - u_{I-1}^{n-2} \right] = 0, \quad (5.11)$$

где I — точка на правой границе, $(I-1)$ — первая внутренняя точка.

Формулы для фазовой скорости имеют вид

$$F_u = 0, \quad \text{если} \quad F_u \leq 0, \\ F_u = \Delta x / \Delta t, \quad \text{если} \quad F_u > \Delta x / \Delta t, \\ F_u = -u_t / u_x, \quad \text{если} \quad 0 < F_u < \Delta x / \Delta t. \quad (5.12)$$

В статье (Camerlengo and O'Brien, 1980) дано видоизменение этой процедуры. Показана ее эффективность в двумерных задачах распространения волн Россби и Кельвина и применимость в изучении крупномасштабных океанических течений.

Численная реализация линеаризованных уравнений теории мелкой воды (5.5) обсуждается также в статье (Häuser et al., 1983). Для вращающейся жидкости имеется аналитическое решение уравнений (5.5). Используется это обстоятельство. Численные эксперименты проводятся с экстраполяциями высоты волны на граничных линиях.

С обзора известных исследований (Gottlieb and Turkel, 1978), (Gustafsson, 1975), (Shapiro and O'Brien, 1970), (Halpern, 1982), (Strikwerda, 1980), (Trefethen, 1984) начата работа (Foreman, 1986). Принимаются линейные уравнения (5.3) теории мелкой воды. В правой части уравнения добавлен член $-\tau^*u$, где τ^* — коэффициент донного трения. Используется процедура (Orlanski, 1976) для отходящих волн, так же, как и в работе (Camerlengo and O'Brien, 1980).

Изучена GKS — устойчивость конечно-разностной системы. Большое внимание обращено на определение коэффициента отражения. Рассматриваются следующие варианты второго условия (5.4) для левого края отрезка:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= -(g/H)^{1/2} h_1^{n+1/2}, \\ u_1^{n+1} &= -(g/H)^{1/2} h_1^{n+1/2} - u_2^n, \\ u_1^{n+1} &= -(g/H)^{1/2} (3h_1^{n+1/2} + h_2^{n-1/2}) - 3u_2^n. \end{aligned} \quad (5.13)$$

В предположении, что установившееся численное решение имеет вид $h_i^n = \sigma_0 \lambda^n k^i$, $u_i^n = \mu_0 \lambda^n k^i$, ($\lambda = e^{i\omega\Delta t}$), для граничных условий (5.13) можно получить коэффициенты отражения (при $\tau^* = 0$):

$$\begin{aligned} R_L &= - \left(1 - \tau \frac{k-1}{\lambda-1} \right) \left(1 - \tau \frac{k^{-1}-1}{\lambda-1} \right)^{-1}, \quad \tau = c^* \frac{\Delta t}{\Delta x}, \\ R_L &= - \left(1 + \frac{k}{\lambda} - 2 \frac{k-1}{\lambda-1} \right) \left(1 + \frac{1}{\lambda k} - 2 \tau \frac{k^{-1}-1}{\lambda-1} \right)^{-1}, \quad \dots, \end{aligned}$$

где c^* — фазовая скорость.

Применены метод Галеркина и метод Кранка-Николсона в реализации конечных элементов (последний — для временного шага). Дан подробный анализ в одномерной задаче.

Дальнейшее обсуждение рассмотренных выше вариантов реализации условия на открытой границе дано в статье (Han et al.,

1983). Приведены различные модификации. Они применены в трех задачах с линеаризованными уравнениями Буссинеска.

Первые две из них посвящены ламинарному обтеканию осесимметричного тонкого тела, где имеются аналитические решения. С ними сравниваются численные решения, полученные с неотражающими условиями и условиями свободного проскальзывания. Третья задача посвящена распространению внутренних волн в линейно стратифицированной жидкости. Задается начальное распределение отклонения плотности от ее среднего значения. По данной задаче также имеется аналитическое решение. Получено хорошее согласие с ним численных решений в прямоугольной области с открытыми границами.

5.2. Нелинейные волны на поверхности жидкости

Нелинейные условия для описания открытых искусственных границ построены в статье (Kim et al., 1988) для волн цунами. Глубина жидкости H считается изменяющейся по осям μ и γ (H_0 — средняя глубина). Введем обозначения: h_0 , L — характерные амплитуда и длина волны, L/c_0 — временной масштаб, $L_\nu = L/\theta$ — масштаб длины по координатной линии ν , $L_H = L/\varphi$ — масштаб длины, связанной с изменением H , $c = (gH)^{1/2}$, $c_0 = (gH_0)^{1/2}$, $\varepsilon = h_0/H_0$, $\delta = H_0/L$, $\rho = fL/c_0$.

В этих обозначениях уравнение Буссинеска имеет вид

$$h_{tt} + \rho^2 h = c^2 h_{\mu\mu} + 2\varphi c c_\mu h_{\mu\nu} \rho^{-1} \rho_\mu c^2 h_\mu + 3\varepsilon (h h_\mu)_\mu + \frac{1}{3} \delta^2 c^6 h_{\mu\mu\mu\mu} + \rho^{-2} \theta^2 c^2 h_{\nu\nu} + 2\rho^{-2} \theta c c_\nu h_\mu. \quad (5.14)$$

Здесь $\mu = x$, $\nu = y$, $p = 1$ в прямоугольной системе, $\mu = r$, $\nu = \theta$, $\rho = r$ — в полярной системе координат.

В первом приближении из (5.14) имеем $h_{tt} = c^2 h_{\mu\mu}$. Как известно из предыдущего, $h_t = -c h_\mu$ (если пренебречь в данном приближении изменением c , т.е. $c \approx c_0$). Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad \int_{t_0}^t dt = -c^{-1} \int_{\mu_0}^{\mu} d\mu. \quad (5.15)$$

Величины ε , δ^2 , ρ^2 , φ^2 , θ^2 , $\theta\varphi$, p_μ/p малы по сравнению с единицей (ε , δ , ρ — характеризуют влияние нелинейностей, фазовой

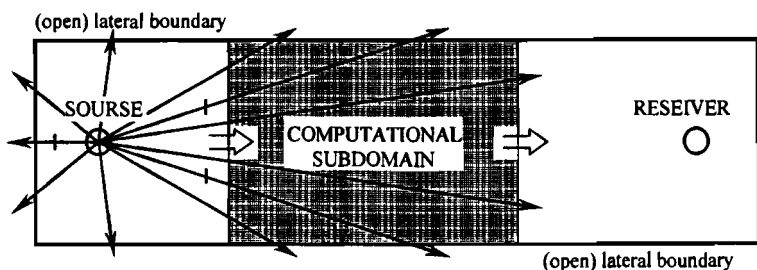


Рис. 5.3. Схематичное представление сетки и расчетной области

дисперсии волны и вращения Земли). Пренебрегая малыми членами и учитывая (5.15), из (5.14) получаем граничное условие (в размерных величинах)

$$h_t + \frac{1}{2} f^2 \int h dt + c h_\mu + \frac{1}{2} c_\mu h + \frac{1}{2p} p_\mu c h + \frac{3}{2} \frac{c}{H} h h_\mu +$$

$$+ \frac{1}{6} H^2 c h_{\mu\mu\mu} + \frac{1}{2p^2 c} \int (c^2 h_\nu)_\nu d\mu = 0. \quad (5.16)$$

Оно может быть представлено также в характеристической форме. Для тестовых задач начальное распределение поверхностной волны принято в виде

$$h = h_0 \exp(-r^2/2\sigma^2), \quad (5.17)$$

где r — радиальная координата с центром в середине источника.

Координатная линия μ проходит по центрам источника и приемника (рис. 5.3). Начальная амплитуда $h_0 = 100$ единиц, глубина воды $H_0 = 5$ км, шаг $\Delta\mu = 2H_0$. Вводится расчетная подобласть, содержащая фронт волны и движущаяся со скоростью $\sqrt{gH_0}$. На боковых и задней границах подобласти происходит излучение части энергии волны.

На передней границе отклонение уровня воды отсутствует ($h = 0$). На достаточно большом расстоянии передней границы подобласти от источника (принято $60\Delta\mu$), согласно (5.17), такое допущение справедливо. Так как подобласть движется со скоростью фронта волны, то он не достигает передней границы. Что касается порождаемых задней кромкой волн (коротких), то они заметно не искажают решение, так как их скорость меньше скорости движения подобласти.

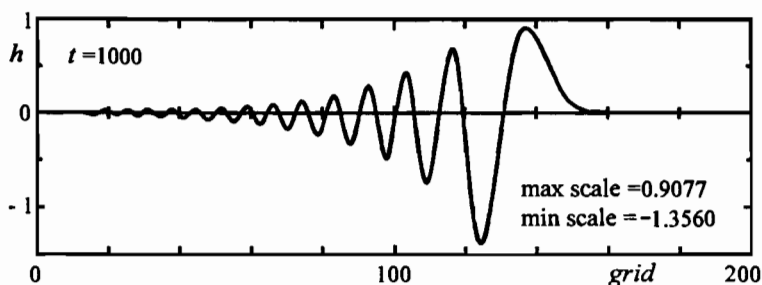


Рис. 5.4. Результаты численного расчета аномального уровня воды вдоль оси μ (геодезическая линия, соединяющая источник и приемник) при наличии дисперсионного эффекта Эйри и эффекта вращения Земли

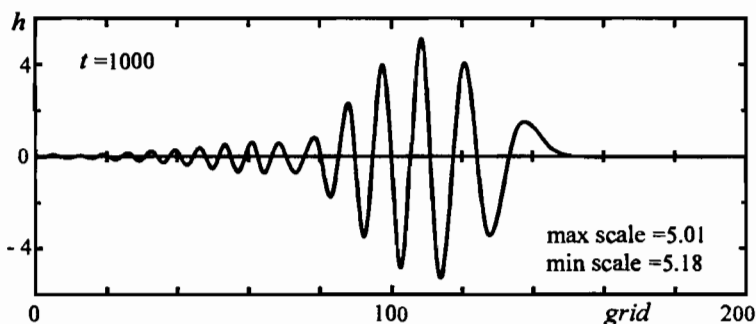


Рис. 5.5. Аномальный уровень воды в численной модели x, y, t (рис. 5.4) с открытыми граничными условиями Зоммерфельда 1-го порядка. Включен эффект демпфирования

Если однако на боковых границах происходит отражение волн, то это приводит к искажению результата. Поэтому в статье (Kim et al., 1988) внимание обращено на использование условия (5.16). Оно приведено к характеристической форме. Длина подобласти была взята равной $200\Delta\mu$. При $t = 0$ источник (5.17) находится в точке $140\Delta\mu$.

На рис. 5.4 приводится решение задачи. В случае постоянной глубины дисперсионные условия (5.16) на открытых границах дают хорошие результаты. На рис. 5.5 приводится результат с применением недисперсионного условия Зоммерфельда (при тех же данных, что для верхней части рисунка). Из них следует, что искажения, вызванные отражением от открытых границ, превышают само решение в расчетной области.

Этот тест подтверждает, что сочетание условий с дисперсионными свойствами на границах и уравнений внутри области с теми же свойствами, очень важно для задач, где имеются дли-

тельные процессы распространения волн. Даже при малых дисперсионных эффектах в граничных условиях, ошибки, порождаемые на границе и распространяющиеся во внутрь области, могут накапливаться. Выявлено также существенное влияние изменения глубины воды на волну цунами.

5.3. Двумерная свободная поверхность волн гравитации

В работе (Clement, 1996) предложена новая простая процедура для поглощения уходящих волн в линейном и нелинейном моделировании двумерной свободной поверхности жидкости.

Постановка начально-краевой задачи основана на модели невязкой несжимаемой жидкости без учета поверхностного натяжения. Действует постоянное давление. Учитываются сила тяжести, приводящая к поверхностным волнам. При указанных допущениях потенциал скорости удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2 \Phi(M, t) = 0, \quad M \in \mathcal{D}, \quad t > 0, \quad (5.18)$$

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \nabla \Phi, \quad M \in \mathcal{F}, \quad t > 0, \quad (5.19)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = -y + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2, \quad M \in \mathcal{F}, \quad t > 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(y, t) = \frac{dx}{dt} = w(t), \quad M \in \mathcal{C}, \quad t > 0, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad M \in \mathcal{B}, \quad t > 0. \quad (5.22)$$

Здесь $\mathcal{F}$ — свободная поверхность, $\mathcal{B}$ — нижняя граница, $\mathcal{C}$ — боковая поверхность, создающая волну, $\mathcal{D}$ — расчетная область (рис. 5.6), D/Dt — лагранжева (полная) производная. Поглощающие условия сначала выбираются в виде условий Неймана на поршне, типа (5.21). Такой выбор объясняется асимптотическими свойствами нестационарных волн, которые должны быть поглощены на стенке $\mathcal{P}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(y, t) = \frac{dx}{dt} = v(t), \quad M \in \mathcal{P}, \quad t > 0. \quad (5.23)$$

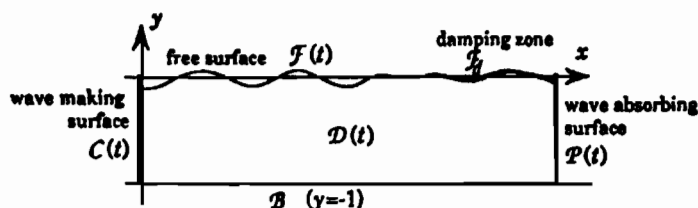


Рис. 5.6. Двумерная область с жидкостью (Clement, 1996)

Таким образом, уравнения (5.18)–(5.23) представляют начально-краевую задачу для потенциала скорости Φ . Функции $v(t)$, $w(t)$ должны быть заданы для $t \geq 0$.

Говорят, что условие (5.23) подобно условию на поршне, т.к. скорость $v(t)$ не является функцией y . В этом состоит главное отличие от широко используемого условия (Orlanski, 1976)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(y, t) = \frac{1}{c(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(y, t), \quad (5.24)$$

где локальная нормальная скорость пропорциональна динамическому давлению и, поэтому, является функцией y .

Предложенные условия на поршне легко применить как для линейного, так и нелинейного случаев. В предположении небольших частот, граничное условие записывается в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_{\mathcal{P}(t)} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] dl, \quad M \in \mathcal{P}, \quad t > 0. \quad (5.25)$$

Условия поглощения

В главе рассматриваются возможности дополнительного ослабления возмущений, приходящих от искусственных границ, посредством введения в рассмотрение искусственного поглощающего слоя, примыкающего к границе расчетной области. Обсуждаются вопросы совместного применения процедур поглощения возмущений в слое около искусственной границы и пропускания их на этой границе без отражения, т.е. использования неотражающих граничных условий. Наряду со случаями линейного уравнения с учетом сопротивления, дается дальнейшее развитие теории искусственного поглощающего слоя вблизи внешних границ расчетной области. Рассматривается иной способ построения поглощающего слоя, двумерности и нелинейности соотношений.

6.1. Волновое уравнение с вязкостным членом

Из предыдущих глав видно, что постановка неотражающих условий на границе расчетной области позволяет значительно уменьшить ее размеры без ущерба точности расчетов. Однако в целях упрощения численной реализации часто приходится ограничиваться низкими приближениями этих условий, что не всегда обеспечивает приемлемой интенсивности отраженных нефизических возмущений от искусственных границ. Необходимость дополнительного ослабления этих возмущений — одна из причин введения в рассмотрение искусственного поглощающего слоя, примыкающего к границе расчетной области (рис. 6.1).

В этом направлении известно мало исследований. Поэтому приведем имеющиеся результаты более подробно, чем в других главах.

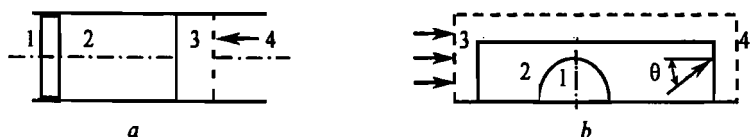


Рис. 6.1. Поглощающий слой на границах расчетной области. Движущийся поршень (а), обтекаемый потоком цилиндр (b). 1 — источник, 2 — ближнее поле, 3 — поглощающий слой, 4 — искусственная граница

В работе (Israeli and Orzag, 1981) одномерное волновое уравнение $u_{tt} = u_{xx}$, ($0 \leq x \leq \infty$) с условием $u(0, t) = a \cos kt$ заменяется системой $v_t = w_x$, $w_t = v_t$, где $v = u_t$, $w = u_x$. Соответствующая система уравнений с учетом демпфирования может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} v_t &= w_x + \mu(x) v_{xx} - \nu(x) v, \\ w_t &= v_x, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\mu(x)$, $\nu(x)$ представляют собой изменяющиеся по координате x коэффициенты вязкости и «сухого» трения.

Обозначим через L длину расчетной области, а через x_0 — длину участка без поглощения, так что вязкий слой имеет толщину $L - x_0$. Примем

$$v(0, t) = \sin kt, \quad (a = -1/k), \quad v(L, t) = 0. \quad (6.2)$$

В случае $\nu(x) = 0$ и

$$\mu(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad \mu(x) = \mu, \quad x_0 \leq x \leq L \quad (6.3)$$

коэффициент отражения в задаче (6.1)–(6.3) получается равным

$$\begin{aligned} R &= -\frac{\alpha - (\bar{i}k) \operatorname{tg} \alpha (L - x_0)}{\alpha + (\bar{i}k) \operatorname{tg} \alpha (L - x)} e^{-2\bar{i}kx_0}, \\ \alpha &= \frac{k}{(1 + \bar{i}\mu k)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Предельные случаи (6.4):

1) если $\mu k \rightarrow \infty$, то $|R| \rightarrow 1$. В этом случае происходит полное отражение волн аналогично постановке условия $v(x_0, t) = 0$;

2) для некоторых фиксированных значений k существуют значения ν , когда $R = 0$, однако даже малые изменения k приводит к появлению больших отражений;

3) если $\mu k \ll 1$, то $|R| \sim \exp[-\mu k^2(L - x_0)]$ с поправкой порядка $\mu k/4$. При $\mu k^2(L - x_0) \gg 1$ отсюда следует малое отражение и область $0 \leq x \leq x_0$ может быть взята большой.

Чтобы достичь отражения волн не более 1% можно выбрать $\mu k/4 < 10^{-2}$ и $\mu k^2(L - x_0) > \ln 100 = 4,6$. Тогда $k(L - x_0) > 100$, так что вязкий слой будет заключать в себе 15 полных длин волн. Следовательно, такой слой будет неэффективным поглотителем волн, особенно в многомерных задачах.

Демпфирование, обеспечиваемое $\nu(x)$, имеет преимущество по сравнению с вязким демпфированием при помощи $\mu(x)$. Это следует из рассмотрения решения для $\nu(x) = \nu$ и $\mu(x) = \mu$:

$$v(x) = \exp(ikt - i\alpha x),$$

где

$$\alpha = k \frac{1 - i\nu/k}{1 + i\mu k}.$$

Анализ показывает, что при $\nu \rightarrow \infty$ с $\mu = 0$, для фиксированного k , $-\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$, так что может быть достигнуто значительное демпфирование. С другой стороны, при $\nu = 0$ и $\mu \rightarrow \infty$ имеем, $-\text{Im } \alpha \rightarrow 0$, что дает лишь небольшое демпфирование.

Рассмотрим случай $\mu(x) = 0$ и

$$\nu(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

$$\nu(x) = \nu_0(x), \quad x_0 \leq x \leq L, \quad (6.5)$$

причем пусть

$$\nu_0(x) = A(n+1) \left(\frac{x - x_0}{L - x_0} \right)^n. \quad (6.6)$$

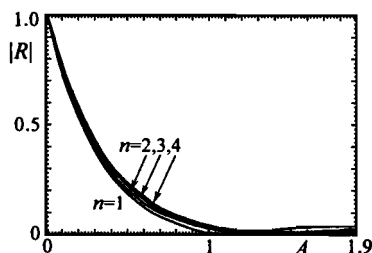


Рис. 6.2. Коэффициент отражения $|R|$ для различных $\nu_0(x)$ из (6.6) для $n = 1, 2, 3, 4$ как функция от A . Здесь $k(L - x_0) = 3\pi$, т.е. в демпфирующем слое укладывается 1,5 длины волны

В соответствии с общей формулировкой для коэффициента отражения,

$$|R| = \left| \frac{\bar{i}kv + v_x}{\bar{i}kv - v_x} \right|_{x=x_0}, \quad (6.7)$$

на рис. 6.2 дана зависимость для $n = 1, 2, 3, 4$. Здесь $k(L - x_0) = 3\pi$, что соответствует расположению в «поглощающем» слое 1,5

длины волны. Заметим, что по прежнему принято $v(L, t) = 0$. Форма (6.6) взята из условия

$$\int_{x_0}^x \nu_0(x) dx = A.$$

Когда $A = 0$, то очевидно $|R| = 1$. При $A > 1$ коэффициент отражения мал. Если взять $k(L - x_0) = 2\pi$ и $k(L - x_0) = \pi$, то на слой будет приходиться, соответственно, одна и половина длины волны (рис. 6.3, рис. 6.4).

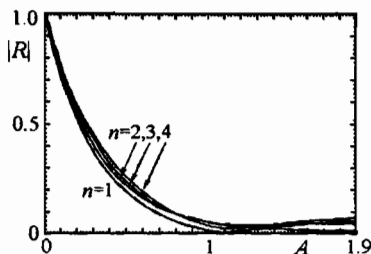


Рис. 6.3. Коэффициент отражения $|R|$ для различных $\nu_0(x)$. Здесь $k(L - x_0) = 2\pi$, т.е. в демпфирующем слое укладывается одна длина волны

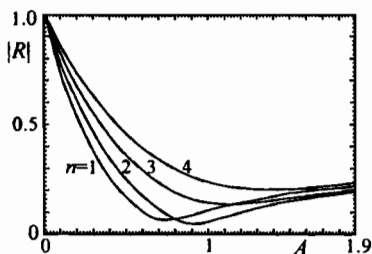


Рис. 6.4. Коэффициент отражения $|R|$ для различных $\nu_0(x)$. Здесь $k(L - x_0) = \pi$, т.е. в демпфирующем слое укладывается 0,5 длины волны

В статье (Kosloff and Kosloff, 1986) волновое уравнение в поглощающей зоне приводится к виду

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - 2\gamma u_t - \gamma^2 u, \quad (\gamma = \text{const}), \quad (6.8)$$

решение которого показывает, что бегущие волны по пространственной координате убывают экспоненциально без изменения формы. На рис. 6.5 представлен расчет распространения акустических волн с применением поглощающих условий (рис. 6.5 *a, b, c, d, e, f*) и без них (рис. 6.5 *g*). Более детальное рассмотрение (6.8) будет осуществлено в следующих параграфах этой главы.

Метод, использованный в работе (Baker et al., 1982), носит название «Numerical Beach», и состоит в реализации идеи (Israeli and Orzag, 1981): к динамическим граничным условиям (5.20) или к кинематическим условиям (5.19) или к обоим добавляется диссипативный член в ограниченной области свободной поверхности, прилегающей к границе $\mathcal{P}$ (рис. 5.6). В этом случае, проходя через демпфирующую зону, волна заметно теряет свою энергию. Этот метод иногда называют как «слой губки» («sponge

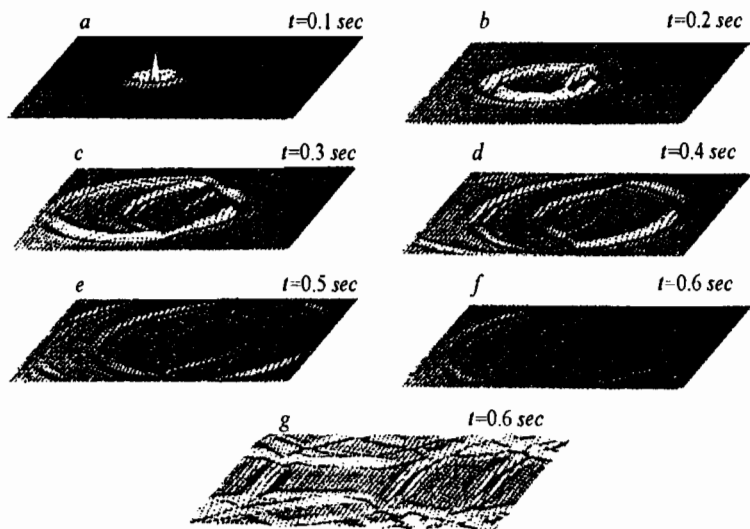


Рис. 6.5. Амплитуды нестационарных акустических волн с поглощающими граничными условиями (a)–(f). Распределение волн при $t = 0, 6$ с, полученное без поглощающих граничных условий (g)

layer») (Israeli and Orzag, 1981) или «numerical beach» (Cointe, 1989).

После внесения этих новых диссипативных членов общая форма модифицированных условий (5.19), (5.20) будет следующей:

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \nabla\Phi - \mu(x)\mathbf{X}, \quad M \in \mathcal{F}, \quad t > 0, \quad (6.9)$$

$$\frac{D\Phi}{Dt} = -y + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nu(x)F, \quad M \in \mathcal{F}, \quad t > 0. \quad (6.10)$$

6.2. Комбинация условий поглощения и излучения

Вопрос совместного применения процедур поглощения возмущений в слое около искусственной границы и пропуска их на этой границе без отражения представляется настолько важным, что требует отдельного рассмотрения, хотя он разработан не достаточно детально. Дело в том, что часто, особенно в многомерных задачах, с помощью неотражающих условий не удается

избавиться от возмущений, распространяющихся от искусственных границ во внутрь области. Тогда нужно погасить их с помощью введения вязкого слоя. Эту комбинацию нужно осуществлять с осторожностью, так как, например, при $\mu(x) = 0$, $\nu(x) = \nu$ неотражающим условием является уже не уравнение $u_x + \bar{i}ku = 0$, а

$$u_x + \bar{i}u\sqrt{k^2 - \bar{i}k\nu} = 0,$$

или, при малом значении ν ($(\nu/2k)^2 \ll 1$), уравнение

$$u_x + \bar{i}ku + \frac{1}{2}\nu u = 0.$$

В статье (Israeli and Orzag, 1981) применительно к волновому уравнению рассмотрена комбинация с использованием оператора демпфирования отраженных волн, $\nu(x)(u_x + u_t)$, или в двумерном случае — $\nu(x)(u_x + Lu)$. Здесь $L^2 = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial y^2$.

Модифицированное уравнение в одномерном случае представляется в виде

$$u_{tt} = u_{xx} - \nu(x)(u_x + u_t), \quad (6.11)$$

а в двумерном случае (если исключить множитель $\exp(i\omega t)$) в виде

$$u_{xx} + m^2 u - \nu(x)(u_x + \bar{i}\bar{m}u) = 0, \quad (6.12)$$

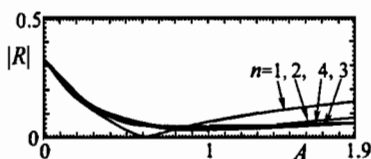
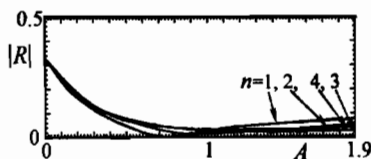
где $m^2 = \omega^2 - l^2$, $\bar{m}$ — некоторое приближение к m . Имеется рассуждение о выборе $\bar{m}$.

Лучшие результаты можно получить, комбинируя (6.12) с условием излучения в виде

$$\begin{aligned} u_{xx} + [1 - k(x)m^2 + k(x)\bar{m}^2]u - \nu(x)(\eta u_x + \bar{i}tu) &= 0, \\ u_x + \bar{i}tu &= 0, \quad (x = L). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Параметр η используется для лучшего фильтрования возмущений. Функции k и ν принимаются в виде ($x_0 \leq x \leq L$)

$$\begin{aligned} k(x) &= B \left(\frac{x - x_0}{L - x_0} \right)^n, \\ \nu(x) &= A \frac{(x - x_0)^n (L - x)}{(L - x_0)^{n+2}} (n+1)(n+2). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Рис. 6.6. Коэффициент отражения $|R|$ в зависимости от A Рис. 6.7. Коэффициент отражения $|R|$ в зависимости от A

Исходя из формулы типа (6.7) (вместо ν и k теперь u и m), в статье (Israeli and Orzag, 1981) построены зависимости коэффициента отражения от интенсивности поглощения A . При $m(L - x_0) = 2\pi$, $B = 0$, $m = 2\bar{m}$, $\eta = 0$ (т.е. нет направленного фильтрования решений) зависимость показана на рис. 6.6.

На рис. 6.7 показаны результаты при $B = 1$ и $\eta = 1/2$ (остальные параметры те же, что выше). Следовательно, учет функции $k(x)$ и использование фильтрующих свойств (6.13) обеспечивает небольшие отражения от искусственной границы.

Приводятся также результаты, относящиеся к уравнению Клейна-Гордона. Используются фильтрующие свойства при $\eta = 1$, функция $k(x) \equiv 0$.

6.3. Уравнения Шредингера и Максвелла с вязкостным членом

В статье (Israeli and Orzag, 1981) в линейное уравнение Шредингера вводится «вязкостный» член μu_{xx} , так что оно приобретает вид

$$u_t = (\bar{i} + \mu) u_{xx} + f(x, t), \quad (\bar{i} = \sqrt{-1}). \quad (6.15)$$

Анализ его тесно связан с тем, что было изложено в первом разделе этой главы. Для линейного одномерного уравнения Шредингера поглощающее условие построено в статье (Kosloff and Kosloff, 1986). Оно представляет собой аналогию условия (6.8) в акустических задачах.

Нелинейный случай рассмотрен в статье (If et al., 1987). Поглощающий член принят в виде $\nu(x)u$, и задача формулируется следующим образом:

$$\bar{i}u_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u + \bar{i}\nu(x)u = 0, \quad (6.16)$$

$$u(-L/2, t) = u(L/2, t), \quad u_x(-L/2, t) = u_x(L/2, t).$$

Задается начальное значение $u(x, 0) = u_0$. В отличие от (6.15) коэффициент $1/2$ в уравнении возникает из-за разного обезразмеривания. На рис. 6.8 показана принятая функция поглощения

$$\nu(x) = \nu_0 \left\{ \sec h^2 \left[\alpha \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] + \sec h^2 \left[\alpha \left(x + \frac{L}{2} \right) \right] \right\}. \quad (6.17)$$

Сначала находится точное решение нелинейной части уравнения

$$\bar{i}u_t + |u|^2 u + \bar{i}\nu(x)u = 0, \quad (6.18)$$

которое имеет вид

$$u = u_0 \exp \left[\frac{\bar{i}u_0^2}{2\nu} (1 - e^{-2\nu t}) - \nu t \right].$$

Линейная часть решается с помощью преобразования Фурье. Обращение производится численно с шагами $\Delta x = 0,1$ и $\Delta t = 0,005$. Приняты параметры $L = 12,8$, $\nu_0 = 20$, $\alpha = 1$.

Для начальной функции,

$$u_0 = (1 + 0,6 \cos 7x) \sec hx,$$

на рис. 6.9 приведены результаты: a — без поглощения ($\nu_0 = 0$), b — с поглощением. Достигнуто эффективное поглощение на границах.

Иной подход состоит в том, что искомая функция $\tilde{u}(x, t)$ вблизи границы принудительно убав-

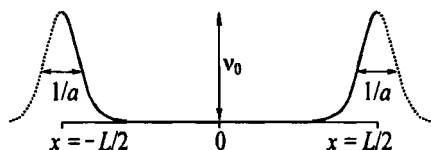


Рис. 6.8. Функция поглощения $\gamma(x)$ приводит к потерям на периодических границах при $x = \pm L/2$. Параметры ν_0 и α в 6.17 должны быть выбраны так, чтобы рассеяние от поглощающих стенок было мало

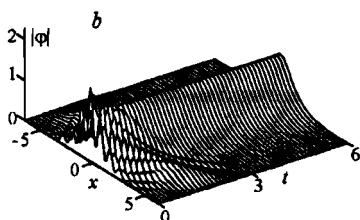
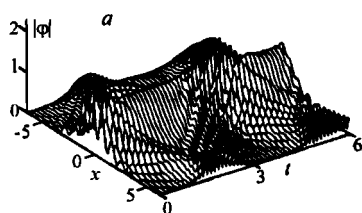


Рис. 6.9. Эволюция решения, полученного с помощью классических (а) и поглощающих (б) условий. Параметры $L = 12,8$; $\nu_0 = 20$; $\alpha = 1$

ляется до нуля введением «masking» функции $f(a)$ (Tajma and Lee, 1981):

$$\tilde{u}(x, t) = f(x) u(x, t).$$

Например, $f(x) = 2(x/x_0) - (x/x_0)^2$, ($0 \leq x < x_0$); $f(x) = 1$, ($x \geq x_0$). Этот прием был использован при решении уравнений Масквелла:

$$-i\omega B = c(fE)_x, \quad -i\omega E = cB_x.$$

Заметим, что в последнее уравнение функция $f(x)$ не входит. Для электрического поля имеем

$$(fE)_{xx} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = 0.$$

Решение данного уравнения показывает эффективность приема. Дано распространение его на двумерную задачу.

6.4. Более общая модель поглощающего слоя

В предыдущих разделах этой главы изучен случай линейного уравнения с сопротивлением. Соответствующие работы (Israeli and Orzag, 1981), (Kosloff and Kosloff, 1986) и родственные исследования рассмотрены в обзорах (Ilgamov, 1985a), (Ilgamov, 1990b). В данном и следующем разделах, следуя работе (Ilgamov, 1990a), дается дальнейшее развитие теории искусственного поглощающего слоя вблизи внешних границ расчетной области. Развитие теории касается иного способа построения поглощающего слоя, двумерности и нелинейности соотношений.

Рассмотрим одномерное уравнение переноса $u_\tau + u_\xi = 0$, решение которого $u = f(\tau - \xi)$, как известно, описывает возмущение, движущееся без изменения формы и интенсивности в сторону возрастания значений ξ . Здесь $\xi = \lambda x$, $\tau = \lambda a_0 t$; x , t — размерные длина и время, λ^{-1} — мера длины, a_0 — скорость волны. Введем в это уравнение член типа сухого трения $\nu(\xi) u(\xi, \tau)$ с переменным по ξ коэффициентом ($\nu(\xi) > 0$):

$$u_\tau + u_\xi + \nu(\xi) u = 0. \quad (6.19)$$

Приняв $u = f(\tau - \xi) F(\xi)$, из (6.19) получим относительно функции $F(\xi)$ уравнение

$$F_\xi + \nu(\xi) F = 0,$$

решение которого имеет вид $F = F_0 \exp(-\int \nu d\xi)$. Повторив сказанное относительно уравнения переноса $u_\tau - u_\xi = 0$ с тем же дополнительным членом $\nu(\xi) u(\xi, \tau)$,

$$u_\tau - u_\xi + \nu(\xi) u = 0, \quad (6.20)$$

будем иметь $u = g(\tau + \xi) G(\xi)$, $G = G_0 \exp(\int \nu d\xi)$.

Таким образом, решения уравнений (6.19) и (6.20) при переменном $\nu(\xi)$ и постоянном коэффициенте ν , соответственно, будут иметь вид

$$u = F_0 \exp\left(-\int \nu d\xi\right) f(\tau - \xi), \quad u = F_0 e^{-\nu\xi} f(\tau - \xi), \quad (6.21)$$

$$u = G_0 \exp\left(\int \nu d\xi\right) g(\tau - \xi), \quad u = G_0 e^{\nu\xi} g(\tau - \xi). \quad (6.22)$$

Согласно (6.21) возмущения убывают при возрастании значений ξ . В соответствии с (6.22) возмущения, распространяющиеся в сторону убывания значений ξ , также ослабевают.

Одномерное волновое уравнение, дающее решение с затуханием для волны, движущейся в сторону возрастания ξ , и неизменной амплитудой для волны, движущейся в сторону уменьшения ξ ,

$$u = F_0 \exp\left(-\int \nu d\xi\right) f(\tau - \xi) + G_0 g(\tau + \xi), \quad (6.23)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} + \nu(\xi)\right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \nu(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

И, наоборот, решению

$$u = F_0 f(\tau - \xi) + G_0 \exp\left(\int \nu d\xi\right) g(\tau + \xi) \quad (6.25)$$

соответствует уравнение

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} + \nu(\xi)\right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \nu(\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

В случае постоянных коэффициентов искусственного поглощения для прямой (ν_1) и обратной (ν_2) волн уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} + \nu_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} + \nu_2 \right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} +$$

$$+ (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial u}{\partial \tau} - (\nu_1 - \nu_2) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu_1 \nu_2 u = 0. \quad (6.27)$$

Согласно (6.21) и (6.22) его решение имеет вид

$$u = F_0 e^{-\nu_1 \xi} f(\tau - \xi) + G_0 e^{\nu_2 \xi} g(\tau + \xi). \quad (6.28)$$

Если $\nu_1 = \nu$, $\nu_2 = 0$ и $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \nu$, то из (6.27) получаются уравнения (6.24) и (6.26). При $\nu_1 = \nu_2$ (6.27) совпадает с уравнением, полученным иным путем в работе (Kosloff and Kosloff, 1986). Оно применяется в ней для численного анализа распространения возмущения при переменном значении коэффициента поглощения.

В работе (Israeli and Orzag, 1981) рассмотрена система

$$u_\tau = \omega_\tau - \nu(\xi) u, \quad \omega_\tau = u_\xi. \quad (6.29)$$

Если ее привести к уравнению относительно u , то

$$u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} + \nu(\xi) u_\tau = 0.$$

Оно не совпадает с уравнением (6.27) и уравнением из работы (Kosloff and Kosloff, 1986) (где $\nu_1 = \nu_2 = \text{const}$), хотя тоже дает затухание решений. А именно здесь функции F и G имеют следующий вид ($\nu = \text{const}$):

$$F = F_0 \exp \left(- (\sqrt{1 + \nu} - 1) \xi \right),$$

$$G = G_0 \exp \left((\sqrt{1 + \nu} - 1) \xi \right). \quad (6.30)$$

По сравнению с показателем затухания ν в решении (6.28) в (6.30) показатели равны: $\nu/2$ при $\nu \ll 1$ и $\nu^{1/2}$ при $\nu \gg 1$. Кроме того, недостаток введения дополнительного члена в (6.29) состоит в том, что нельзя получить направленного фильтрования решений, как в (6.24), (6.26), (6.27).

Следуя изложенному выше подходу, вместо (6.29) нужно записать

$$u_\tau - \omega_\xi + \nu u = 0, \quad \omega_\xi - u_\xi + \nu \omega = 0, \quad (6.31)$$

что соответствует уравнению (6.27) при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Рассмотрим пример, в котором окрестность $\xi = 0$ является областью интереса (ближним полем), а искусственной границей служит сечение $\xi = 1$ ($\lambda^{-1} = L$, $x = L$). В момент времени $\tau = 0$ в сечении $\xi = 0$ проходит фронт прямой волны интенсивности F_0 , которой за время $\tau = 1$ ($t = L/a_0$) доходит до правого без изменения. Таким образом, мы принимаем, что прямая волна распространяется без поглощения.

Пусть отраженная от $\xi = 1$ волна распространяется с поглощением по закону

$$\nu = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq 0,9 \\ \nu_0 (\xi - 0,9), & 0,9 < \xi \leq 1. \end{cases} \quad (6.32)$$

Ввиду неоднородности поглощающего слоя в нем будут формироваться возмущения, распространяющиеся снова в сторону возрастания ξ . Последние не будем рассматривать, полагая, что поглощающий слой узок по сравнению с шириной всей области и затухание в целом мало.

Если u представляет собой скорость сжимаемой жидкости, а возбуждения линейной волны производится ударом плоского поршня в сечении $\xi = 0$, то $F_0 = \rho_0 a_0 u_0$, $\lambda = \rho_0 / M$, где ρ_0 , a_0 — невозмущенная плотность и скорость звука в жидкости; M , u_0 — масса и скорость удара поршня по жидкости (Pavlov and Ilgarnov, 1974).

Решение поставленной задачи в соответствии с (6.25) и (6.32) выражается следующим образом (учтено, что $\lambda L = 1$):

$$\begin{aligned} u &= 0, & (\tau - \xi < 0; 0 < \xi \leq 1; 0 < \tau < 1), \\ u &= F_0 \exp[-(\tau - \xi)], & (\tau - \xi \geq 0; 0 \leq \xi < 1; 0 < \tau \leq 1), \\ u &= F_0 \exp[-(\tau - \xi)] + G_1 \exp[\nu_0 \xi (\xi/2 - 0,9) - (\tau + \xi - 2)], & (0 \leq \tau - \xi \leq 0,2; 0 \leq \tau + \xi - 2 < 0,1; \\ & & 0,9 \leq \xi \leq 1; 1 \leq \tau \leq 1,1), \\ u &= F_0 \exp[-(\tau - \xi)] + G_0 \exp[-(\tau + \xi - 2)], & (0,2 < \tau - \xi \leq 1,1; 0 < \tau + \xi - 2 < 0,9; \\ & & 0 \leq \xi < 0,9; 1,1 \leq \tau \leq 2). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Так как в точке $\xi = 0,9$ решения для u должны совпадать, то имеем $G_0 = G_1 \exp(-0,4\nu_0)$.

В случае выполнения, например, $u = 0$ ($\xi = 1$) получаем $G_1 = F_0 \exp(-0,4\nu_0)$. Следовательно, последнее выражение (6.33) приобретает вид

$$u = F_0 \left(e^{-(\tau-\xi)} - e^{-0,005\nu_0} e^{-(\tau+\xi-2)} \right),$$

откуда заключаем, что при $\nu_0 = 120$ отношение интенсивностей отраженной волны в области интереса $\xi = 0$ ($\tau = 2$) и исходной волны в той же точке $\xi = 0$ при $\tau = 0$ равно $-e^{-0,6} \approx -0,5$. Таким образом, принятые характеристики поглощающего слоя вдвое уменьшают интенсивность отраженной волны.

Рассмотрим отражение на границе $\xi = 1$ ($i = I$) в случае экстраполяции первого порядка:

$$u_{I-2}^n - 2u_{I-1}^n + u_I^n = 0,$$

где $i = I - 1$; $i = I - 2$ соответствует $\xi = 1 - \Delta\xi$; $1 - 2\Delta\xi$. Подставляя сюда значения u в указанных точках, получаем

$$G_1 = -F_0 \frac{(1 - 2e^{-\Delta\xi} + e^{-2\Delta\xi}) e^{0,4\nu_0}}{1 - 2e^{-\nu_0(0,1-0,5\Delta\xi)\Delta\xi+\Delta\xi} + e^{-2\nu_0(0,1-\Delta\xi)\Delta\xi+2\Delta\xi}}.$$

Ограничиваясь разложением экспоненциальной функции в ряд с включением членов порядка $(\Delta\xi)^2$, находим, что

$$G_1 = -F_0 \frac{e^{0,4\nu_0}}{1 + 0,8\nu_0 + 0,01\nu_0^2}.$$

Учитывая вышеприведенное соотношение между G_1 и G_0 , заключаем, что в области интереса отношение интенсивностей отраженной и исходной волн составляет

$$(1 + 0,8\nu_0 + 0,01\nu_0^2)^{-1} e^{-0,005\nu_0}.$$

Таким образом, здесь первый сомножитель указывает степень ослабления возмущений за счет взаимодействия поглощающего слоя и «мягких» условий на границе $\xi = 1$, а второй сомножитель — за счет поглощения в рассматриваемом слое ($0,9 \leq \xi \leq 1$).

Отметим, что экстраполяция нулевого порядка $u_{I-1}^n = u_I^n$ дает в указанном отношении интенсивностей особенность

$(1 - 0,1\nu_0)^{-1}$. Поэтому для ослабления отражений необходимо предусмотреть дополнительные меры.

Легко показать, что это отношение интенсивностей для неотражающего условия

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{u_I^{n+1} - u_I^n}{\Delta \tau} + \frac{u_I^n - u_{I-1}^n}{\Delta \xi} = 0, \quad \begin{matrix} (\xi = 1) \\ (i = I) \end{matrix} \quad (6.34)$$

имеет порядок

$$\frac{1 - \Delta \tau / \Delta \xi}{1 - \Delta \tau / \Delta \xi + (1 - 0,05\nu_0) 4 / \Delta \xi + (0,8 + 0,01\nu_0) \nu_0} e^{-0,005\nu_0}.$$

При конечном $\Delta \tau / \Delta \xi$ и $\Delta \xi \rightarrow 0$ это отношение стремится к нулю.

Обобщение уравнений типа (6.24), (6.26), (6.27) на двумерный случай произведем следующим образом. Вместо (6.24) можно записать

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}} + \nu(\xi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}} \right) u = \\ & = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}} \right) u = 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Как известно, уравнения миграции волн или неотражающие условия первого и второго приближений получаются из выражений в скобках при ν в (6.35). А именно, первым приближением, получающимся пренебрежением вторыми производными по η по сравнению со вторыми производными по ξ , является $(u_\tau - u_\xi)$. Приближенный учет вклада второй производной по η под квадратным корнем в (6.35) дает второе приближение $(u_{\tau\tau} - u_{\tau\xi} - u_{\eta\eta}/2)$. Соответственно, исходя из (6.35) можно записать следующие два приближения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0, \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Могут быть записаны последующие приближения, однако каждое из них приводит к дальнейшему повышению порядка дифференциального уравнения (Ilgamov, 1985a), (Ilgamov, 1990a).

Таким образом, согласно первому уравнению (6.36) у двумерной волны поглощение происходит только в направлении оси ξ (в сторону ее возрастания). Если направление движения волны составляет с осью угол θ (рис. 6.1 б) и

$$u = \exp [\bar{i} (\tau - \xi \cos \theta + \eta \sin \theta)],$$

то затухание волны будет лишь при малых значениях угла θ .

Согласно второму уравнению (6.36) некоторое поглощение происходит и в направлении оси η . Соответствующие уравнение миграции иногда называют 15-градусным уравнением (Hirt et al., 1974). Следовательно, эффективное поглощение может быть в пределах углов $\theta = \pm 15^\circ$.

Для волн, распространяющихся с поглощением в левую сторону под углом $|\theta| < 15$, имеем вместо (6.36)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Приведем уравнение для описания волн, распространяющихся преимущественно по оси η (с затуханием — в сторону возрастания η , без затухания — в сторону уменьшения η):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.38)$$

В случае искусственного поглощения волн в обоих направлениях, при постоянных коэффициентах ν_1 и ν_2 , имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}} + \nu_2 \right) u = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \nabla^2 u + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial u}{\partial \tau} - \\ - (\nu_1 - \nu_2) u \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}} + \nu_1 \nu_2 u = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в первом приближении получается (6.27). При $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, независимо от значения указанного выше угла θ направления волны, следует уравнение

$$u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2\nu u_\tau + \nu^2 u = 0.$$

6.5. Уравнения газовой динамики

Далее введем член, учитывающий поглощение типа сухого трения, в систему уравнений газовой динамики (в одномерном случае):

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \rho^{-1} p_x &= 0, \\ \rho_t + \rho u_x + u \rho_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

По аналогии с (6.19) можно добавить член $\nu(x)u$ в первое уравнение (6.39) (Игатов, 1990а). При этом поставим требование, чтобы линеаризация уравнений относительно возмущений u , p , ρ приводила к волновым уравнениям типа (6.24), (6.26), (6.27), имеющим точное решение (с затуханием). Примем

$$\begin{aligned} u_* &= u_0 + u(x, t), \quad p_* = p_0 + p(x, t), \\ \rho_* &= \rho_0 + \rho(x, t), \quad (p \ll p_0, \quad \rho \ll \rho_0). \end{aligned}$$

С учетом (6.40) и закона $p_*/p = (\rho_*/\rho)^\gamma$, а также следующего из них соотношения $p = a_0^2 \rho$ ($a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$), получаем (с добавлением в первое уравнение (6.39) члена $\nu(x)u$)

$$\begin{aligned} u_t + u_0 u_x + \left(\frac{a_0^2}{\rho_0} \right) \rho_x + \nu \left(u - u_0 + u_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right), \\ \rho_t + u_0 \rho_x + \rho_0 u_x = 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Полагая $u_0 = 0$, (4.3) можно представить в виде

$$u_{tt} - a_0^2 u_{xx} + \nu u_t = 0,$$

что совпадает с (6.27) при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ($\tau = \lambda a_0 t$, $\xi = \lambda x$).

Поэтому будем исходить из системы (6.39), преобразованной к характеристической форме:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (a_* + u_*) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(u + \frac{2a}{\gamma - 1} \right) &= 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - (a_* - u_*) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(u - \frac{2a}{\gamma - 1} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

где в соответствии с (6.40) предполагая, что u_0, p_0, ρ_0 постоянны по t и x ,

$$a = a_* - a_0, \quad a_* = a_0 (\rho_*/\rho_0)^{(\gamma-1)/2}. \quad (6.42)$$

Решение (6.41) представляется в виде

$$u + \frac{2a}{\gamma-1} = F_0 f[(a_* - u_*)t - x],$$

$$u - \frac{2a}{\gamma-1} = G_0 g[(a_* - u_*)t + x],$$

где f и g — инварианты Римана. В работе (Ilgamov, 1985a), на основе этих решений предложены неотражающие условия на искусственных границах. Например, на правой границе этим условием является равенство $G_0 = 0$ ($F_0 \neq 0$), откуда

$$u - 2a/(\gamma-1) = 0,$$

или, с учетом (6.40) и (6.42),

$$\begin{aligned} u_* = u_0 + \frac{2}{\gamma-1}(a_* - a_0) &= u_0 \frac{2a_0}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right] = \\ &= u_0 - \frac{2a_0}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Положив $F_0 = 0$ ($G_0 \neq 0$), получим для левой границы

$$u + \frac{2a}{\gamma-1} = 0.$$

Вернемся к вопросу о введении в рассмотрение затухания. В квадратных скобках первого уравнения (6.41) добавим член $+\nu_1$, а второго — член $+\nu_2$. Тогда после сложения и вычитания

уравнений (6.41) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u_* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2a_*}{\gamma - 1} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\nu_1}{2} \left(u + \frac{2a}{\gamma - 1} \right) + \frac{\nu_2}{2} \left(u - \frac{2a}{\gamma - 1} \right) = 0, \\ \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\partial a}{\partial t} + a_* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2u}{\gamma - 1} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\nu_1}{2} \left(u + \frac{2a}{\gamma - 1} \right) - \\ - \frac{\nu_2}{2} \left(u - \frac{2a}{\gamma - 1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Уравнения в переменных u, p, ρ можно получить отсюда использованием выражения для a_* и a из (6.42) и с учетом

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a_*}{\partial x} = \frac{(\gamma - 1) a_0}{2\rho_0} \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^{(\gamma-3)/2} \frac{\partial \rho_*}{\partial x} = \\ = \frac{(\gamma - 1)}{2\rho_0 a_0} \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^{-(\gamma+1)/2} \frac{\partial \rho_*}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a_*}{\partial t} = \frac{(\gamma - 1) a_0}{2\rho_0} \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^{(\gamma-3)/2} \frac{\partial \rho_*}{\partial t}.$$

Опуская далее нижние индексы $*$ и подразумевая под u, p, ρ полные значения, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} (u - u_0) + \\ + \frac{a_0 (\nu_1 - \nu_2)}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} - 1 \right] = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho_0 (\nu_1 - \nu_2)}{2a_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(3-\gamma)/2} (u - u_0) + \\ + \frac{\rho_0 (\nu_1 + \nu_2)}{\lambda - 1} \left[\frac{\rho}{\rho_0} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(3-\gamma)/2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Так как члены с коэффициентами ν_1 и ν_2 носят искусственный характер и вводятся для поглощения нефизических отраже-

ний от границ расчетной области при достаточно произвольных значениях ν_1 и ν_2 , то указанные члены в (6.44) можно несколько упростить. Для этого с учетом (6.40) произведем следующую линеаризацию:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2} - 1 &\approx \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right), \\ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(3-\gamma)/2} (u - u_0) &\approx (u - u_0), \\ \left[\frac{\rho}{\rho_0} - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(3-\gamma)/2}\right] &\approx \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right). \end{aligned}$$

Итак, в указанном приближении система (6.44) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} (u - u_0) + \frac{a_0 (\nu_1 - \nu_2)}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + & \\ + \frac{\rho_0 (\nu_1 - \nu_2)}{2a_0} (u - u_0) + \frac{\rho_0 (\nu_1 + \nu_2)}{\lambda - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Из (6.43), (6.44), (6.45) следует, что коэффициенты поглощения входят не только в уравнение движения, но и неразрывности. При $\nu_2 = 0$ получаем систему уравнений, описывающую распространение возмущений без поглощения в стороны убывания x и с поглощением при распространении в стороны возрастания x . В указанных случаях в (6.45) члены, учитывающие поглощение, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\nu_1}{2} \left[u - u_0 + \frac{2a_0}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \right], \\ \frac{\rho_0 \nu_1}{2a_0} \left[u - u_0 + \frac{2a_0}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \right], \\ \frac{\nu_2}{2} \left[u - u_0 + \frac{2a_0}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right) \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\rho_0 \nu_2}{2a_0} \left[u - u_0 + \frac{2a_0}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \right].$$

Особо простой вид приобретают рассматриваемые члены в (6.45) при $\nu_1 = \nu_2 = \nu$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu (u - u_0) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu (\rho - \rho_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Отсюда путем полной линеаризации уравнений (при $u_0 = 0$, а для возмущений $p = a_0^2 \rho$) можно получить волновое уравнение (6.27), где нужно положить $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Систему уравнений в недивергентной форме (6.45) можно привести к форме законов сохранения путем умножения первого уравнения на ρ , второго — на u и сложения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \\ + \frac{\rho_0}{2} \left[(\nu_1 + \nu_2) \frac{\rho}{\rho_0} + (\nu_1 - \nu_2) \frac{u}{a_0} \right] (u - u_0) + \\ + \frac{a_0}{2} \left[(\nu_1 - \nu_2) \frac{\rho}{\rho_0} + (\nu_1 + \nu_2) \frac{u}{a_0} \right] (\rho - \rho_0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\rho_0}{2a_0} (\nu_1 - \nu_2) (u - u_0) + \\ + \frac{1}{2} (\nu_1 + \nu_2) (\rho - \rho_0) &= 0. \end{aligned}$$

Полагая в (6.47) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, получаем уравнения, соответствующие системе (6.46).

Таким образом, дан способ построения поглощающего слоя вблизи искусственных границ расчетной области. Введение такого слоя наряду с применением неотражающих условий обеспечивает возможность уменьшения расчетной области без ухудшения точности в ближнем поле. Получены одномерные и двумерные уравнения для описания распространения волн, а также аналог нелинейных уравнений газовой динамики.

Применение указанных условий в задаче обтекания газом кругового цилиндра дано в статьях (Ilgamov and Tukmakov, 1996), (Tukmakov, 1993).

6.6. Некоторые модельные неотражающие условия

Название этого раздела является весьма условным. В нем изложены работы, в которых используются те или иные соображения физического характера. Отметим, что некоторые подходы могут быть отнесены при ближайшем рассмотрении к приведенным выше классам граничных условий на искусственных границах.

В (Bushby and Timpson, 1967) применен метод «вязкого демпфирования» для поглощения приходящих на внешнюю границу возмущений. Реализация этого метода требует размещения большого числа расчетных точек вблизи границы.

В работе (Lysmer and Kuhlemeyer, 1969) предполагается, что граница расчетной области снабжена системой амортизаторов, которые поглощают волны. Демпфирование зависит от частоты волн и угла их падения.

Если граничную ячейку представить в виде пружины с жесткостью K , коэффициентом затухания C , массой m и массой на границе m_0 , то коэффициент отражения R имеет вид (Hanson and Petschek, 1977)

$$R = \frac{S(1 - 2m_0/m) + \bar{i}(\sqrt{1 - S^2} - C/\sqrt{mK})}{-S(1 - 2m_0/m) + \bar{i}(\sqrt{1 - S^2} + C/\sqrt{mK})}, \quad (6.48)$$

где $\bar{i} = \sqrt{-1}$, $S = \sin(1/2\lambda)$, $\lambda = \bar{\lambda}/2\pi\Delta x$, $\omega = 2\sqrt{K/m} \sin(1/2\lambda)$, $\bar{\lambda}$ — волновое число. В случае равномерной сетки граничная масса m_0 может быть принята равной половине внутренней массы m . Для $2m_0 = m$ из (6.48) получаем

$$R = \frac{\cos(1/2\lambda) - \cos(1/2\lambda_0)}{\cos(1/2\lambda) + \cos(1/2\lambda_0)}. \quad (6.49)$$

Здесь λ_0 есть значение λ в случае неотражающей границы. На рис. 6.10 приведен коэффициент отражения R (6.49) для значений $2\pi\lambda_0 = 5$ и 10.

Далее с использованием данных работы (Petschek and Hanson, 1968) приводятся результаты расчета двумерной прямоугольной упругой области, на границах которой ставятся условия

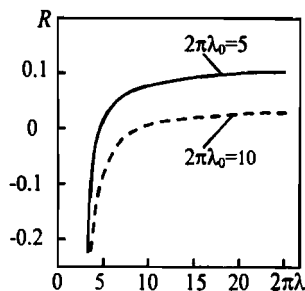


Рис. 6.10. Зависимость коэффициента отражения от длины волны.

отражения и поглощения. Сетка имеет 30×60 квадратных ячеек. Задаются значения плотности, модуля упругости. Коэффициент Пуассона равен 0,25. Источник малых размеров находится в центре и задает синусоидальное изменение давления с длиной волны, равной семи ячейкам.

Условие (6.49) было применено как к нормальной, так и к касательной составляющим скорости. Коэффициент затухания был принят в виде

$$C = \sqrt{Km/V} \cos(1/2\lambda_0),$$

где K — комбинация коэффициентов Ламе упругого тела, V — площадь ячейки. Для нормальной составляющей скорости имеем

$$K = E(1 - \nu) / (1 + \nu)(1 - 2\nu),$$

для касательной к границе составляющей — $K = E/2(1 + \nu)$. Расчеты показали, что если для последней вместо этого значения взять такое же значение K , что для нормальной составляющей скорости, то величина отражения от границы возрастает. Подобный результат был получен, когда касательная составляющая полагалась равной нулю.

В численных расчетах получило широкое применение линейное граничное условие

$$u = \frac{p - p_0}{\rho_0 c_0}, \quad (6.50)$$

которое представляет собой хорошо известное в акустике импедансное соотношение между возмущением давления и скоростью. Трудно установить, когда и кем оно впервые стало применяться в численных расчетах. Укажем, что в работе (Orlanski, 1976) по существу используется это же условие.

Сюда же можно отнести постановку условий на проницаемой поверхности, когда задается некоторая связь между перепадом давления с двух сторон поверхности $(p_1 - p_2)$ и скоростью u протекания газа или жидкости через нее (обычно считается, что протекание происходит по нормали):

$$u = \alpha (p_1 - p_2)^\beta. \quad (6.51)$$

Так, в работе (Fedorchenko, 1980) во входном торцевом сечении осесимметричного канала ставится условие вдува

$$\rho u(r, t) = \alpha [p_1(t) - p_2(r, t)] f(r), \quad (6.52)$$

где p_1 — заданное давление с левой стороны входа, p_2 — давление в канале, функция $f(r)$ задает закон распределения вдува. Коэффициент α здесь определяется из условия $\rho u(0, \infty) = 1$. Может быть задан вдув во входном сечении в канале, а на выходе задается давление.

В работе (Fedorchenko, 1981) дается обобщение этих и некоторых других физических постановок условий на искусственных границах для дозвуковых и сверхзвуковых потоков.

Условия для уравнения Лапласа

7.1. Некоторые оценки влияния внешних граничных условий на решение вблизи обтекаемого тела

Замена неограниченной области течения ограниченной позволяет проводить решение задачи не только численными методами, но иногда весьма полезна и при применении аналитических методов. В последнем случае нужно говорить скорее об одном из размеров. Например, в работе (Ilgamov and Sabitov, 1982) в плоской задаче об обтекании пластины ограничивается размер вдоль потока. Это позволяет построить эффективное решение задачи путем применения рядов Фурье вместо интегрального преобразования Фурье.

Поэтому полезными могут быть точные оценки погрешностей, возникающих при указанной замене областей в простых примерах (Ilgamov, 1985a).

Рассмотрим установившееся обтекание тела потоком идеальной несжимаемой жидкости (рис. 7.1 а). На искусственной границе Γ_0 области условия неизвестны. Если Γ_0 достаточно удалена, и возмущения, вносимые телом в поток, не доходят до нее, то здесь могут быть поставлены условия, заданные на бесконечности. Возможности вычислительной техники таковы, что часто нежелательно брать границу достаточно удаленной (это утверждение верно также и в аналитических методах: с увеличением области необходимо брать большее число членов ряда). В качестве примера можно указать на случай плохообтекаемого тела Γ , когда в область вносятся сильные и далеко распространяющиеся возмущения.

Рассмотрим аналитические решения плоской задачи о безотрывном стационарном обтекании цилиндра потоком идеальной

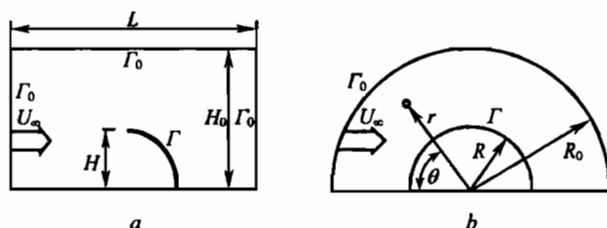


Рис. 7.1. Внешние задачи аэродинамики

несжимаемой жидкости (рис. 7.1 б). Внешней границей Γ_0 поля течения является окружность с радиусом R_0 . Из этой задачи можно получить оценки и для задачи, показанной на рис. 7.1 а, если $R_0 \leq H_0$, $R \geq H$. Предполагаем также, что $L > 2H_0$.

Поставленная задача относительно потенциала скоростей φ сводится к следующей системе уравнений:

$$\varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0, \quad (7.1)$$

$$p = p_\infty + \left(\frac{\rho_\infty}{2}\right) \left(U_\infty^2 - \varphi_r^2 - \frac{\varphi_\theta^2}{r^2} \right), \quad (7.2)$$

$$\varphi_r = 0, \quad (r = R), \quad (7.3)$$

$$\varphi = -U_\infty r \cos \theta, \quad (r = R_0), \quad (7.4)$$

где p_∞ , ρ_∞ , U_∞ — параметры, заданные при $R_\infty \rightarrow \infty$.

Разыскивая решение по координате θ в виде рядов по $\cos \theta$, из (7.1) находим

$$\varphi = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1} (A_n r^{-n} + B_n r^n) \cos \theta. \quad (7.5)$$

Определение констант в соответствии с (7.3), (7.4) дает

$$\varphi = -U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-1} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta. \quad (7.6)$$

Давление определяется согласно (7.2). На поверхности цилиндра ($r = R$) оно равно

$$p = p_\infty + \left(\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2} \right) \left[1 - 2 \left(1 + \frac{R^2}{R_0^2} \right)^{-2} (1 - \cos 2\theta) \right]. \quad (7.7)$$

Решение (7.6), (7.7) отличается от точного (при $R_0 \rightarrow \infty$) тем, что появились множители $1 + (R/R_0)^2$ в степенях -1 и -2 . При пренебрежении в них $(R/R_0)^2$ по сравнению с единицей они совпадают с точным решением.

Отметим, что ошибка больше в значении давления, чем в значении потенциала (или составляющих скорости). По сравнению со случаем $R_0 \rightarrow \infty$ изменяется как постоянная часть давления, так и часть, зависящая от угла θ . Они уменьшаются по абсолютной величине. Но скоростной напор в лобовой части цилиндра получается таким же, как в точном решении.

Если $R_0/R = 2$, то во всем поле течения значения потенциала и обеих составляющих скорости $v_\theta = \partial\varphi/r\partial\theta$, $v_r = \partial\varphi/\partial r$ меньше на 20%. Безразмерная средняя часть давления на поверхности цилиндра равна $-0,28$ (вместо -1 в точном решении), а безразмерное общее давление на поверхности цилиндра при угле $\theta = \pi/2$ равно $-1,56$ (вместо -3). Уменьшение отсоса с периферийной зоны объясняется уменьшением скорости v_θ . Здесь не учитывается давление p_∞ .

Вместо (7.4) может быть поставлено условие относительно радиальной составляющей скорости

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -U_\infty \cos \theta \quad (r = R_0). \quad (7.8)$$

Тогда, подчиняя (7.5) условиям (7.3) и (7.8), получаем

$$\varphi = -U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right)^{-1} \left(r + \frac{R^2}{r}\right) \cos \theta, \quad (7.9)$$

$$p = p_\infty + \left(\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2}\right) \left[1 - 2 \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right)^{-2} (1 - \cos 2\theta)\right]. \quad (7.10)$$

Вместо множителя $1 + (R/R_0)^2$ в предыдущей задаче здесь появляется множитель $1 - (R/R_0)^2$, который также входит в степенях -1 и -2 . Это приводит к большим значениям потенциала, составляющих скорости и давления в рассматриваемой области течения. На рис. 7.2 кривые 1 и 2 представляют относительную радиальную скорость $-v_r/U_\infty$ для лобовой части ($\theta = 0$) при $R_0/R = 2; \infty$. Кривая 3 соответствует решению с условием (7.4) при $R_0/R = 2$. Ошибка в значениях скоростей составляет 33%. Что касается давления, то в лобовой и кормовой части оно совпадает с точными значениями, а в периферийной зоне

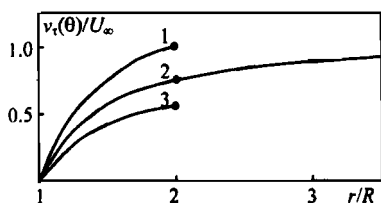


Рис. 7.2. Зависимость относительной радиальной скорости от r/R для разных значений R_0/R

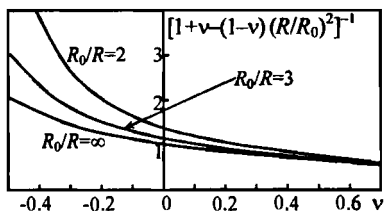


Рис. 7.3. Зависимость функции $f(\nu) = [1 + \nu - (1 - \nu)(R/R_0)^2]^{-1}$ от параметра ν

($\theta = \pi/2$) имеется сильный отсос. Безразмерное давление здесь равно $-6, 11$ (p_∞ во внимание не принимается). Точное значение равно -3 . С увеличением отношения R_0/R погрешности быстро убывают.

Отметим, что при $R_0/R \rightarrow \infty$ решения (7.6), (7.7) и (7.9), (7.10) совпадают.

Итак, в задаче Дирихле параметры в ограниченной области течения получились с недостатком по сравнению со случаем $R_0/R \rightarrow \infty$. В задаче Неймана эти параметры, наоборот, получились с избытком.

С целью получения улучшенного решения поставим условие на внешней границе в виде линейной комбинации (7.4) и (7.8):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\nu}{R_0} \right) \varphi = -U_\infty \cos \theta, \quad (7.11)$$

где второй член в левой части поделен на R_0 , чтобы параметр ν был безразмерным.

Определив константы в (7.5) из (7.3) и (7.11), находим следующее выражение для потенциала:

$$\varphi = -U_\infty \left[1 + \nu - (1 - \nu) \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right]^{-1} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta. \quad (7.12)$$

Полагая $\nu = 0$, получаем (7.9), а отбрасывая единицы в квадратных скобках и полагая $\nu = 1$, получаем решение (7.6).

На рис. 7.3 приведена функция, содержащая в (7.12) параметр ν , для значений $R_0/R = 2; 3; \infty$.

Как видно из формулы (7.12) и рис. 7.3, для лучшего приближения к точному решению необходимо принимать такие значения ν , которые обеспечивают близкие к единице значения рассматриваемой выше функции. Если она равняется единице, то

выражение (7.12) описывает точное решение. Соответствующий критерий сходимости задачи с близкими внешними границами в задаче с далекими границами имеет вид

$$\nu = \left(1 + \frac{R_0^2}{R^2}\right)^{-1}. \quad (7.13)$$

Общий диапазон изменения параметра ν , соответствующий изменению R_0/R от ∞ до 1, равен $0 < \nu \leq 1/2$. Однако отношение R_0/R в численном решении практически меняется в пределах от 5 до 2, поэтому имеем $0,04 \leq \nu \leq 0,2$.

Отметим, что для значений $R_0/R > 2$ критерий (7.13) без заметной ошибки может быть представлен в упрощенном виде

$$\nu \approx \left(\frac{R}{R_0}\right)^2. \quad (7.14)$$

В задачах с более сложными контурами l и l' в качестве критерия ν можно рекомендовать принимать квадрат отношения их полупериметров.

Приведем некоторые другие условия на внешней поверхности области течения. Они основаны на продолжении на внешнюю область функций компонент скорости:

$$\begin{aligned} v_r(R_0 + \Delta r) &= r_r(R_0) + \Delta r v'_r(R_0) + \dots, \\ v_\theta(R_0 + \Delta r) &= v_\theta(R_0) + \Delta r v'_\theta(R_0) + \dots \end{aligned} \quad (7.15)$$

Рассматривая первое из них и обозначая $\Delta r = \mu R_0$, получаем уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mu R_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -U_\infty \cos \theta. \quad (7.16)$$

После определения констант в (7.5) из (7.3) и (7.16) выражение для потенциала приобретает вид

$$\varphi = -U_\infty \left[1 + (2\mu - 1) R^2/R_0^2\right]^{-1} (r + R^2/r) \cos \theta. \quad (7.17)$$

На рис. 7.4 дана функция, содержащая параметр μ , для значений $R_0/R = 2; 3; \infty$. В довольно широком диапазоне μ ($0 \leq \mu \leq 1$) решение получается ближе к точному, чем по условиям (7.4), (7.8). Этот диапазон несколько шире, чем для ν (как видно из рис. 7.3, соответствующий диапазон $0 \leq \nu \leq 0,4$). При $\mu < 0, \nu < 0$ и при $\mu > 1, \nu > 0,4$ решения (7.12), (7.17) менее точны, чем (7.6) и (7.9).

Согласно (7.17) критерий сходимости решения задачи с близкими границами к решению задачи с далекими границами имеет вид

$$\mu = 1/2 \quad (7.18)$$

и, в отличие от (7.13) и (7.14), не включает размеров обтекаемого тела и поля течения.

Замечательной особенностью граничных условий (7.11) и (7.16) и критериев (7.13) и (7.18) является возможность получения с их помощью точных значений скоростей и давления на поверхности обтекаемого тела из рассмотрения поля течения со сколь угодно близкими искусственными границами.

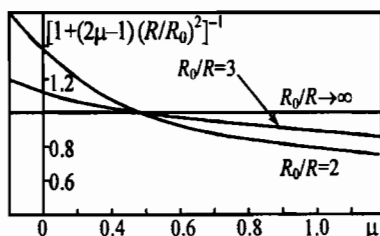


Рис. 7.4. Зависимость функции $f(\mu) = [1 + (2\mu - 1)(R/R_0)^2]^{-1}$ от параметра μ для различных размеров расчетной области

7.2. Задача распределения статического электрического потенциала

Моделирование электрического поля в промышленной геофизике (скважинная электроразведка, электрокаротаж) также связано с необходимостью формулировки условий на внешней границе расчетной области (Dakhnov, 1981), (Ivanov and Masyutina, 1983), (Ivanov and Nekhaeva, 1984), (Ivanov and Nekhaeva, 1986). Следуя (Ivanov and Nekhaeva, 1986), покажем подход, применявшийся в этих задачах.

Исходная краевая задача для статического электрического потенциала φ в неограниченной области содержит уравнение Лапласа, распределение источников (стоков) в области, ограниченной границей S , условие $\varphi \rightarrow 0$ на бесконечности. Потенциал единичного источника, находящегося в начале координат x_1, x_2, x_3 равен

$$G = \left[4\pi (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \right]^{-1}.$$

Функция IG определяет поле точечного источника, расположенного внутри S , причем $I = \int_S (\partial\varphi/\partial n) ds$. В точках искусственной поверхности Γ , отстоящей от поверхности S на достаточном удалении, можно принять

$$\varphi \approx IG, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma} \approx I \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Gamma}, \quad (7.19)$$

где n внешняя нормаль к Γ . Это допущение перекликается с рассуждениями, использованными при получении условий в случае стационарных течений жидкости (раздел 3.5). Исходя из (7.19) можно записать уравнение

$$\varphi - G \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (7.20)$$

которое приближенно заменяет условие

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \infty.$$

В работах (Ivanov and Nekhaeva, 1984), (Ivanov and Nekhaeva, 1986) рассматривается пример применения условия (7.20) в случае сферического источника единичного радиуса:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 1 \leq r \leq \infty \end{array} \right), \quad (7.21)$$

$$a\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{n=0}^N a_n P_n \cos \theta, \quad \left(\begin{array}{l} r = 1, \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right), \quad (7.22)$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad (r \rightarrow \infty). \quad (7.23)$$

Здесь P_n — полиномы Лежандра, a_n — известные константы.

Заменяя сферу с радиусом $r = 1$ точечным источником в ее центре, получаем $G = (4\pi r)^{-1}$. Поэтому (7.20) приобретает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0, \quad (r = R), \quad (7.24)$$

что совпадает с условием для идеальной несжимаемой жидкости (1.11)* при $\nu = 1$, $U_{\infty} = 0$ (работа (Ilgamov, 1985a), с.66).

В решении уравнения (7.21)

$$\varphi = \sum_{n=0}^N \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n \cos \theta$$

связь между коэффициентами A_n , B_n устанавливается с помощью (7.22). Условие (7.23) дает точное решение задачи φ_1 . Если (7.23) применяется при $r = R$, то соответствующее значение потенциала обозначим через φ_2 , а условия (7.24) — через φ_3 .

Решение φ_3 полностью совпадает с точным φ_1 при $a_0 \neq 0$, $a_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Приведены погрешности $\delta\% = 100\%|\varphi_1 - \varphi_i|/|\varphi|$, ($i = 2, 3$) решений φ_2 , φ_3 при различных значениях радиуса искусственной границы R . Принято $a_0 = 1$; $a_1 = 10$; $a_2 = 20$; $a_n = 0$ ($n \geq 3$); $\alpha = 0, 1$; $\theta = \pi/2$. Показан значительный выигрыш в точности решения с использованием условия (7.24).

Изложенный подход используется в работе (Ivanov and Nekhaeva, 1984) для построения приближенного условия на искусственной границе Γ , которая удалена от поверхности источника S не на одинаковое расстояние. В качестве примера принимается значение потенциала на границе вытянутого эллипсоида вращения. В этом случае функция G имеет вид

$$G = \frac{I}{4\pi c} \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

где α, β — вырожденные эллипсоидальные координаты. Соответствующее приближенное условие (7.20) на искусственной границе $a_0 = \text{const}$ имеет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh} \alpha \text{ch} \alpha}{\text{sh}^2 \alpha + \cos^2 \beta} \varphi \right|_{\alpha=a_0} = 0.$$

В расчетах принято $a_0 = 2; 5; 10$. Показана эффективность применения условия.

В работе (Ivanov and Nekhaeva, 1984) конкретизируется условие (7.20) в задачах скважинной электроразведки и электрокаротажа. При построении функции G в случае неоднородной среды производится осреднение ее параметров. Указанные выше задачи решаются также с применением приближенного условия $\varphi|_{\Gamma} = IG|_{\Gamma}$.

7.3. Обтекание упругой пластины, находящейся в потоке идеальной несжимаемой жидкости

В линейной постановке рассматривается плоская задача об изгибе упругой пластины, с одной стороны обтекаемой безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Поле течения занимает всю полуплоскость. В статье (Ilgamov and Sabitov, 1982) наряду с решением исходной задачи предлагается метод,

где вводятся фиктивные границы в поле течения. Это дает возможность применить аппарат рядов Фурье вместо методов интегральных преобразований, сопряженных со значительными математическими трудностями. Метод с введением фиктивных границ принципиально упрощает аналитическое решение и может быть с успехом применен при рассмотрении более сложных задач.

Итак, упругая пластина прикреплена по краям к абсолютно жестким протяженным диафрагмам и находится с ними в одной плоскости. На бесконечном удалении от пластины поле течения жидкости однородно и определяется заданием скорости, давления и плотности $U_\infty, p_\infty, \rho_\infty$. В полости под пластиной поддерживается постоянное давление, равное p_∞ . В невозмущенном состоянии потенциал скорости равен $\varphi^0 = U_\infty x$, давление $p^0 = p_\infty$, прогиб пластины $w^0 = 0$.

Плоская динамическая задача об устойчивости пластины длиной L в потоке относительно возмущений потенциала φ и функции прогиба w сводится к решению следующей системы уравнений и граничных условий:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad p = -\rho_\infty \left(\lambda \varphi + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (7.25)$$

$$\text{grad } \varphi = 0 \quad \left(\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty \right), \quad (7.26)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} \lambda w + U_\infty \partial w / \partial x & (|x| \leq L/2) \\ 0 & (|x| > L/2), \end{cases} \quad (7.27)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 h \lambda^2 w = \rho_\infty \left(\lambda \varphi + U_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (z = 0). \quad (7.28)$$

Здесь D, h, ρ_0 — изгибная жесткость, толщина и плотность материала пластины. Временной множитель $\exp(\lambda t)$ всюду опущен. К этой системе должны быть добавлены условия закрепления пластины. Если опирание краев шарнирное, то

$$w = \partial^2 w / \partial x^2 \quad (x = \pm L/2). \quad (7.29)$$

Аппроксимацию функции w примем в виде ряда по собствен-

ным функциям задачи с условиями (7.29):

$$w = \sum_{k=1,3,\dots}^T W_k \cos \frac{k\pi x}{L} + \sum_{m=2,4,\dots}^{T-1} W_m \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (T \geq 3). \quad (7.30)$$

Для нахождения решения задачи Неймана (7.25)–(7.29) необходимо поставить дополнительное условие о равенстве нулю объемного расхода жидкости через граничный контур, охватывающий верхнюю полуплоскость. С учетом (7.26), (7.27) будем иметь

$$\int_{-L/2}^{L/2} (\lambda w + U_\infty \partial w / \partial x) dx = 0. \quad (7.31)$$

Это условие накладывает ограничение на один варьируемый параметр в (7.30). С применением метода интегральных преобразований к задаче (7.25)–(7.27), а затем метода Бубнова-Галеркина к (7.28)–(7.30) находится решение поставленной задачи. В частности, оно анализируется в зависимости от параметра гидроупругости

$$\alpha^2 = \left(\frac{U_\infty L}{\pi} \right)^2 \frac{\rho_\infty L}{\pi D}. \quad (7.32)$$

Значению $\alpha^2 = \alpha_*^2 = 8,86$ соответствует статическая потеря устойчивости (дивергенция) пластины в потоке с образованием двух полуволн (форма $\sin(2\pi x/L)$). При $\alpha^2 \geq \alpha_{**}^2 = 32,93$ возникают колебания пластины (флаттер), сопровождаемые взаимодействием форм $\sin(2\pi x/L)$ и $\cos(\pi x/L) + 3\cos(3\pi x/L)$.

Теперь рассматривается область течения $0 \leq z \leq \infty$, $|x| \leq L_1/2$ с фиктивными границами $x = \pm L_1/2$ и вместо условий (7.26) принимаются условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \left(x = \pm \frac{L_1}{2} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z \rightarrow \infty). \quad (7.33)$$

Очевидно, что надо принимать $L_1 \geq L$. Тогда решение уравнения (7.25), удовлетворяющее (7.33), имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_{s=1,3,\dots} a_s \exp \left(-\frac{s\pi z}{L_1} \right) \sin \frac{s\pi x}{L_1} + \\ + \sum_{n=2,4,\dots} b_n \exp \left(-\frac{n\pi z}{L_1} \right) \cos \frac{n\pi x}{L_1}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Решение этой задачи с фиктивными границами существенно проще. Что касается точности последнего решения, то она рассматривается в зависимости от отношения длины пластины к длине зоны между фиктивными границами: $l = L/L_1$, ($l \leq 1$).

Так, при $l = 1$ (фиктивные границы в жидкости проходят по краям пластины) получаются следующие значения: $\alpha_*^2 = 8,00$ (вместо $\alpha_*^2 = 8,86$ в исходной задаче (7.25)–(7.29)), $\alpha_{**}^2 = 29,89$ (вместо $\alpha_{**}^2 = 32,93$ в исходной задаче). Уже при $l = 0,5$ имеем соответственно $\alpha_*^2 = 8,84$ и $\alpha_{**}^2 = 32,86$. А при $l = 0,25$ значения этих параметров гидроупругости, следовательно, и решения исходной задачи, и задачи с введением фиктивных (искусственных) границ полностью совпадают.

Заключение

В заключение отметим, что постановка граничных условий на искусственных границах расчетной области остается одной из актуальных проблем вычислительной механики и физики. Потребность в уменьшении отражения возмущений и, как следствие, сокращения времени счета и требуемой памяти, остается независимо от развития вычислительной техники. Неадекватно поставленные условия на искусственных границах могут не только увеличить затраты на получение решения, но и привести к совершенно неверным результатам, а также к неустойчивости всей схемы.

Научное направление по неотражающим граничным условиям на искусственных границах расчетной области продолжает развиваться. Естественно, в данной книге невозможно было охватить все существующие работы, но тем не менее в ней сделана попытка представить, по возможности, основные подходы, способы и методы постановки неотражающих граничных условий.

Список литературы

- Abarbanel S., Bayliss A. and Lustman L.* (1986). Non-reflecting boundary conditions for the compressible Navier-Stokes equation – Technical Report № 86, ICASE, 1986.
- Abarbanel S. and Gottlieb D.* (1976). A note on the leap-frog scheme in two and three dimensions// *J. Comp. Phys.* – 1976. – V. 21, № 3. – P. 351–355.
- Abarbanel S. and Gottlieb D.* (1979). Stability of two dimensional initial boundary value problems using leap-frog type schemes// *J. Math. Comp.* – 1979. – V. 33, № 148. – P. 1145–1155.
- Abarbanel S. and Murman E.* (1982). Stability of two-dimensional hyperbolic initial boundary value problems for explicit and implicit schemes// *J. Comp. Phys.* – 1982. – V. 48. – P. 160–167.
- Abramov A.* (1961). About transfer of boundary conditions for a set of linear ordinary differential equations// *Zhurn. vych. mat. i matem. fiz.* – 1961. – V. 1, № 3. P. 542–545.
- Achenbach J.* (1991). Reflection and transmission of rayleigh surface waves by a material interphase// *J. Appl. Mech.* – 1991. – V. 58. – P. 688–694.
- Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L.* (1964). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general conditions// *J. Comm. Pure Appl. Math.* – 1964. – V. 17. – P. 45–51.
- Agrawal S., Vermeland R., Verhoff A. and Lowrie R.* (1988). Euler transonic solutions over finite wings – AIAA Paper, № 88-0009, 1988.
- Allen J. and Sheng S.* (1970). Numerical solutions of the compressible Navier-Stokes equations for the laminar near wave// *J. Phys. Fluids* – 1970. – V. 13, № 1. – P. 1.
- Anderson C.* (1986). On vorticity boundary conditions – Dept. of Math. Univ. of California, 1986.
- Arseniev-Obratsov S. and Zhukova T.* (1987). Absorbing boundary conditions for numerical solution of problems of visco-elasticity theory// *Zhurn. vych. mat. i matem. fiz.* – 1987. – V. 27, № 2. – P. 301–306.
- Baker G.R., Meiron D.I. and Orzag S.A.* (1982). *J. Fluid Mech.* – 1982. – V. 123. – P. 477.
- Bamberger A.* (1984). The paraxial approximation for the wave equation: some new results// *Advanced in Computer Methods for Partial Differential Equations/* Ed. Vichnevetsky R., Stepleman R.S. – IMACS, 1984.
- Bamberger A., Joly P., Roberts J. and Teron J.* (1985). Absorbing boundary conditions for Rayleigh waves – Technical report, INRIA, 1985.

- Bando K., Bettess P. and Emson C.* (1984). The effectiveness of dampers for the analysis of exterior scalar wave diffraction by cylinders and ellipsoids// *Int. J. Num. Meth. Fluids*. – 1984. – V. 4. – P. 599–617.
- Barbashova G., Bilansky Y. and Zyrnov M.* (1993). Calculation of wave processes in the zone of action of acoustic radiator of cylindrical shape – Technical Report № 21, Institute of Impulsive Processes and Technologies, 1993.
- Barry A., Bielak J. and MacCamy R.* (1988). On absorbing boundary conditions for wave propagation// *J. Comp. Phys.* – 1988. – V. 79. – P. 449–468.
- Barucq H., Delaurens F. and Hanouzet B.* (1998). Method of absorbing boundary conditions: Phenomena of error stabilization// *SIAM J. Num. Anal.* – 1998. – V. 35, № 3. – P. 1113–1129.
- Baumeister K.* (1979). A time dependent difference theory for sound propagation in ducts with flow – Technical Report № TM-79302, NASA, 1979.
- Baumeister K.* (1980a). Time dependent difference theory for noise propagation in jet engine ducts – AIAA Paper № 80-0098, 1980.
- Baumeister K.* (1986). Time-dependent wave envelope finite difference analysis of sound propagation// *AIAA J.* – 1986. – V. 24, № 1. – P. 32–38.
- Baumeister K., Eversman W., Astley R. and White J.* (1983). Application of steady-state finite element and transient finite difference theory to sound propagation in a variable area duct; comparison with experiment// *AIAA J.* – 1983. – V. 21, № 2. – P. 193–199.
- Bayliss A., Goldstein C. and Turkel E.* (1983). An iterative method for the Helmholtz equation// *J. Comp. Phys.* – 1983. – V. 49. – P. 443–457.
- Bayliss A., Goldstein C. and Turkel E.* (1985). On accuracy conditions for the numerical computation of waves// *J. Comp. Phys.* – 1985. – V. 59. – P. 396–404.
- Bayliss A., Gunzburger M. and Turkel E.* (1982). Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions// *SIAM J. Appl. Math.* – 1982. – V. 42. – P. 430–451.
- Bayliss A. and Turkel E.* (1980). Radiation conditions for wave-like equations// *J. Commun. Pure Appl. Math.* – 1980. – V. 33. – P. 707–725.
- Bayliss A. and Turkel E.* (1982). Far-field boundary conditions for compressible flows// *J. Comp. Phys.* – 1982. – V. 48. – P. 182–199.
- Bayliss A. and Turkel E.* (1983). Outflow boundary conditions for fluid dynamics// *J. Comp. Phys.* – 1983. – V. 48. – P. 182–199.
- Beam R. and Warming R.* (1976). An implicit finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form// *J. Comp. Phys.* – 1976. – V. 22. – P. 87–110.
- Beam R. and Warming R.* (1978). An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations// *AIAA J.* – 1978. – V. 16, № 3. – P. 393–402.
- Beam R., Warming R. and Yee H.* (1982). Stability analysis of numerical boundary conditions and implicit difference approximations for hyperbolic equations// *J. Comp. Phys.* – 1982. – V. 48. – P. 200–222.

- Beland M. and Warn T.* (1975). The radiation condition for transient rossby waves// J. Atmosph. Scien. – 1975. – V. 32, № 10. – P. 1873–1880.
- Bell J., Shubin G. and Solomon J.* (1982). Fully implicit shock tracking// J. Comp. Phys. – 1982. – V. 48. – P. 223–245.
- Bengtsson A., Ziakouli E. and Nordström J.* (1988). The influence of open boundary conditions and difference operators on the time-integration of the Burgers equation – Stockholm: FFA TN, 1988.
- Bennet A.* (1976). Open boundary conditions for dispersive waves// J. Atmosph. Scienc. – 1976. – V. 33. – P. 176–182.
- Berenger J.-P.* (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves// J. Comp. Phys. – 1994. – V. 114. – P. 185–200.
- Berg P.* (1989). On forward modelling of seismic waves for exploration of oil and natural gas – Technical Report № 50, Technical University of Denmark, 1989.
- Berg P., If F., Christiansen P. and Skovgaard O.* (1987). Soliton laser: A computational two-cavity model// J. Phys. Rev. A. – 1987. – V. 35, № 10. – P. 4167–4174.
- Berg P., If F. and Skovgaard O.* (1990). A spectral method for seismic wave propagation in elastic media// Wave Motion. – V. 12. – North-Holland: Wamot, 1990.
- Berkhout A.* (1979). Steep dip finite-difference migration// J. Geophys. Prosp. – 1979. – V. 27. – P. 196–213.
- Bettes P. and Zienkiewicz O.* (1977). Diffraction and refraction of surfaces waves using finite and infinite elements// Int. J. Num. Meth. Eng. – 1977. – V. 11. – P. 1271–1290.
- Blaschak J. and Kriegsmann G.* (1988). A comparative study of absorbing boundary conditions// J. Comp. Phys. – 1988. – V. 77. – P. 109–138.
- Blottner F.* (1982). Influence of boundary approximations and conditions of finite-difference solutions// J. Comp. Phys. – 1982. – V. 48. – P. 246–269.
- Bonet R., Nigro N., Stori M. and Idelsohn S.* (1998a). A discrete non-local (DNL) outgoing boundary condition for diffraction of surface waves// J. Comm. Num. Meth. Eng. – 1998. – P. 849–861.
- Bonet R., Nigro N., Stori M. and Idelsohn S.* (1998b). Non-local absorbing discrete boundary condition (DNL) in finite difference for water waves elliptic models// J. RIMNE. – 1998. – V. 14, № 4. – P. 481–500.
- Bonet R., Nigro N., Story M.A. and Idelsohn S.* (2000). A new way to solve discrete equations system// ECCOMAS 2000. – P. 18–36.
- Boore D.* (1972). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials// J. Meth. Comp. Phys. (Seismology). – 1972. – V. 11. – P. 1–37.
- Bramley J. and Sloan D.* (1977). A comparison of boundary methods for the numerical solution of hyperbolic systems of equations// J. Eng. Math. – 1977. – V. 11, № 3. – P. 227–239.
- Brand R. and Nagel R.* (1982). Reflection of sound by boundary layers// J. Sound and Vibr. – 1982. – V. 85. – P. 31–38.

- Brillouin L.* (1960). Wave propagation and group velocity – New-York: Academic Press, 1960.
- Brown D.L.* (1984). A note on the numerical solution of the wave equation with piecewise smooth coefficients// *J. Math. Comp.* – 1984. – V. 42, № 166. – P. 369–391.
- Brown P.* (1958). Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct// *J. Fluid Mech.* – 1958. – V. 4. – P. 353–406.
- Bruneau C. and Creuse E.* (2000). An efficient boundary condition for the simulation of a compressible viscous flow over a plain dihedral// *ECCO-MAS 2000.* – P. 1–17.
- Bruneau C. and Fabrie P.* (1994). Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations// *Int. J. Num. Meth. Fluids.* – 1994. – V. 19. – P. 693–705.
- Brysk H.* (1983). Numerical analysis of the 45-degree finite-difference equation for migration// *J. Geophys.* – 1983. – V. 48. – P. 532–542.
- Bushby F. and Timpson M.* (1967). A 10-level atmospheric model and frontal rain// *Quart. J. R. Met. Soc.* – 1967. – V. 93. – P. 1–17.
- Camerlengo A. and O'Brien J.* (1980). Open boundary conditions in rotating fluids// *J. Comp. Phys.* – 1980. – V. 35. – P. 35.
- Carpenter K.* (1982). Note on the paper "Radiation conditions for the lateral boundaries of limited - area numerical models"// *Quart. J. R. Met. Soc.* – 1982. – V. 108. – P. 717–719.
- Castellani A.* (1974). Boundary conditions to simulate an infinite space – Milano: Instituto Politecnico di Milano, 1982.
- Cerjan C., Kosloff D., Kosloff R. and Reshef M.* (1985). Non-reflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation// *J. Geophys.* – 1985. – V. 50, № 4. – P. 705–708.
- Chen J.* (1971). *Finite difference methods and the leading edge problem* – Ph.D. Thesis, AMS Dept. Princeton University, 1971.
- Chen J.* (1973). Numerical boundary conditions and computational modes// *J. Comp. Phys.* – 1973. – V. 13. – P. 522–535.
- Chen Y.-S., Zou G.-Y. and Gong J.* (1990). An adaptive open boundary condition// *Acta Mechanica Sinica.* – 1990. – V. 6, № 4. – P. 305–310.
- Cheng S.* (1970). Numerical integration of Navier-Stokes equations// *AIAA J.* – 1970. V. 8, № 12. – P. 2115–2122.
- Chorin A.* (1973). Numerical study of slightly viscous flow// *J. Fluid Mech.* – 1973. – V. 57, № 4. – P. 785–796.
- Chorin A.* (1980). Vortex models and boundary layer instability// *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* – 1980. – V. 1. – P. 1–20.
- Christopher K.T. and Webb J.C.* (1994). Radiation boundary condition and anisotropy correction for finite differencesolutions of the Helmholtz equation// *J. Comp. Phys.* – 1994. – V. 113, № 1. – P. 122–133.
- Chu C. and Sereny A.* (1974). Boundary conditions in finite difference fluid dynamic codes// *J. Comp. Phys.* – 1974. – V. 15. – P. 476–491.

- Claerbout J.* (1970). Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure// *J. Geophys.* – 1970. – V. 35. – P. 407–418.
- Claerbout J.* (1980). Fundamentals of geophysical data processing – New-York: McGraw-Hill, 1980. – P. 163–226.
- Claerbout J.* (1985). Imaging the earth's interior – Blackwell, 1985.
- Claerbout J. and Doherty S.* (1972). Downward continuation of moveout corrected seismograms// *J. Geophys.* – 1972. – V. 37. – P. 741–768.
- Claerbout J. and Johnson A.* (1971). Extrapolation of time-dependent waveforms along their path of propagation// *J. Geophys.* – 1971. – V. 26. – P. 285–295.
- Clayton R. and Engquist B.* (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations// *Bull. Seism. Soc. Am.* – 1977. – V. 67, № 6. – P. 1529–1540.
- Clayton R. and Engquist B.* (1980). Absorbing boundary conditions for wave-equation migration// *J. Geophys.* – 1980. – V. 45. – P. 895–904.
- Clement A.* (1996). Coupling of two absorbing boundary conditions for 2D time-domain simulations of free surface gravity waves// *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 126. – P. 139–151.
- Cointe R.* (1989). Nonlinear simulation of transient free surface flows// *Proceedings 5th Int. Conf. Num. Ship. Hydrodynamics* – Hiroshima: 1989.
- Collino F. and Monk P.* (1998). The perfectly matched layer in curvilinear coordinates// *SIAM J. Scient. Comp.* – 1998. – V. 19. – P. 2061–2090.
- Colonius T., Lele S. and Parviz M.* (1993). Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation// *AIAA J.* – 1993. – V. 31, № 9. – P. 1574–1582.
- Cox C., Fiz G. and Gunzburger M.* (1983). A least squares finite element scheme for transonic flow around harmonically oscillating airfoils// *J. Comp. Phys.* – 1983. – V. 51. – P. 387–403.
- Crichlow J.* (1982). The effect of underground structure on seismic motions of the ground surface// *J. R. Astr. Soc.* – 1982. – V. 70. – P. 563–575.
- Dakhnov V.* (1981). Electric and magnetic methods of investigations of drills – M.: Nedra, 1981.
- Davydov Y.* (1979). Investigation of stability of difference schemes on boundaries of computational domain by method of differential approximations// *DAN SSSR.* 1979. – V. 244, № 6. – P. 1298–1302.
- Deakin A.S. and Rasmussen H.* (1996). Sparse boundary conditions on artificial boundaries for three-dimensional potential problems// *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 129. – P. 111–120.
- Dorodnitsyn L.* (1990). Acoustic waves and boundary conditions in models of viscous subsonic flows – M.: Technical report, Preprint, Moscow State University, 1990.
- Dorodnitsyn L.* (1999). Acoustics in models of viscous subsonic flows and non reflecting boundary conditions – M.: Dialog, 1999.

- Dutt P.* (1988). Stable boundary conditions and difference schemes for Navier-Stokes equations// SIAM J. Num. Anal. – 1988. – V. 25, № 2. – P. 245–267.
- Dyatlovitsky L., Lemberg E. and Kalinichenko D.* (1979). Nonstationary oscillations of gravitational dams on rocky foundations – M.: Energiya, 1979.
- Elvius T. and Sundström A.* (1973). Computationally efficient schemes and boundary conditions for a finite-mesh barotropic model based on the shallow-water equations – Tellus, 1973.
- Emmerman S. and Stephen R.* (1983). Comment on “Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations” by Clayton R. and Engquist B.// J. Bull. Seism. Soc. Am. – 1983. – V. 73. – P. 661–665.
- Engquist B. and Gustafsson B.* (1983). Steady state computations for wave propagation problems – Technical Report №. 92, Uppsala University, 1983.
- Engquist B. and Gustafsson B.* (1987). Steady state computers for wave propagation problems// J. Math. Comp. – 1987. – V. 49, № 179. – P. 39–64.
- Engquist B. and Majda A.* (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves// J. Math. Comp. – 1977. – V. 31, № 139. – P. 629–652.
- Engquist B. and Majda A.* (1979). Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations// J. Commun. Pure Appl. Math. – 1979. – V. 32. – P. 313–357.
- Engquist B. and Majda A.* (1981). Numerical radiation boundary conditions for unsteady transonic flow// J. Comp. Phys. – 1981. – V. 40, № 1. – P. 91–103.
- Fedorchenko A.* (1980). About a method of calculation of two-dimensional nonstationary flows of viscous gas in nozzles// DAN SSSR. – 1980. – V. 251, № 3. – P. 578–582.
- Fedorchenko A.* (1981). Models of permiable boundaries for nonstationary problems of computational fluid dynamics// DAN SSSR. – 1981. – V. 260, № 4. – P. 826–830.
- Fedorchenko A.* (1982). About techniques of numerical investigation of nonstationary subsonic flows of viscous gas in channels// Zhurn. vych. mat. i matem. fiz. – 1982. – V. 22, № 1. – P. 178–196.
- Fedorchenko A.* (1983). About computational models of vortex interaction with permiable boundary of subsonic flow// DAN SSSR. – 1983. – V. 273, № 1. – P. 66–70.
- Fedorchenko A.* (1984). Nonlinear models of sound-absorb boundary section of a calculated segment of a channel// Akusticheski zhurnal. – 1984. – V. 30, № 6. – P. 827–833.
- Fedorchenko A.* (1986). About a problem of removal of vortices through permiable boundary of computational domain of nonstationary subsonic flow// Zhurn. vych. mat. i matem. fiz. – 1986. – V. 25, № 1. – P. 114–129.
- Feng and Kang* (1984). Asymptotic radiation conditions for reduced wave equations// J. Comp. Math. – 1984. – V. 2. – P. 60–70.

- Ferm L.* (1984). Open boundary procedures for stationary inviscid flow problems – Technical Report № 94, Upsala University, Dept. of Comp. Sciences, 1984.
- Ferm L.* (1985). Open boundary conditions for the flow around water turbines – Technical Report № 102, Upsala University, Dept. of Comp. Sciences, 1985.
- Ferm L.* (1987). Open boundary conditions for external flow problems – Technical Report № 108, Upsala University, Dept. of Comp. Sciences, 1987.
- Ferm L.* (1988). Open boundary conditions for stationary inviscid flow problems// J. Comp. Phys. – 1988. – V. 78. – P. 94–113.
- Ferm L.* (1990). Open boundary conditions for external flow problems// J. Comp. Phys. – 1990. – V. 91. – P. 55–70.
- Ferm L. and Gustafsson B.* (1982). A down-stream boundary procedure for the Euler equations// J. Comp. Fluids. – 1982. – V. 10, № 4. – P. 261–276.
- Ferm L. and Gustafsson B.* (1986). Far-field boundary conditions for steady state solutions to hyperbolic systems// Proc. International Conference on Hyperbolic Problems – St. Etienne: 1986. – P. 40–50.
- Fevens T. and Jiang H.* (1999). Absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation// SIAM J. Scient. Comp. – 1999. – V. 21, № 1. – P. 255–282.
- Fix G. and Gunzburger M.* (1980). On numerical methods for acoustic problems// J. Comp. Math. Appl. – 1980. – V. 6. – P. 265–278.
- Fix G. and Marin S.* (1978). Variational methods for underwater acoustic problems// J. Comp. Phys. – 1978. – V. 28. – P. 253–270.
- Foreman M.* (1986). An accuracy analysis of boundary conditions for the forced water equations// J. Comp. Phys. – 1986. – V. 64. – P. 334–367.
- Friedland A. and Pierce A.* (1960). Reflection of acoustic pulse from stable and instable interface between moving fluids// J. Phys. Fluids. – 1960. – V. 12. – P. 1148–1156.
- Fuchs E.* (1985). On boundary conditions for inner incompressible flows// Lecture notes in Physics. Ninth Intern. Conf. on Numer. Methods in Fluid Dynamics – New-York: Springer-Verlag, 1985. – P. 224–229.
- Fung K.-Y.* (1984). Far-field boundary conditions for unsteady transonic flows// AIAA J. – 1984. – V. 19. – P. 180–183.
- Fuyuki M. and Matsumoto Y.* (1980). Finite difference analysis of rayleigh wave scattering at a trench// Bull. Seismol. Soc. Am. – 1980. – V. 70, № 6. – P. 2051–2069.
- Gafurov M. and Abdrashitov D.* (1989). Study of non-reflecting conditions on boundaries of computational domain of visco-elastic media// Nestatsionarnye zadachi mekhaniki – Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1989. – P. 94–102.
- Gafurov M. and Khakimov M.* (1990). Investigation of non-reflecting two-dimensional conditions on boundaries of a computational domain for visco-elastic media// Chislennyye granichnyye uslovia – Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1990. – P. 131–141.

- Gallouet T., Herbin R. and Vignal M.H.* (2000). Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions// *SIAM J. Num. Anal.* – 2000. – V. 37, № 6. – P. 1935–1972.
- Gaponov S.* (1987). About mathematics simulation of development of disturbances in nonuniform gas flows – Technical Report № 5, ITPM SO AN SSSR, 1987.
- Gary J.* (1978). On boundary conditions for hyperbolic difference schemes// *J. Comp. Phys.* – 1978. – V. 26. – P. 339–351.
- Gavriluk V., Gerasimov B. and Semushin S.* (1987). About one formulation of subsonic boundary conditions for calculating stationary two-dimensional flows of compressible gas – Technical Report № 31, IPM im. M.V. Keldysha, 1987.
- Geisler T., Christiansen P. and Mork J.* (1990). Split-step spectral method for nonlinear schredinger equation with constant background intensities// *J. Comp. Phys.* – 1990. – V. 86, № 2. – P. 492–495.
- Giles M.* (1989). Nonreflected boundary conditions for Euler equation calculations – *AIAA Paper*, № 89-1912.
- Giles M.* (1990). Non-reflecting boundary conditions for Euler equation calculations// *AIAA J.* – 1990. – V. 28, № 12. – P. 2050–2058.
- Giles M. and Thompkins W.T.J.* (1984). Internal reflection due to a nonuniform grid// *Advances in Computational Methods for PDEs V. IMACS/Ed. Vichnevetsky R. and Stepleman R.S.* – North-Holland, 1984. – P. 322–328.
- Gilmanov A.* (2000). Methods of adaptive meshes in gas dynamic problems – M.: Nauka, 2000.
- Gilmanov A. and Aganin A.* (1985). Study of non-reflecting conditions on artificial boundaries of computational domain// *Dinamika obolochek v potoke* – Kazan: Phys.-Tech. Inst. – P. 77–87.
- Givoli D.* (1991). Non-reflecting boundary conditions: a review// *J. Comp. Phys.* – 1991. – V. 94, № 1. – P. 1–29.
- Givoli D.* (1992a). Numerical methods for problems in infinite domains – Amsterdam: Elsevier, 1992.
- Givoli D.* (1992b). A spatially exact non-reflectiong boundary condition for time dependent problems// *Comp. Meth. Appl. Mach. Engng.* – 1992. – V. 95. – P. 97–113.
- Givoli D.* (1999a). Exact representations on artificial interfaces and applications in mechanics// *J. Appl. Mech. Rev.* – 1999. – V. 52. – P. 333–349.
- Givoli D.* (1999b). Recent advances in the DtN FE Method// *J. Arch. Comp. Meth. Eng.* – 1999. – V. 6. – P. 71–116.
- Givoli D. and Cohen D.* (1995). Nonreflecting boundary conditions based on Kirchhoff-type formulae// *J. Comp. Phys.* – 1995. – V. 117. – P. 102–113.
- Givoli D. and Keller J.* (1989a). A finite element method for large domains// *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* – 1989. – V. 76. – P. 41–66.
- Givoli D. and Keller J.* (1989b). A finite element method for large domains// *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* – 1989. – V. 76. – P. 41–66.

- Givoli D. and Keller J.* (1990). Non-reflecting boundary conditions for elastic waves// *J. Wave Motion.* – 1990. – V. 12. – P. 261–279.
- Givoli D. and Patlashenko I.* (1997). Optimal local artificial boundary conditions// *Fluid Mechanics and its Applications* – Kluwer Academic Publisher, 1997. – V. 49. – P. 151–158.
- Givoli D. and Patlashenko I.* (1998). Optimal local non-reflecting boundary conditions// *J. Appl. Num. Math.* – 1998. – V. 27. – P. 367–384.
- Givoli D. and Patlashenko I.* (2000). An arbitrarily high order local non-reflecting boundary scheme – ECCOMAS 2000. – P. 1–12.
- Givoli D. and Vigdergauz S.* (1993). Artificial boundary conditions for 2d problems in geophysics// *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* – 1993. – V. 110. – P. 87–101.
- Godunov S. and Ryabenkii V.* (1963). Spectral criteria for the stability of boundary problems for non-self-adjoint difference equations// *Uspekhi Mat. Nauk.* – 1963. – V. 18.
- Godunov S. and Ryabenkii V.* (1964). Introduction to the theory of difference schemes – New-York: Interscience, 1964.
- Godunov S., Zabrodin A. Ivanov M. and Prokopov G.* (1976). Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics – M.: Nauka, 1976.
- Goldberg M. and Tadmor E.* (1978). Scheme-independent stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial-boundary value problems// *J. Math. Comp.* – 1978. – V. 32, № 144. – P. 1097–1107.
- Goldstein C.* (1981). The finite element method with non-uniform mesh size for unbounded domains// *J. Math. Comp.* – 1981. – V. 36. – P. 154–164.
- Goldstein C.* (1986). Finite element methods applied to nearly one-way wave propagation// *J. Comp. Phys.* – 1986. – V. 64. – P. 56–81.
- Gottlieb D., Gunzburger M. and Turkel E.* (1982). On numerical boundary treatment of hyperbolic systems for finite difference and finite element methods// *SIAM J. Num. Anal.* – 1982. – V. 19, № 4. – P. 671–682.
- Gottlieb D. and Turkel E.* (1976). Dissipative two-four methods for time-dependent problems// *Math. Comp.* – 1976. – V. 30, № 136. – P. 703–723.
- Gottlieb D. and Turkel E.* (1978). Boundary conditions for multistep finite-difference methods for time-dependent equations// *J. Comp. Phys.* – 1978. – V. 26. – P. 181–196.
- Gresho P. and Sani R.* (1987). On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations// *Int. J. Num. Meth. Fluids.* – 1987. – V. 7. – P. 1111–1120.
- Griffin M. and Anderson J.* (1977). On the application of boundary conditions to time-dependent computations for quasi one-dimensional fluid flows// *J. Comp. Fluids.* – 1977. – V. 5. – P. 127–137.
- Griffiths D.F.* (1997). The 'no boundary condition' outflow boundary condition// *Int. J. Num. Meth. Fluids.* – 1997. – V. 24. – P. 393–411.
- Grin V., Kraiko A. and Slavyanov N.* (1981). Solution of problem about jet launching// *J. Fluid Dynam.* – 1981. – №. 6. – P. 117–123.

- Grinstein F.* (1996). Open boundary conditions in the simulation of subsonic turbulent shear flows// *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 115. – P. 43–55.
- Grosch C. and Orszag S.* (1977). Numerical solution of problems in unbounded regions coordinate transformations// *J. Comp. Phys.* – 1977. – V. 25. – P. 273–295.
- Grote M. and Keller J.* (1995a). On nonreflecting boundary conditions// *J. Comp. Phys.* – 1995. – V. 122. – P. 231–243.
- Grote M. and Keller J.* (1996). Nonreflecting boundary conditions for time-dependent scattering// *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 127. – P. 52–65.
- Grote M.J. and Keller J.B.* (1995b). Exact nonreflecting boundary conditions for the time dependent wave equations// *SIAM J. Appl. Math.* – 1995. – V. 55, № 2. – P. 280–297.
- Grote M.J. and Keller J.B.* (2000). Exact nonreflecting boundary condition for elastic waves// *SIAM J. Appl. Math.* – 2000. – V. 60, № 3. – P. 803–819.
- Guerra J. and Gustafsson B.* (1986). A numerical method for incompressible flow problems with smooth solutions// *J. Comp. Phys.* – 1986. – V. 63. – P. 377–397.
- Gulin B. and Terentyev N.* (1974). Method of grids in problems with concentrators// *Trudy seminara – Kazan: Phys.-Tech. Inst.*, 1974. – P. 322–334.
- Gupta M. and Manohar R.* (1979). Boundary approximations and accuracy in viscous flow computations// *J. Comp. Phys.* – 1979. – V. 31. – P. 265–288.
- Gustafsson B. and Sundström A.* (1978). Incompletely parabolic problem in fluid dynamics// *SIAM J. of Appl. Math.* – 1978. – V. 35, № 2. – P. 343–357.
- Gustafsson B.* (1975). The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems// *J. Math. Comp.* – 1975. – V. 29. – P. 396–406.
- Gustafsson B.* (1980). Comment on “on boundary conditions for hyperbolic difference schemes”// *J. Comp. Phys.* – 1980. – V. 34. – P. 108–110.
- Gustafsson B.* (1981). The convergence rate for difference approximations to general mixed initial boundary value problems// *SIAM J. Num. Anal.* – 1981. – V. 18. – P. 179–190.
- Gustafsson B.* (1982). The choice of numerical boundary conditions for hyperbolic systems// *J. Comp. Phys.* – 1982. – V. 48. – P. 270–283.
- Gustafsson B.* (1985). Numerical boundary conditions// *Lectures in Applied Mathematics.* – 1985. – P. 279–308.
- Gustafsson B.* (1987a). Far-field boundary conditions for time-dependent hyperbolic systems// *SIAM J. Scient. Statist. Comp.* – 1987. – P. 150–160.
- Gustafsson B.* (1987b). Inhomogeneous conditions at open boundaries for wave propagation problems – Technical report – Stanford: Stanford University, 1987.
- Gustafsson B. and Ferm L.* (1986). Far-field boundary conditions for steady state solutions to hyperbolic systems// *Lecture Notes in Mathematics, Nonlinear Hyperbolic Problems.* – 1986. – P. 238–252.

- Gustafsson B. and Kreiss H.* (1979). Boundary conditions for time-dependent problems with an artificial boundary// *J. Comp. Phys.* - 1979. - V. 30. - P. 333-351.
- Gustafsson B., Kreiss H. and Sundström A.* (1972). Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems// *J. Math. Comp.* - 1972. - V. 26. - P. 649-686.
- Gustafsson B. and Nordström J.* (1990a). Boundary conditions for the Navier-Stokes equations at an artificial boundary intersecting a solid boundary - Technical Report № 11, Stockholm FFA TN, 1990.
- Gustafsson B. and Nordström J.* (1990b). Extrapolation procedures at out-flow boundaries for the Navier-Stokes equations - Technical Report № 23, Stockholm FFA TN, 1990.
- Gustafsson B. and Sundström A.* (1978). Incompletely parabolic systems in fluid dynamics// *SIAM J. Appl. Math.* - 1978. - V. 35. - P. 343-357.
- Gustafsson B. and Wahlund P.* (1980). Finite-difference methods for computing the steady flow about blunt bodies// *J. Comp. Phys.* - 1980. - V. 36. - P. 327-346.
- Hagstrom T.* (1991). Conditions at the downstream boundary for simulations of viscous, incompressible flow// *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* - 1991. - V. 12. - P. 843-858.
- Hagstrom T. and Hariharan S.* (1988). Accurate boundary conditions for exterior problems in gas dynamics// *J. Math. Comp.* - 1988. - V. 51. - P. 581-597.
- Hagstrom T. and Keller H.* (1984). The numerical calculation of traveling solutions of non-linear parabolic equations on the line - Technical Report № 2646, University of Wisconsin, 1984.
- Hagstrom T. and Keller H.* (1986). Exact boundary conditions at artificial boundary for partial differential equations in cylinders// *SIAM J. Math. Anal.* - 1986. - V. 17, № 2. - P. 322-341.
- Halpern L.* (1982). Absorbing boundary conditions for the discretization schemes of the one-dimensional wave equations// *J. Math. Comp.* - 1982. - V. 38, № 158. - P. 415-429.
- Halpern L.* (1985). Artificial boundary conditions for the linear advection diffusion equation - Paris: Centre de Mathematiques Appliquees, Ecole Poly-Technique, 1985.
- Halpern L.* (1986). Artificial boundary conditions for the linear advection diffusion equation// *J. Math. Comp.* - 1986. - V. 46. - P. 425-438.
- Halpern L. and Schatzman M.* (1989). Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows// *SIAM J. Math. Anal.* - 1989. - V. 20. - P. 308-353.
- Halpern L. and Trefethen L.* (1988). Wide angle one-way waves equations// *J. Acoust. Soc. Am.* - 1988. - V. 84, № 4. - P. 1397-1404.
- Han T., Meng J. and Innis G.* (1983). An open boundary condition for incompressible stratified flows// *J. Comp. Phys.* - 1983. - V. 49. - P. 276-297.
- Hänel D. and Giese U.* (1983). The influence of boundary conditions on the stability of approximate-factorization methods// *Not. Num. Fluid Mech.* - 1983. - V. 7. - P. 108-115.

- Hangstrom T. and Hariharan S.I.* (1988). Accurate boundary conditions for exterior problems in gas dynamics// *J. Math. Comp.* - 1988. - V. 51. - P. 581-597.
- Hangstrom T. and Keller H.* (1984). The numerical calculation of traveling solutions of non-linear parabolic equations on the line - Technical Report № 2646, University of Wisconsin, 1984.
- Hangstrom T. and Keller H.* (1986). Exact boundary conditions at an artificial boundary for partial differential equations in cylinder// *SIAM J. Math. Anal.* - 1986. - V. 17, № 2. - P. 322-341.
- Hanson D.* (1984). Shielding of prop-fan cabin noise by the fuselage boundary layer// *J. Sound Vibr.* - 1984. - V. 92. - P. 591-598.
- Hanson M. and Petschek A.* (1977). A boundary condition for significantly reducing boundary reflections with a Lagrangian mesh// *J. Comp. Phys.* - 1977. - V. 21. - P. 333-339.
- Harari I. and Hughes T.* (1991). Finite element methods for the helmholtz equation in an exterior domain: Model problems// *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* - 1991. - V. 87. - P. 59-96.
- Harari I. and Hughes T.* (1992). Analysis of continuous formulations underlying the computation of time-harmonic acoustics in exterior domains// *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* - 1992. - V. 97. - P. 103-124.
- Harari I. and Hughes T.* (1994). Studies of domain-based formulations for computing exterior problems of acoustics// *Int. J. Num. Meth. Eng.* - 1994. - V. 37. - P. 2935-2950.
- Harari I., Patlashenko I. and Givoli D.* (1998). Dirichlet-to-Neumann maps for unbounded wave guides// *J. Comp. Phys.* - 1998. - V. 143. - P. 200-223.
- Hariharan S. and Bayliss A.* (1985). Radiation of sound from unflanged cylindrical ducts// *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* - 1985. - V. 6, № 2. - P. 285-296.
- Hariharan S. and Johnson D.* (1995). A framework for evaluating boundary conditions// *J. of Comp. Acoustics.* - 1995. - V. 3, № 3. - P. 241-259.
- Häuser J., Eppel D., Lobmeyr M., Muller A. and Paap H.* (1983). Numerical experience with boundary conformed coordinate systems for solution of the shallow water equations// *Notes Num. Fluid Mech.* - 1983. - V. 7. - P. 116-123.
- Hedstrom G.* (1979). Non-reflecting boundary conditions for non linear hyperbolic systems// *J. Comp. Phys.* - 1979. - V. 30. - P. 222-237.
- Heinrich J.C. and Vionnet C.A.* (1995). On boundary conditions for unbounded flows// *J. Commun. Num. Meth. Eng.* - 1995. - V. 11. - P. 179-186.
- Hesthaven J. and Gottlieb D.* (1996). A stable penalty method for the compressible Navier-Stokes equations - 1) open boundary conditions// *SIAM J. Scient. Comp.* - 1996. - V. 3. - P. 579-612.
- Hestholm S.O. and Ruud B.O.* (1998). Radiation boundary conditions for elastic wave propagation// *J. Geophys.* - 1998. - V. 63. - P. 1017-1023.
- Higdon R.* (1984). Boundary conditions for suppressing rapidly moving components in hyperbolic systems// *SIAM J. Num. Anal.* - 1984. - V. 21, № 3. - P. 413-432.

- Higdon R.* (1986a). Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation// *J. Math. Comp.* – 1986. – V. 47. – P. 437–459.
- Higdon R.* (1986b). Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems// *SIAM Rev.* – 1986. – V. 28. – P. 177–217.
- Higdon R.* (1987). Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation// *J. Math. Comp.* – 1987. – V. 49, № 179. – P. :65–90.
- Higdon R.* (1990). Radiation boundary conditions for elastic wave propagation// *SIAM J. Num. Anal.* – 1990. – V. 27, № 4. – P. 831–870.
- Higdon R.* (1991). Absorbing boundary conditions for elastic waves// *J. Geophys.* – 1991. – V. 56. – P. 100–133.
- Higdon R.* (1992). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media// *J. Comp. Phys.* – 1992. – V. 101, № 2. – P. 386–418.
- Higdon R.* (1994). Radiation boundary conditions for dispersive waves// *SIAM J. Num. Anal.* – 1994. – V. 31, № 1. – P. 64–100.
- Hirsch C. and Verhoff A.* (1989). Far-field numerical boundary conditions for internal and cascade flow computations – *AIAA Paper*, № 89-1943, 1989.
- Hirt C.* (1999). Addition of wave transmitting boundary conditions to the FLOW-3D program – *Technical Report* № FSI-99-TN 49, 1999.
- Hirt C.W., Amsden A.A. and Cook J.L.* (1974). An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds// *J. Comp. Phys.* – 1974. – V. 14, № 3. – P. 227–253.
- Holland R. and Simpson L.* (1981). Finite-difference analysis of EMP coupling to thin struts and wires – *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 1981. – P. 88–97.
- Howell L. and Trefethen L.N.* (1987). Ill-posedness of absorbing boundary conditions for migration – *Technical Report* № 87-2-MIT, Cambridge, Mathematics Department, 1981.
- Hu F.* (1996a). On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by perfectly matched layer// *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 129. – P. 201–219.
- Hu F.Q.* (1996b). On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer// *J. Comp. Phys.* – 1996. – V. 129. – P. 201–219.
- If F., Berg P., Christiansen P. and Skovgaard O.* (1987). Split-step spectral method for nonlinear schrodinger equation with absorbing boundaries// *J. Comp. Phys.* – 1987. – V. 72, № 2. – P. 501–503.
- If F., Berg P. and Skovgaard O.* (1990). Regular and staggered grids in spectral approximations of the elastic wave equation – *Technical report*, SEG, 1987.
- Ilan A.* (1978). Stability of finite difference schemes for the problem of elastic wave propagation in a quarter plane// *J. Comp. Phys.* – 1978. – V. 29. – P. 389–403.

- Ilan A. and Lowenthal D.* (1976). Instability of finite-difference schemes due to boundary conditions in elastic media// *Geophys. Prosp.* - 1976. - V. 24. - P. 431-453.
- Ilan A., Ungar A. and Alterman Z.* (1975). An improved representation of boundary conditions in finite difference schemes for seismological problems// *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* - 1975. - V. 43. - P. 727-745.
- Ilgamov M.* (1985a). About non-reflecting conditions on boundaries of computational domain// *Dinamika obolochek v potoke* - Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1985. P.4-76.
- Ilgamov M.* (1985b). Non-reflecting conditions on a boundary of the computational domain// *Abstracts of Tenth Canadian Congress of Applied Mechanics. (CANCAM-85).* - P. 60-61.
- Ilgamov M.* (1990a). Absorbing layer in computational domain// *Chislennyye granichnyye uslovia* - Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1990. - P. 55-65.
- Ilgamov M.* (1990b). A review of papers on non-reflecting conditions on boundaries of computational domain// *Chislennyye granichnyye uslovia* - Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1990. - P. 6-54.
- Ilgamov M. and Ilyushin A.* (1989). Application of non-reflecting condition in simulating transverse gas flow around cylinder// *Nestatsionarnyye zadachi mekhaniki* - Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1989. - P. 73-83.
- Ilgamov M. and Sabitov M.* (1982). About one approximate method of calculation of stability of a plate in flow of incompressible fluid// *Izv. AN SSSR, MTT.* - 1982. - № 5. - P. 152-160.
- Ilgamov M. and Tukmakov A.L.* (1996). Numerical simulation of nonlinear behavior an elastic panel in a gas flow// *Izv. RAN, MJG.* - 1996. - № 5. - P. 134-141.
- Ilyushin A.* (1987). Application of non-reflecting condition to problem sub- and supersonic transverse flow around cylinder - Technical report, Dep. VINITI, 1987.
- Ilyushin A. and Tukmakov A.* (1990). Construction of non-reflecting boundary conditions with the help of an absorbing layer// *Chislennyye granichnyye uslovia* - Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1990. - P. 74-84.
- Israeli M. and Orzag S.* (1981). Approximation of radiation boundary conditions// *J. Comp. Phys.* - 1981. - V. 41. - P. 115-135.
- Ivanov V. and Masyutina M.* (1983). Methods of solution of direct and reverse problems of electric logging - M.: Nauka, 1983.
- Ivanov V. and Nekhaeva G.* (1984). To a question of numerical methods of solution of external boundary-value problems of electric field// *Izv. vuzov, Electromekhanika.* - 1984. - № 6. - P. 5-11.
- Ivanov V. and Nekhaeva G.* (1986). To numerical solution of external boundary-value problems for elliptic equations// *Zhurn. vych. mat. i matem. fiz.* - 1986. - V. 25, № 1. - P. 65-71.
- Jacobsen L.* (1949). Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier// *Bull. Seismol. Soc. Am.* - 1949. - V. 39. - P. 189-204.

- James F.* (1982). Convergence results for some conservation laws with a reflux boundary condition and a relaxation term arising in chemical engineering// *SIAM J. Math. Anal.* – 1982. – V. 29, № 5. – P. 1200–1223.
- Jameson A.* (1986). Avertex based multigrid algorithm for three-dimensional flow calculations// *ASME AMD, Amer. Soc. Mech. Engin.* – 1986. – V. 78. – P. 45–73.
- Jiang H. and Wong Y.* (1990). Absorbing boundary conditions for second-order hyperbolic equations// *J. Comp. Phys.* – 1990. – V. 88. – P. 205–231.
- Johansson B.C.V.* (1993). Boundary conditions for open boundaries for the incompressible Navier-Stokes equation// *J. Comp. Phys.* – 1993. – V. 105. – P. 233–251.
- Joly P. and Tuomela J.* (1997). A new theoretical approach to absorbing layers// *SIAM J. Num. Anal.* – 1997. – V. 34, № 2. – P. 671–698.
- Kallivokas L., Bielak J. and MacCamy R.* (1997a). Absorbing boundaries of arbitrary shape for the three-dimensional wave equation.// *Fluid Mechanics and its Applications* – Kluwer Academic Publisher, 1997. – P. 43–51.
- Kallivokas L., Bielak J. and MacCamy R.* (1997b). A simple impedance-infinite element for the finite element solution of the three-dimensional wave equation in unbounded domains// *J. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrd.* – 1997. – V. 147. – P. 235–262.
- Kangro R. and Nicolaides R.* (1998). Far field boundary conditions for black-sholes equations// *SIAM J. Num. Anal.* – 1998. – V. 38, № 4. – P. 1357–1368.
- Karni S.* (1991). To the boundary and back — a numerical study// *Int. J. Num. Meth. in Fluids.* – 1991. – V. 13. – P. 201–216.
- Karni S.* (1992). Accelerated convergence to steady state by gradual far-field damping// *AIAA J.* – 1992. – V. 30, № 5. – P. 1220–1227.
- Karp S.* (1961). A convergent far-field expansion for two-dimensional radiation function// *J. Comm. Pure Appl. Math.* – 1961. – V. 14. – P. 427–434.
- Kausel E. and Tassoulas J.* (1981). Transmitting boundaries: a closed-form comparison// *Bull. Seismol. Soc. Amer.* – 1981. – V. 71, № 1. – P. 143–159.
- Kazniadakis G., Israeli M. and Orzag S.* (1991). High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations// *J. Comp. Phys.* – 1991. – V. 97. – P. 414–443.
- Keller J. and Givoli D.* (1989). Exact non-reflecting boundary conditions// *J. Comp. Phys.* – 1989. – V. 82. – P. 172–192.
- Kelly K., Ward R., Treitel S. and Alford R.* (1976). Synthetic seismograms, a finite-difference approach// *J. Geophys.* – 1976. – V. 41. – P. 2–24.
- Kentzer C.* (1970). Discretization of boundary conditions on moving discontinuities// *Proc. of the Second Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics* – Berkeley: Univ. of Cal., 1970. – P. 108–113.
- Keys R.* (1985). Absorbing boundary conditions for acoustic media// *J. Geophys.* – 1985. – V. 50, № 6. – P. 892–902.

- Kim K., Reid R. and Whitaker R.* (1988). On an open radiational boundary condition for weakly dispersive tsunami waves// J. Comp. Phys. - 1988. - V. 76. - P. 327-348.
- Kim S., Liu P. and Liggett T.* (1983). Boundary integral equation solutions for solitary wave generation propagation and run-up// J. Coast. Engin. - 1983. - V. 7, № 3. - P. 299-317.
- Kirby J.* (1989). A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations// J. Coast. Eng. - 1989. - V. 13, № 3. - P. 211-218.
- Klemp J. and Lilly D.* (1978). Numerical simulation of hydrostatic mountain waves// J. Atmosph. Scien. - 1978. - V. 35. - P. 78-107.
- Kosloff R. and Kosloff D.* (1986). Absorbing boundaries for wave propagation problems// J. Comp. Phys. - 1986. - V. 63. - P. 363-376.
- Koster D.* (1973). Stability of a finite difference scheme with "wrong" boundary conditions// SIAM J. Anal. - 1973. - V. 10. - P. 1039-1046.
- Kotsubo S.* (1965). Seismic force effect on submerged bridge piers with elliptic cross sections// Proc. Third World Conf. on Earthquake Engineering. - 1965. - P. 342-356.
- Kreiss H.* (1968). Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems// J. Math. Comp. - 1968. - V. 22. - P. 703-714.
- Kreiss H.* (1970). Initial boundary value problems for hyperbolic systems// J. Comm. Pure Appl. Math. - 1970. - V. 23. - P. 277-298.
- Kreiss H.* (1971). Difference approximations for initial boundary-value problems - London: Proc. Roy. Soc., 1971. - P. 225-261.
- Kreiss H. and Olinger J.* (1973). Methods for the approximate solution of time dependent problems - Technical Report № 10, World Meteorological Organization, 1973.
- Kriegsmann G.* (1982). Radiation conditions for wave guide problems// SIAM J. Sci. Comp. - 1982. - V. 3, № 3. - P. 318-326.
- Kriegsmann G. and Moore T.* (1988). An application of the on-surface radiation condition to the scattering of acoustic waves by a reactively loaded sphere// J. Wave Motion. - 1988. - V. 10. - P. 277-284.
- Kriegsmann G. and Morawetz C.* (1978). Numerical solutions of exterior problems with the reduced wave equation// J. Comp. Phys. - 1978. - V. 28. - P. 181-197.
- Kriegsmann G.A. and Morawetz C.S.* (1979). Numerical solution of exterior problems with the reduced wave equation// J. Comp. Phys. - 1979. - V. 28. - P. 181-197.
- Kriegsmann G. and Morawetz C.* (1980). Solving the Helmholtz equation for exterior problems with variable index of refraction: I.// SIAM J. Sci. Stat. Comp. - 1980. - V. 1. - P. 371-385.
- Kriegsmann G., Norris A. and Reiss E.* (1986). Acoustic pulse scattering by baffled membranes// J. Acoust. Soc. Amer. - 1986. - V. 79. - P. 123-133.
- Kriegsmann G., Taflove A. and Umashankar K.* (1981). A new formulation of electromagnetic wave scattering using an on-surface radiation non-reflecting far-field boundary conditions for unsteady transonic flow computation// AIAA J. - 1981. - № 11. - P. 105-115.

- Kriegsmann G., Taflove A. and Umashankar K. (1987). A new formulation of electromagnetic wave scattering using an on-surface radiation boundary condition approach// IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1987. – V. 35, № 2. – P. 152–161.
- Kunz K. and Lee K.-M. (1978). A three-dimensional finite-difference solution of the external response of an aircraft to a complex transient EM environment: Part I, The method and its implementation// IEEE Trans. Electromagn. Compat.. – 1978. – V. 20. – P. 328–333.
- Kurdyuk A. and Likhovisev V. (1987). Algorithm of numerical implementation for estimation of intensity of oscillations of water-saturated soil foundations// Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti – Gorky: 1987. – P. 110–116.
- Kussmaul R. (1969). Ein numerisches verfahren losung des neumannschen aussenraum problems fur die helmholtzsche schwingungsgleichung// J. Comp. – 1969. – V. 4. – P. 246–273.
- Kutdusov R. (1990). Application of non-reflecting boundary conditions in an axisymmetric problem of gas dynamics// Chislennyye granichnye uslovia – Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1990. – P. 66–73.
- Kwak D. (1981). Non-reflecting far-field boundary conditions for unsteady transonic flow computation// AIAA J. – 1981. – V. 19, № 11. – P. 105–115.
- Kweon J.R. (2000). A discontinuous Galerkin method for convection-dominated compressible viscous Navier-Stokes equations with an inflow boundary condition// SIAM J. Num. Anal. – 2000. – V. 38, № 3. – P. 699–717.
- Kweon J.R. and Kellogg R.B. (1997). Compressible Navier-Stokes equations in a bounded domain with inflow boundary condition// SIAM J. Math. Anal. – 1997. – V. 28, № 1. – P. 94–108.
- Lacey A.A., Ockendon J.R. and Sabina J. (1998). Multidimensional reaction diffusion equations with nonlinear boundary conditions// SIAM J. Appl. Math. – 1998. – V. 58, № 5. – P. 1622–1647.
- Levine H. and Schwinger J. (1948). On the radiation of sound from an unflanged circular pipe// Phys. Rev. – 1948. – V. 73. – P. 383–406.
- Liao Z., Wong H., Yang B. and Yuan Y. (1984). A transmitting boundary for transient wave analyses – Scientia Sinica, 1984. – P. 1063–1076.
- Lilly D. and Kennedy P. (1973). Observations of a stationary mountain wave and its associated momentum flux and energy dissipation// J. Atmos. Sci. – 1973. – V. 30. – P. 1135–1152.
- Lindman E. (1973). On getting all the waves out of the box// Proceedings of the Sixth Conference on Numerical Simulation of Plasmas – Berkeley: 1973. – P. 42–45.
- Lindman E. (1975). «Free-space» boundary conditions for the time-dependent wave equation// J. Comp. Phys. – 1975. – V. 18. – P. 66–78.
- Liu Z. and Liu Z. (1994). Fourth order finite difference and multigrid method for modeling instabilities in flat plate boundary layer-2D and 3D approaches// J. Comp. Fluids. – 1994. – V. 23, № 7. – P. 955–982.

- Lohéac J.-P.* (1991). An artificial boundary condition for an advection-diffusion equation// J. Math. Meth. Appl. Sci. – 1991. – V. 14. – P. 155–175.
- Long L. and Liow J.* (1990). A transparent boundary for finite-difference wave simulation// J. Geophys. – 1990. – V. 55, № 2. – P. 201–208.
- Luchini P. and Tognaccini R.* (1996). Direction-adaptive nonreflecting boundary conditions// J. Comp. Phys. – 1996. – V. 128, № 1. – P. 121–133.
- Lysmer J. and Kuhlemeyer R.* (1969). Finite dynamic model for infinite media// J. Eng. Mech. Div. Am. Soc. Civil Engrs., EM-95. – 1969. – № 4. – P. 859–877.
- Lysmer J.M. and Richart F.* (1966). Dynamic response of footings to vertical loading// J. Soil Mech. Found. Div., ASCE. – 1966. – V. 92, № 5. – P. 65–91.
- Lysmer J.M. and Waas G.* (1972). Shear waves in plane infinite structures// J. Eng. Mech. Div. ASME, EM1. – 1972. – V. 28. – P. 85–105.
- MacCamy R.* (1980). Variational procedures for a class of exterior interface problems// J. Math. Anal. Appl. – 1980. – V. 78. – P. 248–266.
- MacCamy R. and Marin S.* (1980). A finite element method for exterior interface problems// Int. J. Math. Sci. – 1980. – V. 3, № 2. – P. 311–350.
- MacCormack R.W.* (1971). Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer// Lecture Notes in Physics – New-York: Springer-Verlag, 1971. – P. 151–163.
- Maestrello L., Bayliss A. and Turkel E.* (1981). On the interaction of a sound pulse with the shear layer of an axisymmetric jet// J. Sound. Vib. – 1981. – V. 74. – P. 281–301.
- Mahrer K.* (1986). An empirical study of instability and improvement of absorbing boundary conditions for the elastic wave equation// J. Geophys. – 1986. – V. 51, № 7. – P. 1499–1501.
- Majda A. and Osher S.* (1975a). Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundaries// J. Comm. Pure Appl. Math. – 1975. – V. 28. – P. 607–675.
- Majda A. and Osher S.* (1975b). Reflection of singularities at the boundary// J. Comm. Pure Appl. Math. – 1975. – V. 28. – P. 479–491.
- Malhotra M. and Pinsky P.* (1996). Matrix-free interpretation of the non-local Dirichlet-to-Neumann radiation boundary condition// Int. J. Num. Meth. Engng. – 1996. – V. 39. – P. 3705–3713.
- Marin S.* (1982). Computing scattering amplitudes for arbitrary cylinders under incident plane waves// IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1982. – V. 30, № 6. – P. 1045–1049.
- Masliyah J. and Epstein N.* (1970). Numerical study of steady flow past spheroids// J. Fluid Mech. – 1970. – V. 44. – P. 493–512.
- Matsuno T.* (1966). False reflection of waves of the boundary due to use of finite difference// J. Met. Soc. Japan. – 1966. – V. 44. – P. 145–157.
- McDaniel S.* (1975). Parabolic approximations for underwater sound propagation// J. Acoust. Soc. Amer. – 1975. – V. 58, № 5. – P. 1178–1185.

- Mei K. (1974). Unimoment method of solving antenna and scattering problems// IEEE Trans. Antennas Propagat. - 1974. - V. 22. - P. 760-766.
- Merewether D. (1971). Transient currents induced on a metallic body of revolution by an electromagnetic pulse// IEEE Trans. Electromagn. Compat. - 1971. - V. 13. - P. 41-44.
- Michelson D. (1983). Stability theory of difference approximations for multi-dimensional initial-boundary value problems// J. Math. Comp. - 1983. - V. 1. - P. 1-46.
- Miller M. and Thorpe A. (1981). Radiation conditions for the lateral boundaries of limited-area numerical models// Quart. J. R. Met. Soc. - 1981. - V. 107. - P. 615-628.
- Mirsaidov M. (1985). Solution of dynamic problems for non-uniform visco-elastic systems with the use of finite element method// Raschet zdaniy i sooruzenii na seismostoikost - Tashkent: Fan, 1985. - P. 85-93.
- Mirsaidov M. et al. (1982). Longitudinal oscillations of nonuniform semi-infinite elastic rod// Krayvye zadachi mekhaniki sploshnykh sred - Tashkent: Fan, 1982. - P. 161-169.
- Mirsaidov M. and Troyanovsky I. (1980). Wave problem of seismostability of construction under propagation of reley wave in elastic semispace// Izv. AN Uz. SSR, Ser. Tekhn. Nauk. - 1980. - V. 5. - P. 48-51.
- Miura K., Masuda K., Miuramoto Y. and Urao K. (1983). Boundary elements superposition method to solve dynamic soil-structure interaction. Boundary elements// Proceeding of the Fifth International Conference. - Springer-Verlag, 1983. - P. 110-115.
- Moore T., Blaschak J., Taflove A. and Kriegsmann G. (1988a). Theory and application of radiation boundary operators// IEEE Trans. Antennas Propagat. - 1988. - V. 36, № 12. - P. 1797-1812.
- Moore T., Kriegsmann G. and Taflove A. (1988b). An application of the wkbj technique to the on-surface radiation condition// IEEE Trans. Antennas Propagat. - 1988. - V. 36. - P. 1329-1331.
- Moretti G. (1982). Experiments on initial and boundary conditions// Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows - New-York: Springer-Verlag, 1982. - P. 15-34.
- Moretti G. (1987). A technique for integrating the two-dimensional Euler equations// J. Comp. Fluids. - 1987. - V. 15, № 1. - P. 59-75.
- Moretti G. and Pandolfi M. (1981). Critical study of calculations of subsonic flows in ducts// AIAA J. - 1981. - V. 19. - P. 449-457.
- Morse P. and Ingard K. (1968). Theoretical Acoustics - New-York: McGraw-Hill, 1968.
- Mur G. (1981). Absorbing boundary for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations// IEEE Trans. Electromag. Compat. - 1981. - V. 23, № 4. - P. 377-382.
- Nallasamy M., Clark B. and Groeneweg J. (1988). High-speed propeller noise predictions: effects of boundary conditions used in blade loading calculations// J. Aircraft. 1988. - V. 25, № 2. - P. 154-152.

- Nasibov S.* (1977). About numerical separation of bounded solutions of sets of linear differential equations in partial derivatives of evolutionary type// *Zhurn. vych. mat. i matem. fiz.* – 1977. – V. 17. – P. 119–135.
- Nataf F.* (1989). An open boundary condition for the computation of the steady incompressible Navier-Stokes equations// *J. Comp. Phys.* – 1989. – V. 85. – P. 104–129.
- Ng B. and Reid W.* (1980). On the numerical solution of the orr-sommerfeld problems asymptotic initial conditions for shooting methods// *J. Comp. Phys.* – 1980. – V. 38. – P. 275–293.
- Nicoud F.* (1998). On the amplitude of waves in characteristic boundary conditions for Euler equations – Technical report, Cerfacs, 1998.
- Nitta T.* (1962). The outflow boundary condition in numerical time integration of advective equations// *J. Meteor. Soc. Japan.* – 1962. – V. 40, № 1. – P. 13–94.
- Nitta T.* (1964). On the reflective computational wave caused by the outflow boundary conditions// *J. Meteor. Soc. Japan.* – 1964. – V. 42. – P. 274–276.
- Nordström J.* (1986). Energy absorbing boundary conditions for the Navier-Stokes equation// *Lecture Notes in Physics. Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics.* – Beijing: 1986.
- Nordström J.* (1988). Open boundary conditions for the Navier-Stokes equation – Technical Report № 145, FFA, Stockholm, 1988.
- Nordström J.* (1989). The influence of open boundary conditions on the convergence to steady state for the Navier-Stokes equations// *J. Comp. Phys.* – 1989. – V. 85. – P. 210–244.
- Nordström J.* (1992). Extrapolation procedures for the time-dependent Navier-Stokes equations// *AIAA J.* – 1992. – V. 30, № 6. – P. 1654–1656.
- Nordström J.* (1995). Accurate solutions of the Navier-Stokes equations despite unknown outflow boundary data// *J. Comp. Phys.* – 1995. – V. 120. – P. 184–205.
- Oliger J.* (1974). Fourth order difference methods for the initial boundary-value problem for hyperbolic equations// *J. Math. Comp.* – 1974. – V. 28. – P. :15–25.
- Oliger J.* (1976). Hybrid difference method for the initial boundary value problem for hyperbolic equations// *J. Math. Comp.* – 1976. – V. 30, № 136. – P. 724–738.
- Oliger J. and Sundström A.* (1978). Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics// *SIAM J. Appl. Mathem.* – 1978. – V. 35, № 3. – P. 419–446.
- Olson L.* (1991). Discretization errors in infinite domain problems// *J. Struc. Acoust.* – 1991. – V. 128. – P. 113–116.
- Orlanski I.* (1976). A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows// *J. Comp. Phys.* – 1976. – V. 21, № 3. – P. 251–269.
- Orzag S., Israeli M. and Deville M.* (1986). Boundary conditions for incompressible flows// *J. Sci. Comp.* – 1986. – V. 1, № 1. – P. 75–85.

- Osher S. (1969). Stability of difference approximations of dissipative type for mixed initial-boundary value problems// J. Math. Comp. – 1969. – V. 23. – P. 335–340.
- Osher S. and Chakravarthy S. (1983). Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries// J. Comp. Phys. – 1983. – V. 50. – P. 447–481.
- Pandolfi M. and L. Z. (1985). Some permeable boundaries in multidimensional unsteady flows// Lect. Notes Phys. – 1985. – № 90. – P. 439–446.
- Papanastasiou T.C., Malamataris M. and Ellwod K. (1992). A new outflow boundary condition// Int. J. Num. Meth. Fluids. – 1992. – V. 14. – P. 587–608.
- Parter S.V. (1962). J. Num. Math. – 1962. – V. 4. – P. 277.
- Patlashenko I. and Givoli D. (a) Numerical solution of nonlinear exterior wave problems using local absorbing boundary conditions// J. Comp. Model. Eng. Sci. – to appear.
- Patlashenko I. and Givoli D. (b) Optimal local nonreflecting boundary conditions for time-dependent waves// J. Comp. Acoust. – to appear.
- Pavlov A.A. and Ilgamov M.A. (1974). Investigation of shock wave in liquid// Trudy seminar po teorii obolochek – Kazan: Phys.-Tech. Inst., 1974. – P. 181–195.
- Pearson R. (1974). Consistent boundary conditions for numerical models that admit dispersive waves// J. Atmos. Sci. – 1974. – V. 31. – P. 1481–1489.
- Peng C. and Toksöz M.N. (1995a). An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling// J. Geophys. – 1995. – V. 60. – P. 296–301.
- Peng C. and Toksöz M.N. (1995b). An optimal absorbing boundary condition for finite difference modeling of acoustic and elastic wave propagation// J. Acoust. Soc. Am. – 1995. – V. 91. – P. 733–745.
- Petropoulos P.G. (2000). Reflectionless sponge layers as absorbing boundary conditions for the numerical solution of maxwell equations in rectangular, cylindrical, and spherical coordinates// SIAM J. Appl. Math. – 2000. – V. 60, № 3. – P. 1037–1058.
- Petschek A. and Hanson M. (1968). Difference equations for two-dimensional elastic flow// J. Comp. Phys. – 1968. – V. 3. – P. 307–321.
- Pinsky P. and Thompson L. (1991). Accuracy of local non-reflecting boundary conditions for time-dependent structural acoustics// ASME, Struct. Acoust. – 1991. – V. 128. – P. 153–160.
- Pogorelov N. and Semenov A. (1993). Exact non-reflecting boundary conditions on open surface for gas dynamic calculations – Technical Report № 29, Moscow, Gen. Phys. Inst. Russia Acad. Sci., 1993.
- Pogorelov N. and Semenov A. (1996). Modification of non-reflecting boundary conditions in gasdynamic simulation// J. Vychislit. Matem. Matem. Fiz. – 1996. – V. 36, № 3. – P. 135–146.
- Pogorelov N.V. (1995). Periodic stellar wind/interstellar medium interaction// J. Astron. Astrophys. – 1995. – V. 297. – P. 835–840.

- Poinsot T. and Lele S.* (1992). Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows// *J. Comp. Phys.* – 1992. – V. 101. – P. 104–129.
- Pruett Z., Chang and Carpenter* (1995). Spatial direct numerical simulation of high-speed boundary layers flows. Part 1: Algorithmic considerations and validation// *J. Theor. Comp. Fluid Dyn.* – 1995. – V. 7. – P. 49–76.
- Quartapelle L.* (1981). Vorticity conditioning in the computation of two-dimensional viscous flows// *J. Comp. Phys.* – 1981. – V. 40. – P. 453–460.
- Quartapelle L. and Valz-Gris F.* (1981). Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows// *Int. J. Num. Math. Fluids.* – 1981. – V. 1. – P. 129–140.
- Ramahi O.M.* (1997). Complementary boundary operators for wave propagation problems// *J. Comp. Phys.* – 1987. – V. 133, № 1. – P. 113–128.
- Randall C.* (1988). Absorbing boundary condition for the elastic wave equation// *J. Geophys.* – 1988. – V. 53, № 5. – P. 611–624.
- Randall C.* (1989). Absorbing boundary condition for the elastic wave equation: velocity-stress formulation// *J. Geophys.* – 1989. – V. 54, № 5. – P. 1141–1152.
- Rao J.* (1982). Multifocal three-dimensional bootlace lenses// *IEEE Trans. Antenn. Propagat.* – 1982. – V. 30, № 6. – P. 1050–1056.
- Raymond W. and Kuo H.* (1984). A radiation boundary condition for multi-dimensional flows// *Quart. J. R. Met. Soc.* – 1984. – V. 110. – P. 535–551.
- Razafimahery F.* (1989). Numerical study of incompressible fluids in unbounded domains// *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 1989. – V. 28. – P. 2203–2218.
- Renardy M.* (1997). Imposing 'no' boundary condition at outflow: why does it work?// *Int. J. Num. Meth. Fluids.* – 1997. – V. 24. – P. 413–417.
- Renaut R. and Petersen J.* (1989). Stability of wide-angle absorbing boundary conditions// *J. Geophys.* – 1989. – V. 54, № 9. – P. 1153–1163.
- Reynolds A.* (1978). Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems// *J. Geophys.* – 1978. – V. 43, № 6. – P. 1099–1110.
- Ribner H.* (1957). Reflection, transmission and amplification of sound by moving medium// *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1957. – V. 29. – P. 435–441.
- Richardson L.* (1910). The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problem involving differential equations – London: Trans. Roy. Soc., 1910. – P. 307–357.
- Richtmyer R.D. and Morton K.W.* (1967). Difference methods for initial value problems – New-York: Interscience, 1967.
- Roache P.* (1976). Computational fluid dynamics – Albuquerque: Hermosa Publishers, 1976.
- Roe* (1989). Remote boundary condition for unsteady multidimensional aerodynamic computations// *J. Comp. Fluids.* – 1989. – V. 17, № 1. – P. 221–231.

- Rowley C.W. and Colonius T. (2000). Directly nonreflectiong boundary conditions for linear hyperbolic systems// J. Comp. Phys. – 2000. – V. 157, № 2. – P. 500–538.
- Rudy D. and Strikwerda J. (1979). Boundary condition for subsonic compressible Navier-Stokes calculations – Technical Report № 79-18, ICASE, 1979.
- Rudy D. and Strikwerda J. (1980). A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations// J. Comp. Phys. – 1980. – V. 36. – P. 55–70.
- Rudy D. and Strikwerda J. (1981). Boundary conditions for subsonic compressible Navier-Stokes calculations// J. Comp. Phys. – 1981. – V. 9. – P. 327–338.
- Ryabenkii V. (1990). Exact transfer of boundary conditions// Vichislitelnaya mehanika tverdogo deformiruемого tela – M.: IPM, 1990. – P. 129–145.
- Saltanov G. (1979). Non-equilibrium and non-stationary processes in gas dynamics of one-phase and two-phase media – M.: Nauka, 1979.
- Sani R.L. and Gresho P.M. (1994). Résumé and remarks on the open boundary condition minisymposium// Int. J. Num. Meth. Fluids. – 1994. – V. 18. – P. 983–1008.
- Savkar S. (1975). Radiation of cylindrical duct acoustics modes with flow mismatch// J. Sound Vib. – 1975. – V. 42. – P. 363–386.
- Scandrett C., Kriegsmann G. and Achenbach J. (1986). Scattering of a pulse by a cavity in an elastic half-space// J. Comp. Phys. – 1986. – V. 65. – P. 410–431.
- Scollermo G. (1979). Error analysis of finite difference schemes applied to hyperbolic initial boundary value problems// J. Math. Comp. – 1979. – V. 33. – P. 11–35.
- Seymov V. (1983). Dynamics and seismostability of hydrotechnical constructions – Kiev: Naukova Dumka, 1983.
- Shang J. (1984). An assessment of numerical solutions of the compressible Navier-Stokes equations – AIAA Paper, № 84-1549, 1984.
- Shang J. and Hankey W. (1975). Numerical solution of the Navier-Stokes equations for supersonic turbulent flow over a compression ramp – AIAA Paper, № 75-0010, 1975.
- Shapiro M. and O'Brien J. (1970). Boundary conditions for finemesh limited-area forecasts// J. App. Math. – 1970. – V. 9. – P. 345–349.
- Sharan S. (1985a). Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains// Int. J. Num. Methods Eng. – 1985. – V. 21. – P. 1659–1669.
- Sharan S. (1985b). Finite element modelling of infinite reservoirs – Proc. ASCE, 1985. – P. 1457–1469.
- Sharan S. (1986). Modelling of radiation damping in fluids by finite elements// Int. J. Num. Meth. Eng. – 1986. – V. 23. – P. 945–957.
- Sharan S. (1987). A non-reflecting boundary in fluid-structure interaction// J. Comp. and Struct. – 1987. – V. 26, № 5. – P. 841–846.

- Sharan S.* (1988). Analysis of unbounded field problems using dampers// J. Comm. Appl. Num. Meth. – 1988. – V. 4. – P. 761–766.
- Shih T., Smith G., Springer G. and Rimon Y.* (1983). Boundary conditions for the solution of compressible Navier-Stokes equations by an implicit factored method// J. Comp. Phys. – 1983. – V. 52. – P. 54–79.
- Simone A. and Hestholm S.* (1998). Instabilities in applying absorbing boundary conditions to high-order seismic modeling algorithms// J. Geophys. – 1998. – V. 63. – P. 1017–1023.
- Sloan D.* (1980). On boundary conditions for the numerical solution of hyperbolic differential equations// Int. J. Num. Meth. Energ. – 1980. – V. 15. – P. 1113–1127.
- Smith W.* (1974). A nonreflecting plane boundary wave propagation problems// J. Comp. Phys. – 1974. – V. 15. – P. 492–503.
- Smith W.* (1975). The application of finite element analysis to body wave propagation problems// J. Geophys. – 1975. – V. 42. – P. 747–768.
- Sochacki J.* (1988). Absorbing boundary conditions for the elastic wave equations// J. Appl. Math. Comp. – 1988. – V. 28. – P. 1–14.
- Sochacki J., Kubichek R., George J., Fletcher W. and Smithson S.* (1987). Absorbing boundary conditions and surface waves// J. Geophys. – 1987. – V. 52, № 1. – P. 60–71.
- Sommerfield A.* (1949). Partial Differential Equations in Physics – New-York: Academic Press, 1949.
- Street C. and Macaraeg M.* (1990). Spectral multi-domain for large-scale fluid dynamics simulations// J. Appl. Num. Math. – 1990. – V. 5. – P. 123–139.
- Strikwerda J.* (1977). Initial boundary value problems for incompletely parabolic systems// J. Comm. Pure Appl. Math. – 1977. – V. 30. – P. 797–822.
- Strikwerda J.* (1980). Initial boundary value problems for the method of lines// J. Comp. Phys. – 1980. – V. 34. – P. 94–107.
- Sundström A.* (1975). Note on the paper “boundary conditions in finite difference fluid dynamics codes”// J. Comp. Phys. – 1975. – V. 17. – P. 450–454.
- Taflove A.* (1980). Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic penetration problems// IEEE Trans. Electromagn. Compat. – 1980. – V. 22. – P. 191–202.
- Taflove A. and Brodwin M.* (1975). Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time dependent maxwells equations// IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – 1975. – V. 23. – P. 623–630.
- Taflove A. and Umashankar K.* (1981). Solution of complex electromagnetic penetration and scattering problems in unbounded region, in computational methods for infinite domain media-structure interaction// AMD, Amer. Soc. Mech. Eng. – 1981. – V. 46. – P. 83–113.
- Taflove A. and Umashankar K.* (1983). Radar cross section of general three-dimensional scatterers// IEEE Trans. Electromagn. Compat. – 1983. – V. 25. – P. 433–440.

- Taflove A., Umashankar K. and Jurgens T.* (1985). Validation of FDTD modelling of the radar cross section of three-dimensional structures spanning up to nine wavelengths// *IEEE Trans. Antennas Propagat.* - 1985. - V. 33. - P. 662-666.
- Tajma T. and Lee Y.* (1981). Absorbing boundary condition and Budden turning point technique for electromagnetic plasma simulations// *J. Comp. Phys.* - 1981. - V. 42. - P. 406-412.
- Taylor C., Lam D.-H. and Shumpert T.* (1969). Electromagnetic pulse scattering in time-varying inhomogeneous media// *IEEE Trans. Antennas Propagat.* - 1969. - V. 17. - P. 585-589.
- Taylor M.* (1975). Reflecting of singularities of solutions to systems of differential equations// *J. Comm. Pure Appl. Math.* - 1975. - V. 28. - P. 457-478.
- Thiruvengatachar V. and Vishwanathan K.* (1965). Dynamic response of an elastic half-space with cylindrical cavity to time-dependent surface tractions over the boundary of the cavity// *J. Math. Mech.* - 1965. - V. 2. - P. 541-571.
- Thomas J. and Salas M.* (1986). Far-field boundary conditions for transonic lifting solutions to the Euler equations// *AIAA J.* - 1986. - V. 24. - P. 1074-1080.
- Thomas P.* (1979). Boundary conditions for implicit solutions to the compressible Navier-Stokes equations in finite computational domains// *AIAA Comp. Fluid Dynamics Conf., Williamsburg, 1979.* - P. 14-26.
- Thompkins W. and Bush R.* (1982). Boundary treatments for implicit solutions to Euler and Navier-Stokes equations// *J. Comp. Phys.* - 1982. - V. 48. - P. 302-311.
- Thompson K.* (1987). Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems// *J. Comp. Phys.* - 1987. - V. 68, № 1. - P. 1-24.
- Thompson K.* (1990). Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems. Part 2// *J. Comp. Phys.* - 1990. - V. 89, № 2. - P. 439-461.
- Tiedtke M.* (1973). Boundary conditions in primitive equation weather prediction models with special emphasis on the control of gravity wave propagation// *Beitr. Phys. Atmos.* - 1973. - V. 46. - P. 22-33.
- Ting L.* (2000). Appropriate boundary conditions simulating flows around a body at high Reynolds number - *ECCOMAS 2000.* - P. 42-50.
- Ting L. and Keller J.* (1977). Radiation from the open end of a cylindrical or conical pipe and scattering from the end of a rod or slab// *J. Acoust. Soc. Amer.* - 1977. - V. 61. - P. 1439-1444.
- Ting L. and Miksis M.* (1986). Exact boundary conditions for scattering problems// *J. Acoust. Soc. Am.* - 1986. - V. 80. - P. 1825-1827.
- Tourrette L.* (1997). Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier-Stokes equations// *J. Comp. Phys.* - 1997. - V. 137. - P. 1-37.
- Tourrette L.* (1998). Artificial boundary conditions for the linearized compressible Navier-Stokes equations. II. The discrete approach// *J. Comp. Phys.* - 1998. - V. 144, № 1. - P. 151-179.

- Trefethen L.* (1982a). Group velocity of finite difference schemes// SIAM Review. – 1982. – V. 23. – P. 113–136.
- Trefethen L.* (1982b). Wave propagation and stability for finite difference schemes – Ph. D. Thesis, Stanford University, 1982.
- Trefethen L.* (1983). Group velocity interpretation of the stability theory of GKS// J. Comp. Phys. – 1983. – V. 49. – P. 199–217.
- Trefethen L.* (1984). Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problems// J. Comm. Pure Appl. Math. – 1984. – V. 37. – P. 329–367.
- Trefethen L. and Halpern L.* (1986). Well-posedness of one-way equations and absorbing boundary conditions// J. Math. Comp. – 1986. – V. 47, № 176. – P. 421–435.
- Tsyngov S., Turkel E. and Abarbanel S.* (1996). External flow computations using global boundary conditions// AIAA J. – 1996. – V. 34. – P. 700–706.
- Tsyngov S.V.* (1997). Artificial boundary conditions for computation of oscillating external flows// SIAM J. Scien. Comp. – 1997. – V. 18, № 6. – P. 1612–1656.
- Tsyngov S.V.* (1998). Numerical solutions of problems on unbounded domains, a review// Appl. Num. Math. – 1998. – V. 27. – P. 465–532.
- Tsyngov S.V.* (1999). External boundary conditions for three-dimensional problems of computational aerodynamics// SIAM J. Scien. Comp. – 1999. – V. 21, № 1. – P. 166–206.
- Tukmakov A.L.* (1993). About using adsorbing boundary condition to simulation a flow past a cylinder – Technical Report № 1148-B93, Dep. VINITI, Moscow, 1993.
- Turkel E.* (1980). On the practical use of high-order methods for hyperbolic systems// J. Comp. Phys. – 1980. – V. 35, № 3. – P. 319–340.
- Turkel E.* (1983). Progress in computational physics// J. Comp. Fluids. – 1983. – V. 11, № 2. – P. 121–144.
- Turov V.* (1976). To a question of converting a problem of propagation of elastic waves in infinite area into a problem for area of finite dimensions// Budivelnik, Kiev. – 1976. – V. 28. – P. 186–191.
- Umashankar K. and Taflov A.* (1982). A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects// IEEE Trans. Electromag. Compat. – 1982. – V. 24, № 4. – P. 397–405.
- Vanajakshi T., Thompson K. and Black D.* (1989). Boundary value problems in magnetohydrodynamics (and fluid dynamics). i. radiation boundary condition// J. Comp. Phys. – 1989. – V. 84. – P. 343–359.
- Varah J.* (1971). Stability of difference approximations to the mixed initial boundary value problems for parabolic systems// SIAM J. Num. Analysis. – 1971. – V. 8. – P. 598–615.
- Vastano A. and Reid R.* (1967). Tsunami response for islands: verification of a numerical procedure// J. Marine Research. – 1967. – V. 25. – P. 129–139.

- Verhoff A. and O'Neil P.* (1984). A natural formulation for numerical solution of the Euler equations – AIAA Paper, № 84-0163, 1984.
- Verhoff A. and Stookesberry D.* (1988). Far-field computational boundary conditions for internal flow problems – Technical Report № NPS67-88-001CR, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 1988.
- Verhoff A. and Stookesberry D.* (1992). Second-order, far-field computational boundary conditions for inviscid duct flow problems// AIAA J. – 1992. – V. 30, № 5. – P. 1268–1276.
- Verhoff A., Stookesberry D. and Agrawal S.* (1991a). Far-field computational boundary conditions for external flow problems – AIAA Paper, № 91-0630, 1991.
- Verhoff A., Stookesberry D. and Agrawal S.* (1991b). Far-field computational boundary conditions for transonic flows// 4th International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Davis, 1991.
- Verhoff A., Stookesberry D. and Agrawal S.* (1992). Far-field computational boundary conditions for two-dimensional external flow problems// AIAA J. – 1992. – V. 30, № 11. – P. 2585–2594.
- Vichnevetsky R.* (1981). Propagation through numerical mesh refinement for hyperbolic equations// J. Math. Comp. Simul. – 1981. – V. 23. – P. 344–353.
- Vichnevetsky R.* (1985). Propagation and spurious reflection in finite element approximations of hyperbolic equations// J. Comp. Math. Appl. – 1985. – V. 11. – P. 733–746.
- Vichnevetsky R.* (1986). Invariance theorems concerning reflection at numerical boundaries// J. Comp. Phys. – 1986. – V. 63. – P. 268–282.
- Vichnevetsky R.* (1987). Wave propagation analysis of difference schemes for hyperbolic equations: a review// Int. J. for Num. Meth. Fluids. – 1987. – V. 7. – P. 409–452.
- Vichnevetsky R. and Pariser E.* (1985). High order numerical Sommerfeld boundary conditions: theory and experiments// J. Comp. Math. Appl. – 1985. – V. 11. – P. 67–78.
- Vichnevetsky R. and Pariser E.* (1986). Non-reflecting upwind boundaries for hyperbolic equations// J. Num. Meth. Part. Diff. Eq. – 1986. – V. 2. – P. 1–12.
- Vidale J. and Clayton R.* (1986). A stable free-surface boundary condition for two-dimensional finite-difference wave simulation// J. Geophys. – 1986. – V. 51. – P. 2247–2249.
- Ville J. and Silcox R.* (1980). Experimental investigation of the radiation of sound from an unflanged duct and a bellmouth including the flow effect – Technical Report № 80, NASA TP-1697, 1980.
- Volkov E.* (1966). Method of grids for outer Dirichle problem// Zhurn. vych. mat. i matem. fiz. – 1966. – V. 6, № 3. – P. 503–511.
- Vorovich I. and Babeshko V.* (1979). Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassic areas – M.: Nauka, 1979.
- Wagatha L.* (1983). Approximation of pseudodifferential operators in absorbing boundary conditions for hyperbolic equations// J. Num. Math. – 1983. – V. 42. – P. 51–64.

- Wasistho B., Geurts B. and Kuerten J.* (1997). Simulation techniques for spatially evolving instabilities in compressible flows over a flat plate// *J. Comp. Fluids.* – 1997. – V. 26, № 7. – P. 713–739.
- Watson W. and Myers M.* (1991). Inflow-outflow boundary conditions for two-dimensional acoustic waves in channels with flow// *AIAA J.* – 1991. – V. 29, № 9. – P. 1383–1389.
- Watson W., Zorumski W. and Hodge S.* (1995). Evaluation of several nonreflecting computational boundary conditions for duct acoustics// *J. Comp. Acoustics.* – 1995. – V. 3, № 4. – P. 327–342.
- Weiss J.* (1991). The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics// *J. Physica D.* – 1991. – V. 48. – P. 273–294.
- Wilson J.* (1982). Derivation of boundary conditions for the artificial boundaries associated with the solution of certain time-dependent problems by Lax-Wendroff type difference schemes// *Proc. Edinburg Math. Soc.* – 1982. – V. 25, № 1. – P. 1–19.
- Wood W.* (1976). On the finite element solution of an exterior boundary value// *Int. J. Num. Methods Eng.* – 1976. – V. 10. – P. 150–160.
- Wurtele M., Paegle J. and Sielecki A.* (1971). The use of open boundary conditions with the storm-surge equations// *Mon. Wea. Rev.* – 1971. – V. 99. – P. 537–544.
- Yee H., Beam R. and Warming R.* (1982). Boundary approximations for implicit schemes for one-dimensional inviscid equations of gasdynamics// *AIAA J.* – 1982. – V. 20. – P. 1203–1211.
- Zhang G.-Q.* (1985). High-order approximation of one-way wave equations// *J. Comp. Math.* – 1985. – V. 3, № 1. – P. 90–97.
- Zhang G.-Q., Zhang S.-L., Wang Y.-X. and Liu C.-Y.* (1988). A new algorithm for finite-difference migration of steep dips// *J. Geophys.* – 1985. – V. 53, № 2. – P. 167–175.
- Zorumski W., Watson W. and Hodge S.* (1994). A nonreflecting boundary conditions for duct acoustic – Technical Report № TM-109091, NASA, 1994.
- Zou G.-Y.* (1992). On open boundary conditions// *Proceeding of 92'Congress of Hydrodynamics, China*, 1992. – P. 216–230.
- Zou G.-Y.* (1993). Adaptive open boundary conditions for dispersive waves// *J. Acta Mechanica Sinica.* – 1993. – V. 25, № 3. – P. 334–342.
- Zou G.-Y.* (1994a). The high precision open boundary conditions designed for transient waves// *J. App. Math. Mech.* – 1994. – V. 15, № 8. – P. 735–743.
- Zou G.-Y.* (1994b). On the high precision adaptive open boundary conditions for transient waves// *ICHHD, China.* – 1994. – №. 3. – P. 707–712.
- Zou G.-Y. and Chen Y.-S.* (1986). Open boundary condition of transient waves// *Proc. of the 3rd Asian Congress of Fluid Mech., Tokyo*, 1986. – P. 294–297.
- Zou G.-Y. and Chen Y.-S.* (1989). The open boundary condition of transient waves// *J. Acta Mechanica Sinica.* – 1989. – V. 21, № 5. – P. 522–529.
- Zou G.-Y. and Chen Y.-S.* (1992). A comment on the second order adaptive open boundary condition// *J. Hydrodyn., Ser. A.* – 1992. – V. 7, № 3. – P. 350–358.

Contents

Foreword	5
Introduction	6
Chapter 1. Spatial and spatio-temporal extrapolations	11
1.1. The analysis of stability and accuracy with considering of boundary conditions in one-dimensional problems. A linear hyperbolic equation	11
1.2. Wave equation. A system of hyperbolic equations	21
1.3. Other examples of the analysis of the stability and accuracy with considering of boundary conditions	24
1.4. Application of spatio-temporal extrapolations to the equations of gas dynamics	30
1.5. Analysis in plain problem	35
1.6. Application of spatio-temporal extrapolations for problems from the theory of elasticity	37
1.7. Method «of full reflection» in two-dimensional problems from the theory of elasticity	40
Chapter 2. Non-reflecting boundary conditions for wave equations	46
2.1. Linear non-reflecting boundary conditions in plain problem	46
2.2. Some evaluations of approximations of non-reflecting boundary conditions	53
2.3. Adaptive non-reflecting boundary conditions	56
2.4. Varieties of non-reflecting boundary conditions for a linear wave equation	59
2.5. Sequences of linear conditions, based on consideration of spherical waves	67
2.6. Application of conditions based on spherical waves. Two-dimensional problems	71
2.7. Further consideration of many-dimensional wave problems	76
2.8. Linear conditions, a wave at an angle of incidence to the artificial boundary	83
2.9. «Radiation boundary operators»	87
2.10. Radiation boundary conditions and anisotropic correction for Helmholtz equations	90

Chapter 3. Non-reflecting boundary conditions for the equations of gas dynamics	95
3.1. One-dimensional hyperbolic equations	96
3.2. Non-reflecting boundary conditions for spherical symmetrical Euler equations	102
3.3. Non-reflecting boundary conditions for non-steady compressible flows	106
3.4. Steady compressible and incompressible flows	112
3.5. Application of non-reflecting boundary conditions for transonic flow	114
3.6. Non-reflecting boundary conditions for the Euler equations	117
3.7. Numerical research on non-reflecting boundary conditions for the Euler equations	123
3.8. Non-reflecting boundary conditions for non-steady and steady-state viscous compressible and incompressible fluid flow	130
3.9. Conditions on input and output at subsonic flow over flat plate	132
3.10. Non-reflecting boundary conditions in problems of astrophysics	136
3.11. Non-linear and non-reflecting boundary conditions	137
Chapter 4. Non-reflecting boundary conditions for dynamic problems from the elasticity and viscosity	144
4.1. Conditions in dynamic problems of the theory of elasticity	144
4.2. Linear conditions containing an angle of incidence, in dynamic problems of the theory of elasticity	145
4.3. Boundary conditions for elastic waves	149
4.4. Various problems from the theory of elasticity	157
4.5. Viscoelastic medium	160
Chapter 5. Non-reflecting boundary conditions in the propagation of surface gravitational waves	162
5.1. Linear waves on surface of a fluid	162
5.2. Non-linear waves on surface of a fluid	168
5.3. Two-dimensional free surface of gravitational waves . . .	171
Chapter 6. Conditions of absorption	173
6.1. Wave equation with viscous term	173
6.2. Combination of absorption and radiation conditions . . .	177
6.3. Schrödinger and Maxwell equations with viscous term . .	179
6.4. More general model of absorbent layer	181
6.5. Gas dynamics equations	188
6.6. Some model non-reflecting boundary conditions	193

Chapter 7. Conditions for the Laplace equation	196
7.1. Evaluation of the influence of external boundary conditions on the solution near body in a flow	196
7.2. Distribution of a static electrical potential	201
7.3. Elastic plate in a flow of ideal incompressible fluid	203
Conclusions	207
References	208

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
Institute of Mechanics and Engineering of Kazan Scientific
Center
Institute of Mechanics of Ufa Scientific Center
Ilgamov M.A., Gilmanov A.N.

Non-reflecting Boundary Conditions for Computational Domains

This book is devoted to the problem of specifying boundary conditions on the artificial boundaries of computational domains used for the numerical solution of partial differential equations. Such non-reflecting boundary conditions are important for modeling problems in a wide variety of fields in science and engineering including acoustics, mechanics, physics, and geophysics. Although this is a relatively new field of research, more than a hundred publications have already appeared from many different researchers. In this book, the authors review all the available literature on non-reflecting boundary conditions and consider the application of these boundary conditions to a variety of practical physical problems.

This book is intended for students and experts in computational physics and related fields and will be useful to anyone with an interest in numerical simulation.

Authors:

Ilgamov Marat Aksanovich: born in 1934, Doctor of Sciences (1970), Professor (1972), Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences (RAS) (1991). Graduated from the Ufa Aviation Institute. Worked as Engineer at the Design Development Bureau of the USSR Ministry of Aviation Industry (1957-59), Scientific Researcher, Head of Laboratory and Deputy-Director at Kazan Physical Technical Institute, (1962-90), Deputy Chairman, Kazan Branch of the USSR Academy of Sciences (1977-88), Director at the Institute of Mechanics and Engineering of the Kazan Scientific Center RAS (1991-96). Presently: Chairman of Ufa Scientific Center RAS.

The area of scientific interests: theory of interaction of elastic shells with operating media.

Gilmanov Anvar Nikolaevich: born in 1948, Doctor of Sciences (1996), Professor (1999). Graduated from the Moscow State University. Worked as Scientific Researcher, Head of Laboratory at Kazan Physical Technical Institute (1975-90), the Institute of Mechanics and Engineering of the Kazan Scientific Center RAS (1991-presently).

The area of scientific interests: computational methods of fluid/structure interaction problems.

Научное издание

ИЛЬГАМОВ Марат Аксанович
ГИЛЬМАНОВ Анвар Николаевич

**НЕОТРАЖАЮЩИЕ УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦАХ
РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ**

Редактор *М.Б. Козинцова*
Оригинал-макет: *А.М. Широков*
Оформление переплета: *А.Ю. Алезина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 16.12.02. Формат 60х90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 15.
Тираж 400 экз. Заказ № 2424.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1».
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0347-4



9 785922 103473