

УДК 517; 512; 514; 519.8
ББК 22.16
А96

Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными / Пер. с англ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 432 с. — ISBN 5-9221-0408-X.

В книге впервые достаточно полно освещена теория функциональных уравнений с несколькими переменными. Авторы являются видными специалистами в данной области. Они уделили большое внимание применению функциональных уравнений в различных разделах математики, а также в физике, теории информации, математической экономике.

В конце каждой главы приведены «последующие результаты и упражнения» (в общей сложности около 400). Издание содержит обширную библиографию вплоть до 2002 г. (примерно 2000 названий), сгруппированную по годам. Книга адресована специалистам в различных областях математики и её приложений, а также преподавателям, студентам и аспирантам физико-математических специальностей.

Научное издание

АЦЕЛ Янош
ДОМБР Жан

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

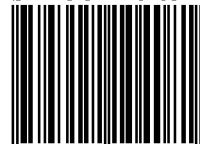
Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *Худяков В.В.*
Оформление переплета: *А.Ю. Алегина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 11.06.03. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 38,5. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука».
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0408-X



9 785922 104081

ISBN 5-9221-0408-X (русск.)

ISBN 0-521-35276-2 (англ.)

© Cambridge University Press, 1989

© ФИЗМАТЛИТ, 2003 (русск.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	8
Предисловие	9
Благодарности	12
О пользовании книгой	12
 Глава 1. Аксиоматический подход к сложению векторов	13
 Глава 2. Уравнение Коши. Базис Гамеля	20
2.1. Общие вопросы; продолжения и регулярные решения	20
2.2. Общие решения	25
 Глава 3. Ещё три уравнения Коши. Применение в теории информации	32
 Глава 4. Обобщения уравнения Коши на многоместные, векторные и матричные функции. Приложение к теории геометрических объектов	39
4.1. Многоместные и векторные функции	39
4.2. Характеризация плотностей в теории геометрических объектов с помощью матричного функционального уравнения	43
4.3. Уравнения Пексидера	46
4.4. Уравнения типа Коши на полугруппах	49
 Глава 5. Уравнения Коши для комплексных функций. Приложения к гармоническому анализу и измерению информации	55
5.1. Аддитивное и экспоненциальное уравнение Коши для комплексных функций	55
5.2. Эндоморфизмы полей вещественных и комплексных чисел	59
5.3. Группы Бора	61
5.4. Рекурсивные энтропии	67
 Глава 6. Условные уравнения Коши. Их применение в геометрии и характеристизация функции Хевисайда	74
 Глава 7. Обильные множества, продолжения, квазипродолжения и продолжения почти всюду. Приложение к гармоническому анализу и проблеме группового выбора.	83
7.1. Расширения и квазирасширения	83
7.2. Продолжения почти всюду и интегральные преобразования	89
7.3. Согласованное распределение ресурсов	95
 Глава 8. Функциональное уравнение Даламбера. Приложение к неевклидовой механике	98

Глава 9. Образы множеств и функциональные уравнения. Приложения к теории относительности и к аддитивным функциям, ограниченным на определённых множествах	107
9.1. Уравнения, содержащие образы множеств, и их связь с хроногеометрией	107
9.2. Множества, на которых ограниченные аддитивные функции непрерывны	112
Глава 10. Некоторые применения функциональных уравнений в функциональном анализе, геометрии банаховых пространств и теории нормирований	119
10.1. Функциональные уравнения и крайние точки	119
10.2. Вполне монотонные функции и крайние лучи	124
10.3. Характеризация строго выпуклых нормированных пространств	126
10.4. Изометрии вещественных нормированных пространств	130
10.5. Топология на множестве решений функционального уравнения: группа Бора . .	134
10.6. Нормирования в полях рациональных и вещественных чисел	140
Глава 11. Характеризация предгильбертовых пространств. Приложение к газовой динамике	148
11.1. Квадратичные функционалы: характеристика предгильбертовых пространств .	148
11.2. Треугольники в нормированных пространствах: вторая характеристика предгильбертовых пространств	159
11.3. Ортогональная аддитивность	165
11.4. Приложение к газовой динамике	170
Глава 12. Системы функциональных уравнений. Применения в комбинаторике и теории марковских процессов	179
Глава 13. Уравнения для тригонометрических и им подобных функций .	187
Глава 14. Обобщения уравнений Даламбера и Коши по Пексидеру	202
Глава 15. Дальнейшие обобщения уравнения Пексидера. Теорема единственности. Применение в теории средних	213
Глава 16. Снова об условных уравнениях Коши. Приложения к аддитивным теоретико-числовым функциям и теории кодирования	224
16.1. Продолжения уравнения Коши с кривых	224
16.2. Условия цилиндрического типа	229
16.3. Аддитивные теоретико-числовые функции и связанные с ними уравнения	232
16.4. Применение: средняя длина кодовых слов	234
16.5. Вполне аддитивные теоретико-числовые функции и их обобщения	240
16.6. Дальнейшие уравнения для теоретико-числовых функций	245
Глава 17. Средние значения, бисимметрия и самодистрибутивность	251

Глава 18. Обобщённая бисимметрия. Связь с тканями и номограммами .	260
Глава 19. Снова о сложных уравнениях. Их применение в теории усреднения	268
19.1. Однопараметрические подгруппы аффинных групп	269
19.2. Другой пример на отыскание однопараметрических подгрупп	276
19.3. Ещё два сложных уравнения	281
19.4. Операторы Рейнольдса и усредняющие операторы	284
19.5. Операторы продолжения и интерполяции	287
19.6. Операторы дифференцирования	290
Глава 20. Однородность и некоторые её обобщения. Применения в экономике	297
Глава 21. Исторический очерк	306
21.1. Определение линейных и квадратичных функций посредством функциональных уравнений в средние века. Применение полученной характеристики Галилеем .	306
21.2. Функциональные уравнения логарифма и показательной функции	310
21.3. Функциональные уравнения в работах Эйлера	311
21.4. Функциональные уравнения, возникающие из физики	312
21.5. Теорема о биноме и уравнения Коши	314
21.6. Уравнения Коши после Коши	318
21.7. Дальнейшие достижения	320
21.8. Современное развитие	323
Обозначения	325
Указания к «последующим результатам и упражнениям»	327
Библиография	333
Авторский указатель	424
Предметный указатель	428

От переводчика

Книга Я. Ацела и Ж. Домбра не имеет аналогов в существующей математической литературе. Впервые собран воедино столь разнообразный материал по функциональным уравнениям с несколькими переменными. В функциональном уравнении требуется найти вид функций, для которых уравнение выполнено при любых значениях переменных (в заданной области). Разумеется, дифференциальные, разностные, интегральные и т. п. уравнения охватываются таким определением, но в качестве собственно функциональных уравнений обычно рассматриваются те, в которых к функциям применены лишь алгебраические операции. Подобная тематика слабо представлена в монографической литературе, и именно ей посвящена данная книга.

В России изучение функциональных уравнений началось с работ Эйлера. Функциональные уравнения решал и Лобачевский при создании неевклидовой геометрии. В дальнейшем к ним обращались многие отечественные авторы (см. библиографию и исторический очерк в настоящем издании). Однако отсутствуют обобщающие монографии на русском языке (как оригинальные, так и переводные), которые давали бы достаточно широкое представление о теории функциональных уравнений с несколькими переменными. Перевод книги Я. Ацела и Ж. Домбра призван восполнить этот пробел.

Функциональные уравнения могут возникать в задачах разнообразного содержания. Поэтому выход настоящего издания на русском языке актуален для специалистов различного профиля (алгебра, геометрия, анализ, теория информации, механика, математическая экономика и др.). Подробный характер изложения позволяет применять книгу с учебной целью; конкретные варианты такого использования указаны в предисловии авторов. Большим достоинством издания является наличие около 400 «последующих результатов и упражнений», а также обширной библиографии (порядка 2000 названий).

Авторы книги — видные специалисты в области функциональных уравнений. Я. Ацел является автором или соавтором 8 книг и примерно 250 статей, которые охватывают широкий круг вопросов, так или иначе связанных с функциональными уравнениями. Он основал журнал «*Aequationes mathematicae*», посвящённый данной тематике, и долгое время был его главным редактором, а ныне является почётным редактором. Я. Ацел — профессор университета Ватерлоо (Канада) с 1965 г., член Канадского королевского общества и иностранный член Венгерской академии наук. Ж. Домбр в период написания книги был профессором университета в г. Нант (Франция). Ныне он работает в Париже и является известным специалистом по истории точных наук, что нашло отражение в содержательном историческом очерке, завершающем книгу. Необходимо с благодарностью отметить, что профессор Я. Ацел специально для русского издания подготовил библиографию за период, прошедший с момента выхода книги, а также предоставил список замеченных опечаток и другую полезную информацию.

Следует надеяться, что издание книги Я. Ацела и Ж. Домбра на русском языке будет стимулировать развитие теории функциональных уравнений и принесёт пользу исследователям, преподавателям и студентам, специализирующимся в сфере математики и её приложений.

Б. Френкин

Предисловие

Функциональные уравнения — это такие уравнения, в которых неизвестными являются функции. Однако мы не пытаемся охватить столь обширную область. Как показывает заглавие, в этой книге рассматриваются «функциональные уравнения с несколькими переменными». Это не значит, что неизвестные функции должны быть обязательно многоместными: несколько переменных должны присутствовать *в самом уравнении*. Классическим примером служит уравнение Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

содержащее два переменных x , y и одну неизвестную функцию f *одного* переменного. С другой стороны, итерационные, дифференциальные, дифференциально-разностные, разностные, интегральные и тому подобные уравнения обычно содержат только одно переменное, если неизвестная функция одноместна. Здесь мы будем иметь дело с *функциональными уравнениями, в которых число переменных больше числа аргументов неизвестной функции* (а если неизвестных функций несколько — больше наименьшего числа аргументов этих функций).

Даже при таком ограничении число работ по функциональным уравнениям составляет несколько тысяч, и невозможно суммировать их содержание в книге такого объёма, как эта. Взамен мы попытались сделать *библиографию* энциклопедичной (хотя и не полной) — она организована по годам. Советуем читателю использовать как можно больше работ из этого списка (впрочем, некоторые совершенно элементарны). Таким путём можно предотвратить множество переоткрытий уже известных фактов.

По нашему мнению, читателю принесёт пользу исторический очерк в конце книги (гл. 21). Ссылки на другие главы в нём немногочисленны, так что историческую главу можно прочесть *первой*, чтобы увидеть предмет книги «с птичьего полёта» (что делает излишним длинное введение). Но нам представляется также, что эту главу полезно прочесть вновь после того, как изучены предыдущие двадцать.

Из этого исторического очерка читатель увидит, что сколько-нибудь общая теория функциональных уравнений с несколькими переменными стала складываться относительно недавно. Он также сможет увидеть, что с самого начала функциональные уравнения возникали из приложений, изучались в основном ради приложений и действительно сразу же интенсивно применялись. Такой путь развития нетипичен для теоретических разделов математики. Характерный пример этого процесса можно найти в первой (вводной) главе, посвящённой закону параллелограмма в сложении векторов.

Мы приходим к естественному вопросу о мотивации: *в задачах какого рода (не только внутри математики) можно применять функциональные уравнения?* Г. Х. Харди сказал, что математики — «создатели образов». Они конструируют новые понятия (частично основанные на прежних), которые могут прийти из математики или из наук о природе, человеке, обществе, например из физики или экономики. Так, векторы были введены для представления сил, однородная линейная функция — для описания пропорциональности, логарифм — для преобразования последовательностей геометрической природы в алгебраические, а тригонометрические функции — для определения неизвестных элементов треугольников по известным. Следующая задача математика состоит в том, чтобы описать свойства этих новых объектов, т. е. установить их отношения с другими объектами, включив упорядоченным образом в существующую или новую теорию. (Для удобства работы с новыми понятиями важно встроить их в схему, организованную по единым законам, с единым стилем доказательств.) Например, понятие вектора стало основой линейной алгебры, определения тригонометрических функций — основой тригонометрии. Допустим, свойства новых объектов установлены — что же дальше?

В благоприятном случае из определений математических объектов можно вывести много — и даже очень много — свойств. Принцип экономии мышления и законное стремление к элегантности побуждают выяснить, являются ли вновь введённые объекты *единственными*, которые обладают *наиболее существенными* из найденных свойств. И вот тут могут появиться функциональные уравнения. Взяв упомянутые свойства за отправную точку, мы пытаемся определить все объекты с такими свойствами и, в частности, найти условия их единственности. Это делается в рамках классических структур математики, будь то алгебраические, порядковые, топологические структуры или просто вещественная ось, в которой все они соединяются. Вот основная процедура, которая порождает функциональные уравнения. По существу, мы видим здесь аксиоматический метод. Но аксиомы не определяют произвольно, обобщение не является самоцелью. На самом деле выбираются те отправные точки, которые наиболее полезны для приложений. (Практические соображения играют направляющую роль и в вопросах единственности.) Так проявляется обратная связь приложений с теорией.

Но на этом развитие теории не заканчивается. Когда теорема единственности установлена, например для уравнения косинуса (уравнения Даламбера), мы пытаемся вывести классические свойства косинуса прямо из этого уравнения (не используя его решения). Здесь открывается изящный путь построения тригонометрии, который, с некоторыми изменениями, пригоден для развития эллиптической, и в ещё большей степени гиперболической, тригонометрии. Этот процесс осуществлялся (с различной степенью чёткости) математиками разных веков, такими как Орем, Эйлер, Даламбер, Абель, Коши, Лобачевский, Дарбу, Пикар и т. д. Другой известный пример (выходящий за рамки этой книги) — введение гамма-функции посредством её функционального уравнения, как это сделал Артин.

В теории функциональных уравнений, как и во всех разделах математики, подходы разных авторов и уровни их анализа различны. При этом изучение методов сведения одних уравнений к другим, доказательство их равносильности, изучение условий регулярности, расширение областей и т. д. приводят иногда к нетривиальным продвижениям. Это дополнительный признак растущей зрелости данной ветви математики. С другой стороны, характеристизация функций их уравнениями, о которой шла речь выше, связывает теорию функциональных уравнений со многими областями чистой и прикладной математики.

В целом мы стремились в этой книге дать читателю хотя бы общее представление о предмете, сосредоточившись на относительно малом числе примеров, которые мы выбирали с особенным вниманием к приложениям, но не забывая и о теории. Это объясняет, почему на техническом уровне связь между разными главами минимальна, так что каждая из них может составлять отдельный предмет изучения. Фактически читатель может начать с любой главы (и даже со многих параграфов), лишь изредка обращаясь к предыдущему материалу. (При этом будет полезен предметный указатель в конце книги.) Очевидное исключение составляет гл. 2, которая посвящена уравнению Коши и призвана снабдить читателя набором определений, технических приёмов и результатов, используемых затем на протяжении всей книги (таких, как область определения, продолжение решения, общие решения, регулярные решения и др.). Однако на более глубоком уровне между главами обнаруживаются связи, которые можно использовать при обучении студентов и аспирантов. В частности, это относится к нескольким главам, параграфам и их частям, которые посвящены связям функциональных уравнений с другими разделами математики, а также их приложениям внутри и вне математики. Ниже приведены примеры:

- комбинаторика, вероятность и теория информации 3; 5.4; 12; 16.4;
- экономика, теория принятия решений и теория средних 7.3; 15; 17; 20;
- почти периодические функции и гармонический анализ 5.3; 7.2; 8; 10.5;

- функциональный анализ, теория операторов и функции Хевисайда 6; 10; 11; 19.4; 19.5; 19.6;
- геометрия, номография и физика 1; 4.2; 5.2; 6; 8; 9.1; 11.4; 18; 19.4;
- группы, группоиды и полугруппы 4.4; 5.3; 16.2; 16.3; 19.1; 19.2; 19.3;
- тригонометрические функции и теория чисел 1; 8; 13; 14; 16.3; 16.4; 16.5; 16.6.

(Ещё несколько тем, связанных с этими и другими приложениями, содержится в «последующих результатах и упражнениях» в конце разных глав.)

Наметим также некоторые более длинные цепочки, которые подходят для индивидуального изучения. К каждой из них следует добавить базовую гл. 2; разумеется, отдельные места можно опустить, если они не вписываются в тему курса:

- 3; 4.1; 4.2; 4.4; 9.1; 11.2; 16.3; 16.5; 16.6; 19.1; 19.2; 20;
- 5.1; 5.2; 5.3; 8; 10.5; 12; 13; 14;
- 5.2; 6; 9.2; 11.3; 11.4; 14; 16.3; 16.4; 16.5; 16.6;
- 10.4; 15; 16.4; 17; 18; 19.3;
- 3; 6; 7; 10.2; 10.3; 11.2; 16.1; 16.2;
- 5.1; 5.4; 6; 7.2; 10.1; 10.2; 19.4; 19.5; 19.6;
- 1; 4.3; 4.4; 5.2; 7.2; 8; 11.1; 12; 13; 15; 16.2; 17; 18; 19.1; 19.2.

Исходя из педагогических целей этой книги и желая хотя бы обозначить некоторые дальнейшие результаты и направления исследования, мы включили более 400 тем в «последующие результаты и упражнения». Некоторые из них требуют лишь прямого использования материала соответствующей главы; такие упражнения служат обычной цели закрепления и дальнейшего применения полученных знаний. Другие представляют собой «последующие результаты»; они (в той или иной степени) связаны с результатами, изложенными в тексте, и нередко распространяют их на более общие ситуации (алгебраические, топологические). Иногда мы излагаем их подробно. Даже когда мы не упоминаем обобщения, читатель может попробовать и сам их найти. Некоторые «последующие результаты и упражнения» проникают в теорию глубже (наиболее трудные снабжены значком *). В избранных случаях мы даём подсказки (надеемся, что они не станут подножками!); но это не относится к упражнениям, которые мы считаем лёгкими, и к результатам, снабжённым ссылками на легко доступные публикации. Нередко приводится ссылка на первоисточник, но в иных случаях мы предпочли указать более современную и доступную литературу. С другой стороны, в основном тексте мы стремились к аккуратности при указании приоритетов, исключая факты подготовительного характера, для которых также приводятся легко доступные источники.

Теперь нужно сказать несколько слов о предварительных знаниях, необходимых для плодотворной работы с книгой. Мы постарались исключить все ненужные усложнения, ограничиваясь простейшими случаями, и полагаем, что почти все главы может читать уже студент — после освоения дифференциального и интегрального исчисления, общей и линейной алгебры и, возможно, основ лебеговой теории интегрирования в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$. Кстати, предшествующая монография одного из авторов (Aczél, 1966c) содержит (наряду с другим материалом) более элементарное изложение некоторых тем этой книги. Для ряда приложений требуются более специальные знания, что отмечено в соответствующих местах (например, некоторые сведения о банаховых алгебрах, двойственность в функциональном анализе, элементы теории меры). Мы старались объяснить используемый материал. Но, вообще говоря, не требуется предварительного знания тех областей, в которых применяются функциональные уравнения. Например, это верно для теории информации, теории чисел, теории средних, теории группового выбора, теории геометрических объектов, почти периодических функций, теории относительности и др.

Хотя мы старались сделать изложение в какой-то мере однородным, внимательный читатель поймёт, кто написал каждую из глав, благодаря различию в стиле (и влиянию родного языка). Надеемся, что это не станет помехой при чтении.

Благодарности

Че Тат Нг предложил несколько существенных улучшений и сокращений. Горд Синнамон помог в чтении гранок и вместе с Ричардом Аткинсом — в составлении предметного указателя. Сюэзен Ацел составила именной указатель и провела большую работу по сведению библиографии воедино. Линда Грегори и Бренда Лоу напечатали несколько вариантов книги. Донг Нгуен, Ричард Аткинс, Николь Бриллюэ-Беллюо и (не в последнюю очередь) Берт Швейцер прочли и выправили рукопись, предложив ряд улучшений. Наша самая тёплая благодарность им всем, а также тем коллегам, включая анонимных рецензентов, которые помогли нам своими замечаниями. Мы признательны за поддержку, которую обеспечили Канадский Совет по исследованиям в области естествознания и техники и Франко-канадское соглашение по научному сотрудничеству. Выражаем также нашу благодарность издательству и типографии за их тщательную работу.

Добавим, что приветствуются комментарии к книге или любому аспекту её содержания.

Янош Ацел, Жан Домбр

О пользовании книгой

Библиографические ссылки и нумерация. Библиография упорядочена по годам, внутри одного года — по фамилиям авторов в алфавитном порядке, а работы каждого автора в данном году занумерованы латинскими буквами. Ссылки в тексте содержат фамилию автора, год и, при необходимости, латинскую букву. Теоремы, предложения, леммы и следствия нумеруются в каждой главе подряд (так что за леммой 1 может следовать теорема 2, а за ней — следствие 3). Формулы нумеруются отдельно в каждой главе, также подряд. Ссылки в пределах главы содержат только номер, а в других главах добавляется номер главы, например теорема 2.3 или формула (3.5). (Более длинные главы разделены на параграфы, но формулы и др. в пределах главы имеют сквозную нумерацию.) Как обычно, более лёгкие теоремы называются «предложениями».

Последующие результаты и упражнения в конце глав нумеруются в каждой главе отдельно, и ссылки на них устроены аналогично. Более трудные (по мнению авторов) снабжены звёздочкой (*).

Авторский и предметный указатели, как обычно, помещены в конце. *Обозначения* в основном стандартны; менее стандартные собраны в конце книги ¹⁾.

¹⁾ Все подстрочные примечания сделаны при переводе. В конце доказательства, а при его отсутствии — в конце формулировки утверждения, ставится ■.

Глава 1

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СЛОЖЕНИЮ ВЕКТОРОВ

В этой книге мы стремимся показать, как из потребностей приложений возникают функциональные уравнения. Конечно, мы не можем описывать эти приложения во всех подробностях (как мы пытаемся делать при рассмотрении самих функциональных уравнений). Цель первой главы — дать подобную мотивировку для уравнений Коши и Даламбера.

Одна из первых задач, к которым применялись функциональные уравнения и ради которых они решались, относится к так называемому параллелограмму сил, на более современном языке — к аксиоматическому обоснованию обычного правила сложения векторов (d'Alembert 1769; Poisson, 1804, 1811; Picard, 1928, р. 4–17; Aczél, 1966с, р. 120–4, 1969а, р. 7–11, 1976а, и это лишь немногие из возможных ссылок). Здесь мы даём несколько усовершенствованное изложение, основанное на более слабых допущениях.

Рассмотрим трёхмерное вещественное пространство V , элементами которого являются тройки чисел $\mathbf{p} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Евклидово расстояние между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q} = (y_1, y_2, y_3)$ определяется по формуле

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2}.$$

Мы хотим охарактеризовать закон сложения таких троек с помощью геометрических условий.

Нашим основным инструментом будут вращения в пространстве V , т. е. его взаимно однозначные отображения на себя, сохраняющие начало координат $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, ориентацию и расстояния. Напомним, что вращение однозначно определяется осью, проходящей через начало координат, и углом вращения (вещественным числом по модулю 2π). Для любых двух троек $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ с равным положительным расстоянием от начала координат существует одно и только одно вращение, переводящее $\mathbf{p}$ в $\mathbf{q}$. Угол этого вращения Θ , или угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, определяется из формулы

$$\cos \Theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}},$$

где $\Theta \in [0, \pi]$ или $\Theta \in [\pi, 2\pi]$ в зависимости от выбранной ориентации в пространстве V (она определяется, например, выбором упорядоченного базиса $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$). Первый угол называется меньшим, а второй — большим углом между двумя векторами.

Вектором $\mathbf{p}$ мы кратко называем тройку

$$\mathbf{p} = (x_1, x_2, x_3).$$

Будем говорить, что векторы (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) имеют *одинаковое* (соответственно, *противоположное*) *направление*, если существуют вещественные числа λ, μ одинакового (соответственно, противоположного) знака, для которых

$$\lambda x_i = \mu y_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Допускается, что одно из чисел λ, μ равно нулю (но не оба одновременно). Удобно считать, что и в этом случае векторы имеют одинаковое направление. Естественно, длина вектора $\mathbf{p}$ равна его евклидовой норме:

$$|\mathbf{p}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

Теорема 1. *Бинарная операция $\circ$ на множестве V всех векторов ориентированного трёхмерного евклидова пространства совпадает с обычным векторным сложением (по «правилу параллелограмма») тогда и только тогда, когда эта операция:*

- (i) ковариантна относительно вращений, т. е. результат операции (сумма векторов) подвергается тому же вращению, что и векторы, к которым применяется операция (слагаемые);
- (ii) коммутативна и ассоциативна;
- (iii) для векторов одинакового направления сводится к арифметическому сложению (сумма имеет то же направление, а её длина равна сумме длин слагаемых);
- (iv) сумма двух векторов одинаковой длины непрерывно зависит от угла между ними.

Замечание. Строго говоря, предположения вида (i) и (ii) сами по себе являются функциональными уравнениями. Однако в этой вводной главе мы предпочитаем словесное описание.

Доказательство. Наиболее важное следствие из (i) и коммутативности в (ii) состоит в том, что сумма двух векторов одинаковой длины лежит в натянутой на них плоскости, а более точно — на биссектрисе угла между ними (рассмотрим вращение вокруг биссектрисы на угол π). При этом, однако, результирующий вектор мог бы лежать в меньшем или большем угле, образованном слагаемыми.

Из (iii) следует, что нулевой вектор является нейтральным элементом относительно операции $\circ$ (т. е. $\mathbf{p} \circ \mathbf{0} = \mathbf{p}$). Снова применив (i), получаем, что векторы равной длины и противоположного направления, $\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}$, взаимно противоположны относительно операции $\circ$: $-\mathbf{p} \circ \mathbf{p} = \mathbf{0}$. С учётом (ii) имеем

- (v) $(V, \circ)$ — абелева группа, в которой $\mathbf{0}$ является нулём, а $-\mathbf{p}$ — противоположный элемент для $\mathbf{p}$.

Согласно (iii) сумма двух векторов одинаковой длины и одинакового направления имеет то же направление. Оно является биссектрисой меньшего (нулевого) угла между ними. Если для каких-то векторов равной длины сумма лежит на биссектрисе большего угла (рис. 1), то ввиду непрерывности (iv) сумма векторов равной длины

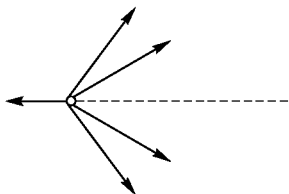


Рис. 1

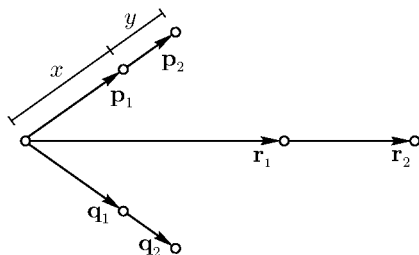


Рис. 2

равна нулю при некотором угле, меньшем π . Но тогда эти векторы взаимно противоположны в группе $(V, \circ)$, а мы только что видели, что такие векторы образуют угол π . (Ввиду (v) существует только один вектор, противоположный данному.) Это противоречие показывает, что в действительности сумма векторов равной длины

всегда лежит в меньшем угле между ними (и равна нулю при ненулевых слагаемых, если и только если этот угол равен π).

Итак, найдено направление суммы двух векторов равной длины x (биссектриса меньшего угла между ними). Фиксировав угол между такими векторами, определим теперь *длину* их суммы, которую обозначим $g(x)$. Эта функция g определена на множестве всех *неотрицательных* чисел и, разумеется, принимает неотрицательные значения. Пусть (см. рис. 2) векторы $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ имеют одинаковое направление и то же верно для $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. Если

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{q}_1| = x, \quad |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_2| = y$$

($|\mathbf{p}|$ обозначает длину вектора $\mathbf{p}$), то согласно (iii)

$$|\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2| = x + y.$$

В силу определения функции $g(x)$

$$|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1| = g(x), \quad |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2| = g(y), \quad |(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2)| = g(x + y).$$

Но из (ii), (iii) и коллинеарности $\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1$ и $\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2$ имеем также

$$|(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2)| = |(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1) \circ (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2)| = g(x) + g(y), \quad (1)$$

откуда

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{при всех неотрицательных } x, y. \quad (2)$$

Как отмечено в предисловии, это уравнение носит имя Коши (Cauchy, 1821). При этом (см. выше)

$$g(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \geq 0. \quad (3)$$

В гл. 2 мы докажем, что условия (2) и (3) вместе равносильны существованию неотрицательной константы c , для которой

$$g(x) = cx \quad (x \geq 0).$$

В силу (v) константа c может быть равна 0, лишь если два вектора равной длины имеют противоположное направление. Как следствие, *длина суммы двух векторов равной длины и не противоположного направления пропорциональна длине слагаемых*.

Определим теперь, как зависит длина сумм векторов равной длины от угла между ними ($\neq \pi$). На основании доказанного, достаточно рассмотреть векторы единичной длины (*единичные векторы*). Угол между ними обозначим 2ϕ , а длину их суммы $2f(\phi)$ (в действительности, это наша константа c , но зависящая теперь от ϕ).

Пусть даны четыре единичных вектора (см. рис. 3): $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ ($|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = 1$), причём $\angle(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 2\phi = \angle(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, $\angle(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) = 2(\phi + \psi)$, $\angle(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) = 2(\phi - \psi)$. Тогда $\angle(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2) = \angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\phi$. Из (i) имеем: $|\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2| = 2f(\psi)$. Далее,

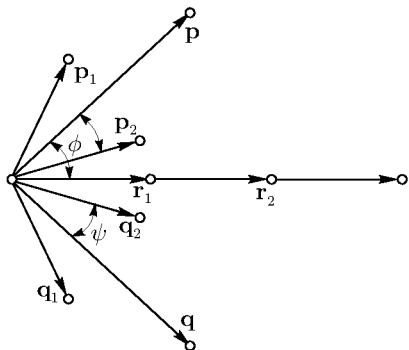


Рис. 3

$$|(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2)| = 2f(\psi)2f(\phi) \quad (4)$$

(так как длина векторов $\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2$ равна $2f(\psi)$, а длина суммы пропорциональна длине слагаемых). С другой стороны,

$$|\mathbf{r}_1| = |\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1| = 2f(\phi + \psi), \quad |\mathbf{r}_2| = |\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2| = 2f(\phi - \psi).$$

Так как углы между $\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1$ и между $\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2$ имеют общую биссектрису, то из (4), (ii) и (iii) имеем

$$4f(\psi)f(\phi) = |(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2)| = |\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1| \circ |\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2| = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 \circ \mathbf{r}_2| = 2f(\phi + \psi) + 2f(\phi - \psi), \quad (5)$$

или

$$f(\phi + \psi) + f(\phi - \psi) = 2f(\psi)f(\phi) \quad \text{при } 0 \leq \psi \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

Мы получили функциональное уравнение Даламбера.

Функция $f(\phi)$, определённая на отрезке $[0, \pi/2]$, непрерывна в силу (iv). Как мы увидим в гл. 8, непрерывная функция удовлетворяет уравнению (6), если (и только если) она имеет одну из следующих форм:

$$f(\phi) = 0; \quad f(\phi) = \cosh C\phi; \quad f(\phi) = \cos C\phi \quad (7)$$

при всех $\phi \in [0, \pi/2]$, где C — (вещественная) константа. Можно считать, что $C \geq 0$, так как (7) даёт одни и те же значения для положительных и отрицательных C . (Уравнения (6) и (7) можно распространить на все вещественные ϕ и ψ .) Мы видели, что в случае векторов равной длины и одинакового либо противоположного направления

$$f(0) = 1, \quad f(\pi/2) = 0$$

соответственно. Это исключает первые два решения (поскольку $\cosh$ нигде не обращается в нуль), а в третьем решении накладывает условие

$$C = 2k + 1 \quad (k \text{ — неотрицательное целое число}). \quad (8)$$

Но в силу (v) единственный вектор, который даёт нулевую сумму с данным единичным вектором, — это единичный вектор противоположного направления. Значит,

$$f(\phi) \neq 0 \quad \text{при } 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Поэтому в третьей формуле из (7) имеем $C = 1$. Действительно, если $C = 2k + 1 > 1$ при $k > 0$, то $0 < \frac{\pi}{2(2k+1)} < \frac{\pi}{2}$ и $f\left(\frac{\pi}{2(2k+1)}\right) = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(2k+1)} = 0$, вопреки (9).

Таким образом, из непрерывных решений уравнения (6) допустимым остаётся одно:

$$f(\phi) = \cos \phi \quad \text{при всех } \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Итак, длина суммы двух единичных векторов с углом 2ϕ между ними равна $2\cos \phi$, а сумма двух векторов равной длины x лежит на биссектрисе угла между ними ($2\phi \in [0, \pi]$) и имеет длину $2x \cos \phi$. Иными словами, для векторов равной длины выполнено правило параллелограмма (рис. 4), т. е. из $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = x$ и $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2\phi \in [0, \pi]$ следует, что $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{p} \circ \mathbf{q}) = \angle(\mathbf{p} \circ \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \phi$ и $|\mathbf{p} \circ \mathbf{q}| = 2x \cos \phi$.

Этот результат обобщается на векторы *неравной* длины посредством чисто геометрических рассуждений, которые мы приведём для полноты¹⁾.

¹⁾ Несмотря на то что в них не используются функциональные уравнения.

Сначала рассмотрим *перпендикулярные* векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ (рис. 5). Натянем на них прямоугольник и проведём прямые, параллельные его диагоналям, через концы векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и через начало координат. Получим два равнобедренных треугольника. Обозначим их стороны, соответственно ориентированные (см. рис. 5), через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. Как следует из сказанного выше,

$$\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1 = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор¹⁾. Геометрически очевидно, что $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_2 = \mathbf{r}/2$ (параллельные прямые отсекают на параллельных прямых равные отрезки). Здесь вектор $\mathbf{r}$ соответствует диагонали, исходящей из $\mathbf{0}$. Из (ii) и (iii) имеем

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = (\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2) = (\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1) \circ (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2) = \mathbf{0} \circ \mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad (10)$$

т.е. для перпендикулярных векторов выполняется правило параллелограмма.

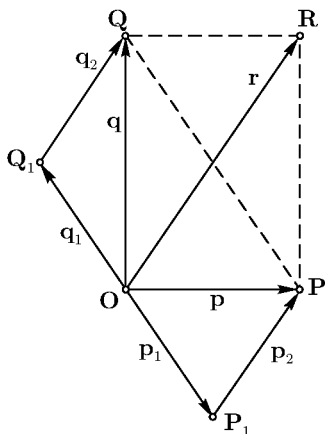


Рис. 5

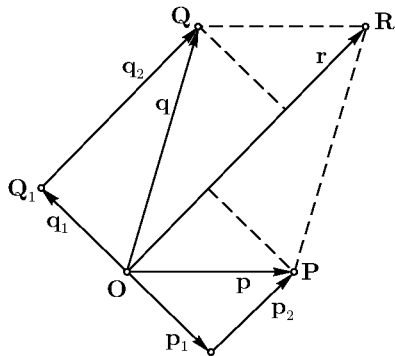


Рис. 6

Пусть теперь $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — произвольные неколлинеарные векторы (см. рис. 6), $\mathbf{r}$ — диагональ натянутого на них параллелограмма, исходящая из $\mathbf{0}$. Через концы векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ проведём параллельные ей прямые, а через $\mathbf{0}$ — перпендикуляр. Стороны полученных прямоугольных треугольников, ориентированные как на рис. 6, обозначим через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. Согласно доказанному,

$$\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1 = \mathbf{0},$$

и с учётом (v), (iii) и очевидных геометрических соображений получаем

$$\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = (\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2) = (\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1) \circ (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2) = \mathbf{0} \circ \mathbf{r} = \mathbf{r}. \quad (11)$$

Остался нерассмотренным лишь случай векторов неравной длины и противоположного направления (случай любых векторов одинакового направления охватывается условием (iii)). Пусть, например, $\mathbf{p}$ длиннее $\mathbf{q}$. Тогда $\mathbf{p} = \mathbf{r} \circ (-\mathbf{q})$, где $\mathbf{r}$ имеет

¹⁾ Мы воспользовались тем, что $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2|$.

направление $\mathbf{p}$ и длину $|\mathbf{p}| - |\mathbf{q}|$. Ввиду (v) $\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = [\mathbf{r} \circ (-\mathbf{q})] \circ \mathbf{q} = \mathbf{r} \circ [(-\mathbf{q}) \circ \mathbf{q}] = \mathbf{r}$, так что правило параллелограмма определяет сумму $\mathbf{p} \circ \mathbf{q}$ любых двух векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$.

Теорема 1 полностью доказана (если считать известными регулярные решения уравнений (2) и (6))¹⁾. ■

Полезно отметить, что в основном (см. (1), (5), (10) и (11)) мы использовали ассоциативность и коммутативность (условие (ii)) в форме тождества *бисимметрии* или медиальности:

$$(\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{p}_2) \circ (\mathbf{q}_1 \circ \mathbf{q}_2) = (\mathbf{p}_1 \circ \mathbf{q}_1) \circ (\mathbf{p}_2 \circ \mathbf{q}_2). \quad (12)$$

К этому — также важному — функциональному уравнению мы вернёмся в гл. 17.

Теорема 1 показывает, что аддитивная структура векторного пространства V , снабжённого расстоянием, однозначно определяется его группой изометрий, т.е. унитарной группой. Аналогичный факт верен для евклидовой метрики в n -мерном пространстве при любом $n \geq 3$.

Дальнейшие результаты такого рода содержатся в § 10.4.

Последующие результаты и упражнения

Эта глава является вводной, поэтому лишь некоторые из упражнений прямо относятся к её предмету; остальные посвящены функциональным уравнениям, которые могут быть решены непосредственно, без применения методов, изучаемых далее.

(В связи с упр. 1–3 см.: Aczél, 1966с, р. 24–25, 27–30).

1. Покажите, что общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

имеет вид $f(x) = a \cos x + b \sin x$ (a, b — произвольные вещественные константы).

2. Пусть E — евклидово пространство размерности $n > 2$, функция $f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ инвариантна при любом линейном унитарном преобразовании T пространства E ($Tx = A \cdot x$, причём матрица, транспонированная к A , обратна ей). Иначе говоря, $f(Tx, Ty) = f(x, y)$ для всех $x, y \in E$. Пусть также f линейна по первому аргументу. Покажите, что f с точностью до скалярного множителя совпадает со скалярным произведением в E .

3. Пусть $\mathbb{R}^3$ — трёхмерное евклидово пространство, а функция $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ такова, что для любого вращения T выполнено равенство $f(Tx, Ty) = Tf(x, y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}^3$. Покажите, что если f линейна по первому аргументу, то она с точностью до скалярного множителя равна векторному произведению в $\mathbb{R}^3$.

4. (Aczél, 1966с, р. 223–224.) Найдите общее решение уравнения

$$F(x, y) + F(y, z) = F(x, z),$$

где x, y, z принадлежат непустому множеству S , $(G, +)$ — группа, $F: S \times S \rightarrow G$.

5. Найдите общее решение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$F(x, y)F(y, z) = F(x, z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

6. (Moszner, 1965.) Найдите общее решение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения из упр. 5, если предполагается лишь, что уравнение выполнено для упорядоченных троек $x \leq y \leq z$.

¹⁾ Если случаи параллельных и перпендикулярных векторов рассмотрены, то общий случай легко к ним сводится. Действительно, пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ — произвольные векторы. Тогда $\mathbf{q}$ можно представить в виде $\mathbf{r} \circ \mathbf{s}$, где $\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}$, $\mathbf{s} \perp \mathbf{p}$. Получаем $\mathbf{p} \circ \mathbf{q} = \mathbf{p} \circ (\mathbf{r} \circ \mathbf{s}) = (\mathbf{p} \circ \mathbf{r}) \circ \mathbf{s} = (\mathbf{p} + \mathbf{r}) + \mathbf{s} = \mathbf{p} + (\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \mathbf{p} + \mathbf{q}$.

7. Покажите, что среди функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ лишь константы удовлетворяют уравнению

$$\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 = f(x+y)f(x-y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

8. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ дилогарифм (введённый Лейбницем) определяется как

$$\text{Li}(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

Пусть при $x \neq 0, x \neq 1$

$$M(x) = \text{Li}(x) + \frac{1}{2} \ln |x(1-x)|.$$

Покажите, что при $x \neq 1, y \neq 1$ выполнено следующее функциональное уравнение:

$$M(xy) = M(x) + M(y) + M\left(\frac{x}{x-1}(1-y)\right) + M\left(\frac{y}{y-1}(1-x)\right) - 2\lambda(x+y+xy)M(2),$$

где λ — характеристическая функция промежутка $^1) [1, \infty[$ (т.е. $\lambda(x) = 1$ при $x \geq 1$ и $\lambda(x) = 0$ при $x < 1$).

9. (Aczél, 1956b; Samuelson, 1974; Christian, 1983.) Рассмотрев отношение приращений функции a^x и используя её непрерывность и выпуклость, покажите, что производная этой функции существует всюду и пропорциональна ей:

$$\frac{da^x}{dx} = a^x l(a).$$

Дайте геометрическое обоснование равенства

$$l(a^t) = tl(a) \quad \text{для всех вещественных } t.$$

Покажите, что существует экспоненциальная функция, производная которой в нуле равна 1. Обозначим её основание через e . Покажите, что

$$l(s) = \log_e s = \ln s \quad \text{при всех } s > 0.$$

(Сказанное может рассматриваться как определение натурального логарифма.)

10. (Aczél, 1966c, p. 26.) Найдите все решения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)(y+2) - y(x^2 - 2y).$$

11. Пусть функция $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел) непрерывна, строго убывает и удовлетворяет уравнению

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f[f(x + f(y)) + f(y + f(x))] \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Докажите, что $f(x)$ совпадает со своей обратной функцией $f^{-1}(x)$.

¹⁾ Здесь и далее термин «промежуток» означает связанное подмножество вещественной оси.

Глава 2

УРАВНЕНИЕ КОШИ. БАЗИС ГАМЕЛЯ

Цель данной главы — ввести основные понятия, относящиеся к функциональным уравнениям: область определения, решение и продолжение решения, условия регулярности, общее решение. В качестве примера используется уравнение Коши на вещественной оси, для которого мы найдём решения при различных условиях регулярности, а также общее решение.

2.1. Общие вопросы; продолжения и регулярные решения

Рассмотрим *уравнение Коши* (Cauchy, 1821):

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{при всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

(Как обычно, $\mathbb{R}$ обозначает множество всех вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество всех положительных, а $\overline{\mathbb{R}}_+$ — всех неотрицательных чисел, и во всех случаях подразумевается обычная топология; для произвольного множества S полагаем $S^2 := \{(x, y) \mid x \in S, y \in S\}$.) Сравнив (1) с (1.2), замечаем разницу. Там уравнение предполагалось выполненным только для *неотрицательных* x, y , а здесь — для любых *вещественных*. Множество всех значений переменных, для которых уравнение предполагается выполненным, называется *областью определения* этого уравнения (не следует путать её с областями определения неизвестных функций; для уравнения (1) областью определения является $\mathbb{R}^2$, а для функции f — вещественная ось). Функция, удовлетворяющая уравнению в данной области, называется *решением* уравнения в этой области. Иногда (но не всегда, см. уравнения (3.1), (3.18) и гл. 7) можно *продолжить* решение уравнения на более широкую область. Например, для (1.2), т. е. для уравнения

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{при всех } (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2, \quad (2)$$

это означает следующее (см. Aczél–Erdős, 1965; Aczél–Baker–Djoković–Kannappan–Radó 1971; для общих алгебраических структур Grząślewicz–Sikorski, 1979).

Теорема 1. *Каждому решению $g : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2) соответствует решение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1), такое что*

$$f(x) = g(x) \quad \text{при всех } x \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (3)$$

Доказательство. Построим искомую функцию f , т. е. продолжим g на всё $\mathbb{R}$, посредством формулы

$$f(s - t) = g(s) - g(t) \quad \text{при всех } (s, t) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2. \quad (4)$$

Такое определение корректно (т. е. действительно является определением): если $s - t = u - v$ для некоторых $s, t, u, v \in \overline{\mathbb{R}}_+$, то $s + v = t + u$, и в силу (2)

$$g(s) + g(v) = g(s + v) = g(t + u) = g(t) + g(u),$$

откуда

$$g(s) - g(t) = g(u) - g(v),$$

что и требуется. Выполнено и (3): если $s, t, u \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $s - t = u$, то $s = u + t$ и

$$g(s) = g(u + t) = g(u) + g(t), \quad (5)$$

т. е.

$$f(u) = f(s - t) = g(s) - g(t) = g(u).$$

(Можно также вывести вначале равенство $g(0) = 0$ из (2), а затем равенство (3) из (4).) Теперь докажем, что функция f , определённая формулой (4), удовлетворяет уравнению (1). В самом деле, пусть $x = s - t$, $y = u - v$ и, соответственно, $x + y = (s + u) - (t + v)$, где $s, t, u, v \in \mathbb{R}_+$. Тогда в силу (4)

$$f(x) = g(s) - g(t), \quad f(y) = g(u) - g(v)$$

и с учётом равенства (2)

$$f(x + y) = g(s + u) - g(t + v) = g(s) + g(u) - g(t) - g(v) = f(x) + f(y).$$

Теорема 1 доказана. ■

Теорема (как и её доказательство) сохраняет силу при замене $\overline{\mathbb{R}}_+$ на $\mathbb{R}_+$ и вообще при замене $\mathbb{R}$ на произвольную абелеву группу G , порождённую подполугруппой S , с заменой $\overline{\mathbb{R}}_+$ (или $\mathbb{R}_+$) на S (полугруппа — это множество, на котором определена ассоциативная операция). Неизвестная функция f также может принимать значения не в $\mathbb{R}$, а в произвольной абелевой группе (см. Aczél–Baker–Djoković–Kannappan–Radó, 1971).

Решение $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения Коши на группоиде (множестве S с бинарной операцией $+$) называется *аддитивным отображением* из S в $\mathbb{R}$, а при $S = \mathbb{R}$ (или, см. гл. 4, $S = \mathbb{R}^n$) — *аддитивной функцией*. Та же терминология применяется, когда f принимает значения не в $\mathbb{R}$, а в произвольной группе или даже группоиде ($f : S \rightarrow G$).

Рассмотрим теперь некоторые непосредственные следствия из уравнения (1).

Лемма 2. Если выполнено уравнение (1), то верно также, что

$$f\left(\sum_{k=1}^n r_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n r_k f(x_k) \quad (6)$$

при любых $x_k \in \mathbb{R}$, $r_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 1$).

Доказательство. Подставляя в (1) $y = 0$ и $y = -x$, получаем соответственно

$$f(0) = 0 \quad (7)$$

и

$$f(-x) = -f(x). \quad (8)$$

Кроме того, по индукции получаем из уравнения (1)

$$f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n) \quad (9)$$

для всех натуральных n и вещественных $x_1, \dots, x_n$.

Положим здесь $x_1 = \dots = x_n = x$. Имеем

$$f(nx) = nf(x) \quad \text{при всех вещественных } x \text{ и всех натуральных } n. \quad (10)$$

Пусть теперь m, n — натуральные числа, $r = m/n$, t произвольное вещественное. Если $x = rt = (m/n)t$, то $nx = mt$, и ввиду (10)

$$nf(x) = f(nx) = f(mt) = mf(t),$$

откуда

$$f(rt) = f(x) = \frac{m}{n} f(t) = r f(t).$$

В силу (8) и (7) это верно и для отрицательных рациональных чисел и нуля, т. е.

$$f(rt) = r f(t) \quad (11)$$

для всех рациональных r и всех вещественных t . С учётом (9) отсюда следует (6), и лемма 2 доказана. ■

Положим в равенстве (11) $t = 1$, $f(1) = c$. Имеем

$$f(r) = r f(1) = cr \quad \text{при всех } r \in \mathbb{Q}. \quad (12)$$

(Как обычно, $\mathbb{Q}$ обозначает множество рациональных чисел.) Выясним, можно ли распространить этот результат на все *вещественные* числа. (Это заведомо возможно, если функция f непрерывна.) В гл. 1 мы видели, что решения уравнения (1) (и (2)) при некоторых условиях имеют вид

$$f(x) = cx \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

где c — вещественная константа (неотрицательная при условии (1.3), и тогда $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$). Очевидно, все функции вида (13) удовлетворяют уравнению (1). Следующая теорема показывает, что *прочие* решения этого уравнения выглядят достаточно «причудливо» (см. Hamel, 1905; San Juan, 1946; Wilansky, 1967; Hewitt–Zuckerman, 1969).

Графиком функции f , заданной на множестве S , называется множество

$$G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in S\}.$$

В нашем случае $S = \mathbb{R}$, $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\} \subset \mathbb{R}$ и график является подмножеством в $\mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in \mathbb{R}\}. \quad (14)$$

Теорема 3. *Если решение уравнения (1) не может быть представлено в виде (13), то его график всюду плотен в плоскости $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Если функцию f нельзя представить в виде (13), то существуют $x_1, x_2 \neq 0$, для которых

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2} \quad (15)$$

(в противном случае положим $c = f(x_1)/x_1$, и пусть $x_2 = x$ пробегает ненулевые вещественные числа; получаем (13) для $x \neq 0$ и ввиду (7) также для $x = 0$). Таким образом,

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как следствие, векторы $\mathbf{p}_1 = (x_1, f(x_1))$ и $\mathbf{p}_2 = (x_2, f(x_2))$ линейно независимы и, значит, порождают всю плоскость $\mathbb{R}^2$, т. е. для любого $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ существуют такие ρ_1, ρ_2 , что

$$\mathbf{p} = \rho_1 \mathbf{p}_1 + \rho_2 \mathbf{p}_2.$$

Далее, множество (пар) рациональных чисел всюду плотно в множестве (пар) вещественных чисел; поэтому можно найти вектор вида $r_1 \mathbf{p}_1 + r_2 \mathbf{p}_2$ с рациональными

r_1, r_2 , произвольно близкий к заданному $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$. Но

$$\begin{aligned} r_1 \mathbf{p}_1 + r_2 \mathbf{p}_2 &= r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) = (r_1 x_1 + r_2 x_2, r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)) = \\ &= (r_1 x_1 + r_2 x_2, f(r_1 x_1 + r_2 x_2)) \end{aligned}$$

(последнее равенство вытекает из (6)). Поэтому если $x_1 (\neq 0)$ и $x_2 (\neq 0)$ удовлетворяют условию (15), то множество

$$G_{1,2} = \{(x, y) \mid y = f(x), x = r_1 x_2 + r_2 x_2, (r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2\}$$

всюду плотно в $\mathbb{R}^2$. Из (14) ясно, что график G содержит $G_{1,2}$ и потому также плотен в $\mathbb{R}^2$. Теорема 3 доказана. ■

Мы применим теорему 3 для того, чтобы из (1.2) и (1.3) вывести равенство $f(x) = cx$. Поэтому нужно убедиться, что в наших рассуждениях нет логического круга¹⁾. Но векторное сложение в вышеприведённом доказательстве не определяется с помощью условий (i)–(iv) теоремы 1.1, а задано непосредственно как покоординатное сложение:

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Согласно теореме 3, если решение уравнения (1) нельзя представить в виде (13), то его график всюду плотен в $\mathbb{R}^2$. Тем не менее в работе Jones (1942a) приведены примеры, когда такой график связан.

Теорема 3 показывает, что если решение уравнения (1) нельзя представить в виде (13), то оно глобально нерегулярно. Из этой же теоремы легко получить и его локальную нерегулярность.

Следствие 4. Если решение уравнения (1) нельзя представить в виде (13), то образ любого интервала $]a, b[$, где $a < b$, плотен в $\mathbb{R}$. ■

С другой стороны, этот факт подсказывает, что некоторая регулярность такого решения уже приводит к формуле (13).

Следствие 5. Если функция f удовлетворяет уравнению (1) и при этом непрерывна в точке либо же монотонна или ограничена с одной стороны на интервале положительной длины, то f имеет вид (13) для некоторой константы c .

Действительно (см. рис. 7), при любом из этих условий график функции f не содержит областей, заштрихованных на рисунке, и потому не всюду плотен в $\mathbb{R}^2$. Но тогда по теореме 3 функция должна иметь вид (13). ■

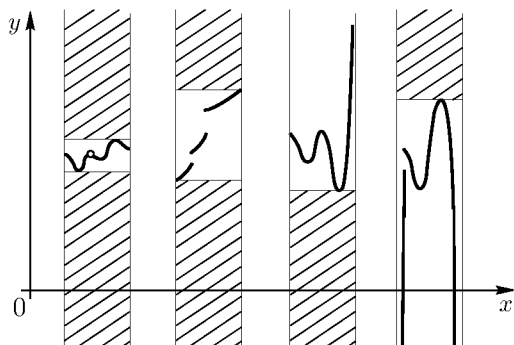


Рис. 7

¹⁾ То есть что мы не опирались на теорему 1.1.

Обратно, функции вида (13), как отмечено выше, удовлетворяют уравнению (1) при любом c , но ограничения на константу могут возникнуть из условий монотонности или ограниченности функции. Например, если в $\mathbb{R}_+$ или на каком-либо промежутке в $\mathbb{R}_+$ функция f неотрицательна, то $c \geq 0$.

Обобщим теперь следствие 5: покажем, что решение уравнения (1) имеет вид (13), если оно ограничено с одной стороны на множестве положительной меры. Таким образом, если решение нельзя представить в таком виде, то оно не ограничено на любом множестве положительной меры. Нам потребуются некоторые сведения из теории Лебега, в частности один результат из работы Steinhaus (1920). Мы приведём его в слегка изменённом виде и используем вариант стандартного доказательства (Halmos, 1950. Р. 68), принадлежащий Ng (не публиковалось).

Теорема 6. *Если $S \subset \mathbb{R}$ имеет положительную лебегову меру, то множество*

$$S + S := \{x + y \mid x \in S, y \in S\}$$

содержит интервал положительной длины.

Доказательство. Достаточно найти такой интервал I положительной длины, что для всех $z \in I$ пересечение множеств S и $z - S$ непусто ($z - S$ состоит из всех $z - y$, где y пробегает S). Для этого достаточно будет доказать, что $m((z - S) \cap S) > 0$.

В лемме 7 мы покажем, что можно найти интервал J положительной длины, имеющий достаточно большое пересечение с S , а именно

$$m(S \cap J) \geq \alpha m(J), \quad (16)$$

где $4/5 < \alpha < 1$. Тогда для доказательства теоремы 6 можно использовать множество $S \cap J$ вместо S . Поэтому без потери общности можно считать, что $S \subset J$, причём длина интервала J конечна и положительна. Для интервала $J =]a, b[$, где $a < b$, всегда найдётся такое (малое) положительное δ , что из $|a + b - z| < \delta$ вытекает

$$m((z - J) \cap J) > m(J)/2.$$

Из (16) следует $m(J \setminus S) \leq (1 - \alpha)m(J)$, поэтому для таких z имеем

$$m((z - S) \cap S) > \left[\frac{1}{2} - 2(1 - \alpha) \right] m(J) > \frac{m(J)}{10}.$$

Значит, $(x - S) \cap S \neq \emptyset$ для любого $z \in]a + b - \delta, a + b + \delta[$. Осталось доказать существование интервала J , для которого выполнено (16). Это сделано ниже в отдельной лемме (см., например: Halmos, 1950, р. 68). ■

Лемма 7. *Если $S \subset \mathbb{R}$ имеет положительную лебегову меру и $0 < \alpha < 1$, то существует интервал J положительной длины, для которого выполнено соотношение (16).*

Доказательство. Без потери общности можно «урезать» множество S и ограничиться случаем $0 < m(S) < \alpha$. Поскольку все открытые множества измеримы по Лебегу, то существует открытое множество $U \supset S$, для которого $\alpha m(U) \leq m(S) (\leq m(U))$. Но U является счётным объединением непересекающихся интервалов J_n положительной длины. Ввиду σ -аддитивности меры Лебега получаем, что

$$\alpha m(U) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(S \cap J_n) = m(S).$$

Поэтому хотя бы для одного натурального n_0 верно, что

$$\alpha m(J_{n_0}) \leq m(S \cap J_{n_0}),$$

и условие (16) выполнено при $J = J_{n_0}$. Тем самым доказана лемма 7, а вместе с ней и теорема 6. ■

Следующая теорема была доказана в работе: Ostrowski (1929), и вторично в заметке: Kestelman (1946).

Теорема 8. *Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид (13) для некоторого вещественного c , если и только если она удовлетворяет уравнению (1) и ограничена (снизу или сверху) на множестве положительной меры.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве S положительной лебеговой меры:

$$f(x) \leq M \quad \text{при всех } x \in S. \quad (17)$$

С учётом (1) отсюда следует, что $f(x+y) = f(x) + f(y) \leq 2M$ при всех $x, y \in S$, т.е. $f(z) \leq 2M$ при $z \in S + S$. По теореме 6 множество $S + S$ содержит интервал положительной длины. Так как функция f на нём ограничена, то в силу следствия 5 она имеет вид (13). ■

Замечания. В упр. 7.15 содержится другое доказательство теоремы 6, применимое в более общей ситуации. В § 9.2 мы докажем обратные теоремы, характеризующие такие множества E , для которых решение уравнения (1), ограниченное с одной стороны, непрерывно и потому имеет вид (13).

Из доказанного выше вытекает случай измеримости в следующем результате, доказанном в работах Fréchet (1913), Sierpiński (1920a), Banach (1920). Позже были найдены и другие доказательства. См., например: Alexiewicz, Orlicz (1945).

Следствие 9. *Пусть функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (2) и при этом или непрерывна в точке, или монотонна, или измерима по Лебегу, или ограничена (с какой-либо стороны) на множестве положительной меры. Тогда существует такая константа c , что*

$$g(x) = cx \quad \text{при всех } x \geq 0. \quad (18)$$

В частности, если выполнено (2) и $g(x) \geq 0$, то (18) выполнено при некотором $c \geq 0$. ■

Последнее утверждение — это первое из недоказанных допущений в гл. 1.

В случае измеримости требуется вспомнить, что функция, измеримая по Лебегу, ограничена на некотором множестве положительной лебеговой меры.

Как показывают эти результаты, бывает интересно найти все решения данного функционального уравнения в некотором *классе допустимых функций* (например, непрерывных в точке, ограниченных на промежутке или измеримых). Множество всех таких решений называется *общим решением уравнения в данном классе*. (В частности, мы могли бы считать допустимой *любую* функцию, которая отображает данную область в данное множество.) Функции нередко бывают заданы формулами, которые дают все их значения, когда аргументы пробегают область определения; подобно этому, общее решение функционального уравнения нередко можно выразить *формулой*, которая даёт все конкретные решения (в данном классе) при конкретизации входящих в неё *констант* или других неизвестных элементов (например, функций). Так, общее неотрицательное решение уравнения (2) определяется формулой (18) при $c \geq 0$, а общее решение уравнения (1), непрерывное в точке, — формулой (13).

2.2. Общие решения

Пусть x_0, y_0 — вещественные числа. За исключением случая $x_0 = 0, y_0 \neq 0$, всегда существует функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению Коши (1) и такая, что

$$f(x_0) = y_0. \quad (19)$$

При $x_0 \neq 0$ можно положить $f(x) = (y_0/x_0)x$, а при $x_0 = 0$ (и $y_0 = 0$) — взять тождественный ноль.

Непрерывное решение уравнения (1) однозначно определяется равенством (19) при $x_0 \neq 0$, но для разрывных решений, как мы увидим, это неверно. Заменяя $\{x_0\}$ произвольным множеством вещественных чисел E , естественно поставить вопрос: на каких множествах решение уравнения (1) можно задать произвольно? Мы, следовательно, ищем такие множества $E \subset \mathbb{R}$, что для любого отображения $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ существует *единственное* отображение f , удовлетворяющее уравнению (1) и совпадающее с g на E . Здесь нам потребуются базисы Гамеля. В работе Hamel (1905) доказано с использованием аксиомы выбора, что *существует такое подмножество H в $\mathbb{R}$, что каждое вещественное число x представляется единственным образом* (с точностью до нулевых коэффициентов) *в виде*

$$x = \sum_{k=1}^n r_k h_k \quad (h_k \in H, r_k \text{ рациональны, } k = 1, \dots, n). \quad (20)$$

Множество H — это базис Гамеля, а формула (20) — *разложение Гамеля для x с коэффициентами r_k* ($k = 1, \dots, n$). Отметим, что число слагаемых в сумме (20) конечно, но зависит от x . Базис Гамеля — не что иное, как базис (в смысле линейной алгебры) для $\mathbb{R}$ как линейного пространства над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Теперь покажем, что интересующие нас множества E — это базисы Гамеля H . Сначала будет доказана

Теорема 10. *Общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определяется посредством разложения Гамеля (20). Именно, следует задать f на множестве H произвольно и положить*

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n r_k h_k\right) = \sum_{k=1}^n r_k f(h_k). \quad (21)$$

Доказательство. Приведённое определение функции f корректно, поскольку нулевые коэффициенты не меняют ни (20), ни (21). В частности, если $x = h \in H$, то (21) даёт тождество $f(h) = f(h)$, т. е. не ограничивает выбор значений функции на множестве H . В силу (20) и (6) *любое решение уравнения (1) может быть записано в виде* (21).

Обратно, все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ указанного вида удовлетворяют уравнению (1). В самом деле, возьмём два вещественных числа с разложениями Гамеля

$$x = \sum_{k=1}^m r_k h_k \quad \text{и} \quad y = \sum_{k=1}^m s_k h_k \quad (h_k \in H; r_k, s_k \in \mathbb{Q}; k = 1, 2, \dots, m).$$

(Добавив, если нужно, слагаемые с нулевыми коэффициентами, мы всегда можем считать, что в обоих разложениях число слагаемых и элементы базиса Гамеля одинаковы.) Тогда $x + y$ в базисе H имеет разложение

$$x + y = \sum_{k=1}^m (r_k + s_k) h_k \quad (h_k \in H, r_k + s_k \in \mathbb{Q}; k = 1, 2, \dots, m),$$

единственное с точностью до нулевых коэффициентов (как любое разложение по базису Гамеля). Ввиду (21)

$$f(x) = \sum_{k=1}^m r_k f(h_k), \quad f(y) = \sum_{k=1}^m s_k f(h_k), \quad f(x + y) = \sum_{k=1}^m (r_k + s_k) f(h_k),$$

т. е. уравнение (1) действительно выполняется. Теорема 10 доказана. ■

Из теорем 1 и 10 вытекает очевидное

Следствие 11. *Мы получим общее решение $g : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2), если ограничим на $\overline{\mathbb{R}}_+$ общее решение уравнения (1), построенное в теореме 10. ■*

Как мы видели, теорема 3 показывает, что если решение уравнения (1) нельзя представить в виде (13), то его график всюду плотен в $\mathbb{R}^2$. Но это не доказывает, что такие решения существуют (если даже верно, что все ангелы имеют крылья, это не доказывает, что вокруг нас летают ангелы). Однако теорема 10 и следствие 11 показывают, что существуют решения уравнений (1) и (2), которые нельзя представить в виде (13) и (18) соответственно. Чтобы получить такое решение, достаточно на двух элементах h_1, h_2 базиса Гамеля задать такие значения функции f , что $f(h_1)/h_1 = f(h_2)/h_2$ (см. (15)). В силу следствия 5 такие решения нигде не могут быть непрерывными или монотонными. Ввиду следствия 9 они не являются локально измеримыми по Лебегу, не ограничены с каждой стороны на любом множестве положительной меры, и согласно теореме 3 их графики всюду плотны в $\mathbb{R}^2$.

Предложение 12. *Произвольная функция, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, однозначно продолжается до аддитивной (т.е. удовлетворяющей уравнению (1)) функции на $\mathbb{R}$, если и только если E является базисом Гамеля.*

Доказательство. Пусть на базисе Гамеля H задана функция $g : H \rightarrow \mathbb{R}$. В силу теоремы 10 она продолжается до аддитивной функции на $\mathbb{R}$. Пусть теперь h — аддитивная функция на $\mathbb{R}$, причём $h = g$ на H . Для любого $x \in \mathbb{R}$ ввиду (21) имеем

$$h(x) = \sum_{k=1}^n r_k h(x_k) = \sum_{k=1}^n r_k g(x_k) = \sum_{k=1}^n r_k f(x_k) = f(x) \quad (x_k \in H, r_k \in \mathbb{Q}),$$

т.е. функция f единственна.

Пусть теперь $E \subset \mathbb{R}$ обладает тем свойством, что функция, произвольно заданная на E , однозначно продолжается до аддитивной функции f на $\mathbb{R}$. Во-первых, докажем, что множество E линейно независимо над $\mathbb{Q}$. Действительно, в противном случае существует нетривиальное соотношение $\sum_{k=1}^n r_k x_k = 0$, где $x_k \in E$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$), $r_k \in \mathbb{Q}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), причём хотя бы одно r_k не равно нулю. Тогда в силу (6) и (7) любая аддитивная функция f должна удовлетворять условию $\sum_{k=1}^n r_k f(x_k) = 0$,

т.е. значения $f(x_k)$ ($k = 1, \dots, n$) не могут быть произвольными. Иначе говоря, не всякая функция на множестве E является ограничением аддитивной функции, что противоречит нашему предположению.

Во-вторых, покажем, что E порождает $\mathbb{R}$ (как линейное пространство над $\mathbb{Q}$). В противном случае множество E , независимое над $\mathbb{Q}$, можно дополнить до базиса Гамеля H , строго содержащего E . Тогда для любого отображения $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ найдутся два различных продолжения на H , скажем g_1 и g_2 . Согласно теореме 10 существуют такие аддитивные функции f_1 и f_2 , что $f_i(y) = g_i(y)$ ($i = 1, 2$) при всех $y \in H$. Следовательно, f_1 и f_2 — две различные аддитивные функции, служащие продолжениями для g . Это противоречит предположению, что g допускает не более одного такого продолжения.

Итак, мы доказали, что E независимо над $\mathbb{Q}$ и порождает $\mathbb{R}$ как линейное пространство над $\mathbb{Q}$. Но это и означает, что E является базисом Гамеля. ■

Попутно получаем

Следствие 13. *Множество $E \subset \mathbb{R}$ содержит базис Гамеля, если и только если любая функция f , удовлетворяющая уравнению (1) и равная нулю на E , равна нулю тождественно. ■*

Из следствий 13 и 5 вытекает, что любой промежуток положительной длины, и даже любое подмножество в $\mathbb{R}$ с положительной лебеговой мерой, содержат базис Гамеля. Однако его может содержать и множество меры нуль. Построим такое множество.

Канторово множество C состоит из всех таких $t \in [0, 1]$, что в некотором их троичном разложении ¹⁾ не содержится единиц:

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}, \quad \text{где все } \varepsilon_i \text{ равны 0 или 2.}$$

Сначала покажем, что канторово множество содержит базис Гамеля. Пусть $x \in [0, 1]$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}, \quad \text{где } x_i = 0, 1, 2. \quad (22)$$

Если x_i равно 0 или 2, то положим $y_i = z_i = x_i$. Если $x_i = 1$, то при чётном i положим $y_i = 2, z_i = 0$, а при нечётном $y_i = 0, z_i = 2$. Числа

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i} \quad \text{и} \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{3^i}$$

принадлежат канторову множеству C , причём

$$x = \frac{y + z}{2}. \quad (23)$$

Пусть теперь аддитивная функция f равна нулю на C . Ввиду (23) и леммы 2 она равна нулю на $[0, 1]$, а значит и на всей оси. Согласно следствию 13 множество C содержит базис Гамеля.

С другой стороны, общеизвестно, что канторово множество имеет меру 0. Для полноты изложения мы это докажем, используя другой способ построения канторова множества. Пусть E_1 состоит из всех $t \in [0, 1]$, для которых хотя бы в одном троичном разложении (22) $t_1 \neq 1$. Пусть, далее, E_n ($n > 1$) состоит из всех $t \in E_{n-1}$, для которых хотя бы в одном троичном разложении n -я координата t_n отлична от 1. Множества $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ замкнуты в $[0, 1]$. Лебегова мера E_n равна $2/3$ лебеговой меры E_{n-1} . Канторово множество есть пересечение всех E_n ($n \geq 1$). Поэтому его мера меньше чем $(2/3)^n$ для любого $n \geq 1$ и, значит, равна нулю.

Последующие результаты и упражнения

1. (См., например: Aczél, 1966с, р. 46–47.) Пусть n целое, $n \geq 3$. Охарактеризуйте функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых из $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) и $x_1 + \dots + x_n = 0$ следует $f(x_1) + \dots + f(x_n) = 0$.

2. Найдите все решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

¹⁾ В разложении возможна неоднозначность типа

$$\frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \frac{0}{27} + \dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots$$

сведя его к уравнению Коши. Покажите, что такая же редукция возможна для решений $f: G \rightarrow H$, где G — группа, уравнение выполнено для любых $x, y \in G$, а H является 2-делимой абелевой группой (2-делимость означает, что $2a = 2b \Rightarrow a = b$).

3. Найдите общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения Лобачевского

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Определите все его непрерывные решения на $\mathbb{R}$.

4. Найдите общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(В связи с упр. 5–7 см.: Aczél, 1967; Aczél–Fischer, 1968; Dhombres, 1979, p. 1.11–1.15.)

5. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна, причём для некоторого целого $m > 1$ из $x > 0$, $f(x) > 0$ следует $f(x^m) = f(x)^m$. Будет ли функция f обязательно непрерывной, и каков её общий вид?

6. То же, что и в предыдущем упражнении, но теперь уравнение $f(x^m) = f(x)^m$ выполнено при $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, а m — произвольное целое, отличное от 0 и 1 (положительное или отрицательное).

7. То же, что и в упр. 5, но для уравнения $|f(x^m)| = f(x)^m$, выполненного при $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, где целое число m чётно и не равно нулю.

8. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна, функция $g: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна и не равна константе. Предположим, что

$$f(g(x)) \geq g(|f(x)|) \quad \text{при всех } x > 0.$$

Следует ли отсюда, что f непрерывна?

9. (Volkman, 1982.) Пусть функция $g: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна, строго возрастает, $g(0) < 0$, $g(1) < 1$. Пусть, далее, отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $f(1) = 1$,

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

$$f(g(x)) \geq g(|f(x)|) \quad (x \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Докажите, что отображение f тождественное.

10. (Кигера, 1964а, Jurkat, 1965.) Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна, причём $f(1/x) = f(x)/x^2$ при всех $x \neq 0$. Докажите, что f непрерывна.

11*. (См., например: Zariski–Samuel, 1958, p. 120–124. Простое доказательство см. в работе Segal, 1969.) Докажите, что существует аддитивная функция f на $\mathbb{R}$, не равная тождественно нулю и такая, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

(Такие функции называются (нетривиальными) дифференцированиями на $\mathbb{R}$.)

12. Покажите, что существует разрывная аддитивная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $f(1/x) = -f(x)/x^2$ при всех $x \neq 0$.

(В связи с упр. 13–15 см.: Каннаппа–Кигера, 1970.)

13*. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна,

$$f(x^n) = ax^{n-m}f(x^m) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

где a — вещественная константа, n, m целые, $n \neq m$. Покажите, что функция f непрерывна. Если при этом $a \neq 1$, $n \neq m$, то функция f тождественно равна нулю.

14*. Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивны и не равны тождественно нулю. Пусть также существует непрерывная функция $\alpha : \mathbb{R} \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$), для которой

$$f((x-a)^{-1}) = \alpha(x)g((x-b)^{-1}) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}).$$

Покажите, что f и g линейно зависимы, т. е. для некоторых вещественных констант A, B , не равных одновременно нулю, выполнено равенство $Af(x) + Bg(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Покажите также, что f и g непрерывны, если и только если $\alpha(x) = c[(x-b)(x-a)]$, где c — константа.

15*. Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивны, функция $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Пусть также для некоторых вещественных a, b ($a \neq b$) выполнено тождество

$$f(x-a) = \alpha(x)g(x-b) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Покажите, что f и g линейно зависимы.

(В связи с упр. 16 и 17 см.: Grzaslewicz, 1978b.)

16*. Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивны. Дифференцированием называется аддитивная функция d , для которой $d(xy) = xd(y) + yd(x)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$ (см. упр. 11). Покажите, что $f(x)^2 = x^4 g(1/x)^2$ при всех $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, если и только если какая-либо из функций $g + f$, $g - f$ непрерывна, а другая является дифференцированием.

17. Найдите все аддитивные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, не равные тождественно нулю и удовлетворяющие условию

$$f(x) = x^{n+1}f(1/x)^n$$

при некотором целом n .

18*. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция, I — собственный промежуток вещественной оси, $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Опровергните или докажите следующее: если $f(x)f(\phi(x)) \geq a > 0$ при всех $x \in I$, то f непрерывна.

19. (Aczél, 1972b.) Следующее функциональное уравнение сведите к уравнению Коши:

$$f\left(\frac{x+y}{2} - (xy)^{1/2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2} + (xy)^{1/2}\right) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

20. (Benz, 1980b.) Покажите, что если непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(xy) + f(x+y) = f(xy+x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

то это аффинная функция, т. е. $f(x) = ax + b$.

21*. Опровергните или докажите, что две аддитивные функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейно зависимы (см. упр. 14), если и только если: либо $f(x)g(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, либо $f(x)g(x) \leq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

22. Пусть E — ограниченное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ с положительной мерой Лебега. Оно содержится в открытом множестве $\mathcal{O}$, таком что мера $\mathcal{O} \setminus E$ строго меньше, чем половина меры E . Положим $\delta = \inf |z - y|$, где $z \in E$, а y принадлежит дополнению подмножества $\mathcal{O}$. Покажите, что $]-\delta, +\delta[$ содержится в $E - E$. Выведите отсюда другое доказательство теоремы 8.

23*. (Sierpiński, 1920a.) Докажите следующий факт и с его помощью получите ещё одно доказательство теоремы 8. Пусть подмножества вещественной оси A и B имеют положительную меру Лебега. Тогда существуют точка в A и точка в B , расстояние между которыми рационально.

24*. (Blanuša, 1970; Daróczy, 1971; Światak, 1971a.) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Покажите, что

$$f(x) = g(x) + a$$

для некоторой аддитивной функции $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и некоторой константы $a \in \mathbb{R}$.

25. Докажите, что любое измеримое подмножество E базиса Гамеля H в $\mathbb{R}$ имеет меру нуль.

26. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна и ограничена с одной стороны на канторовом множестве. Покажите, что она аддитивна всюду на $\mathbb{R}$. (Теорему 8 здесь применить нельзя, поскольку канторово множество имеет лебегову меру нуль.)

27. Покажите, что существует аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой множество $f(\mathbb{R})$ бесконечно, но счётно.

28. Приведите пример аддитивной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, график которой *несвязен*.

Глава 3

ЕЩЁ ТРИ УРАВНЕНИЯ КОШИ.

ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Уравнение Коши на вещественной оси $\mathbb{R}$ — это уравнение гомоморфизма аддитивной группы вещественных чисел. В данной главе изучаются ещё три уравнения, которые соответствуют гомоморфизмам аддитивной или мультипликативной структуры на $\mathbb{R}$. Выясняется их связь с аддитивным уравнением Коши, что позволяет найти их общие, а также регулярные решения. Рассмотрено применение одного из этих уравнений в теории информации.

Логарифмическое уравнение Коши

$$g(xy) = g(x) + g(y) \quad \text{при всех } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (1)$$

легко сводится к уравнению Коши (2.1). Положив

$$x = e^u, \quad y = e^v, \quad \text{т. е. } u = \ln x, \quad v = \ln y,$$

мы устанавливаем соответствие между *всеми положительными* x, y и *всеми вещественными* u, v . Положив теперь

$$f(u) = g(e^u) \quad (u \in \mathbb{R}), \quad (2)$$

получим из (1) аддитивное уравнение Коши (2.1):

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad (u, v \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

Из (2) имеем

$$g(x) = f(\ln x) \quad \text{при всех положительных } x. \quad (4)$$

Проведённый переход обратим, и мы получаем следующий факт (об этом и других результатах гл. 3 см., например: Cauchy, 1821; Aczél, 1966с, р. 39–41):

Теорема 1. *Общее решение $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) имеет вид (4), где f — общее решение уравнения (3). ■*

С учётом результатов гл. 2 получаем также

Следствие 2. *Общее решение уравнения (1) в классе функций, непрерывных в точке или измеримых, или ограниченных (с одной стороны) на множестве положительной меры, имеет вид*

$$g(x) = c \ln x \quad (x \in \mathbb{R}_+), \quad (5)$$

где c — произвольная вещественная константа. ■

Уравнение (1) — пример уравнения, решения которого не могут быть продолжены с $\mathbb{R}_+$ даже на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Действительно, уравнение

$$\bar{g}(xy) = \bar{g}(x) + \bar{g}(y) \quad \text{при всех неотрицательных } x, y \quad (6)$$

имеет лишь нулевое решение. Это становится очевидным, если положить $y = 0$:

$$\bar{g}(0) = \bar{g}(x) + \bar{g}(0), \quad \text{откуда } \bar{g}(x) = 0 \quad \text{при всех неотрицательных } x.$$

Поэтому, например, решение уравнения (1) вида

$$g(x) = \ln x \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

не продолжается до решения уравнения (6) на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Это означает, что если g не является тождественным нулём, то нельзя задать $g(0)$ таким образом, чтобы (1) продолжало выполняться (если только не считать $g(0) = \infty$ или $g(0) = -\infty$).

Тем не менее возможно продолжение на множество

$$(\mathbb{R}^*)^2 = \{x, y \mid x, y \text{ вещественные, } xy \neq 0\};$$

при этом получаем общие решения $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$h(xy) = h(x) + h(y) \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}^*. \quad (7)$$

Действительно, если (7) выполнено, то ограничение функции h на $\mathbb{R}_+$ удовлетворяет уравнению (1), т. е.

$$h(x) = f(\ln x) \quad (8)$$

при положительных x , где f удовлетворяет уравнению (3). Из (7) и (8) вытекает, что $h(1) = 0$ (положим $x = 1$). Подставив в (7) $x = y = -1$, получаем

$$2h(-1) = h(1) = 0, \quad \text{или } h(-1) = 0.$$

Далее, если $x = |t|$, $y = \operatorname{sgn} t$ ($t \neq 0$), то из уравнения (7) следует, что $h(t) = h(|t| \operatorname{sgn} t) = h(|t|) + h(\operatorname{sgn} t) = h(|t|)$, или $h(t) = h(|t|)$ при всех $t \neq 0$. Доказана

Теорема 3. *Общее решение $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (7) имеет вид*

$$h(x) = f(\ln |x|) \quad \text{при всех вещественных } x \neq 0, \quad (9)$$

где f — произвольное решение уравнения (3). В частности, общее решение уравнения (7) в классе функций, ограниченных с одной стороны на множестве положительной меры, имеет вид

$$h(x) = c \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R}^*), \quad (10)$$

где c — произвольная вещественная константа. ■

Разумеется, функция g в уравнениях (4) и (5) — это ограничение на $\mathbb{R}_+$ функции h из (9) и (10) соответственно.

С другой стороны, область определения логарифмического уравнения Коши допускает дальнейшее ограничение. Рассмотрим, например, уравнение

$$I(pq) = I(p) + I(q) \quad \text{при всех } p, q \in]0, 1]. \quad (11)$$

Положив

$$p = e^{-x}, \quad q = e^{-y} \quad (x \geq 0, y \geq 0), \quad g(x) = I(e^{-x}),$$

приведём его к виду (2.2):

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \text{для всех неотрицательных } x, y. \quad (12)$$

Получен следующий факт (см. также следствие 2.5).

Предложение 4. *Общее решение $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (11) имеет вид*

$$I(p) = g(-\ln p) \quad (p \in]0, 1]),$$

где g — произвольное решение уравнения (12). В частности, общее неотрицательное решение уравнения (11) имеет вид

$$I(p) = -c \ln p \quad (p \in]0, 1]), \quad (13)$$

где c — произвольная неотрицательная константа.

Предложение 4 имеет непосредственное применение в теории информации (Luce, 1960; Rényi, 1960; Aczél–Dárgoczy 1975, р. 2–5). Обычно принимается, что *количество информации, заключённой в событии, неотрицательно и зависит (только) от (ненулевой) вероятности этого события, а в случае совместного наступления двух независимых событий количество информации равно сумме количеств информации, получаемых из этих событий по отдельности*. Если вероятности p соответствует количество информации $I(p)$, то последнее условие равносильно уравнению (11), а предыдущее означает *неотрицательность* функции I . Согласно предложению 4 *количество информации, заключённое в событии, имеющем вероятность p , определяется по формуле (13)*. Обычно единица информации (один бит) бывает задана условием $I(1/2) = 1$. Тогда $c = 1/\ln 2$, и в событии, имеющем вероятность p , заключено количество информации

$$I(p) = -\frac{\ln p}{\ln 2} = -\log_2 p.$$

В теории информации и её приложениях принципиально важную роль играет понятие энтропии; в § 16.4 мы увидим, что энтропия — это *взвешенное среднее* от количеств информации, причём весами служат вероятности p .

Теперь рассмотрим *экспоненциальное уравнение Коши*

$$h(x + y) = h(x)h(y) \quad (14)$$

для трёх случаев:

$$x, y \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

$$x, y \in \mathbb{R}_+, \quad (16)$$

$$x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (17)$$

Если h в некоторых точках обращается в нуль, то возникают осложнения. *Покажем, что в случаях (15) и (16) функция h , удовлетворяющая уравнению (14), либо тождественно равна нулю, либо не обращается в нуль нигде*.

Проще всего доказать это в случае (15). Если $h(x_1) = 0$ для некоторого x_1 , то, положив в уравнении (14) $x = x_1, y = t - x_1$, получаем

$$h(t) = h(x_1)h(t - x_1) = 0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$, что и утверждалось. В случае (16) это рассуждение пригодно *лишь для $t > x$* . Возьмём теперь произвольное $x \in]0, x_1]$. При достаточно большом целом n имеем: $nx > x_1$, поэтому $h(nx) = 0$. С другой стороны, для любого натурального n получаем по индукции $h(nx) = h(x)^n$ (аналогично тому, как (2.10) следовало из (2.1)), откуда снова $h(x) = 0$.

В случае (17) предыдущее рассуждение применимо при $x > 0$, но не при $x = 0$. Уравнение (14) при $x = y = 0$ даёт $h(0) = h(0)^2$, откуда $h(0)$ равно 0 или 1. Функция

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases} \quad (18)$$

действительно является решением уравнения (14) в случае (17). Решением во всех трёх случаях является и

$$h(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \text{ или } x \in \mathbb{R}_+, \text{ или } x \in \overline{\mathbb{R}}_+). \quad (19)$$

Все остальные решения уравнения (14) в случаях (15)–(17) нигде не обращаются в нуль. Уравнение (14) при $x = y = t/2$ даёт

$$h(t) = h\left(\frac{t}{2}\right)^2 \geq 0,$$

поэтому для решений, отличных от (18) и (19), всюду имеем

$$h(t) > 0. \quad (20)$$

Тогда существует логарифм от обеих частей (14), и он удовлетворяет аддитивному уравнению Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (21)$$

Доказана

Теорема 5. *Общие решения уравнения (14) в областях (15), (16) и (17) имеют вид (19) либо*

$$h(x) = e^{f(x)},$$

причём функция f в соответствующей области удовлетворяет уравнению (21); в случае (17) добавляется только решение (18). В частности, решения для (14) в классе функций, ограниченных сверху на отрезке или вообще на множестве положительной меры (или в классе измеримых функций), имеют вид (19) либо

$$h(x) = e^{cx} \quad (x \in \mathbb{R}, \text{ или } x \in \mathbb{R}_+, \text{ или } x \in \overline{\mathbb{R}}_+), \quad (22)$$

а в случае (17) также (18). Вместо ограниченности сверху можно потребовать ограниченность снизу положительной константой (на множестве положительной меры); тогда следует исключить решения (18) и (19). ■

Положительность нижней границы связана с тем, что (см. (18), (19) и (20)) нуль является нижней границей для всех решений уравнения (14). Возьмём теперь

$$h(x) = e^{f(x)},$$

где f — решение уравнения Коши, не представимое в виде $f(x) = cx$. Мы получим строго положительное решение для (14), не представимое в виде (18), (19) или (22). Такие решения существуют согласно теореме 2.10 и следствию 2.11.

Отметим, что решение (18) нельзя продолжить с $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$. Действительно, эта функция ограничена сверху и непрерывна на $\mathbb{R}_+$, поэтому её продолжение имело бы те же свойства (на $\mathbb{R}_+$). Но все решения для (14) в области (15), ограниченные сверху на отрезке, имеют вид (19) или (22), и функция (18) не является ограничением какого-либо из них на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Наконец, рассмотрим *степенное уравнение Коши*

$$g(xy) = g(x)g(y), \quad (23)$$

сначала в случае (16):

$$x \in \mathbb{R}_+, \quad y \in \mathbb{R}_+. \quad (24)$$

Положив $x = e^u$, $y = e^v$, $h(u) = g(e^u)$, получаем

$$h(u + v) = h(u)h(v) \quad \text{для всех вещественных } u, v,$$

т. е. уравнение (14) в области (15). Из теоремы 5 следует

Предложение 6. *Решения уравнения (23) в области (24) имеют вид*

$$g(x) = 0 \quad \text{для всех } x > 0 \quad (25)$$

и

$$g(x) = \exp(f(\ln x)) \quad \text{для всех } x > 0, \quad (26)$$

где f — произвольное решение аддитивного уравнения Коши на $\mathbb{R}$. В частности, решения для (23) в области (24) в классах функций, непрерывных в точке либо ограниченных сверху на множестве положительной меры, имеют вид

$$g(x) = 0 \quad \text{либо} \quad g(x) = x^c \quad (x > 0, c — вещественная константа). \quad \blacksquare \quad (27)$$

Рассмотрим теперь уравнение (23) в области

$$x \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad y \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (28)$$

Положив в (23) $y = 0$, получаем

$$g(0)[1 - g(x)] = 0,$$

откуда либо $g(0) = 0$, либо

$$g(x) = 1 \quad \text{при всех } x \geq 0. \quad (29)$$

Отсюда вытекает

Следствие 7. Мы получим решения уравнения (23) в области (28) при тех же ограничениях, что в предложении 6, если дополним решения (25)–(27) равенством $g(0) = 0$ и добавим решение (29). $\blacksquare$

Наконец, рассмотрим уравнение (23) в области

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Положив $y = 1$, получаем

$$g(x)[1 - g(1)] = 0,$$

т. е. либо $g(1) = 1$, либо

$$g(x) = 0 \quad \text{для всех вещественных } x. \quad (31)$$

Функция (31) является решением, но мы исключим её из рассмотрения вплоть до следствия 8. Итак, пусть $g(1) = 1$. Положив в (23) $x = y = -1$, получим

$$1 = g(1) = g(-1)^2,$$

т. е. либо

$$g(-1) = 1, \quad (32)$$

либо

$$g(-1) = -1. \quad (33)$$

Положив теперь в (23) $x = |t|$, $y = \operatorname{sgn} t$ ($t \neq 0$), видим, что

$$g(t) = g(|t|)g(\operatorname{sgn} t) \quad \text{при } t \neq 0.$$

В случаях (32) и (33) получаем соответственно

$$g(t) = g(|t|) \quad \text{при всех } t \neq 0 \quad (34)$$

либо

$$g(t) = g(|t|)\operatorname{sgn} t \quad \text{при всех } t \neq 0. \quad (35)$$

Для функции (31) выполняются одновременно формулы (34) и (35). Мы установили

Следствие 8. Чтобы получить общее решение уравнения (23) в области (30) при тех же условиях, что и в предложении 6, нужно все решения, указанные в следствии 7, продолжить на $\mathbb{R}$ с помощью (34) или (35). ■

(Легко проверить, что все функции, упомянутые в следствиях 7 и 8, действительно удовлетворяют уравнению (23) в областях (28) и (30) соответственно.) Отметим, что продолжения решений (26) и (27) с $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$ существуют, но не единственны. Следствие 8 упрощается, если мы ограничимся областью $\mathbb{R}^*$.

Следствие 9. Решения $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (23) в области $(\mathbb{R}^*)^2$ в классе функций, непрерывных в точке, имеют вид

$$g(x) = 0, \quad g(x) = |x|^c, \quad g(x) = |x|^c \operatorname{sgn} x \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}^*, \quad (36)$$

где c — произвольная вещественная константа. ■

Последующие результаты и упражнения

1. Определим экспоненту как

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Применив формулу бинома, покажите, что e^x удовлетворяет экспоненциальному уравнению Коши (14).

(В связи с упр. 2 и 3 см.: Elliot 1978.)

2. Пусть $\alpha, \beta; f, g$ — функции из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}$. Предположим, что $\beta(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$, причём выполнено асимптотическое соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x^y) - f(y)\alpha(x)}{\beta(x)} = g(y) \quad (y \in \mathbb{R}_+).$$

Определите f и g , а также найдите асимптотическое соотношение между α и β (не содержащее f и g).

3. Пусть отображение $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^*$ таково, что для всех $y \in \mathbb{R}_+$ существует

$$f(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x^y)}{g(x)}.$$

Найдите функциональное уравнение, которому удовлетворяет f .

4. (Thielman, 1949b.) Докажите, что общее непрерывное решение уравнения

$$f((x^n + y^n)^{1/n}) = f(x) + f(y)$$

имеет вид $f(x) = cx^n$, где c — произвольная вещественная константа.

(В связи с упр. 5 и 6 см.: Dhombres, 1979, р. 2.2–2.8.)

5. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывные или ограниченные на отрезке (или на множестве положительной меры) и такие, что

$$f((x^2 + y^2)^{1/2}) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

6*. Покажите, что все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, не равные тождественно нулю и удовлетворяющие уравнению Гаусса

$$f((x^2 + y^2)^{1/2}) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

имеют вид

$$f(x) = \exp(ax^2) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

где a — комплексная константа. (Получаем характеристику нормального распределения.)

7. (См., например: Aczél, 1966с, р. 107–109.) Докажите, что если функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) f принадлежит классу C^1 (всюду непрерывно дифференцируема);

б)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1;$$

с) для любых x_1, x_2, x_3 максимум функции $g(x) = f(x_1 - x)f(x_2 - x)f(x_3 - x)$ достигается при $x = (x_1 + x_2 + x_3)/3$,
то f имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

(Другая характеристика нормального распределения, принадлежащая Гауссу.)

8. (Aczél, 1966с. Р. 64–65.) Докажите, что общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x+y) = a^{xy} f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

где $a > 0$ — константа, имеет вид

$$f(x) = a^{x^2/2} g(x),$$

где g — произвольное решение экспоненциального уравнения Коши.

9*. (Ward, 1970a,b; Reich, 1971.) Докажите, что если решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$$

(x, y вещественные, причём $f(x) \neq f(y)$) не является константой, то оно имеет вид $f(x) = x$. (Покажите, что каждое решение этого уравнения удовлетворяет степенному уравнению Коши (23).)

10. (Moszner, 1980.) Пусть $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ имеют одно и то же множество нулей C , которое непусто, симметрично и не содержит 0. Докажите, что все решения уравнения

$$f(x)f(y)f(-x-y) = g(x)g(y)g(-x-y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

имеют следующий вид: g — произвольная функция с множеством нулей C ;

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in C), \\ aH(x)g(x) & (x \notin C), \end{cases}$$

где $a^3 = 1$, функция H удовлетворяет экспоненциальному уравнению Коши и не равна тождественно нулю.

11. Найдите общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

где λ — вещественная константа.

Глава 4

ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ НА МНОГОМЕСТНЫЕ, ВЕКТОРНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ ФУНКЦИИ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В этой главе мы определим общие и регулярные решения уравнений Коши для многоместных функций, т. е. функций, заданных на некоторой области в $\mathbb{R}^n$. Мы рассмотрим их применение в теории геометрических объектов и получим характеристику определителя как функции. Далее мы обратимся к более общим уравнениям Пексидера и покажем, как одно уравнение может определять несколько неизвестных функций (эта черта типична для функциональных уравнений). Здесь мы сможем также показать, как обобщаются результаты с $\mathbb{R}^n$ на достаточно общие структуры (такие, как полугруппы), что оказывается полезным, например, при изучении уравнений в частных производных.

4.1. Многоместные и векторные функции

Аналог уравнения Коши (2.1) для функций $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1)$$

$$(x_k, y_k \in \mathbb{R}; \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Если обозначить

$$f_1(t_1) = f(t_1, 0, \dots, 0), \dots, f_k(t_k) = f(0, \dots, 0, t_k, 0, \dots, 0), \dots, f_n(t_n) =$$

$$= f(0, \dots, 0, t_n),$$

то многократное применение уравнения (1) даст

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1 + 0, 0 + t_2, 0 + t_3, \dots, 0 + t_n) =$$

$$= f(t_1, 0, \dots, 0) + f(0, t_2, t_3, \dots, t_n) = f_1(t_1) + f(0 + 0, t_2 + 0, 0 + t_3, \dots, 0 + t_n) =$$

$$= f_1(t_1) + f_2(t_2) + f(0, 0, t_3, \dots, t_n) = \dots$$

$$\dots = f_1(t_1) + f_2(t_2) + \dots + f_{n-1}(t_{n-1}) + f_n(0, \dots, 0, t_n),$$

т. е.

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^n f_k(t_k) \quad \text{при всех } (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Положим в (1) $x_k = x, y_k = y, x_j = y_j = 0$ при $j \neq k$:

$$f_k(x + y) = f_k(x) + f_k(y) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \quad (k = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Обратно, всякая функция вида (2), где все f_k ($k = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условию (3), является решением для (1). Доказано

Предложение 1. *Общее решение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1) имеет вид (2), где f_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — произвольные решения уравнения Коши (3). ■*

С помощью следствия 2.5 нетрудно найти общее решение уравнения (1) в классе функций, непрерывных в точке. Если функция f непрерывна в точке $(a_1, \dots, a_n)$, то отображения

$$x_k \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

непрерывны в точке a_k . Но ввиду (2)

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) &= \\ &= f_k(x_k) + f_1(a_1) + \dots + f_{k-1}(a_{k-1}) + f_{k+1}(a_{k+1}) + \dots + f_n(a_n), \end{aligned}$$

поэтому и f_k непрерывна в a_k . В силу (3) и следствия 2.5

$$f_k(x_k) = c_k x_k \quad \text{при всех } x_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где c_k — вещественные константы. Доказано

Следствие 2. *Общее решение уравнения (1) в классе функций, непрерывных в точке, имеет вид*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n c_k x_k. \quad \blacksquare \quad (6)$$

Как видно из доказательства, достаточно, чтобы каждая функция вида (4) была непрерывна в точке a_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Разумеется, те же решения соответствуют и более слабым условиям (так же, как в гл. 2), например ограниченности с одной стороны на множестве положительной меры в $\mathbb{R}^n$.

Отложим до § 9.2 рассмотрение обратных теорем, т.е. характеризацию тех подмножеств в $\mathbb{R}^n$, на которых ограниченное сверху решение уравнения (1) обязательно непрерывно и потому имеет вид (6).

Рассмотрим теперь векторную функцию $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Для неё аналогом уравнения Коши будет

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (7)$$

Для каждой компоненты f_j ($j = 1, \dots, m$) выполняется (1):

$$\begin{aligned} f_j(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ (j = 1, 2, \dots, m; \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}; \quad k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (8)$$

откуда легко получить общее решение для (7). Сформулируем результат для непрерывных векторных функций.

Следствие 3. *Общее решение уравнения (7) в классе функций $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывных в точке, имеет вид*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad (9)$$

где $\mathbf{C}$ — фиксированная $m \times n$ -матрица.

В самом деле, из (8), (1) и (6) вытекает, что

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n c_{jk} x_k \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

что равносильно (9). ■

В случае $m = 1$ следствие 3 сводится к следствию 2: *общее решение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения*

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \quad (10)$$

в классе функций, непрерывных в точке, имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x},$$

где $\mathbf{c}$ — произвольный постоянный вектор, а точка обозначает скалярное произведение.

Пусть теперь $n = 1$. *Общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ уравнения*

$$\mathbf{f}(x + y) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{f}(y) \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

в классе функций, непрерывных в точке, имеет вид (см. (5))

$$\mathbf{f}(x) = x\mathbf{c},$$

где $\mathbf{c}$ — произвольный постоянный вектор.

Следствие 3 можно сформулировать также следующим образом. Пусть M и N — вещественные нормированные пространства конечной размерности, функция $f: N \rightarrow M$ непрерывна в точке, причём

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{при всех } x \in N, y \in N. \quad (11)$$

Тогда f является *линейным оператором*, т.е. выполнено не только уравнение (11), но и

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{при всех } x \in N, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что полученный результат верен и для случая, когда M и N — отделимые вещественные линейные пространства произвольной размерности. Разумеется, тогда f — непрерывный линейный оператор. Если же M и N — вещественные нормированные пространства, то f является *ограниченным линейным оператором*, т.е. в дополнение к (11) и (12) выполняется условие

$$\|f\|_{N,M} := \sup_{\substack{x \in N \\ \|x\|_N = 1}} \|f(x)\|_M < \infty.$$

Покажем, что линейность следует и из более слабых условий, чем непрерывность (в следующих пяти абзацах используются начальные сведения из функционального анализа и теории меры).

Пусть N и M — линейные нормированные пространства, E — непустое подмножество в N . Далее, пусть существует такая точка $x_0 \in E$, что для некоторой прямой D в N , содержащей x_0 , пересечение $D \cap E$ имеет положительную меру (мы можем отождествить прямую D с $\mathbb{R}$, а $D \cap E$ — с подмножеством в $\mathbb{R}$). В этом случае скажем, что E имеет *положительную линейную меру Лебега*.

Функция $f : N \rightarrow M$, ограниченная по норме на множестве E положительной линейной меры Лебега и удовлетворяющая уравнению (11), удовлетворяет также уравнению (12).

Действительно, без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть ϕ — вещественная непрерывная линейная форма на M (элемент двойственного пространства M^*). Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $x \in N$ и функцию $g(\lambda) = \phi(f(\lambda x))$. Функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет аддитивному уравнению Коши (2.1) и ограничена (по абсолютной величине) на множестве положительной лебеговой меры. Поэтому

$$g(\lambda) = \lambda g(1) = \lambda(\phi(f(x))) = \phi(\lambda f(x)).$$

Значит, при любых $\phi \in M^*$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\phi(f(\lambda x)) = \phi(\lambda f(x)).$$

Но элементы из M^* разделяют точки из M , откуда и следует (12). (Обратите внимание, что здесь M^* — это не $M \setminus \{0\}$.) Вместо ограниченности функции f на E достаточно потребовать её ограниченности на пересечении E с каждой прямой, проходящей через x_0 .

Необходимое предупреждение: поскольку норма на N здесь не фигурирует, то аддитивная функция $f : N \rightarrow M$, ограниченная на множестве положительной линейной меры Лебега, не обязательно является ограниченным линейным оператором. Пусть, например, вещественное линейное пространство N наделено двумя неэквивалентными нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причём $\sup_{\|x\|_2=1} \|x\|_1 = \infty$. Пусть N_1 и N_2 — соответствующие нормированные пространства, E — некоторый луч в открытом единичном шаре в N_2 . Очевидно, что множество E имеет положительную линейную меру Лебега. Тожественное отображение $N_2 \rightarrow N_1$ линейно (в частности, аддитивно) и ограничено на E . Но оно не ограничено на N_2 из-за неэквивалентности норм. (Пространство N_1 должно быть бесконечномерным, см. упр. 19.)

При дальнейшем обобщении (см., например: Rudin, 1987, р. 95–115) нетрудно получить подобные результаты для локально выпуклых (а не только нормированных) вещественных линейных пространств. Ситуация выглядит иначе в случае нормированных линейных пространств над произвольным полным нормированным недискретным полем, поскольку топологическое двойственное пространство может сводиться к нулю.

Обратимся к другим функциональным уравнениям типа Коши. Экспоненциальное уравнение для $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n), \quad (13)$$

не представляет трудности. Как и в гл. 3 (сразу после 3.17), можно показать, что либо

$$h(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad (14)$$

либо функция h всюду положительна. В последнем случае можно взять логарифм от обеих частей (13).

Предложение 4. *Общее решение $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (13) имеет вид либо (14), либо*

$$h(\mathbf{x}) = \exp f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad (15)$$

где f — произвольное решение уравнения (10). В частности, общее решение для (13) в классах функций, непрерывных в точке, или ограниченных сверху, или измеримых

на множестве положительной меры, является тождественным нулём или имеет вид

$$h(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}, \quad (16)$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ — произвольный постоянный вектор. ■

Аналогичные результаты получаются, если заменить $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}_+^n$. В гл. 5 мы вернёмся к уравнению (13), но уже для комплекснозначных функций.

4.2. Характеризация плотностей в теории геометрических объектов с помощью матричного функционального уравнения

Разумеется, уравнения типа Коши допускают и дальнейшие обобщения. Уравнения, содержащие умножение, скажем (3.23), можно обобщить на матрицы, поскольку матрицы образуют кольцо (уравнение (7) здесь не даст ничего нового, так как матрицы ведут себя относительно сложения как векторы). Соответствующее уравнение

$$g(XY) = g(X)g(Y) \quad (\det XY \neq 0) \quad (17)$$

для вещественнозначных (скалярных) функций, определённых на квадратных матрицах, находит важные применения в теории геометрических объектов (см.: Aczél–Gólab, 1960, р. 43–47).

Однородный линейный чисто дифференциальный геометрический объект первого класса с одной компонентой — это вещественное число d , зависящее от точки n -мерного пространства, причём при регулярном (т.е. дифференцируемом и локально взаимно однозначном) преобразовании координат

$$\tilde{x}_k = \phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

значение объекта изменяется по правилу

$$\tilde{d} = g(X)d, \quad (18)$$

где g — вещественнозначная функция от матрицы Якоби

$$X = \left[\frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j} \right] \quad (j, k = 1, 2, \dots, n; \det X \neq 0).$$

Разумеется, далее можно перейти к третьей системе координат

$$\tilde{\tilde{x}}_l = \psi_l(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

с помощью матрицы Якоби

$$Y = \left[\frac{\partial \tilde{\tilde{x}}_l}{\partial \tilde{x}_k} \right] \quad (k, l = 1, 2, \dots, n; \det Y \neq 0),$$

получив новое значение объекта $\tilde{\tilde{d}}$. В силу правила дифференцирования сложной функции нескольких переменных получаем

$$\left[\frac{\partial \tilde{\tilde{x}}_l}{\partial x_j} \right] = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{\tilde{x}}_l}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_j} \right] = YX. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\tilde{d} = g(Y \cdot X)d$$

и одновременно

$$\tilde{d} = g(Y)\tilde{d} = g(Y)g(X)d.$$

Отсюда (исключая тривиальный случай $d \equiv 0$) вытекает (17).

Поскольку g — скалярная функция, то ввиду (17)

$$g(XY) = g(YX), \quad g(XYZ) = g(XZY) \quad \text{и т. д.} \quad (20)$$

Напомним, что матрицы X и Z *подобны*, если существует такая невырожденная матрица T , что $X = T^{-1}ZT$; подобные матрицы выражают одно и то же линейное преобразование в разных базисах. Из (20) следует, что

$$g(X) = g(T^{-1}ZT) = g(T^{-1}TZ) = g(Z), \quad (21)$$

т. е. значение функции g , удовлетворяющей условию (17), одинаково для подобных матриц.

Диагональную матрицу можно представить как произведение матриц, каждая из которых отличается от единичной лишь одним элементом на главной диагонали:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что каждая из диагональных матриц в правой части подобна диагональной матрице, у которой тот же неединичный элемент стоит в первой строке (а остальные элементы диагонали равны 1). Произведение таких матриц — снова диагональная матрица, причём лишь первый элемент диагонали может отличаться от 1.

Введём обозначение

$$f(t) = g \left(\begin{bmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t \end{bmatrix} \right).$$

Из (17) вытекает, что

$$f(tu) = f(t)f(u) \quad \text{при всех } t \neq 0, u \neq 0, \quad (22)$$

и значение функции g для диагональной матрицы с элементами $d_1, d_2, \dots, d_n$ равно $f(d_1)f(d_2)\dots f(d_n)$. Ввиду (22) последнее выражение равно $f(d_1d_2\dots d_n)$. Так как определитель диагональной матрицы равен $d_1d_2\dots d_n$, то мы доказали, что для диагональной матрицы X выполнено равенство

$$g(X) = f(\det X) \quad (\det X \neq 0). \quad (23)$$

Нам потребуются следующие сведения из теории матриц (см., например: Гантмахер, 1988, с. 233–235): *Любая матрица может быть представлена как произведение эрмитовой матрицы на унитарную. Все эрмитовы и унитарные матрицы подобны диагональным.* Используя это разложение, получаем, с учётом формул (17) и (21), что равенство (23) выполнено для всех невырожденных матриц X .

Таким образом (см. (3.23) и следствие 3.9), мы доказали (в основном следуя Hosszú, 1960) следующий факт.

Теорема 5. *Общее вещественнозначное решение уравнения (17) имеет вид (23), где f — произвольное решение степенного уравнения Коши (22). ■*

Следствие 6. *Вещественнозначные решения уравнения (17), не равные тождественно нулю и непрерывные в точке, имеют вид*

$$g(X) = |\det X|^c \quad \text{и} \quad g(X) = |\det X|^c \operatorname{sgn}(\det X), \quad (24)$$

где c — произвольная вещественная константа. ■

Следствие 7. *Все ненулевые однородные линейные чисто дифференциальные геометрические объекты, непрерывно зависящие от невырожденных дифференцируемых преобразований координат, преобразуются согласно (18), где функция g имеет вид (24) с некоторой константой c . ■*

Если g определяется второй из формул (24), то геометрический объект из следствия 7 называется (обычной) *плотностью*, а если первой — *плотностью Вейля*. В обоих случаях c называется *весом плотности*.

Мы решили уравнение (17) при условии невырожденности матриц X и Y , что требуется для рассматриваемого применения. (Уравнение (17) служит примером условного функционального уравнения, см. гл. 6.) Ради полноты можно позволить матрицам X и Y быть вырожденными; тогда теорема 5 остаётся верной, если удалить условие $tu \neq 0$ из (22).

Действительно, пусть X — вырожденная матрица. Существует подобная ей матрица Y с нулевым первым столбцом. Пусть матрица D_k отличается от единичной только k -м элементом диагонали, равным нулю. Очевидно, что $Y = YD_1$. Если $g(D_1) = 0$, то

$$g(X) = g(Y) = g(Y)g(D_1) = 0.$$

Но $\det X = 0$. Поэтому если $f(0) = 0$, то $g(X) = f(\det X)$, что совпадает с (23). При этом уравнение (22) будет выполнено и при $tu = 0$. Покажем, что $g(D_1) = 0$, за исключением случая $f(t) \equiv 1$. (Если $f(t) \not\equiv 1$, то равенство $f(0) = 0$ следует из уравнения (22).)

Итак, вычислим $g(D_1)$. Из (17) вытекает без каких-либо условий на X или Y , что либо $g(0) = 0$, либо $g(X) \equiv 1$. В первом случае $g(D_1) \dots g(D_n) = 0$, поскольку матрица $D_1 D_2 \dots D_n$ нулевая. Но все матрицы D_k подобны. Поэтому $g(D_1) = g(D_2) = \dots = g(D_n) = 0$, как и утверждалось. Во втором случае ($g \equiv 1$) имеем $f \equiv 1$, и равенства (22) и (23) выполнены без ограничений.

Теорема 5 в обеих формах верна для матриц не только над $\mathbb{R}$, но и над произвольным ассоциативным телом F (не обязательно коммутативным), как показано в работе Djoković (1970). Ниже $M_n(F)$ обозначает полугруппу $n \times n$ -матриц над F .

Теорема 8. *Пусть F — ассоциативное тело, функция $g : M_n(F) \rightarrow F$ удовлетворяет тождеству*

$$g(XY) = g(X)g(Y).$$

Тогда существует функция $f : F \rightarrow F$, удовлетворяющая тождествам $g(X) = f(\det X)$ и $f(tu) = f(t)f(u)$. То же верно, если рассматриваются только невырожденные матрицы и в последнем уравнении наложено условие $tu \neq 0$. ■

4.3. Уравнения Пексидера

Замечательная черта функциональных уравнений, отличающая их от большинства прочих (дифференциальных, разностных, интегральных и т. д.), состоит в том, что *одно* уравнение может определять *несколько* неизвестных функций. Классическим примером служит обобщение аддитивного уравнения Коши, а именно уравнение Пексидера (Pexider, 1903):

$$k(x + y) = g(x) + h(y),$$

где все функции g, h, k неизвестны. Аналогичные обобщения возможны для трёх других уравнений Коши, о которых шла речь в гл. 3 (см. ниже следствие 11). Мы рассмотрим это уравнение сразу в общем случае, который охватывает скалярные (вещественные и комплексные), векторные и матричные функции. Пусть $(N, +)$ — *группоид* (множество с операцией $+$: $N \times N \rightarrow N$), 0 — его нейтральный элемент ($x + 0 = 0 + x = x$ для всех $x \in N$), а $(G, +)$ — некоторая группа (аддитивно записываемая, но не обязательно коммутативная). Будем искать решения $g, h, k : N \rightarrow G$ уравнения

$$k(x + y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in N). \quad (25)$$

Полагая поочерёдно $x = 0$ и $y = 0$ в (25) и обозначая $a = g(0)$, $b = h(0)$, получаем соответственно

$$h(y) = -a + k(y), \quad g(x) = k(x) - b. \quad (26)$$

Подставляя в (25), имеем

$$k(x + y) = k(x) - b - a + k(y). \quad (27)$$

Если положить

$$f(z) = -a + k(z) - b, \quad (28)$$

то получим

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{для всех } x, y \in N.$$

Это уравнение напоминает уравнение Коши и означает, что f является гомоморфизмом из $(N, +)$ в $(G, +)$, подобно тому как решения уравнения Коши (7) являются гомоморфизмами из $(\mathbb{R}^n, +)$ в $(\mathbb{R}^m, +)$ относительно обычного сложения векторов +. С учётом (26) и (28) доказана

Теорема 9. Пусть $(N, +)$ — группоид с нейтральным элементом, $(G, +)$ — группа. Тогда общее решение $g, h, k : N \rightarrow G$ уравнения (25) имеет вид

$$g(x) = a + f(x), \quad h(y) = f(y) + b, \quad k(z) = a + f(z) + b \quad \text{для всех } x, y, z \in N, \quad (29)$$

где a и b — произвольные константы в G , а f — произвольный гомоморфизм из N в G . ■

(Легко проверить, что функции вида (29) являются решениями для (25) при любых a, b и $f : N \rightarrow G$.) Общее решение $g, h, k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ уравнения

$$k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \quad (30)$$

непосредственно строится с помощью (8), предложения 1 и теоремы 2.10. Что касается непрерывных решений, то из следствия 3 вытекает

Следствие 10. *Общее решение уравнения (30) в классе функций $g, h, k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, где хотя бы одна из функций непрерывна в точке, имеет вид*

$$g(x) = C \cdot x + a, \quad h(y) = C \cdot y + b, \quad k(z) = C \cdot z + a + b \quad (x, y, z \in \mathbb{R}^n),$$

где a, b — произвольные константы в $\mathbb{R}^m$, а C — произвольная постоянная $m \times n$ -матрица. ■

Аналогично обобщается теорема 8.

Следствие 11. *Пусть F — ассоциативное тело, $M_n(F)$ — мультипликативный моноид (полугруппа с единицей) $n \times n$ -матриц над F . Тогда общие решения $g, h, k : M_n(F) \rightarrow F$ уравнения*

$$k(XY) = g(X)h(Y) \quad (X, Y \in M_n(F)) \quad (31)$$

имеют вид

$$g(Z) = k(Z) = 0 \quad (Z \in M_n(F)), \quad \text{функция } h \text{ произвольна,} \quad (32)$$

$$h(Z) = k(Z) = 0 \quad (Z \in M_n(F)), \quad \text{функция } g \text{ произвольна,} \quad (33)$$

$$g(Z) = af(\det Z), \quad h(Z) = f(\det Z)b, \quad k(Z) = af(\det Z)b, \quad (34)$$

где $a, b \in F \setminus \{0\}$ — произвольные константы, f — произвольный эндоморфизм моноида $(F, \cdot)$. ■

Доказательство. Нейтральным элементом моноида $M_n(F)$ служит единичная матрица I . Поскольку ненулевые элементы тела образуют группу по умножению, то доказательство теоремы 9 сохраняет силу, если $g(I) \neq 0$, $h(I) \neq 0$. В этом случае мы получаем решение (34), которое действительно удовлетворяет уравнению (31), если f — гомоморфизм. Если же, скажем, $g(I) = 0$, то из (31) получаем $k(Y) = k(IY) = g(I)h(Y) = 0$ для всех $Y \in M_n(F)$. Также из (31) имеем $0 = g(X)h(Y)$; так как в теле нет делителей нуля, то либо $g(X) \equiv 0$, либо $h(Y) \equiv 0$. То же верно, если $h(I) = 0$. Если функции k и g (или h) тождественно равны нулю, то (31) выполняется при произвольной функции h (соответственно $g(X)$). Отсюда получаем решения (32) и (33), и следствие 11 доказано.

Как и выше, здесь можно было бы ограничиться, например, вещественными или невырожденными матрицами. ■

Легко видеть, что, скажем, предложение 1 остаётся верным для $f : N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n \rightarrow G$, где $N_1, N_2, \dots, N_n$ — группоиды с нейтральными элементами, а G — абелева группа. Если нейтрального элемента нет, то требуются некоторые дополнительные приёмы (см.: Aczél, 1964b, 1975; Taylor, 1980; Kuczma, 1972; Szymiczek 1973).

Вначале докажем аналог теоремы 9 для абелевых полугрупп без единицы (Aczél, 1964b).

Теорема 12. *Пусть $(S, +)$ — коммутативная полугруппа, $(G, \cdot)$ — группа. Тогда общее решение $g, h, k : S \rightarrow G$ уравнения*

$$k(x + y) = g(x)h(y) \quad \text{для всех } x, y \in S \quad (35)$$

имеет вид

$$g(x) = af(x), \quad h(y) = f(y)b, \quad k(t) = af(t)b \quad (x, y \in S, t \in S + S), \quad (36)$$

где $a, b \in G$ — произвольные константы, f — произвольный гомоморфизм из S в G .

Доказательство. В силу коммутативности

$$g(x)h(y) = k(x + y) = k(y + x) = g(y)h(x).$$

Фиксируем $y = y_0$ и положим

$$\alpha = g(y_0), \beta = h(y_0), \quad (37)$$

откуда

$$g(x) = \alpha h(x) \beta^{-1}. \quad (38)$$

Подстановка в (35) даёт

$$k(x + y) = \alpha h(x) \beta^{-1} h(y).$$

Поскольку

$$k[(x + y) + y_0] = k[x + (y + y_0)],$$

то

$$\alpha h(x + y) \beta^{-1} h(y_0) = \alpha h(x) \beta^{-1} h(y + y_0).$$

Так как G — группа, то ввиду (37) имеем, полагая $e(y) = \beta^{-1} h(y + y_0)$:

$$h(x + y) = h(x) e(y). \quad (39)$$

По коммутативности

$$h(x) e(y_0) = h(y_0) e(x),$$

откуда с учётом (37) вытекает, если положить $\gamma = e(y_0)^{-1}$,

$$h(x) = \beta e(x) \gamma. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39), получаем

$$e(x + y) = e(x) \gamma e(y) \gamma^{-1}, \quad (41)$$

откуда в силу ассоциативности

$$e(x + y) \gamma e(z) \gamma^{-1} = e[(x + y) + z] = e[x + (y + z)] = e(x) \gamma e(y + z) \gamma^{-1},$$

или

$$e(x) \gamma e(y) e(z) = e(x) \gamma e(y) \gamma e(z) \gamma^{-1}.$$

Сокращение на $e(x) \gamma e(y)$ даёт $e(z) = \gamma e(z) \gamma^{-1}$, т. е.

$$e(z) \gamma = \gamma e(z), \quad (42)$$

и (41) сводится к равенству

$$e(x + y) = e(x) e(y), \quad (43)$$

т. е. e является гомоморфизмом из $(S, +)$ в $(G, \cdot)$. Из (40), (38), (35), (42) и (43) следует

$$g(x) = \alpha \beta \gamma e(x) \beta^{-1},$$

$$k(x + y) = g(x) h(y) = \alpha \beta \gamma e(x) e(y) \gamma = \alpha \beta \gamma e(x + y) \gamma.$$

Теперь удобно ввести новые константы $a = \alpha \beta \gamma \beta^{-1}$, $b = \beta \gamma$ и положить

$$f(x) := \beta e(x) \beta^{-1}.$$

Отображение f является гомоморфизмом из S в G :

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in S). \quad (44)$$

При этом

$$g(x) = a\beta e(x)\beta^{-1} = af(x) \quad (x \in S),$$

$$h(y) = \beta e(y)\beta^{-1}b = f(y)b \quad (y \in S),$$

$$k(z) = a\beta e(z)\beta^{-1}b = af(z)b \quad (z \in S + S),$$

т. е. (36) выполнено. Обратно, такие функции g, h, k при условии (44) всегда удовлетворяют уравнению (35). Теорема 12 доказана. ■

4.4. Уравнения типа Коши на полугруппах

Теперь займёмся аналогичными обобщениями предложения 1. Очевидно, что его доказательство сохраняет силу для аддитивных функций (гомоморфизмов) $f : N_1 \times \dots \times N_n \rightarrow S$, где N_k ($k = 1, \dots, n$) — группоиды с нейтральными элементами, S — коммутативная полугруппа. Более нетривиальный результат содержится в статье: Kuczma, 1972.

Теорема 13. Пусть $(S_1, +), (S_2, +), \dots, (S_n, +)$ — коммутативные полугруппы, $(G, \cdot)$ — абелева группа. Тогда отображение f является гомоморфизмом из $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ в G :

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (45)$$

$$(x_j, y_j \in S_j; \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

если и только если существуют гомоморфизмы $f_j : S_j \rightarrow G$ ($j = 1, \dots, n$), такие что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (x_j \in S_j; \quad j = 1, \dots, n). \quad (46)$$

Доказательство. Возьмём константы $c_j \in S_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и положим

$$f_j(x_j) = f(c_1, \dots, c_{j-1}, x_j + c_j, c_{j+1}, \dots, c_n) - f(c_1, \dots, c_n).$$

Многократно применяя (45), получаем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) + nf(c_1, c_2, \dots, c_n) &= f(x_1 + nc_1, x_2 + nc_2, \dots, x_n + nc_n) = \\ &= f(x_1 + c_1, c_2, \dots, c_n) + f(c_1, x_2 + c_2, \dots, c_n) + \dots + f(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n + c_n) = \\ &= \sum_{j=1}^n f_j(x_j) + nf(c_1, c_2, \dots, c_n), \end{aligned}$$

т. е. (46) выполнено. Аналогично, многократно применяя (45), устанавливаем, что f_j являются гомоморфизмами:

$$\begin{aligned} f_j(x_j + y_j) + 2f(c_1, c_2, \dots, c_n) &= f(c_1, \dots, c_{j-1}, x_j + y_j + c_j, c_{j+1}, \dots, c_n) + \\ &+ f(c_1, c_2, \dots, c_n) = f(c_1, \dots, c_{j-1}, x_j + c_j, c_{j+1}, \dots, c_n) + \\ &+ f(c_1, \dots, c_{j-1}, y_j + c_j, c_{j+1}, \dots, c_n) = f_j(x_j) + f_j(y_j) + 2f(c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned}$$

Обратно, если $f_j : S_j \rightarrow G$ являются гомоморфизмами, то из (46) вытекает (45). Теорема 13 доказана. ■

Отметим, что в теореме 13, в отличие от теоремы 12, функции принимают значения в коммутативной группе. На самом деле утверждение «только если» не требует коммутативности, и достаточно лишь предположить, что S_j имеют непустые центры (упр. 3; Szymiczek, 1973).

Итак, мы обобщили степенное (теоремы 5 и 8) и экспоненциальное (предложение 4) уравнения Коши на случай скалярных функций от квадратных матриц или векторов из $\mathbb{R}^n$. В теории дифференциальных уравнений требуются дальнейшие существенные обобщения экспоненциального уравнения Коши (см., например: Hille–Phillips, 1957, р. 388–528; Kato, 1976, р. 365–426). Во-первых, значения функции могут принадлежать линейному пространству ограниченных операторов на нормированном пространстве. Во-вторых, аргумент может принимать значения в полугруппе, отличной от $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$. (Далее в этом параграфе используются элементы теории операторов.) Зафиксируем обозначения.

Пусть N — вещественное банахово пространство, $L(N)$ — вещественное нормированное пространство всех ограниченных линейных операторов из N в N , а $(S, +)$ — некоторая полугруппа. Будем искать функции $f : S \rightarrow L(N)$, для которых

$$f(x + y) = f(x) \circ f(y) \quad (x, y \in S) \quad (47)$$

($\circ$ обозначает композицию операторов в $L(N)$). Тогда $f(S)$ — это некоторая полугруппа ограниченных линейных операторов на N .

Пусть, например, $S = (\mathbb{R}_+, +)$, а C — заданный элемент из $L(N)$. Так как N — банахово пространство, то таковым является и $L(N)$ относительно обычной нормы ограниченных операторов на N . Следовательно, в $L(N)$ сходится ряд

$$f(x) = I + xC + \frac{x^2}{2} C^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} C^n + \dots \quad (x \geq 0), \quad (48)$$

где I — тождественный оператор на N . Ряд (48) определяет функцию

$$f(x) = e^{xC}, \quad (49)$$

которая является решением уравнения (47) для всех $x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (это доказывается обычными операциями со сходящимися рядами). Однако общее решение уравнения (47) не сводится к (49). Обширная литература посвящена условиям регулярности, при которых такое сведение возможно. В этом случае C называется *инфинитезимальным порождающим оператором* для полугруппы $f(\overline{\mathbb{R}}_+)$. В качестве классических руководств по этой тематике см.: Hille–Phillips 1957 и Kato, 1976. Приведём лишь два характерных результата.

Теорема 14. Функция $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(N)$, удовлетворяющая уравнению

$$f(x + y) = f(x) \circ f(y) \quad (x, y \geq 0), \quad (50)$$

имеет вид (49) для некоторого $C \in L(N)$, если и только если $f(0) = I$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \|f(x) - f(0)\| = 0$. ■

Пусть $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow L(N)$ — решение уравнения (50), для которого $f(0) = I$. Пусть также n — вектор в N , для которого существует

$$D_n = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)n - n}{x}. \quad (51)$$

Множество $\mathcal{D}$ всех таких $n \in N$ является линейным подпространством, на котором отображение $n \rightarrow D_n$ представляет собой линейный оператор D . В общем случае $\mathcal{D} \neq N$ и оператор D не ограничен на $\mathcal{D}$. Тем не менее справедлива

Теорема 15. Равенство $\mathcal{D} = N$ выполняется и оператор D ограничен, если и только если выполнены условия теоремы 14. В этом случае $D = C$. ■

Обратно, пусть линейный оператор D отображает $\mathcal{D}$ в N . Интересно выяснить, при каких условиях существует решение f уравнения (50), для которого $f(0) = I$ и выполнено условие (51), где $D_n = D(n)$.

Если $\mathcal{D} = N$ и оператор D ограничен, то формула $f(x) = e^{xD}$ определяет такое решение, причём непрерывное. Имеются и более глубокие результаты для случая, когда $\mathcal{D}$ плотно в N , а D — замкнутый линейный оператор. Следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы уравнение (50) имело решение f , подчинённое требованиям $f(0) = I$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)n - n = 0$ при всех $n \in N$, а также (51): существуют такие вещественные числа M и w , что для всех $\lambda > w$ существует $(\lambda I - D)^{-1}$ и выполнены неравенства

$$\|(\lambda I - D)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Последующие результаты и упражнения

1. Найдите общее решение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y+z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

2. Найдите общее решение $f, g, h, k : N \rightarrow G$ уравнения

$$f(x+y) + g(z) = h(x) + k(y+z) \quad (x, y, z \in N),$$

где $(N, +)$ — группоид с нейтральным элементом, G — абелева группа.

3. (Szymiczek, 1973.) Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ — полугруппы с непустыми центрами, G — группа. Докажите, что если выполнено (45), то существуют гомоморфизмы $f_j : S_j \rightarrow G$, такие что f имеет вид (46).

(В связи с упр. 4–5 см.: Dhombres, 1984c.)

4. Определите общее непрерывное решение $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x)f(y) - f(xy) = g(x+y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

при условиях $g(1) = 1, g(0) = 0$.

5*. Пусть K — поле характеристики, отличной от 2. Найдите все функции $f : K \rightarrow K$, для которых значение $f(x)f(y) - f(xy)$ зависит только от $x + y$.

6*. Пусть f отображает группу в 2-делимую абелеву группу A (т.е. такую, что для любого $a \in A$ уравнение $x + x = a$ имеет единственное решение). Выясните, равносильны ли функциональные уравнения

$$2(f(x) + f(y)) = f(xy) + f(yx)$$

и

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

7. Пусть $\phi: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ предел

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \phi(x)[f(x + \alpha) - f(x)] = g(\alpha)$$

существует, конечен и не равен тождественно нулю (здесь $\|\cdot\|$ — любая норма в $\mathbb{R}^n$). Предположим, что f и g измеримы по Лебегу. Определите общий вид функции g . (В связи с упр. 8, 9 см.: Aczél, 1966с, р. 66–72.)

8. Определите все решения, непрерывные в точке (или ограниченные на множестве положительной меры), для уравнения

$$f(\alpha x + \beta y + \gamma) = Af(x) + Bf(y) + C \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

($\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ — константы, $\alpha\beta AB \neq 0$). При каких значениях констант существуют непостоянные непрерывные решения?

9*. Найдите все решения уравнения

$$f(\alpha x + y) = Af(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

где $\alpha A \neq 0$. (Заметьте, что не предполагается никаких условий регулярности.) При каких α, A существуют решения, не равные тождественно нулю?

10. (Jurkat–Shawyer, 1981; Aczél, 1983a.) Пусть отображения A и B — процедуры линейного суммирования вещественных последовательностей; это значит, что произвольным последовательностям вещественных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ они ставят в соответствие числа $\lim_A \{a_n\}$ и $\lim_B \{b_n\}$ соответственно, причём $\lim_X \{\alpha c_n + \beta d_n\} = \alpha \lim_X \{c_n\} + \beta \lim_X \{d_n\}$ ($X = A$ или B ; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Пусть $\{1\} = \{1, 1, \dots\}$, $\{-1^n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$, $\lim_A \{1\} = \phi$, $\lim_B \{1\} = \psi$, $\lim_A \{(-1)^n\} = \vartheta$, $\lim_B \{(-1)^n\} = \omega$, и при этом $\vartheta \neq \pm\phi$, $\omega \neq \pm\psi$. Предположим, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на множестве положительной меры, и если $\lim_A x_n$ существует, то существует и $\lim_B f(x_n)$, причём

$$\lim_B f(x_n) = f(\lim_A x_n).$$

Докажите, что $f(x) = \gamma x + \delta$ ($x \in \mathbb{R}$) для некоторых вещественных констант γ, δ . С другой стороны, если $f(x) = x$ или $f(x) = 1$ является решением, то выполнены равенства $\phi = \psi$, $\vartheta = \omega$ или $\psi = 1$ соответственно.

11. (Aczél, 1966с, р. 353–355.) Пусть дано множество S , содержащее не менее трёх элементов a, b, c , а также отображения $F, G, H: S^2 \rightarrow M$, где M — мультипликативная полугруппа матриц n -го порядка над некоторым полем. Предположим, что $\det G(a, y) \det H(b, c) \neq 0$ для всех $y \in S$, причём выполнено тождество

$$F(x, z) = G(x, y)H(y, z).$$

Определите общий вид отображений F, G, H .

(В связи с упр. 12 и 13 см.: Aczél–Haruki–McKiernan–Saković 1968.)

12. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x+t, y+t) + f(x+t, y-t) + f(x-t, y+t) + f(x-t, y-t) = 4f(x, y)$$

$$(x, y, t \in \mathbb{R}).$$

13. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x+t, y) + f(x-t, y) + f(x, y+t) + f(x, y-t) = 4f(x, y) \quad (x, y, t \in \mathbb{R}).$$

14. (Haruki, 1969.) Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, для которых выполняется уравнение

$$\begin{aligned} & f(x+t, y+t, z+t) + f(x+t, y+t, z-t) + f(x+t, y-t, z+t) + \\ & + f(x+t, y-t, z-t) + f(x-t, y+t, z+t) + f(x-t, y+t, z-t) + \\ & + f(x-t, y-t, z+t) + f(x-t, y-t, z-t) = 8f(x, y, z) \quad (x, y, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(В связи с упр. 15 и 16 см.: Sweet, 1981.)

15*. Пусть даны: натуральное число n , 2-делимая абелева группа G , вещественное векторное пространство F , отображение $f : G^n \rightarrow F$ и набор элементов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ($x_i \in G$). Для всех t и x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) из G положим

$$P_i^t f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_i - t, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n).$$

Рассмотрим следующие функциональные уравнения:

$$O_n : \quad \left(\sum_{i=1}^n P_i^t \right) f(\mathbf{x}) = 2n f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in G^n, t \in G),$$

$$C_n : \quad \left(\prod_{i=1}^n P_i^t \right) f(\mathbf{x}) = 2^n f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in G^n, t \in G).$$

Верно ли, что каждое решение для O_n является решением для C_n ?

16.* При обозначениях из упр. 15 выясните (по крайней мере для $n \leq 4$), всякое ли решение для C_n является решением для O_n .

17. Найдите все $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (где I — некоторый промежуток), для которых существует непрерывная функция $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$f(x) - f(y) = (x - y)g\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

для всех $x, y \in I$. Дайте характеризацию параболы посредством этого результата.

18*. (Sh. Haruki, 1979; Aczél, 1985a.) Пусть F — поле характеристики, не равной 2. Найдите все функции $f, g : F \rightarrow F$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - f(y) = (x - y)g(x + y).$$

(Никаких условий регулярности не предполагается.)

19. Пусть N и M — вещественные нормированные пространства, N конечномерно, E — множество в N с положительной линейной мерой Лебега. Опровергните или докажите, что каждое решение $f : N \rightarrow M$ уравнения (11), ограниченное на E , является ограниченным линейным оператором.

(В связи с упр. 20, 21 см.: Daróczy, 1986.)

20. Пусть $(G, \cdot)$ — коммутативная полугруппа, $F : G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнениям

$$F(xy, z)F(x, y) = F(x, yz)F(y, z) \quad (x, y, z \in G),$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2} (F(x, x) + F(y, y)) \quad (x, y \in G).$$

Опровергните или докажите, что если определить $g : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ формулой $g(x) = F(x, x)$, то при некотором неотрицательном b будет выполняться равенство

$$g(xy)(g(x) + g(y)) - g(x)g(y) = b \quad \text{для всех } x, y \in G.$$

21. Пусть G — коммутативная полугруппа. Найдите общее решение уравнения

$$f(xy)(f(x) + f(y)) - f(x)f(y) = 1 \quad (x, y \in G).$$

(В связи с упр. 22–24 см.: Dhombres, 1984с.)

22. Найдите все решения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x + y) + f(x) + f(y) = f(xy) + f(x)f(y).$$

23. Найдите все решения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y).$$

24*. Пусть F — ассоциативное тело. Найдите все такие $f : F \rightarrow F$, что $f(x)f(y) - f(xy)$ зависит только от $x + y$ (см. упр. 5).

25. Пусть $K_{r,c}$ — поле вещественных чисел, которые строятся с помощью циркуля и линейки (т.е. поле чисел, алгебраических над $\mathbb{Q}$, причём их степень является степенью двойки). Положим $K_{r,c}^1 = K_{r,c} \cap [1, \infty[$. Решите уравнения Коши:

$$(i) f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (ii) f(x + y) = f(x)f(y),$$

$$(iii) f(xy) = f(x) + f(y), \quad (iv) f(xy) = f(x)f(y),$$

где f — непрерывная функция из $K_{r,c}^1$ в $K_{r,c}^1$.

26*. (Jessen–Karpf–Thorup, 1968, см. также Aczél–Daróczy, 1975, р. 98–100.) Опровергните или докажите, что общее симметричное ($F(x, y) = F(y, x)$) решение $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$F(x, y) + F(x + y, z) = F(y, z) + F(x, y + z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

имеет вид

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y),$$

где $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция. На какие более общие классы групп вы можете распространить этот результат?

27. (Fenyő, 1985.) Найдите общее решение $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ системы функциональных уравнений

$$g(x, z) - g(x + y, z) = g(x, y) - g(x + z, y),$$

$$g(x, y) + g(x, z) - g(x, y + z) = g(y, x) + g(y, z) - g(y, x + z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Глава 5

УРАВНЕНИЯ КОШИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И ИЗМЕРЕНИЮ ИНФОРМАЦИИ

Представляется вполне естественным исследовать уравнения Коши в классических полях, например в поле комплексных чисел. В этой главе мы получим как общие, так и регулярные решения уравнений Коши в $\mathbb{C}$. Три их важных приложения, представленные здесь, показывают, с одной стороны, важность перехода от вещественного к комплексному случаю, а с другой — прикладное значение общих (а не только регулярных) решений. Первый пример демонстрирует резкое различие между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ в отношении эндоморфизмов. Во втором примере общее решение комплексного уравнения Коши используется для характеристики одного класса функций, играющего важную роль в гармоническом анализе. Последний пример касается рекурсивных энтропий и возвращает нас к теории информации. Одновременно он показывает, что в некоторых функциональных уравнениях интегрируемость решения оказывается достаточной для его дифференцируемости.

5.1. Аддитивное и экспоненциальное уравнение Коши для комплексных функций

Поле комплексных чисел как вещественное линейное пространство совпадает с $\mathbb{R}^2$, и соответствующее обобщение аддитивного уравнения Коши сводится к переписыванию следствия 4.3. Однако полезно пояснить некоторые подробности, связанные с тем, что $\mathbb{C}$ само является полем.

Комплекснозначные функции вещественного переменного $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ охватываются случаем $n = 1, m = 2$ следствия 4.3. Если

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \quad (1)$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}), \quad (2)$$

то

$$f_k(x + y) = f_k(x) + f_k(y) \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

Предложение 1. *Общее решение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (2) определяется формулами (1) и (3). В частности, решение в классе функций, непрерывных в точке или измеримых на отрезке, имеет вид*

$$f(x) = (c_1 + i c_2)x = cx, \quad (4)$$

где c — произвольная комплексная константа. ■

Аналогично, случай $n = m = 2$ следствия 4.3 охватывает комплекснозначные функции комплексного переменного $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть

$$x = x_1 + i x_2, \quad f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \quad (5)$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}). \quad (6)$$

Если функция f непрерывна в точке, то ввиду следствия 4.3

$$f(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + i(c_{21}x_1 + c_{22}x_2).$$

Поскольку $x = x_1 + ix_2$, $\bar{x} = x_1 - ix_2$ (черта обозначает сопряжение), то

$$f(x) = (c_{11} + ic_{21})\frac{x+\bar{x}}{2} + (c_{22} - ic_{12})\frac{x-\bar{x}}{2} = ax + b\bar{x} \quad (x \in \mathbb{C}),$$

где

$$a = \frac{c_{11} + c_{22}}{2} + i\frac{c_{21} - c_{12}}{2}, \quad b = \frac{c_{11} - c_{22}}{2} + i\frac{c_{21} + c_{12}}{2}.$$

Обратно, любая функция вида

$$f(x) = ax + b\bar{x} \quad (x \in \mathbb{C}) \quad (7)$$

с произвольными комплексными константами a, b удовлетворяет уравнению (6), и мы получаем

Предложение 2. *Общие решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнений (2) и (6) в классах функций, непрерывных в точке или измеримых на отрезке, имеют вид (4) и (7) соответственно, где a, b, c — произвольные комплексные константы.*

Не все решения вида (7) дифференцируемы в комплексном смысле, поскольку сопряжение не является дифференцируемым отображением. *Общее дифференцируемое решение $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (6) имеет вид*

$$f(x) = ax \quad (x \in \mathbb{C}),$$

где a — произвольная комплексная константа.

Теперь займёмся комплекснозначными решениями $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ экспоненциальных уравнений Коши

$$h(x+y) = h(x)h(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

и

$$h(x+y) = h(x)h(y) \quad (x, y \in \mathbb{C}). \quad (9)$$

Нам потребуются некоторые свойства поля комплексных чисел.

Мы можем записать

$$h(x) = r(x) \exp(i\phi(x)), \quad (10)$$

где модуль $r(x)$ неотрицателен, а аргумент $\phi(x)$ — вещественное число, определённое при $r(x) \neq 0$ с точностью до 2π . Из-за отсутствия единственности и возникают основные технические трудности. Вначале рассмотрим уравнение (8); тогда в равенстве (10) имеем $x \in \mathbb{R}$. Подставим (10) в (8):

$$r(x+y) \exp(i\phi(x+y)) = r(x)r(y) \exp(i[\phi(x) + \phi(y)]).$$

Абсолютная величина обеих частей одинакова, поэтому

$$r(x+y) = r(x)r(y). \quad (11)$$

Как мы видели в гл. 3, либо всюду $r = 0$ (и $h = 0$), либо всюду $r \neq 0$. В последнем случае

$$\exp(i\phi(x+y)) = \exp(i[\phi(x) + \phi(y)]) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (12)$$

Уравнение (11) совпадает с (3.14) для случая (3.15). По теореме 3.5 $r(x)$ тождественно равно нулю или $e^{f(x)}$, где f — произвольное решение уравнения Коши (2.1). Что касается уравнения (12), то оно равносильно

$$\phi(x+y) \equiv \phi(x) + \phi(y) \pmod{2\pi} \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

так как (комплексная) экспонента имеет период $2\pi i$ и потому функция ϕ определена лишь с точностью до величины, кратной 2π . Общее решение для (13) строится так же, как для (2.1) в теореме 2.10 (van der Corput 1940a,b; Vietoris, 1944). В итоге получена

Теорема 3. Общие решения $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (8) имеют вид

$$h(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad h(x) = \exp(f(x) + i\phi(x)),$$

где $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольное решение аддитивного уравнения Коши, а ϕ — произвольное решение сравнения (13). ■

Не столь просто найти регулярные (например, измеримые) решения. Следующий приём полезен для получения весьма регулярных решений, когда предполагается лишь интегрируемость или измеримость; при этом используются лишь простейшие факты, связанные с этими свойствами. Разумеется, такие решения уравнения (11) охватываются теоремой 3.5 (поскольку из измеримости h следует измеримость r). Итак,

$$r(x) \equiv 0 \quad \text{или} \quad r(x) \equiv e^{cx} \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R} \quad (14)$$

($c \in \mathbb{R}$ — произвольная константа). В первом случае $h(x) \equiv 0$. Во втором случае используем равенство (12). Если функция h измерима на отрезке, то это верно и для функции $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ вида

$$g(x) := \exp(i\phi(x)) = e^{-cx} h(x). \quad (15)$$

Поскольку

$$|g(x)| = 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (16)$$

то функция g ограничена и, значит, интегрируема по Лебегу на том же отрезке, который можно считать конечным. Уравнение (12) с учётом (15) превращается в следующее:

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad (17)$$

откуда очевидна интегрируемость функции g на *любом* конечном отрезке.

Существует число $b \in \mathbb{R}$, для которого

$$a = \int_0^b g(x) dx \neq 0. \quad (18)$$

Действительно, если для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ верно, что

$$\int_0^t g(y) dy = 0,$$

то $g(x) = 0$ почти всюду на $\overline{\mathbb{R}}_+$ по теореме Лебега (см., например: Rudin, 1987, р. 30), что противоречит равенству (16). Проинтегрируем обе части уравнения (17) по y на

отрезке $[0, b]$. Положив $t = x + y$, с учётом (18) получаем

$$g(x) = \frac{1}{a} \int_0^b g(x+y) dy = \frac{1}{a} \int_x^{x+b} g(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{x+b} g(t) dt - \frac{1}{a} \int_0^x g(t) dt. \quad (19)$$

Поскольку (лебегов) интеграл непрерывен как функция верхнего предела, то правая, а, значит, и левая, части в (19) непрерывны, т. е. непрерывна функция g . Но интеграл непрерывной функции дифференцируем как функция верхнего предела, поэтому правая часть в (19) дифференцируема по x , а тогда дифференцируема и g . Продифференцировав (17) по y и положив $y = 0$, получим

$$g'(x) = \delta g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

где $\delta = g'(0)$. Интегрирование этого дифференциального уравнения приводит к равенству

$$g(x) = \gamma e^{\delta x}, \quad (20)$$

где γ, δ — комплексные константы. Подстановка (20) в (17) даёт либо $\gamma = 0$, что противоречит равенству (16), либо $\gamma = 1$, и тогда из (16) следует, что $\delta = di$ с вещественным d , т. е.

$$g(x) = e^{idx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

С учётом (14) и (10) отсюда следует

Теорема 4. *Общие решения $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (8) в классе функций, измеримых на отрезке, имеют вид*

$$h(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{или} \quad h(x) = \exp((c + id)x) = e^{\alpha x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

где α — произвольное комплексное число. ■

Все предшествующие результаты по существу сохраняются, если $\mathbb{R}$ заменить на $\mathbb{R}_+$.

Отметим также, что в комплексном случае, в отличие от вещественного (теорема 3.5), из ограниченности (см. (16)) решения уравнения (8) не следует непрерывность.

Здесь полезно вернуться к уравнению (13). Пусть функция $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Лебегу и удовлетворяет этому уравнению. Тогда существует такая вещественная константа d , что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) \equiv dx \pmod{2\pi}.$$

Доказательство аналогично приведённому выше; при этом нужно взять $g(x) = e^{i\phi(x)}$ и заметить, что измеримость функции ϕ влечёт измеримость g .

Если функция ϕ непрерывна на $\mathbb{R}$, то она имеет вид

$$\phi(x) = dx + 2\pi n,$$

где d — вещественная константа, n — целое число (если непрерывная функция на $\mathbb{R}$ принимает лишь целые значения, то она равна константе).

Рассмотрим теперь уравнение (9). Из уравнения (10) следует (11) и (12), на этот раз для всех $x, y \in \mathbb{C}$. Комплексные числа при сложении ведут себя как двумерные

векторы, и ввиду предложений 4.1 и 4.4

$$r(x) = r(x_1 + ix_2) = r(x_1)r(ix_2),$$

$$e^{i\phi(x)} = g(x) = g(x_1 + ix_2) = g(x_1)g(ix_2).$$

Для отображений $x_1 \mapsto g(x_1)$ и $x_2 \mapsto g(ix_2)$ выполняются условия (16) и (17).
Получена

Теорема 5. *Общие решения $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (9) имеют вид*

$$h(x) = 0$$

и

$$h(x) = h(x_1 + ix_2) = \exp[f_1(x_1) + f_2(x_2) + i\phi_1(x_1) + i\phi_2(x_2)],$$

где f_1, f_2 — произвольные решения уравнения Коши (2.1), а ϕ_1, ϕ_2 — произвольные вещественнозначные решения уравнения (13). В частности, измеримые решения $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (9) имеют вид

$$h(x) = 0$$

и

$$h(x) = h(x_1 + ix_2) = \exp(\gamma x_1 + \delta x_2) = \exp(\alpha x + \beta \bar{x}),$$

где α, β (и γ, δ) — произвольные комплексные константы.

5.2. Эндоморфизмы полей вещественных и комплексных чисел

Результаты предыдущего параграфа без труда обобщаются «в духе Пексидера». Однако не следует думать, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ ведут себя одинаково по отношению к уравнениям Коши. Сопряжение $x \mapsto \bar{x}$ является нетривиальным (т.е. отличным от тождественного и нулевого) автоморфизмом поля комплексных чисел, тогда как в вещественном случае нет даже нетривиальных эндоморфизмов (Darboux, 1880).

Предложение 6. *Все эндоморфизмы поля $\mathbb{R}$ тривиальны.*

Доказательство. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является эндоморфизмом поля $\mathbb{R}$, если при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad (21)$$

$$f(xy) = f(x)f(y). \quad (22)$$

(Если $f(x) \neq 0$, то из (22) следует $f(1) = 1$ и $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.) Из (22) вытекает равенство $f(x^2) = f(x)^2$, поэтому $f(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Тогда, в силу следствия 2.5, существует такое $a \geq 0$, что $f(x) = ax$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Но ввиду (22) число a равно 1 или 0, что соответствует тривиальным эндоморфизмам. ■

Как следствие, автоморфизмы (биективные эндоморфизмы) поля $\mathbb{R}$ сводятся к тождественному.

Иначе обстоит дело в комплексном случае. Мы увидим, что там существуют весьма причудливые автоморфизмы. Чтобы получить эндоморфизм поля $\mathbb{C}$, нам потребуется построить множество, аналогичное базису Гамеля, но по отношению не только к сложению, но и к умножению. Для построения биекции этого недостаточно.

Докажем, что существует множество $T \subset \mathbb{C}$ со следующими свойствами.

А) Для любого натурального n любой многочлен от n переменных с рациональными коэффициентами, равный нулю для n различных элементов из T , равен нулю тождественно.

В) Все комплексные числа алгебраичны над подполем $R(T)$, которое порождено (в $\mathbb{C}$) множеством T (т.е. каждое комплексное число z является корнем ненулевого многочлена P с коэффициентами из $R(T)$).

С) В T найдутся хотя бы две различные точки x_1, x_2 , для которых $x_1 \neq \bar{x}_2$.

Вначале рассмотрим множества $S \subset \mathbb{C}$ со свойствами (А), (С) и следующим (см. с (В)):

Д) никакой элемент из S не алгебраичен над полем, порождённым в $\mathbb{C}$ остальными элементами из S .

Такие множества существуют: например, множество $S_0 = \{1, \pi i\}$ обладает свойствами (А), (С) и (Д). Упорядочим по включению семейство $\mathcal{S}$ всех множеств S с этими свойствами, содержащих S_0 . Согласно принципу максимальности Хаусдорфа в этом семействе существует максимальная цепь (по включению) $\mathcal{S}^1$. Её объединение T заведомо имеет свойства (С) и (Д). В формулировке свойства (А) фигурирует лишь конечное число элементов из T . Эти элементы принадлежат некоторому $S_1 \in \mathcal{S}_1$, и потому T обладает свойством (А). Покажем, что T обладает и свойством (В). В противном случае существует такое число $z_0 \in \mathbb{C}$, что $P(z_0) \neq 0$ для любого ненулевого многочлена P с коэффициентами из $R(T)$. Нетрудно видеть, что множество

$$S = T \cup \{z_0\}$$

имеет свойства (А), (С) и (Д). Но это противоречит максимальности цепи $\mathcal{S}^1$. Как следствие, T обладает свойством (В).

Пусть $f: T \rightarrow T$ — биекция, причём $f(x_1) = x_2$, где $x_1 \neq x_2$ и $x_1 \neq \bar{x}_2$ (используем свойство С). Если $z \in R(T)$, то существуют многочлены P и Q от нескольких переменных с рациональными коэффициентами, такие что

$$z = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{Q(z_1, \dots, z_n)}, \quad \text{где } z_1, \dots, z_n \text{ — различные элементы из } T. \quad (23)$$

Положим

$$g(z) = \frac{P(f(z_1), \dots, f(z_n))}{Q(f(z_1), \dots, f(z_n))}. \quad (24)$$

Ввиду свойства (А) отображение $g: R(T) \rightarrow R(T)$ корректно определено и, естественно, служит продолжением для f . При этом g является эндоморфизмом кольца $R(T)$, т.е. удовлетворяет условиям (21) и (22), как можно видеть из (23) и (24). В силу (24) и свойства (А) отображение g взаимно однозначно. Для любого $z' = P(z'_1, \dots, z'_n)/Q(z'_1, \dots, z'_n) \in R(T)$ положим

$$z = \frac{P(f^{-1}(z'_1), \dots, f^{-1}(z'_n))}{Q(f^{-1}(z'_1), \dots, f^{-1}(z'_n))}.$$

Тогда $g(z) = z'$. Таким образом, g сюръективно. В итоге мы показали, что g — автоморфизм поля $R(T)$.

Пусть $h: H \rightarrow I$ — изоморфизм между подполем $H \subset \mathbb{C}$, содержащим $R(T)$, и подполем $I \subset \mathbb{C}$, причём h — продолжение для g . Множество $\mathcal{H}$ всех таких продолжений упорядочено по включению. По принципу максимальности Хаусдорфа существует максимальная цепь $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$. Объединение подполей, на которых определены отобра-

жения из $\mathcal{H}'$, обозначим J ; объединив сами отображения, получаем изоморфизм j (продолжение отображения g) между J и некоторым подполем $J' \subset \mathbb{C}$.

Покажем, что $J = \mathbb{C}$. В противном случае существует $z_0 \in \mathbb{C} \setminus J$. Ввиду свойства (В) и включения $R(T) \subset J$ число z_0 алгебраично над J . Существует единственный неприводимый многочлен $P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$ с коэффициентами в J и старшим коэффициентом 1, для которого $P(z_0) = 0$. Возьмём такое число $z' \in \mathbb{C}$, что

$$0 = (z')^m + j(a_1)(z')^{m-1} + \dots + j(a_m).$$

Если $x = Q(z_0) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z_0^k$ ($\alpha_k \in J$), то положим

$$h(x) = \sum_{k=0}^n j(\alpha_k)(z')^k.$$

Если Q_1 и Q_2 — многочлены над J , причём $Q_1(z_0) = Q_2(z_0)$, то разность $Q_1 - Q_2$ кратна P (поскольку P неприводим). Как следствие, отображение h корректно определено. При этом h — гомоморфизм поля J'' , натянутого на J и z_0 . Он продолжает j и является изоморфизмом между J'' и некоторым подполем в $\mathbb{C}$, что противоречит максимальности j . Тем самым доказано, что $J = \mathbb{C}$.

Корни любого многочлена с коэффициентами из J' принадлежат J' , поскольку это поле изоморфно $J = \mathbb{C}$, а $\mathbb{C}$ обладает таким свойством (основная теорема алгебры). Но J' содержит $g(R(T)) = R(T)$, и ввиду свойства (В) справедливо равенство $J' = \mathbb{C}$. Иными словами, j является автоморфизмом поля $\mathbb{C}$.

Этот автоморфизм не совпадает с тождественным, поскольку $j(x_1) = g(x_1) = f(x_1) = x_2$, и не является сопряжением, так как $x_2 \neq \bar{x}_1$. С учётом предложения 2 он нигде не является непрерывным¹⁾. Доказана

Теорема 7. *Существует всюду разрывный автоморфизм поля $\mathbb{C}$.* ■

Этот факт был сформулирован как предположение в статьях С. Segre (1889a,b), почти полностью доказан в заметке Lebesgue (1907a) и окончательно — в работах В. Segre (1947) и Kestelman (1951).

5.3. Группы Бора

Общие решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (8) играют существенную роль в гармоническом анализе. Здесь мы встретимся с понятием группы Бора. В этом параграфе используются элементы гармонического анализа.

Ненулевой *тригонометрический многочлен* — это комплекснозначная функция вещественного переменного, заданная формулой

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \exp(i\lambda_j x), \quad (25)$$

где n — натуральное число, $c_1, \dots, c_n$ — ненулевые комплексные числа, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — попарно различные вещественные числа.

¹⁾ Действительно, иначе автоморфизм имел бы вид $j(x) = ax + b\bar{x}$; полагая в равенстве $j(xy) = j(x)j(y)$ сначала $x = y = 1$, затем $x = y = i$, получаем $(a+b)^2 = a+b = (a-b)^2$, откуда либо $a = 1, b = 0$, либо $a = 0, b = 1$.

Отметим, что представление вида (25) однозначно. Будем использовать удобное классическое обозначение равномерной нормы:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

По этой норме тригонометрические многочлены ограничены, поскольку, ввиду (25),

$$\|f\|_{\infty} \leq \sum_{j=1}^n |c_j|.$$

Пусть $\mathcal{P}$ — (бесконечномерное) комплексное линейное пространство всех тригонометрических многочленов (с добавлением нулевого). Очевидно, что оно является алгеброй, поскольку произведение тригонометрических многочленов — также тригонометрический многочлен. Чтобы лучше понять строение этой алгебры, полезно, как это нередко делается в функциональном анализе, рассмотреть множество $\mathcal{B}$ всех функционалов $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ со следующими свойствами:

- a) $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g)$,
- b) $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$,
- c) $\phi(1) = 1$ (функция 1 тождественно равна 1),
- d) $|\phi(f)| \leq \|f\|_{\infty}$

для всех $f, g \in \mathcal{P}$ и для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (см., например: Rudin, 1973, р. 268–275 и 1987, р. 364–365). Множество $\mathcal{B}$ — *спектр* пространства $\mathcal{P}$ — непусто и даже содержит экземпляр множества $\mathbb{R}$. Действительно, возьмём произвольное вещественное x и определим функционал $\hat{x}$ по формуле

$$\hat{x}(f) = f(x).$$

Ясно, что $\hat{x} \in \mathcal{B}$, и если $x_1 \neq x_2$, то $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$.

Однако $\mathcal{B}$ содержит и другие элементы. Мы увидим это, описав $\mathcal{B}$ в целом. Введём следующие обозначения. Пусть e_{λ} ($\lambda \in \mathbb{R}$) — комплексная экспонента:

$$e_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x}.$$

Рассмотрим действие элемента $\phi \in \mathcal{B}$ на все e_{λ} , где λ пробегает $\mathbb{R}$. Определим отображение $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, положив

$$\Phi(\lambda) = \phi(e_{\lambda}).$$

Поскольку $e_{\lambda}e_{\mu} = e_{\lambda+\mu}$, то в силу (b)

$$\Phi(\lambda + \mu) = \Phi(\lambda)\Phi(\mu) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}), \quad (26)$$

что совпадает с (8).

Условие (d) даёт границу для Φ :

$$|\Phi(\lambda)| \leq 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

и ввиду (c) имеем $\Phi(0) = 1$. Можно уточнить полученную оценку, положив в (26) $\mu = -\lambda$. Тогда $\Phi(\lambda)\Phi(-\lambda) = \Phi(0)$, и для всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\Phi(\lambda)| = 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (27)$$

(Легко доказать также, что $\Phi(-\lambda) = \overline{\Phi(\lambda)}$ и $\phi(\bar{f}) = \overline{\phi(f)}$.)

Обратно, пусть $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям (26) и (27). Исходя из Φ построим ϕ . С учётом формулы (25) определим функционал $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, положив

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi(\lambda_j) \quad \text{для } f = \sum_{j=1}^n c_j e_{\lambda_j}$$

и $\phi(0) = 0$. Тем самым корректно определён линейный функционал на пространстве $\mathcal{P}$. Докажем его мультипликативность, сначала для произвольных e_μ и e_λ . Из (26) имеем

$$\phi(e_\mu e_\lambda) = \phi(e_{\mu+\lambda}) = \Phi(\mu + \lambda) = \Phi(\mu)\Phi(\lambda) = \phi(e_\mu)\phi(e_\lambda).$$

Ввиду линейности функционала ϕ на $\mathcal{P}$ получаем для всех $f \in \mathcal{P}$ и всех e_λ :

$$\phi(fe_\lambda) = \phi(f)\phi(e_\lambda).$$

Снова используя линейность, получаем для всех $f, g \in \mathcal{P}$:

$$\phi(fg) = \phi(f)\phi(g).$$

Ясно также, что $\phi(1) = 1$. Таким образом, для ϕ доказаны свойства (а), (b) и (с). Осталось установить (d). Воспользуемся следующим фактом из теории чисел.

Теорема 8. Пусть n — натуральное число, $z_1, \dots, z_n$ — комплексные числа абсолютной величины 1, а $\mu_1, \dots, \mu_n$ — попарно различные вещественные числа. Пусть также для любых целых $d_1, \dots, d_n$ из условия

$$\sum_{j=1}^n d_j \mu_j = 0$$

следует

$$\prod_{j=1}^n z_j^{d_j} = 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественное число x , такое что

$$|e_{\mu_j}(x) - z_j| \leq \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. Положим $f(t) = 1 + \sum_{i=1}^n \bar{z}_i e_{\mu_i}(t)$, и пусть p — натуральное число. Тогда можно записать

$$f(t)^p = \sum_{l=1}^N c_l e_{\lambda_l}(t),$$

где все λ_l различны. Коэффициенты c_l определяются с помощью несложной оценки предела интегрального среднего:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^p e_{\lambda}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \neq \lambda_l \quad (l = 1, \dots, N), \\ c_l & \text{при } \lambda = \lambda_l \text{ для некоторого } l = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Нам нужна хорошая оценка сверху для f . Очевидно, что

$$|f(x)| \leq n+1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Значит, если для какого-то неотрицательного α (возможно, лишь для $\alpha = 0$)

$$|f(x)| \leq (n+1)e^{-\alpha},$$

то

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^p e_{\lambda}(x) dx \right| \leq (n+1)^p e^{-p\alpha}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$|c_l| \leq (n+1)^p e^{-p\alpha} \quad (l = 1, \dots, N).$$

Как мы знаем,

$$(1 + x_1 + \dots + x_n)^p = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

где k_i — неотрицательные целые числа и $a_{k_1, \dots, k_n} > 0$. В частности, подставив $x_1 = \dots = x_n = 1$, имеем

$$\sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1, \dots, k_n} = (n+1)^p.$$

Справедливо следующее равенство:

$$f(t)^p = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1, \dots, k_n} e_k(t) \overline{\prod_{j=1}^n z_j^{k_j}},$$

где

$$k = \sum_{j=1}^n k_j \mu_j.$$

Если $\sum_{j=1}^n k_j \mu_j = \sum_{j=1}^n k'_j \mu_j$, то из предположений теоремы 8 следует, что

$$\overline{\prod_{j=1}^n z_j^{k_j}} = \overline{\prod_{j=1}^n z_j^{k'_j}}.$$

В этом случае коэффициенты c_l следующим образом связаны с величинами $a_{k_1, \dots, k_n}$:

$$|c_l| = \sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1, \dots, k_n} \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^n k_j \mu_j = \lambda_l.$$

Из предыдущих соотношений следует, что

$$\sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1, \dots, k_n} \leq (n+1)^p e^{-p\alpha}$$

и

$$(n+1)^p = \sum_{l=1}^N \left(\sum_{0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p} a_{k_1, \dots, k_n} \right),$$

откуда

$$e^{p\alpha} \leq N.$$

Число N измеряет количество различных значений величины $\sum_{j=1}^n k_j \mu_j$ для неотрицательных целых k_j при условии $0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq p$. Максимум достигается, если μ_j линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поскольку каждое k_j имеет $p+1$ возможных значений, то в этом случае

$$N = (p+1)^n.$$

В общем случае

$$e^{p\alpha} \leq (p+1)^n.$$

Поскольку p произвольно, то, сравнив экспоненту и степень, мы видим, что $\alpha = 0$. Как следствие,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| 1 + \sum_{j=1}^n \bar{z}_j e_{\mu_j}(t) \right| = n+1.$$

Однако $|\bar{z}_j e_{\mu_j}(t)| = 1$, и

$$|f(t)| = \left| 1 + \sum_{j=1}^n \bar{z}_j e_{\mu_j}(t) \right| \leq 1 + \sum_{j=1}^n |\bar{z}_j| |e_{\mu_j}(t)| = n+1,$$

причём равенство означает, что все слагаемые равны 1. Поэтому $|f(t)|$ приближается к супремуму лишь тогда, когда все слагаемые в сумме $1 + \sum_{j=1}^n \bar{z}_j e_{\mu_j}(t)$ близки к 1 и, как следствие, $f(t)$ приближается к $n+1$. Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in \mathbb{R}$, при котором

$$|f(x) - (n+1)| \leq \varepsilon,$$

т. е.

$$\left| \sum_{j=1}^n (\bar{z}_j e_{\mu_j}(x) - 1) \right| \leq \varepsilon.$$

Так как $|\bar{z}_j e_{\mu_j}(x)| = 1$, то все величины $\bar{z}_j e_{\mu_j}(x) - 1$ имеют неположительную вещественную часть, которая должна быть близка к нулю (поскольку сумма близка к нулю). Но это означает, что $\bar{z}_j e_{\mu_j}(x)$ близко к единице, т. е. $\bar{z}_j e_{\mu_j}(x) - 1$ близко к нулю. Поскольку $|z_j| = 1$, то отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |e_{\mu_j}(x) - z_j| = 0,$$

и теорема 8 доказана. ■

Замечание. Приведённое доказательство следует идее Х. Бора (Bohr, 1934). Для случая линейной независимости μ_j над $\mathbb{Z}$ теорема 8 впервые доказана в работе:

Kronecker, 1884. Существуют и другие доказательства геометрического и арифметического характера. Два доказательства и дальнейшие ссылки см. в книге Hardy and Wright (1979, р. 375–393). См. также: Б.А. Венков (1970, С. 34–36) и Favard (1933, Р. 18–21).

Применим теорему 8 при $z_j = \Phi(\lambda_j)$ и попарно различных $\mu_j = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, n$). Из уравнения

$$\sum_{j=1}^n d_j \lambda_j = 0 \quad \text{с целыми } d_1, d_2, \dots, d_n$$

непосредственно получаем

$$1 = \Phi(0) = \prod_{j=1}^n \Phi(\lambda_j)^{d_j} = \prod_{j=1}^n z_j^{d_j},$$

т. е. условия теоремы 8 выполнены. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x \in \mathbb{R}$, такое что

$$|e_{\lambda_j}(x) - \Phi(\lambda_j)| \leq \varepsilon \quad (j = 1, \dots, n).$$

Отсюда

$$|\phi(f)| \leq \sum_{j=1}^n |c_j| \varepsilon + \left| \sum_{j=1}^n c_j e_{\lambda_j}(x) \right|,$$

или

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_{\infty} + \varepsilon \sum_{j=1}^n |c_j|.$$

Ввиду произвольности ε это неравенство влечёт свойство (d). Доказано

Предложение 9. *Комплекснозначный линейный функционал ϕ на пространстве $\mathcal{P}$ принадлежит $\mathcal{B}$ (т. е. удовлетворяет условиям (a)–(d)), если и только если функция $\Phi(\lambda) = \phi(e_{\lambda})$ удовлетворяет условиям (26) и (27). ■*

Если $\hat{x} \in \mathcal{B}$ получается из $x \in \mathbb{R}$ по формуле $\hat{x}(f) = f(x)$, то соответствующее отображение Φ определяется равенством

$$\Phi(\lambda) = e^{i\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

и непрерывно на $\mathbb{R}$. Но у (26)–(27) существуют и разрывные решения: возьмём $\Phi(\lambda) = e^{ih\lambda}$, где $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — разрывное решение функционального уравнения Коши на $\mathbb{R}$ (см. теорему 3). Эти разрывные решения, согласно предложению 9, также соответствуют элементам из $\mathcal{B}$. Таким образом, экземпляр множества $\mathbb{R}$, упомянутый выше, не исчерпывает $\mathcal{B}$.

Докажем теперь, что $\mathcal{B}$ можно превратить в абелеву группу с помощью некоторой операции $*$, которая на $\mathbb{R} \subset \mathcal{B}$ совпадает с обычным сложением. Пусть $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$. Сначала определим действие функционала $\phi_1 * \phi_2$ на e_{λ} для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$, положив

$$\phi_1 * \phi_2(e_{\lambda}) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda), \quad (28)$$

где $\Phi_1(\lambda) = \phi_1(e_{\lambda})$, $\Phi_2(\lambda) = \phi_2(e_{\lambda})$. Отображение $\lambda \mapsto \phi_1 * \phi_2(e_{\lambda})$ удовлетворяет условиям (26)–(27) и, согласно предложению 9, определяет элемент из $\mathcal{B}$, который мы обозначим $\phi_1 * \phi_2$.

Из уравнения (28) легко получить, что бинарная операция $*$ на $\mathcal{B}$ ассоциативна и коммутативна. Если $\phi \in \mathcal{B}$, а элемент $\widehat{0} \in \mathcal{B}$ соответствует $x = 0 \in \mathbb{R}$, то

$$\phi * \widehat{0} = \widehat{0} * \phi = \phi,$$

поскольку $\widehat{0}(e_\lambda) = 1$ при всех λ . Аналогично, для произвольного $\phi \in \mathcal{B}$ рассмотрим отображение $\lambda \mapsto \widehat{\phi}(e_\lambda)$. В силу предложения 9 оно порождает некоторый элемент $\phi_1 \in \mathcal{B}$. При этом выполнена формула

$$\phi_1 * \phi = \phi * \phi_1 = \widehat{0}.$$

Таким образом, $(\mathcal{B}, *)$ — абелева группа.

Пусть теперь $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\widehat{x} * \widehat{y}(e_\lambda) = e_\lambda(x)e_\lambda(y) = e_\lambda(x+y) = \widehat{x+y}(e_\lambda).$$

Другими словами, $\widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{x+y}$, т. е. операция $*$ служит продолжением сложения на $\mathcal{B}$; группа $(\mathcal{B}, *)$ называется *группой Бора* для $\mathbb{R}$. Функции $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющие условиям (26) и (27), называются *характерами* группы $\mathbb{R}$ и соответствуют элементам её группы Бора.

Здесь нужно обратиться к топологии. Можно показать, что $(\mathcal{B}, *)$ в некоторой топологии становится *компактной топологической абелевой группой*. В § 10.5 мы увидим, что существует непрерывный изоморфизм между $\mathbb{R}$ и плотным подмножеством в $(\mathcal{B}, *)$.

Следует отметить, что множество $\mathcal{P}$ не замкнуто относительно равномерной нормы. Его замыканием служит алгебра $\mathcal{A}$ непрерывных комплекснозначных функций, которые называются *почти периодическими функциями Бора*. (Множество $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ имеет те же свойства (a)–(d), что и на $\mathcal{P}$.) См. Weil, 1940, р. 130–135; Rudin, 1962, р. 30–32; Hewitt–Ross 1963, р. 245–261; дальнейшие сведения приведены в § 10.5.

Процедура построения компактной группы (группы Бора) с помощью характеров группы $\mathbb{R}$ (функций с условиями (26) и (27)) обобщается на любую локально компактную абелеву группу. Такая техника типична для абстрактного гармонического анализа.

5.4. Рекурсивные энтропии

Теперь вернёмся к методу, применённому в доказательстве теоремы 4. Из предположения об интегрируемости решения функционального уравнения мы вывели его дифференцируемость, и это облегчило нахождение общего (интегрируемого) решения. Данный метод имеет широкие применения (см., например: Кас, 1937; Aczél, 1960b); мы увидим это и в гл. 14. В качестве очередного примера найдём интегрируемые решения функционального уравнения, которое возникает в аксиоматической теории измерения информации.

Рассмотрим количество информации, заключённое в полной системе событий (скажем, всех возможных исходов эксперимента), имеющих вероятности $p_1, \dots, p_n$, которые предполагаются положительными и удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad (n \geq 2).$$

Традиционно принимаются по крайней мере следующие допущения.

Количество информации зависит только от вероятностей (об этом уже шла речь после предложения 3.4). Обозначим это количество $H_n(p_1, \dots, p_n)$ и будем предполагать, что функция H_n симметрична (количество информации не зависит от нумерации возможных исходов эксперимента). Кроме того, будем предполагать следующее.

Если какое-то событие (исход эксперимента) можно разделить на два, то количества информации для нового и прежнего экспериментов связаны следующим образом:

$$H_n(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = H_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) + (p_1 + p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) \\ \left(p_k > 0, \sum_{k=1}^n p_k = 1; n = 3, 4, \dots\right). \quad (29)$$

Последнее условие называется *рекурсивностью* по очевидной причине (можно найти H_n для всех $n \geq 2$, если известно H_2). Докажем следующий факт (более сильные теоремы см. в работах: Tverberg, 1958 и Aczél–Daróczy 1975, p. 84–93):

Теорема 10. Пусть функция H_3 симметрична, а отображение $x \mapsto H_2(1 - x, x)$ интегрируемо на каждом отрезке из интервала $]0, 1[$. Тогда общее решение уравнения (29) имеет вид

$$H_n(p_1, \dots, p_n) = c \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k \\ \left(\sum_{k=1}^n p_k = 1; p_k > 0; k = 1, 2, \dots, n; n = 2, 3, \dots\right). \quad (30)$$

Здесь c — произвольная константа. При традиционном выборе единицы измерения (обычно называемой «бит»)

$$H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1,$$

получаем, что $c = -1/\ln 2$ и

$$H_n(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k \quad (31)$$

(энтропия Шеннона).

Мы считали, что $p_k > 0$, чтобы были определены $\ln p_k$ и последнее слагаемое в (29). Однако теорема остаётся верной, если допустить $p_k = 0$ и положить $0 \ln 0 = 0$, $0 \cdot H_2\left(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}\right) = 0$.

Доказательство. Пусть функция $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$f(x) = H_2(1 - x, x) \quad (32)$$

и, как требуется в условии теоремы, интегрируема на каждом отрезке из интервала $]0, 1[$ (локально интегрируема на $]0, 1[$). Ввиду симметричности функции H_3 и условия (29) для $n = 3$ функция H_2 также симметрична, и в силу (32)

$$f(x) = f(1 - x). \quad (33)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) &= H_2(1-x, x) + (1-x)H_2\left(\frac{1-x-y}{1-x}, \frac{y}{1-x}\right) = \\ &= H_3(1-x-y, y, x) = H_3(1-x-y, x, y) = \\ &= H_2(1-y, y) + (1-y)H_2\left(\frac{1-x-y}{1-x}, \frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right), \end{aligned}$$

т. е.

$$f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right) \quad \text{при } x, y, x+y \in]0,1[\quad (34)$$

(основное уравнение теории информации).

Возьмём произвольное $x \in]0,1[$, и пусть

$$0 < \alpha < \beta < 1-x (< 1). \quad (35)$$

Тогда при любом $y \in [\alpha, \beta] \subset]0,1[$ имеем

$$0 < \frac{x}{1-\alpha} \leq \frac{x}{1-y} \leq \frac{x}{1-\beta} < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{\alpha}{1-x} \leq \frac{y}{1-x} \leq \frac{\beta}{1-x} < 1. \quad (36)$$

По предположению, функция f интегрируема между пределами, фигурирующими в формулах (35) и (36). Проинтегрировав (34) по y от α до β , получаем

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)f(x) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy + \int_{\alpha}^{\beta} (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right) dy - (1-x) \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\frac{y}{1-x}\right) dy = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy + x^2 \int_{x/(1-\alpha)}^{x/(1-\beta)} \frac{1}{s^3} f(s) ds - (1-x)^2 \int_{\alpha/(1-x)}^{\beta/(1-x)} f(t) dt. \quad (37) \end{aligned}$$

Мы сделали здесь подстановку

$$s = \frac{x}{1-y}, \quad t = \frac{y}{1-x}. \quad (38)$$

Поскольку функция f предполагалась интегрируемой, то правая часть (37), а значит и левая, непрерывно зависит от x , т. е. f непрерывна на $]0,1[$. Но тогда правая часть — а с ней и f в левой части — дифференцируема на $]0,1[$. Аналогично получаем, что она дважды дифференцируема.

Продифференцируем (34) сначала по x :

$$f'(x) - f\left(\frac{y}{1-x}\right) + \frac{y}{1-x} f'\left(\frac{y}{1-x}\right) = f'\left(\frac{x}{1-y}\right),$$

а затем по y :

$$\frac{y}{(1-x)^2} f''\left(\frac{y}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-y)^2} f''\left(\frac{x}{1-y}\right) \quad (39)$$

при

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad x + y < 1. \quad (40)$$

Снова сделаем подстановку (38). В силу (36) имеем: $s, t \in]0, 1[$. Обратно, если $s, t \in]0, 1[$, то найдутся x и y , удовлетворяющие условиям (38) и (40). Разумеется, это

$$x = \frac{s - st}{1 - st}, \quad y = \frac{t - st}{1 - st}.$$

В результате (39) приводится к виду

$$t(1 - t)f''(t) = s(1 - s)f''(s) = c (= \text{const})^1 \quad \text{для всех } s, t \in]0, 1[. \quad (41)$$

Дважды проинтегрируем уравнение $t(1 - t)f''(t) = c$:

$$f(t) = c[t \ln t + (1 - t) \ln(1 - t)] + at + b.$$

Подставляя в (33) и (34), получаем соответственно $a = 0$ и $b = 0$. Мы видим, что *общее интегрируемое решение уравнений (33) и (34) имеет вид*

$$f(t) = c[t \ln t + (1 - t) \ln(1 - t)] \quad \text{при всех } t \in]0, 1[. \quad (42)$$

С учётом (29) и (32) получаем по индукции уравнение (30) для всех $n \geq 2$. Обратное утверждение теоремы 10 очевидно. ■

Во многих (хотя и не во всех) отношениях основное уравнение теории информации (34) ведёт себя подобно уравнению Коши (2.2) (см.: Aczél–Daróczy 1975, p. 79–102; Diderrich, 1975, 1978, 1986; Daróczy–Maksa, 1977; Maksa, 1980).

Последующие результаты и упражнения

1. (Robinson, 1957.) Покажите, что целая (всюду аналитическая) функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению

$$|f(z)| = |f(x) + f(iy)| \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}),$$

если и только если она имеет вид

$$f(z) = az, \quad f(z) = a \sin(bz) \quad \text{или} \quad f(z) = a \sinh(bz),$$

где a — комплексная константа, b — вещественная.

2. (Hille, 1923.) Покажите, что целая функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению

$$|f(z)|^2 = |f(x)|^2 + |f(iy)|^2 \quad (z = x + iy \in \mathbb{C}),$$

если и только если она имеет вид

$$f(z) = az, \quad f(z) = a \sin(bz) \quad \text{или} \quad f(z) = a \sinh(bz),$$

где a — комплексная константа, b — вещественная.

(В связи с упр. 3 и 4 см.: Naguki, 1968b.)

3*. Покажите, что целая функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет уравнению

$$|f(z_1 + z_2) + f(z_1 - z_2)| = |f(z_1 + \bar{z}_2) + f(z_1 - \bar{z}_2)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

¹⁾ Поскольку части этого равенства зависят от разных переменных.

если и только если она имеет вид

$$f(z) = az + b, \quad f(z) = a \sin(cz) + b \cos(cz) \quad \text{или} \quad f(z) = a \sinh(cz) + b \cosh(cz),$$

где a, b — комплексные константы, а c — вещественная.

4*. Покажите, что целая функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z_1 + z_2)|^2 + |f(z_1 - z_2)|^2 \leq |f(z_1 + \bar{z}_2)|^2 + |f(z_1 - \bar{z}_2)|^2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

если и только если она имеет вид

$$f(z) = a \sinh(cz) + b \cosh(cz) \quad \text{или} \quad f(z) = az + b,$$

где a, b, c — произвольные комплексные константы, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Re} c \geq 0, \operatorname{Im} c \geq 0$.

5. Покажите, что если автоморфизм поля $\mathbb{C}$ всюду разрывен, то образ поля $\mathbb{R}$ всюду плотен в $\mathbb{C}$.

6. В теореме 7 доказано существование нетривиального автоморфизма поля $\mathbb{C}$. Найдите более простое доказательство существования его нетривиального эндоморфизма (т. е. без доказательства сюръективности).

7. Существует ли нетривиальный эндоморфизм поля $\mathbb{C}$, непрерывный в точке P вдоль некоторой прямой, проходящей через P ?

8. (См., например: Aczél-Daróczy, 1975, р. 179–182.) Не налагая каких-либо условий регулярности, найдите все решения $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right),$$

где $\alpha \neq 1$.

(В связи с упр. 9–11 см.: Maksa, 1981с.)

9*. Найдите все непрерывные функции $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$f(1-x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(1 - \frac{x}{1-y}\right)$$

при всех $x, y, x+y \in]0, 1[$.

10. Докажите, что если функция $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(1-x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(1 - \frac{x}{1-y}\right)$$

при всех $x, y, x+y \in]0, 1[$ (где $\alpha \neq 0, 1, 2$), то f имеет вид

$$f(x) = b(x^\alpha + (1-x)^\alpha - 1),$$

где b — произвольная вещественная константа.

11*. Найдите все функции $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, такие что

$$f(1-x) + (1-x)^2 f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^2 f\left(1 - \frac{x}{1-y}\right)$$

при всех $x, y, x+y \in]0, 1[$.

12*. (Laczkovich, 1981, 1984a.) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$2f(x) \leq f(x+h) + f(x+2h) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}_+.$$

Докажите, что f не убывает.

13. (Dhombres, 1979, p. 1.18–1.2.) Докажите или опровергните следующее. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ супераддитивна, т. е. $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. Предположим, что в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено условие $f \geq g$, где $g(x_0) = -f(-x_0)$ и g дифференцируема в точке x_0 . Тогда существует константа $a \in \mathbb{R}$, для которой $f(x) = ax$.

14. (Rădulescu, 1980; Dhombres, 1983.) Используя предложение 6, покажите, что для $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ одновременно выполняются неравенства

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad f(xy) \geq f(x)f(y)$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}$, если и только если $f(x) \equiv 0$ или $f(x) \equiv x$. Сравните результат с результатом упр. 2.9.

15. Покажите на контрпримерах, что результат упр. 14 не сохраняется, если изменить знак одного или обоих неравенств.

16*. (Volkman, 1982; Dhombres, 1983.) Пусть A — кольцо, R — упорядоченное кольцо (предполагается, что для всех $z \in R$ выполнено условие $z^2 \geq 0$), а отображение $f : A \rightarrow R$ таково, что всегда

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad f(xy) \geq f(x)f(y).$$

Докажите, что f — эндоморфизм колец.

17. (Dhombres, 1971b.) Вытекает ли условие (d) в начале § 3 из (a), (b) и (c)? То же для $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, где $\mathcal{A}$ — алгебра почти периодических функций Бора.

18. Пусть $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — разрывный характер аддитивной группы $\mathbb{R}$, т. е. разрывное решение системы

$$\Phi(x+y) = \Phi(x)\Phi(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

$$|\Phi(x)| = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Опровергните или докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ существует непрерывный характер χ , такой что

$$|\chi(x_j) - \Phi(x_j)| < \varepsilon \quad (j = 1, \dots, n).$$

19. Докажите следующую теорему Кронекера: для любых вещественных $\mu_1, \dots, \mu_n, \Theta_1, \dots, \Theta_n$ равенство

$$\sum_{k=1}^n d_k \Theta_k = 0 \pmod{2\pi}$$

($d_1, \dots, d_n$ целые) является следствием равенства

$$\sum_{k=1}^n d_k \mu_k = 0,$$

если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое вещественное y , что при $k = 1, 2, \dots, n$ выполнены неравенства-сравнения

$$|\mu_k y - \Theta_k| \leq \varepsilon \pmod{2\pi}.$$

20. (Б.А. Венков, 1970, с. 34–35; Hardy–Wright, 1979, р. 377–378.) Докажите следующий результат, также принадлежащий Кронекеру. Для любых вещественных $\mu_1, \dots, \mu_n$ и любого натурального N существуют натуральное $q \leq N^n$ и целые $p_1, \dots, p_n$, такие что

$$|q\mu_k - p_k| \leq \frac{1}{N} \quad \text{для } k = 1, \dots, n.$$

Сравните с результатом упр. 19 при

$$\Theta_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

21. (Favard, 1933, р. 21–22.) Пусть вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \exp(i\lambda_j x).$$

Опровергните или докажите, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sum_{j=1}^n |c_j|.$$

22. Сохраним обозначения из упр. 21, но теперь пусть вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и π линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Опровергните или докажите, что

$$\sup_{u \in \mathbb{Z}} |f(u)| = \sum_{j=1}^n |c_j|.$$

23. Пусть $1, \mu_1, \dots, \mu_k$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Положим

$$P_n = (n\mu_1, \dots, n\mu_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Опровергните или докажите, что последовательность P_n плотна в $\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$.

24. (Hardy–Wright, 1979, р. 378–382.) Вдоль четырёх сторон квадрата в $\mathbb{R}^2$ стоят зеркала. Точечный источник внутри квадрата испускает в определённом направлении луч света, который отражается от зеркал. Для определённости будем считать, что вершины отражают луч в обратном направлении. Существует ли положение источника и направление излучения, при котором траектория луча всюду плотна в квадрате?

25. Пусть Δ^+ — пространство распределений вероятностей, исчезающих в нуле, т. е.

$$\Delta^+ = \{F \mid F: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow [0, 1], \text{ функция } F \text{ непрерывна слева}$$

$$\text{и не убывает, } F(0) = 0, F(\infty) = 1\}.$$

Бинарная операция τ на Δ^+ порождается операцией над случайными величинами, если выполнено следующее условие. Существует измеримая по Борелю функция $L: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая что для любых $F, G \in \Delta^+$ найдутся случайные величины X, Y , определённые в общем вероятностном пространстве, для которых $\tau(F_X, F_Y) = F_{L(X, Y)}$. Здесь F_Z — распределение вероятностей, отвечающее случайной величине Z , т. е. $F_Z(u) = P(\{w | Z(w) < u\})$. Покажите, что ни арифметическое среднее $(F + G)/2$, ни геометрическое среднее $(FG)^{1/2}$ не порождены операциями над случайными величинами. Покажите, что это верно и для любого взвешенного квазилинейного среднего $f^{-1}((1 - \alpha)f(F) + \alpha f(G))$.

Глава 6

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОШИ. ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ И ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ ХЕВИСАЙДА

В предыдущих главах мы уже рассматривали области, на которых заданы функциональные уравнения. Цель настоящей главы — обосновать изучение функциональных уравнений на ограниченных областях, т. е. когда справедливость уравнения предполагается не для всех возможных значений переменных (условные уравнения). Для этого мы рассмотрим два весьма различных примера. Первый из них — фундаментальный результат проективной геометрии: биекции вещественной плоскости, переводящие прямые в прямые (коллинеации), являются (без каких-либо предположений о регулярности) аффинными преобразованиями. Во втором примере условные уравнения применяются для характеристики функции Хевисайда.

При рассмотрении векторного сложения и измерения информации нам встретилось уравнение Коши, подчинённое условию неотрицательности переменных x и y :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{при всех неотрицательных } x, y$$

(см. (1.2) и (3.12)). Естественная область определения переменных x и y — аддитивная группа $\mathbb{R}$, а область определения нашего уравнения — только $\mathbb{R}_+$ (точнее, $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Часто приходится иметь дело с функциональными уравнениями, область определения которых ограничена по сравнению с той областью, какую можно считать естественной. Для обозначения этого явления введено два термина: «функциональные уравнения на ограниченных областях» (Kuczma, 1978b) и «условные функциональные уравнения» (Dhombres–Ger, 1978). Мы будем использовать второй.

Пусть Z — непустое подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет *условному уравнению Коши относительно Z* , если из $(x, y) \in Z$ следует $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Для краткости иногда будем говорить, что f является *Z -аддитивной функцией* (см. § 7.1).

В упомянутом примере $Z = \overline{\mathbb{R}}_+$, т. е. Z не зависит от неизвестной функции. Приведём теперь пример, когда Z зависит от самой функции f . Мы рассмотрим задачу, которая возникает в геометрической оптике и важна также в аффинной геометрии. Будем решать её в терминах функциональных уравнений, поскольку это позволит продемонстрировать типичный способ появления условного функционального уравнения.

Мы хотим найти всевозможные биекции $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которые переводят прямые линии в прямые. Тот же классический вопрос может быть рассмотрен для n -мерного аффинного пространства над произвольным полем, но ради простоты обозначений мы ограничимся двумерным случаем. Очевидно, любое линейное биективное отображение переводит прямые в прямые. Пусть теперь

$$M_1 = (0,0), \quad M_2 = (1,0), \quad M_3 = (0,1), \quad M_4 = (1,1).$$

Поскольку M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой, то этим свойством обладают и $T(M_1), T(M_2), T(M_3)$. Значит, существует линейная биекция A , такая что $A(T(M_1)) = M_1, A(T(M_2)) = M_2, A(T(M_3)) = M_4$. При этом композиция отобра-

ражений A и T биективна и отображает прямые в прямые. Поскольку мы хотим доказать, что само отображение T линейно, то без потери общности можно считать, что $T(M_1) = M_1$, $T(M_2) = M_2$, $T(M_3) = M_4$. Положим $M = (x, y)$, $T(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$.

Вспомним, что коллинеарность точек евклидовой плоскости (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) выражается условием

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку точки $(0,0)$, $(1,0)$ и $(x,0)$ при всех x коллинеарны и мы положили $G(0,0) = F(0,0) = 0$, $F(1,0) = 1$, $G(1,0) = 0$, то

$$0 = \begin{vmatrix} F(0,0) & F(1,0) & F(x,0) \\ G(0,0) & G(1,0) & G(x,0) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F(1,0) & F(x,0) \\ G(1,0) & G(x,0) \end{vmatrix} = -G(x,0),$$

т. е.

$$G(x,0) = 0 \quad \text{и} \quad F(0,1) = G(0,1) = 1. \quad (1)$$

Аналогично, поскольку $(0,0)$, $(0,1)$ и $(0,y)$ при всех y коллинеарны, то

$$F(0,y) = G(0,y). \quad (2)$$

Так как отображение T взаимно однозначно, то оно отображает параллельные прямые в параллельные и потому переводит параллелограммы в параллелограммы. Поскольку четыре точки $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$ и (x,y) определяют параллелограмм, то мы получаем систему двух функциональных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x,y) &= F(x,0) + F(0,y) \\ G(x,y) &= G(x,0) + G(0,y) \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Из (1)–(3) следует, что

$$G(x,y) = F(0,y). \quad (4)$$

Чтобы найти функции F и G , потребуется ещё одно уравнение. Когда x пробегает $\mathbb{R}$, точки (x,x) заполняют прямую, проходящую через $(0,0)$, и то же самое верно для $(F(x,x), G(x,x))$. Поэтому существуют вещественные константы α, β , такие что $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ и

$$\alpha F(x,x) + \beta G(x,x) = 0.$$

В силу (3) и (4) это означает, что

$$\alpha F(x,0) + (\alpha + \beta) F(0,x) = 0.$$

В случае $\alpha = 0$ было бы $|\beta| = |\alpha| + |\beta| \neq 0$ и $F(0,x) = 0$. Но тогда из (4) получаем $G(x,y) \equiv 0$, что противоречит биективности отображения T . В случае $\alpha + \beta = 0$ было бы $\alpha \neq 0$ и $F(x,0) = 0$. С учётом (1) это опять противоречит биективности отображения T . Как следствие, мы можем записать

$$F(0,x) = \gamma F(x,0) \quad (\gamma \neq 0). \quad (5)$$

Определим новую функцию f , положив $f(x) = F(x,0)$ (при этом $f(1) = 1$, поскольку $T(M_2) = M_2$), и попытаемся задать f одним функциональным уравнением.

Так как точки $(x + y, 0)$, (x, y) и $(0, x + y)$ коллинеарны, то

$$0 = \begin{vmatrix} F(x + y, 0) & F(x, y) & F(0, x + y) \\ G(x + y, 0) & G(x, y) & G(0, x + y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

откуда в силу (1), (3), (4) и (5) имеем

$$0 = \begin{vmatrix} f(x + y) & f(x) + \gamma f(y) & \gamma f(x + y) \\ 0 & \gamma f(y) & \gamma f(x + y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$f(x + y)[\gamma f(y) + \gamma f(x) + \gamma^2 f(y) - \gamma^2 f(y) - \gamma f(x + y)] = 0,$$

т. е.

$$f(x + y)[f(x + y) - f(x) - f(y)] = 0.$$

Мы получили условное уравнение Коши, так называемое *уравнение Микусиньского* (J. Mikusiński первым предложил такой метод для простого доказательства основной теоремы аффинной геометрии, см.: Kuczma, 1978b; Dhombres, 1979, P. 2.9–2.12):

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{если } f(x + y) \neq 0. \quad (6)$$

Теперь найдём решение уравнения (6). Это уравнение должно быть справедливо на множестве

$$Z = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, f(x + y) \neq 0\},$$

которое определяется ядром функции f :

$$\ker f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}.$$

В данном случае Z зависит от неизвестной функции f . Прежде всего покажем, что $\ker f$ — подгруппа в $\mathbb{R}$.

Очевидно, $0 \in \ker f$. В самом деле, если существует $x \in \mathbb{R}$, для которого $f(x) \neq 0$, то $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$, т. е. $f(0) = 0$.

Если $x, y \in \ker f$, то при $x + y \notin \ker f$ получаем противоречие с (6).

Предположим, что $x \in \ker f$, $-x \notin \ker f$. Из (6) имеем: $f(-x) = f(-2x + x) = f(-2x) + f(x) = f(-2x)$. Поэтому $f(-2x) \neq 0$. Снова применяя (6), получаем: $f(-x) = f(-2x) = f(-x - x) = 2f(-x)$. Отсюда $f(-x) = 0$, что противоречит предположению $-x \notin \ker f$. Итак, $\ker f$ является подгруппой.

Теперь докажем, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(2x) = 2f(x). \quad (7)$$

Это верно при $x \in \ker f$, поскольку $\ker f$ — подгруппа. Это верно и при $x \notin \ker f$, $2x \notin \ker f$, поскольку тогда ввиду (6)

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Остаётся случай $f(2x) = 0$, $f(x) \neq 0$. Покажем, что он невозможен.

Пусть для некоторого x_0 верно, что $f(2x_0) = 0$, $f(x_0) = y_0 \neq 0$. Вначале предположим, что существует также x , для которого $f(x) \neq 0$ и $f(x) \neq f(x_0)$. Из (6) имеем

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) + f(x_0). \quad (8)$$

Отсюда $f(x - x_0) \neq 0$, и потому

$$f(x - x_0) = f(x - 2x_0 + x_0) = f(x - 2x_0) + f(x_0). \quad (9)$$

Но

$$f(x) = f(x - 2x_0 + 2x_0) = f(x - 2x_0) + f(2x_0) = f(x - 2x_0),$$

откуда

$$f(x - x_0) = f(x) + f(x_0).$$

С учётом (8) получаем отсюда $2f(x_0) = 2y_0 = 0$, тогда как $y_0 \neq 0$.

Итак, $f(x) = y_0$ для всех $x \notin \ker f$. При этом $f(x) = f(x/2) + f(x/2)$. Значит, $f(x/2) \neq 0$, и поэтому $f(x/2) = y_0$, но тогда $y_0 = 2y_0$, что невозможно при $y_0 \neq 0$. Равенство (7) доказано.

Теперь докажем, что $f(-x) = -f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Это очевидно при $x \in \ker f$, поскольку $\ker f$ является группой. Для $x \notin \ker f$ имеем

$$f(x) = f(2x - x) = f(2x) + f(-x) = 2f(x) + f(-x),$$

откуда

$$-f(x) = f(-x). \quad (10)$$

Теперь мы сможем доказать, что любая функция f , удовлетворяющая условию (6), в действительности аддитивна. Возьмём произвольные $x, y \in \mathbb{R}$. Пусть вначале $y \notin \ker f$. Тогда в силу (6) и (10)

$$f(y) = f(-x + y + x) = f(-x) + f(y + x) = -f(x) + f(y + x),$$

т. е.

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

По симметрии это верно и для $x \notin \ker f$. При $x, y \in \ker f$ аддитивность следует из того, что $\ker f$ — подгруппа. Доказана

Теорема 1. *Все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию (6), аддитивны: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ при всех вещественных x, y . ■*

Возвращаясь к нашей геометрической задаче, докажем

Предложение 2. *Пусть $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — биекция, сохраняющая коллинеарность и непрерывная в точке. Тогда преобразование T линейно.*

Доказательство. С помощью линейного отображения преобразуем $T(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ так же, как в начале этой главы (с. 6). Получим, что функция $f(x) = F(x, 0)$ аддитивна. Непрерывность отображения T в некоторой точке приводит к непрерывности функции f в точке. Следовательно, $f(x) = \alpha x$ для некоторой константы α (следствие 2.5). С учётом (1)–(4)¹⁾ отображение T линейно и, как следствие, может быть представлено невырожденной матрицей. ■

Ясно, что условие непрерывности в предложении 2 можно ослабить, используя более глубокие результаты о регулярности из следствия 2.5. На самом деле здесь не нужны никакие условия регулярности. Будем называть *коллинеацией* вещественной плоскости биекцию $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сохраняющую коллинеарность. Справедлива

Теорема 3. *Коллинеация вещественной плоскости является композицией сдвига и невырожденного линейного преобразования.*

Доказательство. Используем обозначения из предложения 2. Идея состоит в том, чтобы добавить ещё одно функциональное уравнение для аддитивной функции f и за счёт этого избавиться от любых условий регулярности. Пусть $A = (1, 0)$, $B = (x, 0)$, $C = (0, y)$. Если прямые BD и AC параллельны, то $D = (0, xy)$ (см. рис. 8).

¹⁾ А также (5).

Применим к $T(A)$, $T(B)$, $T(C)$ и $T(D)$ то же рассуждение, что и в начале главы. С учётом (1), (2) и (5) получаем

$$f(x)f(y) = f(xy)f(1),$$

так как T переводит параллельные прямые в параллельные. Поскольку $T(A) = A$, то $f(1) = 1$ и

$$f(xy) = f(x)f(y). \quad (11)$$

В силу (6) и теоремы 1 функция f аддитивна. Таким образом, это автоморфизм кольца $\mathbb{R}$ (т.е. выполнены условия (5.21) и (5.22)). Согласно предложению 5.6 либо $f(x) \equiv x$, либо $f(x) \equiv 0$. Последнее невозможно, так как $f(1) = 1$. Поэтому $f(x) \equiv x$. Как и в предложении 2, отсюда вытекает, что отображение T линейно. Теорема 3 доказана. ■

Теорема 3 была даже обобщена на биекции, сохраняющие коллинеарность хотя бы для точек, лежащих на четырёх прямых (или на объединении трёх прямых и точки). О различных обобщениях см. также: Aczél–Benz, 1969; Aczél, 1971b.

Для бикомплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ ситуация совершенно иная. При доказательстве теоремы 5.7 мы построили нетривиальный автоморфизм f поля $\mathbb{C}$. Он порождает отображение $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ вида $T(x, y) = (f(x), f(y))$. Это отображение является биекцией, причём сохраняет коллинеарность точек бикомплексной

плоскости. В самом деле, алгебраические условия коллинеарности трёх точек сохраняются, поскольку f сохраняет сумму и произведение. При этом отображение T не является линейным или антилинейным и вообще выглядит причудливо: оно разрывно в каждой точке плоскости. Тем не менее оно сохраняет гармонические отношения (и вообще двойные отношения с рациональными значениями), а также коники.

Условные уравнения Коши систематически изучаются в следующей главе. Данную главу мы завершим рассмотрением функционального уравнения, введённого I. Феруэ и полностью решённого в работах W. Benz, 1979a; 1981b. Здесь интересно, что при решении условного функционального уравнения с двумя переменными оказывается возможным использовать метод неподвижной точки, обычно применяемый к функциональным уравнениям с одним переменным. С другой стороны, это уравнение характеризует функцию Хевисайда.

Будем искать такое отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) = f(xy)f\left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (12)$$

Пусть F_f — множество всех тех $x \in \mathbb{R}$, для которых $f(x) \neq 0$. В силу (12) обе точки x и y принадлежат F_f , если и только если $(x+y)/2$ и xy принадлежат F_f . Поэтому удобно ввести следующее определение.

Множество $F \subset \mathbb{R}$ назовём *регулярным*, если выполнено следующее условие: оба числа x и y принадлежат F , если и только если $(x+y)/2$ и xy принадлежат F . Единственные одноэлементные регулярные множества — это 0 и 1. Регулярны и множества F_f , где f — решение уравнения (12). Покажем, что регулярное множество F , содержащее более одного элемента, не ограничено сверху.

Вначале предположим, что существует $x \in F$, для которого $|x| > 1$. Поскольку $x^2, x^4, \dots, x^{2^n}, \dots \in F$, то F не ограничено сверху.

Пусть теперь $|x| \leq 1$ для всех $x \in F$. Так как F содержит более одного элемента и регулярно, то $F \not\subset \{-1, 0, 1\}$. При этом если $t \in F$, то и $t^2 \in F$. Поэтому существует

$x \in F$, такое что $0 < x < 1$. Существует также $y \in F$, такое что $x^2 > y$ (например, $y = x^4$). Положим $x_1 = x + (x^2 - y)^{1/2}$. Мы видим, что $x_1 > x$, $x_1^2 > y$ и $x_1 \in F$ (последнее выводится из того, что если $x'_1 = x - (x^2 - y)^{1/2}$, то $x_1 x'_1 = y$, $(x_1 + x'_1)/2 = x$, причём $x, y \in F$). По индукции положим $x_{n+1} = x_n + (x_n^2 - y)^{1/2}$ при $n \geq 1$, тем самым определив возрастающую последовательность элементов $\{x_n\}$ в F . Если она ограничена, то сходится к некоторому z , которое удовлетворяет условию $z = z + (z^2 - y)^{1/2}$, откуда $z^2 = y$. Но $z^2 \geq x_1^2 > y$. Это противоречие показывает, что последовательность x_n элементов из F не ограничена сверху.

Теорема 4. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (12), если и только если существуют регулярное подмножество $F \subset \mathbb{R}$ и константы α, β , такие что:
 а) если $0 \notin F$ или если $0 \in F$ и $F \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, то $f(x) = \alpha \chi_F(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$,
 б) если $0 \in F$ и $F \cap \mathbb{R} = \emptyset$, то $f(x) = \alpha \chi_F(x)$ при всех $x \neq 0$ и $f(0) = \beta$.

Здесь χ_F — характеристическая функция множества F (т. е. $\chi_F(x) = 1$ при $x \in F$, $\chi_F(x) = 0$ при $x \notin F$).

Доказательство. Очевидно, что из перечисленных условий вытекает (12). Обратное, пусть (12) выполнено; покажем, что $F = F_f$. Случай $F_f = \{0\}$ содержится в (б), а случаи $F_f = \{1\}$ и $F_f = \emptyset$ — в (а). Поэтому можно считать, что F_f не ограничено сверху¹⁾.

Из (12) при $x = y \in F_f$ получаем

$$f(x) = f(x^2) \quad \text{на } F_f. \quad (13)$$

Отсюда получаем для $x, y \in F_f$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)f(y)}{f(xy)} = \frac{f(x^2)f(y^2)}{f(x^2y^2)} = f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

т. е. f удовлетворяет условному функциональному уравнению

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \text{при всех } x, y \in F_f. \quad (14)$$

Сначала решим (14) без ограничений на x и y . Тогда и (13) выполнено без ограничений (положим в (14) $x = y$). Отображение $(x, y) \mapsto (u = (x+y)/2, v = xy)$ переводит $\mathbb{R}^2$ в множество $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v \leq u^2\}$. На этом множестве из равенства (14) следует, что

$$f(u) = f(2u^2 - v).$$

С учётом (13) получаем при $z = u^2 - v$:

$$f(u) = f(u^2) = f(u^2 + z) \quad (u \in \mathbb{R}, z \in \overline{\mathbb{R}}_+). \quad (15)$$

При любых $u, u' \in \mathbb{R}$ один из лучей $[u^2, \infty[$ и $[u'^2, \infty[$ содержится в другом, и в силу (15) имеем $f(u) = f(u')$. Таким образом, даже при отсутствии ограничений на x и y решения уравнения (14) сводятся к константам.

Вернёмся теперь к условному функциональному уравнению (14) и покажем, что все его решения постоянны на F_f , по крайней мере вне точки 0. Как и выше,

$$f(t) = f(t^2 + z) \quad (16)$$

для всех $t \in F_f$, но при условиях $z \geq 0$ и $t^2 - z \in F_f$. Непосредственно сравнить эти условия при различных t было бы трудно. Но можно применить следующий приём.

¹⁾ Так как F_f содержит более одного элемента.

Пусть $0 \leq x \leq y$, причём $x, y \in F_f$. Пусть также $t = xy \in F_f$, $z = (xy)^2 - x^4 \geq 0$. Тогда $t^2 - z = (x^2)^2 \in F_f$, и из (16) имеем

$$f(xy) = f(2x^2y^2 - x^4). \quad (17)$$

Но $2x^2y^2 - x^4 = x^2(2y^2 - x^2)$, и с учётом (12)

$$f(x^2)f(2y^2 - x^2) = f(y^2)f(2x^2y^2 - x^4). \quad (18)$$

Положив $u = y$ и $z = y^2 - x^2$ (здесь $z \geq 0$ и $u^2 - z = x^2 \in F_f$), получаем в силу (16):

$$f(2y^2 - x^2) = f(y). \quad (19)$$

Поскольку $f(y) = f(y^2) \neq 0$ и $f(x) = f(x^2) \neq 0$, то из (18) и (19) имеем $f(x) = f(2x^2y^2 - x^4)$. С учётом (17) получаем условие гораздо более удобного вида, чем (16):

$$f(x) = f(xy) \quad (x, y \in F_f, 0 \leq x \leq y). \quad (20)$$

Пусть $x > 0$, $y \geq x$, $y \in F_f$. Так как F_f не ограничено сверху, то существует $z \in F_f$, такое что $z \geq \sup(x/y, y/x)$. Тогда $xz \in F_f$, $xz \geq y$ и $yz \in F_f$, $yz \geq x$. С учётом (20) получаем

$$f(y) = f(xz \cdot y) = f(x \cdot zy) = f(x).$$

Таким образом, функция f постоянна на $F_f \cap \mathbb{R}_+$. Ввиду (13) f постоянна и на всём F_f , по крайней мере вне точки 0.

Иначе говоря, существует ненулевая константа $\alpha \neq 0$, такая что $f(x) = \alpha \chi_{F_f}(x)$ при $x \neq 0$ (напомним, что χ_{F_f} — характеристическая функция множества F_f). Если $0 \notin F_f$, то обязательно $f(0) = 0$. В противном случае имеются две возможности.

Если $F_f \ni -a < 0$, то из (12) имеем

$$f(-a^{1/2})f(a^{1/2}) = f(-a)f(0). \quad (21)$$

Поскольку $f(-a)$ и $f(0)$ отличны от 0, то $-a^{1/2}$ и $a^{1/2}$ принадлежат F_f , и из (21) получаем $f(0) = \alpha$. Если же F_f не содержит отрицательных чисел, то непосредственное вычисление показывает, что решение уравнения (12) может принимать в нуле любое ненулевое значение. Теорема 4 доказана. ■

В заключение дадим характеризацию функции Хевисайда H , равной 1 при $x \geq 0$ и 0 при $x < 0$:

Теорема 5. *Функция Хевисайда является единственным непрерывным справа решением уравнения (12), область значений которого содержит 0 и 1.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{R}_+$ является регулярным подмножеством в $\mathbb{R}$, а функция Хевисайда — его характеристическая функция, то она удовлетворяет уравнению (12). При этом она непрерывна справа, и её область определения содержит 0 и 1.

Обратно, пусть F — регулярное множество (обязательно непустое), отвечающее непрерывной справа функции f , которая удовлетворяет уравнению (12) и принимает в каких-то точках значения 0 и 1. Ввиду её непрерывности справа F содержит более одного элемента и по доказанному не ограничено сверху. Для любого x в F или в его дополнении $\mathcal{C}F$ найдётся $\sigma > 0$ (вообще говоря, зависящее от x), такое что полуинтервал $[x, x + \delta[$ целиком содержится в F или в $\mathcal{C}F$ соответственно (это также вытекает из непрерывности функции f справа). Возьмём $x_0 \in F$, и пусть $x_1 = \sup\{x \mid [x_0, x] \subset F\}$. Допустим, что x_1 конечно. Поскольку f непрерывна справа, то x_1 принадлежит $\mathcal{C}F$. Положим $x_2 = \sup\{x \mid [x_1, x] \subset \mathcal{C}F\}$, $x \geq x_1$. Так как F не ограничено сверху, то x_2 конечно и (снова по непрерывности функции f справа)

$x_2 \in F$, $x_2 > x_1$. Теперь легко найти $y \in [x_0, x_1[$, такое что $(y + x_2)/2 \in]x_1, x_2[\subset CF$. Но $y, x_2 \in F$, так что и $(y + x_2)/2 \in F$. Это противоречие показывает, что $x_1 = \infty$. Иначе говоря, мы доказали, что если $x_0 \in F$, то и $[x_0, \infty[\subset F$. Теперь положим $x_0 = \inf F$. Так как f принимает значение 0, то x_0 конечно. Покажем, что случаи $x_0 > 0$ и $x_0 < 0$ невозможны.

Предположим, что $x_0 > 0$, и пусть $y \in F$. Можно выбрать $\varepsilon > 0$, для которого $x_0^2 + 2\varepsilon x_0 > y$. Тогда $x = x_0 + \varepsilon \in F$, $(x_0 + \varepsilon)^2 > y^1$ и $x_0 > x - (x^2 - y)^{1/2} \in F^2$, в то время как x_0 — нижняя грань для F .

Если же $x_0 < 0$, то мы можем выбрать $y < 0$, принадлежащее F , и повторить предыдущее рассуждение. Остаётся случай $x_0 = 0$, когда f совпадает с функцией Хевисайда. Теорема 5 доказана. ■

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1–4 см.: Kuczma, 1978a.)

1. Найдите общее решение следующего условного уравнения Коши относительно $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{если } f(x+y) + f(x) + f(y) \neq 0 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(или, эквивалентно, $f(x+y)^2 = (f(x) + f(y))^2$ при $x, y \in \mathbb{R}$).

2. Пусть $(G, \cdot)$ — коммутативная полугруппа, не содержащая элементов порядка 3, $(F, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо без делителей нуля. Есть ли у уравнения (ii) решения $f: G \rightarrow F$, не удовлетворяющие уравнению (i)?

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in G)$,

(ii) $f(x+y)^2 = (f(x) + f(y))^2 \quad (x, y \in G)$.

3. То же, но коммутативность полугруппы G замените отсутствием элементов порядка 4 (и, как и раньше, порядка 3).

4. Найдите общее решение $f: G \rightarrow F$ уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{если } f(x+y) + f(x) + f(y) \neq 0 \quad (x, y \in G),$$

где G и F — абелевы группы.

5. Найдите общее решение следующего условного функционального уравнения относительно $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f(x+y))^2 = (f(x)f(y))^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(это также одно из условных уравнений Коши).

6. Найдите общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$(f(x+y))^n = (f(x) + f(y))^n \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

где n — фиксированное натуральное число.

7. Найдите общее решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ функционального уравнения Лобачевского

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

8*. (Теорема Хуа; см. Ниа, 1949; близкий результат см.: Artin, 1978, p. 38–40.) Пусть F — кольцо, функция $f: F \rightarrow F$ аддитивна. Предположим, что для любых $x, y \in F$ либо

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{22}$$

¹ В действительности $(x_0 + \varepsilon)^2 > y + \varepsilon^2$, откуда и вытекает последующее неравенство.

² Включение следует из того, что если $z = x + \sqrt{x^2 - y}$, $z' = x - \sqrt{x^2 - y}$, то $zz' = y \in F$, $(z + z')/2 = x \in F$

либо

$$f(xy) = f(y)f(x). \quad (23)$$

Докажите, что f является эндоморфизмом либо антиэндоморфизмом кольца F (это означает, что функция f аддитивна и одно из равенств (22), (23) верно для всех $x, y \in F$.)

9*. (Reis-Shyr 1977.) Пусть X^+ — свободная полугруппа над алфавитом X , а отображение $f: X^+ \rightarrow X^+$ таково, что для всех $x, y \in X^+$ либо

$$f(xy) = f(x)f(y),$$

либо

$$f(xy) = f(y)f(x).$$

Докажите, что f является эндоморфизмом либо антиэндоморфизмом (определение см. в упр. 8).

10*. Пусть G — группа, F — тело характеристики, отличной от 2. Покажите, что решениями $f: G \rightarrow F$ уравнения

$$f(xy) + f(yx) = f(x)f(y) + f(y)f(x)$$

являются только гомоморфизмы и антигомоморфизмы. Выведите отсюда теорему Хуа (упр. 8).

11. (См. Каппаррап, 1979b.) Пусть G — группа, F — тело. Найдите все решения $f: G \rightarrow F$ функционального уравнения

$$f(xy) + f(yx) = 2f(x)f(y).$$

(В действительности это сумма уравнений (22) и (23) из упр. 8.)

12. (Benz, 1981b.) Можно ли в теореме 5 условие непрерывности всюду справа заменить на условие непрерывности справа в нуле и существование таких $x_1 \neq x_2$, что $f(x_1)f(x_2) \neq 0$?

Глава 7

ОБИЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА, ПРОДОЛЖЕНИЯ, КВАЗИПРОДОЛЖЕНИЯ И ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И ПРОБЛЕМЕ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

Продолжая тему предыдущей главы, введём понятия, позволяющие классифицировать условные уравнения Коши в зависимости от того, можно ли снять наложенные на них ограничения. Нам потребуются такие понятия, как обильность, аддитивная расширяемость, квазипродолжения и др. С их помощью будут сформулированы и доказаны основные теоремы об условных уравнениях Коши. В качестве приложения мы рассмотрим преобразование Фурье как представление групповой алгебры классов эквивалентности функций, интегрируемых по Лебегу. В другом приложении условное уравнение применяется к проблеме рационального группового выбора.

7.1. Расширения и квазирасширения

Введём некоторые термины с учётом результатов предыдущих глав (см.: Daróczy–Losonczi, 1967; Dhombres–Ger, 1978). Пусть Z — непустое подмножество в $\mathbb{R}^2$. Положим

$\Pi_1(Z) = \{x \mid \exists y : (x, y) \in Z\}$: проекция множества Z на ось x ,

$\Pi_2(Z) = \{y \mid \exists x : (x, y) \in Z\}$: проекция множества Z на ось y ,

$t(Z) = \{z \mid \exists x, \exists y : (x, y) \in Z, z = x + y\}$: проекция множества Z параллельно прямой $x + y = 0$ на ось x ,

$A(Z) = \Pi_1(Z) \cup \Pi_2(Z) \cup t(Z)$.

(Таким образом, все эти множества содержатся в $\mathbb{R}$.) Условное уравнение Коши относительно Z

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{для всех пар } (x, y) \in Z, \quad (1)$$

можно было бы рассматривать для функций g , определённых только на $A(Z)$, а не на всей вещественной оси. В самом деле, уравнение (1) ничего не говорит об их значениях вне $A(Z)$, и потому из решения этого уравнения нельзя извлечь информацию относительно дополнения к $A(Z)$. Однако может оказаться удобным определить g на всём $\mathbb{R}$. Поэтому введём следующую терминологию.

Пусть отображение $\mathcal{Z}$ ставит в соответствие каждой функции $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непустое множество $\mathcal{Z}(g) \subset \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что $\mathcal{Z}$ *аддитивно расширяемо*, если для любого решения g условного аддитивного уравнения Коши

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{для всех пар } (x, y) \in \mathcal{Z}(g)$$

существует аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, совпадающая с g на $A(\mathcal{Z}(g))$. Она называется *аддитивным продолжением* (или, кратко, *продолжением*) функции g относительно $\mathcal{Z}(g)$. Если функция f единственна, то мы говорим, что отображение $\mathcal{Z}$ *допускает единственное аддитивное расширение*.

Пусть Z — непустое подмножество в $\mathbb{R}^2$, а $\mathcal{Z}(g) = Z$ для всех $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Если такое отображение допускает (единственное) аддитивное расширение, то будем говорить, что и Z допускает (*единственное*) *аддитивное расширение*. В этих терминах теорема 2.1 формулируется так: $\mathbb{R}^2_+$ *аддитивно расширяемо*.

Для $E \subset \mathbb{R}^2$ положим $t^{-1}(E) = \{(x, y) \mid x + y \in E\}$. Определим отображение $\mathcal{Z}_1$ формулой $\mathcal{Z}_1(g) = t^{-1}(C \ker g)$ (как и выше, C означает дополнение). Теорема 6.1 приобретает следующий вид:

Теорема 1. Отображение $\mathcal{Z}_1$ *аддитивно расширяемо*. ■

Разумеется, от решений уравнения (1) часто требуется определённая регулярность. Пусть R — некоторый непустой класс функций $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Определим отображение $\mathcal{Z}$ как выше, но лишь для функций из R . Будем называть его (*однозначно*) *аддитивно R -расширяемым*, если для любого решения $g \in R$ уравнения

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{для всех } (x, y) \in \mathcal{Z}(g)$$

существует (единственная) аддитивная функция $f \in R$, такая что

$$f(x) = g(x) \quad \text{для всех } (x, y) \in A(\mathcal{Z}(g)).$$

Для непустого подмножества $Z \subset \mathbb{R}^2$ аналогично получаем определение (*однозначно*) *аддитивно R -расширяемого множества*. Введём ещё два полезных определения.

Непустое множество $Z \subset \mathbb{R}^2$ назовём *обильным* (соответственно, *R -обильным*), если $A(Z) = \mathbb{R}$ и Z аддитивно расширяемо (соответственно, аддитивно R -расширяемо)¹⁾.

В этом параграфе мы исследуем некоторые примеры обильных множеств. Прежде всего, определим отображение $\mathcal{Z}_2$ формулой $\mathcal{Z}_2(g) = \mathbb{R} \times g(\mathbb{R})$, где $g(\mathbb{R}) := \{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Справедливо

Предложение 2. Отображение $\mathcal{Z}_2$ не является аддитивно расширяемым.

Доказательство. Функция является $\mathcal{Z}_2(g)$ -аддитивной, если и только если она удовлетворяет функциональному уравнению

$$g(x + g(y)) = g(x) + g(g(y)) \quad \text{при всех } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Пусть функция $g(x)$ равна целой части числа x , т. е. наибольшему целому, не превосходящему x . Эта функция удовлетворяет функциональному уравнению (2), но явно не аддитивна. (Относительно общего решения для (2) см. упр. 7; сходные уравнения см. в гл. 19.) ■

Теорема 3. Отображение $\mathcal{Z}_2$ является C -расширяемым, где C — класс всех непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство. Нам нужно найти все непрерывные решения $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2) и доказать, что каждое из них имеет вид $g(x) = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ (см.: Dhombres, 1977c). Положив $x = 0$ в (2), получаем $g(0) = 0$. Значит, если g является константой, то это тождественный нуль. Если g не является константой, то область её значений в силу непрерывности имеет непустую внутренность F , причём $g(x + y) = g(x) + g(y)$ при всех $x \in R, y \in F$. Множество $G = \{y \mid g(x + y) = g(x) + g(y) \text{ при всех } x \in \mathbb{R}\}$ является подгруппой в $\mathbb{R}$ и содержит непустое открытое множество F . Но такая подгруппа обязательно совпадает с $\mathbb{R}$. Таким образом, $G = \mathbb{R}$, т. е. функция g аддитивна. Будучи непрерывной, она имеет вид $g(x) = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$. Теорема 3 доказана. ■

¹⁾ В подлиннике вводится термин *addundant*, являющийся сокращением от *additively redundant* (аддитивно избыточный), а также от *additively abundant* (аддитивно обильный). Отмечается, что термин *redundant* ранее употреблялся в более узком смысле (например, в работе Dhombres–Ger, 1978).

Весьма существен следующий факт (сходная теорема содержится в работе Daróczy–Losonczi, 1967; источником нижеприведённого доказательства являются работы Ng, 1974a, Dhombres–Ger, 1978, J. Lawrence (не опубликовано)).

Теорема 4. Для любого $r > 0$ ромб $Z = \{(x, y) \mid |x| + |y| < r\}$ допускает единственное аддитивное расширение.

Эта теорема означает, что если $g :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \quad \text{при } |x| + |y| < r, \quad (3)$$

(рис. 9), то существует единственное решение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения Коши, такое что

$$f(x) = g(x) \quad \text{при всех } x \in]-r, r[. \quad (4)$$

Доказательство. Как и для уравнения Коши на $\mathbb{R}^2$, можно доказать, что $g(0) = 0$ и

$$g(ns) = ng(s) \quad \text{при } n|s| < r \quad (n \text{ натуральное}). \quad (5)$$

Положим здесь $s = x/n$:

$$g\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} g(x) \quad \text{при } |x| < r. \quad (6)$$

Произвольное $t \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$t = ny \quad (n \text{ натуральное}, \quad |y| < r). \quad (7)$$

Положим теперь

$$f(t) = ng(y) = ng\left(\frac{t}{n}\right) \quad (|y| < r). \quad (8)$$

Нужно проверить корректность определения (8), поскольку при любом вещественном t представление (7) неоднозначно. Пусть

$$t = mx \quad (m \text{ натуральное}, \quad |x| < r).$$

Тогда $x/n = y/m$, и в силу (6)

$$ng(y) = nmg\left(\frac{y}{m}\right) = nmg\left(\frac{x}{n}\right) = mg(x),$$

т. е. функция f определена корректно. Если $|t| < r$, то (7) сводится к $t = t$. Ввиду (8) имеем

$$f(t) = g(t) \quad \text{при } |t| < r,$$

что совпадает с (4).

Теперь покажем, что f удовлетворяет уравнению Коши. Для произвольных $u, v \in \mathbb{R}$ найдётся достаточно большое n , такое что $(|u| + |v|)/n \in [0, r[$. Тогда

$$f(u+v) = ng\left(\frac{u+v}{n}\right) = ng\left(\frac{u}{n}\right) + ng\left(\frac{v}{n}\right) = f(u) + f(v).$$

Мы доказали, что существует функция f , удовлетворяющая уравнению Коши и условию (4). Легко установить её единственность. Для любого $t \in \mathbb{R}$ существует

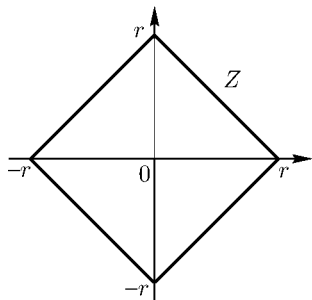


Рис. 9

натуральное n , такое что $|t|/n < r$. Если некоторая функция $\tilde{f}$ также удовлетворяет уравнению Коши и условию (4), то из (3) и (4) получаем

$$f(t) = n f\left(\frac{t}{n}\right) = n g\left(\frac{t}{n}\right) = n \tilde{f}\left(\frac{t}{n}\right) = \tilde{f}(t) \quad \text{при всех вещественных } t,$$

что и требуется. (В теореме 2.1 единственность также устанавливается легко.) ■

Аналогичный результат верен и для некоторых геометрических фигур, отличных от открытого ромба из теоремы 4, например для замкнутого ромба $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq r\}$; замкнутого треугольника $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq r\}$; шестиугольников и треугольников вида $\{(x, y) \mid x, y, x + y \in I\}$, где I — отрезок, содержащий 0 внутри или на границе; для круга с центром в начале координат и т. д. (Эти фигуры должны содержать начало координат внутри либо на границе и в последнем случае быть связными.)

Более общий характер носит следующий результат, который мы приведём без доказательства. (См. упр. 11. Основная идея доказательства та же, что и в теореме 4. См. Dhombres–Ger, 1978, Ng, 1974a.) Пусть X — непустое подмножество делимой абелевой группы. Назовём множество X *полным* (full), если выполнены следующие два условия:

- 1) для всех $x \in X$ и всех $\lambda \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ мы имеем $\lambda x \in X$;
- 2) для каждой пары $(x, y) \in X^2$ существует целое n , такое что $(x + y)/n \in X$.

Теорема 5. Пусть F и G — делимые абелевы группы, X — полное подмножество в G . Рассмотрим «треугольник» (или шестиугольник) вида

$$Z = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X, x + y \in X\}.$$

Если отображение $f : G \rightarrow F$ является Z -аддитивным, то существует аддитивное отображение $g : G \rightarrow F$, такое что $f = g$ на X . При этом g единственно, если и только если подгруппа, порождённая множеством X , совпадает с G .

Другими словами, множество Z аддитивно расширяемо. Оно однозначно аддитивно расширяемо, если и только если X порождает группу G . ■

Нам встретятся области, которые не расширяемы, но «квазирасширяемы» в смысле, который мы сейчас определим (Daróczy–Losonczi, 1967). (Невозможность расширения в основном связана с ролью, которую играет начало координат для условных уравнений Коши.)

Пусть $(a, b) \in Z$. Функция f , удовлетворяющая уравнению Коши всюду, является (аддитивным) квазипродолжением решения g условного уравнения Коши относительно Z , если

$$f(x) - f(a) = g(x) - g(a) \quad \text{при всех } x \in \Pi_1(Z), \quad (9)$$

$$f(y) - f(b) = g(y) - g(b) \quad \text{при всех } y \in \Pi_2(Z), \quad (10)$$

$$f(z) - f(a + b) = g(z) - g(a + b) \quad \text{при всех } z \in t(Z). \quad (11)$$

Если такая функция существует, то множество Z называется *квазирасширяемым*.

Это определение не зависит от выбора точки $(a, b) \in Z$. Действительно, возьмём другую точку $(a', b') \in Z$. Тогда $a' \in \Pi_1(Z)$, $b' \in \Pi_2(Z)$, $a' + b' \in t(Z)$. В силу (9), (10) и (11) имеем

$$f(a') - f(a) = g(a') - g(a), \quad f(b') - f(b) = g(b') - g(b),$$

$$f(a' + b') - f(a + b) = g(a' + b') - g(a + b).$$

Вычтем эти равенства из (9), (10) и (11):

$$f(x) - f(a') = g(x) - g(a') \quad (x \in \Pi_1(Z)),$$

$$f(y) - f(b') = g(y) - g(b') \quad (y \in \Pi_2(Z)),$$

$$f(z) - f(a' + b') = g(z) - g(a' + b') \quad (z \in t(Z)),$$

т. е. (9)–(11) выполняются и после замены (a, b) на (a', b') .

Разумеется, уравнения (9)–(11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \alpha & (x \in \Pi_1(Z)), \\ f(y) &= g(y) + \beta & (y \in \Pi_2(Z)), \\ f(z) &= g(z) + \alpha + \beta & (z \in t(Z)). \end{aligned} \quad (12)$$

Напомним, что если для аддитивной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено условие

$$f(x) = g(x) \quad \text{для всех } x \in A(Z),$$

то f называется (*аддитивным*) *продолжением* Z -аддитивной функции g . Каждое аддитивное продолжение является квазипродолжением. С другой стороны, *если хотя бы два из множеств $\Pi_1(Z) \cap \Pi_2(Z)$, $\Pi_1(Z) \cap t(Z)$, $\Pi_2(Z) \cap t(Z)$ непусты, то все квазипродолжения относительно Z являются продолжениями*, как видно из (12). В частности, отсюда ясна существенная роль начала координат: *если $(0, 0) \in Z$ или $]0, \varepsilon[\subset Z$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то все квазипродолжения являются продолжениями*.

Нам потребовалось понятие квазипродолжения, так как часто уже в простых случаях продолжения отсутствуют, но существуют квазипродолжения.

Например, пусть функция g имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \in]2, 3[, \\ x + 2 & \text{при } x \in]4, 6[\end{cases} \quad (13)$$

и принимает любые значения в остальных точках из $\mathbb{R}$. Тогда она Z -аддитивна для $Z =]2, 3[^2$:

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{при всех } (x, y) \in]2, 3[^2. \quad (14)$$

Однако не существует такой аддитивной функции f , что

$$f(x) = g(x) \quad \text{при всех } x \in]2, 3[\cup]4, 6[= A(]2, 3[^2). \quad (15)$$

В самом деле, в силу (13) и (15) такая функция была бы непрерывна (и ограничена) на интервале (например, $]2, 3[$) и согласно следствию 2.5 имела бы вид $f(x) = cx$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Но такая функция не может быть продолжением для (13). Тем не менее $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) является квазипродолжением функции (13) относительно множества $]2, 3[^2$ (нужно взять $a = b = 5/2$ в формулах (9) и (10) или $\alpha = \beta = -1$ в формуле (12)).

С помощью квазипродолжений без труда определяются понятия (*однозначно*) *квазирасширяемого* и *квазиобильного* множества на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Для $r > 0$ и $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ положим $U_r(a, b) = \{(x, y) \mid |x - a| + |y - b| < r\}$. Тогда $\Pi_1(U_r(a, b)) =]a - r, a + r[$, $\Pi_2(U_r(a, b)) =]b - r, b + r[$, $t(U_r(a, b)) =]a + b - r, a + b + r[$. Справедлива

Лемма 6. *Множество $U_r(a, b)$ однозначно квазирасширяемо.*

Доказательство. Покажем, что если произвольное решение уравнения Коши ограничить на $U_r(a, b)$, то для него найдётся *единственное квазипродолжение*. Пусть

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{при всех } (x, y) \in U_r(a, b). \quad (16)$$

В частности,

$$g(a + b) = g(a) + g(b). \quad (17)$$

Пусть $|s| + |t| < r$. Тогда

$$(s + a, t + b) \in U_r(a, b),$$

и в формуле (16) можно положить

$$x = s + a, \quad y = t + b \quad (s, t \in]-r, r[, \quad |s| + |t| < r). \quad (18)$$

Получаем

$$g(s + t + a + b) = g(s + a) + g(t + b).$$

Вычтем из полученного равенства (17):

$$g(s + t + a + b) - g(a + b) = g(s + a) - g(a) + g(t + b) - g(b) \quad \text{при } |s| + |t| < r. \quad (19)$$

При $t = 0$ получаем

$$g(s + a + b) - g(a + b) = g(s + a) - g(a) \quad \text{для всех } s \in]-r, r[,$$

а при $s = 0$

$$g(t + a + b) - g(a + b) = g(t + b) - g(b) \quad \text{для всех } t \in]-r, r[.$$

Поэтому можно положить

$$h(u) = g(u + a + b) - g(a + b) = g(u + a) - g(a) = g(u + b) - g(b) \quad (20)$$

$$\text{при всех } u \in]-r, r[,$$

и (19) переходит в уравнение

$$h(s + t) = h(s) + h(t) \quad \text{при } |s| + |t| < r. \quad (21)$$

По теореме 4 каждое решение h уравнения (21) единственным образом продолжается до аддитивной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Она является квазипродолжением для g . В самом деле,

$$f(u) = h(u) \quad \text{при } u \in]-r, r[,$$

причём f удовлетворяет уравнению Коши; далее, в силу (18) и (20), получаем

$$f(x) - f(a) = f(s + a) - f(a) = f(s) = h(s) = g(s + a) - g(a) = g(x) - g(a)$$

$$\text{при всех } x \in]a - r, a + r[= \Pi_1(U_r(a, b)),$$

$$f(y) - f(b) = f(t + b) - f(b) = f(t) = h(t) = g(t + b) - g(b) = g(y) - g(b)$$

$$\text{при всех } y \in]b - r, b + r[= \Pi_2(U_r(a, b)),$$

$$f(z) - f(a + b) = f(u + a + b) - f(a + b) = f(u) =$$

$$= h(u) = g(u + a + b) - g(a + b) = g(z) - g(a + b)$$

$$\text{при всех } z \in]a + b - r, a + b + r[= t(U_r(a, b)),$$

т. е. (9), (10) и (11) выполнены. Единственность квазипродолжения вытекает из единственности продолжения в теореме 4 (поскольку любое квазипродолжение для g является продолжением для h как решения условного уравнения (21)). Лемма 6 доказана. ■

Множество $U_r(a, b)$ является (открытой) окрестностью точки (a, b) . Для перехода к другим (связным) открытым множествам требуется

Лемма 7. Пусть $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая Z -аддитивная функция, где Z — объединение двух открытых множеств $Z_1, Z_2 \subset \mathbb{R}^2$ с непустым пересечением. Если Z_1 и Z_2 (однозначно) квазирасширяемы, то это верно и для Z , причём все три квазипродолжения совпадают.

Доказательство. Так как Z_1 и Z_2 открыты и пересекаются, то в множестве $\Pi_1(Z_1) \cap \Pi_1(Z_2)$ содержится непустой открытый интервал I . Возьмём произвольное $a \in I$. Пусть f_1 (соответственно f_2) — квазипродолжение для $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ относительно Z_1 (соответственно Z_2). Тогда по определению

$$f_1(x - a) = f_1(x) - f_1(a) = g(x) - g(a) \quad \text{при всех } x \in \Pi_1(Z_1),$$

$$f_2(x - a) = f_2(x) - f_2(a) = g(x) - g(a) \quad \text{при всех } x \in \Pi_1(Z_2).$$

Если $x \in I$, то $x - a$ содержится в некоторой окрестности J начала координат, причём в этой окрестности $f_1 = f_2$. Таким образом, аддитивная функция $f_1 - f_2$ в этой окрестности ограничена сверху нулём. В силу следствия 2.5 получаем, что $f_1(x) - f_2(x) = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathbb{R}$. Так как $f_1 = f_2$ на J , то $c = 0$. Значит, f_1 и f_2 совпадают всюду и, следовательно, дают квазипродолжение для g относительно Z .

Как следствие получаем, что если существует квазипродолжение относительно непустого открытого множества, то оно единственно. Лемма 7 доказана. ■

Теперь мы можем доказать следующее:

Теорема 8. Для каждого решения уравнения Коши существует единственное квазипродолжение относительно любого связного открытого множества $Z \subset \mathbb{R}^2$. Таким образом, каждое непустое связное открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$ однозначно аддитивно квазирасширяемо.

Доказательство. Так как Z открыто и связно, то существуют открытые квадраты $U_1, U_2, \dots (\subset Z)$, такие что $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ и $\bigcup_{k=1}^n U_k \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ ($n = 1, 2, \dots$). По лемме 6 при каждом k существует ровно одно квазипродолжение f_k для g относительно U_k . В силу леммы 7 все они совпадают. Значит, $f = f_1$ является единственным квазипродолжением для g относительно $\bigcup_{k=1}^n U_k$ при всех n , а потому и единственным квазипродолжением относительно Z . Теорема 8 доказана. ■

Отметим, что в силу такого же рассуждения существует не более одного квазипродолжения относительно любого непустого открытого множества в $\mathbb{R}^2$ без предположения о связности. Все эти результаты содержатся в работе Daróczy–Losonczi (1967) (мы несколько упростили доказательства). Эти авторы также отметили, что получаются аналогичные результаты, если значения функции g (и f) принадлежат произвольной абелевой топологической группе, например $\mathbb{R}^n$ (см. гл. 4).

Теорема 8 и последующее замечание сохраняют силу при добавлении к Z граничных точек. В конце § 2 мы встретим пример, когда (для несвязного Z) квазипродолжения не существует.

7.2. Продолжения почти всюду и интегральные преобразования

Теперь мы рассмотрим применение условного уравнения Коши в гармоническом анализе. В этом параграфе потребуются некоторые результаты из теории интеграла Лебега.

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахово пространство классов эквивалентности функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, интегрируемых по Лебегу, с нормой

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

Как известно, свёртка $f * g$ функций $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, определяемая формулой

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt,$$

также принадлежит $L^1(\mathbb{R})$. Операция $*$ превращает $L^1(\mathbb{R})$ в комплексную банахову алгебру без единицы (выполняется неравенство $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$).

Существенной характеристикой этой алгебры, как и в случае функций Бора (см. § 5.3), является её *спектр* — множество всех ненулевых линейных мультипликативных функционалов на L^1 , т. е. отображений $F: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, таких что $F \neq 0$,

$$F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g) \quad \text{при } f, g \in L^1(\mathbb{R}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \quad (22)$$

$$F(f * g) = F(f)F(g) \quad \text{при } f, g \in L^1(\mathbb{R}) \quad (23)$$

и

$$|F(f)| \leq \|f\|_{\infty} \quad \text{при } f \in L^1(\mathbb{R}). \quad (24)$$

(Неравенство (24) можно записать как $\|F\| \leq 1$.) В силу классической теоремы двойственности в теории Лебега (согласно которой $L^{\infty}(\mathbb{R})$ можно рассматривать как двойственное пространство к $L^1(\mathbb{R})$) существует функция $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, почти всюду ограниченная ($h \in L^{\infty}(\mathbb{R})$), измеримая и не являющаяся почти везде нулевой, причём

$$F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x) dx.$$

(Можно доказать, что из (22) и (23) вытекает (24) и даже равенство $\|F\| = 1$, см. упр. 13.)

Из условия мультипликативности (23) в силу теоремы Фубини следует соотношение

$$\int_{\mathbb{R}} \left[h(x) \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt \right] dx = \left[\int_{\mathbb{R}} h(t)f(t) dt \right] \left[\int_{\mathbb{R}} h(u)g(u) du \right].$$

Левую часть можно записать в виде $\int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\int_{\mathbb{R}} h(u+t)g(u) du \right] dt$. Перейдём к двойным интегралам:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(u)[h(u+t) - h(u)h(t)] du dt = 0.$$

Линейные комбинации функций вида $f(t)g(u)$ плотны в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ (обобщённая теорема Стоуна–Вейерштрасса). Поэтому

$$h(u+t) = h(u)h(t) \quad \text{в смысле } L^{\infty}(\mathbb{R}^2),$$

т. е.

$$h(u+t) = h(u)h(t) \quad \text{почти везде в } \mathbb{R}^2. \quad (25)$$

Мы получили условное экспоненциальное уравнение Коши для $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Если его решение h обращается в нуль на множестве строго положительной лебеговой меры, то почти всюду $h = 0$, но мы исключили этот случай. Если $h = 0$ на множестве меры нуль, то изменим значение h на этом множестве. Теперь область значений функции h содержится в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, причём h по-прежнему удовлетворяет условию (25).

Теорема 9. Если функция $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (25), то существует единственная функция $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, такая что почти всюду $H = h$ и всюду выполнено экспоненциальное уравнение Коши

$$H(u+t) = H(u)H(t). \quad (26)$$

На первый взгляд теорема 9 может показаться очевидной. Однако её доказательство требует определённой тщательности. (Нижеприведённое рассуждение следует работам: de Bruijn, 1966 и Ger, 1975. См. также: Jurkat, 1965 и упр. 12.)

Доказательство. Пусть $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию (25). Это означает, что

$$h(x+y) = h(x)h(y) \quad \text{при всех } (x, y) \in Z = \mathbb{R}^2 \setminus Z', \quad (27)$$

где множество $Z' \subset \mathbb{R}^2$ имеет лебегову меру 0. Как отмечено перед формулировкой теоремы 9, мы можем считать (исключив случай $h(x) = 0$ почти везде, $H(x) \equiv 0$), что область значений функции h содержится в $\mathbb{C}^*$. Пусть X' — множество всех таких $x \in \mathbb{R}$, что сечение

$$Z'_x = \{y \mid y \in \mathbb{R}, (x, y) \in Z'\} \quad (28)$$

не является множеством лебеговой меры 0. С учётом теоремы Фубини само X' имеет меру 0.

Для каждого $x \in \mathbb{R}$ выберем такое $i(x) \in \mathbb{R}$, что

$$i(x) \notin X', \quad (29)$$

$$x - i(x) \notin X'. \quad (30)$$

Это всегда возможно, поскольку $X' \cup (x - X')$ имеет меру нуль и заведомо не совпадает с $\mathbb{R}$. Положим $Y_x = Z'_{i(x)} \cup [-i(x) + Z'_{x-i(x)}]$. (Напомним, что $t \pm U := \{z \mid z = t \pm u, u \in U\}$.)

Лебегова мера множества Y_x равна нулю в силу выбора $i(x)$ (как следствие, $Y_x \neq \mathbb{R}$). Определим функцию $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$H(x) = \frac{h(x) + h(y)}{h(y)} \quad (y \notin Y_x), \quad (31)$$

где в качестве y можно взять любое вещественное число, не принадлежащее Y_x .

Покажем, что функция H не зависит от выбора y . Поскольку $y \notin Y_x$, то $y \notin -i(x) + Z'_{x-i(x)}$. При этом $(x - i(x), i(x) + y) \in Z = \mathbb{R}^2 \setminus Z'$, и в силу (27) получаем

$$\frac{h(x+y)}{h(y)} = \frac{h(x-i(x)+i(x)+y)}{h(y)} = \frac{h(x-i(x))h(i(x)+y)}{h(y)}.$$

Так как $y \notin Y_x$, то $y \notin Z'_{i(x)}$, откуда $(i(x), y) \in Z$. Следовательно,

$$\frac{h(x+y)}{h(y)} = \frac{h(x-i(x))h(i(x))h(y)}{h(y)} = h(x-i(x))h(i(x)).$$

Это выражение не зависит от y .

Теперь докажем, что H почти всюду совпадает с h . Для любого $x \notin X'$ можно выбрать y , не содержащееся в $Y_x \cup Z_{x'}$, поскольку это множество имеет меру 0. Тогда $(x, y) \in Z$ и

$$H(x) = \frac{h(x+y)}{h(y)} = \frac{h(x)h(y)}{h(y)} = h(x).$$

Таким образом, $H = h$ почти всюду, а именно при всех $x \notin X'$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 9, осталось показать, что H удовлетворяет уравнению (26) всюду. Мы сделаем это, применив подходящие сдвиги. Возьмём вещественные числа u, v и наложим ряд условий на вещественные числа x, y, z, t . Во-первых, пусть

$$x \notin Y_{u+v}. \quad (32)$$

Тогда

$$H(u+v) = \frac{h(u+v+x)}{h(x)}.$$

Далее, пусть

$$y \notin Y_v, \quad (33)$$

$$z \notin Y_u. \quad (34)$$

Тогда $H(v) = h(v+y)/h(y)$, $H(u) = h(u+z)/h(z)$. Положим $s = y - x$ и потребуем, чтобы выполнялось условие $s \notin Z'_x$, т. е.

$$y \notin x + Z'_x. \quad (35)$$

Положим теперь $t = z - v - x - s$, откуда следует $z - t = v + y$. Наложим условие $t \notin Z'_{v+y}$, что равносильно

$$z \notin v + y + Z'_{v+y}. \quad (36)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{H(u+v)}{H(u)H(v)} &= \frac{h(u+v+x)}{h(x)} \cdot \frac{h(y)}{h(v+y)} \cdot \frac{h(z)}{h(u+z)} = \\ &= \frac{h(u+v+x)}{h(x)} \cdot \frac{h(x)h(s)}{h(z)} \cdot h(t) \cdot \frac{h(z)}{h(u+z)} = \frac{h(u+v+x)h(s)h(t)}{h(u+z)}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $(s, t) \in Z$, т. е. $t \notin Z'_{-x+y}$, или

$$z \notin v + y + Z'_{-x+y}. \quad (37)$$

Пусть также $(u+v+x, s+t) \in Z$, т. е. $t \notin -y+x+Z'_{u+v+x}$, или

$$z \notin v + x + Z'_{u+v+x}. \quad (38)$$

Тогда

$$\frac{H(u+v)}{H(u)H(v)} = \frac{h(u+v+x)h(s+t)}{h(u+z)} = \frac{h(u+v+x+s+t)}{h(u+z)} = \frac{h(u+z)}{h(u+z)} = 1.$$

Таким образом, уравнение (26) выполнено, если только найдутся $x, y, z \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям (32) — (38). Прежде всего потребуем, чтобы множества, фигурирующие в этих семи условиях, имели лебегову меру 0. Это заведомо верно для (32) — (34). В случаях (35) — (38) соответственно приходим к условиям

$$x \notin X', \quad (39)$$

$$y \notin -v + X', \quad (40)$$

$$y \notin x + X', \quad (41)$$

$$x \notin -u - v + X'. \quad (42)$$

Искомое x существует, поскольку условия (32), (39) и (42) означают лишь, что x не принадлежит некоторому множеству меры нуль. Тогда по аналогичной причине можно выполнить и условия (33), (35), (40) и (41) для y , а также условия (34), (36), (37) и (38) для z . Теорема 9 доказана. ■

Разумеется, уравнение (26) для $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ уже было решено в § 5.1 (теорема 5.3). В нашем случае функция H должна вместе с h принадлежать классу $L^\infty(\mathbb{R})$, т. е. быть почти везде ограниченной и измеримой по Лебегу. Ввиду теоремы 5.4 либо

$$H(t) = e^{\lambda t} \quad \text{для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},$$

либо

$$H(t) = 0.$$

Последнее исключено, так как h не является почти везде нулём. Поскольку функция H почти везде ограничена на $\mathbb{R}$, то

$$\lambda = 2i\pi a \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Возвращаясь к нашему функционалу F на алгебре свёрток $L^1(\mathbb{R})$, получаем

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(2i\pi ax) dx.$$

Этот интеграл обычно обозначается $\hat{f}(a)$. Он называется *интегралом Фурье* от функции f в точке a .

Таким образом, каждый элемент F спектра алгебры свёрток $L^1(\mathbb{R})$ имеет вид

$$F(f) = \hat{f}(a)$$

для некоторого $a \in \mathbb{R}$.

Обратно, пусть дано $a \in \mathbb{R}$. Отображение $f \mapsto \hat{f}(a)$ из $L^1(\mathbb{R})$ в $\mathbb{C}$ корректно определено, причём

$$|\hat{f}(a)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Это отображение линейно. Используя двойной интеграл, легко доказать и его мультипликативность:

$$(f * g)(a) = \hat{f}(a)\hat{g}(a) \quad \text{при } f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Такое отображение определяет элемент спектра для $L^1(\mathbb{R})$, если только не является нулевым. Но если $f(x) = e^{-x^2}$, то

$$\hat{f}(a) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2}$$

(классический факт). При этом из $a_1 \neq a_2$ следует $\hat{f}(a_1) \neq \hat{f}(a_2)$.

Мы построили биекцию между спектром алгебры $L^1(\mathbb{R})$ и множеством всех вещественных чисел $\mathbb{R}$. Таким образом, доказана

Теорема 10. *Спектр алгебры свёрток $L^1(\mathbb{R})$ можно отождествить с множеством $\mathbb{R}$, поставив в соответствие каждому $a \in \mathbb{R}$ отображение*

$$f \mapsto \hat{f}(a). \quad \blacksquare$$

В доказательстве теоремы 10 мы использовали теорему 9. Обратно, при некоторых ограничениях теорема 9 следует из теоремы 10, см. упр. 14.

На спектре можно ввести некоторую естественную топологию (слабую звёздную топологию); полезно сопоставить её с обычной топологией на $\mathbb{R}$. Мы обнаружим, что они совпадают, причём соответствие $a \rightarrow \hat{f}(a)$ непрерывно. При этом преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f принадлежит алгебре $C_0(\mathbb{R})$ всех комплекснозначных непрерывных функций вещественного переменного x , стремящихся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Теорема 10 показывает, что соответствие $f \mapsto \hat{f}$ является гомоморфизмом алгебры $L^1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$. При этом в теории интеграла Фурье доказывается, что такое соответствие взаимно однозначно. Оно, однако, не сюръективно (Rudin, 1987, р. 185). Отметим, что теорема 10 принципиально важна для гармонического анализа и обобщается на любую локально компактную абелеву группу.

Теперь наделим группу $\mathbb{R}$ дискретной топологией $\mathbb{R}_d$, определим алгебру $L^1(\mathbb{R}_d)$, её спектр и отождествим его с $\mathbb{R}$ как в теореме 10. Тогда мы вернёмся к группе Бора для $\mathbb{R}$, которую получили другим способом в § 5.3. (См. также упр. 10.22.)

По поводу теоремы 9 полезно заметить следующее. Множество, на котором H совпадает с h , не имеет, к сожалению, простой связи с множеством $Z \subset \mathbb{R}^2$, где функция h аддитивна. Первое множество явно не обязано совпадать с $A(Z)$, т. е. H не всегда является продолжением или квазипродолжением для h относительно Z , которое действительно может и не существовать. Покажем это для уравнения

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{почти всюду} \quad (43)$$

(случай (25) аналогичен). Таким образом, уравнение выполняется для всех $(x, y) \in \in Z \subset \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}^2 \setminus Z$ имеет меру нуль. Как и в доказательстве теоремы 9, получаем, что существует функция $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению Коши

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}^2, \quad (44)$$

причём

$$F(x) = f(x) \quad \text{почти всюду}, \quad (45)$$

т. е. для всех $x \in Z_1$, где $\mathbb{R} \setminus Z_1$ имеет меру 0.

Однако Z_1 не обязательно содержит $A(Z)$. Приведём пример, в котором $A(Z) = \mathbb{R}$ и $Z_1 \neq \mathbb{R}$. Пусть (см. рис. 10)

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta'_1 \cup \Delta'_2 \cup \Delta''_1 \cup \Delta''_2,$$

где при $j = 1, 2$

$$\Delta_j = \{(x, y) \mid x = j\}, \quad \Delta'_j = \{(x, y) \mid y = j\},$$

$$\Delta''_j = \{(x, y) \mid x + y = j\}.$$

Положим

$$Z = (\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) \cup \{(1, 1)\}.$$

Очевидно, что лебегова мера множества $\mathbb{R}^2 \setminus Z$ равна нулю. Определим $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив

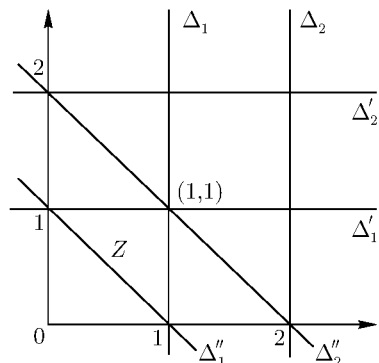


Рис. 10

$f(1) = 1$, $f(2) = 2$ и $f(x) = 0$ для остальных $x \in \mathbb{R}$. Эта функция Z -аддитивна ($f(1+1) = f(2) = 2 = 1+1 = f(1) + f(1)$), а для остальных $(x, y) \in Z$ мы имеем $f(x) = f(y) = f(x+y) = 0$. При этом $A(Z) = \mathbb{R}$ и f явно не аддитивна на $\mathbb{R}$ (пример, принадлежащий V. Zinde и Walsh, несколько изменённый; см.: Aczél, 1980c).

7.3. Согласованное распределение ресурсов

В завершение этой главы покажем, как можно применить условное уравнение Коши к проблеме рационального группового выбора.

Рассмотрим следующую задачу (Aczél–Wagner, 1981; Aczél–Kannappan–Ng–Wagner, 1981). Фиксированное количество σ денег или иного количественно измеримого ресурса нужно разделить между $m > 2$ конкурирующими проектами. Каждый из n экспертов даёт свои рекомендации (j -й эксперт предлагает предоставить i -му проекту сумму ξ_{ij}), и на этом основании определяется «согласованное» распределение

$$\phi_i(x_i) = \phi_i(\xi_{i1}, \dots, \xi_{in}) \quad (i = 1, \dots, m), \quad (46)$$

где $x_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{in})$. (Здесь удобно обозначать (вещественные) скалярные величины греческими буквами, а векторы — латинскими, с единственным исключением: вектор вида $(\sigma, \dots, \sigma)$ далее обозначается σ .) Мы предполагаем, что выполнено условие

$$\phi_i(0) = \phi_i(0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (47)$$

(«единогласие в отрицании»), а предлагаемые распределения, как и согласованное, неотрицательны и исчерпывают весь запас $\sigma \in \mathbb{R}$. Покажем, что тогда все ϕ равны одному и тому же взвешенному арифметическому среднему.

Запишем указанные условия в виде формул (и несколько ослабим эти условия). В дополнение к (47) мы предположим, что

$$\text{из } \sum_{i=1}^m \xi_{ij} = \sigma \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{следует} \quad \sum_{i=1}^m \phi_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in}) = \sigma, \quad (48)$$

что равносильно (напомним, что $x_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in})$) условию

$$\sum_{i=2}^m \phi_i(x_i) + \phi_1(\sigma - \sum_{i=2}^m x_i) = \sigma. \quad (49)$$

Фиксируем $m > 2$ и $\sigma > 0$. Окажется достаточным предположить неотрицательность на «полуокрестности» начала координат:

$$\phi_i(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [0, \rho]^n \quad (0 < \rho \leq \sigma; \rho \text{ фиксировано; } i = 1, \dots, m). \quad (50)$$

Теорема 11. *Функции $\phi_i : [0, \sigma]^n \rightarrow [0, \sigma]$ удовлетворяют условиям (47), (48) (или, равносильно, (49)), а также (50), если и только если существуют скалярные константы $\omega_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), такие что $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$ и*

$$\phi_i(x) = \phi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{j=1}^n \omega_j \xi_j \quad (i = 1, \dots, m; x \in [0, \sigma]^n). \quad (51)$$

(Напомним, что $m > 2$.)

Доказательство. Положив в (49) $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, получим с учётом (47):

$$\phi_i(\sigma) = \sigma \quad (i = 1, \dots, m) \quad (52)$$

(«единогласие при очевидном превосходстве»). Подставив в (49) $x_3 = \dots = x_m = 0$, с учётом (47) имеем

$$\phi_1(\sigma - x) = \sigma - \phi_2(x).$$

Положив в (49) $x_4 = \dots = x_m = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, с учётом предыдущего равенства и (47) получаем уравнение Пексидера:

$$\phi_2(x + y) = \phi_2(x) + \phi_3(y) \quad (x, y, x + y \in [0, \sigma]^n), \quad (53)$$

см. (4.30). Как и в § 4.3, положим здесь $x = 0$. Снова используя (47), получаем, что $\phi_2(y) = \phi_3(y)$ и вообще

$$\phi_1 = \dots = \phi_m =: \phi, \quad (54)$$

что сводит (53) к

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \text{при } x, y, x + y \in [0, \sigma]^n.$$

Мы получили уравнение (4.10) «в ограниченной области» (условное многоместное уравнение Коши). В силу теоремы 5 (и аналогично теореме 4) ϕ имеет аддитивное продолжение. При этом из сказанного после следствия 4.2 вытекает, что это продолжение (а значит, и ϕ) имеет вид

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j \xi_j.$$

Ввиду (50) и (52) имеем: $\omega_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$. С учётом (54) это даёт искомый результат,

поскольку функция (51) заведомо удовлетворяет всем нашим условиям. ■

При $m \leq 2$ существуют и другие решения, например (для $m = 2$):

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\xi_j - \frac{\sigma}{2} \right)^3 \right]^{1/3} + \frac{\sigma}{2},$$

где $\sigma = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)/n$.

Последующие результаты и упражнения

1. Приведите пример подмножества $Z \subset \mathbb{R}^2$, которое не является аддитивно квазирасширяемым.

2. Покажите на примере, что если $(0,0)$ лежит на границе множества Z , то возможно квазипродолжение, не являющееся продолжением.

3. Верно ли, что множество $Z = [1, 2]^2$ однозначно квазирасширяемо? Однозначно расширяемо?

4. Покажите, что существует подмножество в $\mathbb{R}^2$, которое (квази) расширяемо, но не единственным образом.

5. Приведите более простой, чем в конце § 2, пример открытого подмножества в $\mathbb{R}^2$, не являющегося квазирасширяемым.

6. (Chernoff, 1975.) Найдите все решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n \quad (x \in \mathbb{R}; \quad y \in \overline{\mathbb{R}}_+),$$

где n — натуральное число.

(В связи с упр. 7–10 см.: Dhombres, 1979, p. 3.13–3.22.)

7. Пусть G — абелева группа, $f : G \rightarrow G$. Найдите все решения уравнения

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(f(y)) \quad (x, y \in G).$$

(См. предложение 2.)

8. Опровергните или докажите, что все непрерывные решения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x + y - f(y)) = f(x) + f(y - f(y)) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

аддитивны.

9. Пусть G — абелева группа. Для каждого отображения $g : G \rightarrow G$ определим функцию $\mathcal{Z}$, положив $\mathcal{Z}(g) = h(G)$, где $h(x) = x - g(x)$. Опровергните или докажите, что функция $\mathcal{Z}$ не является аддитивно расширяемой.

10. Пусть H — замкнутая подгруппа абелевой топологической группы G , а $g : H \rightarrow H$ — непрерывная биекция. Докажите или опровергните равносильность следующих утверждений:

а) существует непрерывное отображение $f : G \rightarrow H$, такое что $f(x + z) - f(x) = g(z)$ при всех $x \in G, z \in H$;

б) отображение g аддитивно и допускает непрерывный подъём относительно H .

11. (Dhombres–Ger, 1978.) Докажите теорему 5.

12. Модифицировав доказательство теоремы 9, докажите следующий факт.

Пусть G — локально компактная группа, F — группа, отображение $h : G \rightarrow F$ таково, что $h(xy) = h(x)h(y)$ при $(x, y) \in Z$, где множество $(G \times G) \setminus Z$ имеет нулевую меру Хаара. Тогда существует гомоморфизм $H : G \rightarrow F$, совпадающий с h за исключением, быть может, множества с нулевой мерой Хаара.

13. Покажите, что из (22) и (23) следует (24) и даже равенство $\|F\| = 1$. Иными словами, каждый комплексный линейный мультипликативный функционал на $L^1(\mathbb{R})$, не равный тождественно нулю, имеет норму 1.

14. Дайте прямой вывод теоремы 9 из теоремы 10, предположив, что функция h ограничена почти всюду и измерима по Лебегу на $\mathbb{R}$. Покажите, что функция H непрерывна.

15*. (Weil, 1940, p. 48–52; Dhombres, 1979, p. 1.6–1.9.) Пусть E и F — подмножества положительной меры Лебега в $\mathbb{R}$, а f и g — их характеристические функции. Покажите, что свёртка

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy$$

непрерывна, не равна тождественно нулю (используйте биективность соответствия $f \mapsto \hat{f}$), причём её носитель содержится в $E + F$. Получите как следствие, что $E + F$ содержит непустой открытый интервал. С помощью этого результата дайте другое доказательство теоремы 2.6.

Глава 8

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДАЛАМБЕРА. ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕХАНИКЕ

В первой главе, посвящённой правилу параллелограмма в сложении векторов, мы встретились с функциональным уравнением Даламбера, ограниченным регулярным решением которого является косинус. Теперь мы найдём все непрерывные решения этого уравнения. В качестве применения рассмотрим сложение сил в неевклидовой геометрии и механике. В конце главы, используя технику гармонического анализа, мы охарактеризуем обобщения функции косинуса на более общие топологические группы.

Как мы обещали в гл. 1, определим теперь все непрерывные решения $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения Даламбера (1.6):

$$f(\phi + \psi) + f(\phi - \psi) = 2f(\phi)f(\psi) \quad (1)$$

(d'Alembert 1750, 1769; Cauchy, 1821) в области $\{(\phi, \psi) \mid 0 \leq \phi \leq \psi\}$. Такое ограничение связано с тем, что функция f определена лишь на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Разумеется, существует тривиальное решение

$$f(\phi) = 0 \quad \text{для всех } \phi \geq 0 \quad (2)$$

(первое равенство в (1.7)). Исключим его из рассмотрения до формулировки теоремы 1.

Положив $\psi = 0$ в (1), получаем

$$f(0) = 1. \quad (3)$$

Так как функция f предполагается непрерывной на $\overline{\mathbb{R}}_+$, то для некоторого $C > 0$

$$f(\phi) > 0 \quad \text{при каждом } \phi \in [0, C]. \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно два случая:

$$f(C) > 1 \quad (5)$$

и

$$f(C) \leq 1. \quad (6)$$

Эти случаи аналогичны, хотя (6) немного труднее. Случай (5) приводит к непрерывному решению

$$f(\phi) = \cosh(c\phi) \quad (\phi \in \overline{\mathbb{R}}_+), \quad (7)$$

(второе равенство в (1.7)), где $c \neq 0$, а случай (6) — к непрерывному решению

$$f(\phi) = \cos(c\phi) \quad (\phi \in \overline{\mathbb{R}}_+) \quad (8)$$

(третье равенство в (1.7)). Разберём подробно случай (6).

Ввиду (4) и (6) существует такой угол $\alpha \in [0, \pi/2[$, что

$$\cos \alpha = f(C). \quad (9)$$

Положив $\psi = \phi = x/2$ и учитывая (3), получаем из (1):

$$f(x) + 1 = 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2. \quad (10)$$

Положим $x = C$ и используем (9):

$$f\left(\frac{C}{2}\right) = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 + f(C)}{2}\right)^{1/2} = \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Поскольку $\alpha \in [0, \pi/2[$ и выполнено (4), то оба крайних выражения в (11) положительны, и поэтому следует брать лишь положительные квадратные корни. По индукции из (4), (9), (10) и (11) следует, что

$$f\left(\frac{C}{2^n}\right) = \cos \frac{\alpha}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Подставим в (1) выражения

$$\phi = m \frac{C}{2^n}, \quad \psi = \frac{C}{2^n}$$

(m — натуральное число):

$$f\left(\frac{m+1}{2^n} C\right) + f\left(\frac{m-1}{2^n} C\right) = 2f\left(\frac{m}{2^n} C\right) f\left(\frac{1}{2^n} C\right). \quad (13)$$

Докажем индукцией по k , что

$$f\left(\frac{k}{2^n} C\right) = \cos \frac{k}{2^n} \alpha \quad \text{при } k = 0, 1, 2, \dots \text{ и } n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Действительно, равенство (14) верно при $k = 0$ и $k = 1$ в силу (3) и (12). Пусть оно выполнено при $k = m - 1$ и $k = m$. Тогда, ввиду (13),

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m+1}{2^n} C\right) &= 2f\left(\frac{m}{2^n} C\right) f\left(\frac{1}{2^n} C\right) - f\left(\frac{m-1}{2^n} C\right) = \\ &= 2 \cos\left(\frac{m}{2^n} \alpha\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - \cos\left(\frac{m-1}{2^n} \alpha\right) = \cos\left(\frac{m+1}{2^n} \alpha\right), \end{aligned}$$

и (14) доказано: для всех неотрицательных двоичных дробей δ (т.е. дробей вида $\delta = m/2^n$, где m и n — неотрицательные целые) выполняется равенство

$$f(\delta C) = \cos \delta \alpha. \quad (15)$$

Подставив в (15) последовательность двоичных дробей, сходящуюся к (произвольному) положительному числу x , получаем в силу непрерывности функции f и косинуса, что $f(Cx) = \cos \alpha x$; положив $c = \alpha/C$, $Cx = \phi$, видим, что $f(\phi) = \cos c\phi$ для всех $\phi \geq 0$, т.е. (8) выполнено. В случае (5) аналогично приходим к (7). Обратно, для функций (7) и (8) выполнено (1). Доказана

Теорема 1. *Общее непрерывное решение $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения Даламбера (1) имеет вид (2), (7) или (8), где c — произвольная вещественная¹⁾ константа. ■*

Разумеется, то же рассуждение пригодно в случае, когда (см. гл. 1) наложены условия $0 \leq \phi/4$ в (1) и $\phi \leq \pi/2$ в (2), (7) и (8).

Сходным (и даже более простым) методом можно было бы найти все непрерывные решения уравнений Коши (например, (1.2)). С другой стороны, этот метод позволяет

¹⁾ Знак c не существен, так как $\cosh$ и $\cos$ чётны.

установить, что уравнение Даламбера для $\phi \in \mathbb{R}$ без ограничения $0 \leq \psi \leq \phi$ имеет те же непрерывные решения (2), (7) и (8). В гл. 13 мы найдём общие решения этого уравнения при более слабых условиях (для более широких классов функций).

Доказав теорему 1, мы закрыли последний пробел в аксиоматическом описании сложения векторов (см. гл. 1). В свою очередь, это позволяет применить уравнение Даламбера в неевклидовой геометрии и механике ¹⁾.

В неевклидовой геометрии векторы (силы) не допускают произвольных параллельных переносов, хотя их можно переносить вдоль прямых линий. Поэтому можно применять без изменений результаты гл. 1, относящиеся к векторам равной длины ²⁾, но не к произвольным перпендикулярным векторам. Всё же и в неевклидовой геометрии компонента вектора $\mathbf{p}$, образующая угол $\alpha (< \pi/2)$ с самим вектором, имеет длину

$$|\mathbf{p}| \cos \alpha \quad (16)$$

(где $|\mathbf{p}|$ — длина вектора $\mathbf{p}$), что в евклидовом случае по существу равносильно правилу параллелограмма для ортогональных векторов. О вопросах, рассмотренных ниже, см.: Picard, 1922a, 1928, p. 11–17; Aczél, 1066с, p. 125–128.

Пусть $\mathbf{r}$ — результат сложения (композиции) векторов единичной длины $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, перпендикулярных прямой $\bar{A}\bar{A}$ в точках A и $\bar{A}$. По симметрии (см. (i) в гл. 1) вектор $\mathbf{r}$ перпендикулярен $\bar{A}\bar{A}$ в точке C , находящейся посередине между A и $\bar{A}$ (рис. 11).

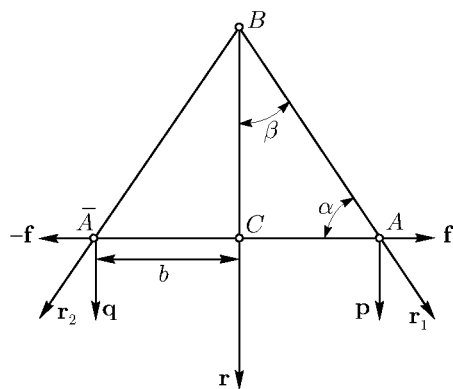


Рис. 11

Эта ситуация не изменится, если добавить в точках A и $\bar{A}$ равные по величине и противоположно направленные силы $\mathbf{f}$ и $-\mathbf{f}$, лежащие на прямой $\bar{A}\bar{A}$. Пусть $\mathbf{r}_1$ (сумма векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{p}$) и $\mathbf{r}_2$ (сумма векторов $-\mathbf{f}$ и $\mathbf{q}$) образуют с лучом $\bar{A}\bar{A}$ углы $-\alpha$ и $-(\pi - \alpha)$ соответственно. Пусть, далее, β — половина угла между $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а $\mathbf{r}$ — сумма этих векторов. Таким образом (здесь $+$ обозначает сложение векторов):

$$\mathbf{p} + \mathbf{f} = \mathbf{r}_1, \quad -\mathbf{f} + \mathbf{q} = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r},$$

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1, \quad |\mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_2|,$$

$$\angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{f}) = \alpha = \angle(-\mathbf{f}, \mathbf{r}_2), \quad \angle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2\beta.$$

Теперь из результатов гл. 1 о сумме векторов равной длины с учётом (16) вытекает, что

$$1 = |\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = |\mathbf{r}_1| \sin \alpha = |\mathbf{r}_2| \sin \alpha,$$

$$|\mathbf{p} + \mathbf{q}| = |(\mathbf{p} + \mathbf{f}) + (-\mathbf{f} + \mathbf{q})| = |\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}| = 2|\mathbf{r}_1| \cos \beta = 2 \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}. \quad (17)$$

Пусть $|\bar{A}\bar{A}|$ обозначает длину отрезка $\bar{A}\bar{A}$ и т. д. Поскольку $\mathbf{r}$ полностью определяется величиной $|\bar{A}\bar{A}| = 2|CA| = 2b$, отношение $\cos \beta / \sin \alpha$ зависит только от b . Эта зависимость непрерывна:

$$f(b) := \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}. \quad (18)$$

¹⁾ Далее рассматривается операция над векторами, подчинённая условиям (i)–(iv) из теоремы 1.1.

²⁾ Поскольку здесь не использовался параллельный перенос.

Таким образом, для векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ равной длины, приложенных в точках A и $\bar{A}$, $\mathbf{r}$ имеет длину

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{p} + \mathbf{q}| = 2f(b). \quad (19)$$

Теперь пусть в точках $\bar{A}'$ и A' прямой $\bar{A}A$, для которых $|\bar{A}'C| = |CA'| = = b' > b$, приложены единичные векторы $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{q}'$, перпендикулярные $\bar{A}A$ (рис. 12).

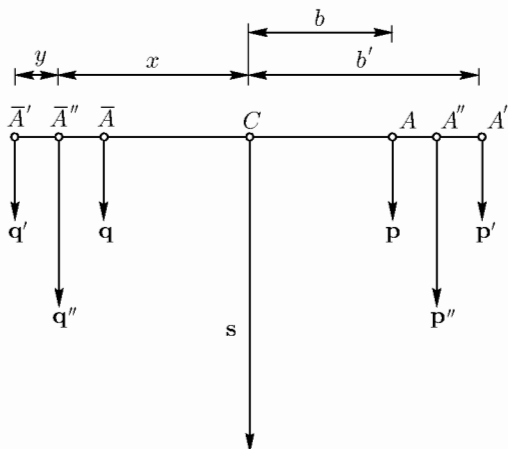


Рис. 12

Пусть $\mathbf{r}'$, $\mathbf{p}''$, $\mathbf{q}''$, $\mathbf{s}$ — результаты композиции $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$, $\mathbf{p}''$ и $\mathbf{q}''$ с точками приложения C , A'' , $\bar{A}''$, C соответственно. С учётом (19) имеем

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{p}' + \mathbf{q}' = \mathbf{r}', \quad |\mathbf{r}| = 2f(b), \quad |\mathbf{r}'| = 2f(b'), \quad |\mathbf{r} + \mathbf{r}'| = 2f(b) + 2f'(b),$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = \mathbf{p}'', \quad \mathbf{q} + \mathbf{q}' = \mathbf{q}'', \quad |\mathbf{p}''| = |\mathbf{q}''| = 2f(y), \quad |\mathbf{s}| = |\mathbf{p}'' + \mathbf{q}''| = 4f(y)f(x),$$

где

$$y = |AA''| = |A''A'| = |\bar{A}'\bar{A}''| = |\bar{A}''\bar{A}| = \frac{b' - b}{2}, \quad x = |CA''| = |\bar{A}''C| = \frac{b' + b}{2},$$

откуда получаем

$$|\mathbf{s}| = |(\mathbf{p} + \mathbf{p}') + (\mathbf{q} + \mathbf{q}')| = |\mathbf{p}'' + \mathbf{q}''| = 4f(x)f(y).$$

С другой стороны,

$$|\mathbf{s}| = |(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + (\mathbf{p}' + \mathbf{q}')| = |\mathbf{r} + \mathbf{r}'| = 2f(x - y) + 2f(x + y).$$

(Как и в гл. 1, мы использовали тождество бисимметрии $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + (\mathbf{p}' + \mathbf{q}') = = (\mathbf{p} + \mathbf{p}') + (\mathbf{q} + \mathbf{q}')$.)

Мы получили уравнение Даламбера

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \quad (0 \leq y \leq x).$$

Функция f непрерывна. Тождество $f(x) \equiv 0$ противоречило бы (18); в силу теоремы 1

$$f(x) \begin{cases} = \cosh(x/d) \\ \text{или} & = 1 \\ \text{или} & = \cos(x/d) \end{cases}$$

($d \neq 0$). Поэтому (см. (18) и рис. 11)

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \begin{cases} & = \cosh(b/d) \\ \text{или} & = 1 \\ \text{или} & = \cos(b/d). \end{cases} \quad (20)$$

В действительности это основные тригонометрические формулы в гиперболической, евклидовой и эллиптической геометрии соответственно.

Рассмотрим гиперболический случай. Если точка B на рис. 11 удаляется в бесконечность, то $\beta \rightarrow 0$, и $\alpha = \Pi(b)$ становится «углом параллельности», соответствующим b . В этом случае (20) приводит к другим важнейшим формулам гиперболической геометрии:

$$\frac{1}{\sin \Pi(b)} = \cosh \frac{b}{d}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(b) = e^{b/d}.$$

Кроме того, в гиперболическом случае из (20) при $b \neq 0$ следует

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \beta > \sin \alpha, \quad \frac{\pi}{2} - \beta > \alpha, \quad \alpha + \beta < \frac{\pi}{2},$$

т. е. сумма углов прямоугольного треугольника меньше π . Разбив произвольный треугольник на два прямоугольных, мы видим, что это выполнено для любого треугольника — ещё одна существенная характеристика гиперболической геометрии.

В завершение этой главы рассмотрим уравнение Даламбера в более широком контексте абстрактного гармонического анализа. Нам потребуются некоторые важнейшие факты из этой теории. В § 5.3 (см. (5.26), (5.27)) мы уже использовали характеры на $\mathbb{R}$. В общем случае характером на топологической абелевой группе G называется функция $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$, такая что

$$|\chi(x)| = 1, \quad (21)$$

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) \quad \text{при всех } x, y \in G. \quad (22)$$

В силу теоремы 5.4 все непрерывные характеры на $\mathbb{R}$ имеют вид e^{icx} , где c — вещественная константа. Вещественнозначные ограниченные непрерывные ненулевые решения уравнения Даламбера на $\mathbb{R}$ — это в точности вещественные части непрерывных характеров (см. теорему 1). Данный результат поддается обобщению.

Теорема 2. Пусть G — связная локально компактная абелева группа. Функция $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ является вещественной частью непрерывного характера на G , если и только если f непрерывна, не является тождественным нулём, ограничена и удовлетворяет уравнению Даламбера

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \text{при всех } x, y \in G. \quad (23)$$

(Используя меру Хаара, здесь можно снять условие регулярности (непрерывности), и результат не изменится, см. гл. 14.)

Доказательство. Пусть χ — непрерывный характер на G . В силу (21) $\chi \neq 0$, и ввиду (22) $\chi(0) = 1$. Из (21) следует ограниченность функции χ , а в силу (22) $\chi(-y) = \overline{\chi(y)}$. Значит, если мы положим $f(x) = \operatorname{Re} \chi(x)$, то $f(x) \neq 0$ и выполнены равенства

$$f(x+y) = f(x)f(y) - (\operatorname{Im} \chi(x))(\operatorname{Im} \chi(y))$$

¹⁾ При $d < 0$; иначе $e^{-b/d}$.

и

$$f(x-y) = f(x)f(-y) - (\operatorname{Im} \chi(x))(\operatorname{Im} \bar{\chi}(y)) = f(x)f(y) + (\operatorname{Im} \chi(x))(\operatorname{Im} \chi(y)).$$

Поэтому f удовлетворяет уравнению (23).

Обратно, пусть для ограниченной непрерывной ненулевой функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено (23). Положив $y = 0$, получим $f(0) = 1$. Можно считать $f \not\equiv 1$ (иначе теорема тривиальна). Следуя методу из работы О'Сонног, 1977b, вначале покажем, что функция f по абсолютной величине ограничена единицей, имеет хотя бы один нуль и положительно определена на G .

Допустим, напротив, что при некотором $x_0 \in G$ верно, что $|f(x_0)| = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$. По индукции докажем, что $|f(2^n x_0)| > 1 + 2^n \alpha$ ($n = 1, 2, \dots$). В силу (23) имеем $f(2x_0) = 2f(x_0)^2 - 1$, поэтому $f(2x_0) = 2(1 + \alpha)^2 - 1 > 1 + 2\alpha$, так что утверждение выполнено для $n = 1$. Если оно верно для $n - 1$, то

$$f(2^n x_0) = 2|f(2^{n-1} x_0)|^2 - 1 > 2(1 + 2^{n-1} \alpha)^2 - 1 > 1 + 2^n \alpha,$$

что и требовалось. Но полученный факт противоречит ограниченности функции f . Поэтому $|f(x)| \leq 1$ при всех $x \in G$.

Поскольку $f \not\equiv 1$, то существует такое y_0 , что $f(y_0) = \beta < 1$. Найдётся натуральное n , для которого $\beta < \cos(\pi/2^n) < 1$. Поскольку $f(0) = 1$, функция f непрерывна, а группа G связна, то найдётся $z_0 \in G$, для которого $f(z_0) = \cos(\pi/2^n)$. Из (23) получаем аналогично (10):

$$f(2z_0) = 2f(z_0)^2 - 1 = \cos \frac{\pi}{2^{n-1}}.$$

Точно так же

$$f(2^2 z_0) = \cos \frac{\pi}{2^{n-2}}$$

и т. д.; в итоге имеем

$$f(2^n z_0) = \cos \pi = -1.$$

Так как $f(0) = 1$ и функция f непрерывна, то существует $t_0 \in G$, для которого $f(t_0) = 0$. Положив $g(x_0) = f(t_0 - x)$, получаем из (23):

$$2g(x)g(y) = f(2t_0 - x - y) + f(y - x).$$

Заменив в (23) x на $t_0 - x$ и y на t_0 , имеем $f(2t_0 - x) = -f(x)$ для всех x . Кроме того, положив в (23) $x = 0$, мы выводим из $f(0) = 1$, что функция f чётна:

$$f(y) + f(-y) = 2f(y), \quad \text{и потому} \quad f(-y) = f(y).$$

Отсюда

$$2g(x)g(y) = -f(x+y) + f(y-x),$$

$$2g(x)g(y) + 2f(x)f(y) = f(y-x) + f(x-y) = 2f(x-y),$$

т. е. получена формула для $f(x-y)$. С её помощью покажем, что функция f положительно определена. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — комплексные числа, $x_1, \dots, x_n \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_k f(x_i - x_k) &= \left(\sum_{i=1}^n g(x_i) z_i \right) \left(\sum_{k=1}^n g(x_k) \bar{z}_k \right) + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) z_i \right) \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) \bar{z}_k \right) = \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) z_i \right|^2 + \left| \sum_{i=1}^n g(x_i) z_i \right|^2. \end{aligned}$$

Правая часть неотрицательна, поэтому такова же и левая часть, т. е. f положительно определена. Известная теорема С. Бохнера (см. упр. 10.18) утверждает, что для любой непрерывной положительно определённой функции на локально компактной абелевой группе существует единственная неотрицательная ограниченная мера Радона μ на двойственной топологической группе $G^\wedge$, такая что для всех $x \in G$

$$f(x) = \int_{G^\wedge} \chi(x) d\mu(\chi), \quad (24)$$

т. е. f является преобразованием Фурье для μ .

В качестве примера, не требующего знания гармонического анализа, рассмотрим (24) в случае $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Тогда $G^\wedge = \mathbb{Z}$ и $\chi(x) = e^{inx}$ для некоторого целого n . В этом случае (24) переходит в

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(n) e^{inx},$$

где $\mu(n) \geq 0$ и сумма $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(n)$ конечна (и равна 1, так как $f(0) = 1$).

Теперь запишем функциональное уравнение (23) относительно μ . Как показано в работе О'Сонног 1977b, прямое применение формулы (24) (и случая равенства в неравенстве Коши–Буняковского–Шварца) приводит к теореме 2 в случае сепарабельности группы G . Чтобы не предполагать сепарабельности, поступим следующим образом. Запишем (23) в виде

$$2 \left(\int_{G^\wedge} \chi(x) d\mu(\chi) \right) \left(\int_{G^\wedge} \chi'(y) d\mu(\chi') \right) = \int_{G^\wedge} \chi(x) \chi(y) d\mu(\chi) + \int_{G^\wedge} \chi(x) \overline{\chi(y)} d\mu(\chi),$$

откуда

$$\int_{G^\wedge} \chi(x) \left[\int_{G^\wedge} \chi'(y) d\mu(\chi') - \frac{\chi(y) + \overline{\chi(y)}}{2} \right] d\mu(\chi) = 0. \quad (25)$$

Выражение в квадратных скобках обозначим $F(\chi)$, считая y параметром. Тогда функция F непрерывна на $G^\wedge$, и (25) означает, что преобразование Фурье от $F \cdot \mu$ тождественно равно нулю на G . Но преобразование Фурье взаимно однозначно на ограниченных мерах Радона. Поэтому

$$f(y) = \int_{G^\wedge} \chi'(y) d\mu(\chi') = \frac{\chi(y) + \overline{\chi(y)}}{2} \quad (\text{почти всюду относительно } \chi \text{ по мере } \mu).$$

Здесь левая часть не зависит от χ . Поэтому для каждого данного $y \in G$ величина $\operatorname{Re} \chi(y) = (\chi(y) + \overline{\chi(y)})/2$ постоянна на носителе меры μ . Если $\chi \neq \chi'$, $\overline{\chi}'$, то существует $y \in G$, для которого $\operatorname{Re} \chi(y) \neq \operatorname{Re} \chi'(y)$. Значит, носитель меры μ сводится самое большее к двум точкам: некоторому характеру χ_0 и сопряжённому с ним. Иными словами, $\mu = a\chi_0 + b\overline{\chi}_0$ ($a, b \in \mathbb{C}$). Но мера μ неотрицательна, поэтому $a, b \geq 0$. Значит,

$$f(x) = (a+b)\operatorname{Re} \chi_0(x) + i(a-b)\operatorname{Im} \chi_0(x).$$

Так как функция f по условию вещественна, то $a = b$. Поскольку $f(0) = 1$, то $a + b = 1$, откуда

$$f(x) = \operatorname{Re} \chi(x_0).$$

Теорема 2 доказана. ■

В гл. 13 мы вернёмся к вещественно- и комплекснозначным решениям уравнения (23) на группе, но уже без условий регулярности.

Последующие результаты и упражнения

1. Найдите все непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

методом, применённым в доказательстве теоремы 1.

2. То же для уравнения Лобачевского

$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

3. Найдите все непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

4. Найдите все непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ функционального уравнения

$$f(x+y) - f(x-y) = 4(f(x)f(y))^{1/2} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

5. Найдите все непрерывные решения $f: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$(f(x))^2 + (f(y))^2 = f(x+y)f(x-y) + 1 \quad (0 \leq y \leq x).$$

Определите все непрерывные решения $f: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

(В связи с упр. 6–8 см.: Corovei, 1976.)

6. Пусть G — абелева группа, F — ассоциативное тело, отображение $f: G \rightarrow F$ удовлетворяет уравнению

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y) \quad (26)$$

для всех $x \in G$, $y \in S$, где S — подполугруппа в G , причём $G = SS^{-1}$. Покажите, что (26) выполнено при всех $x \in G$, $y \in G$.

7. То же, но при условии, что (26) выполнено при всех $x \in S$, $y \in G$.

8*. Пусть теперь G — группа (не обязательно абелева), S — её подполугруппа, причём $G = SS^{-1}S$, F — тело. Далее, пусть отображение $f: G \rightarrow F$ удовлетворяет уравнению (26) при $x \in S$, $y \in SS^{-1}$, а также условию $f(xyz) = f(xzy)$ при всех $x, y, z \in G$. Покажите, что (26) выполнено на всей группе G .

9. (Ljubenova, 1981.) Докажите теорему 2 для произвольной абелевой топологической группы (не обязательно связной и локально компактной) путём прямого вычисления, положив для некоторого $x_0 \in G$ с условием $|f(x_0)| < 1$:

$$g(x) = \frac{1}{2} [f(x - x_0) - f(x + x_0)] / (1 - f(x_0)^2)^{1/2}$$

и $\chi(x) = f(x) + ig(x)$.

10. Докажите теорему 2, непосредственно применив неравенство Коши–Буняковского–Шварца к (24) в случае $G = \mathbb{R}^2$.

11. Пусть G — абелева топологическая группа. Докажите, что каждое ограниченное решение $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (22), не равное тождественно 0, является характером для G .

12. Найдите все непрерывные характеры для $\mathbb{R}^n$.

13. Найдите все непрерывные решения $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения Даламбера

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

14. Найдите все непрерывные характеры топологической группы $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

15. Найдите все характеры группы $\mathbb{Z}$. Сравните с результатом упр. 14.

16. Пусть n — целое число, $n > 1$. Рассмотрим конечную циклическую группу $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Определим (см. § 5.3, 10.5) бинарную операцию $*$ на множестве $\mathbb{Z}_n^\wedge$ всех характеров группы $\mathbb{Z}_n$, положив

$$\chi_1 * \chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x) \quad (x \in \mathbb{Z}_n).$$

Опровергните или докажите, что группы $(\mathbb{Z}_n^\wedge, *)$ и $\mathbb{Z}_n$ изоморфны.

17*. Пусть $(G, +)$ — конечная абелева группа, группа $(G^\wedge, *)$ двойственна к ней, т. е. $G^\wedge$ — множество всех характеров для G , наделённое бинарной операцией $*$ следующего вида:

$$\chi_1 * \chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x) \quad (x \in G).$$

Опровергните или докажите, что группы $(G^\wedge, *)$ и $(G, +)$ изоморфны.

18. Покажите, что в топологической группе G любой непрерывный характер плотной подгруппы единственным образом продолжается до непрерывного характера всей группы.

19*. (Dixmier, 1957.) Пусть $(G, +)$ — локально компактная абелева группа, а $G^\wedge$, как обычно, — множество всех её непрерывных характеров. Определим на $G^\wedge$ следующую бинарную операцию $*$ (см. упр. 16, 17 и § 5.3, 10.5):

$$\chi_1 * \chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x).$$

Далее, пусть C — множество всех непрерывных решений $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Формула $\chi(x) = \exp(if(x))$ определяет отображение из C в $G^\wedge$. Покажите, что это отображение сюръективно, если и только если $G^\wedge$ является объединением однопараметрических подгрупп (т. е. образов непрерывных гомоморфизмов множества $\mathbb{R}$).

20. Найдите все непрерывные характеры топологической группы $\mathbb{Q}$ (т. е. множества рациональных чисел с топологией подпространства в $\mathbb{R}$ и с операцией сложения).

(В связи с упр. 21–22 см., например: Hewitt–Ross, 1963, p. 401–405, 414–415.)

21*. Найдите все характеры группы $\mathbb{Q}$.

22*. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — рациональные числа. Покажите, что для каждого характера Φ группы $\mathbb{Q}$ существует непрерывный характер χ (см. упр. 20), такой что

$$\chi(x_i) = \Phi(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

23. Пусть G — абелева группа, S — её подполугруппа, причём $G = SS^{-1}$. Далее, пусть F — тело характеристики, отличной от 2, и отображение $f : G \rightarrow F$ не является нулевым. Докажите, что если существует отображение $g : S \rightarrow F$, для которого

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)g(y) \quad (x \in G, y \in S),$$

то существует его продолжение $h : G \rightarrow F$, такое что

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)h(y) \quad (x \in G, y \in G).$$

Глава 9

ОБРАЗЫ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И К АДДИТИВНЫМ ФУНКЦИЯМ, ОГРАНИЧЕННЫМ НА ОПРЕДЕЛЁННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Эта глава делится на две части. В первой из них мы решаем хроногеометрическую задачу, которая возникает в теории относительности и приводит к функциональному уравнению, формально похожему на уравнение Коши, но с тем отличием, что в нём переменное взаимодействует с подмножествами. Во второй части мы также имеем дело с подмножествами и доказываем теорему, которая служит обращением важного результата о регулярности из гл. 2, а именно: аддитивная вещественнозначная функция, ограниченная сверху на множестве положительной лебеговой меры в $\mathbb{R}$, обязательно непрерывна.

9.1. Уравнения, содержащие образы множеств, и их связь с хроногеометрией

До сих пор мы рассматривали функции, определённые на множестве вещественных или комплексных чисел либо, в более общем случае, на группах, моноидах или группоидах (см. также гл. 15, 18, 19). Представляют интерес и многие функции, действующие на некотором семействе F подмножеств данного множества E . Например, нас могут интересовать такие функции $f : F \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых непересекающихся множеств $X, Y \in F$ выполнено условие

$$f(X \cup Y) = f(X) + f(Y).$$

Как обычно, здесь нужны некоторые условия регулярности, чтобы избавиться от неподходящих решений. Описание всех регулярных функций f , удовлетворяющих этому уравнению (которое можно рассматривать и как условное функциональное уравнение), составляет предмет *теории меры*.

Мы встретимся и с другими функциональными уравнениями, где подмножества в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{R}^n$ взаимодействуют с вещественными числами.

Напомним некоторые обозначения. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначение $E + x$ относится к сдвигу множества E , состоящему из всех элементов вида $y + x$, где y пробегает E . Множество $x - E$ состоит из всех элементов вида $x - y$, где y пробегает E . Как и выше, если $S \subset \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, то образ множества S обозначается $f(S)$. Мы будем иметь дело с отображениями из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, но рассматривать уравнения, содержащие образы множеств при этих отображениях.

Мы хотим изучить функции f , которые удовлетворяют уравнению

$$f(E + x) = f(E) + f(x), \quad (1)$$

где $E \subset \mathbb{R}^n$, а x принадлежит заданному подмножеству в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) содержит множества. «Обычные» уравнения часто бывает полезно рассматривать как совокуп-

ность двух неравенств противоположного знака. Здесь мы также будем использовать включения

$$f(E + x) \subset f(E) + f(x) \quad (2)$$

и

$$f(E + x) \supset f(E) + f(x). \quad (3)$$

Сначала возьмём в качестве E непустой открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) с вершиной в нуле (при этом $0 \notin E$). Напомним, что *конус* (с вершиной в нуле) — это множество C , обладающее тем свойством, что из $x \in C$ вытекает $\lambda x \in C$ для всех $\lambda > 0$. (Множество C *выпукло*, если из $x, y \in C$ следует $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$. *Луч*, порождённый элементом $x \in C$ ($x \neq 0$), — это множество всех элементов вида λx ($\lambda \in \mathbb{R}_+$).

Будем считать, что функция f определена только на E , а (1) выполняется для всех $x \in E$.

Полезно напомнить, что выпуклый конус E (где $0 \notin E$) порождает на $\mathbb{R}^n$ частичный (и строгий) порядок $\succ$:

$$x \succ y, \quad \text{если и только если } x - y \in E.$$

Отображение $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ *сохраняет порядок*, если

$$x \succ y \Leftrightarrow f(x) > f(y),$$

и *обращает порядок*, если

$$x \succ y \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Наш первый результат сводит случай $n > 1$ к случаю $n = 1$.

Предложение 1. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, не равная тождественно нулю функция, определённая на открытом непустом выпуклом конусе $E \subset \mathbb{R}^n$ с вершиной $0 \notin E$. Пусть при этом для некоторого $x \in E$ множество $f(E + x)$ не совпадает с $\mathbb{R}$ и для всех $x \in E$ выполнено уравнение (1). Тогда f :

- a) сохраняет или обращает порядок,
- b) для любого луча $\mathcal{E}$ в E удовлетворяет уравнению

$$f(\mathcal{E} + x) = f(\mathcal{E}) + f(x) \quad \text{при всех } x \in E. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $F = f(E)$. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ связно, так как функция f непрерывна, а множество E выпукло и потому связно. Заметим также, что E — подполугруппа в $\mathbb{R}$ (по сложению). Действительно, при $x, x' \in E$ из уравнения (1) (фактически из включения (3)) следует, что $f(x) + f(x') \in f(E + x)$. Но $E + x \subset E$, поскольку E — выпуклый конус и $x \in E$. (Из $x, y \in E$ следует $(x + y)/2 \in E$, а тогда и $x + y = 2(x + y)/2 \in E$.) Значит, $f(E + x) \subset f(E) = F$, и потому $F + F \subset F$. Как следствие, $ny \in F$ при всех натуральных n и всех $y \in F$. Так как $f \neq 0$, то $F \neq \{0\}$. Следовательно, множество F не ограничено.

Покажем, что F ограничено с одной стороны. В противном случае, будучи связным, оно совпадает с $\mathbb{R}$. Тогда из уравнения (1) следует, что

$$f(E + x) = F + f(x) = \mathbb{R} \quad \text{при всех } x \in E, \quad (5)$$

вопреки предположению.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда F ограничено с одной стороны и не ограничено с другой. Уравнение (1) не меняется при замене f на $-f$, поэтому без потери общности можно считать F ограниченным снизу и не ограниченным сверху. Положим $a = \inf F$. Ясно, что $a \geq 0$: если бы существовало $x_0 \in E$, для которого

$f(x_0) < 0$, то при любом натуральном n было бы $nf(x_0) \in F$, что противоречит ограниченности F снизу.

Предположим, что $a > 0$. Тогда существует $x_0 \in E$, для которого $f(x_0) < 2a$. Если $x_1 \prec x_0$, то $f(x_0) \in f(x_1 + E)$. Значит,

$$\inf f(x_1 + E) < 2a. \quad (6)$$

Но ввиду (1) $\inf f(x_1 + E) = f(x_1) + \inf F \geq 2a$, что противоречит неравенству (6). Значит, $a = 0$.

Пусть $x, x' \in E, x \succ x'$. Тогда $x \in x' + E$ и (см. (2)) $f(x) \in f(x' + E) \subset f(x') + F$, или $f(x) - f(x') \in F$. Чтобы доказать, что f сохраняет порядок, достаточно установить включение $F \subset \mathbb{R}_+$. Но множество F связно, не ограничено сверху и $\inf F = a = 0$. Поэтому либо $F = \mathbb{R}_+$, либо $F = \overline{\mathbb{R}}_+$.

Покажем, что $F = \mathbb{R}_+$. Для этого докажем, что множество нулей функции f пусто: $\ker f = \emptyset$. Пусть $x \in \ker f$. Ввиду (1) имеем $f(E + x) = F$, так что существует $y \in E + x \subset E$, для которого $f(y) = 0$. Для любого $z \in E \cap (y - E)$ верно, что $f(z) \leq f(y) = 0$ ¹⁾. Поскольку $f(z) \in \overline{\mathbb{R}}_+$, то $f(z) = 0$. Множество $E \cap (y - E)$ открыто, содержит точку x и содержится в $\ker f$. Поскольку x — произвольный элемент множества $\ker f$, то это множество открыто. Оно также замкнуто, так как функция f непрерывна. Поскольку E связно, то либо $\ker f = E$, что невозможно (по условию f не является тождественным нулём), либо $\ker f = \emptyset$, как и утверждалось.

Мы доказали, что $F = \mathbb{R}_+$, функция f сохраняет порядок и поэтому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in E}} f(x) = 0.$$

Пусть $\mathcal{E}$ — луч в E , порождённый элементом $x \in E$. Докажем от противного, что множество $f(\mathcal{E})$ не ограничено сверху. Допустим, что $b \geq f(\lambda x)$ при всех $\lambda > 0$. Для любого $y \in E$ множество $(E + y) \cap \mathcal{E}$ непусто: достаточно рассмотреть плоскость, которую порождают $\mathcal{E}$ и y . Пусть $z \in (E + y) \cap \mathcal{E}$. Так как f сохраняет порядок, то

$$f(y) < f(z) \leq b.$$

Поскольку y — произвольный элемент из E , то $\sup F \leq b$. Но мы уже доказали, что $\sup F = \infty$.

Пусть теперь $0 < \lambda_0 < \lambda_1$. Тогда $\lambda_0 x \prec \lambda_1 x$, откуда $f(\lambda_0 x) < f(\lambda_1 x)$. Луч $\mathcal{E}$ связан, и в силу непрерывности функции f множество $f(\mathcal{E} + \lambda x)$ также связно при любом $\lambda > 0$. Так как $f(\mathcal{E})$ не ограничено сверху, а f сохраняет порядок, то

$$f(\mathcal{E} + \lambda x) =]f(\lambda x), \infty[.$$

Так как выше было показано, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in E}} f(x) = 0,$$

то

$$f(\mathcal{E}) =]0, \infty[.$$

Таким образом,

$$f(\mathcal{E} + \lambda x) = f(\mathcal{E}) + f(\lambda x).$$

Так как λx — произвольный элемент из $\mathcal{E}$, то уравнение (4) выполнено для любого $x \in \mathcal{E}$. Предложение 1 доказано. ■

¹⁾ В силу (1) и равенства $\inf F = 0$.

Уравнение (4) есть не что иное, как уравнение (1) для $n = 1$ и $E =]0, \infty[= \mathbb{R}_+$. Соответствующий порядок совпадает с естественным порядком на $\mathbb{R}$, так что «сохраняет порядок» означает «строго возрастает». Решим теперь уравнение (1) для этого случая.

Теорема 2. *Непрерывная функция $f : E =]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ является решением уравнения*

$$f([x, \infty]) = f(x) + f([0, \infty]) \quad \text{при всех } x \in]0, \infty[, \quad (7)$$

если и только если f имеет одно из следующих четырёх свойств:

- A) $f \equiv 0$;
- B) f — строго возрастающая функция из $]0, \infty[$ на $]0, \infty[$;
- C) f — строго убывающая функция из $]0, \infty[$ на $]0, -\infty[$;
- D) $f([x, \infty]) = \mathbb{R}$ при всех $x \in]0, \infty[$.

Очевидно, что функция не может принадлежать более чем одной из этих категорий.

Доказательство. Сначала покажем, что функции со свойствами (A), (B), (C) или (D) удовлетворяют уравнению (7). Для свойства (A) это очевидно. В случае (B) имеем $f([x, \infty]) =]f(x), \infty[$ и $f([0, \infty]) =]0, \infty[$, откуда следует (7). Случай (C) аналогичен: $f([x, \infty]) =]-\infty, f(x)[$ и $f([0, \infty]) =]-\infty, 0[$. В случае (D) для всех $x > 0$ имеем $f([0, \infty]) \supset f([x, \infty])$, откуда $f([0, \infty]) = \mathbb{R}$, что снова приводит к (7).

Обратно, пусть непрерывная функция f удовлетворяет уравнению (7). Как и в предложении 1, положим $F = f([0, \infty])$.

Если величина $\inf F = a$ конечна, то, как и в предложении 1, получаем $a = 0$. Если при этом (A) не выполняется, то $0 \notin F$, функция f строго возрастает на $]0, \infty[$ и $\sup F = \infty$ ¹⁾. Из непрерывности функции f вытекает свойство (B).

Если $\inf F = -\infty$, $\sup F < \infty$, то с помощью замены f на $-f$ сводим этот случай к предыдущему и получаем (C).

При $\inf F = -\infty$, $\sup F = \infty$ непрерывность функции f влечёт $F = \mathbb{R}$, и ввиду (7) имеем $f([x, \infty]) = \mathbb{R}$ при всех $x \in]0, \infty[$, т. е. выполнено (D). Теорема 2 доказана. ■

Как следствие справедлива

Теорема 3. *В предложении 1 условия (a) и (b) не только необходимы, но и достаточны.*

Доказательство. Согласно предложению 1, условия (a) и (b) необходимы. Обратно, пусть выполнены условия предложения 1, причём функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ сохраняет или обращает порядок и удовлетворяет уравнению (4) для каждого луча $\mathcal{E}$ в E . В силу теоремы 2 выполняется одно из трёх равенств: $f(\mathcal{E}) = 0$; $f(\mathcal{E}) =]0, \infty[$; $f(\mathcal{E}) =]-\infty, 0[$. (В случае (D), т. е. $f(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$, из (7) вытекало бы равенство $f(\mathcal{E} + x) = \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathcal{E}$, а тем более $f(E + x) = \mathbb{R}$, что противоречит условию предложения 1.) Лучи в множестве E взаимно однозначно соответствуют его элементам, имеющим единичную норму (например, евклидову); совокупность последних обозначим E_1 . Пусть A — совокупность всех таких x из E_1 , что для луча $\mathcal{E}_x$, содержащего x , множество $f(\mathcal{E}_x)$ состоит из нуля. Аналогично, пусть множества B и C состоят из всех $x \in E_1$, для которых $f(\mathcal{E}_x) =]0, \infty[$ и $f(\mathcal{E}_x) =]-\infty, 0[$ соответственно. Множества A , B , C не пересекаются, и их объединение равно E_1 . На каждом луче отношение $\prec$ совпадает с естественным порядком. Как следствие, при $x \in A$ функция f на луче $\mathcal{E}_x$ не может ни сохранять, ни обращать порядок, и потому $A = \emptyset$. Если $x \in B$, то f сохраняет порядок. Если же $x \in C$, то f обращает порядок. Значит, либо $B = E_1$, либо $C = E_1$.

Если $B = E_1$, то для любого $x \in E$ и любого $y \in E + x$ верно, что $f(y) > f(x)$. Если луч $\mathcal{E}$ содержит x , то $f(\mathcal{E} + x) =]f(x), \infty[$. Следовательно, $f(E + x) =$

¹⁾ См. доказательство предложения 1.

$=]f(x), \infty[$. Для любого луча $\mathcal{E}$ выполнено равенство $f(\mathcal{E}) =]0, \infty[$, и E является объединением всех таких лучей. Значит, $f(E) =]0, \infty[$, и (1) выполнено. Случай $C = E_1$ аналогичен предыдущему. Теорема 3 доказана. ■

Полезно сформулировать теорему 3 и по-другому.

Теорема 4. Пусть E — непустой открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной $0 \notin E$. Если функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то она удовлетворяет уравнению (1) при всех $x \in E$, если и только если f имеет одну из следующих взаимоисключающих форм:

- A) $f \equiv 0$;
- B) $f(E) =]0, \infty[$, f сохраняет порядок и не ограничена сверху на каждом луче $\mathcal{E}$;
- C) $f(E) =]-\infty, 0[$, f обращает порядок и не ограничена снизу на каждом луче $\mathcal{E}$;
- D) $f(E + x) = \mathbb{R}$ для всех $x \in E$.

Этот результат легко выводится из предложения 1 и теоремы 3. Нужно лишь заметить, что в случаях (A), (B) и (C) верно равенство $\lim_{x \in E, x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Чтобы

доказать это равенство в случае (B), возьмём $\varepsilon > 0$ и $y \in E$, для которых $f(y) \leq \varepsilon$. В проколотой окрестности нуля $E \cap (y - E)$ функция f принимает значения между 0 и ε , откуда следует наше утверждение. ■

Отметим, что в случае (D) не обязательно $f(\mathcal{E} + x) = \mathbb{R}$ для любого луча $\mathcal{E}$ в E . Например, пусть $E = \mathbb{R}_+^2$. Функция $f(x, y) = \ln(y/x)$, где $(x, y) \in E$, является непрерывным решением для (1) вида (D). Однако для любого луча $\mathcal{E}$, составляющего острый угол ϑ с осью x , мы имеем $f(\mathcal{E}) = \ln(\operatorname{tg} \vartheta)$. Иначе говоря, заключение предложения 1 может не выполняться, если $f(E + x) = \mathbb{R}$ для всех $x \in E$.

Пусть $E =]a, b[$, где $-\infty < a < b < \infty$, а $|$ и $||$ означают (независимо) $]$ или $[$. Тогда из теоремы 4 вытекает характеристизация (нестрого) монотонных функций. Пусть $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, множество значений которой не совпадает с $\mathbb{R}$. Тогда она удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(|a, b|) + f(x) = f(|x, b|) \quad \text{при всех } x \in]a, b|, \quad (8)$$

если и только если верно следующее:

- i) если $| = [$ и $|| =]$, то $f \equiv 0$;
- ii) если $| = [$ и $|| = [$, то или $f \equiv 0$, или f строго возрастает и $f(a) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$, или f строго убывает и $f(a) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$;
- iii) если $| =]$ и $|| = [$, то или $f \equiv 0$, или f строго возрастает и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$, или f строго убывает и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$;
- iv) если $| =]$ и $|| =]$, то $f \equiv 0$.

Доказать (iii) нетрудно с помощью теоремы 2, предварительно отобразив монотонно $]a, b[$ на $]0, \infty[$. К (ii) приводит упрощённый вариант теоремы 2. Для случая (i) дадим непосредственное доказательство. Из (8) вытекает, что если $y_1, y_2 \in f([a, b])$, то и $y_1 + y_2 \in f([a, b])$. Как следствие, $ny \in f[a, b]$ для любого натурального n и любого $y \in f[a, b]$. Так как функция f непрерывна, то множество $f[a, b]$ ограничено с обеих сторон, поэтому обязательно $y = 0$ (если $y \neq 0$, то множество $\{ny \mid n = 1, 2, \dots\}$ не ограничено). Докажем теперь (iv). Так как функция f непрерывна и $f(|x, b|) \subset f([x, b])$, то при любом $x \in]a, b|$ правая часть в (8) ограничена. Но множество $f([a, b])$ является подполугруппой в $\mathbb{R}$ и не может быть ограничено, если не сводится к $\{0\}$.

Труднее исследовать уравнение (1), когда E является замкнутым непустым выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$, а тем более при отсутствии выпуклости (Dhombres, 1984b).

Уравнение (1) возникло в связи с одной задачей из теории относительности (см. А. Д. Александров 1967 и 1970). Она относится к хроногеометрии, т. е. геометрии в $\mathbb{R}^n$ (точнее, в соответствующем n -мерном аффинном пространстве), основанной на отношении предшествования точек. В случае $n = 4$ точки в $\mathbb{R}^4$ называются событиями. Каждое событие x является вершиной «конуса будущего» C_x , точкам которого оно предшествует (например, конус может определяться распространением света). Структура предшествования определяет структуру пространства-времени.

В теории относительности принимается допущение, что C_x является сдвигом фиксированного конуса C с вершиной в нуле («светового конуса»): $C_x = C + x$. Можно показать, что если конус C выпуклый, то отношение предшествования транзитивно.

В этом контексте интересны те отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые сохраняют конусы будущего. Более точно, нас интересуют те биекции f , для которых $C_{f(x)} = f(C_x)$. Это свойство выражается функциональным уравнением

$$C + f(x) = f(C + x). \quad (9)$$

А. Д. Александров (1967) доказал в геометрических терминах, что для биекции f (без каких-либо условий регулярности) при $n > 2$ из (9) вытекает аффинность ($f(x) = Ax + b$, $\det A \neq 0$), если конус C имеет следующие свойства (см. упр. 9):

— конус C не лежит в двумерной плоскости; (10)

— его замкнутая выпуклая оболочка не содержит прямых линий; (11)

— и не является прямым произведением луча и $(n - 1)$ -мерного конуса. (12)

В результате получаем характеризацию преобразований Лоренца как отображений, сохраняющих совокупность эллиптических конусов.

При некоторых дополнительных ограничениях на C , которые мы здесь не приводим, можно получить более конкретный результат, а именно: любая биекция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению

$$f(C + x) = g(x) + C \quad (13)$$

для какой-либо функции g , обязательно аффинна. Уравнение (13) обобщает (9) в духе уравнений Пексидера, см. § 4.3.

Чтобы получить решение f более общего вида, А. Д. Александров предложил рассматривать вместо (9) функциональное уравнение

$$f(C + x) = f(C) + f(x). \quad (14)$$

В теореме 4 уже содержались некоторые результаты, относящиеся к отображениям $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывным на непустом открытом выпуклом конусе C . При $n = 1$ можно доказать несколько больше, если функция f ограничена сверху. Однако для $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n \neq 1$ уравнения вида (14) не решены полностью даже при условиях регулярности, таких как непрерывность (см.: Täuber 1973; Forti, 1977, 1978; Täuber–Neuhaus, 1978a,b; Borelli Forti–Forti, 1979; Dhombres, 1982a, 1984b).

9.2. Множества, на которых ограниченные аддитивные функции непрерывны

На взаимодействие чисел и числовых множеств в уравнении Коши можно взглянуть и с другой стороны. Согласно теореме 2.8 решение уравнения Коши, ограниченное сверху на множестве положительной лебеговой меры, обязательно непрерывно. Можно ли здесь заменить множества положительной меры другими классами множеств? Иначе говоря, возможно ли обращение теоремы 2.8 в отношении множества, на котором функция f ограничена?

Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна и не является тождественным нулём, и пусть $M \in \mathbb{R}$. Множество

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M\} \quad (15)$$

обладает некоторыми интересными свойствами. Во-первых, оно $\mathbb{Q}$ -выпукло, т.е. из $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ следует $\alpha x + (1 - \alpha)y \in E$. Во-вторых, если $x_0 \in E$, $f(x_0) < M$, $x \in \mathbb{R}$, то найдётся $\alpha_x > 0$ в $\mathbb{Q}$, такое что $f(x_0) + \alpha_x |f(x)| \leq M$. Как следствие, из $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_x$, вытекает, что $x_0 + \alpha x \in E$. Множество $E \subset \mathbb{R}$ с таким свойством называется $\mathbb{Q}$ -звёздным в x_0 .

Очевидно также, что E не ограничено (учитывая, что $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ и существует $x \in \mathbb{R}^*$, для которого $f(x) \leq 0$). Эти три свойства почти достаточны для характеристики множеств, имеющих вид (15) для какой-либо аддитивной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Точный ответ таков (см.: Kuczma, 1970).

Предложение 5. Пусть E непусто, $\mathbb{Q}$ -выпукло и $\mathbb{Q}$ -звёздно в некоторой точке $x_0 \in E$. Тогда существует аддитивная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, не являющаяся тождественным нулём, а также константы M, N ($M > N$), такие что либо f непрерывна и $E \supset \{x \mid x \in \mathbb{R}; N < f(x) < M\}$, либо f разрывна и $E \subset \{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M\}$.

Следует отметить, что два указанных случая исключают друг друга. Множество $\{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M\}$ в случае разрывной аддитивной функции не может содержать открытое непустое множество вида $\{x \mid x \in \mathbb{R}; N < g(x) < M\}$, где g — непрерывная аддитивная ненулевая функция (см. следствие 2.5).

Доказательство фактически требуется только для случая $x_0 = 0$. Действительно, при $x_0 \neq 0$ множество $E - x_0$ является $\mathbb{Q}$ -звёздным в нуле, $\mathbb{Q}$ -выпуклым и непустым. Поэтому если предложение 5 верно для точки 0, то либо функция f непрерывна и

$$E \supset x_0 + \{x \mid x \in \mathbb{R}; N < f(x) < M\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}; N' < f(x) < M'\},$$

либо функция f разрывна и

$$E \subset x_0 + \{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M\} \subset \{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) < M'\},$$

что и требовалось (здесь $N' = N + f(x_0)$; $M' = M + f(x_0)$).

Итак, можно считать, что множество E является $\mathbb{Q}$ -звёздным в точке $x_0 = 0$. Тогда $0 \in E$, и ввиду $\mathbb{Q}$ -выпуклости этого множества мы имеем $\alpha x \in E$ при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, и $x \in E$.

Вначале предположим, что E выпукло. Выпуклые подмножества в $\mathbb{R}$ — это замкнутые, открытые и полуоткрытые промежутки (конечные и бесконечные, в том числе само $\mathbb{R}$). Во всех случаях имеем $E \supset \{x \mid x \in \mathbb{R}, N < x < M\}$ для некоторых констант M, N ($M > N$). Положив $f(x) = x$, получаем: $E \supset \{x \mid x \in \mathbb{R}; N < f(x) < M\}$. Это первая альтернатива из предложения 5.

Пусть теперь E невыпукло. Поскольку $0 \in E$, то можно считать (заменив, если нужно, E на $-E$), что $0 < x_1 < x_2$, $x_1 \notin E$, $x_2 \in E$. Покажем, что это соответствует второй альтернативе из предложения 5.

Очевидно, что x_1 и x_2 линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Действительно, если $n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0$ при $0 < x_1 < x_2$, то $x_1 = (-n_2/n_1)x_2$, $0 \leq -n_2/n_1 \leq 1$, и $x_1 \in E$ ввиду $\mathbb{Q}$ -выпуклости, что противоречит выбору x_1 .

Пусть $\mathcal{E}(x_1, x_2)$ состоит из всех чисел вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Построим аддитивную функцию g на $\mathcal{E}(x_1, x_2)$, ограниченную сверху на $E \cap \mathcal{E}(x_1, x_2)$. Согласно лемме 2.2 она однозначно определяется, если заданы подходящие $g(x_1) = r_1$ и $g(x_2) = r_2$, при которых g ограничена сверху на $E \cap \mathcal{E}(x_1, x_2)$, т.е. величина $\sup(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)$ по всем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$ конечна.

Покажем, что искомый выбор возможен. Число $x_1 \notin E$ можно представить следующим образом:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1} + \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1} (-x_2).$$

Пусть $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$, $\alpha_1 > 1$. Включение $\alpha_2(-x_2)/(\alpha_1 - 1) \in E$ невозможно, так как тогда x_1 принадлежало бы множеству E (как $\mathbb{Q}$ -выпуклая комбинация его элементов). Но это включение выполняется при достаточно малых $|\alpha_2/(\alpha_1 - 1)|$ в силу $\mathbb{Q}$ -звёздности множества E в нуле (при $\alpha_2 > 0$ нужно применить $\mathbb{Q}$ -звёздность к $-x_2$, а при $\alpha_2 < 0$ — к x_2). Следовательно, существует такое β , что

$$0 < \beta = \inf \left\{ \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1} \mid \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E, 1 < \alpha_1 \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha_2 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}, \alpha_1 > 1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$ получаем

$$\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \leq 1. \quad (16)$$

Если положить $g(x_1) = r_1 = 1$, $g(x_2) = r_2 = -1/\beta$, то получим искомую верхнюю границу для g , а именно $g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq 1$. Остается проверить, что (16) выполняется и для тех рациональных α_1, α_2 , при которых $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$, но $\alpha_2 \leq 0$ или $\alpha_1 \leq 1$.

Если $\alpha_2 = 0$, то случай $\alpha_1 \leq 1$ тривиален, а случай $\alpha_1 \geq 1$ невозможен, так как тогда из $\alpha_1 x_1 \in E$ в силу $\mathbb{Q}$ -выпуклости вытекает $x_1 \in E$, что противоречит предположению.

Пусть $\alpha_1 \leq 1$. Случай $\alpha_2 \geq 0$ тривиален, а при $\alpha_2 < 0$ проведём доказательство от противного. Предположим, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in E$, но $\alpha_1 - (\alpha_2/\beta) > 1$. Попробуем выразить x_1 в виде $\gamma y_1 + (1 - \gamma)y_2$, где $\gamma \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $y_1, y_2 \in E$. Естественно положить $y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ и искать $y_2 \in E$ в виде $\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2$, где $\alpha'_1, \alpha'_2 \in \mathbb{Q}$. Ослабив эти условия, будем считать, что $y_1 = (1/\delta)\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $y_2 = (1/\delta)(\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2)$, где $\delta \in \mathbb{Q}, \delta \geq 1$. Выберем следующие значения для γ и δ :

$$\gamma = \frac{\alpha'_2}{\alpha'_2 - \alpha_2}, \quad \delta = \frac{\alpha'_2 \alpha_1 - \alpha_2 \alpha'_1}{\alpha'_2 - \alpha_2}.$$

Поскольку $\alpha_2 < 0$, то достаточно наложить условие $\alpha'_2 \geq 0$, чтобы получить $0 \leq \gamma \leq 1$. Условие $\delta \geq 1$ тогда примет вид $\alpha'_2(\alpha_1 - 1) \geq \alpha_2(\alpha'_1 - 1)$. При ограничении $\alpha'_1 > 1$ оно превращается в ¹⁾

$$\frac{\alpha'_2}{\alpha'_1 - 1} \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1} \quad (17)$$

(при $\alpha_1 = 1$ считаем, что $\alpha_2/(\alpha_1 - 1) = \infty$). По предположению $\alpha_2/(\alpha_1 - 1) > \beta$, и в силу определения β найдутся $\alpha'_1, \alpha'_2 \in \mathbb{Q}$, такие что $\alpha'_1 > 1, \alpha'_2 > 0, \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 \in E$ и выполнено (17). Таким образом, x_1 оказывается $\mathbb{Q}$ -линейной комбинацией элементов из E , что и даёт искомое противоречие.

Пусть теперь $\alpha_1 > 1, \alpha_2 < 0$. Тогда, очевидно, неравенство (16) не выполняется, и $\alpha_1 - (\alpha_2/\beta) > 1$. Будем действовать как в случае $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 0$, но на этот раз $\beta > \alpha_2/(\alpha_1 - 1)$, и мы ищем такие $\alpha'_1, \alpha'_2 \in \mathbb{Q}$, что $\alpha'_1 > 1, \alpha'_2 > 0, \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 \in E$ и выполнено неравенство, противоположное (17):

$$\frac{\alpha'_2}{\alpha'_1 - 1} \geq \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - 1}. \quad (18)$$

¹⁾ Напомним, что $\alpha_1 \leq 1$.

В силу определения β найдутся α'_1, α'_2 , для которых $\alpha'_2/(\alpha'_1 - 1) \geq \beta > \alpha_2/(\alpha_1 - 1)$ и выполнены перечисленные свойства. Как и выше, получаем противоречие, так что случай $\alpha_1 > 1, \alpha_2 < 0$ невозможен.

Итак, мы построили аддитивную функцию $g : \mathcal{E}(x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченную сверху единицей на $E \cap \mathcal{E}(x_1, x_2)$. По теореме 7.5 она продолжается до аддитивной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая по-прежнему не превосходит 1 на E . При этом $f(x_1) = 1, f(x_2) = -1/\beta < 0$. Поскольку $0 < x_1 < x_2$, то $f(x)$ не представима в виде ax ($a \in \mathbb{R}$) и потому не является непрерывной (следствие 2.5). Предложение 5 доказано. ■

В формулировке нашей первой обратной теоремы $\mathbb{Q}$ -выпуклая оболочка $\mathbb{Q}(E)$ множества E означает наименьшее $\mathbb{Q}$ -выпуклое множество, содержащее E .

Теорема 6. Для непустого множества $E \subset \mathbb{R}$ следующие свойства равносильны:

- (i) если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна и ограничена сверху на E , то она непрерывна;
- (ii) для каждого множества $F \subset \mathbb{R}$, содержащего базис Гамеля, множество $G = \mathbb{Q}((E + F) \cup (E - F))$ ¹⁾ содержит подмножество положительной лебеговой меры.

Доказательство. Пусть утверждение (ii) не выполнено; покажем, что не выполняется и (i). Таким образом, некоторое множество $F \subset \mathbb{R}$ содержит базис Гамеля, но G не содержит никакого подмножества положительной лебеговой меры.

Вначале покажем, что множество G является $\mathbb{Q}$ -звёздным в любой точке $t \in E$ (очевидно, что $E \subset G$). Для этого возьмём $x \in \mathbb{R}^*$ и запишем

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_i > 0, \alpha_i \in \mathbb{Q}; x_1, \dots, x_n \in F \cup (-F)$. Такая запись возможна, поскольку F содержит базис Гамеля для $\mathbb{R}$. Если $\alpha_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$ и $t \in E$, то

$$\frac{x}{\alpha_0} + t = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} (x_1 + t) + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0} (x_n + t),$$

откуда $x/\alpha_0 + t \in G$. Но $t \in E \subset G$, и из $\mathbb{Q}$ -выпуклости множества G следует, что

$$\alpha \left(\frac{x}{\alpha_0} + t \right) + (1 - \alpha)t = \alpha \frac{x}{\alpha_0} + t \in G \quad (19)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^*, t \in E, \alpha \in \mathbb{Q}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). Равенство (19) справедливо и при $x = 0$. Таким образом, множество G является $\mathbb{Q}$ -звёздным в любой точке $t \in E$. Как следствие, к G можно применить предложение 5. По предположению G не содержит подмножества положительной меры и потому не может включать множество вида $\{x \mid x \in \mathbb{R}; N < f(x) < M\}$, где $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная аддитивная функция, не равная тождественно нулю. Поэтому существуют разрывная аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и константа M , такие что

$$E \subset G \subset \{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M\}.$$

Таким образом, (i) не выполнено.

Теперь покажем непосредственно, что (ii) влечёт (i). Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна и ограничена сверху на множестве E некоторой константой M . Покажем, что множество $F = \{x \mid x \in \mathbb{R}; |f(x)| \leq 1\}$ содержит базис Гамеля. Действительно, пусть h_0 — элемент некоторого базиса Гамеля H . Для некоторого рационального

¹⁾ Сокращённое обозначение $G = \mathbb{Q}((E + F) \cap (E - F))$ введено при переводе.

$\alpha \neq 0$ верно, что $|f(\alpha h_0)| \leq 1$. Заменяв h_0 на αh_0 , снова получаем базис Гамеля. Отсюда вытекает существование базиса Гамеля, содержащегося в F .

Легко видеть, что функция f ограничена сверху на множестве $(E + F) \cup (E - F)$ числом $M + 1$. Как следствие, f ограничена сверху тем же числом и на множестве $\mathbb{Q}((E + F) \cup (E - F))$, содержащем подмножество положительной меры. По теореме 2.8 функция f непрерывна, что завершает доказательство теоремы 6. ■

Замечание 1. Свойство (ii) в теореме 6 легко заменить на следующее аналогичное свойство:

(iii) *если множество $F \subset \mathbb{R}$ является $\mathbb{Q}$ -звёздным в некоторой точке, то $\mathbb{Q}$ -выпуклая оболочка множества $E - F$ содержит непустое открытое выпуклое подмножество.*

Можно ожидать более простого результата, если функция ограничена с обеих сторон. На самом деле тогда не потребуется рассматривать все подмножества, содержащие базис Гамеля для $\mathbb{R}$.

Теорема 7. *Для непустого множества $E \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения равносильны:*

— *всякая аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная на E по абсолютной величине, непрерывна на $\mathbb{R}$;*

— *$\mathbb{Q}$ -выпуклая оболочка множества $E - E$ (далее обозначаемая D) содержит подмножество положительной лебеговой меры.*

Доказательство. Пусть второе утверждение выполнено. Возьмём аддитивную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in E$. Очевидно, $|f(x)| \leq 2M$ на $E - E$. Так как $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ при $\alpha \in \mathbb{Q}$, та же оценка верна на D , а тем самым и на некотором множестве положительной лебеговой меры. По теореме 2.8 функция f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Теперь предположим, что D не содержит множества положительной меры, но всякая аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная на $E (\neq \emptyset)$ по абсолютной величине, непрерывна. Очевидно, что E содержит более одной точки. Далее, если аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равна 0 на $E - E$, то она постоянна на E и потому непрерывна всюду; тогда f тождественно равна нулю, так как E содержит более одного элемента. В силу следствия 2.13 множество $E - E$ содержит некоторый базис Гамеля H , а тогда по симметрии также и $-H$. Как и в доказательстве теоремы 6, получаем, что множество D является $\mathbb{Q}$ -звёздным в нуле. Но D является $\mathbb{Q}$ -выпуклым и не содержит множества положительной меры. Ввиду предложения 5 существует разрывная аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная сверху на D некоторым числом M , которое можно выбрать положительным. Но $D = -D$, и поскольку $f(-x) = -f(x)$, то $|f(x)| \leq M$ на D . Поэтому $|f(x)| \leq M + |f(x_0)|$ ($x \in E$), где x_0 — произвольная точка в E . Это противоречит нашему предположению, что и завершает доказательство. ■

Замечание 2. Если множество E обладает свойством (i) из теоремы 6, то всякая аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная на E по абсолютной величине, непрерывна. Обратное неверно, как показывает следующий пример. Пусть M — некоторая константа, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — разрывная аддитивная функция, $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}; f(x) \leq M\}$. Множество E непусто и по построению не обладает свойством (i) из теоремы 6. Пусть, тем не менее, аддитивная функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на E по абсолютной величине. Так как $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ и $\alpha x \in E$ для всех α из некоторого неограниченного подмножества в $\mathbb{Q}$, то функция g тождественно равна 0 на E и потому непрерывна на $\mathbb{R}$ ¹⁾. Иначе говоря, из наличия в $\mathbb{Q}(E - E)$ подмножества положительной лебеговой меры не вытекает аналогичный факт для $\mathbb{Q}((E + F) \cup (E - F))$, где F — подмножество в $\mathbb{R}$, содержащее базис Гамеля.

¹⁾ Поскольку E содержит базис Гамеля (см. доказательство теоремы 6).

Замечание 3. Для данного элемента h базиса Гамеля H проекцией вдоль h называется отображение $x \mapsto \alpha_h$, где α_h — коэффициент при h в разложении элемента x по H . Если множество E имеет положительную лебегову меру, то проекция вдоль h не может оставаться на E ограниченной по абсолютной величине (или даже ограниченной сверху). Это легко выводится из теоремы 7.

Замечание 4. Теоремы 6 и 7 можно обобщить многими способами: например, на более общие области определения и значений функции (см.: Ger–Kuczma, 1970; Kuczma–Smital, 1976; Dhombres, 1979, р. 4.46, 4.47) или на неравенства вместо равенства в уравнении Коши, в частности для функций, выпуклых по Иенсену (см., например, Kuczma, 1973a, 1985; Smital, 1976b; Ger, 1978c). Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ *выпукла по Иенсену*, если

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{при всех } x, y \in I \quad (20)$$

(в качестве I может фигурировать, например, промежуток вещественной оси или его пересечение с $\mathbb{Q}$, или выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и т. д.).

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1 и 2 см.: Dhombres, 1982a, 1984b.)

1. Пусть $E =]0, \infty[$. Найдите все те решения $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x + E) = f(x) + f(E) \quad (x \in E),$$

для которых $f(E)$ является связным собственным подмножеством в $\mathbb{R}$.

2. Что получится, если в теореме 2 заменить $E =]0, \infty[$ на $E = [0, \infty[$? Иначе говоря, найдите все непрерывные решения $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x + \overline{\mathbb{R}}_+) = f(x) + f(\overline{\mathbb{R}}_+) \quad (x \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

(В связи с упр. 3–5 см.: Täuber–Neuhaus, 1978a.)

3. Пусть $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — сюръекция. Покажите, что f строго возрастает, если и только если f удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x + \mathbb{R}_+) = f(x) + f(\mathbb{R}_+) \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

4. Найдите все строго возрастающие функции $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$f\left(\frac{x + \mathbb{R}_+}{2}\right) = \frac{f(x) + f(\mathbb{R}_+)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

5. То же, что в упр. 4, но с заменой $\mathbb{R}_+$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

6*. (Borelli Forti, 1980.) Пусть E — собственный открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^2$ с вершиной в нуле, а отображения $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют условиям

$$f_i(x + E) = f_i(x) + f_i(E) \quad (x \in E).$$

Положим

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)).$$

Опровергните или докажите, что f удовлетворяет уравнению

$$f(x + E) = f(x) + f(E) \quad (x \in E),$$

если и только если f_1 зависит лишь от одного из переменных x_1, x_2 , а f_2 — от другого.

7*. (А.Д. Александров 1970.) Пусть $E =]0, \infty[$. Найдите все ограниченные снизу решения $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x + E) = f(x) + f(E).$$

8. Найдите непостоянную периодическую функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, выпуклую по Иенсену и при этом не аддитивную.

9. (А.Д. Александров 1967.) Докажите, что если конус обладает свойствами (10)–(12), то все биекции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n > 2$), удовлетворяющие условию (9), являются аффинными преобразованиями.

10. Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 6. Опровергните или докажите, что каждая аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная снизу на E , непрерывна.

11. (Sierpiński, 1920b.) Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла по Иенсену и мажорируется измеримой функцией $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) \leq g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Покажите, что f непрерывна и выпукла (т. е.

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

для всех $\lambda \in [0, 1]$; $x, y \in \mathbb{R}^n$).

12. (Ger-Kuczma, 1970.) Пусть E — непустое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, выпуклая по Иенсену и ограниченная сверху на E , непрерывна тогда и только тогда, когда E обладает свойством (i) (или (ii)) из теоремы 6.

13*. (Kuczma, 1973a.) Пусть E — непрерывная кривая в $\mathbb{R}^2$, не содержащаяся в прямой (иными словами, это график отображения $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, где I — непустой открытый интервал в $\mathbb{R}$, а ϕ — нелинейная функция). Опровергните или докажите, что любая аддитивная функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная сверху на E , непрерывна.

14. (Smital, 1976b.) Пусть E — подмножество в $\mathbb{R}$ с положительной мерой Лебега. Покажите, что любая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, выпуклая по Иенсену и ограниченная снизу на E , локально ограничена снизу на $\mathbb{R}$.

15*. (Smital, 1968.) Покажите, что существует разрывная аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, график которой пересекает любое борелевское подмножество в $\mathbb{R}^2$ с несчётной проекцией на ось x . Докажите, что для всех таких функций выполнено равенство $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и что они имеют свойство Дарбу: если множество $S \subset \mathbb{R}$ связно, то и $f(S)$ связно.

16. (Gajda, 1984a.) Пусть E, F — вещественные линейные топологические пространства, $f : E \rightarrow F$ — аддитивная функция. Пусть, далее, существует ненулевой линейный функционал $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$, а также положительное число α , такие что

$$\phi(f(x)) \leq \alpha$$

для всех x из некоторого открытого подмножества $U \subset E$. Покажите, что существует непрерывная аддитивная функция $g : E \rightarrow F$, такая что

$$\phi(f(x) - g(x)) = 0 \quad (x \in E).$$

Глава 10

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ, ГЕОМЕТРИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ТЕОРИИ НОРМИРОВАНИЙ

В функциональном анализе, в частности в геометрии банаховых пространств, функциональные уравнения возникают весьма часто. Пять различных типов этого явления рассмотрены в первых пяти параграфах настоящей главы. Разумеется, мы будем пользоваться основными понятиями и результатами функционального анализа (особенно в § 1, 4, 5).

Первые два примера относятся к отысканию крайних точек и лучей в некоторых выпуклых подмножествах функциональных пространств. При решении этой задачи часто помогают функциональные уравнения. Третий и четвёртый примеры приведут к характеристике строго выпуклых нормированных пространств. Их частный случай — пространства с внутренним произведением — будет охарактеризован в гл. 11. Пятый пример возвращает нас к гармоническому анализу. Во всех этих примерах важную роль играет норма, т.е. обобщение понятия абсолютной величины на случай произвольного линейного пространства. Обобщение этого понятия для полей — нормирование — изучается с помощью функциональных уравнений в § 6 для случаев $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.

10.1. Функциональные уравнения и крайние точки

Пусть E — вещественное или комплексное линейное пространство, C — выпуклое подмножество в E . Его точка называется *крайней*, если её нельзя представить как собственную выпуклую комбинацию двух различных точек из C . Нетрудно видеть, что это определение приводится к следующему удобному виду. Точка $x \in C$ является крайней в C , если и только если из $x = (x_1 + x_2)/2$ ($x_1, x_2 \in C$) следует $x = x_1 = x_2$. Например, треугольник является выпуклым подмножеством в $E = \mathbb{R}^2$, и его крайние точки — это, конечно, его вершины. С другой стороны, открытый круг в $\mathbb{R}^2$ не имеет крайних точек.

Существенным является тот факт (в дальнейшем нами не используемый), что многие выпуклые множества в вещественном линейном пространстве (возможно, бесконечномерном) порождаются своими крайними точками. В самом деле, выпуклый компакт в локально выпуклом вещественном отделимом пространстве совпадает с замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек (теорема Крейна–Мильмана; доказательство см.: Dunford, Schwartz, 1958, p. 440). По этой причине бывает полезным отыскание крайних точек выпуклых множеств. Кроме того, мы рассмотрим две ситуации, когда выпуклые подмножества топологических линейных пространств некомпактны в естественной топологии вложения. Мы увидим, что и в этих примерах характеристика крайних точек имеет важное значение.

Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы пространства, $C(X)$ — банахово пространство всех комплекснозначных непрерывных функций на X , снабжённое топо-

логией равномерной нормы

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

(Мы будем писать $\|f\|$ вместо $\|f\|_{\infty}$, если это не ведёт к путанице.) Пусть, далее, $C_{\mathbb{R}}(X)$ — множество всех вещественнозначных функций в $C(X)$; $B_1(X, Y)$ — единичный шар в пространстве ограниченных линейных операторов из $C(X)$ в $C(Y)$ (это значит, что $P \in B_1(X, Y)$, если $P : C(X) \rightarrow C(Y)$ — линейный оператор, такой что $\|P\| \leq 1$). Пусть, наконец, $B_1^+(X, Y)$ — множество всех ограниченных линейных операторов $P : C(X) \rightarrow C(Y)$, таких что $\|P\| = 1$ и $P(1) = 1$ (функция 1 тождественно равна 1).

Подмножество $B_1^+(X, Y)$ (или кратко B_1^+) единичного шара $B_1(X, Y)$ выпукло. Частный случай следующей теоремы был вначале доказан для вещественнозначных функций в статье А. и С. Ionescu-Tulcea (1962), а затем распространён на комплекснозначные в работе Phelps (1963).

Теорема 1. *Оператор P , принадлежащий множеству $B_1^+(X, Y)$, является его крайней точкой, если и только если P мультипликативен, т. е. для любых $f, g \in C(X)$ выполнено функциональное уравнение*

$$P(fg) = Pf \cdot Pg. \quad (1)$$

Доказательство. Оператор P называется неотрицательным ($P \geq 0$), если он переводит неотрицательные функции в неотрицательные. Мы говорим, что функция f неотрицательна ($f \geq 0$), если $f(x) \geq 0$ при всех $x \in X$ ¹⁾. Нам потребуется

Лемма 2. *Если $P \in B_1^+$, то $P \geq 0$.*

Доказательство. Допустим, что для некоторой неотрицательной функции $f \in C(X)$ существует $y_0 \in Y$, такое что $Pf(y_0) \notin \overline{\mathbb{R}}_+$. Поскольку f принадлежит $C(X)$, то её значения принадлежат ограниченному множеству в $\overline{\mathbb{R}}_+$. Найдутся $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, для которых

$$|f(x) - \alpha| \leq r \quad (x \in X), \quad (2)$$

$$|Pf(y_0) - \alpha| > r.$$

Тогда $\|f - \alpha 1\| = \|P\| \|f - \alpha 1\| \geq \|P(f - \alpha 1)\| \geq |Pf(y_0) - \alpha| > r$. Таким образом, $\|f - \alpha 1\| > r$, что противоречит условию (2). Лемма 2 доказана. ■

Лемма 2 составляет утверждение «только если» в следующей удобной характеристизации множества $B_1^+(X, Y)$.

Лемма 3. *Линейный оператор $P : C(X) \rightarrow C(Y)$ принадлежит $B_1^+(X, Y)$, если и только если $P \geq 0$ и $P(1) = 1$.*

Доказательство. Утверждение «только если» следует из леммы 2. Пусть теперь $P \geq 0$ и $P(1) = 1$. Если $f_1, f_2 \in C(X)$, то²⁾

$$|P(f_1 \bar{f}_2)|^2 \leq P(|f_1|^2) P(|f_2|^2). \quad (3)$$

Это вытекает из рассуждения, которым доказывается классическое неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Любую (комплекснозначную) функцию $f \in C(X)$

¹⁾ Так как любая функция из $C_{\mathbb{R}}(X)$ является разностью двух неотрицательных непрерывных функций на X , то P переводит вещественные функции в вещественные и сопряжённые — в сопряжённые. Ниже этот факт неоднократно используется.

²⁾ Далее рассматриваются значения функций в произвольно выбранной точке пространства X .

можно записать в виде $f = g\bar{h}$, где $g, h \in C(X)$, $|g| = |h|$. Положив $f_1 = g$, $f_2 = h$, получаем из (3)

$$|Pf| \leq P(|f|). \quad (4)$$

Поскольку $|f| \leq \|f\|1$ и $P \geq 0$, то $|Pf| \leq P(|f|) \leq \|f\|P(1) = \|f\|1$. Значит, $\|P\| \leq 1$. Так как $P(1) = 1$, то $\|P\| = 1$, т. е. $P \in B_1^+(X, Y)$, что и утверждалось. ■

Продолжим теперь *доказательство теоремы 1*. Пусть P — крайняя точка в B_1^+ . Возьмём $g \in C(X)$, $0 \leq g \leq 1$, и определим линейный оператор $Q: C(X) \rightarrow C(Y)$, положив

$$Qf = P(fg) - Pf \cdot Pg.$$

Введём также линейные операторы $P_1 = P + Q$, $P_2 = P - Q$. Так как $Q(1) = 0$, то $P_1(1) = P_2(1) = 1$.

Если $0 \leq f \in C(X)$, то

$$P_1f = (1 - Pg)Pf + P(fg).$$

Поскольку $0 \leq Pg \leq 1$, $0 \leq Pf$, $0 \leq P(fg)$, то $P_1f \geq 0$, т. е. $P_1 \geq 0$. Аналогично

$$P_2f = P(f(1 - g)) + Pf \cdot Pg.$$

Так как $0 \leq f(1 - g)$, то $0 \leq P(f(1 - g))$, причём $Pf \cdot Pg \geq 0$. Отсюда $P_2f \geq 0$, т. е. $P_2 \geq 0$.

Из леммы 3 вытекает, что $P_1, P_2 \in B_1^+$. Поскольку $P = (P_1 + P_2)/2$ и P — крайняя точка в B_1^+ , то $P = P_1 = P_2$ и $Q = 0$. Значит, для любого элемента $f \in C(X)$ при $0 \leq g \leq 1$ выполнено равенство

$$P(fg) = Pf \cdot Pg. \quad (5)$$

Ввиду линейности оператора P это равенство распространяется на все вещественнозначные функции $g \in C(X)$, а тогда и на любые $f, g \in C(X)$. Утверждение «только если» теоремы 1 доказано.

Обратно, пусть оператор $P \in B_1^+$ удовлетворяет условию (1). Предположим, что $P = (P_1 + P_2)/2$, где $P_1, P_2 \in B_1^+$. Пусть f — вещественнозначная функция из $C(X)$. Тогда

$$4(Pf)^2 = (P_1f + P_2f)^2 = (P_1f)^2 + (P_2f)^2 + 2P_1f \cdot P_2f.$$

Поскольку $P_1(1) = P_2(1) = 1$, то с учётом (3) верно, что

$$(P_1f)^2 \leq P_1(f^2), \quad (P_2f)^2 \leq P_2(f^2).$$

Значит,

$$4(Pf)^2 \leq P_1(f^2) + P_2(f^2) + 2P_1f \cdot P_2f. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$4P(f^2) = 2P_1(f^2) + 2P_2(f^2). \quad (7)$$

Ввиду (1) выполнено равенство $(Pf)^2 = P(f^2)$, и с учётом (6) и (7) верно, что

$$(P_1f - P_2f)^2 \leq 0,$$

откуда $P_1f = P_2f$. Поскольку f — произвольная вещественнозначная функция из $C(X)$, а P_1, P_2 — неотрицательные линейные операторы, то $P_1f = P_2f$ для всех $f \in C(X)$ ¹⁾, т. е. $P_1 = P_2$. Как следствие, P — крайняя точка в $B_1^+(X, Y)$, что и требовалось. Теорема 1 доказана. ■

¹⁾ См. сноску 1 на стр. 120.

Описание крайних точек множества $B_1(X, Y)$ оказалось, по сравнению со случаем $B_1^+(X, Y)$, гораздо более трудной задачей, которая в общем виде не решена. Однако имеется целый ряд результатов при различных ограничениях на компакты X и Y . В частности, если Y состоит из одной точки, то алгебра $C(Y)$ изоморфна $\mathbb{C}$, и при таком подходе $B_1(X, Y)$ состоит из комплекснозначных мер Радона с нормой не больше 1. Обозначим это множество через $M_1(X)$, и пусть $M_1^+(X)$ — совокупность всех неотрицательных мер Радона с полной мерой 1 (см. лемму 3).

Предложение 4. *Элемент μ множества $M_1(X)$ является его крайней точкой, если и только если $|\mu(1)| = 1$ и для всех $f, g \in C(X)$ выполнено функциональное уравнение*

$$\mu(1)\mu(fg) = \mu(f)\mu(g). \quad (8)$$

Доказательство. Пусть μ является крайней точкой в $M_1(X)$. Покажем, что $\|\mu\| = 1$. В самом деле, если $0 < \|\mu\| < 1$, то μ , очевидно, является собственной выпуклой комбинацией двух различных мер из $M_1(X)$:

$$\mu = \|\mu\|\mu_1 + (1 - \|\mu\|)\mu_2.$$

Это верно и при $\|\mu\| = 0$. Введём теперь меру $|\mu|$, положив $|\mu|(f) = \sup_{|g| \leq |f|} |\mu(g)|$. (Обратите внимание, что $|\mu|$ — мера, а $\|\mu\|$ — число, и что $|\mu|(f)$ не совпадает с $|\mu(f)|$.) Покажем, что $\|\mu\|$ является крайней точкой в $M_1(X)$. Предположим, что $|\mu| = (\mu_1 + \mu_2)/2$ ($\mu_1, \mu_2 \in M_1(X)$). По теореме Радона–Никодима существует измеримая функция $h: X \rightarrow \mathbb{C}$, такая что $\mu = h|\mu|$ (т.е. $\mu(f) = |\mu|(hf)$), и при всех $x \in X$ выполнено равенство $|h(x)| = 1$. Тогда $\mu = (h\mu_1 + h\mu_2)/2$, и $h\mu_1, h\mu_2$ принадлежат $M_1(X)$ вместе с μ_1 и μ_2 . Поскольку μ — крайняя точка, то $h\mu_1 = h\mu_2$, а тогда и $\mu_1 = \mu_2$. Значит, $|\mu|$ — крайняя точка в $M_1(X)$.

Поскольку $|\mu|$ — положительная мера Радона и $\|\mu\| = 1$, то $|\mu|(1) = 1$, т.е. $|\mu|$ — крайняя точка и в $M_1^+(X)$. По теореме 1 для всех $f, g \in C(X)$ выполнено равенство

$$|\mu|(fg) = |\mu|(f)|\mu|(g).$$

Так как $\mu(f) = |\mu|(hf)$ и $h\bar{h} = 1$, то $|\mu|(f) = \mu(f\bar{h})$. Отсюда

$$\mu(fg\bar{h}) = \mu(f\bar{h})\mu(g\bar{h}). \quad (9)$$

В случае непрерывной функции h получаем (положив $g = h$), что

$$\mu(f) = \mu(f\bar{h})\mu(1)$$

для всех $f \in C(X)$. В общем случае функция h предполагается лишь измеримой, но аппроксимируется последовательностью непрерывных функций $\{g_n\}$. Устремив n к бесконечности, получаем предыдущее равенство. Умножая (9) на $\mu(1)^2$, получаем (8).

На самом деле выполнено не только равенство $|\mu|(1) = 1$ (т.е. $\int 1 d|\mu| = 1$), но и $|\mu(1)| = 1$ (т.е. $\left| \int 1 d\mu \right| = 1$). Действительно, так как $\mu(f\bar{h}) = |\mu|(f)$ и, как мы видели, $\mu(f) = \mu(f\bar{h})\mu(1)$, то $\mu(f) = \mu(1)|\mu|(f)$, т.е. $\mu = \mu(1)|\mu|$. Поскольку μ и $|\mu|$ имеют одинаковую норму, то $|\mu(1)| = 1$.

Обратно, пусть $\mu \in M_1(X)$ удовлетворяет уравнению (8), причём $|\mu(1)| = 1$. Предположим, что $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$ ($\mu_1, \mu_2 \in M_1(X)$). В частности,

$$\mu(1) = \frac{\mu_1(1) + \mu_2(1)}{2}.$$

При этом $|\mu(1)| = 1$, $|\mu_1(1)| \leq 1$ и $|\mu_2(1)| \leq 1$. Крайние точки единичного круга в $\mathbb{C}$ — это комплексные числа абсолютной величины 1. Следовательно, $\mu(1) = \mu_1(1) = \mu_2(1)$. Положим $\nu = \mu/\mu(1)$, $\nu_1 = \mu_1/\mu(1)$, $\nu_2 = \mu_2/\mu(1)$. Тогда $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, причём $\nu, \nu_1, \nu_2 \in M_1^+$. В силу (8) выполнено равенство $\nu(fg) = \nu(f)\nu(g)$. Из теоремы 1 следует, что ν — крайняя точка в M_1^+ , так что $\nu = \nu_1 = \nu_2$. Отсюда $\mu = \mu_1 = \mu_2$, т. е. μ — крайняя точка в $M_1(X)$, что и требовалось. ■

Найдём теперь все решения функционального уравнения (8). Нам потребуется дираковская мера δ_{x_0} ($x_0 \in X$), которая имеет вид $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$ для всех $f \in C(X)$.

Лемма 5. *Комплекснозначная ограниченная мера Радона μ на X удовлетворяет уравнению (8) при всех $f, g \in C(X)$, если и только если $\mu = \alpha\delta_{x_0}$ для некоторой дираковской меры ($x_0 \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$).*

Доказательство. Если $\mu = \alpha\delta_{x_0}$, то $\mu(1) = \alpha$ и $\mu(1)\mu(fg) = \alpha^2(f(x_0)g(x_0)) = \mu(f)\mu(g)$, т. е. (8) выполнено.

Обратно, пусть μ — решение уравнения (8). Если $\mu(1) = 0$, то, положив $f = g$, получаем из (8), что $\mu(f) = 0$ для всех $f \in C(X)$. Значит, $\mu = 0$ и можно взять $\alpha = 0$ и любое $x_0 \in X$. Если $\mu(1) \neq 0$, то мера $\nu = \mu/\mu(1)$ удовлетворяет уравнению (8), причём $\nu(1) = 1$. Докажем, что носитель меры ν состоит из одной точки. Допустим, что в нём найдутся две различные точки x_1 и x_2 . Поскольку топологическое пространство X хаусдорфово, то у x_1, x_2 имеются непересекающиеся замкнутые окрестности U_1, U_2 . При $i = 1, 2$ точка x_i лежит в носителе меры ν , и потому существует функция $f_i \in C(X)$, носитель которой содержится в U_i , причём $\nu(f_i) \neq 0$. Но $f_1 f_2 = 0$, что даёт противоречие с (8):

$$0 = \nu(f_1 f_2) = \nu(f_1)\nu(f_2).$$

Значит, носитель меры ν состоит из одной точки x_0 , и ν пропорциональна δ_{x_0} (на самом деле они равны, так как $\nu(1) = 1$). Положив $\alpha = \mu(1) \in \mathbb{C}$, в итоге получаем $\mu = \alpha\delta_{x_0}$, что и требовалось. Отметим, что $x_0 \in X$ определяется однозначно, если $\alpha \neq 0$. ■

Предложение 6. *Пусть $P : C(X) \rightarrow C(Y)$ — ограниченный линейный оператор, причём не существует такого $y \in Y$, что $Pf(y) = 0$ для всех $f \in C(X)$. Тогда уравнение*

$$P(1)P(fg) = Pf \cdot Pg \tag{10}$$

выполняется при всех $f, g \in C(X)$, если и только если

$$Pf(y) = \alpha(y)f(\phi(y)) \tag{11}$$

при всех $y \in Y$, где α — функция в $C(Y)$, не равная тождественно нулю, а $\phi : Y \rightarrow X$ — непрерывная функция.

Доказательство. Пусть оператор P определён на $C(X)$ и имеет вид (11) для некоторой функции $\alpha \in C(Y)$ и непрерывной функции $\phi : Y \rightarrow X$. Тогда $Pf \in C(Y)$ и (10) выполнено. Если α не является тождественным нулём, то при любом $y \in Y$ найдётся функция $f \in C(X)$, для которой $Pf(y) \neq 0$, и обратно. Отметим, что если P имеет вид (11), то $\alpha(y) = P(1)(y)$.

Пусть теперь решение $P : C(X) \rightarrow C(Y)$ уравнения (10) удовлетворяет условиям предложения 6. Фиксируем $y \in Y$. Отображение $f \mapsto Pf(y)$ является ограниченным линейным функционалом на $C(X)$.

Согласно теореме Рисса о представлении, существует ограниченная мера Радона μ на $C(X)$, такая что $\mu(f) = Pf(y)$. Если выполнено (10), то μ удовлетворяет уравнению (8). По лемме 5 $\mu = \alpha(y)\delta_{\phi(y)}$, где $\phi(y) \in X$ определяется однозначно, если $\alpha(y) \neq 0$. Но последнее имеет место, поскольку $Pf(y) \neq 0$ для некоторой функции $f \in C(X)$. Таким образом, P имеет вид (11). Осталось показать, что α и ϕ имеют нужные свойства. Так как $\alpha(y) = P(1)(y)$, то α принадлежит $C(Y)$ (и не является

тождественным нулём). Докажем, что функция $\phi : Y \rightarrow X$ непрерывна. Пусть направленное множество $\{y_\gamma\}$ сходится к y в Y . Тогда $\{x_\gamma\} = \{\phi(y_\gamma)\} \in X$. Так как X компактно, то найдётся подпоследовательность y_β , такое что x_β сходится к некоторому $x \in X$. Тогда $\alpha(y_\beta)f(\phi(y_\beta)) \rightarrow \alpha(y)f(x)$. Но $\alpha(y_\beta)f(\phi(y_\beta)) = Pf(y_\beta)$ сходится к $Pf(y) = \alpha(y)f(\phi(y))$. Поскольку $\alpha(y) \neq 0$, то $f(\phi(y)) = f(x)$ для всех $f \in C(X)$. Так как $C(X)$ разделяет точки множества X , то $x = \phi(y)$, что означает непрерывность функции ϕ . Предложение 6 доказано. ■

Если $\alpha \in C(Y)$, $|\alpha(y)| = 1$ при всех $y \in Y$ и функция $\phi : Y \rightarrow X$ непрерывна, то оператор вида (11) называется *хорошим* (nice). Соединяя теорему 1 и предложение 6, видим, что оператор является крайней точкой в $B_1^+(X, Y)$, если и только если он хороший; в этом случае $P(1)(y) = \alpha(y) = 1$ для всех $y \in Y$. Этот факт сохраняется, если заменить $B_1^+(X, Y)$ на $B_1(X, z)$, где z состоит из одной точки (см. предложение 4). Для $B_1(X, Y)$ существует контрпример (Sharir, 1976). Разница в поведении множеств B_1 и B_1^+ вызвана тем, что существует простая биекция между множеством крайних точек в $M_1^+(X)$ и пространством X , чего нельзя сказать о $M_1(X)$. Однако в некоторых случаях равносильность двух свойств сохраняется и для $B_1(X, Y)$, например если X дисперсно или Y экстремально несвязно (Sharir, 1972). В вещественном случае, т.е. для $P : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(Y)$, утверждение сохраняется, если X метризуемо (Blumenthal–Lindenstrauss–Phelps, 1965), но в общем случае оно неверно (Sharir, 1977). Дальнейшее изучение уравнения (10) может дать новую информацию в отношении крайних точек. (Обзор по хорошим и экстремальным операторам см. в Brilouët, 1979.)

10.2. Вполне монотонные функции и крайние лучи

Наш следующий пример касается вполне монотонных (totally monotonic) функций. Пусть $I =]-\infty, 0[$. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется *вполне монотонной*, если при всех $x \in I$, всех неотрицательных целых n и всех $\alpha > 0$ таких, что

$$x, x + \alpha, x + 2\alpha, \dots, x + n\alpha \in I,$$

мы имеем

$$\Delta_{\alpha}^n f(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + k\alpha) \geq 0, \quad (12)$$

где, разумеется,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

При $n = 0$ из (12) следует, что функция f неотрицательна на I , а при $n = 1$ — что она не убывает: $f(x + \alpha) \geq f(x)$, если $x \in I$, $x + \alpha \in I$. При $n = 2$ получаем, что $f(x) - 2f(x + \alpha) + f(x + 2\alpha) \geq 0$. Иначе говоря,

$$f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} \quad \text{при всех } y_1, y_2 \in I. \quad (13)$$

Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнено (13), называется *выпуклой по Иенсену* (см. (9.20) и упр. 9.8). Поскольку f не убывает и неотрицательна, то она ограничена на любом отрезке из $]-\infty, 0[$. Можно показать, что тогда она непрерывна и, как следствие, *выпукла* в обычном смысле, т.е.

$$f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1 - \lambda)f(y_2) \quad \text{при всех } y_1, y_2 \in I \text{ и всех } \lambda \in [0, 1].$$

Покажем, что любая функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая неотрицательные производные всех порядков, вполне монотонна. Примеры таких функций: $-1/x$ ($x < 0$); $e^{\lambda x}$

($x \in \mathbb{R}$), где $\lambda \geq 0$. Так как

$$\Delta_\alpha^1 f(x) = f(x + \alpha) - f(x)$$

и $f'(x) \geq 0$ на I , то

$$\Delta_\alpha^1 f(x) = \alpha f'(x + \vartheta \alpha) \geq 0, \quad \text{где } 0 < \vartheta < 1.$$

Таким образом, (12) выполнено при $n = 1$. Далее, при $n = 2$ имеем

$$\Delta_\alpha^2 f(x) = \Delta_\alpha^1(\Delta_\alpha^1 f(x)),$$

и аналогично предыдущему $\Delta_\alpha^2 f(x) \geq 0$. В общем случае $\Delta_\alpha^n f(x) = \Delta_\alpha^1(\Delta_\alpha^{n-1} f(x)) \geq 0$. Тем самым доказано, что любая функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ с неотрицательными производными всех порядков является вполне монотонной. Таким же образом доказывается, что множество C всех вполне монотонных функций на I замкнуто относительно Δ_α^1 и вообще относительно Δ_α^n .

Мы хотим получить теорему о представлении всех вполне монотонных функций. Оказывается, для этого удобно использовать крайние элементы множества C . Это множество является собственным конусом с вершиной в начале координат, т.е. из $f \in C$ следует $\lambda f \in C$ для всех $\lambda \geq 0$, причём функции f и $-f$ одновременно принадлежат C лишь в случае $f \equiv 0$. Последнее очевидно, поскольку все $f \in C$ должны быть неотрицательны.

Ясно, что конус C — выпуклый. Но выпуклый конус с вершиной в нуле имеет лишь одну крайнюю точку 0, поэтому понятие крайней точки оказывается бесполезным. Более подходит здесь понятие *крайнего луча*. Именно, на собственном выпуклом конусе C можно ввести частичный порядок, положив для $f, g \in C$:

$$f \succ g, \quad \text{если } f - g \in C$$

(см. § 9.1). Будем говорить, что f принадлежит *крайнему лучу*, если f не является тождественным нулём и из $f \succ g$ вытекает $g = \lambda f$ для некоторого $\lambda \geq 0$. Ясно, что тогда это свойство присуще всему лучу, содержащему f . Читатель легко проверит, что в пересечениях конуса с гиперплоскостями, не проходящими через 0, крайние лучи дают крайние точки. (См. упр. 2.)

Наша цель — дать характеристику крайних лучей конуса C всех вполне монотонных функций на I .

Теорема 7. *Крайними в C являются в точности те лучи, которые содержат функцию вида $e^{\lambda x}$ ($\lambda \geq 0$).*

Доказательство. Пусть ненулевая функция f принадлежит крайнему лучу в C . При $\beta \geq 0$ положим $f_\beta(x) = f(x - \beta)$. Очевидно, что $f_\beta \in C$. Положим

$$F := f - f_\beta.$$

Тогда $F \in C$. В самом деле,

$$\Delta_\alpha^1 F(x) = f(x + \alpha) - f(x) - (f(x + \alpha - \beta) - f(x - \beta)) = \Delta_\alpha^1 f(x) - \Delta_\alpha^1 f(x - \beta).$$

Последнее выражение равно $\Delta_\beta^1(\Delta_\alpha^1 f_\beta)(x)$ и неотрицательно, поскольку $f_\beta \in C$ и $\Delta_\alpha^1 f_\beta \in C$. Аналогично $\Delta_\alpha^n F(x) \geq 0$ при любом n . Поэтому $F \in C$, т.е.

$$f \succ f_\beta \quad \text{при всех } \beta \geq 0.$$

Так как f принадлежит крайнему лучу в C , то существует неотрицательное λ , зависящее только от β и такое, что

$$f_\beta = \lambda f.$$

Получаем функциональное уравнение

$$f(x - \beta) = \lambda(\beta)f(x) \quad (x < 0). \quad (14)$$

При $x \rightarrow 0$ ($x < 0$) существует (конечный) предел левой — а значит, и правой — части. Поэтому при $\lambda(\beta) \neq 0$ существует

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0-).$$

Этот предел неотрицателен, так как функция f неотрицательна. Случай $\lambda(\beta) = 0$ для всех $\beta > 0$ исключён: в силу (14) функция была бы тождественно равна нулю вопреки предположению. Как следствие, предел $f(0-)$ всегда положителен¹⁾.

Поскольку мы ищем крайний луч, а не точку, то без потери общности можно считать $f(0-) = 1$. Устремляя в уравнении (14) x к нулю слева, мы видим, что $f(-\beta) = \lambda(\beta)$, откуда $f(x - \beta) = f(-\beta)f(x)$. В итоге получаем для f экспоненциальное уравнение Коши, ограниченное на область $]-\infty, 0]^2$. Применение теоремы 3.5 (с заменой $\mathbb{R}_+$ на $]-\infty, 0]$) даёт для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad x \in]-\infty, 0].$$

Будучи элементом из C , функция f не убывает, откуда $\lambda \geq 0$. Теорема 7 доказана. ■

Здесь нельзя применить теорему Крейна–Мильмана, поскольку выпуклый конус C не компактен. Тем не менее, можно восстановить C по его крайним лучам с помощью тонкой техники, развитой Шоке (и выходящей за рамки этой книги, см.: Choquet, 1969). Здесь мы лишь приведём теорему Бернштейна о представлении вполне монотонных функций.

Теорема 8. *Функция $f :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ вполне монотонна, если и только если существует неотрицательная мера Радона μ , такая что*

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x} d\mu(\lambda), \quad x < 0.$$

Вместо вполне монотонных (totally monotonic) функций на $]-\infty, 0]$ нередко рассматриваются совершенно монотонные (completely monotonic) функции на $\mathbb{R}_+$. Связь между ними заключается в том, что функция $g(x)$ совершенно монотонна на $\mathbb{R}_+$, если и только если $g(-x)$ вполне монотонна на $]-\infty, 0]$. Из теоремы 8 вытекает теорема о представлении совершенно монотонных функций. В частности, функция g класса C^∞ на $\mathbb{R}_+$ совершенно монотонна в том случае, когда $(-1)^k g^{(k)}(x) \geq 0$ ($x > 0$; $k = 0, 1, 2, \dots$).

10.3. Характеризация строго выпуклых нормированных пространств

Вещественное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ называется *строго выпуклым*, если каждая точка его единичной сферы является крайней точкой единичного шара. Иначе говоря, при $\|x\| \leq 1$ и $\|y\| \leq 1$ из $\|(x + y)/2\| = 1$ следует $x = y$. Ниже используется метод из статьи Fischer, Muszély, 1967 (см. Kuczma, 1978a).

Теорема 9. *Вещественное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ строго выпукло, если и только если все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, удовлетворяющие условию*

$$\|f(x + y)\| = \|f(x) + f(y)\| \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

¹⁾ Поскольку функция f не убывает.

аддитивны — иначе говоря, являются непрерывными решениями уравнения Коши

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (16)$$

Доказательство. Вначале предположим, что E строго выпукло, а непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ удовлетворяет условию (15). Тогда $\|f(2x)\| = 2\|f(x)\|$ и

$$\|f(3x)\| = \|f(2x) + f(x)\| \leq \|f(2x)\| + \|f(x)\| = 3\|f(x)\|. \quad (17)$$

Теперь оценим $f(4x)$ двумя способами:

$$\|f(4x)\| = \|f(3x) + f(x)\| \leq \|f(3x)\| + \|f(x)\| \leq 4\|f(x)\|, \quad (18)$$

$$\|f(x)\| = \|f(2x) + f(2x)\| = 4\|f(x)\|. \quad (19)$$

Ввиду (19) неравенства в формуле (18) выполняются как равенства, так что

$$\|f(3x)\| = 3\|f(x)\|.$$

Тогда и в формуле (17) неравенство превращается в равенство, т. е.

$$\|f(2x) + f(x)\| = \|f(2x)\| + \|f(x)\|$$

или

$$\|f(2x) + f(x)\| = \left\| \frac{f(2x)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(2x)}{2} \right\| + \|f(x)\|.$$

Но согласно неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \|f(2x) + f(x)\| &\leq \left\| \frac{f(2x)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(2x)}{2} + f(x) \right\| \leq \left\| \frac{f(2x)}{2} \right\| + \left\| \frac{f(2x)}{2} \right\| + \|f(x)\| = \\ &= \|f(2x) + f(x)\|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left\| \frac{f(2x)}{2} + f(x) \right\| = \left\| \frac{f(2x)}{2} \right\| + \|f(x)\|, \quad (20)$$

и так как $\|f(2x)/2\| = \|f(x)\|$, то ввиду строгой выпуклости ¹⁾ пространства E

$$f(2x) = 2f(x).$$

Предположим теперь, что $f(nx) = nf(x)$ для некоторого целого $n \geq 2$. Тогда

$$\|f((n+1)x)\| = \|f(nx) + f(x)\| = \|nf(x) + f(x)\| = (n+1)\|f(x)\|$$

и

$$\|f((n+2)x)\| = \|f(nx) + f(2x)\| = \|nf(x) + 2f(x)\| = (n+2)\|f(x)\|.$$

Снова используя неравенство треугольника, получаем

$$\|f((n+2)x)\| = \|f((n+1)x) + f(x)\| \leq \|f((n+1)x)\| + \|f(x)\| = (n+2)\|f(x)\|.$$

Поскольку крайние члены равны, то равны и средние:

$$\|f((n+1)x) + f(x)\| = \|f((n+1)x)\| + \|f(x)\|. \quad (21)$$

¹⁾ Строгая выпуклость означает, что если $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geq \|x\|, \|y\|$, то $x = y$. В данном случае $\left\| \frac{f(2x) + 2f(x)}{2} \right\| = \|f(2x)\| = \|2f(x)\|$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f((n+1)x) + f(x)\| &= (n+1) \left\| \frac{f((n+1)x)}{n+1} \right\| + \|f(x)\| \geq \\ &\geq \frac{n}{n+1} \|f((n+1)x)\| + \left\| \frac{f((n+1)x)}{n+1} + f(x) \right\| \geq \|f((n+1)x) + f(x)\|. \end{aligned}$$

Из среднего неравенства получаем

$$\left\| \frac{f((n+1)x)}{n+1} + f(x) \right\| = \left\| \frac{f((n+1)x)}{n+1} \right\| + \|f(x)\|.$$

В силу строгой выпуклости пространства E имеем¹⁾

$$f((n+1)x) = (n+1)f(x),$$

т. е. индуктивный переход выполнен. Отсюда, как обычно, получаем

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(x)$$

и для любого положительного рационального r

$$f(rx) = rf(x). \quad (22)$$

Кроме того, ввиду (15) выполнено равенство $\|f(0)\| = 0$, т. е. $f(0) = 0$.

В силу непрерывности функции f имеем

$$f(x) = xf(1) \quad \text{при всех } x \geq 0.$$

Так как

$$0 = \|f(0)\| = \|f(x-x)\| = \|f(x) + f(-x)\|,$$

то функция f нечётна. Поэтому $f(x) = xf(1)$ при всех $x \in \mathbb{R}$, и f аддитивна.

Обратно, пусть пространство E не является строго выпуклым. Построим непрерывную, но не аддитивную функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow E$, для которой выполнено (15).

Так как E не является строго выпуклым, то найдутся $a, b \in E$, для которых $\|a\| = \|b\| = 1$, $a \neq b$, и

$$\|a + b\| = \|a\| + \|b\| = 2.$$

Очевидно, что векторы a и b линейно независимы (если $a = \lambda b$, то $|\lambda| = 1$ и $|\lambda + 1| = 2$, откуда $\lambda = 1$, тогда как $a \neq b$).

Далее, если числа λ и μ одного знака, то

$$\|\lambda a + \mu b\| = |\lambda + \mu|. \quad (23)$$

Действительно, если, например, $\mu > \lambda \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \|\lambda a + \mu b\| &= \|\mu(a+b) - (\mu-\lambda)a\| \geq \mu\|a+b\| - (\mu-\lambda)\|a\| = \\ &= \mu \cdot 2 - (\mu-\lambda) \cdot 1 = \lambda + \mu. \end{aligned}$$

Обратное неравенство очевидно, откуда и следует (23).

¹⁾ Учитывая, что обе нормы в правой части равны (см. предыдущую сноску).

Пусть теперь функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, аддитивна и не равна тождественно нулю (т.е. имеет вид $g(x) = cx$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$). Определим $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)a & \text{при } |g(x)| \leq 1 \\ s(g(x))a + [g(x) - s(g(x))]b & \text{при } |g(x)| > 1, \end{cases}$$

где мы полагаем

$$\begin{aligned} s(g(x)) &= 1 & \text{при } g(x) \geq 0, \\ s(g(x)) &= -1 & \text{при } g(x) < 0. \end{aligned}$$

Поскольку функция g непрерывна, то и f непрерывна (если $x_n \rightarrow x$ и $|g(x)| = 1$, то $(g(x_n) - s(g(x_n)))b$ стремится к нулю). Сумма коэффициентов при a и b равна $g(x)$; используя этот факт, покажем, что соотношение (15) выполнено, в отличие от аддитивности. Заметим, что

$$\|f(x)\| = |g(x)|. \quad (24)$$

Это очевидно при $|g(x)| \leq 1$, а при $|g(x)| > 1$ следует из (23):

$$\|s(g(x))a + [g(x) - s(g(x))]b\| = |s(g(x)) + g(x) - s(g(x))| = |g(x)|.$$

Вычислим теперь $\|f(x) + f(y)\|$. Возможны четыре различных соотношения величин $|f(x)|$ и $|g(x)|$ с единицей.

Если $|g(x)| \leq 1$, $|g(y)| > 1$, то $f(x) + f(y) = [g(x) + s(g(y))]a + [(g(y) - s(g(y)))]b$. Коэффициенты при a и b имеют одинаковый знак, и в силу (23)

$$\|f(x) + f(y)\| = |g(x) + s(g(y)) + g(y) - s(g(y))| = |g(x) + g(y)| = |g(x + y)|.$$

По симметрии то же верно при $|g(x)| > 1$, $|g(y)| \leq 1$. Если $|g(x)| > 1$, $|g(y)| > 1$, то

$$f(x) + f(y) = (s[g(x)] + s[g(y)])a + (g(x + y) - s[g(x)] - s[g(y)])b.$$

Либо $s[g(x)] = -s[g(y)]$, либо $s[g(x)] = s[g(y)]$, и в обоих случаях получаем $\|f(x) + f(y)\| = |g(x + y)|$. Наконец, при $|g(x)| \leq 1$, $|g(y)| \leq 1$ имеем

$$\|f(x) + f(y)\| = \|g(x)a + g(y)a\| = |g(x) + g(y)| = |g(x + y)|.$$

Таким образом, во всех случаях

$$\|f(x) + f(y)\| = |g(x + y)|.$$

Но ввиду (24) $\|f(x + y)\| = |g(x + y)|$, откуда и следует (15).

Осталось показать, что функция f не аддитивна. Заменяя, если нужно, g на $-g$, находим $x_0 \in \mathbb{R}$, для которого $g(x_0) = \alpha > 0$. Для достаточно большого n имеем $g(nx_0) > 1$. Следовательно, существуют $x, y \in \mathbb{R}$, для которых

$$g(x) > 1, \quad g(y) > 1, \quad g(x + y) > 1.$$

В этом случае

$$f(x) + f(y) = 2a + (g(x + y) - 2)b.$$

Но

$$f(x + y) = a + (g(x + y) - 1)b.$$

Отсюда

$$\|f(x) + f(y) - f(x + y)\| = \|a - b\| \neq 0,$$

т.е. функция f не аддитивна, что и требовалось. Теорема 9 доказана. ■

Условие непрерывности для f в теореме 9 можно существенно ослабить (см.: Dhombres, 1979, р. 2.23–2.25). Открытым остаётся вопрос, верна ли теорема 9, когда на функцию ψ не наложено никаких условий регулярности.

10.4. Изометрии вещественных нормированных пространств

Уже при создании теории вещественных линейных нормированных пространств обнаружилось (Mazur–Ulam 1932), что изометрия $f : E \rightarrow F$ между двумя пространствами удовлетворяет уравнению Иенсена

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (25)$$

(случай равенства в формулах (13) и (9.20); см. (15.19)). Изометрия определяется функциональным уравнением

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|. \quad (26)$$

Предложение 10. Если функция f сюръективна, то из (26) вытекает (25).

Доказательство. Нужно показать, что f сохраняет полусуммы (середины отрезков). Попробуем найти для них чисто метрическую характеристику.

Если $x_1, x_2 \in E$, то полусумма $x = (x_1 + x_2)/2$ удовлетворяет равенствам

$$\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = \left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|. \quad (27)$$

Однако в произвольном метрическом пространстве этого недостаточно для характеристики полусуммы (см. контрпример в упр. 19). Иначе говоря, множество $M_0 = M_0(x_1, x_2)$ точек $x \in E$, удовлетворяющих условиям (27), не обязательно сводится к одной точке. Но мы уменьшим его вдвое и продолжим по рекурсии. Рассмотрим диаметр Δ_0 множества M_0 :

$$\Delta_0 = \sup_{x', x'' \in M_0} \|x' - x''\|.$$

Естественно, если $\Delta_0 = 0$, то множество $M_0(x_1, x_2)$ сводится к $\{(x_1 + x_2)/2\}$. Диаметр Δ_0 всегда конечен, поскольку для любого $x \in M_0$ из (27) следует, что $\|x\| \leq \|(x_1 - x_2)/2\| + \|x_1\|$. Пусть $M_1 = M_1(x_1, x_2)$ состоит из всех таких точек $x \in M_0$, что для любого $y \in M_0$ выполнено условие

$$\|x - y\| \leq \frac{\Delta_0}{2}.$$

Покажем, что $(x_1 + x_2)/2 \in M_1$. Возьмём $x \in M_0$, и пусть $x' \in E$ таково, что $x + x' = x_1 + x_2$, т.е. $(x_1 + x_2)/2$ является полусуммой x и x' . Так как $x' - x_1 = x_2 - x$ и $x' - x_2 = x_1 - x$, то $x' \in M_0$. В силу выбора x' имеем $\|x - (x_1 + x_2)/2\| = \|x' - (x_1 + x_2)/2\| = \frac{1}{2}\|x - x'\|$. Поскольку последнее выражение не превосходит $\Delta_0/2$, то $(x_1 + x_2)/2 \in M_1$.

Пусть при произвольном $n \geq 1$ множество $M_{n+1}(x_1, x_2)$ состоит из всех $x \in M_n(x_1, x_2)$, для которых из $y \in M_n(x_1, x_2)$ следует $\|x - y\| \leq \Delta_n/2$, где Δ_n — диаметр множества $M_n(x_1, x_2)$.

Будем писать M_n вместо $M_n(x_1, x_2)$, если это не ведёт к путанице.

Для всех $n \geq 1$ докажем по индукции включения $(x_1 + x_2)/2 \in M_n$ и $x' = -x + (x_1 + x_2) \in M_{n-1}$. Мы доказали их для $n = 1$. Пусть они верны для n , и пусть $x \in M_n$, $y \in M_{n-1}$. Поскольку $-y + (x_1 + x_2) \in M_{n-1}$, то

$$\|x' - y\| = \|-y + (x_1 + x_2) - x\| \leq \frac{\Delta_{n-1}}{2},$$

откуда $x' \in M_n$, что и требуется. Далее,

$$\left\| x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| = \frac{\|x - x'\|}{2} \leq \frac{\Delta_n}{2},$$

откуда $(x_1 + x_2)/2 \in M_{n+1}$, как и утверждалось.

Поскольку $\Delta_n \leq \Delta_0/2^n$, то $M(x_1, x_2) = \bigcap_{n \geq 0} M_n(x_1, x_2)$ состоит из одной точки

$(x_1 + x_2)/2$.

Пусть теперь $f : E \rightarrow F$ — сюръективная изометрия. В силу (26) она взаимно однозначна. Пусть $x, y \in E$. Для каждого $n \geq 0$ построим множество $M_n(f(x), f(y))$ в F . Оно совпадает с $f(M_n(x, y))$, так как f — изометрия. Поскольку $f(E) = F$, мы получаем (25):

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(x) + f(y)}{2} \right\} &= \bigcap_{n \geq 0} M_n(f(x), f(y)) = \bigcap_{n \geq 0} f(M_n(x, y)) = \\ &= f \left(\bigcap_{n \geq 0} M_n(x, y) \right) = \left\{ f \left(\frac{x + y}{2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Предложение 10 доказано. ■

Ввиду (26) отображение f непрерывно. Положив $y = 0$ в (25), имеем

$$f \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(0)}{2}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (25), получаем

$$\frac{f(x + y)}{2} + \frac{f(0)}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2},$$

т. е.

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0).$$

Функция $g(x) = f(x) - f(0)$ удовлетворяет уравнению Коши

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad (29)$$

(см. доказательство теоремы 4.9). Изометрия f непрерывна, а потому непрерывна и g . Следовательно,

$$g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{для всех } x \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Лишь в этом пункте было существенно, что дело происходит в вещественном нормированном пространстве. Получен следующий геометрический результат.

Теорема 11. Любая сюръективная изометрия между вещественными нормированными пространствами является аффинным преобразованием (композицией однородного линейного преобразования и сдвига).

При доказательстве следующей теоремы мы увидим, что теорема 11 и предложение 10, вообще говоря, не сохраняют силу, если изометрия f не сюръективна. В этом случае похожий результат верен для строго выпуклых пространств и служит их характеристикой. Идея состоит в том, что в строго выпуклом пространстве множество $M_0(x, y)$ всегда сводится к точке.

Теорема 12. Нормированное пространство $(F, \|\cdot\|)$ строго выпукло, если и только если для любого нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$ любая изометрия $f : E \rightarrow F$ удовлетворяет условию (25).

Доказательство. Вначале предположим, что пространство $(F, \|\cdot\|)$ не является строго выпуклым. Пусть $a, b \in F, a \neq b, \|a\| = \|b\| = 1, \|a + b\| = \|a\| + \|b\|$. Как

и в доказательстве теоремы 9 (взяв просто $g(x) = x$), определим $f : \mathbb{R} \rightarrow F$ равенствами

$$f(x) = \begin{cases} xa & \text{при } |x| \leq 1, \\ a + (x-1)b & \text{при } x \geq 1, \\ -a + (x+1)b & \text{при } x \leq -1. \end{cases}$$

Как и в теореме 9, получаем

$$\|f(x) + f(y)\| = \|f(x+y)\| = |x+y|.$$

Из $f(0) = 0$ выводим, что $f(x) = -f(-x)$. Поэтому

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| = |x-y|,$$

т. е. f — изометрия из $\mathbb{R}$ в F . Она, однако, не аддитивна, как мы видели при доказательстве теоремы 9. Взяв $x = 2, y = 0$, видим, что (25) не выполнено. (Построенная функция f не сюръективна даже в подпространстве, натянутом на a и b . Этот пример показывает, что в предложении 10 сюръективность существенна.)

Обратно, пусть $(F, \|\cdot, \cdot\|)$ строго выпукло, $(E, \|\cdot, \cdot\|)$ — нормированное пространство, $f : E \rightarrow F$ — изометрия. Тогда

$$\left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \right\| = \left\| \frac{x+y}{2} - x \right\| = \left\| \frac{y-x}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|f(x) - f(y)\|.$$

Точно так же

$$\left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y) \right\| = \frac{1}{2} \|f(x) - f(y)\| = \left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) \right\|.$$

Для $u = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(y), v = -\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)\right)$ получаем

$$\|u\| = \|v\| = \left\| \frac{u+v}{2} \right\|.$$

Так как $(F, \|\cdot, \cdot\|)$ строго выпукло, то $u = v$. Следовательно,

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y),$$

как и утверждалось. (Отметим, что в теореме 12 можно рассматривать и пространства над телами, отличными от $\mathbb{R}$.) ■

Следует упомянуть, что в работе Andalafte, Blumenthal (1964) метрические характеристики банаховых и евклидовых пространств даны иными средствами.

Изучим теперь случай, когда E и F — пространства непрерывных функций.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, а $C_{\mathbb{R}}(X)$ (как и в начале § 1) — пространство всех вещественнозначных непрерывных функций на X , снабжённое равномерной нормой. Функции, тождественно равные 1 и 0, обозначаются $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$ соответственно. Пространство $C_{\mathbb{R}}(X)$ не является строго выпуклым, если X не сводится к одной точке.

Теорема 13. Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы пространства, $P : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(Y)$ — биекция, отображающая $\mathbf{0}$ в $\mathbf{0}$. Если P — изометрия, то для всех $f, g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ выполнено равенство

$$P(\mathbf{1})P(fg) = Pf \cdot Pg. \quad (30)$$

Доказательство. Поскольку $P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, то по теореме 11 биекция P линейна. При этом $\|Pf\| = \|f\|$ для всех $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Согласно теореме Рисса о представлении, топологическое двойственное пространство к $C_{\mathbb{R}}(Y)$ есть множество $M(Y)$

всех (ограниченных) мер Радона на Y . Пусть $P^* : M(Y) \rightarrow M(X)$ — оператор, сопряжённый к P . Так как $\|P\| = 1$, то $\|P^*\| = 1$. В действительности для всех $\mu \in M(Y)$ выполнено равенство

$$\|P^*\mu\| = \|\mu\|. \quad (31)$$

В самом деле,

$$\|P^*\mu\| = \sup_{\|f\|=1, f \in C_{\mathbb{R}}(X)} |(f, P^*\mu)| = \sup_{\|f\|=1, f \in C_{\mathbb{R}}(X)} |(Pf, \mu)|.$$

Но P — биекция и изометрия. Поэтому

$$\|P^*\mu\| = \sup_{\|g\|=1, g \in C_{\mathbb{R}}(Y)} |(g, \mu)| = \|\mu\|,$$

т. е. оператор P^* является изометрией. Он является и биекцией, так как оператор P сюръективен. Эта биекция переводит крайние точки единичного шара $M_1(Y)$ в крайние точки единичного шара $M_1(X)$ в $M(X)$. Но согласно предложению 4 крайние точки μ шара $M_1(X)$ удовлетворяют уравнению

$$\mu(1)\mu(fg) = \mu(f)\mu(g) \quad \text{для всех } f, g \in C_{\mathbb{R}}(X). \quad (32)$$

Поэтому для крайних точек μ в $M_1(Y)$

$$P^*\mu(1)P^*\mu(fg) = P^*\mu(f)P^*\mu(g) \quad \text{при всех } f, g \in C_{\mathbb{R}}(X),$$

или

$$(P(1), \mu)(P(fg), \mu) = (Pf, \mu)(Pg, \mu).$$

Мы видели (предложение 4 и лемма 5), что все дираковские меры δ_y ($y \in Y$) являются крайними точками единичного шара $M_1(Y)$. Поэтому для всех $f, g \in C_P(X)$ выполнено (30). Теорема 13 доказана. ■

В предложении 6 дан общий вид ограниченных линейных операторов $P : C(X) \rightarrow C(Y)$, удовлетворяющих равенству (30), при условии, что для каждого $y \in Y$ существует такая функция $f \in C(X)$, что $Pf(y) \neq 0$. В предположениях теоремы 13 это выполнено (P является биекцией), и мы получаем ($y \in Y, f \in C_{\mathbb{R}}(X)$):

$$Pf(y) = \alpha(y)f(\phi(y)), \quad (33)$$

где $\alpha : Y \rightarrow \mathbb{R}$ и $\phi : Y \rightarrow X$ — непрерывные функции, причём α не является тождественным нулём. Ввиду симметрии между P и P^{-1} при допущениях теоремы 13, получаем для всех $x \in X$ и всех $g \in C_{\mathbb{R}}(Y)$:

$$P^{-1}g(x) = \alpha'(x)g(\psi(x)), \quad (34)$$

где $\alpha' : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $\psi : X \rightarrow Y$ — непрерывные функции, причём α' — ненулевая. Из (33) и (34) следует, что

$$g(y) = \alpha(y)\alpha'(\phi(y))g(\psi \circ \phi(y)). \quad (35)$$

Положив $g = 1$, получаем $\alpha(y)\alpha'(\phi(y)) = 1$. Поскольку $C_{\mathbb{R}}(Y)$ разделяет точки множества Y , отображение $\psi \circ \phi$ является тождественным. По симметрии то же верно и для $\phi \circ \psi$. Значит, компакты X и Y гомеоморфны. Далее, поскольку P (а потому и P^{-1}) — изометрия, то $|\alpha| \leq 1$ и $|\alpha'| \leq 1$. Так как $\alpha(y)\alpha'(\phi(y)) = 1$, то $|\alpha| = |\alpha'| = 1$.

Можно сказать (см. конец § 1), что биективная изометрия из $C_{\mathbb{R}}(X)$ в $C_{\mathbb{R}}(Y)$, переводящая 0 в 0, является хорошим (nice) оператором.

Как следствие из только что доказанного получаем теорему Банаха–Стоуна:

Теорема 14. *Изометрическая биекция между $C_{\mathbb{R}}(X)$ и $C_{\mathbb{R}}(Y)$ существует тогда и только тогда, когда X и Y — гомеоморфные компактные хаусдорфовы пространства.*

10.5. Топология на множестве решений функционального уравнения: группа Бора

В этом параграфе мы используем топологию на пространствах функций, в частности слабую звёздную топологию. В дальнейшем эти результаты не потребуются.

В § 5.3 мы рассматривали спектр $\mathcal{B}$ комплексной алгебры $\mathcal{P}$ всех тригонометрических многочленов на $\mathbb{R}$. Изучим его свойства более подробно. В предложении 5.9 мы доказали, что $\mathcal{B}$ — это множество всех тех решений уравнения (5.26), которые удовлетворяют условию (5.27). Здесь будет удобно ввести новое функциональное пространство.

Определим $\mathcal{A}$ как замыкание по равномерной норме алгебры $\mathcal{P}$ в пространстве $C_b(\mathbb{R})$ всех комплекснозначных ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$. Элемент $f \in \mathcal{A}$ называется *почти периодической функцией Бора*. Его можно получить как равномерный предел последовательности f_n тригонометрических многочленов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|) = 0. \quad (36)$$

Таким образом, f является непрерывной комплекснозначной функцией. В качестве примеров почти периодических функций Бора можно привести $\sin x$, $\sin x + \cos 2^{1/2}x$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \lambda_n x$, где $\{\lambda_n\}$ — любая последовательность вещественных чисел. Алгебру $\mathcal{A}$, как и $\mathcal{P}$, лучше всего изучать с помощью её спектра. Напомним, что *спектр* алгебры $\mathcal{A}$ состоит из всех комплекснозначных функций $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, таких что

- (i) ϕ линейна: $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}; f, g \in \mathcal{A})$,
- (ii) ϕ мультипликативна: $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g) \quad (f, g \in \mathcal{A})$,
- (iii) $\phi(1) = 1$,
- (iv) $|\phi(f)| \leq \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad (f \in \mathcal{A})$.

Легко проверить, что спектр $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{P}$ совпадает со спектром алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому можно использовать предложение 5.9 из § 5.3: существует биекция b между $\mathcal{B}$ и множеством $\mathcal{C}$ всех характеров $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Она определяется формулой

$$\phi(e_{\lambda}) = \Phi(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (37)$$

где $e_{\lambda}(x) = e^{i\lambda x}$. Положим $\Gamma = \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Тогда $\mathcal{C}$ — это множество всех решений $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$ функционального уравнения

$$\Phi(\lambda + \mu) = \Phi(\lambda)\Phi(\mu) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}). \quad (38)$$

Введём на $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ топологию, которая превратит их в компактные топологические группы.

Воспользуемся отображением $h : x \mapsto \hat{x}$ из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{B}$, где $\hat{x}(f) = f(x)$ для всех $f \in \mathcal{A}$. Среди элементов из $\mathcal{C}$ непрерывными являются характеры $b(\hat{x})$. С учётом теоремы 5.3 множество всех $b(\hat{x})$ ($x \in \mathbb{R}$) не исчерпывает $\mathcal{C}$.

Мы определили бинарную операцию $*$ на $\mathcal{B}$ по формуле

$$\phi_1 * \phi_2(e_{\lambda}) = \phi_1(e_{\lambda})\phi_2(e_{\lambda}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (39)$$

и доказали, что *группа Бора* $(\mathcal{B}, *)$ является абелевой, а отображение « $\wedge$ » — инъективным гомоморфизмом из $(\mathbb{R}, +)$ в $(\mathcal{B}, *)$.

На $\mathcal{C}$ естественно определяется бинарная операция $\otimes$ по формуле

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2(\lambda) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Легко видеть, что b является изоморфизмом между абелевыми группами $(\mathcal{B}, *)$ и $(\mathcal{C}, \otimes)$. Действительно,

$$b(\phi_1 * \phi_2)(\lambda) = (\phi_1 * \phi_2)(e_\lambda) = \phi_1(e_\lambda) \cdot \phi_2(e_\lambda) = b(\phi_1)(\lambda) \cdot b(\phi_2)(\lambda),$$

т. е.

$$b(\phi_1 * \phi_2) = b(\phi_1) \otimes b(\phi_2).$$

Множество $\mathcal{B}$ содержится в единичном шаре двойственного топологического пространства $\mathcal{A}^*$ банаховой алгебры $\mathcal{A}$. Обычно на нём вводится слабая звёздная топология. Базис окрестностей нуля в этой топологии имеет вид

$$V(\varepsilon, f_1, \dots, f_n) = \{\phi \mid \phi \in \mathcal{A}^*, |\phi(f_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n)\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $f_1, \dots, f_n$ — конечное семейство в $\mathcal{A}$. Теорема Алаоглу и Бурбаки (см.: Dunford, Schwartz, 1958, р. 423–424) утверждает, что единичный шар пространства $\mathcal{A}^*$ в слабой звёздной топологии является компактным хаусдорфовым пространством. Как следствие, множество $\mathcal{B}$ в этой топологии относительно компактно (т. е. его замыкание компактно). Пусть ϕ_i — направленное множество в $\mathcal{B}$, сходящееся к некоторому элементу $\phi \in \mathcal{A}^*$. Тогда если $f \in \mathcal{A}$, то $\phi_i(f)$ сходится к $\phi(f)$. Нетрудно видеть, что ϕ удовлетворяет условиям (i)–(iv), т. е. содержится в $\mathcal{B}$. Значит, $\mathcal{B}$ замкнуто в слабой звёздной топологии. Так как множество $\mathcal{B}$ относительно компактно, то оно является компактным хаусдорфовым пространством.

Предложение 15. *В слабой звёздной топологии группа Бора $(\mathcal{B}, *)$ является компактной отделимой топологической группой.*

Доказательство. Пространство $\mathcal{B}$ является хаусдорфовым, и мы доказали, что оно компактно. При этом $(\mathcal{B}, *)$ является абелевой группой. Мы должны связать эти структуры, т. е. доказать непрерывность отображений

$$(\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi_1 * \phi_2 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (40)$$

($\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ наделено топологией произведения) и

$$\phi \mapsto \bar{\phi} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (41)$$

где отображение $\bar{\phi}$ обратно к ϕ относительно к операции $*$ (как мы видели в § 5.3, $\bar{\phi}(e_\lambda) = \overline{\phi(e_\lambda)}$). Но непрерывность этих отображений легко следует из (39) и определения слабой звёздной топологии. ■

На множество характеров $\mathcal{C}$ также имеется естественная топология. В самом деле, можно рассматривать $\mathcal{C}$ как подмножество в $C_b(\mathbb{R})$ — множестве всех непрерывных ограниченных комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$. Введём на $C_b(\mathbb{R})$ топологию поточечной сходимости. Базис окрестностей нуля в ней имеет вид

$$W(\varepsilon, x_1, \dots, x_n) = \{\Phi \mid \Phi \in C_b(\mathbb{R}), |\Phi(x_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n)\},$$

где $\varepsilon > 0$ и $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Как видно из (38), $\mathcal{C}$ замкнуто в этой (хаусдорфовой) топологии. При этом $(\mathcal{C}, \otimes)$ является топологической группой. Таким образом, без труда устанавливается, что множество решений функционального уравнения вида (38) замкнуто в слабой звёздной топологии и в топологии поточечной сходимости.

Докажем теперь, что отображение $b : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ является *гомеоморфизмом*. Поскольку речь идёт о топологических группах, достаточно доказать непрерывность отображения b в точке $\hat{0}$ и непрерывность отображения b^{-1} в точке $b(\hat{0}) = 1$. Напомним, что 1 обозначает функцию, тождественно равную 1. Она является характером,

а именно единицей группы $(\mathcal{C}, \otimes)$. С другой стороны, b является биекцией, $\mathcal{B}$ — хаусдорфов компакт, $\mathcal{C}$ — хаусдорфово пространство. Поэтому достаточно доказать непрерывность отображения b в точке $\widehat{0}^1$.

Пусть $W'(\varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — некоторая окрестность элемента 1 в топологии поточечной сходимости в $C_b(\mathbb{R})$, т. е.

$$W'(\varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \{\Phi \mid \Phi \in C_b(\mathbb{R}), |\Phi(\lambda_k) - 1| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n)\} \cap \mathcal{C}.$$

Достаточно показать, что в $\mathcal{B}$ существует окрестность нуля V' (в слабой звёздной топологии на $\mathcal{A}^*$), такая что

$$b(V' \cap \mathcal{B}) \subset W'.$$

Если $b(\phi) = \Phi$, то это включение означает, что $|\Phi(\lambda_k) - 1| < \varepsilon$ при всех $\phi \in V'$. Но это неравенство выполняется, если положить

$$V' = \{\phi \mid \phi \in \mathcal{B}, |\phi(e_{\lambda_k}) - \widehat{0}(e_{\lambda_k})| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \dots, n)\}. \blacksquare$$

В следующем предложении удобнее использовать пространство $\mathcal{C}$ и топологию на нём. Так как $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ изоморфны как топологические группы, то в силу предложения 15 $(\mathcal{C}, \otimes)$ является компактной отделимой топологической группой.

Предложение 16. Пусть $R^\wedge$ — образ пространства $\mathbb{R}$ в $\mathcal{B}$ при отображении « $\wedge$ ». Тогда $R^\wedge$ — плотная подгруппа в $(\mathcal{B}, *)$ в слабой звёздной топологии.

Доказательство. Поскольку топологические группы $(\mathcal{B}, *)$ и $(\mathcal{C}, \otimes)$ изоморфны, то нам нужно доказать, что множество $b(R^\wedge)$ плотно в $\mathcal{C}$ в топологии поточечной сходимости. Мы уже отметили, что $b(R^\wedge)$ состоит из непрерывных характеров для $\mathbb{R}$. Нужно показать, что каждое непустое открытое подмножество $\mathcal{O} \subset \mathcal{C}$ содержит непрерывный характер для $\mathbb{R}$. Пусть $\Phi \in \mathcal{O}$. Существует $\varepsilon > 0$, а также конечное семейство $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, такие что $\Phi \otimes W'(\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \mathcal{O}$. Достаточно показать, что в нём содержится непрерывный характер. Пусть $z_i = \Phi(x_i)$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что найдутся взаимно простые целые числа $d_1, \dots, d_n$, для которых

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j = 0.$$

Из (38) следует равенство

$$\prod_{j=1}^n z_j^{d_j} = \Phi(0) = 1.$$

Таким образом, условия теоремы 5.8 выполняются при $\mu_j = x_j$ ($j = 1, \dots, n$). Согласно этой теореме существует $x \in \mathbb{R}$, для которого

$$|e_x(x_i) - \Phi(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Это означает, что непрерывный характер e_x принадлежит окрестности

$$\Phi \otimes W'(\varepsilon, x_1, \dots, x_n),$$

что и требовалось. $\blacksquare$

Отображение « $\wedge$ » из $\mathbb{R}$ в $\mathcal{B}$ непрерывно в слабой звёздной топологии (так как $\widehat{x}(f) = f(x)$ при $f \in \mathcal{A}$, $x \in \mathbb{R}$, то из сходимости последовательности x_n в $\mathbb{R}$ следует поточечная сходимость последовательности функционалов $\widehat{x}_n$ на $\mathcal{A}$). В § 5.3 мы доказали, что это отображение взаимно однозначно и является гомоморфизмом из

¹⁾ В этом случае b является гомеоморфизмом. Хаусдорфовость пространства $\mathcal{B}$ здесь не существенна.

$(\mathbb{R}, +)$ в $(\mathcal{B}, *)$. Однако важно отметить, что оно *не* является гомеоморфизмом между $\mathbb{R}$ и его образом (со слабой звёздной топологией) $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\wedge$ (см. упр. 3).

Предложения 15 и 16 показывают, что группа Бора является компактификацией локально компактной группы $(\mathbb{R}, +)$. Предоставляем читателю доказать, что эта компактификация — «наименьшая» среди топологических групп с точностью до изоморфизма (см. упр. 5).

Теперь покажем, как группа Бора помогает понять строение алгебры $\mathcal{A}$ всех почти периодических функций Бора. Пусть $f \in \mathcal{A}$. Определим отображение $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, положив при всех $\phi \in \mathcal{B}$, $\Phi = b(\phi) \in \mathcal{C}$

$$F(\Phi) = \phi(f). \quad (42)$$

Пусть $\mathcal{D}$ состоит из отображений F , соответствующих всем $f \in \mathcal{A}$. Так как b — гомеоморфизм между $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, то нетрудно видеть, что каждое такое F непрерывно в топологии, введённой на $\mathcal{C}$. Значит, $\mathcal{D}$ содержится в алгебре $C(\mathcal{C})$ всех непрерывных комплекснозначных функций на компактном хаусдорфовом пространстве $\mathcal{C}$. Поскольку ϕ принадлежит спектру алгебры $\mathcal{A}$, ввиду (42) получаем

$$F_1(\Phi) + F_2(\Phi) = \phi(f_1 + f_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{A}),$$

$$\lambda F(\Phi) = \phi(\lambda f) \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

$$F_1(\Phi)F_2(\Phi) = \phi(f_1 f_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathcal{A}).$$

Таким образом, $\mathcal{D}$ является подалгеброй в $C(\mathcal{C})$.

Заметим, что $\phi(e_{-\lambda}) = \Phi(-\lambda) = \overline{\Phi(\lambda)} = \overline{\phi(e_\lambda)}$. Поэтому $\phi(\bar{f}) = \overline{\phi(f)}$ для любого тригонометрического многочлена f , а тогда и для любой почти периодической функции Бора. Значит, если $F \in \mathcal{D}$, то и сопряжённая функция $\bar{F}$ также принадлежит $\mathcal{D}$ (поскольку $\bar{F}(\Phi) = \phi(\bar{f})$).

Если $\Phi_1 \neq \Phi_2$, то $\phi_1 \neq \phi_2$ и существует функция $f \in \mathcal{A}$, для которой $\phi_1(f) \neq \phi_2(f)$. Значит, $F(\Phi_1) \neq F(\Phi_2)$, т. е. подалгебра $\mathcal{D}$ разделяет точки множества $\mathcal{C}$. При этом функции, постоянные на $\mathcal{C}$, принадлежат $\mathcal{D}$.

Выполнены все условия теоремы Стоуна–Вейерштрасса (Dunford–Schwartz, 1958, р. 272–276), поэтому подалгебра $\mathcal{D}$ плотна в $C(\mathcal{C})$. Как обычно в этой главе, мы используем компактность пространства $\mathcal{C}$ и вводим на $C(\mathcal{C})$ топологию равномерной нормы

$$\|F\| = \sup_{\Phi \in \mathcal{C}} |F(\Phi)|.$$

Естественно сравнить эту норму с равномерной нормой почти периодической функции Бора f из формулы (42).

Из свойства (iv) в определении спектра $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ получаем неравенство

$$\|F\| \leq \|f\|.$$

Обратно, пусть $f \in \mathcal{A}$. Для любого натурального $n > 1$ существует вещественное x_n , такое что $|f(x_n)| \geq (1 - 1/n)\|f\|$. Но $f(x_n) = \hat{x}_n(f) = F(b(\hat{x}_n))$ согласно (42), откуда

$$\|F\| \geq |F(b(\hat{x}_n))| \geq (1 - 1/n)\|f\|.$$

Устремив n к бесконечности, получаем, что

$$\|F\| \geq \|f\|.$$

Мы показали, что для всех $f \in \mathcal{A}$

$$\|F\| = \|f\|. \quad (43)$$

Теперь мы готовы доказать главный результат этого параграфа.

Теорема 17. *Алгебра почти периодических функций Бора с равномерной нормой изометрически изоморфна алгебре всех комплекснозначных непрерывных функций на группе Бора со слабой звёздной топологией.*

Доказательство. Поскольку хаусдорфовы компакты $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ гомеоморфны, то по теореме 14 банаховы алгебры $C(\mathcal{B})$ и $C(\mathcal{C})$ изометрически изоморфны. Поэтому достаточно доказать, что изометрически изоморфны $C(\mathcal{C})$ и $\mathcal{A}$.

Соответствие $f \mapsto F$, определённое в (42), является гомоморфизмом комплексной алгебры $\mathcal{A}$ в $C(\mathcal{C})$, причём в силу (43) это изометрия. Её образ $\mathcal{D}$ является банаховой подалгеброй в $C(\mathcal{C})$. Мы уже доказали, что он плотен в $C(\mathcal{C})$. Поэтому $\mathcal{D}$ совпадает с $C(\mathcal{C})$, что завершает доказательство теоремы 17. ■

Соединив предложение 16 и теорему 17, получаем удобную характеристику почти периодических функций Бора.

Теорема 18. *Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ является почти периодической функцией Бора, если и только если её можно продолжить до непрерывной функции на группе Бора со слабой звёздной топологией.*

Подразумевается, что $\mathbb{R}$ вложено в $\mathcal{B}$ с помощью отображения « $\wedge$ » (которое мы обозначаем также h). Под продолжением для f мы понимаем продолжение функции $f \circ h^{-1}$ с множества $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\wedge$ на $\mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть f — почти периодическая функция Бора, отображение F определено посредством (42), отображение $G: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ определено формулой $G(\phi) = F(\Phi)(\phi(f))$. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ найдём значение G при $\hat{x} = h(x)$:

$$G(\hat{x}) = \hat{x}(f) = f(x),$$

откуда

$$f(h^{-1}(\hat{x})) = G(\hat{x}).$$

Таким образом, функция F , непрерывная на $\mathcal{B}$, является продолжением для $f \circ h^{-1}$.

Обратно, пусть G , непрерывная комплекснозначная функция на $\mathcal{B}$, является продолжением для $f \circ h^{-1}$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. По теореме 17 существует почти периодическая функция Бора $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, такая что $G(h(x)) = g(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда $g = f$, и теорема 18 доказана. ■

Из теоремы 18 легко следуют классические свойства почти периодических функций Бора. Объяснение названия «почти периодические» см. в упр. 6. В заключение этого параграфа дадим прямое доказательство существования меры Радона, инвариантной относительно сдвигов, на группе $(\mathcal{B}, *)$.

Теорема 19. *На группе Бора можно ввести положительную меру Радона с полным объёмом 1, инвариантную относительно сдвигов.*

Доказательство. В силу леммы 3 и теоремы Рисса о представлении положительной меры Радона μ с полным объёмом 1 — это непрерывная линейная форма $\mu: C(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{C}$, такая что $\mu(1) = 1$ и $\|\mu\| = 1$. Но согласно теореме 17 алгебры $C(\mathcal{B})$ и $\mathcal{A}$ изометрически изоморфны, так что нам нужно найти линейную непрерывную функцию $Q_\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, для которой $\|Q_\mu\| = 1$ и $Q_\mu(1) = 1$. Инвариантность меры μ при сдвигах означает, что $\mu(F_\phi) = \mu(F)$ для всех $\phi \in \mathcal{B}$, где $F_\phi(\psi) = F(\phi * \psi)$. Аналогичное условие для Q_μ имеет вид: $Q_\mu(f_y) = Q_\mu(f)$ при всех $y \in \mathbb{R}$, где $f_y(x) = f(y + x)$. Таким образом, чтобы найти меру μ из утверждения теоремы, достаточно найти функцию Q , которая инвариантна при сдвигах в $\mathcal{A}$, линейна, имеет норму 1, причём $Q(1) = 1$.

Положим

$$Q(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(y) dy \quad (44)$$

для всех тригонометрических многочленов f . Этот предел существует, поскольку $Q(e_\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ и $Q(1) = 1$. Далее, $\|Qf\| \leq \|f\|$, откуда $\|Q\| = 1$; можно продолжить Q с сохранением этих свойств на все почти периодические функции f . Нетрудно видеть, что продолжение по-прежнему имеет вид (44). При этом $Q(f_x) = Q(f)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Теорема 19 доказана. ■

Мера из теоремы 19 единственна (см. упр. 20). Она обычно обозначается $d\Phi$ на $\mathcal{C}$ (и $d\phi$ на $\mathcal{B}$). С учётом (42) можно записать

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(y) dy = \int_{\mathcal{C}} F(\Phi) d\Phi. \quad (45)$$

(О дальнейших свойствах группы Бора см. упр. 5, 7, 9.)

Положительная мера Радона, инвариантная при сдвигах, существует не только на группе Бора. Можно доказать, что на любой локально компактной абелевой топологической группе существует мера с такими свойствами (она называется *мерой Хаара*). На такой группе G естественно рассматривать алгебру $L^1(G)$, которая состоит из всех функций $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, измеримых и интегрируемых относительно меры Хаара, обозначаемой dx (интеграл $\int_G |f(x)| dx$ конечен, и мы считаем функции f, g

эквивалентными, если $\int_G |f(x) - g(x)| dx = 0$). Пространство $L^1(G)$ с нормой $\|f\|_1 = \int_G |f(x)| dx$ является банаховым. Оно становится и банаховой алгеброй, если ввести в $L^1(G)$ свёртку

$$f * g(x) = \int_G f(x - y)g(y) dy,$$

определённую почти всюду (относительно меры Хаара dx). Теорема 7.10, как и её доказательство (в котором используется условное уравнивание Коши), легко обобщается на любую локально компактную абелеву группу (см. упр. 23). В этом смысле спектр алгебры $L^1(G)$ совпадает с множеством $G^\wedge$ всех *непрерывных* характеров группы G .

Напомним (гл. 8), что характер группы G — это комплекснозначная функция $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y) \quad (x, y \in G) \quad (46)$$

и

$$|\chi(x)| = 1 \quad (x \in G). \quad (47)$$

Как мы видели, на множестве $G^\wedge$ можно ввести бинарную операцию $*$ по формуле

$$\chi_1 * \chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x) \quad (x \in G).$$

Получаем абелеву группу, которая называется *двойственной группой для G* .

Как и в случае группы Бора, на группе $G^\wedge$ можно рассмотреть две топологии. Одна из них — слабая звёздная топология на спектре алгебры свёрток $L^1(G)$, другая — топология равномерной сходимости на компактах в G . Аналогично случаю группы Бора доказывается, что эти топологии совпадают. При этом $G^\wedge$ является *локально компактной* топологической группой.

Свяжем эти результаты с тем, что сделано выше для случая группы Бора. Мы ввели дискретную топологию на $\mathbb{R}$, получив локально компактную абелеву группу $\mathbb{R}_d$. Её двойственная группа $\mathbb{R}_d^\wedge$ является группой Бора. Топология этой двойственной

группы совпадает с введённой выше топологией на группе Бора. В данном случае имеет место компактность, а не только локальная компактность (упр. 22).

В свою очередь, для группы $G^\wedge$ с естественной топологией существует двойственная группа $(G^\wedge)^\wedge$. Замечательная теорема Понтрягина утверждает, что $(G^\wedge)^\wedge$ совпадает с G как группа и как топологическое пространство. Существенную роль в доказательстве играет теорема Бохнера, упоминавшаяся в гл. 8 (см. упр. 18). Обо всех этих основополагающих результатах абстрактного коммутативного гармонического анализа см.: Hewitt–Ross, 1963 (Р. 355–439) и Rudin, 1962 (Р. 1–57).

10.6. Нормирования в полях рациональных и вещественных чисел

Из следствия 3.8 легко определить все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (48)$$

Более узкий класс функций дополнительно удовлетворяет условиям

$$f(x) = 0, \quad \text{если и только если } x = 0, \quad (49)$$

$$f(x_0) \neq 1 \quad \text{при некотором } x_0 \neq 0, \quad (50)$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}. \quad (51)$$

Такие функции называются *нетривиальными нормированиями* на $\mathbb{R}$. Их вид легко определить.

Предложение 20. Пусть $0 < r \leq 1$. Тогда $f(x) = |x|^r$ — нетривиальное нормирование на $\mathbb{R}$.

Доказательство требуется лишь для соотношения (51), т. е.

$$|x+y|^r \leq |x|^r + |y|^r \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (52)$$

При $r = 1$ это очевидно. Если $0 < r < 1$, то

$$\frac{|x|+|y|}{(|x|^r+|y|^r)^{1/r}} = \left(\frac{|x|^r}{|x|^r+|y|^r} \right)^{1/r} + \left(\frac{|y|^r}{|x|^r+|y|^r} \right)^{1/r}. \quad (53)$$

Так как

$$\frac{|x|^r}{|x|^r+|y|^r} \leq 1, \quad \frac{|y|^r}{|x|^r+|y|^r} \leq 1$$

и $1/r \geq 1$, то

$$\left(\frac{|x|^r}{|x|^r+|y|^r} \right)^{1/r} \leq \frac{|x|^r}{|x|^r+|y|^r}, \quad \left(\frac{|y|^r}{|x|^r+|y|^r} \right)^{1/r} \leq \frac{|y|^r}{|x|^r+|y|^r}.$$

С учётом (53) получаем

$$|x|+|y| \leq (|x|^r+|y|^r)^{1/r},$$

откуда следует (52) и предложение 20. ■

Если вместо $\mathbb{R}$ рассматривается тело F , то функция $f : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющая условиям (48)–(51) при всех $x, y \in F$, по-прежнему называется *нетривиальным нормированием*.

Интересно, что на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ существуют нетривиальные нормирования, которые не являются ограничением нормирования $f(x) = |x|^r$ ($0 < r \leq 1$).

Таковы *p*-адические нормирования. Пусть $\alpha \in]0, 1[$, и пусть *p* — простое число. Любое рациональное число $x \neq 0$ можно записать в виде

$$x = p^n \frac{q}{r}, \quad (54)$$

где $q \in \mathbb{Z}^*$, $r \in \mathbb{N}$ ($r \in \mathbb{N}$), причём *q* и *r* не делятся на *p*. Положим

$$f_{\alpha,p}(x) = \alpha^n,$$

а также

$$f_{\alpha,p}(0) = 0.$$

Функция $f_{\alpha,p} : \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ корректно определена (если $p^n(q/r) = p^{n'}(q'/r')$, то $n = n'$).

Предложение 21. Функция $f_{\alpha,p}$ является нетривиальным нормированием на $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Условия (49) и (50) заведомо выполнены. Докажем (48). Если $x = p^n q/r$, $y = p^m s/t$, то $xy = p^{n+m}(qs/rt)$. При этом *p* не делит *q*, *s*, *r* и *t*, а потому не делит *qs* и *rt*. Отсюда

$$f_{\alpha,p}(xy) = \alpha^{n+m} = f_{\alpha,p}(x)f_{\alpha,p}(y),$$

т. е. мы доказали (48). Остаётся доказать (51). В действительно верно более сильное утверждение, а именно:

$$f_{\alpha,p}(x+y) \leq \max(f_{\alpha,p}(x), f_{\alpha,p}(y)). \quad (55)$$

Чтобы доказать (55), вначале возьмём $x \neq 0$, для которого $f_{\alpha,p}(x) \leq 1$. Можно записать

$$x = p^n \frac{q}{r},$$

где $n \geq 0$, *p* не делит *q* и *r*. Тогда

$$1+x = 1 + p^n \frac{q}{r} = \frac{r+p^n q}{r}.$$

Так как *p* не делит знаменатель *r*, то заведомо $f_{\alpha,p}(1+x) = \alpha^{n'}$, где $n' \geq 0$, и потому $f_{\alpha,p}(1+x) \leq 1$.

Возьмём теперь произвольные $x, y \in \mathbb{Q}$. Если *x* или *y* равно нулю, то (55) очевидно. В противном случае можно считать без ограничения общности, что $0 < f_{\alpha,p}(x) \leq f_{\alpha,p}(y)$. Тогда

$$f_{\alpha,p}\left(\frac{x}{y}\right) \leq 1.$$

По доказанному выше

$$f_{\alpha,p}\left(1 + \frac{x}{y}\right) \leq 1.$$

Отсюда

$$f_{\alpha,p}(x+y) = f_{\alpha,p}(1+x/y)f_{\alpha,p}(y) \leq f_{\alpha,p}(y) = \max(f_{\alpha,p}(x), f_{\alpha,p}(y)),$$

т. е. доказано (55), а тем самым и предложение 21. ■

На множестве $\mathbb{Q}$ можно ввести метрику, положив $d(x, y) = f_{\alpha,p}(x-y)$. Соответствующая, так называемая *p*-адическая, топология сильно отличается от обычной, связанной с метрикой $|x-y|$. Например, $f_{\alpha,p}(n) \leq 1$ для всех натуральных *n*. Поэтому $f_{\alpha,p}(nx) \leq f_{\alpha,p}(x)$ для всех натуральных *n* и рациональных *x*. Как известно,

абсолютная величина обладает свойством *архимедовости*: для любого $x \neq 0$ найдётся натуральное n , такое что

$$|nx| > |x|.$$

Для p -адического нормирования это условие не выполнено. Такие нормирования называются *неархимедовыми*.

Как известно, всякое метрическое пространство является плотным подмножеством некоторого полного метрического пространства, называемого его пополнением. Например, $\mathbb{R}$ с обычной топологией является пополнением для $\mathbb{Q}$ относительно метрики $d(x, y) = |x - y|$. Пополнение поля $\mathbb{Q}$ относительно метрики $d(x, y) = f_{\alpha, p}(x - y)$ обозначим $\mathbb{Q}_{\alpha, p}$. Нетрудно доказать, что $\mathbb{Q}_{\alpha, p}$ и $\mathbb{Q}_{\tilde{\alpha}, p}$, где $0 < \alpha, \tilde{\alpha} < 1$, изоморфны как топологические поля. Поэтому обозначим p -адическое поле просто через $\mathbb{Q}_p$.

Поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ играют аналогичную (или взаимодополняющую) роль при исследовании арифметических свойств целых чисел. Этим определяется значение p -адических чисел.

Можно доказать следующее утверждение (см.: Vachman, 1964, p. 35). Для каждого $x \in \mathbb{Q}_p$ существуют $n, n_j \in \mathbb{Z}$, такие что

$$x = \sum_{j=n}^{\infty} n_j p^j.$$

Для этого значения n имеем $f_{\alpha, p}(x) = f_{\alpha, p}(p)^n$.

Ввиду сказанного важен тот факт, что на множестве $\mathbb{Q}$ нет нетривиальных нормирований, кроме $f_{\alpha, p}(x)$ и $f(x) = |x|^r$, $r \in]0, 1]$. Впервые это было доказано в работе Ostrowski (1917):

Теорема 22. *Функция $f : \mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ является нетривиальным нормированием на $\mathbb{Q}$, если и только если выполнено одно из двух условий:*

либо существуют $\alpha \in]0, 1[$ и простое число p , такие что $f(x) = f_{\alpha, p}(x)$ для всех $\mathbb{Q}$;

либо существует $r \in]0, 1[$, такое что $f(x) = |x|^r$ для всех $\mathbb{Q}$.

Доказательство. С учётом предложений 20 и 21 достаточно показать, что любое нетривиальное нормирование f на $\mathbb{Q}$ имеет одну из двух указанных форм. Очевидно, что $f(1) = 1$. Число $n \in \mathbb{Z}$ является *мажорантой* для $f(n)$, т.е. выполнено условие

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) \leq |n|f(1) = |n|.$$

Найдём лучшую оценку. Возьмём целые $m > 1, n > 1$. Тогда можно записать

$$m = \alpha_0 + \alpha_1 n + \dots + \alpha_k n^k,$$

где k — неотрицательное целое, α_i — целые, причём $0 \leq \alpha_i < n$ ($i = 0, \dots, k$). Если $\alpha_k > 0$, то $n^k \leq m$ и

$$k \leq \frac{\ln m}{\ln n}. \quad (56)$$

При этом

$$f(m) \leq f(\alpha_0) + f(\alpha_1)f(n) + \dots + f(\alpha_k)f(n)^k.$$

Так как $f(\alpha_i) \leq \alpha_i \leq n$, то

$$f(m) \leq n(1 + f(n) + \dots + f(n)^k). \quad (57)$$

Возможны три случая.

(i) Предположим, что при всех целых $n > 1$ выполнено неравенство $f(n) > 1$. Тогда в силу (57)

$$f(m) \leq n(k+1)f(n)^k.$$

Исключая k с учётом (56), получаем

$$f(m) \leq n \left(\frac{\ln m}{\ln n} + 1 \right) f(n)^{\ln m / \ln n}. \quad (58)$$

Заменим здесь m на m^l (l целое) и извлечём корень степени l :

$$f(m) \leq n^{1/l} \left(\frac{l \ln m}{\ln n} + 1 \right)^{1/l} f(n)^{\ln m / \ln n}.$$

Следовательно,

$$f(m)^{1/\ln m} \leq \left(n^{1/l} \left(1 + \frac{l \ln m}{\ln n} \right)^{1/l} \right)^{1/\ln m} f(n)^{1/\ln n}.$$

Так как

$$\lim_{l \rightarrow \infty} n^{1/l} = 1, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{l \ln m}{\ln n} \right)^{1/l} = 1, \quad (59)$$

в итоге получаем

$$f(m)^{1/\ln m} \leq f(n)^{1/\ln n}.$$

Поскольку m и n — произвольные целые числа, большие 1, то верно и обратное неравенство. Поэтому $f(n)^{1/\ln n}$ тождественно равно некоторой константе α . Поскольку $f(n) > 1$, то $\alpha > 1$. Тогда $r := \ln \alpha > 0$ и

$$f(n) = \alpha^{\ln n} = e^{r \ln n} = n^r \quad (n \geq 1).$$

При этом $f(n) \leq n$, откуда $r \leq 1$. Таким образом, существует $r \in]0, 1]$, такое что

$$f(n) = n^r \quad (n \geq 1).$$

Тогда для любых натуральных p, q верно, что

$$p^r = f(p) = f\left(q \frac{p}{q}\right) = f(q) f\left(\frac{p}{q}\right) = q^r f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Наконец, ввиду (48) имеем: $f(-1)^2 = f(1) = 1$. Так как $f(-1) \geq 0$ ¹⁾, то $f(-1) = 1$, $f(-x) = f(-1)f(x) = f(x)$, т.е. функция f чётна. В итоге

$$f(x) = |x|^r \quad (x \in \mathbb{Q})$$

для некоторого $r \in]0, 1]$.

(ii) Пусть при всех $n \in \mathbb{Z}^*$ выполнено равенство $f(n) = 1$. Тем же способом, как и выше, получаем, что $f(x) = 1$ при всех $x \in \mathbb{Q}^*$, что невозможно, так как f — нетривиальное нормирование.

(iii) Пусть, наконец, для некоторого целого $n > 1$ верно неравенство $f(n) < 1$. Вначале покажем, что $f(m) \leq 1$ для всех $m \in \mathbb{Z}^*$. Действительно, ввиду (57)

$$f(m) \leq n(k+1), \quad (60)$$

и с учётом (56)

$$f(m) \leq n \left(1 + \frac{\ln m}{\ln n} \right). \quad (61)$$

¹⁾ Поскольку f является нормированием.

Заменим m на m^l с целым l и устремим l к бесконечности. Из (59) получим

$$f(m) \leq 1.$$

Пусть p — наименьшее натуральное число, для которого $f(p) < 1$. Если p — произведение двух меньших натуральных чисел q и r , то

$$f(p) = f(q)f(r) = 1,$$

что невозможно. Значит, p — простое число.

Для $f(n+m)$ нам нужна оценка лучшая, чем $f(n) + f(m)$. Для натуральных n, m по формуле бинома получаем

$$f(n+m)^k \leq f(n)^k + f(k)f(n)^{k-1}f(m) + f\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)f(n)^{k-2}f(m)^2 + \dots + f(m)^k.$$

Поскольку $f(k) \leq 1$, $f(k(k-1)/2) \leq 1$, то

$$f(n+m)^k \leq (k+1)(\max(f(n), f(m)))^k.$$

Так как значения функции f положительны и $\lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)^{1/k} = 1$, то в итоге получаем

$$f(n+m) \leq \max(f(n), f(m)). \quad (62)$$

Пусть натуральное число m равно $pq + r$, где p то же, что и выше, $q = [m/p]$, а r — остаток ($0 \leq r < p$). Если $r > 0$, то $f(r) = 1$ и $f(pq) = f(p)f(q) < 1$ (так как $f(p) < 1$). Таким образом, $f(pq) < f(r)$. Но

$$f(r) = f(pq + r - pq) \leq \max(f(pq + r), f(pq)),$$

откуда

$$f(m) = f(pq + r) = 1.$$

Если же $r = 0$, то $f(m) < 1$.

Запишем произвольное $x \in \mathbb{Q}^*$ в виде $p^n(q/r)$, где $q \in \mathbb{Z}^*$, $r \in \mathbb{N}$ не делятся на p . Тогда

$$f\left(p^n \frac{q}{r}\right) = f(p^n) \frac{f(q)}{f(r)} = f(p)^n.$$

Положим $\alpha = f(p) < 1$. Тогда

$$f\left(p^n \frac{q}{r}\right) = \alpha^n.$$

Кроме того, $f(0) = 0$, что и завершает доказательство теоремы 22. ■

Последующие результаты и упражнения

1. (Rădulescu, 1980; Dhombres, 1983.) Найдите общий вид такого оператора $P : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(X)$, что для всех $f, g \in C_{\mathbb{R}}(X)$

$$P(f + g) \geq Pf + Pg,$$

$$P(fg) \geq Pf \cdot Pg.$$

2. Пусть C — собственный выпуклый конус с вершиной в нуле, а гиперплоскость H не проходит через нуль. Опровергните или докажите, что точка x — крайняя в $H \cap C$ тогда и только тогда, когда через неё проходит крайний луч.

3. Используя тот факт, что $\mathbb{R}$ — собственное подмножество группы Бора $\mathcal{B}$, покажите, что отображение $\wedge : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\wedge}$ не является гомеоморфизмом (в топологии, которую индуцирует на $\mathbb{R}^{\wedge}$ слабая звёздная топология на $\mathcal{B}$).

4. Опровергните или докажите, что непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ является почти периодической функцией Бора тогда и только тогда, когда множество всех её сдвигов f_x относительно компактно в $C_b(\mathbb{R})$ — пространстве всех ограниченных непрерывных функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, наделённом топологией равномерной сходимости.

5*. Пусть $\mathcal{B}$ — группа Бора для $\mathbb{R}$ со слабой звёздной топологией, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ — отображение « $\wedge$ ». Покажите, что для любой компактной отделимой топологической группы G и любого непрерывного гомоморфизма $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ существует непрерывный гомоморфизм $\beta : \mathcal{B} \rightarrow G$, такой что $\alpha = \beta \circ h$ — иными словами, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathcal{B} \\ \alpha \downarrow & \searrow \beta & \\ G & & \end{array}$$

Опровергните или докажите, что группа $(\mathcal{B}, *)$ единственна с точностью до изоморфизма компактных отделимых топологических групп.

6*. (Favard, 1933, p. 28–36, Weil, 1940, p. 133–134.) Докажите следующую характеристику почти периодических функций (которая объясняет этот термин): непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ является почти периодической функцией Бора, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует *относительно плотное* подмножество $T \subset \mathbb{R}$, такое что $|f(x + t) - f(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $t \in T$. (Подмножество T относительно плотно в $\mathbb{R}$, если существует такое $L > 0$, что любой отрезок длины L содержит точку из T .)

7. Пусть $\mathcal{B}$ — группа Бора, Γ — множество всех комплексных чисел с модулем 1. Найдите все непрерывные решения $F : \mathcal{B} \rightarrow \Gamma$ функционального уравнения

$$F(\phi * \psi) = F(\phi)F(\psi) \quad (\phi, \psi \in \mathcal{B}).$$

8. (Favard, 1933, p. 36.) С помощью (44) покажите, что для почти периодической функции Бора f множество $\Lambda_f = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid c_{\lambda}(f) := Q(fe_{-\lambda}) \neq 0\}$ не более чем счётно. Докажите для такой функции равенство Парсеваля $Q(|f|^2) = \sum |c_{\lambda}(f)|^2$.

9. Используя тот факт, что множество $\mathbb{R}^{\wedge}$ плотно в $\mathcal{B}$ (в слабой звёздной топологии), а также теорему о продолжении для функционального уравнения $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Phi(y)$, аналогичную теореме 7.5, докажите теорему 5.8.

10*. Воспользуемся обозначениями теоремы 5.8. Рассмотрим (непрерывную) почти периодическую функцию Бора

$$f(t) = \prod_{j=1}^n (1 + \exp(i\mu_j t) \bar{z}_j).$$

Выведите теорему 5.8 из равенства Парсеваля (упр. 8) для $\|f(t)\|^{2p}$, где p — натуральное число. (Из свойств почти периодических функций при этом требуется лишь равенство (44) для тригонометрического многочлена, так что логического круга не возникает и мы действительно получаем новое доказательство.)

11*. (Favard, 1933, p. 82–85.) Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — почти периодическая функция Бора, причём $c_\lambda(f)$ (определение см. в упр. 8) равно нулю для всех таких λ , что

$|\lambda| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$). Покажите, что $\int_0^x f(t) dt$ — почти периодическая функция Бора.

12*. (Hewitt–Zuckerman, 1950.) Пусть E — вещественное линейное топологическое пространство, E^* — его топологическое двойственное пространство, $E^\wedge$ — множество всех непрерывных характеров группы $(E, +)$. Покажите, что функция $\chi: E \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит $E^\wedge$, если и только если существует элемент $f \in E^*$, для которого

$$\chi(x) = e^{if(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Исходя из этого найдите двойственную группу для $\mathbb{R}^n$.

13*. (Weil, 1940, p. 54–57.) Пусть E — подмножество положительной меры Хаара в локально компактной абелевой группе G . Покажите, что если функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна и ограничена сверху на E , то она непрерывна.

14. Опровергните или докажите, что на конечном поле не существует нормирований, отличных от тривиального.

15. Пусть I — целостное кольцо, $g: I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ подчинено условиям

$$g(xy) = g(x)g(y) \quad (x, y \in I),$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$g(x+y) \leq g(x) + g(y) \quad (x, y \in I).$$

Опровергните или докажите, что g продолжается до некоторого нормирования f поля частных F кольца I .

16. Пусть f — неархимедово нормирование тела F (т. е. такое нормирование, что $f(x+y) \leq \max(f(x), f(y))$ при всех $x, y \in F$). Пусть далее, U — множество всех $x \in F$, для которых $f(x) \leq 1$. Покажите, что U — кольцо с единицей (*метризационное кольцо для F*). Опровергните или докажите, что если $x \notin U$, то $x^{-1} \in U$.

17. Опровергните или докажите, что любое нормирование тела ненулевой характеристики неархимедово (определение см. в упр. 16).

18*. (Choquet, 1969, p. 246–264.) Пусть G — локально компактная абелева группа. Функция $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ положительно определена, если

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_k f(x_i - x_k) \geq 0$$

для всех натуральных n и всех $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $x_1, \dots, x_n \in G$ (см. гл. 8).

а) Покажите, что множество P всех непрерывных положительно определённых функций на G является выпуклым конусом и содержит непрерывные характеры для G (элементы группы $G^\wedge$).

б) Проверьте, что функция $x \mapsto (1 + |z|^2)f(x) + zf(x-a) + \bar{z}f(x+a)$ ($f \in P$, $a \in G$, $z \in \mathbb{C}$) принадлежит P .

с) Покажите, что каждый крайний луч (см. § 2) конуса P содержит функцию f , удовлетворяющую уравнению

$$f(x - a) = \lambda(a)f(z),$$

где $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$.

d) Докажите, что каждый крайний луч конуса P содержит непрерывный характер группы G .

Тогда (используя технику Шоке, описанную в § 2) можно представить любую непрерывную положительно определённую функцию f в виде

$$f(x) = \int_{G^{\wedge}} \chi(x) d\mu(x),$$

где μ — положительная мера Радона на двойственной группе $G^{\wedge}$. Обратное легко доказывается. (Теорема Бохнера).

19. Используя непрерывную функцию $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, для которой

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |1 - f(x)| dx = \frac{1}{2},$$

покажите, что в пространстве $C[0, 1]$, снабжённом интегральной нормой $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$, соотношение (27) не характеризует средние точки.

20. Докажите, что существует ровно одна положительная мера Радона полного объёма 1 на группе Бора, инвариантная относительно сдвигов.

21. Не используя компактность, докажите непрерывность отображения $b : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ и обратного ему.

22*. Пусть S — множество всех функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, отличных от нуля не более чем на счётном множестве. Для $f, g \in S$, $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\|f\| = \sum_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad f * g(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} f(x - y)g(y),$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Покажите, что $(S, +, *, \|\cdot\|)$ — банахова алгебра. Опровергните или докажите, что её спектр (см. § 5, 7.2) относительно слабой звёздной топологии можно отождествить с компактной группой Бора B .

23. Пусть G — локально компактная абелева группа, $L^1(G)$ — её групповая алгебра (которая является коммутативной банаховой алгеброй). Опровергните или докажите, что спектр алгебры $L^1(G)$ (см. § 5, 7.2) можно отождествить с множеством $G^{\wedge}$ всех непрерывных характеров на G .

24. (Kuczma, 1961.) Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ — аддитивная функция, где n — натуральное число, E — вещественное гильбертово пространство. Пусть, далее, существуют $a \neq 0$ в E и $\alpha > 0$, такие что

$$\langle f(x), a \rangle \leq \alpha \quad (x \in B(x_0, r)),$$

где $B(x_0, r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром x_0 . Покажите, что существуют такие $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), что для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left\langle f(x) - \sum_{i=1}^n x_i a_i, a \right\rangle = 0.$$

Глава 11

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРЕДГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Среди нормированных пространств наиболее интересный класс составляют пространства с внутренним произведением, или предгильбертовы пространства¹⁾. В этой главе мы дадим их естественную характеристику посредством различных функциональных уравнений для нормы (используя минимум сведений из функционального анализа). При этом необходимо различать вещественный и комплексный случаи (а также случай кватернионов). Главу завершает применение условного уравнения (ортогональной аддитивности) для характеристики распределения скоростей Максвелла–Больцмана в газовой динамике.

11.1. Квадратичные функционалы: характеристика предгильбертовых пространств

Норма в вещественном линейном пространстве E — это функция $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, подчинённая следующим условиям:

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y) \quad (x, y \in E), \quad (1)$$

$$f(\lambda x) = |\lambda|f(x) \quad (x \in E, \lambda \in \mathbb{R}), \quad (2)$$

$$f(x) = 0, \quad \text{если и только если } x = 0. \quad (3)$$

Условие субаддитивности (1) не столь удобно в обращении, как аддитивность. Всё же в ряде случаев аддитивность может быть установлена для функции $g(x) = f(x)^2$. Это облегчает вычисления и позволяет интерпретировать их геометрически. Далее E обозначает *линейное пространство над полем F характеристики нуля*.

Функция $g : E \rightarrow F$ называется *квадратичным функционалом*, если удовлетворяет функциональному уравнению

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x) + 2g(y). \quad (4)$$

Функция $S : E^2 \rightarrow F$ *биаддитивна*, если при всех $t_1, t_2, u \in E$

$$S(t_1 + t_2, u) = S(t_1, u) + S(t_2, u), \quad S(u, t_1 + t_2) = S(u, t_1) + S(u, t_2).$$

Предложение 1. *Функционал $g : E \rightarrow F$ является квадратичным, если и только если существует симметричная биаддитивная функция $S : E^2 \rightarrow F$, для которой*

$$g(x) = S(x, x).$$

Такая функция S единственна.

¹⁾ Термин «inner product space» переведён термином «предгильбертово пространство», который употребляется в различных, хотя и близких, значениях; в данном случае (см. определение на с. 149) не предполагается конечномерность, но квадрат ненулевого вектора обязательно положителен.

Доказательство. Если $g(x) = S(x, x)$, то

$$\begin{aligned} g(x+y) + g(x-y) &= S(x+y, x+y) + S(x-y, x-y) = 2S(x, x) + 2S(y, y) = \\ &= 2g(x) + 2g(y). \end{aligned}$$

Обратно, пусть $g(x)$ — квадратичный функционал. Положим

$$S(x, y) = \frac{1}{4} (g(x+y) - g(x-y)). \quad (5)$$

Взяв $y = 0$ в уравнении (4), видим, что $g(0) = 0$, а при $x = y$ получаем $g(2x) = 4g(x)$. Следовательно,

$$S(x, x) = \frac{1}{4} g(2x) = g(x).$$

Теперь докажем, что функция S симметрична. Поменяв местами x и y в уравнении (4), получаем, что

$$g(x-y) = g(y-x),$$

поэтому функция g чётна. В силу (5) это означает, что $S(x, y) = S(y, x)$ и, кроме того,

$$S(-x, y) = -S(x, y), \quad (6)$$

т. е. функция S нечётна по каждому переменному. Остаётся показать, что S аддитивна по первому переменному. Мы имеем

$$\begin{aligned} 4[S(x_1 + x_2, y) + S(x_1 - x_2, y)] &= \\ &= g(x_1 + x_2 + y) + g(x_1 - x_2 + y) - (g(x_1 + x_2 - y) + g(x_1 - x_2 - y)) = \\ &= 2g(x_1 + y) + 2g(x_2) - 2g(x_1 - y) - 2g(x_2) = \\ &= 2(g(x_1 + y) - g(x_1 - y)) = 8S(x_1, y). \end{aligned}$$

Поменяв местами x_1 и x_2 и вычтя полученное уравнение из предыдущего, получаем

$$S(x_1 - x_2, y) - S(x_2 - x_1, y) = 2S(x_1, y) - 2S(x_2, y).$$

С учётом (6) имеем

$$2S(x_1 - x_2, y) = 2S(x_1, y) - 2S(x_2, y).$$

Заменив x_2 на $-x_2$ и снова используя (6), получаем искомую аддитивность по первому переменному:

$$S(x_1 + x_2, y) = S(x_1, y) + S(x_2, y).$$

Предоставляем читателю доказать единственность функции S (упр. 36). ■

Из предложения 1 легко следует изящный результат в геометрии нормированных пространств. Он был доказан Йорданом и фон Нейманом (1935). Напомним, что *вещественное нормированное линейное пространство E с нормой $\| \cdot \|$ называется предгильбертовым*¹⁾, если

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \quad (x \in E),$$

где *внутреннее (скалярное) произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ удовлетворяет условиям*

$$(i) \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \quad (x, y \in E),$$

¹⁾ См. сноску на с. 148.

- (ii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, с равенством только при $x = 0$,
- (iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (x, y \in E)$
- (iv) отображение $x \mapsto \langle x, y \rangle$ линейно по x при каждом данном $y \in E$.

Теорема 2. Если каждое двумерное подпространство вещественного нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$ является предгильбертовым, то и E предгильбертово.

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Определим функцию $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$g(x) = \|x\|^2 \quad (x \in E). \quad (7)$$

Пусть F — произвольное двумерное подпространство в E . На F по условию существует внутреннее произведение $\langle, \rangle$, причём

$$g(x) = \langle x, x \rangle \quad (x \in F).$$

Поскольку произведение $\langle, \rangle$ симметрично (iii) и биаддитивно ((iv) и (iii)), то ввиду предложения 1 функция g удовлетворяет уравнению (4) на F . Но так как F может быть любым двумерным подпространством в E , то g удовлетворяет уравнению (4) для любых $x, y \in E$. Тогда согласно предложению 1 существует и единственна симметричная биаддитивная функция $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой

$$g(x) = S(x, x) \quad (x \in E).$$

Так как единственность имеет место и на F , то $\langle, \rangle$ является ограничением функции S на F^2 . Отсюда следует, что S удовлетворяет условиям (i)–(iv). Покажем, например, что функция S однородна по первому переменному (см. (iv)):

$$S(\lambda x, y) = \lambda S(x, y) \quad (x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

Для этого рассмотрим внутреннее произведение $\langle, \rangle$ в двумерном подпространстве F , содержащем данные векторы $x, y \in E$. Тогда

$$S(\lambda x, y) = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda S(x, y),$$

т. е. (8) выполнено. Теорема 2 доказана. ■

Возникает естественное желание узнать, верен ли подобный факт для комплексных пространств. Комплексное нормированное линейное пространство $(E, \|\cdot\|)$ является (комплексным) предгильбертовым пространством, если

$$\|x\| = \langle x, x \rangle \quad (x, y \in E),$$

где $\langle, \rangle$ — комплексное внутреннее произведение на E , т. е. выполнены следующие условия:

- (i') $\langle x, y \rangle \in \mathbb{C} \quad (x, y \in E)$,
- (ii') $\langle x, x \rangle \geq 0$, с равенством только при $x = 0$,
- (iii') $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ для всех $x, y \in E$ (эрмитовость),
- (iv') отображение $x \mapsto \langle x, y \rangle$ линейно по x при каждом данном y .

Теорема 3. Если каждое двумерное подпространство комплексного нормированного пространства $(E, \|\cdot\|)$ является предгильбертовым, то и E предгильбертово.

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Определим функцию $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ посредством формулы (7). Можно рассматривать E как вещественное нормированное линейное пространство, тогда каждое его двумерное вещественное подпространство содержится в двумерном комплексном подпространстве. По теореме 2

$$g(x) = S(x, x),$$

где $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой

$$S(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (9)$$

и, удовлетворяет условиям (i)–(iv). Теперь определим $S' : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$, положив

$$S'(x, y) = S(x, y) - iS(ix, y). \quad (10)$$

Покажем, что $S'(x, y)$ — внутреннее произведение на комплексном нормированном линейном пространстве E . Свойство (i') очевидно. Далее,

$$S'(x, x) = S(x, x) - iS(ix, x) = \|x\|^2 - iS(ix, x).$$

В силу (9)

$$S(ix, x) = \frac{1}{4} (\|(i+1)x\|^2 - \|(i-1)x\|^2) = \frac{\|x\|^2}{4} (|i+1|^2 - |i-1|^2) = 0.$$

Этим доказано свойство (ii').

Из аддитивности функции S по первому переменному вытекает соответствующее свойство для S' . Далее, для $\lambda \in \mathbb{C}$ можно записать

$$S'(\lambda x, y) = S'((\lambda_1 + i\lambda_2)x, y) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Ввиду (10) получаем

$$S'(\lambda x, y) = S((\lambda_1 + i\lambda_2)x, y) - iS((i\lambda_1 - \lambda_2)x, y).$$

Используя аддитивность функции S и её (вещественную) однородность по первому переменному, получаем, что

$$\begin{aligned} S'(\lambda x, y) &= S(\lambda_1 x, y) + S(i\lambda_2 x, y) - iS(i\lambda_1 x, y) + iS(\lambda_2 x, y) = \\ &= \lambda_1 S(x, y) + \lambda_2 S(ix, y) - \lambda_1 iS(ix, y) + \lambda_2 iS(x, y) = \\ &= \lambda_1 [S(x, y) - iS(ix, y)] + \lambda_2 [S(ix, y) + iS(x, y)]. \end{aligned}$$

Снова используя (10), находим, что

$$\begin{aligned} S'(\lambda x, y) &= \lambda_1 S'(x, y) + i\lambda_2 S'(x, y) = (\lambda_1 + i\lambda_2) S'(x, y) = \lambda S'(x, y) \\ &\quad (x \in E, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}), \end{aligned}$$

т. е. условие (iv') доказано.

Вычислим теперь $S'(y, x)$. Поскольку функция S вещественнозначна и выполнено условие (iii), то

$$S'(y, x) = S(y, x) - iS(iy, x) = S(x, y) - iS(iy, x).$$

Дважды используя (9), получаем

$$\begin{aligned} 4[S(iy, x) + S(ix, y)] &= \|iy + x\|^2 - \|iy - x\|^2 + \|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 = \\ &= \|iy + x\|^2 - \|i(ix + y)\|^2 + \|ix + y\|^2 - \|i(x + iy)\|^2 = \\ &= \|iy + x\|^2 - \|ix + y\|^2 + \|ix + y\|^2 - \|x + iy\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\overline{S'(y, x)} = S(x, y) - iS(ix, y) = S'(x, y),$$

что доказывает (iii'), а тем самым и теорему 3. ■

При доказательстве теорем 2 и 3 мы использовали частное решение уравнения (4), а именно $g(x) = \|x\|^2$. Его регулярность обеспечивает однородность функции S по первому переменному. В общем случае квадратичный функционал не обязательно однороден. Но для этого требуется лишь довольно слабое условие регулярности на функционал g как на решение уравнения (4). Назовём функцию $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ на вещественном линейном пространстве *радиально ограниченной*, если для любого $x \neq 0$ и любого $y \in E$ существует подмножество $I_x \subset \mathbb{R}$ положительной лебеговой меры, а также положительная константа $M_{x,y}$, такие что

$$\|g(\lambda x + y)\| \leq M_{x,y} \quad (\lambda \in I_x).$$

Справедливо

Предложение 4. *Функция $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ является радиально ограниченным квадратичным функционалом на вещественном линейном пространстве E , если и только если существует симметричная билинейная функция $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такая что*

$$g(x) = S(x, x).$$

Доказательство. Если функция S симметрична и билинейна, то по предложению 1 функционал g является квадратичным. Он радиально ограничен, поскольку

$$g(\lambda x + y) = \lambda^2 S(x, x) + 2\lambda S(x, y) + S(y, y).$$

Обратно, пусть g — радиально ограниченный квадратичный функционал на E . Согласно предположению 1 существует симметричная и биаддитивная функция S , для которой

$$g(x) = S(x, x) \quad (x \in E).$$

Определим $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f(\lambda) = S(\lambda x, y)$ для фиксированных $x, y \in E$, $x \neq 0$. Очевидно, что функция f аддитивна. Так как функционал g радиально ограничен, то при $\lambda \in I_x$ получаем с учётом (5):

$$|f(\lambda)| \leq \frac{1}{4} (|g(\lambda x + y)| + |g(\lambda x - y)|) \leq \frac{M_{x,y} + M_{x,-y}}{4}.$$

Ввиду следствия 2.5 имеем $f(\lambda) = \lambda f(1)$, откуда $S(\lambda x, y) = \lambda S(x, y)$, что и требовалось. Предложение 4 доказано. ■

Вместо условий регулярности попробуем найти алгебраическое условие на квадратичный функционал g , которое было бы достаточным для билинейности биаддитивной формы S , связанной с g формулой (5), как в предложении 1. Пусть, например,

$$g(\lambda x) = |\lambda|^2 g(x) \quad (11)$$

для всех λ из нормированного тела F . Результат будет зависеть от F (см.: Кугера 1964а, 1965с).

Функция $S : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$ называется *полубилинейной*, если она биаддитивна и удовлетворяет условиям $S(\lambda x, y) = \lambda S(x, y)$ и $S(x, \lambda y) = \bar{\lambda} S(x, y)$ при всех $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 5. *Пусть E — комплексное линейное пространство, $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ — квадратичный функционал, удовлетворяющий условию (11). Тогда существует полубилинейная функция $S' : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$, такая что*

$$S'(x, x) = g(x) \quad (x \in E).$$

Доказательство следует работе Vrbova 1973 с небольшими изменениями. Пусть вначале функция g вещественнозначна. Поскольку E можно рассматривать как

вещественное линейное пространство, из предложения 1 вытекает существование симметричной биаддитивной функции $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой

$$g(x) = S(x, x).$$

Из уравнения (11) вытекает, что $S(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 S(x, x)$. Поскольку функция S биаддитивна и симметрична, то

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 [S(x, x) + 2S(x, y) + S(y, y)] &= |\lambda|^2 S(x + y, x + y) = S[\lambda(x + y), \lambda(x + y)] = \\ &= S(\lambda x, \lambda x) + 2S(\lambda x, \lambda y) + S(\lambda y, \lambda y) = |\lambda|^2 S(x, x) + 2S(\lambda x, \lambda y) + |\lambda|^2 S(y, y), \end{aligned}$$

откуда

$$S(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^2 S(x, y),$$

или

$$S(\lambda x, y) = |\lambda|^2 S\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \quad (x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}^*). \quad (12)$$

Из биаддитивности функции S вытекает равенство $S(x, -y) = -S(x, y)$ ¹⁾, и из (12) при $\lambda = i$ следует (поскольку S симметрична), что

$$S(ix, y) = -S(iy, x). \quad (13)$$

Как и при доказательстве теоремы 3, определим $S' : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$, положив

$$S'(x, y) = S(x, y) - iS(ix, y).$$

Ясно, что функция S' биаддитивна. Так как S вещественнозначна и симметрична, то из (13) следует, что S' эрмитова:

$$S'(y, x) = \overline{S'(x, y)}.$$

Также ввиду (13) $S'(ix, x) = 0$. Поэтому

$$S'(x, x) = g(x).$$

В случае вещественнозначной функции g остаётся показать, что функция S' однородна по первому переменному. Фиксируем $x, y \in E$ и определим функцию $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, положив

$$f(\lambda) := S'(\lambda x, y) - S'(x, \lambda y).$$

Функция f аддитивна на $\mathbb{C}$. Ввиду (12) она удовлетворяет и другому функциональному уравнению:

$$f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*). \quad (14)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= S(\lambda x, y) - iS(\lambda ix, y) - [S(x, \lambda y) - iS(ix, \lambda y)] = \\ &= |\lambda|^2 \left[S\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - iS\left(ix, \frac{y}{\lambda}\right) \right] - |\lambda|^2 \left[S\left(\frac{x}{\lambda}, y\right) - iS\left(i\frac{x}{\lambda}, y\right) \right] = \\ &= |\lambda|^2 \left[S'\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) - S'\left(\frac{x}{\lambda}, y\right) \right] = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

¹⁾ Поскольку $S(x, y) = S(x, y) + S(x, 0)$, то $S(x, 0) = 0$. Так как $S(x, -y) + S(x, y) = S(x, 0) = 0$, то $S(x, -y) = -S(x, y)$.

Решим уравнение (14) для аддитивной функции f . Пусть $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Если $|\lambda_1| \leq 1$, то существует $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, такое что $|\lambda| = 1$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. В силу (14) имеем $f(\lambda) = -f(1/\lambda) = -f(\bar{\lambda})$. Из (14) и аддитивности функции f следует, что

$$f(\lambda_1) + f(i\lambda_2) = f(\lambda_1 + i\lambda_2) = -f(\lambda_1 - i\lambda_2) = -f(\lambda_1) + f(i\lambda_2).$$

Поэтому $f(\lambda_1) = 0$ для $|\lambda_1| \leq 1$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

При $|\lambda_1| > 1$ по только что доказанному $f(\lambda_1) = -\lambda_1^2 f(1/\lambda_1) = 0$. Таким образом, $f(\lambda_1) = 0$ при всех $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$. В силу (14) имеем: $f(i\lambda_2) = -\lambda_2^2 f(1/i\lambda_2) = \lambda_2^2 f(i/\lambda_2)$ ¹⁾. Согласно упр. 2.10 аддитивная функция $\lambda_2 \mapsto f(i\lambda_2)$ непрерывна. Поэтому $f(i\lambda_2) = \lambda_2 f(i)$ при любом $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ (включая $\lambda_2 = 0$). Окончательно имеем

$$f(\lambda_1 + i\lambda_2) = \lambda_2 f(i) \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}).$$

Из определения функции f и равенства $f(\lambda_1) = 0$ получаем, что

$$S'(\lambda_1 x, y) = S'(x, \lambda_1 y) \quad (\lambda_1 \in \mathbb{R}). \quad (15)$$

Так как $f(\lambda_2 i) = \lambda_2 f(i)$ ($\lambda_2 \in \mathbb{R}$), то

$$S'(\lambda_2 i x, y) - S'(x, \lambda_2 i y) = \lambda_2 [S'(i x, y) - S'(x, i y)] \quad (\lambda_2 \in \mathbb{R}). \quad (16)$$

Но

$$S'(i x, y) = S(i x, y) - i S(-x, y) = S(i x, y) + i S(x, y) = i [S(x, y) - i S(i x, y)],$$

так что

$$S'(i x, y) = i S'(x, y). \quad (17)$$

Поскольку функция S' эрмитова, то, поменяв местами x и y , получаем

$$S'(x, i y) = -i S'(x, y). \quad (18)$$

В силу (17) и (18) имеем

$$S'(i x, y) - S'(x, i y) = 2i S'(x, y).$$

Из (15) следует, что $S'(\lambda_2 x, i y) = S'(x, \lambda_2 i y)$. Поэтому

$$S'(\lambda_2 i x, y) - S'(x, \lambda_2 i y) = 2i S'(\lambda_2 x, y).$$

С другой стороны, ввиду (16)

$$S'(\lambda_2 i x, y) - S'(x, \lambda_2 i y) = \lambda_2 [S'(i x, y) - S'(x, i y)] = 2i \lambda_2 S'(x, y).$$

Поэтому

$$S'(\lambda_2 x, y) = \lambda_2 S'(x, y).$$

Отсюда и из (17) получаем, что $S'(i \lambda_2 x, y) = i S'(\lambda_2 x, y) = i \lambda_2 S'(x, y)$ и

$$\begin{aligned} S'((\lambda_1 + i\lambda_2)x, y) &= S'(\lambda_1 x, y) + S'(i\lambda_2 x, y) = \\ &= \lambda_1 S'(x, y) + i\lambda_2 S'(x, y) = (\lambda_1 + i\lambda_2) S'(x, y), \end{aligned}$$

что доказывает однородность по первому переменному. Поскольку функция S' эрмитова, то теорема 5 доказана для случая, когда g принимает вещественные значения.

¹⁾ Второе равенство следует из аддитивности функции f (см. предыдущую сноску).

Если теперь функция g комплекснозначна, то $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$, где g_1 и g_2 вещественны и удовлетворяют уравнениям (4) и (11). Поэтому существуют полубилинейные (и эрмитовы) функции $S_1, S_2 : E^2 \rightarrow \mathbb{C}$, такие что

$$g_1(x) = S_1(x, x),$$

$$g_2(x) = S_2(x, x) \quad (x \in E).$$

Функция $S(x, y) = S_1(x, y) + iS_2(x, y)$ полубилинейна (хотя не всегда эрмитова), и при этом

$$S(x, x) = S_1(x, x) + iS_2(x, x) = g_1(x) + ig_2(x) = g(x).$$

Теорема 5 доказана. ■

С другой стороны, аддитивная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению (14) при всех $\lambda \in \mathbb{R}^*$, не обязательно непрерывна. Поэтому в вещественном случае ситуация иная.

Предложение 6. Пусть E — вещественное линейное пространство. Тогда существует симметричная и биаддитивная, но при этом не билинейная функция $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $S(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 S(x, x)$ при всех $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство предоставляется читателю (см. также упр. 7). ■

Если F — тело кватернионов, то аддитивная функция $f : F \rightarrow F$, удовлетворяющая уравнению (14) при всех $\lambda \in F^* = F \setminus \{0\}$, обязательно непрерывна (см. упр. 8).

Напомним, что тело кватернионов состоит из элементов вида

$$\lambda = \lambda_1 + \mathbf{i}\lambda_2 + \mathbf{j}\lambda_3 + \mathbf{k}\lambda_4,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — вещественные числа, причём выполнены тождества

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda' &= (\lambda_1 + \mathbf{i}\lambda_2 + \mathbf{j}\lambda_3 + \mathbf{k}\lambda_4) + (\lambda'_1 + \mathbf{i}\lambda'_2 + \mathbf{j}\lambda'_3 + \mathbf{k}\lambda'_4) = \\ &= (\lambda_1 + \lambda'_1) + \mathbf{i}(\lambda_2 + \lambda'_2) + \mathbf{j}(\lambda_3 + \lambda'_3) + \mathbf{k}(\lambda_4 + \lambda'_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda\lambda' &= (\lambda_1\lambda'_1 - \lambda_2\lambda'_2 - \lambda_3\lambda'_3 - \lambda_4\lambda'_4) + \mathbf{i}(\lambda_1\lambda'_2 + \lambda_2\lambda'_1 + \lambda_3\lambda'_4 - \lambda_4\lambda'_3) + \\ &+ \mathbf{j}(\lambda_1\lambda'_3 - \lambda_2\lambda'_4 + \lambda_3\lambda'_1 + \lambda_4\lambda'_2) + \mathbf{k}(\lambda_1\lambda'_4 + \lambda_2\lambda'_3 - \lambda_3\lambda'_2 + \lambda_4\lambda'_1). \end{aligned}$$

Кватернион, сопряжённый с $\lambda = \lambda_1 + \mathbf{i}\lambda_2 + \mathbf{j}\lambda_3 + \mathbf{k}\lambda_4$, равен $\bar{\lambda} = \lambda_1 - \mathbf{i}\lambda_2 - \mathbf{j}\lambda_3 - \mathbf{k}\lambda_4$. Отсюда

$$\lambda\bar{\lambda} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2.$$

Нормирование в (некоммутативном) теле кватернионов определяется условием

$$|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda}.$$

Как и в комплексном случае, функция $S : E^2 \rightarrow F$, где E — линейное пространство над F , называется полубилинейной, если она биаддитивна и удовлетворяет уравнениям

$$S(\lambda x, y) = \lambda S(x, y), \quad S(x, \lambda y) = \bar{\lambda} S(x, y) \quad (x, y \in E, \lambda \in F).$$

Предложение 7. Пусть E — линейное пространство над телом кватернионов F , а квадратичный функционал $g : E \rightarrow F$ удовлетворяет уравнению (11). Тогда существует полубилинейная функция $S : E^2 \rightarrow F$, такая что

$$S(x, x) = g(x) \quad (x \in E).$$

Доказательство. Вначале пусть функционал g принимает вещественные значения. Как и при доказательстве теоремы 5, находим симметричную биаддитивную функцию $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, такую что

$$g(x) = S(x, x) \quad (x \in E).$$

Ввиду (11)

$$S(\lambda x, y) = |\lambda|^2 S\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \quad (x, y \in E)$$

для всех ненулевых кватернионов λ . Аналогично равенству (13) в доказательстве теоремы 5, получаем, что

$$S(\mathbf{i}x, y) = -S(\mathbf{i}y, x), \quad (19)$$

$$S(\mathbf{j}x, y) = -S(\mathbf{j}y, x), \quad (20)$$

$$S(\mathbf{k}x, y) = -S(\mathbf{k}y, x). \quad (21)$$

Определим функцию $S' : E^2 \rightarrow F$, положив

$$S'(x, y) = S(x, y) - \mathbf{i}S(\mathbf{i}x, y) - \mathbf{j}S(\mathbf{j}x, y) - \mathbf{k}S(\mathbf{k}x, y).$$

Функция S' заведомо биаддитивна. Она также эрмитова, т. е.

$$S'(y, x) = \overline{S'(x, y)}. \quad (22)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} S'(y, x) &= S(y, x) - \mathbf{i}S(\mathbf{i}y, x) - \mathbf{j}S(\mathbf{j}y, x) - \mathbf{k}S(\mathbf{k}y, x) = \\ &= S(x, y) + \mathbf{i}S(\mathbf{i}x, y) + \mathbf{j}S(\mathbf{j}x, y) + \mathbf{k}S(\mathbf{k}x, y) = \overline{S'(x, y)}. \end{aligned}$$

Так как $S(\mathbf{i}x, x) = S(\mathbf{j}x, x) = S(\mathbf{k}x, x) = 0$ ввиду (19)–(21), то

$$S'(x, x) = S(x, x) = g(x) \quad (x \in E).$$

Покажем, что функция S' линейна по первому переменному (отсюда следует полубилинейность, поскольку S' эрмитова). Снова положим

$$f(\lambda) := S'(\lambda x, y) - S'(x, \lambda y).$$

Как и выше, функция $f : F \rightarrow F$ аддитивна и удовлетворяет уравнению

$$f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \in F \setminus \{0\}).$$

Предоставляем читателю доказать (см. упр. 8), что любое аддитивное решение этого уравнения имеет вид

$$f(\lambda_1 + \mathbf{i}\lambda_2 + \mathbf{j}\lambda_3 + \mathbf{k}\lambda_4) = \lambda_2 f(\mathbf{i}) + \lambda_3 f(\mathbf{j}) + \lambda_4 f(\mathbf{k}),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — вещественные числа. Следовательно,

$$S'(\lambda_1 x, y) = S'(x, \lambda_1 y),$$

$$S'(\lambda_2 \mathbf{i}x, y) - S'(x, \lambda_2 \mathbf{i}y) = \lambda_2 [S'(\mathbf{i}x, y) - S'(x, \mathbf{i}y)],$$

$$S'(\lambda_3 \mathbf{j}x, y) - S'(x, \lambda_3 \mathbf{j}y) = \lambda_3 [S'(\mathbf{j}x, y) - S'(x, \mathbf{j}y)],$$

$$S'(\lambda_4 \mathbf{k}x, y) - S'(x, \lambda_4 \mathbf{k}y) = \lambda_4 [S'(\mathbf{k}x, y) - S'(x, \mathbf{k}y)].$$

Так как $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, то выполнено уравнение

$$S'(ix, y) = iS'(x, y) \quad (23)$$

и аналогичные уравнения с заменой i на j и k . Поскольку функция S' эрмитова, то

$$S'(x, iy) = -iS'(x, y),$$

и аналогично с заменой i на j и k . Действуя, как при доказательстве теоремы 5, получаем

$$S'(\lambda_1 x, y) = \lambda_1 S'(x, y) \quad (\lambda_1 \in \mathbb{R}; \quad x, y \in E). \quad (24)$$

Из равенств (23) и (24) с учётом биаддитивности вытекает, что

$$S'((\lambda_1 + i\lambda_2 + j\lambda_3 + k\lambda_4)x, y) = (\lambda_1 + i\lambda_2 + j\lambda_3 + k\lambda_4)S'(x, y),$$

т. е. функция S' линейна по первому переменному. Предложение 7 доказано для вещественнозначных g .

Пусть теперь g принимает значения в F . Можно записать

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x) + jg_3(x) + kg_4(x),$$

где $g_n(x) \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, 3, 4$). По доказанному $g_n(x) = S'_n(x, x)$, где функции $S'_n : E^2 \rightarrow F$ ($n = 1, 2, 3, 4$) полубилинейны. Определим $S : E^2 \rightarrow F$, положив

$$S(x, y) = S'_1(x, y) + iS'_2(x, y) + jS'_3(x, y) + kS'_4(x, y).$$

Функция S полубилинейна, причём $S(x, x) = g(x)$, что завершает доказательство предложения 7. ■

В заключение этого параграфа найдём решения функционального уравнения, которое удачно соединяет (4) и (11) в достаточно общем случае.

Теорема 8. Пусть E — линейное пространство над полем F характеристики нуля, а функция $g : E \rightarrow F$ такова, что $g(0) = 0$. Тогда g удовлетворяет уравнению

$$g(\lambda y + x) - g(\lambda y - x) = \lambda(g(y + x) - g(y - x)) \quad (x, y \in E, \lambda \in F), \quad (25)$$

если и только если существует симметричная билинейная функция $S : E^2 \rightarrow F$, такая что

$$g(x) = S(x, x) \quad (x \in E). \quad (26)$$

Доказательство. Если (26) выполнено, то

$$g(\lambda y + x) - g(\lambda y - x) = 4\lambda S(x, y) = \lambda(g(y + x) - g(y - x)),$$

т. е. (25) верно. Обратно, пусть (25) выполнено и $g(0) = 0$. Достаточно показать, что g — квадратичный функционал. Действительно, тогда, согласно предложению 1, существует симметричная биаддитивная функция $S : E^2 \rightarrow F$, такая что $g(x) = S(x, x)$ при всех $x \in E$. Справедливы равенства

$$S(\lambda y + x, \lambda y + x) - S(\lambda y - x, \lambda y - x) = 2S(\lambda y, x),$$

$$S(y + x, y + x) - S(y - x, y - x) = 2S(y, x).$$

Тогда из (25) следует однородность по первому переменному:

$$S(\lambda y, x) = \lambda S(y, x),$$

откуда вытекает билинейность функции S .

¹⁾ Нужно использовать определение функции S' , равенства $ji = -k$, $ki = j$, $ij = k$, $ik = -j$, а также равенство $S(-z, y) = -S(z, y)$, вытекающее из биаддитивности S .

Чтобы доказать, что g — квадратичный функционал, заметим прежде всего (положив $\lambda = 0$ в (25)), что g — чётная функция. Теперь запишем (25) в виде

$$g(\lambda y + x) - g(x - \lambda y) = \lambda(g(x + y) - g(x - y)). \quad (27)$$

Фиксируем $x, y \in E$ и определим $f : F \rightarrow F$, положив

$$f(\lambda) = g(x + \lambda y).$$

Покажем, что f удовлетворяет функциональному уравнению вида (27) на F . Если $\lambda, \mu, \nu \in F$, то в силу (27)

$$\begin{aligned} \lambda(f(\mu + \nu) - f(\mu - \nu)) &= \lambda(g(x + \mu y + \nu y) - g(x + \mu y - \nu y)) = \\ &= g(x + \mu y + \lambda \nu y) - g(x + \mu y - \lambda \nu y) = f(\mu + \lambda \nu) - f(\mu - \lambda \nu), \end{aligned} \quad (28)$$

т. е., действительно,

$$f(\mu + \lambda \nu) - f(\mu - \lambda \nu) = \lambda(f(\mu + \nu) - f(\mu - \nu)). \quad (28)$$

Положим здесь $\nu = 1, \mu = \lambda$:

$$f(2\lambda) - f(0) = \lambda(f(\lambda + 1) - f(\lambda - 1)). \quad (29)$$

Заметим, что

$$f(\lambda + 1) - f(\lambda - 1) = (f(1 + \lambda) - f(1 - \lambda)) + (f(1 - \lambda) - f(\lambda - 1)).$$

Положим в (28) $\nu = \mu = 1$:

$$f(1 + \lambda) - f(1 - \lambda) = \lambda(f(2) - f(0)),$$

а теперь возьмём $\mu = 0, \nu = 1$ и заменим λ на $1 - \lambda$:

$$f(1 - \lambda) - f(\lambda - 1) = f(0 + 1 - \lambda) - f(0 - (1 - \lambda)) = (1 - \lambda)(f(1) - f(-1)).$$

С учётом (29) получаем, что

$$f(2\lambda) = \lambda^2(f(2) - f(0) - f(1) + f(-1)) + \lambda(f(1) - f(-1)) + f(0),$$

или

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^2}{4}(f(2) - f(0) - f(1) + f(-1)) + \frac{\lambda}{2}(f(1) - f(-1)) + f(0). \quad (30)$$

Но

$$f(2) - f(0) - f(1) + f(-1) = g(x + 2y) - g(x) - g(x + y) + g(x - y),$$

$$f(1) - f(-1) = g(x + y) - g(x - y)$$

и $f(0) = g(x)$. Поэтому из (30) следует, что

$$\begin{aligned} g(x + \lambda y) &= \frac{\lambda^2}{4}(g(x + 2y) - g(x) - g(x + y) + g(x - y)) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2}(g(x + y) - g(x - y)) + g(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Сложив эти равенства при $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$, получаем

$$g(x + 2y) = 3g(x + y) + g(x - y) - 3g(x). \quad (32)$$

Положив здесь $x = 0$ и учитывая, что $g(0) = 0, g(-y) = g(y)$, получаем

$$g(2y) = 4g(y). \quad (33)$$

Из (31) и (33) при $x = 0$ следует, что для всех $\lambda \in F$

$$g(\lambda y) = \lambda^2 g(y) \quad (y \in E). \quad (34)$$

Если пространство E одномерно, то из (34) легко следует (4). Если размерность больше 1 (возможно, бесконечна), то пусть векторы $x, y \in E$ линейно независимы. При $\alpha, \beta \in F$ получаем, дважды применив (31)¹⁾:

$$g(\alpha x + \beta y) = P(\alpha)\beta^2 + Q(\alpha)\beta + R(\alpha),$$

$$g(\alpha x + \beta y) = p(\beta)\alpha^2 + q(\beta)\alpha + r(\beta).$$

Поскольку F имеет характеристику 0, то функции P, Q, R (соответственно p, q, r) являются многочленами степени не выше 2 по α (соответственно по β)²⁾. Так как функция g чётна и $g(0) = 0$, то для некоторых констант $A, B, C, D \in F$

$$g(\alpha x + \beta y) = A\alpha^2\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta^2. \quad (35)$$

Но ввиду (34) $A = 0$ ³⁾, поэтому g — квадратичный функционал на подпространстве, натянутом на x и y . Так как это произвольные линейно независимые векторы, то g — квадратичный функционал на E . Теорема 8 доказана. ■

11.2. Треугольники в нормированных пространствах: вторая характеристика предгильбертовых пространств

Теперь мы найдём алгебраическую формулировку утверждения, что в некотором вещественном или комплексном нормированном пространстве $(E, \|\cdot\|)$ длины трёх сторон невырожденного треугольника *определяют длины трёх медиан*. В треугольнике со сторонами $x, y, x - y$ медиана, исходящая из начала координат, равна $(x + y/2)$. Следовательно, существует функция $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$\|x + y\| = L(\|x\|, \|y\|, \|x - y\|) \quad (x, y \in E). \quad (36)$$

(Для двух других медиан нужно взять вместо x, y соответственно $y, x - y$ и $x, x - y$.)

В предгильбертовом пространстве длины сторон невырожденного треугольника однозначно определяют длины медиан. Действительно, квадрат нормы удовлетворяет уравнению (4), поэтому

$$\|x + y\|^2 = (2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2)^{1/2}.$$

С помощью функциональных уравнений мы теперь получим следующую характеристику предгильбертовых пространств (Lorch, 1948).

Теорема 9. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное или комплексное нормированное пространство, причём длины сторон любого невырожденного треугольника в E определяют длины медиан. Тогда E — предгильбертово пространство.

Доказательство. Положим $f(x) = \|x\|^2$. Пусть Γ — множество всех таких $\gamma \in \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in E$ из $f(x) = f(y)$ следует $f(x + \gamma y) = f(\gamma x + y)$. Покажем, что $\Gamma = \mathbb{R}$.

Подмножество Γ замкнуто в $\mathbb{R}$ ввиду непрерывности функции f в топологии нормы. Оно непусто, поскольку содержит 0 и 1. Если $\gamma \in \Gamma$, то $-\gamma \in \Gamma$, и если $\gamma \neq 0$, то

¹⁾ Первый раз заменив x и λy на αx и βy соответственно, второй раз — наоборот.

²⁾ Приравняв правые части полученных равенств и полагая $\beta = 0, 1, 2$, находим вид функций P, Q, R ; аналогично находим вид p, q, r .

³⁾ Так как функция g однородна степени 2.

$\gamma^{-1} \in \Gamma$. Кроме того, Γ замкнуто в некотором специфическом смысле. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $x, y \in E$, $f(x) = f(y)$. Так как $\gamma_1 \in \Gamma$, то $f(\gamma_1 x + y) = f(x + \gamma_1 y)$, а поскольку $\gamma_2 \in \Gamma$, то

$$f(x + \gamma_1 y + \gamma_2(\gamma_1 x + y)) = f(\gamma_2(x + \gamma_1 y) + \gamma_1 x + y)$$

и потому

$$f((1 + \gamma_1 \gamma_2)x + (\gamma_1 + \gamma_2)y) = f((\gamma_1 + \gamma_2)x + (1 + \gamma_1 \gamma_2)y).$$

Иначе говоря, если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ и $\gamma_1 \gamma_2 \neq -1$, то

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 + \gamma_1 \gamma_2} \in \Gamma.$$

Напомним свойства гиперболического тангенса: $\tanh(u + v) = (\tanh u + \tanh v)/(1 + \tanh u \tanh v)$, функция $t \mapsto (1/2) \ln [(1 + t)/(1 - t)]$ является обратной к $\tanh$. Положим $\Gamma' = \{(1/2) \ln [(1 + \gamma)/(1 - \gamma)] \mid \gamma \in \Gamma \cap]-1, +1[\}$. При таком определении Γ' — аддитивная подгруппа в $\mathbb{R}$. Так как Γ замкнуто, то Γ' — замкнутая подгруппа. Покажем, что $0 (\in \Gamma')$ — точка накопления для Γ' . Достаточно доказать, что 0 — точка накопления для Γ , а это верно, если $1/n \in \Gamma$ для любого натурального n . Поскольку Γ замкнуто относительно обратных элементов, то достаточно показать, что $\mathbb{N} \subset \Gamma$. Мы уже знаем, что 0 и 1 принадлежат Γ . Проведём индукцию, предположив, что натуральные числа до $n - 1$ включительно содержатся в Γ . Пусть $x, y \in E$, $f(x) = f(y)$. Тогда

$$f(nx + y) = f(((n - 1)x + y) + x).$$

С учётом (36) получаем, что

$$f(nx + y) = L(f((n - 1)x + y), f(x), f((n - 2)x + y)).$$

Так как $n - 1, n - 2 \in \Gamma$ и $f(x) = f(y)$, то

$$\begin{aligned} f(nx + y) &= L(f(x + (n - 1)y), f(x), f(x + (n - 2)y)) = \\ &= L(f(x + (n - 1)y), f(y), f(x + (n - 2)y)). \end{aligned}$$

Снова используя (36), получаем

$$f(nx + y) = f((x + (n - 1)y) + y) = f(x + ny),$$

что и требовалось. Значит, множество Γ' плотно в $\mathbb{R}$. Будучи замкнутым, оно совпадает с $\mathbb{R}$. Как следствие, $\Gamma \supset]-1, 1[$. Так как Γ замкнуто относительно обратных элементов и содержит 1 и -1 , то $\Gamma = \mathbb{R}$.

Иначе говоря, в условиях теоремы 9 норма $f(x) = \|x\|$ удовлетворяет условному функциональному уравнению

$$f(x + \gamma y) = f(\gamma x + y) \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad \text{если } f(x) = f(y). \quad (37)$$

Теперь теорема 9 вытекает из классического результата, впервые установленного в работе Ficken, 1944.

Теорема 10. *Вещественное или комплексное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ является предгильбертовым, если и только если для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и всех таких $x, y \in E$, что $\|x\| = \|y\|$, выполнено равенство*

$$\|x + \gamma y\| = \|\gamma x + y\|. \quad (38)$$

Доказательство. Если $(E, \|\cdot\|)$ — предгильбертово пространство, то

$$\|x + \gamma y\|^2 = \|x\|^2 + 2\gamma \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \gamma^2 \|y\|^2,$$

$$\|\gamma x + y\|^2 = \gamma^2 \|x\|^2 + 2\gamma \operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

для всех $\gamma \in \mathbb{R}$. Поэтому при $\|x\| = \|y\|$ выполнено (38).

Доказательство обратного утверждения требует более сложных средств, и здесь мы используем функциональные уравнения. Для удобства разделим доказательство на ряд лемм и предложений, которые интересны сами по себе (в особенности предложение 14, где установлены условия, при которых непрерывные отображения являются квадратичными функционалами).

Предложение 11. Пусть E — вещественное или комплексное топологическое линейное пространство, а непрерывная функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

- (i) $f(x) > 0$ при всех $x \neq 0$ в E и $f(0) = 0$,
- (ii) $f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$ при $x \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$,
- (iii) f удовлетворяет условному уравнению (37).

Тогда $f(x) = f(y) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$ при $x, y \in E$, $\alpha \in]0, 1[$, если и только если $x = y$.

Доказательство. Пусть при некоторых $x, y \in E$, $\alpha \in]0, 1[$ выполнены равенства $f(x) = f(y) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$. Вначале докажем по индукции, что для всех неотрицательных целых n

$$f(x) = f(y) = f((n - \alpha)(x - y) - y). \quad (39)$$

Для $n = 0$ это вытекает из (ii) при $\lambda = -1$. Пусть (39) верно при некотором n . Ввиду (37) при всех $\beta \in \mathbb{R}$

$$f((n - \alpha)(x - y) - y + \beta y) = f(\beta((n - \alpha)(x - y) - y) + y).$$

Возьмём $\beta = (n + 1) - \alpha$. Тогда

$$f((n - \alpha)x) = f((n - \alpha)(n + 1 - \alpha)(x - y) + (\alpha - n)y).$$

Поскольку α не является целым числом, то с учётом (ii) и (i)

$$f(x) = f((n + 1 - \alpha)(x - y) - y),$$

и (39) доказано.

Из (ii), (i) и (39) вытекает, что

$$\frac{f(x)}{n - \alpha} = f\left(x - y - \frac{f(y)}{n - \alpha}\right).$$

Устремив n к бесконечности и используя непрерывность функции f , находим, что $f(x - y) = 0$. С учётом (i) получаем, что $x = y$. Предложение 11 доказано. ■

Предложение 11, а также нижеследующие леммы 12 и 13 и предложение 14 верны для более общих линейных топологических пространств (в том числе над телом кватернионов, см. упр. 33, 34). Для простоты мы ограничимся здесь вещественными и комплексными пространствами.

Лемма 12. Пусть E — вещественное или комплексное линейное пространство, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, обладающая свойствами (i)–(iii) из предложения 11. Пусть при этом $y \in E$, $y \neq 0$ и $r > 0$. Тогда существует не более двух различных вещественных t , для которых

$$f(x + ty) = r.$$

Доказательство. Пусть, напротив, существуют три различных $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, для которых

$$f(x + t_1 y) = f(x + t_2 y) = f(x + t_3 y).$$

Без потери общности можно считать, что $X_2 = x + t_2 y$ лежит на интервале $]X_1, X_3[=]x + t_1 y, x + t_3 y[$ и, следовательно, имеет вид $X_2 = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_3$ для некоторого $\lambda \in]0, 1[$. При этом

$$f(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_3) = f(X_1) = f(X_3).$$

Из предложения 11 вытекает равенство $X_1 = X_3$, что невозможно при $y \neq 0$ и $t_1 \neq t_3$. Лемма 12 доказана. ■

Лемма 13. Пусть E — вещественное или комплексное линейное пространство, а функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами (i)–(iii) из предложения 11. Тогда f удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x)f(y)f(x+y) = f(f(y)^2 x + f(x)^2 y) \quad (x, y \in E). \quad (40)$$

Доказательство. При ненулевых x и y запишем

$$f(x+y) = f\left[f(x)\frac{x}{f(x)} + f(y)\frac{y}{f(y)}\right].$$

Ввиду (i) и (ii) выполнено равенство $f[x/f(x)] = f[y/f(y)] = 1$. Используя (37) и снова (ii), находим

$$f(x+y) = f\left[f(y)\frac{x}{f(x)} + f(x)\frac{y}{f(y)}\right]. \quad (41)$$

Применяя (i) и (ii) ещё раз, получаем (40).

При $x = 0$ или $y = 0$ уравнение очевидно. ■

Предложение 14. Пусть E — вещественное или комплексное линейное топологическое пространство, а $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, обладающая свойствами (i)–(iii) из предложения 11. Тогда $g(x) := f(x)^2$ — квадратичный функционал.

Доказательство. Пусть $x, y \in E$. Сначала предположим, что существуют $z \in E$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, такие что

$$x = \lambda z, \quad y = \mu z.$$

Ввиду (i) и (ii)

$$g(x+y) + g(x-y) = ((\lambda + \mu)^2 + (\lambda - \mu)^2)g(z),$$

$$2g(x) + 2g(y) = (2\lambda^2 + 2\mu^2)g(z).$$

Значит, g в этом случае удовлетворяет уравнению (4), характеризующему квадратичные функционалы.

Пусть теперь x и y линейно независимы над $\mathbb{R}$. Заменим в уравнении (40) x на $x - y$ и y на $2y$:

$$f(x-y)f(2y)f(x+y) = f(g(2y)(x-y) + 2g(x-y)y),$$

откуда с учётом (ii)

$$f(x+y)f(x-y)f(y) = f(2g(y)x + (g(x-y) - 2g(y))y). \quad (42)$$

Заменим y на $-y$ и снова применим (ii):

$$f(x+y)f(x-y)f(y) = f(2g(y)x + (2g(y) - g(x+y))y). \quad (43)$$

Теперь запишем (41) иначе:

$$f(x+y) = f\left(\frac{g(y)x - g(x)y}{f(x)f(y)} + 2f(x)\frac{y}{f(y)}\right),$$

или

$$f(x+y) = f\left(\frac{2g(y)x - 2g(x)y}{f(x-y)f(y)} + 2f(x)\frac{y}{f(y)}\right). \quad (44)$$

При этом $f[(2g(y)x - 2g(x)y)/(f(x-y)f(y))] = f[2f(x)y/f(y)]$, поскольку это равенство эквивалентно $f(g(y)x - g(x)y) = f(x)f(y)f(x-y)$, что вытекает из (40) после замены y на $-y$. Поэтому к правой части (44) можно применить (37) с $\gamma = f(x-y)/[f(2x)]$, получая

$$f(x+y) = f\left(\frac{2g(y)x - 2g(x)y}{f(x-y)f(y)} + f(x-y)\frac{y}{f(y)}\right) = \frac{f(2g(y)x + (g(x-y) - 2g(x))y)}{f(x-y)f(y)},$$

или

$$f(x+y)f(x-y)f(y) = f(2g(y)x + (g(x-y) - 2g(x))y). \quad (45)$$

Замена y на $-y$ даёт

$$f(x+y)f(x-y)f(y) = f(2g(y)x + (2g(x) - g(x+y))y). \quad (46)$$

Векторы $2g(y)x$ и y линейно независимы над $\mathbb{R}^1$. Сопоставляя (42), (43), (45) и (46) и применяя лемму 12, видим, что среди четырёх вещественных чисел

$$A = g(x-y) - 2g(y), \quad B = 2g(y) - g(x+y),$$

$$C = g(x-y) - 2g(x), \quad D = 2g(x) - g(x+y)$$

не больше двух различных. Равенство $g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)$ очевидно, если $A = D$, или $B = C$, или $A = B$ и $C = D$. Если, наконец, $A = C$ и $B = D$, то $g(x) = g(y)$, и можно выделить два подслучая.

Если $g(x+y) = g(x-y)$, то (поскольку $g(x) = g(y)$ и $g(x-y) \neq 0$ при $x \neq y$) получаем из (42) (или из (43)) с учётом (i), что

$$f(x) = f(y) = f\left(\frac{2g(y)}{g(x-y)}x + \left(1 - \frac{2g(y)}{g(x-y)}\right)y\right).$$

Так как x и y линейно независимы, то ввиду предложения 11 исключён случай $2g(y) < g(x-y)$. Но равенства $g(x+y) = g(x-y)$ и $g(x) = g(y)$ сохранятся, если заменить x на $x+y$ и y на $x-y$. Следовательно, исключён случай $2g(x-y) < g(2y)$, или, эквивалентно, $g(x-y) < 2g(y)$. Значит, $g(x-y) = 2g(y)$. Тогда $g(x+y) = g(x-y) = 2g(y) = 2g(x)$, откуда следует, что

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y).$$

Если $g(x+y) \neq g(x-y)$, то можно рассмотреть $X = x+y$ и $Y = x-y$ вместо x и y . Тогда $g(X) \neq g(Y)$ и, как показано выше,

$$g(X+Y) + g(X-Y) = 2g(X) + 2g(Y).$$

Таким образом,

$$g(2x) + g(2y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2g\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

откуда снова

$$2g(x) + 2g(y) = g(x+y) + g(x-y).$$

Мы показали, что уравнение квадратичного функционала выполнено во всех случаях. Предложение 14 доказано. ■

¹⁾ Поскольку x и y предполагаются независимыми.

Доказательство утверждения «если» в теореме 10 теперь проводится легко. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное или комплексное нормированное пространство, $f(x) = \|x\|$. Пусть (38) выполнено. Функция f непрерывна и удовлетворяет условиям (i)–(iii). Предложение 14 показывает, что $g = f^2$ — квадратичный функционал, и результаты § 1 показывают¹⁾, что норма $\|\cdot\|$ порождается внутренним произведением. Теорема 10 доказана. ■

Пусть для функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено (40). Тогда $g = f^2$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$g(g(x)y + g(y)x) = g(x)g(y)g(x+y) \quad (x, y \in E). \quad (47)$$

Довольно неожиданно, что при некоторых ограничениях на g все решения уравнения (47) являются квадратичными функционалами. Мы рассмотрим случай $E = \mathbb{R}$, следуя работе Volkman (1974).

Предложение 15. Пусть $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, причём $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при всех $x \neq 0$. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Тогда g удовлетворяет функциональному уравнению

$$g(g(x)y + g(y)x) = g(x)g(y)g(x+y) \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad (48)$$

если и только если существует положительная константа a , такая что

$$g(x) = ax^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Положив $y = -x$ в (48), получаем с учётом равенства $g(0) = 0$, что $g(g(-x)x - xg(x)) = 0$. Так как по предположению g обращается в нуль только при $x = 0$, то $x(g(-x) - g(x)) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому g — чётная функция.

Определим функции F и h на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}^*$ соответственно, положив

$$F(x) = xg\left(\frac{x}{2}\right), \quad h(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Заменив x и y на $x/2$, получаем из (48)

$$h(F(x)) = h(x) \quad (x \in \mathbb{R}^*). \quad (49)$$

Вначале докажем, что функция h постоянна вне некоторого ограниченного промежутка. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ и $g(0) = 0$, то существует наибольшее неотрицательное X , для которого $F(X) = X$. При $x > X$ имеем $F(x) > x$. Поэтому существует x_1 , такое что $X < x_1 < x$ и $F(x_1) = x$. Аналогично, существует x_2 , такое что $X < x_2 < x_1$ и $F(x_2) = x_1$. Мы получаем убывающую последовательность $\{x_n\}$, такую что $F(x_n) = x_{n-1}$ и $x_n > X$. Она имеет предел x_∞ . Ввиду непрерывности функции g (значит, и F) справедливо равенство $F(x_\infty) = x_\infty$. Поскольку X — наибольшее число с таким свойством «неподвижной точки», то $x_\infty = X$. Поочерёдно используя (49) и определение последовательности $\{x_n\}$, получаем

$$h(x) = h(F(x_1)) = h(x_1) = h(F(x_2)) = h(x_2) = \dots = h(x_n).$$

Поскольку функция h непрерывна, а последовательность $\{x_n\}$ сходится к X , то $h(x) = h(X)$, а потому и

$$g(x) = h(X)x^2 \quad \text{при всех } x \geq X. \quad (50)$$

¹⁾ Предложение 4 в вещественном случае и теорема 5 в комплексном (учитывая, что построенная в ней функция S' эрмитова для вещественнозначного g).

Возьмём теперь произвольное положительное Y , и пусть $y \geq Y$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x)y + g(y)x) = \infty$ и при достаточно большом $x \geq X$ для любого $y \geq Y$ выполнено неравенство $g(x)y + g(y)x \geq X$. С учётом (48) и (50) получаем

$$h(X)[h(X)x^2y + g(y)x]^2 = h(X)x^2g(y)h(X)(x+y)^2.$$

Мы можем сократить на x^2 и $h(X)$ ($\neq 0$, так как $g(x) \neq 0$ при $x \neq 0$). Имеем для всех $y \geq Y$:

$$g(y)^2 - h(X)(x^2 + y^2)g(y) + h(X)^2x^2y^2 = 0.$$

Полученное уравнение второй степени относительно $g(y)$ должно выполняться при всех $y \geq Y$. Оно имеет корни $h(X)x^2$ и $h(X)y^2$. Первое значение не зависит от y . Поэтому если при некотором $y_0 > x$ выполнено равенство $g(y_0) = h(X)x^2$, то по непрерывности оно выполнено при любом $y \geq x$. Но это невозможно, так как при $y > X$, ввиду (50), выполнено равенство $g(y) = h(X)y^2$.

Точно так же, если $Y < y_0 < x$ и $g(y_0) = h(X)x^2$, то $g(y) = h(X)x^2$ при всех $Y \leq y_0 \leq x$. Такое соотношение должно выполняться для всех $Y > 0$. Но это невозможно, так как $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = g(0) = 0$. Поэтому $g(y) = h(X)y^2$ при всех $y \geq Y > 0$.

Поскольку $Y > 0$ произвольно, $g(0) = 0$ и функция g чётна, то $g(y) = h(X)y^2$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Предложение 15 доказано. ■

Теперь можно доказать следующее (см. упр. 21, 22, 23).

Теорема 16. *Вещественное или комплексное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ является предгильбертовым, если и только если функция $g(x) = \|x\|^2$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$g(x)g(y)g(x+y) = g(xg(y) + yg(x)) \quad (x, y \in E). \quad \blacksquare \quad (51)$$

Замечание. Из теоремы 16 легко получить новое доказательство утверждения «если» в теореме 10. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное или комплексное нормированное пространство, такое что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет равенству (38) при $\|x\| = \|y\|$ и при любом $\gamma \in \mathbb{R}$. Мы вывели (47) из равенства $g(x) = \|x\|^2$ в предгильбертовом пространстве, используя только (38). Таким образом, g удовлетворяет уравнению (51). Тогда по теореме 16 $(E, \|\cdot\|)$ — предгильбертово пространство, и теорема 10 доказана.

11.3. Ортогональная аддитивность

Пусть $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — вещественное или комплексное предгильбертово пространство размерности не ниже 2. Введём обычным образом отношение ортогональности двух элементов $x, y \in E$, положив

$$x \perp y, \text{ если } \langle x, y \rangle = 0.$$

Наша цель — решить уравнение Коши при условии $x \perp y$. А именно: мы хотим найти все функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, такие что

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{для всех } x, y \in E \text{ при условии } x \perp y. \quad (52)$$

Такие функции называются *ортогонально аддитивными*.

Теорема 17. *Пусть $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — вещественное предгильбертово пространство размерности не ниже 2. Непрерывная функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ортогонально аддитивна,*

если и только если существуют вещественная константа a и непрерывная линейная функция $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, такие что

$$f(x) = a\|x\|^2 + h(x) \quad (x \in E). \quad (53)$$

Линейность здесь понимается в смысле

$$h(\lambda x + \mu y) = \lambda h(x) + \mu h(y) \quad \text{при всех } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in E.$$

Доказательство. Пусть вначале функция f имеет вид (53). Если $x \perp y$, то по теореме Пифагора $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$. Тогда

$$f(x + y) = a\|x + y\|^2 + h(x + y) = a\|x\|^2 + a\|y\|^2 + h(x) + h(y) = f(x) + f(y).$$

Таким образом, функция f непрерывна и ортогонально аддитивна.

Обратно, пусть f непрерывна и ортогонально аддитивна. Разложим её на чётную и нечётную части:

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

где $g(x) = (f(x) + f(-x))/2$, $h(x) = (f(x) - f(-x))/2$. Нетрудно проверить, что g и h являются непрерывными решениями условного уравнения (52). Докажем, что функция h аддитивна, а g — квадратичный функционал.

Аддитивность функции h достаточно доказать для всех двумерных подпространств H в E . Поскольку E — предгильбертово пространство, то в H найдутся ненулевые элементы x, y , такие что $x \perp y$ и $(x + y) \perp (x - y)$. (Достаточно положить $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\langle x, y \rangle = 0$.) На самом деле нам потребуется лишь это свойство предгильбертова пространства. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку $\lambda(x + y) \perp \lambda(x - y)$, $\lambda x \perp \lambda y$ и $\lambda x \perp \lambda - y$, то ввиду (52)

$$\begin{aligned} h(2\lambda x) &= h(\lambda(x + y) + \lambda(x - y)) = h(\lambda(x + y)) + h(\lambda(x - y)) = \\ &= h(\lambda x) + h(\lambda y) + h(\lambda x) + h(-\lambda y). \end{aligned}$$

Поскольку функция h нечётна, то

$$h(2\lambda x) = 2h(\lambda x).$$

Аналогично, $h(2\lambda y) = 2h(\lambda y)$.

Докажем по индукции, что $h(p\lambda x) = ph(\lambda x)$ и $h(p\lambda y) = ph(\lambda y)$ для всех натуральных p . Это верно при $p = 1, 2$. Допустим, что результат справедлив при всех $p < n$. Так как $\lambda(n - 1)(x + y) \perp \lambda(x - y)$, то в силу предположения индукции

$$\begin{aligned} h(\lambda nx + \lambda(n - 2)y) &= h(\lambda(n - 1)(x + y) + \lambda(x - y)) = \\ &= h(\lambda(n - 1)x) + h(\lambda(n - 1)y) + h(\lambda x) + h(-\lambda y) = \\ &= (n - 1)h(\lambda x) + h(\lambda x) + (n - 1)h(\lambda y) - h(\lambda y), \\ h(\lambda nx + \lambda(n - 2)y) &= nh(\lambda x) + (n - 2)h(\lambda y). \end{aligned} \quad (54)$$

Но $\lambda nx \perp \lambda(n - 2)y$, и можно вычислить $h(\lambda nx + \lambda(n - 2)y)$ другим способом:

$$h(\lambda nx + \lambda(n - 2)y) = h(\lambda nx) + h(\lambda(n - 2)y).$$

В силу предположения индукции

$$h(\lambda nx + \lambda(n - 2)y) = h(\lambda nx) + (n - 2)h(\lambda y).$$

Ввиду (54)

$$h(\lambda nx) = nh(\lambda x), \quad (55)$$

как и утверждалось. Аналогично,

$$h(\lambda ny) = nh(\lambda y).$$

Положим в (55) $\lambda = 1/n$:

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} h(x).$$

Повторно применив (55), получаем для всех натуральных m, n

$$h\left(\frac{m}{n} x\right) = \frac{m}{n} h(x).$$

Ввиду непрерывности функции h на E (а тем самым и на H) имеем

$$h(\lambda x) = \lambda h(x) \quad (56)$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Аналогично,

$$h(\lambda y) = \lambda h(y) \quad (57)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и данного $y \in H$. Поскольку $\lambda x \perp \mu y$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), то ввиду (52), (56) и (57) функция h линейна на H :

$$h(\lambda x + \mu y) = \lambda h(x) + \mu h(y).$$

Применим аналогичное рассуждение к g — чётной части функции f . Пусть снова H — двумерное подпространство в E , а x, y — его ненулевые элементы, такие что $x \perp y$ и $(x + y) \perp (x - y)$. Тогда

$$\begin{aligned} g(2\lambda x) &= g(\lambda(x + y) + \lambda(x - y)) = g(\lambda(x + y)) + g(\lambda(x - y)) = \\ &= g(\lambda x) + g(\lambda y) + g(\lambda x) + g(-\lambda y) = 2g(\lambda x) + 2g(\lambda y). \end{aligned}$$

По симметрии также

$$g(2\lambda y) = 2g(\lambda x) + 2g(\lambda y), \quad (58)$$

и ввиду произвольности λ выполнено равенство

$$g(\lambda x) = g(\lambda y) \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (59)$$

Ввиду (58) и (59)

$$g(2\lambda x) = 4g(\lambda x).$$

Докажем по индукции, что

$$g(n\lambda x) = n^2 g(\lambda x).$$

Пусть этот факт верен при всех натуральных $p < n$. Вычислим $g(\lambda nx + \lambda(n - 2)y)$ двумя способами. Во-первых,

$$\begin{aligned} g(\lambda nx + \lambda(n - 2)y) &= g(\lambda(n - 1)(x + y) + \lambda(x - y)) = \\ &= g(\lambda(n - 1)(x + y)) + g(\lambda(x - y)) = \\ &= g(\lambda(n - 1)x) + g(\lambda(n - 1)y) + g(\lambda x) + g(-\lambda y) = \\ &= (n - 1)^2 g(\lambda x) + (n - 1)^2 g(\lambda y) + g(\lambda x) + g(\lambda y) = \\ &= ((n - 1)^2 + 1)g(\lambda x) + ((n - 1)^2 + 1)g(\lambda y), \end{aligned}$$

и ввиду (59)

$$g(\lambda nx + \lambda(n - 2)y) = 2((n - 1)^2 + 1)g(\lambda x). \quad (60)$$

С другой стороны,

$$g(\lambda nx + \lambda(n-2)y) = g(\lambda nx) + (n-2)^2 g(\lambda y) = g(\lambda nx) + (n-2)^2 g(\lambda x). \quad (61)$$

Сравнив (60) и (61), получаем

$$g(\lambda nx) = [2((n-1)^2 + 1) - (n-2)^2]g(\lambda x) = n^2 g(\lambda x),$$

что и завершает индуктивный переход.

Из доказанного легко выводится, что

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 g(x)$$

для всех натуральных m и n . В силу непрерывности функции g равенство

$$g(\lambda x) = \lambda^2 g(x) \quad (62)$$

выполнено при всех $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$, а ввиду её чётности — при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Ввиду (59)

$$g(\lambda y) = \lambda^2 g(y) \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (63)$$

Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ получаем из (59), (62) и (63) с учётом ортогональной аддитивности:

$$g(\lambda x + \mu y) = g(\lambda x) + g(\mu y) = \lambda^2 g(x) + \mu^2 g(y) = (\lambda^2 + \mu^2)g(x). \quad (64)$$

Пусть x', y' — произвольные элементы двумерного подпространства $H \subset E$. Поскольку x и y порождают H , то найдутся вещественные a, b, c, d , для которых

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy.$$

Ввиду (64) и (59)

$$g(x') + g(y') = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)g(x). \quad (65)$$

Аналогично из (59) и (64) вытекает, что

$$g(x' + y') + g(x' - y') = [(a+c)^2 + (a-c)^2 + (b+d)^2 + (b-d)^2]g(x),$$

т. е.

$$g(x' + y') + g(x' - y') = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)g(x). \quad (66)$$

Сравнение формул (65) и (66) показывает, что

$$g(x' + y') + g(x' - y') = 2g(x') + 2g(y') \quad (x', y' \in H),$$

т. е. g — квадратичный функционал на подпространстве H .

Поскольку функционал g непрерывен, то существует такая билинейная функция $S: H \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$g(x) = S(x, x).$$

Так как g ортогонально аддитивен, то из $x \perp y$ вытекает $S(x, y) = 0$. Теперь воспользуемся тем фактом, что H — двумерное предгильбертово пространство. Пусть (e_1, e_2) — ортонормированный базис в H относительно внутреннего произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Если

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2,$$

то

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad S(x, y) = x_1 y_1 S(e_1, e_1) + x_2 y_2 S(e_2, e_2),$$

поскольку $S(e_1, e_2) = 0$. Но так как $\langle x, y \rangle = 0$ и потому $S(x, y) = 0$, то $x_1 y_1 = -x_2 y_2$ и $S(e_1, e_1) = S(e_2, e_2) = a \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$g(x) = S(x, x) = a\|x\|^2,$$

и теорема 17 доказана. ■

В действительности можно найти все ортогонально аддитивные функции на предгильбертовом пространстве и без условия непрерывности (см. упр. 25).

Обратно, с помощью ортогонально аддитивных функций можно дать характеристику предгильбертовых пространств. Пусть E — вещественное нормированное пространство размерности не ниже 2. Определим отношение ортогональности $\perp$ двух элементов $x, y \in E$ следующим образом:

$$x \perp y, \quad \text{если} \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Если $x \perp y$, то для всех $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ имеем $\mu x \perp \nu y$. В общем случае об отношении $\perp$ трудно сказать что-либо ещё. Например, оно не всегда симметрично. Более того, если размерность E не меньше трёх, то отношение $\perp$ симметрично, если и только если E — предгильбертово пространство (James, 1947). Поэтому сделаем дополнительное допущение относительно E . Назовём E *ортогонально богатым*, если его размерность не меньше 3 и в любом его двумерном подпространстве найдётся пара ненулевых элементов x, y , таких что $x \perp y$ и $(x + y) \perp (x - y)$. В этой ситуации возможна следующая характеристика предгильбертовых пространств. Как и выше, определим ортогональную аддитивность следующим образом:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{если} \quad x \perp y. \quad (67)$$

Теорема 18. Пусть вещественное нормированное пространство E ортогонально богато. Тогда E предгильбертово, если и только если условие ортогональной аддитивности не является C -обильным¹⁾.

Доказательство. Если E предгильбертово, рассмотрим функцию $f(x) = \|x\|^2$. Она ортогонально аддитивна (для отношения $x \perp y$, заданного условием $\langle x, y \rangle = 0$), но не аддитивна.

Обратно, пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная, ортогонально аддитивная, но не аддитивная функция. Из доказательства теоремы 17 вытекает²⁾ однозначное разложение

$$f = g + h,$$

где h — линейная функция, g — квадратичный функционал. Так как f не аддитивна, то g не является тождественным нулём и ввиду (64) вообще не обращается в нуль при $x \neq 0$. Заменив, если нужно, g на $-g$, можно считать непрерывный функционал g строго положительным на $E \setminus \{0\}$. Согласно предложению 6

$$g(x) = S(x, x),$$

где S — симметричная билинейная функция на E . Так как функционал g положительно определён, то $S(x, y)$ — внутреннее произведение на E . Покажем, что $x \perp y$, если и только если $S(x, y) = 0$.

Если $x \perp y$, то $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (ортогональная аддитивность) и $g(x + y) = g(x) + g(y)$, так как g — чётная часть функции f . Но $g(x) = S(x, x)$. Как следствие, $S(x, y) = 0$.

¹⁾ То есть соответствующее подмножество в $\mathbb{R}^2$ не является обильным относительно класса всех непрерывных функций (см. с. 84).

²⁾ Поскольку использовалась не предгильбертовость, а лишь наличие в любом двумерном подпространстве таких векторов x, y , что $x \perp y$ и $x + y \perp x - y$.

Обратно, пусть $S(x, y) = 0$ при ненулевых x, y , порождающих подпространство H . Поскольку E ортогонально богато, то найдётся элемент $y' \in H \setminus \{0\}$, такой что $x \perp y'^{\perp 1}$. По доказанному $S(x, y') = 0$. Так как H двумерно, то вектор y' пропорционален y , поэтому $x \perp y$.

Отношение ортогональности, соответствующее равенству $S(x, y) = 0$, совпадает с $x \perp y$. Первое симметрично, а потому симметрично и второе. Но, как уже отмечено (James, 1947), в вещественном нормированном пространстве размерности не ниже 3 симметричность отношения $x \perp y$ означает, что норма порождена внутренним произведением. Теорема 18 доказана. ■

В действительности теорема 18 остаётся справедливой и без условия непрерывности, причём для любого вещественного нормированного пространства размерности не ниже 2 (см. упр. 37 и работу Szabó 1986).

11.4. Приложение к газовой динамике

Применим изложенные результаты к газовой динамике (см. Truesdell–Muncaster, 1980, р. 71–73, 88–89). Идеальный газ состоит из точечных молекул равной фиксированной массы, взаимодействия которых сводятся к столкновениям, когда молекулы могут обмениваться энергией по обычным законам механики. Молекулы в идеальном газе независимы в том смысле, что вероятность для молекулы занимать данное положение с данной энергией не зависит от положений и количеств энергии других молекул. Найдём плотность вероятности того, что молекула имеет скорость v . Вероятность того, что компоненты скорости в некотором ортогональном базисе принимают значения соответственно между v_x и $v_x + dx$, v_y и $v_y + dv_y$, v_z и $v_z + dv_z$, имеет вид $H(v)dv_x dv_y dv_z$ для некоторой функции $H(v)$, которую мы хотим найти. Из физических соображений обычно принимается, что H — положительная чётная функция, причём непрерывная (см., однако, упр. 26).

При столкновении двух молекул начальные скорости v и w преобразуются в конечные скорости v' и w' таким образом, что

$$v' + w' = v + w \quad (68)$$

(сохранение импульса) и

$$\|v'\|^2 + \|w'\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad (69)$$

(сохранение энергии), где $\|\cdot\|$ обозначает обычную евклидову норму в $E = \mathbb{R}^3$. Мы используем также обычное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, для которого

$$\langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

Плотность вероятности H должна удовлетворять условию

$$H(v)H(w) = H(v')H(w')$$

(предполагается, что плотность больше 0 и меньше 1). Если $h(v) = \ln H(v)$, ..., то

$$h(v) + h(w) = h(v') + h(w').$$

Ввиду (68)

$$h(v) + h(w) = h(v') + h(v + w - v'),$$

¹⁾ Пусть $a, b \in H$, $a \perp b$, $a + b \perp a - b$. Из определения ортогональности (формула перед (67)) видно, что a и b не пропорциональны и потому порождают H . Умножив их на подходящие коэффициенты, можно считать, что $x = a + b$. Тогда вектор $y' = a - b$ искомым.

а из (68) и (69) следует, что

$$\langle v - v', w - v' \rangle = 0.$$

Теперь фиксируем $v' \in E$ и положим $V = v - v'$, $W = w - v'$. Тогда

$$h(V + v') + h(W + v') = h(v') + h(V + W + v').$$

Определим $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$f(V) = h(V + v') - h(v').$$

Получаем условное уравнение Коши для f :

$$f(V + W) = f(V) + f(W) \quad \text{при} \quad \langle V, W \rangle = 0 \quad (V, W \in E). \quad (70)$$

Иными словами, функция f ортогонально аддитивна на E . По теореме 17

$$f(V) = \beta \|V\|^2 + l(V),$$

где β — вещественная константа, $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ — (непрерывная) линейная функция, т. е. $l(V) = \langle V, t \rangle$ для некоторого $t \in E$.

Вернёмся к функции H . Для случая $v' = 0$ получаем, что при некотором вещественном α и всех $v \in E$

$$H(v) = \exp(\alpha + \beta \|v\|^2 + \langle v, t \rangle).$$

Но H — это плотность вероятности, что накладывает определённые ограничения. В частности, из

$$0 < H(v) < 1 \quad (v \in E)$$

следует, что $\beta \leq 0$. Кроме того,

$$\int_E \int_E \int_E H(v) dv_x dv_y dv_z = 1.$$

Случай $\beta = 0$ исключается, поскольку тогда $t = 0$, а H не может быть ненулевой константой. Значит, $\beta = -a$, где $a > 0$. Поскольку функция H чётна, то $t = 0$.

В итоге мы получили так называемое распределение Максвелла–Больцмана для скоростей в идеальном газе:

$$H(v) = A \exp(-a \|v\|^2). \quad (71)$$

Из термодинамики известно, что величина a связана с абсолютной температурой T и массой молекулы m через константу Больцмана k :

$$a = \frac{m}{2kT}.$$

Надо отметить, что Максвелл (Maxwell, 1860) вывел соотношение (71) иным способом, хотя также решал функциональное уравнение. Он предположил, что функция H чётна, и рассмотрел плотность вероятности того, что x -компонента скорости молекулы заключена между v_x и $v_x + dv_x$. Эту вероятность он обозначил

$$F(v_x^2)dv_x.$$

Затем Максвелл сделал сильное допущение, что законы распределения по трём осям независимы. Тогда

$$H(v) = F(v_x^2)F(v_y^2)F(v_z^2).$$

При этом он предположил полную изотропию газа:

$$H(v) = G(\|v\|^2).$$

Это привело Максвелла к функциональному уравнению

$$F(v_x^2)F(v_y^2)F(v_z^2) = G(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \quad (72)$$

которое он решил, считая функцию F дифференцируемой. Однако легко показать, что требуется лишь её измеримость по Лебегу (Banach–Ruziewicz, 1922; см. также упр. 24).

Действительно, пусть F и G строго положительны. Положим

$$f(v_x^2) = \ln F(v_x^2), \quad g(v_x^2) = \ln G(v_x^2).$$

Поскольку функция F измерима по Лебегу, то этим свойством обладают G (в силу (72)), f и g . Возьмём логарифм от обеих частей в (72):

$$f(v_x^2) + f(v_y^2) + f(v_z^2) = g(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (73)$$

Далее действуем, как в § 4.3 в случае уравнений Пексидера. Положив в (73) $v_x = v_y = v_z = 0$, получаем $3f(0) = g(0)$. Положим теперь $v_y = v_z = 0$; так как $f(0) = g(0)/3$, то

$$f(v_x^2) = g(v_x^2) - \frac{2g(0)}{3}. \quad (74)$$

Подставим (74) в (73):

$$g(v_x^2) + g(v_y^2) + g(v_z^2) - 2g(0) = g(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Положив $k(v_x^2) := g(v_x^2) - g(0)$, получаем

$$k(v_x^2) + k(v_y^2) + k(v_z^2) = k(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Взяв $v_z = 0$ и учитывая, что $k(0) = 0$, устанавливаем аддитивность функции k на $\bar{\mathbb{R}}_+$:

$$k(v_x^2) + k(v_y^2) = k(v_x^2 + v_y^2).$$

Согласно следствию 2.9 существует вещественная константа b , такая что

$$k(v_x^2) = bv_x^2.$$

Возвращаясь к функциям F и H , получаем (с подходящими константами A и a)

$$F(v_x^2) = A^{1/3} \exp(-av_x^2),$$

$$H(v) = F(v_x^2)F(v_y^2)F(v_z^2) = A \exp(-a(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)) = A \exp(-a\|v\|^2).$$

Мы вернулись к уравнению (71), т.е. к распределению скоростей Максвелла–Больцмана.

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1–3 см.: Aczél, 1965с.)

1. Найдите все непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Пусть G — абелева группа, H — 2-делимая абелева группа (т. е. любое уравнение вида $2y = a \in H$ имеет единственное решение $y \in H$). Покажите, что общее решение $f: G \rightarrow H$ уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad (x, y \in G)$$

имеет вид $f(x) = S(x, x)$, где $S: G^2 \rightarrow H$ — произвольная симметричная биаддитивная функция. Сравните результат с предложением 1.

3. Для функционального уравнения из предыдущих упражнений найдите общее вещественное решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

4. (Davison, 1980.) Пусть F — коммутативное кольцо, M — модуль над F . Функция $f: M \rightarrow F$ называется квадратичной формой, если $f(x) = B(x, x)$ при всех $x \in M$, где B — билинейная форма $B: M^2 \rightarrow F$. Пусть целостное кольцо ¹⁾ F имеет более чем два элемента, а M — проективный F -модуль (см., например: Lambek, 1976, p. 82). Покажите, что следующее функциональное уравнение характеризует квадратичные формы:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) - abf(x - y) \quad (x, y \in M; a, b \in F).$$

5. Пусть E — вещественное нормированное пространство размерности выше двух, M — его одномерное подпространство, причём любое двумерное подпространство, содержащее M , является предгильбертовым. Опровергните или докажите, что E также является предгильбертовым.

6. Пусть E — вещественное предгильбертово пространство, функция $f: E \rightarrow E$ аддитивна, $x \mapsto \langle f(x), x \rangle$ — непрерывная функция (разумеется, это условие слабее, чем непрерывность функции f). Опровергните или докажите, что f — линейный оператор.

7. Пусть $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нетривиальное дифференцирование (см. упр. 2.11). Покажите, что функция $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой

$$g(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + xd(y) - yd(x)$$

($a, b, c \in \mathbb{R}$), является квадратичным функционалом и удовлетворяет уравнению

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 g(x, y) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}).$$

С помощью этого примера докажите предложение 6.

8. Пусть F — тело кватернионов, $f: F \rightarrow F$ — аддитивная функция. Докажите, что f удовлетворяет уравнению

$$f(\lambda) = -|\lambda|^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \in F^* = F \setminus \{0\}),$$

если и только если

$$f(\lambda_1 + \mathbf{i}\lambda_2 + \mathbf{j}\lambda_3 + \mathbf{k}\lambda_4) = \lambda_2 f(\mathbf{i}) + \lambda_3 f(\mathbf{j}) + \lambda_4 f(\mathbf{k})$$

при $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

9. Пусть F — тело. Покажите, что его дифференцирования (см. упр. 2.11) — это в точности те аддитивные отображения $f: F \rightarrow F$, которые удовлетворяют условию

$$f(\lambda) = -\lambda^2 f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \in F^*).$$

10. (Кигера, 1965с.) Пусть $g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — квадратичный функционал на вещественном линейном пространстве E . Докажите, что $g(x) = f(x)^2$ для некоторой

¹⁾ В оригинале ошибочно напечатано «поле».

$$(iii) \quad a(0, y) = g(y).$$

16. (Gleason, 1966.) Покажите, что теорема 8 остаётся справедливой, если F — поле из более чем трёх элементов и его характеристика не равна 2.

17. Пусть E — вещественное линейное пространство. Покажите, что $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ является решением функционального уравнения (27) при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, если и только если g имеет вид

$$g(x) = \alpha + \beta(x) + \gamma(x),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, функция $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}$ линейна, а $\gamma : E \rightarrow \mathbb{R}$ — квадратичный функционал, равный $S(x, x)$ для некоторой симметричной билинейной функции $S : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(В связи с упр. 18, 19 см.: Fischer–Mokanski, 1981.)

18. Пусть E — линейное пространство над полем F характеристики, не равной 2. Опровергните или докажите, что если $g : E \rightarrow F$ удовлетворяет уравнению

$$g(x + \lambda y) + g(\lambda x - y) = g(\lambda x) + g(\lambda y) + g(x) + g(y)$$

при всех $x, y \in E$, $\lambda \in F$, то существует биаддитивная симметричная функция $S : E^2 \rightarrow F$, такая что

$$g(x) = S(x, x)$$

и

$$S(\lambda x, y) = S(x, \lambda y) \quad (\lambda \in F; x, y \in E).$$

19. Опровергните или докажите, что функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$g(x + \lambda y) + g(\lambda x - y) = g(\lambda x) + g(\lambda y) + g(x) + g(y)$$

при всех $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$, если и только если $g(x) = f(x^2)$, где f — аддитивная функция.

20. (Röhmel, 1977.) Пусть E — линейное пространство над полем F характеристики, не равной 2. Покажите, что если функция $g : E \rightarrow F$ удовлетворяет уравнению

$$g(x + \lambda y) + g(x - \lambda y) = (1 + \lambda^2)(g(x) + g(y))$$

при всех $x, y \in E$, $\lambda \in F$, то существует билинейная симметричная функция $S : E^2 \rightarrow F$, такая что $g(x) = S(x, x)$ при всех $x \in E$.

(В связи с упр. 21 и 22 см.: Volkman, 1974.)

21*. Докажите следующий факт. Пусть отображение $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно, $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ при всех ненулевых $x \in \mathbb{R}^2$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Если g удовлетворяет уравнению

$$g(g(x)y + g(y)x) = g(x)g(y)g(x + y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^2),$$

то g — квадратичный функционал на $\mathbb{R}^2$.

22. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное или комплексное нормированное пространство. Используя результат упр. 21, получите, что любое непрерывное отображение $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, такое что $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ ($x \in E^* = E \setminus \{0\}$), $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} g(x) = 0$,

$$g(g(x)y + g(y)x) = g(x)g(y)g(x + y) \quad (x, y \in E),$$

является квадратичным функционалом на E .

23. Используя упр. 22, докажите теорему 16.

24. (Banach–Ruziewicz, 1922.) Покажите, что все решения $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$F(x)F(y)F(z) = G(x^2 + y^2 + z^2) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}),$$

не равные тождественно нулю на $\mathbb{R}^*$, имеют вид

$$F(x) = A \exp(a(x^2)); \quad G(x) = A^3 \exp(a(x)),$$

где функция $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна, $A \in \mathbb{R}^*$.

25*. Пусть $(E, \langle, \rangle)$ — вещественное предгильбертово пространство. Покажите, что функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ортогонально аддитивна, если и только если существуют аддитивные функции $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $h: E \rightarrow \mathbb{R}$, такие что

$$f(x) = a(\|x\|^2) + h(x) \quad (x \in E).$$

26. С помощью упр. 25 покажите, что если функция H чётна, то достаточно предположить её интегрируемость по Лебегу, чтобы получить закон распределения Максвелла–Больцмана (71).

27. (Hyers, 1941.) Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Покажите, что существует аддитивная функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(В связи с упр. 28 и 29 см.: Baker, 1980b.)

28. Пусть дано отображение $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, где G — полугруппа. Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \varepsilon$ для всех $x, y \in G$. Покажите, что либо величина $\|f\|$ ограничена на G , либо

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in G).$$

29. Пусть дано отображение $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, где G — абелева группа. Предположим, что $|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)| \leq \varepsilon$ при всех $x, y \in G$. Покажите, что либо $f(x) \leq (1 + (1 + 2\varepsilon)^{1/2})/2$ при всех $x \in G$, либо f удовлетворяет уравнению Даламбера.

30. (Cholewa, 1983.) Пусть G — 2-делимая абелева группа, f — комплекснозначная функция на G . Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$|f(x+y)f(x-y) - f(x)^2 + f(y)^2| \leq \varepsilon$$

для всех $x, y \in G$. Тогда функция f либо ограничена, либо удовлетворяет функциональному уравнению синуса (см. (13.53))

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2 \quad (x, y \in G).$$

31. Пусть $\mathcal{A}$ — комплексная банахова алгебра с единицей, которую мы обозначим 1 . Для данного элемента $x \in \mathcal{A}$ определим его резольвенту $\rho(x)$ как множество всех комплексных чисел λ , для которых элемент $x - \lambda 1$ обратим в $\mathcal{A}$. Определим $f: \rho(x) \rightarrow \mathcal{A}$, положив $f(\lambda) = x - \lambda 1$. Покажите, что f — аналитическая функция на $\rho(x)$, причём $\rho(x)$ — открытое неограниченное собственное подмножество в $\mathbb{C}$. Докажите, что f удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(\lambda) - f(\mu) = (\lambda - \mu)f(\lambda)f(\mu).$$

32. В обозначениях предыдущего упражнения пусть $F(x)$ — семейство всех комплекснозначных функций, аналитических в некоторой окрестности спектра $\sigma(x)$, т. е. дополнения к резольвенте $\rho(x)$. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, причём его граница ∂U состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых и ориентирована так, что индекс равен 1 внутри U и 0 вне $U \cup \partial U$. Допустим,

что последнее множество содержится в области аналитичности некоторой функции $f \in F(x)$. Положим

$$f(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial U} f(\lambda)(x - \lambda)^{-1} d\lambda.$$

Покажите, что $f(x)$ не зависит от выбора множества U . Используя функциональное уравнение из упр. 31, докажите, что

$$fg(x) = f(x)g(x).$$

33. Пусть E — линейное пространство над телом F , а f — нетривиальное нормирование на F (см. § 10.6). Будем называть нормированное поле (F, f) полным, если полным является метрическое пространство (F, d) с расстоянием $d(\lambda, \mu) = f(\lambda - \mu)$. Обобщая определение нормы, будем считать нормой на E отображение $\|\cdot\|_f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, такое что

$$\|x\|_f = 0, \quad \text{если и только если } x = 0,$$

$$\|\lambda x\|_f = f(\lambda)\|x\|_f \quad (\lambda \in F, x \in E),$$

$$\|x + y\|_f \leq \|x\|_f + \|y\|_f \quad (x, y \in E).$$

Аналогично, назовём нормированное пространство $(E, \|\cdot\|_f)$ полным, если полным является метрическое пространство (E, D) с расстоянием $D(x, y) = \|x - y\|_f$.

Пусть $E \neq \{0\}$ конечномерно над F . Опровергните или докажите, что (F, f) полно, если и только если $(E, \|\cdot\|_f)$ полно.

34. Обобщите предложения 11, 14 и леммы 12, 13 на линейные пространства над телом с нетривиальным нормированием (см. упр. 33).

35. Пусть $E \neq \{0\}$ — ненулевое конечномерное линейное пространство над телом F с нетривиальным нормированием f . Две нормы $\|\cdot\|_f^{(1)}$ и $\|\cdot\|_f^{(2)}$ на E эквивалентны, если существуют положительные константы α, β , такие что

$$\alpha\|x\|_f^{(1)} \leq \|x\|_f^{(2)} \leq \beta\|x\|_f^{(1)} \quad (x \in E).$$

Опровергните или докажите, что все нормы на E эквивалентны.

36. Докажите единственность функции S в предложении 1.

37. (Sundaresan, 1972.) Докажите, что вещественное нормированное векторное пространство размерности не ниже трёх ортогонально богато (определение см. перед теоремой 18).

(В связи с упр. 38–42 см.: Rätz, 1985.)

38. Пусть X — вещественное векторное пространство размерности не ниже 2, а $\perp$ — бинарное отношение. Будем называть $(X, \perp)$ *пространством ортогональности*, если:

- (i) $x \perp 0$ и $0 \perp x$ для каждого $x \in X$;
- (ii) для ненулевых $x, y \in X$ из ортогональности следует линейная независимость;
- (iii) из $x \perp y$ следует $\alpha x \perp \beta y$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (iv) для каждого двумерного подпространства P в X и всех $x \in P$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ существует элемент $y \in P$, такой что $x \perp y$ и $x + y \perp \lambda x - y$.

Покажите, что отношение ортогональности, введённое перед теоремой 18 ($x \perp y$, если $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$), превращает вещественное нормированное векторное пространство X в пространство ортогональности.

39*. Распространите теорему 17 на пространства ортогональности (см. упр. 38), используя ту же технику доказательства.

40. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное предгильбертово пространство, а функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ортогонально аддитивна, т. е. из $x \perp y$ ($x, y \in E$) следует $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Пусть при этом $f(x) \geq 0$ для всех $x \in E$. Покажите, что $f(x) = c\|x\|^2$ для некоторого $c \in \mathbb{R}_+$ и всех $x \in E$.

41. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное предгильбертово пространство, функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ортогонально аддитивна, причём $|f(x)| \leq c\|x\|$ для некоторого $c \geq 0$ и всех $x \in E$. Покажите, что f — непрерывная линейная форма на E .

42. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное предгильбертово пространство. Докажите, что E полно, если и только если для каждой ортогонально аддитивной функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ существует элемент $x_0 \in E$, такой что $f(x_0) \leq f(x)$ при всех $x \in E$.

43. Пусть E — вещественное векторное пространство, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — нечётная функция, причём $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых линейно независимых x и y . Следует ли отсюда, что f аддитивна?

44. (Cholewa, 1984a.) Пусть G — абелева группа, E — банахово пространство, функция $f: G \rightarrow E$ такова, что для некоторого $\delta \geq 0$ и всех $x, y \in G$

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - 2f(y)\| \leq \delta.$$

Покажите, что существует функция $g: G \rightarrow E$, такая что

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)$$

(т. е. g — квадратичный функционал) и

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{\delta}{2} \quad (x \in G).$$

45. Пусть E — вещественное линейное пространство, функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет уравнениям

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x) \quad (x \in E, \lambda \in \mathbb{R})$$

и (для некоторого $\mu \in]0, 1[$, зависящего от x и y)

$$f(\mu x + (1-\mu)y) - \mu f(x) - (1-\mu)f(y) = \mu(1-\mu)f(x-y).$$

Опровергните или докажите, что f — квадратичный функционал (см. упр. 44).

46. (Heuvers, 1985.) Пусть E — вещественное линейное пространство, а функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x+\lambda y) + f(\lambda x - y) = f(\lambda x) + f(\lambda y) + f(x)f(y)$$

при всех $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. Покажите, что функция

$$g(x, y) = \frac{f(x+y) + f(x-y)}{y}$$

симметрична и биаддитивна, причём $g(\lambda x, y) = g(x, \lambda y)$ ($x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$) и

$$f(x) = g(x, x).$$

Глава 12

СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИМЕНЕНИЯ В КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В этой главе мы увидим, как одна и та же, по сути дела, система функциональных уравнений находит применения в различных областях математики.

В формуле (5.29) нам уже встречалась бесконечная система уравнений с бесконечным количеством неизвестных функций $(H_2, H_3, \dots)$. Другая такая система возникает в теории вероятностей, а именно при изучении марковских процессов.

Задача сводится к следующему (Jánosy–Rényi–Aczél, 1950; Redheffer, 1953; Aczél, 1966с, р. 111–116, 1977а; Schmidt, 1974 и др., см. Hadwiger, 1945). Требуется определить вероятность $p_k(t)$ того, что данное событие произойдёт k раз ($k = 0, 1, 2, \dots$) в течение отрезка времени длины $t (> 0)$, причём выполнены два условия. *Однородность*, отражённая в обозначении $p_k(t)$, означает, что вероятность зависит лишь от длины отрезка, но не от положения его концов. *Условие Маркова* состоит в независимости количеств событий, которые происходят на отрезках, имеющих не более одной общей точки. Поскольку величины p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) составляют полную систему вероятностей, то, разумеется,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1 \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad (1)$$

$$0 \leq p_k(t) \leq 1 \quad (k = 0, 1, \dots; t \in \mathbb{R}_+). \quad (2)$$

С другой стороны, из условия Маркова вытекает, что

$$p_k(t+u) = \sum_{j=0}^k p_j(t) p_{k-j}(u) \quad (k = 0, 1, \dots; t, u \in \mathbb{R}_+). \quad (3)$$

Действительно, событие происходит k раз в течение промежутка времени $t+u$, если оно происходит j раз в течение промежутка t и $k-j$ раз в течение промежутка u , где j может принимать значения $0, 1, 2, \dots, k$. Поскольку события на этих промежутках независимы (условие Маркова), то (3) выполняется.

Условия (1) и (2) потребуются позже; вначале мы займёмся системой функциональных уравнений (3). К подобным уравнениям приводят и некоторые задачи комбинаторики (а также геометрии и др., см.: Aczél–Vráncsai, 1972). А именно, в работе Rota, Mullin (1969) введены многочлены «биномиального типа» P_k (от одного переменного, степени $k = 0, 1, 2, \dots$): они удовлетворяют условию

$$P_k(t+u) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P_j(t) P_{k-j}(u) \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t, u \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

(Многочлены биномиального типа часто бывают важны в комбинаторике; см., например: Rota, Mullin 1969, Brown, 1973.) Ниже мы найдём все функции P_k

($k = 0, 1, 2, \dots$), удовлетворяющие системе (4), в том числе все её решения, ограниченные на множестве положительной меры. Если положить

$$p_k = \frac{P_k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

то p_k удовлетворяют системе (3) для всех вещественных (не только положительных) t, u .

В комбинаторике имеют существенное значение также *многочлены Белла* (Bell, 1934; Riordan, 1946, 1958). А именно, k -й многочлен Белла $F_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots$) имеет степень k и зависит от k переменных, причём выполнена система уравнений, сходная с (4):

$$F_k(t_1 + u_1, \dots, t_k + u_k) = F_k(t_1, \dots, t_k) + F_k(u_1, \dots, u_k) + \\ + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} F_j(t_1, \dots, t_j) F_{k-j}(u_1, \dots, u_{k-j}) \quad (6)$$

$$(t_i, u_i \in \mathbb{R}; \quad j, k = 1, 2, \dots).$$

Если формально ввести новые переменные t_0, u_0 , от которых F_k не зависят, и функцию $F_0 \equiv 1$, то система (6) станет ещё более похожей на систему (4):

$$F_k(t_0 + u_0, t_1 + u_1, \dots, t_k + u_k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} F_j(t_0, t_1, \dots, t_j) F_{k-j}(u_0, u_1, \dots, u_{k-j}) \quad (7)$$

$$(t_i, u_i \in \mathbb{R}; \quad j, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Все эти системы можно одновременно решить посредством следующей процедуры. Возьмём конечное число (скажем, $m + 1$) функций и уравнений, но пусть переменные будут векторами фиксированной размерности n (можно было бы взять и элементы более общих алгебраических структур). Рассмотрим следующую систему уравнений (см. (3), (4)) относительно неизвестных функций $q_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots, m$):

$$q_k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{j=0}^k q_j(\mathbf{x}) q_{k-j}(\mathbf{y}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (8)$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ принадлежат $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}_+^n$. Далее рассматриваем первый случай (как и в § 4.1 и 4.4, для $\mathbb{R}_+^n$ результаты аналогичны). Будем решать уравнения последовательно, двигаясь от $k = 0$ к $k = m$.

При $k = 0$ получаем

$$q_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q_0(\mathbf{x}) q_0(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n). \quad (9)$$

Согласно предложению 4.4 выполнено одно из двух равенств:

$$q_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad (10)$$

$$q_0(\mathbf{x}) = \exp(f_0(\mathbf{x})) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad (11)$$

где функция f_0 удовлетворяет условию (4.10):

$$f_0(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f_0(\mathbf{x}) + f_0(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n). \quad (12)$$

При $k = 1$ система (8) имеет вид

$$q_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = q_0(\mathbf{x})q_1(\mathbf{y}) + q_1(\mathbf{x})q_0(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n). \quad (13)$$

В случае (10) отсюда следует $q_1(\mathbf{z}) \equiv 0$ для всех $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Аналогично получаем по индукции из (8):

$$q_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{при всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

Конечно, это одно из решений системы (8), но мы пока оставим его в стороне. Если же в уравнение (13) подставить (11) и обе части умножить на

$$\exp(-f_0(\mathbf{x} + \mathbf{y})) = \exp(-f_0(\mathbf{x})) \exp(-f_0(\mathbf{y}))$$

(см. (12)), то мы получим, что функция

$$f_1(\mathbf{x}) = \exp(-f_0(\mathbf{x}))q_1(\mathbf{x}) \quad (15)$$

снова удовлетворяет условию (4.10):

$$f_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n). \quad (16)$$

Таким образом,

$$q_1(\mathbf{x}) = \exp(f_0(\mathbf{x}))f_1(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad (17)$$

где f_0, f_1 удовлетворяют уравнению Коши:

$$f_j(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f_j(\mathbf{x}) + f_j(\mathbf{y}) \quad (j = 0, 1; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n). \quad (18)$$

Теперь подставим (11) и (17) в (8) при $k = 2$:

$$q_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \exp(f_0(\mathbf{x}))q_2(\mathbf{y}) + \exp(f_0(\mathbf{x}) + f_0(\mathbf{y}))f_1(\mathbf{x})f_1(\mathbf{y}) + \exp(f_0(\mathbf{y}))q_2(\mathbf{x}).$$

Мы получим, что для функции

$$f_2(\mathbf{x}) = \exp(-f_0(\mathbf{x}))q_2(\mathbf{x}) - \frac{f_1(\mathbf{x})^2}{2}$$

выполняется уравнение (18) при $j = 2$. Таким образом,

$$q_2(\mathbf{x}) = \exp(f_0(\mathbf{x})) \left[f_2(\mathbf{x}) + \frac{f_1(\mathbf{x})^2}{2} \right],$$

где f_0, f_1, f_2 аддитивны.

По индукции (см. упр. 1)

$$q_k(\mathbf{x}) = \exp(f_0(\mathbf{x})) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{f_j(\mathbf{x})^{r_j}}{r_j!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (19)$$

где все $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) аддитивны (здесь $r_1, \dots, r_k$ — неотрицательные целые). При $k = 0$ получаем (11), так как $0! = 1$.

С другой стороны, функции вида (19) с аддитивными f_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) всегда удовлетворяют системе (8). Таким образом, доказано

Предложение 1. Общие решения $q_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots, m$) системы (8) имеют вид (14) и (19), где $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 0, 1, \dots, m$) — произвольные аддитивные функции. ■

Аналогичный результат верен для $\mathbb{R}_+^n$. Заметим, что мы решали систему (8) последовательно: сначала для $k = 0$, затем для $k = 0, 1$, потом для $k = 0, 1, 2$ и т. д. Такой метод вполне пригоден и в случае бесконечного числа уравнений и функций.

Теорема 2. Общие решения $q_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) бесконечной системы уравнений

$$q_k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{j=0}^k q_j(\mathbf{x}) q_{k-j}(\mathbf{y}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}_+^n$, имеют вид $q_k(\mathbf{x}) \equiv 0$ и

$$q_k(\mathbf{x}) = \exp(f_0(\mathbf{x})) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{f_j(\mathbf{x})^{r_j}}{r_j!} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (21)$$

где f_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) — произвольные решения системы (18) на $\mathbb{R}^n$ и на $\mathbb{R}_+^n$ соответственно. ■

Следствие 3. Общие решения $p_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ системы (3) имеют вид $p_k(t) \equiv 0$ и

$$p_k(t) = \exp(f_0(t)) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{f_j(t)^{r_j}}{r_j!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t \in \mathbb{R}_+), \quad (22)$$

где $f_j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольные решения основного уравнения Коши

$$f_j(t+u) = f_j(t) + f_j(u) \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad \blacksquare \quad (23)$$

Отметим, что до сих пор мы не накладывали никаких условий регулярности. Конечно, с помощью теоремы 2.8 можно легко найти решения рассмотренных систем уравнений в классе функций, ограниченных на множестве положительной меры в $\mathbb{R}_+^n$ или $\mathbb{R}^n$. С учётом (5) получаем также

Следствие 4. Общие решения $P_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ системы (4) имеют вид $P_k(t) \equiv 0$ ($k \geq 0$) и

$$P_k(t) = \exp(f_0(t)) k! \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{f_j(t)^{r_j}}{r_j!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t \in \mathbb{R}),$$

где функции f_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют уравнению (23). В частности, общие решения системы (4), ограниченные на множестве положительной меры, имеют вид $P_k(t) \equiv 0$ и

$$P_k(t) = \exp(c_0 t) k! \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{(c_j t)^{r_j}}{r_j!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t \in \mathbb{R}), \quad (24)$$

где c_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) — произвольные вещественные константы. ■

Отметим, что выражения, которые следуют за $\exp(c_0 t)$ в (24), — многочлены степени k от одного переменного, а именно наиболее общие многочлены биномиального типа. Таким образом, наиболее общие функции биномиального типа, ограниченные

на множестве положительной меры, отличаются от многочленов биномиального типа только общим экспоненциальным множителем.

Вернёмся к системе (1)–(3). Ввиду (2) все p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) ограничены на $\mathbb{R}$ и потому (см. (11), (15), (18)) $f_j(t) = c_j t$ ($t \in \mathbb{R}$), где c_j — вещественные константы. Так как $p_0(t) \leq 1$ при $t > 0$, то $c_0 \leq 0$. Можно показать, что из $p_k(t) \geq 0$ следует $c_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$). После некоторых вычислений (см. упр. 2 или, например: Jánosy–Rényi–Aczél, 1950) получаем из (1), что $c_0 = -\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ (и ряд в правой части сходится).

При этом равенство (1) исключает нулевое решение. Тем самым доказана

Теорема 5. *Общее решение системы (1)–(3) имеет вид*

$$p_k(t) = \exp\left(-t \sum_{j=0}^{\infty} c_j\right) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{(c_j t)^{r_j}}{r_j!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t \in \mathbb{R}_+), \quad (25)$$

где c_j ($j = 1, 2, \dots$) — произвольные неотрицательные константы, причём ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ сходится. Если добавлено «условие редкости»

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - p_0(t)}{p_1(t)} = 1 \quad (26)$$

(т. е. для коротких промежутков времени однократное наступление события в пределе столь же вероятно, как и его наступление вообще), то (25) сводится к уравнению

$$p_k(t) = e^{-ct} \frac{(ct)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; t \in \mathbb{R}_+; c \geq 0). \quad \blacksquare \quad (27)$$

(Нетрудно видеть, что (25) удовлетворяет системе (1)–(3), из (25) и (26) следует (27) (упр. 3), а (27) удовлетворяет условиям (1)–(3) и (26).)

Распределения вероятностей (25) называются *составными* (или *сложными*) *пуассоновскими распределениями*, тогда как (27) описывает обычное *пуассоновское распределение*. Первые «составляются» из вторых, см. упр. 4 или Jánosy–Rényi–Aczél 1950.

Системы (3), (4) и (20) можно решить также с помощью *производящих функций*, определяемых следующим образом:

$$f(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(t)}{k!} z^k \quad (28)$$

или

$$f(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x) z^k.$$

Такие функции удовлетворяют, соответственно, следующим экспоненциальным уравнениям Коши (см. гл. 3 и 4) с параметром z :

$$f(t+u, z) = f(t, z)f(u, z),$$

$$f(x+y, z) = f(x, z)f(y, z).$$

Эти уравнения решаются легко, но при этом нужно либо доказать сходимость в разложениях (28) (см. упр. 5 или Jánosy–Rényi–Aczél, 1950; Redheffer, 1953; Schmidt, 1974), либо построить формальное исчисление решений функциональных уравнений в виде (не обязательно сходящихся) рядов.

Если, однако, мы хотим решить систему (6) или (7), то метод производящих функций, как и метод доказательства теоремы 2, приводит к векторам бесконечной размерности. Но этого можно избежать, используя предложение 1. Положив $n = m$ или $n = m + 1$, можно ограничить q_k функциями k или $k + 1$ переменных, аналогично ограничив f_j в решениях системы (8). Поскольку это можно сделать для любого m , то установлена

Теорема 6. *Общее решение $F_k : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ системы (7) имеет вид*

$$F_k(t_0, t_1, \dots, t_k) = k! \exp(f_0(t_0)) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{[f_j(t_0, t_1, \dots, t_j)]^{r_j}}{j!} \\ (t_i \in \mathbb{R}; \quad i = 0, 1, \dots, k; \quad k = 0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

где f_j — произвольные решения уравнения Коши

$$f_j(t_0 + u_0, t_1 + u_1, \dots, t_j + u_j) = f_j(t_0, t_1, \dots, t_j) + f_j(u_0, u_1, \dots, u_j) \\ (t_i, u_i \in \mathbb{R}; \quad i = 0, 1, \dots, j; \quad j = 0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

В частности, общее решение системы (7), в котором каждая из функций F_k ограничена на множестве S_k положительной меры, имеет вид

$$F_k(t_0, t_1, \dots, t_k) = k! \exp(c_{00}t_0) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{1}{r_j!} \left(\sum_{i=0}^j c_{ji}t_i \right)^{r_j} \quad (31)$$

($t_i \in \mathbb{R}$; c_{ji} — вещественные константы; $i = 0, 1, \dots, j$; $j = 1, 2, \dots, k$; $k = 0, 1, 2, \dots$).

Для системы (6) наиболее общее решение (соответственно, общее решение с условием ограниченности на множестве положительной меры) получается из (29)–(30), если взять все f_j не зависящими от t_0 (соответственно из (31), если положить $c_{j0} = 0$ при $j = 0, 1, 2, \dots$). ■

Ясно, что в последнем случае функции представляют собой многочлены, и их частным случаем являются классические многочлены Белла; оказывается, все эти функции могут быть получены из многочленов Белла линейными преобразованиями (Aczél–Grăncseanu, 1972).

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1–4 см.: Jánosy–Rényi–Aczél, 1950.)

1. Докажите (19) по индукции.

2. Покажите, что (1) и (2) в сочетании с (22) и (23) дают

$$f_j(t) = c_j(t) \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

где $c_0 \leq 0$, $c_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots$), ряд $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ сходится, $c_0 = -\sum_{j=1}^{\infty} c_j$, т. е. мы получаем (25).

3. Покажите, что из (25) и (26) вытекает (27).

4. Пусть $\xi_j(t)$ — независимые случайные величины с пуассоновским распределением и средними значениями $c_j t$. Иными словами, вероятность того, что $\xi_j(t) = k$, равна $\exp(-c_j t)(c_j t)^k / k!$. Пусть

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j \xi_j(t),$$

т. е. ξ является суммой бесконечного числа обычных пуассоновских процессов, причём наступление события в j -м процессе означает совместное наступление j событий в исходном процессе. Покажите, что вероятность равенства $\xi(t) = k$ определяется формулой (25).

5. (Redheffer, 1953.) Пусть величины $\{p_k(t)\}$ удовлетворяют системе (1)–(3). Покажите, что ряд

$$f(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k$$

сходится при $|z| < 1$, причём

$$f(t+u, z) = f(t, z)f(u, z).$$

Решив это уравнение, дайте новое доказательство теоремы 5.

6. Докажите теорему 5 для $\overline{\mathbb{R}}_+$ вместо $\mathbb{R}_+$.

7. Выведите из условий (1)–(3) и (26) на $\overline{\mathbb{R}}_+$, что функции p_k ($k = 0, 1, \dots$) дифференцируемы, причём

$$p'_k(t) = c[p_{k-1}(t) - p_k(t)] \quad (k = 1, 2, \dots; t \geq 0)$$

для некоторой неотрицательной константы c . Используйте эту рекурсивную формулу для вывода закона распределения Пуассона (27) на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(В связи с упр. 8–10 см.: Aczél, 1966с, р. 224–226, 359–364.)

8. По аналогии со следствием 3 найдите общее решение системы функциональных уравнений

$$\pi_n(s, u) = \sum_{k=0}^n \pi_k(s, t) \pi_{n-k}(t, u) \quad (a \leq s \leq t \leq u; n = 0, 1, 2, \dots)$$

при условии

$$\pi_0(s, t) > 0 \quad (a \leq s \leq t).$$

9. Матрицу n -го порядка $\|p_{ij}(s, t)\|$ обозначим $\mathbf{F}(s, t)$ ($a \leq s \leq t$). Пусть $\det \mathbf{F}(a, t) \neq 0$ для всех $t \geq a$. При этом условии найдите общее решение уравнения

$$\mathbf{F}(s, t)\mathbf{F}(t, u) = \mathbf{F}(s, u) \quad (a \leq s \leq t \leq u).$$

10. Определите, какие решения предыдущего уравнения удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}(a, t) = 1 \quad (t \geq a; i = 1, 2, \dots, n),$$

и с помощью этого результата найдите другой способ решения упражнения 8.

11. (Aczél, 1977b.) Пусть G — делимая абелева группа (уравнение $nx = y$ однозначно разрешимо относительно $x \in G$ при любых $y \in G$, $n \in \mathbb{N}$). Найдите общие решения $S_k : \mathbb{N} \rightarrow G$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) уравнений

$$S_k(m+n) = S_k(m) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m^j S_{k-j}(n) \quad (m, n \in \mathbb{N}; \quad \binom{k}{0} = 1).$$

12. (Aczél, 1980a.) Пусть R — некоторое поле. Найдите общие решения $T_k : \mathbb{N} \rightarrow R$ системы функциональных уравнений

$$T_k(m+n) = T_k(m) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} T_{k-j}(n) m^j h^j \quad (k, m, n \in \mathbb{N}),$$

где h — фиксированный элемент из R .

13. (Aczél, 1977b, 1980a.) Положив $S_k(1) = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) в упр. 11 и $T_k(1) = ka^k$ ($k = 1, 2, \dots$) в упр. 12, найдите формулы для

$$\sum_{i=1}^n i^k \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n [a + (i-1)h]^k$$

соответственно.

Глава 13

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ИМ ПОДОВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теперь мы рассмотрим общие решения систем, а затем и отдельных уравнений (например, уравнения Даламбера, см. гл. 8), которым удовлетворяют тригонометрические и связанные с ними (гиперболические, показательные) функции. Мы будем решать эти уравнения без каких-либо условий регулярности путём сведения к комплексным экспоненциальным уравнениям Коши (5.8) и (5.9). Уравнение Даламбера будет рассмотрено также для банаховых алгебр.

Как мы увидим, некоторые из этих уравнений однозначно определяют соответствующие функции (скажем, тригонометрические) и выражают важнейшие свойства этих функций, известные из тригонометрии. Их долгая история начинается с работы d'Alembert 1769.

Сначала рассмотрим «теоремы сложения» для тригонометрических и гиперболических функций. Каждая из пар функций

$$f = \sin, \quad g = \cos, \quad (1)$$

$$f = \sinh, \quad g = \cosh \quad (2)$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y), \quad (3)$$

причём в первом случае выполнено также уравнение

$$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \quad (4)$$

а во втором

$$g(x+y) = g(x)g(y) + f(x)f(y) \quad (5)$$

(в вещественной или комплексной областях). Рассматривая вначале комплексный случай (вообще, случай *квадратично замкнутого* поля, в котором уравнение $k^2 = c$ разрешимо относительно k при любом c), мы для удобства заменим (4) и (5) более общим уравнением

$$g(x+y) = g(x)g(y) + k^2 f(x)f(y), \quad (6)$$

где k — комплексная константа.

Решим теперь систему, состоящую из функциональных уравнений (3) и (6) (см., например: Aczél 1958). При этом переменные x, y могут принимать значения в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, любой группе или полугруппе (см. § 2.1), в некоторых случаях даже в группоиде (см. § 4.3). Умножая уравнение (3) на k и прибавляя или вычитая его из (6), получим соответственно

$$h_j(x+y) = h_j(x)h_j(y) \quad (j=1,2), \quad (7)$$

где

$$h_1(x) = g(x) + kf(x) \quad \text{и} \quad h_2(x) = g(x) - kf(x). \quad (8)$$

Функции g и f можно выразить через h_1 и h_2 . Именно,

$$g(x) = \frac{h_1(x) + h_2(x)}{2}, \quad (9)$$

а для f возможны два случая. Если $k \neq 0$, то

$$f(x) = \frac{h_1(x) - h_2(x)}{2k}. \quad (10)$$

Если же $k = 0$, то

$$g(x) = h_1(x) = h_2(x). \quad (11)$$

Как мы видели в гл. 3 и 5 (доказательства теорем 3.5, 5.3), если G — группа, то функция h_1 либо равна нулю тождественно, либо вообще не обращается в нуль. В первом случае

$$g(x) = 0 \quad (12)$$

и ввиду (3)

$$f(x) = 0. \quad (13)$$

Во втором случае разделим (3) на (7) при $j = 1$ и с учётом (11) получим для функции

$$l(x) = \frac{f(x)}{h_1(x)} \quad (14)$$

уравнение

$$l(x + y) = l(x) + l(y). \quad (15)$$

При этом

$$f(x) = l(x)h_1(x). \quad (16)$$

Отметим, что (12) и (13) содержатся соответственно в (11) и (16) (при $h_1 = 0$). Доказана

Теорема 1. *Общие решения $f, g : G \rightarrow F$ системы (3), (6) на G^2 , где G — группа, F — квадратично замкнутое поле характеристики, не равной 2, имеют вид (9), (10) при $k \neq 0$ и (11), (16) при $k = 0$. Здесь h_1, h_2 и l — произвольные решения для (7) и (15). ■*

Легко видеть, что все пары функций указанного вида удовлетворяют системе (3), (6), если выполнены уравнения (7) и (15). В случае $k \neq 0$ теорема 1 верна для произвольного группоида G .

Если G — полугруппа, то уже из (3) следует уравнение, близкое к (6) (см.: Vincze, 1962b для абелевых полугрупп; Chung — Каппаран-Ng, 1985 в общем случае).

Предложение 2. *Пусть G — полугруппа, F — тело, функции $f, g : G \rightarrow F$ удовлетворяют уравнению (3) на G^2 , причём $f(x) \neq 0$. Тогда для некоторой константы $A \in F$ выполнено уравнение*

$$g(x + y) = g(x)g(y) + Af(x)f(y). \quad (17)$$

Доказательство. Мы располагаем лишь уравнением (3) и ассоциативностью, поэтому будем применять их многократно. Чтобы вполне использовать ассоциативность, полезно ввести третье переменное z :

$$\begin{aligned} f(x + y)g(z) + g(x + y)f(z) &= f((x + y) + z) = f(x + (y + z)) = \\ &= f(x)g(y + z) + g(x)f(y + z), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} f(x)g(y)g(z) + g(x)f(y)g(z) + g(x+y)f(z) = \\ = f(x)g(y+z) + g(x)f(y)g(z) + g(x)g(y)f(z), \end{aligned}$$

или

$$[g(x+y) - g(x)g(y)]f(z) = f(x)[g(y+z) - g(y)g(z)]. \quad (18)$$

По условию существует такое z_0 , что $f(z_0) \neq 0$. Для

$$h(y) := [g(y+z_0) - g(y)g(z_0)]f(z_0)^{-1}$$

получаем

$$g(x+y) - g(x)g(y) = f(x)h(y). \quad (19)$$

Подставим это в (18):

$$f(x)h(y)f(z) = f(x)f(y)h(z). \quad (20)$$

Если $A = h(z_0)f(z_0)^{-1} \in F$, то для любого y верно равенство

$$h(y) = f(y)A,$$

и (19) переходит в (17). (При этом уравнение (20) показывает, что A коммутирует с $f(z)$ при всех $z \in G$.) ■

Замечание 1. Если тело F не коммутативно, то правая часть в (3) должна быть записана обязательно в указанном порядке.

Замечание 2. В предложении 2 достаточно считать F кольцом с единицей (упр. 2).

В квадратично замкнутом поле уравнение (17) совпадает с (6) ($A = k^2$). Из теоремы 1 и предложения 2 вытекает

Теорема 3. Пусть G — группа, F — квадратично замкнутое поле характеристики, не равной 2. Тогда общие решения для (3) имеют вид

$$f \equiv 0, \quad g - \text{произвольная функция,}$$

а также (9), (10) и (11), (16), где $k (\neq 0)$ — произвольный элемент из F ; $h_1, h_2 : G \rightarrow F$ — произвольные решения для (7); $l : G \rightarrow F$ — произвольное решение для (15). ■

(Мы уже отметили, что теорема 1 верна не только для группы, а и для произвольного группоида, по крайней мере при $k \neq 0$. Но в предложении 2 предполагается, что G — полугруппа. В теореме 3 предполагается, что G — группа, поскольку это требовалось в теореме 1 при $k = 0$. Обобщения см. в упр. 10.)

Из теоремы 3, предложения 5.2 и теоремы 5.4 получаем (в первом решении $b = 1/k$)

Следствие 4. Нижеприведённые функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и только они являются решениями уравнения (3) для всех $x, y \in \mathbb{R}$ в классе функций, измеримых на собственном отрезке $I \subset \mathbb{R}$:

$$f(x) = b \frac{e^{cx} - e^{dx}}{2}, \quad g(x) = \frac{e^{cx} + e^{dx}}{2}; \quad f(x) = b \frac{e^{cx}}{2}, \quad g(x) = \frac{e^{cx}}{2};$$

$$f(x) = e^{cx}bx, \quad g(x) = e^{cx};$$

$$f \equiv 0, \quad g - \text{любая функция, измеримая на } I$$

$$(b, c, d - \text{произвольные комплексные константы}). \quad \blacksquare$$

Следствие 5. Общие решения системы уравнений (3) и (5), а также (3) и (4) в классе функций, измеримых на отрезке, имеют вид

$$f(x) = e^{ax} \sinh(bx), \quad g(x) = e^{ax} \cosh(bx); \quad f(x) = \frac{e^{cx}}{2}, \quad g(x) = \frac{e^{cx}}{2};$$

$$f(x) = -\frac{e^{cx}}{2}, \quad g(x) = \frac{e^{cx}}{2}; \quad f(x) = g(x) = 0$$

и соответственно

$$f(x) = e^{ax} \sin(bx), \quad g(x) = e^{ax} \cos(bx); \quad f(x) = \frac{e^{cx}}{2} i, \quad g(x) = \frac{e^{cx}}{2};$$

$$f(x) = -\frac{e^{cx}}{2} i, \quad g(x) = \frac{e^{cx}}{2}; \quad f(x) = g(x) = 0$$

(a, b, c — произвольные комплексные константы). ■

Здесь использованы формулы

$$\begin{aligned} \sinh p &= \frac{e^p - e^{-p}}{2}, \quad \cosh p = \frac{e^p + e^{-p}}{2}, \\ \sin p &= \frac{e^{pi} - e^{-pi}}{2i}, \quad \cos p = \frac{e^{pi} + e^{-pi}}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

«Теоремы вычитания» сильнее, чем «теоремы сложения», в том смысле, что меньшее количество констант (и функций) можно выбирать произвольно. С другой стороны, здесь приходится иметь дело с группой (чтобы выражение $x - y$ имело смысл), а не просто с полугруппой, как в предложении 2. Функции (1) и (2) удовлетворяют также уравнению

$$f(x - y) = f(x)g(y) - g(x)f(y), \quad (22)$$

причём в первом случае справедливо уравнение

$$g(x - y) = g(x)g(y) + f(x)f(y), \quad (23)$$

а во втором

$$g(x - y) = g(x)g(y) - f(x)f(y). \quad (24)$$

Функции определены на группе G и принимают значения в поле комплексных чисел или в любом *квадратично замкнутом 2-делимом поле* F . Как и выше, перейдём к более общему уравнению

$$g(x - y) = g(x)g(y) - k^2 f(x)f(y). \quad (25)$$

(Дальнейшее изложение частично следует работе Wilson, 1919.)

Решим систему (22), (25) относительно функций $f, g : G \rightarrow F$. Поменяв местами x и y , получаем, что функция f нечётна, а g чётна:

$$f(-z) = -f(z), \quad g(-z) = g(z). \quad (26)$$

Как следствие, (22) и (25) превращаются в (3) и (6). Из условий (26) вытекают некоторые следствия для решений (9), (10) и (11), (16) этой системы.

В случае (9)–(10) т. е. $k \neq 0$, получаем из (26)

$$h_1(-x) + h_2(-x) = h_1(x) + h_2(x),$$

$$h_1(-x) - h_2(-x) = -h_1(x) + h_2(x),$$

и после суммирования:

$$h_2(x) = h_1(-x).$$

Отсюда

$$g(x) = \frac{h_1(x) + h_1(-x)}{2}, \quad f(x) = \frac{h_1(x) - h_1(-x)}{2k}. \quad (27)$$

Обратно, если h_1 — произвольное решение для (7), то (27) является решением для системы (22), (25) при $k \neq 0$.

В случае $k = 0$ решение имеет вид (11), (16) или (индекс у h опущен):

$$g(x) = h(x), \quad f(x) = l(x)h(x), \quad (28)$$

где $h(-x) = h(x)$. Обратно, если

$$h(x+y) = h(x)h(y), \quad h(-x) = h(x) \quad (29)$$

и для функции $l(x)$ выполнено (15), то функции (28) удовлетворяют уравнениям (22) и (25) при $k = 0$. Доказана

Теорема 6. *Общие решения системы (22), (25) (или, эквивалентно, (3), (6) и (26)), где область определения уравнений — декартов квадрат группы, а функции принимают значения в квадратично замкнутом 2-делимом поле, имеют вид (27) при $k \neq 0$ и (28) при $k = 0$. Здесь h_1, l, h — произвольные решения для (7), (15) и (29) соответственно. ■*

Система (29) весьма специфична. Пусть группа G 2-делима в слабом смысле, т. е. уравнение $x + x = z$ разрешимо (не обязательно однозначно) при любом z . Тогда из (29) вытекает, что $h(z) = h(2x) = h(x)h(x) = h(x)h(-x) = h(0)$, т. е. функция h постоянна на G . Но $h(0) = h(0)^2$, поэтому $h(0) = 0$ или $h(0) = 1$ (в поле F).

Предложение 7. *Если в теореме 6 группа G 2-делима в слабом смысле и $k = 0$, то в формуле (28) следует положить $h \equiv 0$ или $h \equiv 1$, а в качестве l можно взять любое решение уравнения (15). ■*

Если уравнение $2x = z$ не всегда разрешимо в группе G , то могут существовать решения для (29), не равные тождественно 0 или 1. Например, в группе целых чисел по сложению функция $h(n) = (-1)^n$ удовлетворяет условиям (29), не являясь константой. Справедливо

Следствие 8. *Общие комплекснозначные решения системы (22), (26), где x, y, z принимают значения в группе, имеют вид либо $f \equiv 0$, g — произвольная чётная функция, либо (27), либо (28), где $k (\neq 0)$ — произвольная константа, h_1, l, h — произвольные решения для (7), (15) и (29) соответственно. Если группа 2-делима в слабом смысле, то в формуле (28) следует положить $h(x) \equiv 1$.*

Доказательство. Ввиду (26) замена y на $-y$ в уравнении (22) приводит к уравнению (3). Тогда из предложения 2 вытекает (6), и наше утверждение следует из теоремы 6. (Мы не упомянули случай $h(x) \equiv 0$ в (28) для случая 2-делимой группы, так как он содержится в классе решений $f \equiv 0$, функция g — произвольная чётная.) ■

Следствие 9. *Общие решения $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ системы (22), (25) в классе функций, измеримых на отрезке, имеют одну из следующих форм:*

$$f(x) = \frac{1}{k} \sinh cx, \quad g(x) = \cosh cx \quad \text{при } k \neq 0, \quad (30)$$

$$f(x) = cx, \quad g(x) = 1 \quad \text{при } k = 0, \quad (31)$$

$$f(x) = g(x) = 0 \quad \text{в обоих случаях} \quad (32)$$

(c — произвольная комплексная константа). ■

В качестве применения этого результата найдём вещественнозначные решения $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ системы (22), (23). В этом случае $k = i$ в (25), так что (31) исключается. Конечно, функции (32) вещественнозначны. В формулах (30) положим $c = \alpha + \beta i$. Так как в силу (21)

$$\cosh pi = \cos p, \quad \sinh pi = i \sin p \quad (33)$$

и для функций (2) выполнено (3), то

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sinh cx = -i \sinh(\alpha x + \beta xi) = -\sinh(\alpha x) \cosh(\beta xi) - \\ &\quad - i \cosh(\alpha x) \sinh(\beta xi) = \cosh(\alpha x) \sin(\beta x) - i \sinh(\alpha x) \cos(\beta x). \end{aligned}$$

Эта функция вещественна при любом x , если и только если (вещественный) коэффициент при i тождественно равен 0, т. е. если $\alpha = 0$. Тогда

$$f(x) = \sin \beta x, \quad g(x) = \cos \beta x. \quad (34)$$

Доказано

Следствие 10. Общие решения $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ системы (22), (23) в классе функций, измеримых на отрезке, имеют вид (32) и (34), где β — произвольная вещественная константа. ■

Найдём теперь решения уравнения (22) как такового — подобно тому как мы рассматривали (3) отдельно от (6). Пусть областью определения уравнения на этот раз служит декартов квадрат абелевой группы G , а функции f, g принимают значения в квадратично замкнутом 2-делимом поле F . Из (22) следует, что функция f нечётна (поменяем местами x и y в этом уравнении, пользуясь коммутативностью умножения в F):

$$f(-x) = -f(x). \quad (35)$$

Но мы не знаем, чётна ли функция g . Поэтому разделим g на чётную и нечётную части:

$$g = g_e + g_o, \quad (36)$$

где

$$g_e(x) := \frac{g(x) + g(-x)}{2}, \quad g_o(x) := \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

и как следствие

$$g_e(-x) = g_e(x), \quad g_o(-x) = -g_o(x). \quad (37)$$

Подставим (36) в (22):

$$f(x - y) = f(x)g_e(y) + f(x)g_o(y) - g_e(x)f(y) - g_o(x)f(y). \quad (38)$$

Заменяя x на $-x$, y на $-y$ (так как в абелевой группе $-x + y = -(x - y)$), с учётом (35) и (37) получаем

$$-f(x - y) = -f(x)g_e(y) + f(x)g_o(y) + g_e(x)f(y) - g_o(x)f(y). \quad (39)$$

Сначала рассмотрим нечётную функцию g_o . Сложим (38) с (39) и поделим на 2 (что по предположению возможно в поле F):

$$f(x)g_o(y) = g_o(x)f(y). \quad (40)$$

Имеется решение

$$f(x) \equiv 0, \quad g - \text{произвольная функция}. \quad (41)$$

Если же для некоторого z_0 верно, что $f(z_0) \neq 0$, то положим

$$c = f(z_0)^{-1}. \quad (42)$$

Подставим $y = z_0$ в (40) и положим $d = g_o(z_0)c$:

$$g_o(x) = df(x), \quad (43)$$

т. е. функция g_o определяется однозначно, если определена f .

Теперь займёмся чётной функцией f . Вычтем (39) из (38) и разделим на 2:

$$f(x - y) = f(x)g_e(y) - g_e(x)f(y). \quad (44)$$

Из (35), (37) и (44) следует, что f и g_e удовлетворяют уравнениям (3) и (26). О следствиях из (26) для решений уравнения (3) уже шла речь перед формулировкой теоремы 6 (см. также предложение 2). Получаем следующие решения:

$$f(x) = a \frac{h_1(x) - h_1(-x)}{2}, \quad g_e(x) = \frac{h_1(x) + h_1(-x)}{2} \quad (45)$$

(здесь $a = 1/k \neq 0$, но (45) является решением и при $a = 0$);

$$f(x) = l(x)h(x), \quad g_e(x) = h(x), \quad (46)$$

где h_1, l, h удовлетворяют соответственно уравнениям (7), (15) и (29).

Положив $b := da$, с учётом (36) и (43) получаем из (45):

$$f(x) = a \frac{h_1(x) - h_1(-x)}{2}, \quad g(x) = \frac{h_1(x) + h_1(-x)}{2} + b \frac{h_1(x) - h_1(-x)}{2}. \quad (47)$$

Из (46) получаем

$$f(x) = l(x)h(x), \quad g(x) = (1 + dl(x))h(x). \quad (48)$$

Если h_1, l, h удовлетворяют соответственно уравнениям (7), (15) и (29), то для (47) и (48) выполнено (22). Доказана

Теорема 11. Пусть F — квадратично замкнутое 2-делимое поле, G — абелева группа. Тогда общие решения $f: G \rightarrow F$ функционального уравнения (22) имеют вид (41), (47) и (48), где a, b, d — произвольные элементы из F , а h_1, l, h — произвольные решения для (7), (15) и (29) соответственно. ■

Если группа G является 2-делимой, то в силу предложения 7 в формулах (48) $h(x) \equiv 1$, т.е.

$$f(x) = l(x), \quad g(x) = 1 + dl(x). \quad (49)$$

Следствие 12. Общие комплекснозначные решения функционального уравнения (22) на декартовом квадрате абелевой 2-делимой группы G имеют вид (41), (47) и (49), где a, b, d — комплексные константы. ■

Достаточно слабое условие регулярности, наложенное на функцию f в уравнении (22), приводит к следующему результату.

Следствие 13. В классе комплекснозначных функций вещественного переменного, измеримых на собственном отрезке I , общие решения уравнения (22) на $\mathbb{R}^2$ имеют вид

$$f(x) = a \sinh cx, \quad g(x) = \cosh cx + b \sinh cx, \quad (50)$$

$$f(x) = ax, \quad g(x) = 1 + bx, \quad (51)$$

$$f(x) = 0, \quad g - \text{произвольная функция, измеримая на } I \quad (52)$$

(a, b, c — произвольные комплексные константы). ■

Анализ уравнений (4), (5), (6), (23), (24) и (25) по отдельности можно найти, например, в работах Wilson, 1919; Vietoris, 1944; Vincze, 1962b; Aczél, 1966c, p. 176–180; Chung–Kannappan–Ng, 1985.

Уравнение

$$f(x + y)f(x - y) = f(x)^2 - f(y)^2 \quad (53)$$

замечательно тем, что характеризует — с точностью до мультипликативной константы — круговой и гиперболический синус (а также тождественное отображение). (Си-

нус удовлетворяет этому уравнению вовсе *не потому*, что — как иногда приходится слышать от студентов —

$$\sin(x \pm y) = \sin x \pm \sin y \quad \text{и} \quad (\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = \sin^2 x - \sin^2 y,$$

а потому, что

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

и

$$(\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) = \sin^2 x - \sin^2 y.$$

Вначале исследуем функциональное уравнение (53) для $f: G \rightarrow F$, где G — 2-делимая абелева группа, а F — 2-делимое *кольцо с единицей*. Временно исключим из рассмотрения тривиальное решение $f(x) \equiv 0$. Более точно, *предположим, что для некоторого $z_0 \in G$ существует*

$$f(z_0)^{-1} = c \in F. \quad (54)$$

Можно записать (53) в виде

$$f(t)f(u) = f\left(\frac{t+u}{2}\right)^2 - f\left(\frac{t-u}{2}\right)^2, \quad (55)$$

так как благодаря 2-делимости группы G (области определения функции f) уравнения

$$x + y = t, \quad x - y = u$$

имеют решения $x = (t+u)/2$, $y = (t-u)/2$ (их единственность не требуется). Заменив в (55) u на $-u$ и сравнив с (55), видим, что

$$f(t)f(-u) = f\left(\frac{t-u}{2}\right)^2 - f\left(\frac{t+u}{2}\right)^2 = -f(t)f(u). \quad (56)$$

Взяв $t = z_0$, получаем с учётом (54), что функция f *нечётна*:

$$f(-u) = -f(u). \quad (57)$$

Теперь попробуем свести (53) к (22). Для этого потребуется функция g , которая вместе с f даст решение для (22). Её можно определить следующим образом:

$$g(x) := \frac{f(x+z_0) - f(x-z_0)}{2} f(z_0)^{-1}. \quad (58)$$

(Определение корректно ввиду (54). Взяв $f = \sin$, мы видим, почему функция g выбрана таким образом. И эта функция чётна, так как в силу (58) и (57)

$$g(-x) = \frac{-f(x-z_0) + f(x+z_0)}{2} f(z_0)^{-1} = g(x).$$

Положив в (55) $u = z_0$, $t = x + y$ или $t = x - y$, получаем

$$f(x+y)f(z_0) = f\left(\frac{x+y+z_0}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x+y-z_0}{2}\right)^2,$$

$$f(x-y)f(z_0) = f\left(\frac{x-y+z_0}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-y-z_0}{2}\right)^2.$$

Сложив эти равенства и снова используя (55) при $t = x$, $u = y + z_0$ и $t = x$, $u = y - z_0$, получаем в силу (58)

$$[f(x+y) + f(x-y)]f(z_0) = f(x)f(y+z_0) - f(x)f(y-z_0) = 2f(x)g(y)f(z_0).$$

Снова поменяем местами x и y и применим (57):

$$[f(x+y) - f(x-y)]f(z_0) = 2f(y)g(x)f(z_0).$$

Вычтя это равенство из предыдущего и разделив на $2f(z_0)$, получим, как и требовалось,

$$f(x-y) = f(x)g(y) - f(y)g(x).$$

Это уравнение совпадает с (22) для коммутативного F . По-видимому, некоммутативный случай подробно не исследован. Но так или иначе, уравнение (22) решено в теореме 11 как раз для квадратично замкнутого поля. С учётом (57) доказана

Теорема 14. Пусть F — квадратично замкнутое 2-делимое поле, G — 2-делимая абелева группа. Тогда общие решения $f : G \rightarrow F$ уравнения (53) имеют вид

$$f(x) = a \frac{h(x) - h(-x)}{2} \quad \text{и} \quad f(x) = l(x),$$

где h, l — произвольные решения для (7) и (15), a — произвольный элемент из F . ■

Следствие 15. Общие решения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ и $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (53) в классе функций, измеримых на собственном отрезке, имеют вид

$$f(x) = a \sinh cx, \quad f(x) = cx$$

и

$$f(x) = a \sinh cx, \quad f(x) = a \sin cx, \quad f(x) = cx,$$

где a, c — комплексные и вещественные константы соответственно. ■

Теперь вернёмся, как мы и обещали в гл. 8, к уравнению Даламбера (8.1). Можно найти его общее решение на декартовом квадрате абелевой группы G (например, $\mathbb{C}^2$ или $\mathbb{R}^2$), не предполагая 2-делимости и не сводя к (22) и (25). Будем рассматривать функцию $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ (здесь можно заменить $\mathbb{C}$ другими квадратично замкнутыми полями, см. упр. 4, и более общими алгебраическими структурами, см. упр. 5). Таким образом, дано уравнение

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y) \quad (x, y \in G). \quad (59)$$

Наше доказательство следует работе Baker (1980b).

Как и в гл. 8, временно забудем про тривиальное решение

$$g(x) = 0 \quad (x \in G) \quad (60)$$

и заметим, что для остальных решений имеем

$$g(0) = 1, \quad g(-y) = g(y) \quad (y \in G). \quad (61)$$

(Подставим в (59) $y = 0$, а затем $x = 0$). Подобно тому как в (58) мы ввели вспомогательную функцию g , чтобы решить (53), здесь мы введём функцию

$$f(x) := g(x+p) - g(x-p) \quad (62)$$

(отметим, что если $g = \cos$, то $f = a \sin$). При этом выберем p так, чтобы для некоторой функции вида

$$h(x) = g(x) + kf(x) \quad (63)$$

выполнялось уравнение

$$h(x+y) = h(x)h(y) \quad (x, y \in G) \quad (64)$$

(см. (7)). Подходящие значения p и k мы определим позже, и тогда будут ясны основания для их выбора.

На основании (63), (62), (59) и (61)

$$\begin{aligned}
 h(x)h(y) &= g(x)g(y) + k[f(x)g(y) + g(x)f(y)] + k^2 f(x)f(y) = \\
 &= g(x)g(y) + k[g(x+p)g(y) - g(x-p)g(y) + g(x)g(y+p) - g(x)g(y-p)] + \\
 &+ k^2[g(x+p)g(y+p) - g(x-p)g(y+p) - g(x+p)g(y-p) + g(x-p)g(y-p)] = \\
 &= \frac{1}{2}[g(x+y) + g(x-y)] + (k/2)[g(x+y+p) + g(x-y+p) - g(x+y-p) - \\
 &- g(x-y-p) + g(x+y+p) + g(x-y-p) - g(x+y-p) - g(x-y+p)] + \\
 &+ \frac{k^2}{2}[g(x+y+2p) + g(x-y) - g(x+y) - g(x-y-2p) - g(x+y) - \\
 &- g(x-y+2p) + g(x+y-2p) + g(x-y)] = \left[\frac{1}{2} + k^2(g(2p) - 1)\right] g(x+y) + \\
 &+ \left[\frac{1}{2} - k^2(g(2p) - 1)\right] g(x-y) + kf(x+y).
 \end{aligned}$$

Уравнение (64) выполняется, если полученное выражение равно $g(x+y) + kf(x+y)$, что равносильно

$$k^2(g(2p) - 1) = \frac{1}{2}$$

или

$$k = \pm(2g(2p) - 2)^{-1/2}.$$

Такое k существует, если для некоторого p

$$g(2p) - 1 \neq 0. \quad (65)$$

Соответствующие значения мы и должны выбрать в формулах (62) и (63). Ввиду (61) и (62) функция f нечётна:

$$f(-x) = -f(x), \quad (66)$$

и в силу (63)

$$h(-x) = g(x) - kf(x),$$

откуда

$$g(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad (x \in G). \quad (67)$$

Лишь в случае

$$g(2x) = 1 \quad \text{при всех } x \in G \quad (68)$$

не существует значения p , удовлетворяющего условию (65). Отсюда не следует, что $g(x) \equiv 1$, поскольку группа G не предполагается 2-делимой. С учётом (59) и (61) условие (68) равносильно ¹⁾

$$2g(x)^2 = g(2x) + 1 = 2, \quad \text{т.е. } g(x)^2 = 1.$$

Иначе говоря,

$$g(x) = \pm 1 \quad \text{для всех } x \in G, \quad \text{т.е. } g(G) = \{1, -1\}. \quad (69)$$

¹⁾ Положим в (59) $x = y$.

Но и в этом случае g имеет вид (67), причём выполнено (64): в самом деле, если $g(x)g(y) = 1$, то согласно (59) $g(x+y) + g(x-y) = 2$, ввиду (69) $g(x+y) = g(x-y) = 1$ и потому

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad (x, y \in G). \quad (70)$$

Если же $g(x)g(y) = -1$, то, снова ввиду (59) и (69), $g(x+y) + g(x-y) = -2$, $g(x+y) = g(x-y) = -1$, и (70) опять выполнено. В силу (61) $g(x) = [g(x) + g(-x)]/2$, поэтому для функции $h(x) := g(x)$ выполнено (67), при этом (64) совпадает с (70). Тривиальное решение также имеет искомым вид ($h = 0$). Доказана

Теорема 16. *Общее комплекснозначное решение уравнения Даламбера (59) на декартовом квадрате абелевой группы имеет вид*

$$g(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2},$$

где h — произвольное решение уравнения (64). ■

Следствие 17. *Общие решения $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ уравнения (59) в классе функций, измеримых на собственном отрезке, имеют вид*

$$g(x) = 0$$

и

$$g(x) = \cosh cx, \quad (71)$$

где c — произвольная комплексная константа. ■

Действительно, все такие функции удовлетворяют уравнению (59).

Найдём также (измеримые) вещественные решения. Положив в (71) $c = \alpha + \beta i$ и вспомнив, что функции (2) удовлетворяют уравнению (5), получаем с учётом (33)

$$\begin{aligned} g(x) &= \cosh(\alpha x + \beta x i) = \cosh(\alpha x) \cosh(\beta x i) + \sinh(\alpha x) \sinh(\beta x i) = \\ &= \cosh(\alpha x) \cos(\beta x) - i \sinh(\alpha x) \sin(\beta x). \end{aligned}$$

Это выражение вещественно при любом x , если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Получено

Следствие 18. *Общие решения $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (59), измеримые на собственном отрезке, имеют вид*

$$g(x) = 0, \quad g(x) = \cosh \alpha x \quad \text{и} \quad g(x) = \cos \beta x$$

(α, β — произвольные вещественные константы). ■

Это следствие (см. теорему 8.1) показывает, что уравнение Даламбера (59) характеризует функции $\cos$ и $\cosh$. См. в упр. 4 обобщение теоремы 16.

В последние десятилетия возрос интерес к уравнению Даламбера для случая, когда f принимает значения в пространстве линейных операторов. В заключение главы приведём некоторые результаты, полученные в этом направлении. (Об интегрировании отображений из $\mathbb{R}$ в банахово пространство см.: Dunford and Schwartz, 1963, р. 145–155.) Мы хотим найти (непрерывные) отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющие условиям

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad (72)$$

$$f(0) = 1, \quad (73)$$

где $\mathcal{A}$ — алгебра (вещественная или комплексная) с единицей.

Для случая $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ общее решение дано в теореме 16. Если при этом функция f непрерывна, то согласно следствию 17

$$f(x) = \cosh bx \quad (x \in \mathbb{R})$$

для некоторого $b \in \mathbb{C}$. Положив $b = a^{1/2}$ (что возможно в $\mathbb{C}$), получаем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (74)$$

Это представление можно получить и в тех случаях, когда теорема 16 и следствие 17 неприменимы, по крайней мере если $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, а функция f непрерывна.

Теорема 19. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра с единицей. Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ удовлетворяет уравнениям (72) и (73), если и только если для некоторого $a \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (75)$$

Доказательство. Ряд (75) в банаховой алгебре всегда сходится. Легко проверить, что его сумма непрерывна и удовлетворяет уравнениям (72) и (73).

Обратно, пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}$ — непрерывное решение для (72) при условии (73). Справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx = 1.$$

Существует такое $x_0 \in \mathbb{R}^*$, что для $y_0 = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} f(x) dx$ мы имеем

$$\|1 - y_0\| < 1.$$

Как следствие, $z_0 := \sum_{n=0}^{\infty} (1 - y_0)^n \in \mathcal{A}$ и $z_0 y_0 = y_0 z_0 = 1$. Проинтегрируем (72) по y от 0 до x_0 :

$$\int_0^{x_0} f(x+y) dy + \int_0^{x_0} f(x-y) dy = 2f(x) \int_0^{x_0} f(y) dy.$$

Сделаем замену переменных:

$$\int_x^{x+x_0} f(t) dt - \int_x^{x-x_0} f(t) dt = 2f(x) \int_0^{x_0} f(t) dt.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\int_x^{x+x_0} f(t) dt - \int_x^{x-x_0} f(t) dt \right] \frac{z_0}{x_0}. \quad (76)$$

В силу непрерывности функции f правая часть в (76) дифференцируема. Поэтому левая часть, т. е. f , также дифференцируема. Продифференцировав (76), получаем

$$f'(x) = \frac{1}{2} [f(x+x_0) - f(x-x_0)] \frac{z_0}{x_0}. \quad (77)$$

Правая часть в (77) дифференцируема, так что f дважды дифференцируема. Дважды продифференцировав (72) по y и подставив $y = 0$, получаем

$$f''(x) = f(x)a,$$

где $a = f''(0)$. Однако из (73) и (72) при $x = 0$ вытекает, что f чётна, и в силу (72)

$$f(x)f(y) = f(y)f(x).$$

Дважды продифференцировав это равенство по y и положив $y = 0$, получаем: $f(x)a = af(x)$. Ввиду (77) имеем $f'(0) = 0$, поэтому

$$f'(s) = a \left(\int_0^s f(t) dt \right).$$

Так как $f(0) = 1$, то

$$f(x) = 1 + a \int_0^x \left[\int_0^s f(t) dt \right] ds.$$

Интегрирование по частям даёт

$$f(x) = 1 + a \int_0^x (x-s)f(s) ds. \quad (78)$$

Множественно применяя (78), получаем

$$f(x) = 1 + a \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{a^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{a^{n+1}}{(2n+1)!} \int_0^x (x-s)^{2n+1} f(s) ds.$$

При $n \rightarrow \infty$ последний член стремится к нулю, т. е. f имеет вид (75), что и требовалось. Теорема 19 доказана. ■

Замечание 1. Если существует такое $b \in \mathcal{A}$, что $b^2 = a$, то (75) можно записать в виде

$$f(x) = \cosh bx,$$

где $\cosh t = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}/(2n)!$ для любого $t \in \mathcal{A}$.

Замечание 2. Случай, когда $\mathbb{R}$ заменено на $\mathbb{R}_+$, см. в упр. 16.

Пусть X — банахово пространство, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$ — алгебра ограниченных линейных операторов из X в X . Аналогично теореме 2.8 доказывается следующий факт (см.: Baker, 1971b).

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ — решение уравнения (72) при условии (73). Предположим, что для любого $x \in X$ функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ вида

$$g(t) = \|f(t)(x)\|$$

измерима. Тогда функция f непрерывна в нуле (т. е. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ в топологии нормы на $\mathcal{L}(X)$). ■

Теорема 19 даёт общий вид функции f при условии непрерывности. При этом можно доказать, что

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} (f(x) - 1)$$

(предел берётся в топологии нормы в $\mathcal{L}(X)$).

См. работу: Lutz, 1981 по поводу связей между уравнением Даламбера в такой общности и дифференциальным уравнением

$$y''(t) + Ax(t) = 0.$$

Последующие результаты и упражнения

1. Попробуйте обобщить теорему 1 на случай, когда G — группоид, F — кольцо, для k существует обратный элемент в F . Что можно сказать о случае $k = 0$?

2. Пусть G — полугруппа, R — кольцо с единицей, $f, g : G \rightarrow R$ удовлетворяют уравнению (3) на G^2 . Предположим, что для некоторого $z_0 \in G$ существует $f(z_0)^{-1}$ в R . Можно ли распространить предложение 2 на эту ситуацию?

3. Пусть G — абелева группа, F — поле характеристики, не равной 2, I — множество всех квадратных корней из единицы в F . Опровергните или докажите, что $g : G \rightarrow I$ является решением уравнения Даламбера, если и только если g удовлетворяет экспоненциальному уравнению Коши.

4*. Покажите, что теорема 16 остаётся верной, если значения функции g принадлежат квадратично замкнутому полю характеристики, не равной 2.

5*. Рассмотрим отображение $g : G \rightarrow B$, где G — абелева группа, B — вещественная (или комплексная) банахова алгебра с единицей e ($\|e\| = 1$). Пусть для некоторых $z_0, t_0 \in G$ выполнены условия $\|g(z_0) - e\| < 1$, $\|g(2t_0)\| < 1$. Найдите общее решение функционального уравнения Даламбера на G .

6*. Докажите теорему 16 для случая, когда $\mathbb{C}$ заменено на произвольное квадратично замкнутое поле характеристики, не равной 2, а G — произвольная нильпотентная группа, все элементы которой имеют нечётный порядок.

7. (Aczél, 1966с, р. 138.) Пусть G — группа, F — 2-делимое поле, отображение $f : G \rightarrow F$ удовлетворяет уравнению (53). Покажите, что функция (58)

$$g(x) := \left(\frac{f(x + z_0) - f(x - z_0)}{2} \right) f(z_0)^{-1}$$

при $f(z_0) \neq 0$ не зависит от выбора z_0 .

8. Пусть G — 2-делимая абелева группа, K — квадратично замкнутое 2-делимое поле. Найдите все решения $f : G \rightarrow K$ функционального уравнения

$$f(x)^2 + f(y)^2 = f(x + y)f(x - y) + 1 \quad (x, y \in G).$$

9. Пусть $A \in \mathbb{R}$. Используя общее решение уравнения Даламбера, найдите общее решение функционального уравнения

$$f(x + y + A) - f(x - y + A) = 2f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

10. Найдите общие решения $f, g : G \rightarrow R$ уравнения (3), где G — полугруппа, R — некоторое 2-делимое кольцо с единицей, константа k обратима в R и коммутирует со всеми значениями функций f и g , причём для некоторого $z_0 \in G$ элемент $f(z_0)$ обратим в R и $(g(2z_0) - g(z_0)^2)(f(z_0)^{-1})^2 = k^2$.

11. Выведите теорему 8.2 из теоремы 16.

12. Пусть для $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2 - f(y)^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Не накладывая условий регулярности на f , покажите, что оно является равенством. Обобщите результат на $f : G \rightarrow F$, где G — абелева группа, F — выбранное подходящим образом (как именно?) упорядоченное тело.

13. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2 - f(y)^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Существуют ли решения, для которых выполняется строгое неравенство при всех $x, y \in \mathbb{R}$?

14*. Рассмотрим отображение $f : G \rightarrow F$, где G — группа, F — тело характеристики, не равной 2. Найдите общее решение функционального уравнения

$$2f(xy) = f(x)f(y) + f(y)f(x).$$

Сравните с результатом упр. 6.10.

15. (Каппаррап, 1968а.) Пусть G — группа. Покажите, что если для $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ выполнены функциональные уравнения

$$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y),$$

$$f(xyz) = f(xzy),$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2} [g(x) + g(x^{-1})],$$

где g удовлетворяет уравнению

$$g(x+y) = g(x)g(y).$$

16*. (Baker, 1971b.) Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра и для $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{A}$ выполнено уравнение

$$C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s) \quad (t > s > 0).$$

Предположим, что существует $\lim_{t \rightarrow 0} C(t)$, обозначим его j . Докажите, что $j^2 = j$ и для некоторых $a, b \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$ja = aj = a, \quad bj = b, \quad jb = 0,$$

причём для всех $t > 0$

$$C(t) = \left(j + \frac{at^2}{2!} + \frac{a^2t^4}{4!} + \dots \right) + b \left(tj + \frac{t^3a}{3!} + \frac{t^5a^2}{5!} + \dots \right).$$

17. (Lutz, 1981.) Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$, где X — банахово пространство, $\mathcal{L}(X)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов из X в X . Пусть $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $f(0) = I$, а отображение $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ вида $g(t) = f(t)x$ непрерывно. Опровергните или докажите, что

$$\|f(x)\| \leq Me^{\omega|x|}$$

при некоторых $\omega > 0$, $M \geq 1$.

Глава 14

ОБОВЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДАЛАМБЕРА И КОШИ ПО ПЕКСИДЕРУ

Цель этой главы — систематически изучить обобщения уравнений Коши, Даламбера и других тригонометрических уравнений, тем самым усиливая результаты глав 2, 3, 8, 13 и при этом последовательно ослабляя условия регулярности на решения уравнений. Мы уже видели, как само функциональное уравнение может обеспечивать регулярность своих решений (см. (13.76), а также (5.19)). Это и будет нашим основным инструментом.

Уравнения (2.1), (3.14), (4.25), (4.35), (8.1), (12.3), (12.4), (13.3), (13.4), (13.5), (13.6), (13.22), (13.23), (13.24), (13.25), а также (см. ниже) (15.2), (15.6), (15.9), являются частными случаями весьма общего уравнения

$$f(x+y) + g(x-y) = \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y). \quad (1)$$

Как показано в работе Speiser, Whitehouse and Berg, 1978, это уравнение имеет существенные применения при изучении передачи сигналов. Отметим, что его левая часть является общим решением волнового уравнения $u_{xx} = u_{yy}$, тогда как правая равна скалярному произведению векторов $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ и $\mathbf{g}(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$.

Вначале будем рассматривать функции $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k : E' \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$), $f : E + E' \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E - E' \rightarrow \mathbb{R}$, где E, E' — непустые множества, которые будут определены позже. Если функции $f_1, \dots, f_n$ линейно зависимы, то число слагаемых в правой части можно уменьшить, заменив одну из функций линейной комбинацией остальных. Поэтому без потери общности можно считать n функций $f_1, \dots, f_n$ линейно независимыми в своей области определения E : если для $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ выполнено условие

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(x) = 0 \quad (x \in E),$$

то $c_1 = \dots = c_n = 0$. То же будем предполагать и относительно $g_1, \dots, g_n$.

Ключевую роль в дальнейшем играет следующая лемма (Curtiss, 1910, Vincze, 1962a).

Лемма 1. *Функции $f_1, \dots, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ линейно зависимы, если и только если*

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_{n-1}) & f_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_{n-1}) & f_{n-1}(x_n) \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

для всех $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Доказательство. Функции $f_1, \dots, f_n$ линейно зависимы на E , если выполнено тождество

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad (x \in E), \quad (3)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — вещественные константы, не равные нулю одновременно. Положив $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) в (3), получаем систему n линейных уравнений относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$. Поскольку она имеет нетривиальное решение, то её определитель равен 0, т.е. выполнено (2).

Обратно, докажем индукцией по n , что из (2) вытекает линейная зависимость функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ на E . Случай $n = 1$ тривиален. Пусть утверждение верно при $n - 1$, а (2) выполнено при n . Возможны два случая. Либо

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_{n-1}) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \dots & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{для всех } x_1, \dots, x_{n-1} \in E. \quad (4)$$

Тогда по индуктивному предположению $f_1, \dots, f_{n-1}$ линейно зависимы, и тем более это верно для $f_1, \dots, f_n$. Либо (4) не выполнено, т.е. для некоторых $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in E$ имеем

$$c_n := \begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_{n-1}) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(a_1) & f_{n-1}(a_2) & \dots & f_{n-1}(a_{n-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Положим в равенстве (2) $x_k = a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), $x_n = x$ и разложим определитель по последнему столбцу. Получим уравнение вида (3) при $c_n \neq 0$, т.е. снова $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно зависимы и лемма 1 доказана. ■

Полученный результат в некотором смысле аналогичен теоремам, связывающим линейную зависимость дифференцируемых или интегрируемых функций с исчезновением определителей Вронского и Грама соответственно (см. Curtiss, 1910). Одновременно мы получили утверждение об общем решении функционального уравнения (2).

Левую часть уравнения (2), так называемый определитель Казорати, мы будем иногда обозначать через

$$\det f_k(x_j) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Вначале мы решим уравнение (1) при сильных условиях регулярности на все неизвестные функции $f, g, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$, используя некоторые функции, определённые на подмножествах в $\mathbb{R}$. Затем мы ослабим условия регулярности на неизвестные функции, оставаясь в $\mathbb{R}$. Наконец, изучим некоторые возможные обобщения, когда области определения неизвестных функций являются подмножествами уже не в $\mathbb{R}$, а в произвольных абелевых группах.

Соответственно, вначале принимается

Гипотеза Н. Функции $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k : E' \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$), $f : E + E' \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E - E' \rightarrow \mathbb{R}$ имеют производные всех порядков.

Предложение 2. Пусть E, E' — непустые открытые интервалы в $\mathbb{R}$. Пусть при этом $0 \in E'$, выполнена гипотеза Н, функции $(f_1, \dots, f_n)$ линейно независимы

на E , а $(g_1, \dots, g_n)$ — на E' , причём выполнено функциональное уравнение (1). Тогда f_k и g_k ($k = 1, \dots, n$) удовлетворяют системам явных однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и без членов первого порядка, а $f + g$ и $f' - g'$ удовлетворяют линейным однородным дифференциальным уравнениям порядка $2n$ с постоянными коэффициентами и с членами лишь чётных порядков.

Доказательство. Двукратное дифференцирование уравнения (1) по x даёт

$$\sum_{k=1}^n f''(x)g_k(y) = f''(x+y) + g''(x-y). \quad (6)$$

Теперь дважды продифференцируем (1) по y :

$$\sum_{k=1}^n f(x)g_k''(y) = f''(x+y) + g''(x-y). \quad (7)$$

Так как $g_1, \dots, g_n$ линейно независимы, то по лемме 1 существуют такие точки $y_1, \dots, y_n \in E'$, что

$$\det g_k(y_j) \neq 0. \quad (8)$$

Положив в (6) и (7) $y = y_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), получаем систему n уравнений

$$\sum_{k=1}^n f''(x)g_k(y_j) = \sum_{k=1}^n f(x)g_k''(y_j) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Эта система линейна относительно $f_k''(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), причём её определитель не равен нулю в силу (8). Следовательно, система (9) однозначно разрешима, и каждая из функций $f''k(x)$ является линейной комбинацией функций $f_m(x)$ ($m = 1, \dots, n$) с постоянными коэффициентами:

$$f_k''(x) = \sum_{m=1}^n a_{k,m} f_m(x) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (10)$$

Аналогично доказывается, что g_k удовлетворяют системе n явных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и без членов первого порядка:

$$g_k''(y) = \sum_{m=1}^n b_{k,m} g_m(y) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (11)$$

как и утверждается в предложении 2.

Пусть теперь в уравнении (1) $y = 0$ (напомним, что по предположению $0 \in E'$). Определим отображение $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$\phi = f + g.$$

Взяв $c_{0,k} = g_k(0)$, получаем уравнение

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^n c_{0,k} f_k(x). \quad (12_0)$$

Дважды продифференцируем (12₀):

$$\phi''(x) = \sum_{k=1}^n c_{0,k} f_k''(x).$$

Используя (10) и полагая

$$c_{1,k} = \sum_{l=1}^n c_{0,l} a_{l,k} \quad (k = 1, \dots, n),$$

получаем

$$\phi''(x) = \sum_{k=1}^n c_{1,k} f_k(x). \quad (12_1)$$

Продолжаем аналогично:

$$\phi^{(2j)}(x) = \sum_{k=1}^n c_{j,k} f_k(x) \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (12_j)$$

В частности,

$$\phi^{(2n-2)}(x) = \sum_{k=1}^n c_{n-1,k} f_k(x), \quad (12_{n-1})$$

$$\phi^{(2n)}(x) = \sum_{k=1}^n c_{n,k} f_k(x) \quad (12_n)$$

при всех $x \in E$.

Возможны два случая. Если определитель, составленный из $c_{j,k}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$; $k = 1, 2, \dots, n$), равен 0, то существуют $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j c_{j,k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда из (12₀), (12₁), ..., (12_{n-1}) получаем для всех $x \in E$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j \phi^{(2j)}(x) = 0.$$

Если же указанный определитель не равен 0, то f_k ($k = 1, 2, \dots, n$) можно выразить из системы (12₀)–(12_{n-1}) как линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) функций $\phi, \phi'', \dots, \phi^{(2n-2)}$, и (12_n) превращается в уравнение

$$\phi^{(2n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \phi^{(2j)}(x) \quad (x \in E).$$

В обоих случаях ϕ удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению порядка $2n$ без членов нечётного порядка, имеющему постоянные коэффициенты (не равные одновременно нулю).

Теперь положим $\psi(x) = f'(x) - g'(x)$ ($x \in E$). Продифференцировав (1) по y и положив $y = 0$, $d_{0,k} = g'_k(0)$, получим

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^n d_{0,k} f_k(x).$$

Дифференцируя это уравнение два, четыре, ..., $2n$ раз, получаем для ψ тот же результат, что и ранее для ϕ . Предложение 2 доказано. ■

Системы линейных дифференциальных уравнений (10) и (11), которым удовлетворяют функции $f_1, \dots, f_n$ и $g_1, \dots, g_n$, решаются стандартными приёмами (хотя процедура решения может оказаться долгой), так же как и уравнения для ϕ и ψ . Если последние две функции найдены, то f и g определяются без труда. Предоставляем читателю в качестве упражнения (см. упр. 1) найти в случае $E = E' = \mathbb{R}$ все C^∞ -решения функционального уравнения

$$f(x+y) + g(x-y) = f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y), \quad (13)$$

где семейства (f_1, g_1) и (f_2, g_2) линейно независимы на $\mathbb{R}$.

В предложении 2 (уравнение (1)) и в уравнении (13) условие C^∞ можно заменить на C^2 для f_k, g_k ; C^{2n+1} для f ; C^5 для g . Но мы избавимся от условий дифференцируемости вообще.

Вначале мы существенно ослабим гипотезу H относительно неизвестных функций f, g, f_k, g_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Для этого покажем, что f_k и g_k можно выразить как линейные комбинации сдвигов функций f и g .

Пусть по-прежнему функции f_k линейно независимы на E , а g_k — на E' . Тогда по лемме 1 существуют $y_1, \dots, y_n \in E'$, для которых $\det g_k(y_j) \neq 0$. Подставляя эти y_j вместо y в (1), получаем n линейных уравнений, которые однозначно определяют $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Таким образом, для $x \in E$

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j} (f(x+y_j) + g(x-y_j)), \quad (14)$$

где $\alpha_{k,j}$ ($k, j = 1, \dots, n$) — вещественные константы. Аналогично имеем

$$g_k(y) = \sum_{j=1}^n \beta_{k,j} (f(x_j+y) + g(x_j-y)), \quad (15)$$

где $\beta_{k,j}$ ($k, j = 1, \dots, n$) — вещественные константы.

Подставим в (1) $u = x + y$:

$$f(u) = \sum_{k=1}^n f_k(u-y)g_k(y) - g(u-2y). \quad (16)$$

Аналогично, положим в (1) $v = x - y$:

$$g(v) = \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(x-v) - f(v+2y). \quad (17)$$

Сначала предположим непрерывность функций $f: E + E' \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: E - E' \rightarrow \mathbb{R}$, где E и E' — непустые открытые интервалы в $\mathbb{R}$. Тогда $f_k: E \rightarrow \mathbb{R}$ и $g_k: E' \rightarrow \mathbb{R}$

непрерывны ввиду (14) и (15). Проинтегрируем (1) по x на отрезке $[x_0, t]$, где $x_0, t \in E$:

$$\int_{x_0}^t f(x+y) dx + \int_{x_0}^t g(x-y) dx = \sum_{k=1}^n F_k(t) g_k(y),$$

где $F_k(t) = \int_{x_0}^t f_k(x) dx$. Перейдём к новым переменным $u = x + y, v = x - y$:

$$\int_{x_0+y}^{t+y} f(u) du + \int_{x_0-y}^{t-y} g(v) dv = \sum_{k=1}^n F_k(t) g_k(y). \quad (18)$$

Функции $F_1, F_2, \dots, F_n$ линейно независимы на E . В противном случае существовали бы вещественные константы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, не равные одновременно нулю, для которых

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k F_k(t) = 0 \quad (t \in E).$$

Так как f_k непрерывны, то после дифференцирования этого равенства получаем

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) = 0 \quad (x \in E),$$

что противоречит линейной независимости функций f_k на E . Значит, согласно лемме 1, $\det F_k(t_j) \neq 0$ для некоторых $t_1, \dots, t_n \in E$. Поэтому уравнение (18) можно разрешить относительно g_k ($k = 1, \dots, n$), получив для некоторых вещественных констант $\gamma_{j,k}$ ($k, j = 1, \dots, n$):

$$g_k(y) = \sum_{j=1}^n \gamma_{j,k} \left(\int_{x_0+y}^{t_j+y} f(u) du + \int_{x_0-y}^{t_j-y} g(v) dv \right).$$

Как следствие, функции g_k непрерывно дифференцируемы на E' .

Поскольку E' — открытый интервал в $\mathbb{R}$, то найдутся такие $y_0 \in E', \delta > 0$, что $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset E'$. Взяв t в этом интервале, проинтегрируем (16) по y на отрезке $[y_0, t]$:

$$(t - y_0)f(u) = \sum_{k=1}^n \int_{y_0}^t f_k(u-y) g_k(y) dy - \int_{y_0}^t g(u-2y) dy,$$

или

$$(t - y_0)f(u) = \sum_{k=1}^n \int_{u-t}^{u-y_0} f_k(v) g_k(u-v) dv - \frac{1}{2} \int_{u-2t}^{u-2y_0} g(w) dw. \quad (19)$$

Мы уже доказали, что функции f_k непрерывны, а g_k непрерывно дифференцируемы ($k = 1, \dots, n$), тогда как g предполагается непрерывной. Поэтому правая часть в (19) непрерывно дифференцируема по $u \in E + E'$, а значит это верно и для f .

Аналогично с помощью (17) можно доказать, что функция g непрерывно дифференцируема на $E - E'$. С учётом (14) и (15) получаем, что f_k и g_k ($k = 1, \dots, n$) непрерывно дифференцируемы на E и E' соответственно. Поэтому можно продифференцировать (1) по x :

$$f'(x+y) + g'(x-y) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)g_k(y). \quad (20)$$

Линейная независимость функций $\{f'_k\}$ не следует прямо из линейной независимости функций $\{f_k\}$. Однако в начале главы отмечено, что правую часть в (20) можно выразить (возможно, уменьшив число слагаемых) в виде

$$f'(x+y) + g'(x-y) = \sum_{j=1}^m \phi_j(x)\psi_j(y), \quad (21)$$

где каждое из семейств $\{\phi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ ($j = 1, \dots, m$) линейно независимо и эти функции непрерывны на E и E' соответственно.

Теперь можно применить к уравнению (21) результат, полученный нами для (1). Мы видим, что f' и g' непрерывно дифференцируемы. Как следствие, f и g дважды непрерывно дифференцируемы в своих областях определения. Это верно и для f_k и g_k ввиду (14) и (15). По индукции f, g, f_k, g_k ($k = 1, \dots, n$) имеют производные всех порядков в своих областях определения. Доказано

Предложение 3. *Предложение 2 остаётся верным, если заменить гипотезу H предположением о непрерывности функций $f: E + E' \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: E - E' \rightarrow \mathbb{R}$.* ■

Но можно ещё более ослабить условия регулярности, наложенные на f и g . Предположим, что эти функции локально интегрируемы по Лебегу в своих областях определения. (Нам потребуются лишь самые элементарные факты о таких функциях.) Уравнения (14) и (15) показывают, что f_k и g_k ($k = 1, \dots, n$) также локально интегрируемы по Лебегу (соответственно на E и E').

Пусть χ_ε , где $\varepsilon > 0$, — неотрицательная непрерывная функция с носителем $S \subset]-\varepsilon, +\varepsilon[$, причём $\int_S \chi_\varepsilon(x) dx = 1$. Заменим в уравнении (1) x на $x+t$, умножим

(1) на $\chi_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t :

$$\int_S f(x+t+y)\chi_\varepsilon(t) dt + \int_S g(x+t-y)\chi_\varepsilon(t) dt = \sum_{k=1}^n \Phi_k(x)g_k(y), \quad (22)$$

$$\text{где } \Phi_k(x) = \int_S f_k(x+t)\chi_\varepsilon(t) dt.$$

Положим

$$\Phi(x) = \int_S f(x+t)\chi_\varepsilon(t) dt, \quad \Psi(y) = \int_S g(y+t)\chi_\varepsilon(t) dt.$$

Функции Φ и Ψ непрерывны. Их области определения получаются из интервалов $E + E'$ и $E - E'$ путём сдвига концов внутрь на ε . Разумеется, нужно взять ε достаточно малым, чтобы остались непустые интервалы. Получаем, что

$$\Phi(x+y) + \Psi(x-y) = \sum_{k=1}^n \Phi_k(x)g_k(y). \quad (23)$$

Существуют $x_1, \dots, x_n \in E$, для которых $\det f_k(x_j) \neq 0$. Выбрав достаточно малое ε , получаем, что $\det \Phi_k(x_j) \neq 0$. Поэтому функции $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ линейно независимы. Из уже доказанного (предложение 3) вытекает, что g_k непрерывны в области определения функций Φ и Ψ . Поскольку можно взять ε произвольно малым, то g_k непрерывны на E' . Аналогично получаем, что f_k непрерывны на E . В силу (19) функция f непрерывна. Аналогично получаем, что непрерывна g . С учётом предложения 3 доказана

Теорема 4. Пусть E, E' — непустые открытые интервалы в $\mathbb{R}$, причём $0 \in E'$. Пусть, далее, функции $f: E + E' \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: E - E' \rightarrow \mathbb{R}$ локально интегрируемы по Лебегу, семейства функций $f_1, \dots, f_n$ и $g_1, \dots, g_n$ линейно независимы и при этом

$$f(x+y) + g(x-y) = \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y) \quad (x \in E, y \in E').$$

Тогда $f, g, f_k, g_k \in C^\infty$, причём f_k и g_k ($k = 1, \dots, n$) удовлетворяют системам явных однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и без членов первого порядка, а $f + g$ и $f' - g'$ удовлетворяют линейным однородным дифференциальным уравнениям порядка $2n$ с постоянными коэффициентами и без членов нечётного порядка. ■

Замечание 1. Техника доказательства предложения 3 (и теоремы 13.19) восходит к работе Andrade, 1900 и впоследствии была использована для различных уравнений вида (1), см. Levi-Civita 1913; Satô, 1928; Aczél, 1966с Р. 190–196. В работе Aczél–Chung, 1982 доказан более слабый вариант теоремы 4 с дополнительным предположением о L -независимости функций f_k и g_k . Последнее означает (для функций f_k), что если

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } E,$$

то $a_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$).

Однако в работе Járai, 1984 доказано, что L -независимость можно заменить линейной независимостью, а локальную интегрируемость функций f и g по Лебегу в теореме 4 — измеримостью по Лебегу (см. упр. 4). Это доказательство существенно опирается на весьма общую теорему (Járai, 1979) об условиях регулярности для функциональных уравнений вида (16) и более общих.

Замечание 2. Техника доказательства, использованная здесь для уравнения (1), легко распространяется на более общее функциональное уравнение, а именно

$$\sum_{l=1}^m h_l(\alpha_l x + \beta_l y) = \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y) \quad (x \in E, y \in E'). \quad (24)$$

В работе Aczél–Chung, 1982 доказан следующий факт (упр. 15).

Теорема 5. Пусть E, E' — непустые открытые интервалы в $\mathbb{R}$. Пусть при этом $\alpha_l \beta_l \neq 0$, $\alpha_l / \beta_l \neq \alpha_j / \beta_j$ ($j \neq l = 1, \dots, m$); функции h_l локально интегрируемы на $\alpha_l E + \beta_l E'$ ($l = 1, \dots, m$), а семейства функций $\{f_1, \dots, f_n\}$ и $\{g_1, \dots, g_n\}$ линейно независимы на E и E' соответственно, причём выполнено (24). Тогда функции h_l, f_k, g_k принадлежат классу C^∞ на соответствующих интервалах. При этом f_k и g_k ($k = 1, \dots, n$) удовлетворяют системам явных однородных линейных дифференциальных уравнений порядка m с постоянными коэффициентами. Если 0 принадлежит E и E' , то функции $h_l^{(m-1)}(t)$ являются линейными комбинациями функций $f_k^{(s)}(t/\alpha_l)$, так же как и функций $g_k^{(s)}(t/\beta_l)$ ($k = 1, \dots, n$; $l = 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, m-1$). ■

Читатель заметит не только сходство, но и различие между теоремами 4 и 5: в последней не говорится об отсутствии членов первого порядка. Сходство восстанавливается, когда мы переходим из вещественной области в комплексную и полагаем $\alpha_l = 1$, $\beta_l = \varepsilon^l$ ($l = 1, \dots, m$), где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$: тогда в системах дифференциальных уравнений для f_k и g_k исчезают производные порядков $2, \dots, m-1$. В этом случае имеется и аналог последнего утверждения теоремы 4: функции $\phi_j = \sum_{l=1}^m \varepsilon^{jl} f_l^{(j)}$ удовлетворяют однородным линейным дифференциальным уравнениям порядка mn с постоянными коэффициентами и с членами только порядков pt ($p = 0, 1, \dots, n$); см. упр. 16.

Замечание 3. Доказательство регулярности функций в теореме 4 легко распространяется на случай, когда $\mathbb{R}$ заменено локально компактной абелевой группой, причём E и E' — её открытые подмножества, а локальная измеримость по Лебегу заменена на локальную измеримость по Хаару. Однако утверждение о дифференциальных уравнениях теперь не имеет места, и нужен иной подход. Как можно догадаться, он состоит в том, чтобы рассматривать функциональные уравнения разностного типа.

Пусть G — абелева группа. Функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется *многочленом степени не выше n* , если

$$\Delta_y^{n+1} f(x) = 0 \quad (x, y \in G),$$

где $\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x)$, $\Delta_y^{k+1} f(x) = \Delta_y(\Delta_y^k f)(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

В случае абелевой топологической группы G функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется *экспоненциальным многочленом*, если

$$f = \sum_{i=1}^n m_i P_i,$$

где P_i — непрерывный комплекснозначный многочлен на G , а функции $m_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывны и удовлетворяют уравнениям

$$m_i(x+y) = m_i(x)m_i(y).$$

Справедлива следующая

Теорема 6. (Székelyhidi, 1981c; см.: McKiernan, 1977a,b.) Пусть G — локально компактная 2-делимая абелева группа, а функции f, g, f_k, g_k ($k = 1, \dots, n$) : $G \rightarrow \mathbb{C}$ измеримы по Хаару и удовлетворяют уравнению (1) при всех $x, y \in G$. Тогда f и g — экспоненциальные многочлены. ■

О дальнейших результатах см.: McKiernan, 1977a,b; Penney–Rukhin, 1979; Székelyhidi, 1981c; Rukhin, 1982, а также библиографию в этих статьях.

Последующие результаты и упражнения

1. (Aczél–Chung, 1982.) Найдите общие решения уравнения (13), локально интегрируемые по Лебегу.

2. Примените результат предыдущего упражнения, чтобы найти общие решения уравнения

$$f(x+y) = f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

локально интегрируемые по Лебегу.

3. То же, что в упр. 2, но для уравнения

$$f(x+y) = f_1(x)g_1(y) + f_2(x).$$

4*. (Járai, 1984, 1986.) Докажите, что теорема 4 остаётся верной, если f и g лишь измеримы, но не предполагаются интегрируемыми по Лебегу.

5. Справедливо ли предложение 2, если E и E' — непустые *отрезки* в $\mathbb{R}$?

6. То же, что в предыдущем упражнении, но для непустых открытых подмножеств в $\mathbb{R}$ (не обязательно интервалов).

(В связи с упр. 7–8 см.: Kaczmag 1924.)

7. Покажите, что если $\phi, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$f(x) + f(x+y) = \phi(y)f\left(x + \frac{y}{2}\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}), \quad (25)$$

то ϕ удовлетворяет уравнению

$$\phi(x+y) + \phi(x-y) = \phi(x)\phi(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

8. Найдите все измеримые решения функционального уравнения (25).

9. Найдите все интегрируемые по Лебегу решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x+y+A) - f(x-y-A) = 2f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

где A — вещественная константа (см. упр. 13.9).

10. (См., например: Guilmard, 1972.) Покажите, что каждое локально интегрируемое решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ функционального уравнения

$$f(x)^2 - f(y)^2 = f(x+y)f(x-y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

непрерывно.

11*. (Naguki, 1984c.) Докажите следующую теорему: мероморфная функция $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$(f(x+y) + f(x-y))(f(x)^2 + f(y)^2) = 2f(x)f(y)(f(x+y)f(x-y) + 1) \quad (x, y \in \mathbb{C}),$$

если и только если

$$f(x) = \operatorname{sn}(\alpha x, k),$$

где α, k — произвольные комплексные числа, а sn обозначает эллиптический косинус

$$\text{Якоби, т. е. } \operatorname{sn}(z, k) = \cos \phi, \text{ где } z = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}.$$

12. (Vincze, 1978b.) Пусть G — 2-делимая абелева группа, F — тело характеристики 0. Найдите общие решения функционального уравнения

$$f(x+y)g(x-y) = f(x)g(y)g(x)g(-y) \quad (x, y \in G).$$

(В связи с упр. 13–14 см.: Horiginouchi–Kannappan, 1971.)

13. Пусть G — область целостности, F — поле характеристики, не равной 2. Покажите, что если аддитивная функция $f: G \rightarrow F$ не равна тождественно нулю и удовлетворяет уравнению

$$f(xy) = \alpha(x)f(y) + \alpha(y)f(x) \quad (x, y \in G), \quad (26)$$

то функция $\alpha: G \rightarrow F$ аддитивна и не равна тождественно нулю, причём

$$\alpha(x^3) - 3\alpha(x)\alpha(x^2) + 2\alpha(x^3) = 0. \quad (27)$$

Верно ли, что (26) имеет нетривиальное аддитивное решение для каждой аддитивной функции α , удовлетворяющей уравнению (27)?

14. Пусть G — область целостности, F — поле характеристики, не равной 2. Опровергните или докажите, что для функций $\alpha, \beta : G \rightarrow F$, совпадающих не всюду, следующие утверждения равносильны:

— существует аддитивная функция $f : G \rightarrow F$, не равная тождественно нулю и такая, что

$$f(xy) = \alpha(x)f(y) + \beta(y)f(x) \quad (x, y \in G);$$

— функции α и β аддитивны, причём

$$\alpha(x^2) - \alpha(x)^2 = \beta(x^2) - \beta(x)^2.$$

15. Докажите теорему 5.

16. Докажите последнее утверждение в Замечании 2.

17. (Vincze, 1960b, 1963a.) Пусть G — абелева группа, F — квадратично замкнутое 2-делимое поле. Найдите общие решения $f, f_1, f_2, g_1, g_2 : G \rightarrow F$ уравнения

$$f(x+y) = f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y).$$

В отличие от упр. 2, здесь отсутствуют условия регулярности и рассматривается область более общего вида.

Глава 15

ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕКСИДЕРА. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ СРЕДНИХ

В начале этой главы мы рассмотрим уравнения типа Пексидера, более общие, чем в § 4.3. Мы докажем — в самой общей алгебраической постановке — теорему единственности, типичную для теории функциональных уравнений. Непосредственным применением этой ключевой теоремы служит характеристизация классических средних, таких как арифметические и квазиарифметические. Более подробно они изучаются в гл. 17 (где снова применяется эта теорема единственности). Наибольшее внимание мы уделим арифметическим, геометрическим, экспоненциальным и степенным средним.

Уравнение Пексидера (4.25)

$$k(x+y) = g(x) + h(y), \quad (1)$$

а также

$$k(x+y) = g(x)l(y)$$

являются частными случаями уравнения

$$k(x+y) = g(x)l(y) + h(y). \quad (2)$$

Как и в § 4.3, мы здесь рассматриваем функции, которые определены на коммутативном группоиде N (в аддитивной записи) с нулём, но принимают значения в теле F . Перед нами ещё один пример уравнения, которое определяет несколько неизвестных функций (в данном случае четыре). Положим в уравнении (2) $y = 0$:

$$k(x) = g(x)l(0) + h(0). \quad (3)$$

Если $l(0) = 0$, то k является константой. Этот случай мы исключим как тривиальный. Если же $l(0) \neq 0$, то согласно (3)

$$g(x) = \frac{k(x) - h(0)}{l(0)}. \quad (4)$$

Подставляя в (2) и полагая

$$\phi(y) = \frac{l(y)}{l(0)}, \quad \psi(y) = h(y) - h(0)\frac{l(y)}{l(0)}, \quad (5)$$

получаем

$$k(x+y) = k(x)\phi(y) + \psi(y) \quad (x, y \in N). \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет важные применения (например, см. ниже доказательство теоремы 8); решив его, мы можем найти l , h и g с помощью (5) и (4) (упр. 1). Подставим в (6) $x = 0$:

$$k(y) = k(0)\phi(y) + \psi(y). \quad (7)$$

Вычитая (7) из (6) и полагая

$$\varkappa(x) = k(x) - k(0), \quad (8)$$

получаем

$$\kappa(x + y) = \kappa(x)\phi(y) + \kappa(y) \quad (x, y \in N). \quad (9)$$

Заметим, что количество неизвестных функций в итоге сократилось с четырёх до двух.

В уравнении (9) возможны два случая. Если

$$\phi(y) = 1 \quad \text{при всех } y \in N, \quad (10)$$

то (9) превращается в уравнение Коши и в качестве κ можно взять любую аддитивную функцию $a : N \rightarrow F$. Положив $k(0)$ равным некоторой константе b , получаем из (8) и (7):

$$\phi(x) = 1, \quad k(x) = a(x) + b, \quad \psi(x) = a(x) \quad (x \in N). \quad (11)$$

Пусть теперь (10) не выполнено, т. е. при некотором y_0

$$\phi(y_0) \neq 1. \quad (12)$$

Пользуясь коммутативностью группоида N , мы можем поменять местами x и y в уравнении (9), откуда

$$\kappa(x)\phi(y) + \kappa(y) = \kappa(x + y) = \kappa(y + x) = \kappa(y)\phi(x) + \kappa(x),$$

или

$$\kappa(x)[\phi(y) - 1] = \kappa(y)[\phi(x) - 1].$$

Положив $c = \kappa(y_0)/[\phi(y_0) - 1]$, получаем

$$\kappa(x) = c[\phi(x) - 1]. \quad (13)$$

Здесь опять возможны два случая. Если $c = 0$, то $\kappa \equiv 0$ и ϕ может быть произвольной функцией (см. (9)). Снова обозначив $k(0) = b$, получаем из (7) и (8):

$$k(x) = b, \quad \phi - \text{произвольная функция}, \quad \psi(y) = b[1 - \psi(y)]. \quad (14)$$

Если же $c \neq 0$, то подставим (13) в (9):

$$\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y) \quad \text{при всех } x, y \in N,$$

т. е. ϕ является гомоморфизмом из N в мультипликативную группу поля F . Положив на этот раз $b := k(0) - c$, получаем из (13), (8) и (7):

$$\phi(x) = e(x), \quad k(x) = ce(x) + b, \quad \psi(x) = b[1 - e(x)] \quad (x \in N), \quad (15)$$

где e — произвольное решение уравнения

$$e(x + y) = e(x)e(y). \quad (16)$$

Легко проверить, что (11), (14) и (15) всегда удовлетворяют уравнению (6). Мы доказали следующий факт (см., например: Aczél, 1966с, р. 148–153; 1969а, р. 20–22):

Теорема 1. *Общие решения $k, \phi, \psi : N \rightarrow F$ уравнения (6) на N^2 (здесь N — коммутативный группоид с нейтральным элементом, F — тело) имеют вид (11), (14) и (15), где b, c — произвольные константы, e, a — произвольные решения уравнений (16) и $a(x + y) = a(x) + a(y)$ ($x, y \in N$) соответственно. ■*

Следствие 2. *Общие решения уравнения (6) на $\mathbb{R}_+^2$ в классе функций $k, \phi, \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, где k строго монотонна, имеют вид*

$$\phi(x) = 1, \quad k(x) = ax + b, \quad \psi(x) = ax \quad (17)$$

и

$$\phi(x) = e^{ax}, \quad k(x) = ce^{ax} + b, \quad \psi(x) = b[1 - e^{ax}], \quad (18)$$

где a, b, c — произвольные вещественные константы, причём $a \neq 0, c \neq 0$. ■

Теперь обратимся к очень простому частному случаю уравнения (1), уже встречавшемуся нам как (10.25):

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad ((x, y) \in I^2); \quad (19)$$

он называется (одноместным) уравнением Иенсена, поскольку это случай равенства в неравенстве Иенсена (9.20), (10.13). Здесь I — произвольное связное подмножество в $\mathbb{R}$. Общее непрерывное решение можно найти, например, тем способом, который в гл. 8 применялся к (8.1), но и непосредственно ясно, что оно имеет вид

$$f(x) = ax + b \quad (x \in I), \quad a, b — произвольные вещественные константы. \quad (20)$$

Действительно, ввиду (19) и непрерывности функции f она одновременно выпукла и вогнута на I и, значит, аффинна. Аналогично для двухместного уравнения Иенсена доказывается

Предложение 3. *Общее непрерывное решение уравнения*

$$G\left(\frac{x+y}{2}, \frac{u+v}{2}\right) = \frac{G(x, u) + G(y, v)}{2} \quad (x, y, u, v \in I)$$

имеет вид

$$G(x, u) = ax + bu + c \quad (x, u \in I),$$

где a, b, c — произвольные вещественные константы. ■

Замечание. Если $0 \in I$, то (n -местное) уравнение Иенсена решается особенно легко. Например, положив в (19) $y = 0$, получаем $f(x/2) = [f(x) + f(0)]/2$, так что функция $A(x) = f(x) - f(0)$ удовлетворяет условию $A(x/2) = A(x)/2$ и ввиду (19) также условию $A[(x+y)/2] = [A(x) + A(y)]/2$. Поэтому

$$A(x+y) = 2A\left(\frac{x+y}{2}\right) = A(x) + A(y),$$

и общее решение уравнения (19) (при $0 \in I$, но это условие можно устранить, см. также теорему 4.12) имеет вид $f(x) = A(x) + b$, где A — произвольная аддитивная функция, b — константа.

Здесь, однако, уравнение (19) послужит как иллюстрация теоремы единственности в теории функциональных уравнений (Aczél, 1964a), за которой последовали многие другие (Aczél–Hosszú, 1965; Howroyd, 1969, 1970b; Miller, 1970a; Ng, 1970; Paganoni Marzegalli 1971a,b; Paganoni, 1972b, 1974a, 1976; Mills, 1974 и др.).

Теорема 4. Пусть f_1, f_2 — непрерывные решения уравнения

$$f[F(x, y)] = H[f(x), f(y), x, y] \quad [(x, y) \in I^2], \quad (21)$$

где I — произвольное связное подмножество в $\mathbb{R}$. Пусть, далее, выполнено следующее условие: функция $F: I^2 \rightarrow I$ является непрерывной и «внутренней» (internal), т. е.

$$\min(x, y) < F(x, y) < \max(x, y) \quad \text{при } x \neq y \quad (x, y \in I); \quad (22)$$

либо отображение $u \mapsto H(u, v, x, y)$ при любых фиксированных v, x, y , либо отображение $v \mapsto H(u, v, x, y)$ при любых фиксированных u, x, y инъективно (взаимно однозначно); пусть при этом $\gamma, \delta \in I, \gamma < \delta$,

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma), \quad f_1(\delta) = f_2(\delta). \quad (23)$$

Тогда

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{при всех } x \in I. \quad (24)$$

Доказательство. Разобьём доказательство на три шага. Вначале покажем, что

$$(i) \quad f_1(x) = f_2(x) \quad \text{для всех } x \in [\gamma, \delta].$$

Действительно, в противном случае (с учётом (23)) существует $x_0 \in]\gamma, \delta[$, для которого $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Положим

$$C = \sup \{x \mid f_1(x) = f_2(x), \gamma \leq x < x_0\},$$

$$D = \inf \{x \mid f_1(x) = f_2(x), x_0 < x \leq \delta\}.$$

С учётом непрерывности функций f_1, f_2 имеем

$$C < x_0 < D, \quad f_1(C) = f_2(C), \quad f_1(D) = f_2(D), \quad (25)$$

$$f_1(x) \neq f_2(x) \quad \text{для всех } x \in]C, D[. \quad (26)$$

Это ведёт к противоречию. Действительно, в силу (21) и (25)

$$f_1[F(C, D)] = H[f_1(C), f_1(D), C, D] = H[f_2(C), f_2(D), C, D] = f_2[F(C, D)]. \quad (27)$$

Но в силу (22)

$$F(C, D) \in]C, D[,$$

так что (27) противоречит (26), и (i) доказано.

Теперь нужно показать следующее:

$$(ii) \quad f_1(x) = f_2(x), \quad \text{если } x \in I, x < \gamma;$$

$$(iii) \quad f_1(x) = f_2(x), \quad \text{если } x \in I, x > \delta.$$

Оба утверждения доказываются аналогично, так что мы докажем только (ii). Без ограничения общности можно считать, что инъективно отображение $u \mapsto H(u, v, x, y)$. Положим

$$A = \inf \{t \mid f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in [t, \delta]\} \quad (28)$$

(обратите внимание на отличие от определения величины D на шаге (i)). Тогда $A \leq \gamma$ в силу (i). Нужно показать, что A совпадает с левым концом промежутка I . Если это неверно, то существует возрастающая последовательность

$$x_n \rightarrow A \quad (x \in I), \quad (29)$$

такая что

$$f_1(x_n) \neq f_2(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Если

$$F(x_n, \delta) \leq A \quad \text{при } n = 1, 2, \dots,$$

то по непрерывности (см. (29))

$$F(A, \delta) \leq A,$$

что противоречит (22). Поэтому для некоторого m верно, что

$$F(x_m, \delta) \in]A, \delta]. \quad (31)$$

С учётом (21), (28) и (23) получаем

$$\begin{aligned} H[f_1(x_m), f_1(\delta), x_m, \delta] &= f_1[F(x_m, \delta)] = f_2[F(x_m, \delta)] = \\ &= H[f_2(x_m), f_2(\delta), x_m, \delta] = H[f_2(x_m), f_1(\delta), x_m, \delta]. \end{aligned}$$

Так как отображение $u \mapsto H(u, v, x, y)$ инъективно, то $f_1(x_m) = f_2(x_m)$. Получаем противоречие с (30), и (ii) доказано. Поскольку утверждение (iii) доказывается аналогично, теорема 4 доказана. ■

В качестве весьма частного случая получаем, что общее непрерывное решение уравнения (19) даётся формулой (20). Действительно, здесь функция $F(x, y)$ имеет вид $(x + y)/2$, являясь непрерывной и «внутренней». Отображение

$$u \mapsto H(u, v, x, y) = (u + v)/2$$

инъективно. Пусть теперь $\gamma, \delta \in I$, $\gamma < \delta$, а f — произвольное непрерывное решение для (19). Тогда функция

$$f_1(x) = \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} x + \frac{\delta f(\gamma) - \gamma f(\delta)}{\delta - \gamma}$$

аффинна (т. е. имеет вид (20)), причём

$$f_1(\gamma) = f(\gamma), \quad f_1(\delta) = f(\delta).$$

По теореме 4

$$f(x) = f_1(x) = ax + b \quad \text{при всех } x \in I,$$

как и утверждалось. Разумеется, для таких функций (19) выполнено.

Теперь применим теорему 4 к теории квазиарифметических средних. Пусть функция $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна. Область её значений является промежутком (вместо $\mathbb{R}_+$ также можно взять любой промежуток, конечный или бесконечный). *Квазиарифметическим средним* называется функция вида

$$M(x, y) = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+). \quad (32)$$

Примерами квазиарифметических средних служат среднее арифметическое ($k(x) = x$), среднее экспоненциальное ($k(x) = e^{cx}$, $c \neq 0$), среднее квадратичное ($k(x) = x^2$) и вообще степенное среднее ($k(x) = x^c$ при $c > 0$; если $\mathbb{R}_+$ заменено на $\mathbb{R}_+$ или его связное подмножество, то можно брать и $c < 0$, причём при $k(x) = 1/x$ получим среднее гармоническое). Ещё один пример — среднее геометрическое ($k(x) = \ln x$). Функция k в формуле (32), однако, не определена однозначно: её можно заменить, не меняя M , на $\phi k + \psi$, где $\phi \neq 0$ и ψ — вещественные константы. Покажем, что неоднозначность этим исчерпывается.

Следствие 5. Для двух непрерывных, строго монотонных функций $f, k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) = f^{-1} \left(\frac{f(x) + f(y)}{2} \right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+), \quad (33)$$

если и только если существуют константы $\phi \neq 0$, ψ , такие что

$$f(x) = \phi k(x) + \psi \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}_+. \quad (34)$$

Докажем более сильное утверждение. Чтобы его сформулировать, запишем (33) с учётом (32) в виде

$$f[M(x, y)] = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \quad (35)$$

Положив

$$g(x) := k^{-1}(f(x)), \quad \text{т. е. } f(x) = k(g(x)), \quad (36)$$

получаем

$$g[M(x, y)] = k^{-1} \left(\frac{kg(x) + kg(y)}{2} \right) = M[g(x), g(y)] \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Равенство (36) имеет смысл, если $f(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset k(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Оба множества значений связны, поскольку функции f и k непрерывны. Равенство (33) сохраняется при замене f на $\alpha f + \beta$ ($\alpha \neq 0$), и при подходящем выборе α и β искомое соотношение между множествами значений будет выполнено. Из (36) ясно, что функция g непрерывна и строго монотонна, но мы предположим только непрерывность и вместо $\overline{\mathbb{R}}_+$ возьмём произвольный промежуток I . Таким образом (заменив M на F), мы ищем непрерывные функции $g : I \rightarrow I$, такие что

$$F(g(x), g(y)) = g(F(x, y)) \quad \text{при всех } x, y \in I, \quad (37)$$

где F обозначает квазиарифметическое среднее

$$F(x, y) = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) \quad (x, y \in I) \quad (38)$$

с некоторой непрерывной и строго монотонной функцией $k : I \rightarrow \mathbb{R}$. Отметим, что равенство (37) имеет смысл, так как $F(x, y) \in I$. Как и выше, $k(I)$ обозначает область значений функции k .

Предложение 6. Пусть a, b таковы, что $ak(I) + b \subset k(I)$. Тогда функциями

$$g(x) = k^{-1}(ak(x) + b) \quad (39)$$

исчерпываются непрерывные решения уравнения (37) при условии (38).

Очевидно, что следствие 5 вытекает из предложения 6: сравнив (39) и (36), получаем (34), причём $\phi \neq 0$ в силу строгой монотонности функции f .

Доказательство предложения 6. Из (39) и (38) следует (37). Обратно, пусть уравнение (37) выполнено. Оно имеет вид (21). Функция F , определённая формулой (38), является непрерывной и «внутренней» (удовлетворяет условию (22)), а отображение $u \mapsto H(u, v, x, y) = F(u, v)$ инъективно. Поэтому можно применить теорему 4.

Если g — константа, то (39) выполнено при $a = 0$. В противном случае существуют $\gamma, \delta \in I$, для которых $g(\gamma) \neq g(\delta)$. Положим $h(x) := k[g(x)]$. Так как функция k строго монотонна, то $k(\gamma) \neq k(\delta)$, $h(\gamma) \neq h(\delta)$. Теперь положим

$$g_1(x) = k^{-1} \left(\frac{h(\delta) - h(\gamma)}{k(\delta) - k(\gamma)} k(x) + \frac{k(\delta)h(\gamma) - k(\gamma)h(\delta)}{k(\delta) - k(\gamma)} \right) \quad (x \in I). \quad (40)$$

Тогда $g_1(\gamma) = g(\gamma)$, $g_1(\delta) = g(\delta)$. Функции g, g_1 непрерывны и удовлетворяют уравнению (37). По теореме 4 функция g совпадает с g_1 на I , а так как g_1 , согласно (40), имеет вид

$$g_1(x) = k^{-1}(ak(x) + b)$$

(a, b — константы), то g имеет вид (39), и предложение 6 доказано. ■

Обобщением частного случая предложения 6 служит

Предложение 7. Решения $g : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ уравнения

$$\left(\frac{g(x)^2 + g(y)^2}{2} \right)^{1/2} = g \left[\left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^{1/2} \right] \quad (41)$$

имеют вид $(ax^2 + b)^{1/2}$, где $a, b \geq 0$.

Замечание. Как обычно, мы считаем $t^{1/2} \geq 0$ при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Поэтому функциональное уравнение (41) подразумевает, что $g(z) \geq 0$ при всех $z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Вот почему мы рассматриваем функции $g: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

Доказательство. Если функция g непрерывна, то в силу предложения 6 $g(x) = (ax^2 + b)^{1/2}$, причём $ax + b \in \overline{\mathbb{R}}_+$ при всех $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Очевидно, что тогда $a, b \geq 0$.

Однако непрерывность функции g вытекает из самого уравнения (41) и может быть усмотрена следующим образом. Уравнение (41) — не что иное, как (37) для квадратичного среднего

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^{1/2},$$

так что (38) выполнено для $k(x) = x^2$. Определим функцию $h: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, положив $h = k \circ g \circ k^{-1}$. Пусть $x' = k(x)$, $y' = k(y)$. Тогда (37) превращается в уравнение Иенсена на $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\frac{h(x') + h(y')}{2} = h\left(\frac{x' + y'}{2}\right) \quad \text{для всех } x', y' \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (42)$$

Функция $h - h(0)$ удовлетворяет уравнению Коши (см. замечание после предложения 3). Она ограничена снизу, поскольку h принимает значения в $\overline{\mathbb{R}}_+$. В силу теоремы 2.1 и следствия 2.5 функция h непрерывна. Но $h = k \circ g \circ k^{-1}$, поэтому непрерывна и функция g . Предложение 7 доказано. ■

Аналогичное утверждение можно доказать для других степенных средних (упр. 10) и для экспоненциального среднего (в действительности — для всех квазиарифметических средних (38), см. упр. 12). Оно легко распространяется на квазиарифметические средние n переменных

$$M(x_1, \dots, x_n) = k^{-1} \left(\frac{k(x_1) + \dots + k(x_n)}{n} \right).$$

Можно поставить и обратный вопрос: для каких функций $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует непрерывная строго монотонная функция k , такая что $f(x) = k^{-1}(ak(x) + b)$ — иначе говоря,

$$k \circ f = ak + b \quad (43)$$

с какими-то вещественными константами $a (\neq 0)$, b ? Это требование равносильно ¹⁾ тому, что f оставляет инвариантным некоторое квазиарифметическое среднее. Уравнение (43) было темой многих работ (см.: Kuczma, 1968), но мы не будем входить в подробности, поскольку это функциональное уравнение с одним переменным.

Теперь выясним, какие квазиарифметические средние (32) однородны относительно сложения (см. гл. 20), т. е.

$$M(x + t, y + t) = M(x, y) + t \quad \text{при всех } x, y, t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad (44)$$

или

$$k^{-1} \left(\frac{k(x + t) + k(y + t)}{2} \right) = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) + t. \quad (45)$$

¹⁾ В силу предложения 6.

Зафиксировав t , введём (непрерывную, строго монотонную) функцию f_t посредством формулы

$$f_t(x) = k(x + t). \quad (46)$$

Обратная функция имеет вид

$$f_t^{-1}(z) = k^{-1}(z) - t,$$

и уравнение (45) превращается в

$$k^{-1}\left(\frac{k(x) + k(y)}{2}\right) = f_t^{-1}\left(\frac{f_t(x) + f_t(y)}{2}\right) \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Согласно формуле (34) из следствия 5

$$f_t(x) = \phi(t)k(x) + \psi(t)$$

(«константы» ϕ, ψ теперь зависят от t , поскольку для каждого t имеется своё уравнение вида (33)). С учётом (46) получаем уравнение (6):

$$k(x + t) = k(x)\phi(t) + \psi(t) \quad (x, t \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

Выполнены условия следствия 2, поэтому либо $k(x) = cx + b$ ($c \neq 0$), либо $k(x) = ae^{cx} + b$ ($ac \neq 0$). Подставив в (32), проверяем инвариантность относительно сдвигов. В итоге доказана

Теорема 8. *Арифметическое $\frac{x+y}{2}$ и экспоненциальные $\frac{1}{c} \ln \left(\frac{e^{cx} + e^{cy}}{2} \right)$ ($c \neq 0$) средние и только они среди квазиарифметических средних инвариантны относительно сдвигов по сложению, т. е. удовлетворяют одновременно условиям (32) и (44). ■*

Аналогично доказывается (для $\mathbb{R}_+$ или его связного подмножества), что геометрическое $(xy)^{1/2}$ и степенные $\left(\frac{x^c + y^c}{2}\right)^{1/c}$ средние и только они среди квазиарифметических средних (32) однородны первой степени относительно умножения:

$$M(xu, yu) = uM(x, y) \quad (x, y, u \in \mathbb{R}_+).$$

Таким образом, среднее арифметическое и только оно среди квазиарифметических средних однородно относительно сложения и умножения одновременно. Те же утверждения верны в случае n переменных. Но в случае двух переменных последнее из них можно доказать для $\mathbb{R}$ (и для более общих структур) элементарными средствами без допущения о квазиарифметичности.

Предложение 9. *Функция $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям*

$$M(x + t, y + t) = M(x, y) + t; \quad M(xu, yu) = M(x, y)u \quad (x, y, t, u \in \mathbb{R}, u \neq 0), \quad (47)$$

если и только если существует константа q , такая что

$$M(x, y) = (1 - q)x + qy \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (48)$$

Если функция M симметрична, то $q = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Положив в (47) $q = M(0, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} M(x, y) &= M[0 + x, (y - x) + x] = M(0, y - x) + x = \\ &= M(0, 1)(y - x) + x = (1 - q)x + qy \end{aligned}$$

при $y \neq x$. Положим теперь $x = y = 0$: поскольку $M(0,0) = M(0u, 0u) = M(0,0)u$ при всех $u \neq 0$, то $M(0,0) = 0$ и

$$M(t, t) = M(0,0) + t = t.$$

Обратное утверждение очевидно. ■

Тем же способом этот результат доказывается и для более общих, чем вещественные числа, алгебраических структур (см. упр. 19). Отметим, что если $M(x+t, y+t) = M(x, y) + t$ (при всех $x, y \in \mathbb{R}$, но *только для* $t > 0$), то вместо (48) выполняется лишь следующее:

$$M(x, y) = \begin{cases} (1-q)x + qy & \text{при } y \geq x, \\ px + (1-p)y & \text{при } y < x \end{cases}$$

(p, q — произвольные константы). Даже если функция M симметрична, то $p = q$, но не обязательно $q = 1/2$.

Последующие результаты и упражнения

1. (См. Aczél, 1969a, p. 20–22.) Найдите все решения $g, h, k, l : N \rightarrow F$ уравнения (2), где N — коммутативный группоид с нейтральным элементом, F — поле. (В связи с упр. 2–6 см.: Janardan, 1978.)
2. Пусть M обозначает экспоненциальное среднее,

$$M(x, y) = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{e^{\alpha x} + e^{\alpha y}}{2} \right) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

где $\alpha \neq 0$ — константа. Найдите все решения $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x)f(y) = f(M(x, y)), \quad (49)$$

ограниченные на подмножестве положительной меры в $\mathbb{R}_+$.

3. То же, но для произвольного квазиарифметического среднего и для функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ на произвольном промежутке $I \subset \mathbb{R}$.
4. Решите пексидеровский аналог функционального уравнения (49) из упр. 2:

$$f(x)g(y) = h(M(x, y)) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

- 5*. Используя упр. 4, покажите, что невырожденное неотрицательное случайное переменное X имеет распределение Вейбулла

$$P(X \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x^\alpha) \quad (x \geq 0),$$

где $\lambda > 0, \alpha > 0$, если и только если

$$P(X > M(x, y) > x) = P(X > y).$$

6. В обозначениях упр. 2 решите для всех $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+ (i = 1, \dots, n)$ уравнение

$$f(x_1, \dots, x_n)f(y_1, \dots, y_n) = f(M(x_1, y_1), \dots, M(x_n, y_n)),$$

где $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$.

7. Пусть G, F — 2-делимые абелевы группы. Докажите равносильность следующих функциональных уравнений для $f : G \rightarrow F$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \quad (x, y \in G);$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

8. Используя результат упр. 7, найдите общие непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).$$

9*. (Aczél, 1966с, р. 53–57.) Пусть дан промежуток $I \subset \mathbb{R}$, содержащий более одной точки, и дано отображение $\circ: I^2 \rightarrow I$. Докажите, что уравнение

$$f(x+y) = f(x) \circ f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

имеет непрерывное решение $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, не являющееся константой, если и только если промежуток I открыт и $(I, \circ)$ — непрерывная группа.

(В связи с упр. 10–18 см.: Dhombres, 1982b.)

10. Пусть $r \in \mathbb{R}^*$. Найдите все решения $g: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ уравнения

$$\left(\frac{g(x)^r + g(y)^r}{2} \right)^{1/r} = g \left(\left(\frac{x^r + y^r}{2} \right)^{1/r} \right) \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

То же, если $\overline{\mathbb{R}}_+$ заменено на $\mathbb{R}$, а r — нечётное натуральное число.

11. Найдите все решения $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ уравнения

$$g((xy)^{1/2}) = \frac{2g(x)g(y)}{g(x) + g(y)} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

12*. Пусть I — собственный промежуток в $\mathbb{R}$, а квазиарифметическое среднее M определено на I посредством непрерывного инъективного отображения $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$M(x, y) = f^{-1} \left(\frac{f(x) + f(y)}{2} \right) \quad (x, y \in I).$$

Функцию $g: I \rightarrow I$ называют *M-аффинной*, если

$$g(M(x, y)) = M(g(x), g(y)) \quad (x, y \in I),$$

и *f-аффинной*, если для каких-либо $A \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(g(x)) = Af(x) + a \quad (x \in I).$$

Найдите условие на $f(I)$, необходимое и достаточное для того, чтобы все M -аффинные функции были f -аффинны.

13. Найдите все решения $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ уравнения

$$g \left(\frac{2xy}{x+y} \right) = \frac{2g(x)g(y)}{g(x) + g(y)} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

14. Найдите все решения $g: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$g(x)g(y) = g((xy)^{1/2})^2 \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

15*. Пусть I — непустое открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ ($n > 1$). Пусть при этом $f: I \rightarrow I$ — гомеоморфизм; положим

$$M(x, y) = f^{-1} \left(\frac{f(x) + f(y)}{2} \right).$$

Найдите условие на I , необходимое и достаточное для того, чтобы все решения $g: I \rightarrow I$ уравнения

$$g(M(x, y)) = M(g(x), g(y)) \quad (x, y \in I)$$

имели вид

$$g(x) = Af(x) + a \quad (x \in I),$$

где A — матрица $n \times n$ и $a \in \mathbb{R}^n$.

16. Найдите все решения $f: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ уравнения

$$F\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = \frac{F(x) + F(y)}{2} \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

17*. Найдите все решения $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ уравнения

$$F((xy)^{1/2}) = \frac{F(x) + F(y)}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

18. Найдите все решения $g: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ уравнения

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{2g(x)g(y)}{g(x) + g(y)} \quad (x, y \in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

19. В предложении 9 заменим $\mathbb{R}$ каким-либо кольцом R . При каком ограничении на R предложение останется верным?

20. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — вещественное нормированное пространство, отображение $A: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ имеет вид

$$A(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$

где функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ строго возрастает, непрерывна и $f(0) = 0$. Пусть $M: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — некоторое квазиарифметическое среднее:

$$M(x, y) = g^{-1}\left(\frac{g(x) + g(y)}{2}\right),$$

где функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ строго монотонна и непрерывна. Допустим, что

$$M(\|u + v\|^2, \|u - v\|^2) = A(\|u\|^2, \|v\|^2) \quad \text{при всех } u, v \in E.$$

Покажите, что норма $\|\cdot\|$ порождена внутренним произведением.

21. (См. Aczél, 1984d.) Найдите все решения уравнения (см. (6))

$$f(xy) = f(x)g(y) + h(y)$$

(i) на $\mathbb{R}_+^2$; (ii) на $[1, \infty]^2$; (iii) на I^2 , где I — промежуток в $\mathbb{R}$, содержащий 1.

22*. (Young, 1987; Aczél, 1987a,b.) Пусть полезность $u(x)$ дохода x является вещественнозначной непрерывной функцией, определённой: (i) на $I = \mathbb{R}_+$, (ii) на $I = [1, \infty[$. Для обоих случаев определите все непрерывные функции $u: I \rightarrow \mathbb{R}$, которые не являются константами и обладают следующим свойством: «равенство потерь» (скажем, при уменьшении дохода в результате уплаты налогов) «масштабно-инвариантно», т. е.

$$u(x) - u(y) = u(x') - u(y') \Rightarrow u(rx) - u(ry) = u(rx') - u(ry')$$

для всех $x, y, x', y' \in I, r \in \mathbb{R}$.

Глава 16

СНОВА ОБ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ КОШИ. ПРИЛОЖЕНИЯ К АДДИТИВНЫМ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫМ ФУНКЦИЯМ И ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

Эта глава полностью посвящена условным уравнениям Коши, которые были введены в гл. 6 и уже изучались в гл. 7. В § 1, используя теорему о неподвижной точке, а также отношение порядка на $\mathbb{R}$, мы устанавливаем (при сильных условиях регулярности на неизвестную функцию) обильность (в смысле гл. 7) некоторых достаточно «узких» множеств. В § 2, 3 мы обращаемся к аддитивной теории чисел, используя декомпозицию групп. В § 4 аналогичное уравнение находит применение в теории информации для определения средней длины кодовых слов. В двух последних параграфах мы возвращаемся к аддитивной теории чисел и доказываем ключевой результат, который затем обобщаем в различных направлениях: логарифмы — единственные монотонные функции на множестве целых чисел, переводящие произведение в сумму.

16.1. Продолжения уравнения Коши с кривых

До сих пор мы рассматривали условные уравнения Коши на достаточно «больших» подмножествах Z (см. гл. 6, 7). Мы можем перейти и к гораздо меньшим подмножествам, если наложим дополнительные условия регулярности на f . Типичный результат получается, если в качестве Z взять некоторую кривую на плоскости (Dhombres, 1979, р. 3.32–3.37). Напомним (см. § 7.1), что множество $Z \subset \mathbb{R}^2$ обильно относительно некоторого класса функций, если ограничение уравнения Коши с $\mathbb{R}^2$ на Z не меняет ни вида, ни области определения его общего решения в этом классе.

Теорема 1. Пусть функции $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, причём $h(0) = g(0) = 0$, $g(x)h(x) > 0$ при $x \neq 0$ и отображение $h + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является биекцией. Тогда кривая

$$Z = C_{g,h} = \{(g(x), h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

обильна относительно класса всех функций, дифференцируемых в нуле.

Доказательство. Условное уравнение Коши относительно $C_{g,h}$ имеет вид

$$f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Рассмотрим биекцию $H := g + h$ и положим $y = H(x)$:

$$f(y) = f(g[H^{-1}(y)]) + f(y - g[H^{-1}(y)]) \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Будет удобно привести (2) к виду, несколько похожему на уравнение Иенсена (15.19). Положим

$$G(y) = g(H^{-1}(y)), \quad F(y) = \begin{cases} f(y)/y & (y \neq 0), \\ f'(0) & (y = 0) \end{cases}$$

(напомним, что от функции f требуется дифференцируемость в нуле, причём ввиду (1) $f(0) = 0$). Тогда

$$yF'(y) = G(y)F[G(y)] + [y - G(y)]F[y - G(y)].$$

Положим $\alpha(y) = G(y)/y$ при $y \neq 0$, $\alpha(0) = 1$:

$$F(y) = \alpha(y)F[G(y)] + [1 - \alpha(y)]F[y - G(y)]^1. \quad (3)$$

Отсюда вытекают следующие факты относительно G и α .

Если $H(z) > 0$, то при наших предположениях $0 < g(z) < H(z)$, откуда $0 < G(y) < y$ при всех $y > 0$. Аналогично, $y < G(y) < 0$ при всех $y < 0$. Таким образом, $0 < \alpha(y) < 1$ при $y \neq 0$, и по определению $\alpha(0) = 1$. Мы видим, что $G(y) = y$, т.е. $\alpha(y) = 1$, если и только если $y = 0$. Значение $F(0) = f'(0)$ выбрано таким образом, что функция F непрерывна в нуле; так как $\alpha(0) = 1$, то (3) выполнено и при $y = 0$. Теперь теорема 1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. Пусть имеются отображения $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, причём $0 \leq \alpha(y) \leq 1$, отображение G непрерывно и выполнены условия

$$0 < G(y) < y \quad (y > 0),$$

$$0 > G(y) > y \quad (y < 0).$$

Тогда любое решение $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (3), непрерывное в нуле, является константой.

Доказательство представляет собой нетрудную «игру» между непрерывностью и подобием выпуклости, которое выражено равенством (3) (величина $F(y)$ всегда принадлежит отрезку между $F(G(y))$ и $F(y - G(y))$). Возьмём произвольное положительное y_0 . Построим последовательность $\{y_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) по следующему правилу. Если y_n уже известно, то y_{n+1} принимается равным либо $G(y_n)$, либо $y_n - G(y_n)$, причём должно выполняться неравенство $F(y_{n+1}) \leq F(y_n)$.

Построим также последовательность $\{y'_n\}$ по противоположному правилу. Именно, положим $y'_0 = y_0$. Если y'_n известно, то y'_{n+1} принимается равным одному из чисел $G(y'_n)$, $y'_n - G(y'_n)$, причём должно выполняться неравенство $F(y'_{n+1}) \geq F(y'_n)$. Последовательность $\{y_n\}$ не возрастает и ограничена снизу нулём:

$$0 \leq y_{n+1} \leq \max(G(y_n), y_n - G(y_n)) \leq y_n.$$

То же верно для $\{y'_n\}$. Последовательность $\{y_n\}$ имеет предел y_∞ , ввиду непрерывности функции G удовлетворяющий неравенствам

$$y_\infty \leq \max(G(y_\infty), y_\infty - G(y_\infty)) \leq y_\infty.$$

Поэтому либо $y_\infty = G(y_\infty)$, либо $G(y_\infty) = 0$, и в силу условия леммы получаем в обоих случаях $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty = 0$. Точно так же и предел последовательности $\{y'_n\}$ равен 0. Поскольку

$$F(y_n) \leq F(y_0) \leq F(y'_n),$$

а последовательности $\{F(y_n)\}$, $\{F(y'_n)\}$ сходятся к $F(0)$ в силу непрерывности функции F в нуле, то $F(y_0) = F(0)$. Так как y_0 выбрано на $\mathbb{R}_+$ произвольно, то функция F постоянна на этом множестве. Аналогичное рассуждение можно применить и при $y_0 < 0$, используя неравенство $y_n \leq \min(G(y_n), y_n - G(y_n)) \leq y_{n+1} < 0$. Лемма 2 доказана, а вместе с ней и теорема 1. ■

¹⁾ В силу условия теоремы имеем $G(0) = 0$.

Следствие 3. Все решения функционального уравнения

$$f(2x) = f(x + \sin x) + f(x - \sin x), \quad (4)$$

дифференцируемые в нуле, имеют вид $f(x) = ax$ (константа a произвольна). ■

В связи с доказательством леммы 2 в работе Zdun, 1972 получено

Следствие 4. Пусть Z — график возрастающей непрерывной функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, причём $h(0) = 0$. Тогда множество Z обильно относительно класса всех функций, дифференцируемых в нуле.

Иначе говоря, при перечисленных условиях все решения уравнения

$$f(x + h(x)) = f(x) + f(h(x)), \quad (5)$$

дифференцируемые в нуле, имеют вид $f(x) = ax$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно, чтобы условия теоремы 1 выполнялись для $g(x) = x$. Нужно показать, что отображение $x \mapsto x + h(x)$ является непрерывной биекцией $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Но $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + h(x)) = -\infty$, и, аналогично, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + h(x)) = \infty$. При этом функция $x \mapsto x + h(x)$ возрастает и непрерывна. ■

Кривые типа $C_{g,h}$ из теоремы 1 не очень осциллируют, и возникает желание найти хотя бы регулярные решения уравнения (5) для непрерывных функций h более общего вида, и не только возрастающих. Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ конус $C_1 = \{x = y = 0 \vee 0 < y < -x \vee 0 > y > -x\}$ (см. рис. 13).

Теорема 5. Если график Z непрерывной функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(0) = 0$, содержится в конусе C_1 ,

то множество Z обильно относительно класса нечётных функций, дифференцируемых в нуле.

Доказательство. Положив $H(x) = -h(x)$, можно записать (5) в виде

$$f(x) = f(x - H(x)) - f(-H(x)) = f(x - H(x)) + f(H(x)).$$

Тем же способом, что в доказательстве теоремы 1, можно свести это уравнение к (3), используя условие $Z \subset C_1$. Остаётся применить лемму 2. ■

Разумеется, в теореме 5 можно заменить конус C_1 симметричным ему относительно прямой $y = x$.

Дифференцируемость функции f в нуле в теоремах 1 и 5 существенна. Если потребовать от f лишь непрерывность, то общее решение уравнений типа (1) и (5) будет зависеть от произвольной непрерывной функции, и Z не будет обильным относительно класса непрерывных функций. Покажем это на простейшем примере. Положим $h(x) = x$ в уравнении (5). Тогда

$$f(2x) = 2f(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (6)$$

Пусть ϕ — непрерывная вещественнозначная функция на отрезке $[1/2, 1]$, причём $2\phi(1/2) = \phi(1)$. Положим

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = \phi(x) \quad \text{при } x \in]1/2, 1],$$

$$f(x) = 2^n \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{при } x \in]2^{n-1}, 2^n],$$

$$f(x) = 2^{-n} \phi(2^n x) \quad \text{при } x \in]2^{-n-1}, 2^{-n}] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

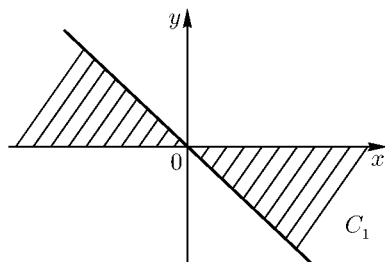


Рис. 13

Функция f в области $[0, \infty[$ удовлетворяет условию (6) и непрерывна. Например, в точке 1 имеем

$$f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 2\phi\left(\frac{x}{2}\right) = 2\phi\left(\frac{1}{2}+\right) = 2\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \phi(1) = f(1) = f(1-).$$

Что касается точки 0, то пусть $M = \max_{x \in [1/2, 1]} |\phi(x)|$; тогда $|f(x)| \leq 2Mx$ при $x > 0$, откуда $f(0+) = 0 = f(0)$. Задав теперь на отрезке $[-1, -1/2]$ непрерывную функцию ψ , подчинённую условию $2\psi(-1/2) = \psi(-1)$, можно построить непрерывное решение уравнения (6), зависящее от почти произвольных непрерывных функций ϕ и ψ . Однако если f дифференцируема в нуле, то легко получить непосредственно или как следствие теоремы 1, что $\psi(x) = \phi(x) = ax$ для некоторой константы $a \in \mathbb{R}$.

До сих пор открыт вопрос, каковы решения уравнения (5) в предположении лишь непрерывности, но с условием $h = f$:

$$f(x + f(x)) = f(x) + f(f(x)) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (7)$$

Имеются решения вида $x \mapsto \sup(0, \alpha x)$, $x \mapsto \inf(0, \alpha x)$. Известны и все непрерывные идемпотентные ($f[f(x)] \equiv f(x)$) решения (см. § 19.3, в частности (19.41)). В работе Forti, 1983 установлена также

Теорема 6. Все непрерывные решения уравнения (7), дифференцируемые в нуле, являются линейными функциями: $f(x) = ax$.

Доказательство опирается на геометрическую интерпретацию уравнения (7)

(см. рис. 14). Положим $\phi(x) = f(x)/x$ при $x \neq 0$, $\phi(0) = f'(0)$. Тогда функция ϕ непрерывна на $\mathbb{R}$. При $t \neq 0$ прямая, соединяющая начало координат с точкой $M_1 = (t, f(t))$, параллельна прямой, соединяющей $M_2 = (t + f(t), f(t + f(t)))$ и $M_3 = (f(t), f(f(t)))$, так как

$$\frac{f(t + f(t)) - f(f(t))}{t + f(t) - f(t)} = \frac{f(t)}{t}.$$

Отсюда вытекают неравенства между наклонами прямых OM_1 , OM_2 и OM_3 , равными $\phi(t)$, $\phi(t + f(t))$, $\phi(f(t))$ соответственно¹⁾. С помощью этих неравенств ниже доказана

Лемма 7. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное решение уравнения (7), дифференцируемое в нуле. Пусть, далее, $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, $x + f(x) \neq 0$, причём если $(x + f(x))/x < 0$, то $(-x + f(-x))/(-x) \leq 0$. Положим

$$I_x = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 < |t| < |x|\}; \quad \phi(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Тогда существуют $y, z \in I_x$, такие что

$$\phi(y) \leq \phi(x) \leq \phi(z).$$

¹⁾ Рассмотрим попарные разности величин ϕ . С учётом (7) получаем, что если t и $f(t)$ одного знака, то $\phi(t + f(t))$ лежит между $\phi(t)$ и $\phi(f(t))$; если t и $t + f(t)$ одного знака, а $f(t)$ — другого, то $\phi(t)$ лежит между $\phi(f(t))$ и $\phi(t + f(t))$; если же t одного знака, а $f(t)$ и $t + f(t)$ — другого, то $\phi(f(t))$ лежит между $\phi(t)$ и $\phi(t + f(t))$.

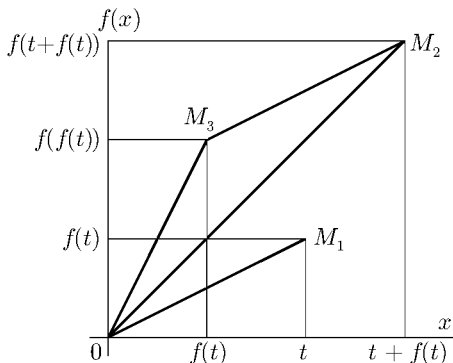


Рис. 14

Доказательство. Положим

$$I'_x = \{t \mid t \in I_x, tx > 0\}.$$

Пусть существует $t \in I'_x$, для которого $t + f(t) = x$. Тогда $f(t) \in I'_x$. Ввиду параллельности прямых, о которой говорилось выше ¹⁾, $\phi(x)$ лежит между $\phi(t)$ и $\phi(f(t))$. В зависимости от их значений следует взять либо $y = t, z = f(t)$, либо $y = f(t), z = t$, как видно из рис. 14 (для случая $x > 0$).

Если же при всех $t \in I'_x$ мы имеем $t + f(t) \neq x$, то $t + f(t)$ остаётся с той же стороны от x , что и 0, поскольку функция f непрерывна и $f(0) = 0$ ²⁾. Поэтому x и $f(x)$ имеют противоположные знаки (по условию $f(x) \neq 0$), и $[x + f(x)]/x < 1$. Возможны два случая.

Если $[x + f(x)]/x > 0$, то $x + f(x) \in I'_x, f(x) \in I_x$. В силу упомянутой параллельности $\phi(x)$ лежит между $\phi(x + f(x))$ и $\phi(f(x))$. В зависимости от их значений следует взять либо $y = x + f(x), z = f(x)$, либо $y = f(x), z = x + f(x)$.

Пусть теперь $[x + f(x)]/x < 0$. В условии леммы 7 предполагается, что в этом случае точка x лежит между 0 и $f(-x)$. Так как функция f непрерывна и $f(0) = 0$, то по теореме о промежуточном значении найдётся $t \in I' - x$, для которого $f(t) = x$. Но $t + f(t) = t + x \in I'_x$. Таким образом, t и $t + f(t)$ принадлежат I_x . В силу всё той же параллельности $\phi(x)$ = $\phi(f(t))$ лежит между $\phi(t + f(t))$ и $\phi(t)$, которые могут служить в качестве искомым y и z . Лемма 7 доказана. ■

Продолжим *доказательство теоремы 6*. Из (7) вытекает, что $f(0) = 0$. Вначале рассмотрим случай, когда $f'(0) \neq 0, -1$. Пусть B — множество всех положительных чисел b со следующими свойствами.

Для всех $x \neq 0$ из $[-b, b]$ верно, что $f(x) \neq 0, x + f(x) \neq 0$, и если для одного из таких x справедливо неравенство $[x + f(x)]/x < 0$, то оно справедливо и для всех таких x .

Поскольку f имеет производную в нуле и эта производная не равна 0 или -1 , то существует $\varepsilon > 0$, такое что B содержит $]0, \varepsilon]$. Покажем, что если $b \in B$, то $f(x) = xf'(0)$ для всех $x \in [-b, b]$. Пусть $x \in [-b, b], x \neq 0$. Определим Y как множество всех таких $y \neq 0$ в $[-b, b]$, что

$$\phi(y) \leq \phi(x).$$

В силу леммы 7 множество Y непусто. Покажем, что 0 — точка накопления для Y . В противном случае пусть $c = |\inf Y| > 0$. Так как функция f непрерывна, то $\phi(c) \leq \phi(x)$. В силу леммы 7 существует $y \in Y$, для которого $|y| < c$, но это противоречит определению c .

Поскольку нуль является точкой накопления для Y , а функция ϕ непрерывна в нуле, то

$$\phi(x) \geq \lim_{\substack{y \in Y \\ y \rightarrow 0}} \phi(y) = f'(0).$$

Определим теперь Z как множество всех $z \neq 0$ из $[-b, b]$, для которых $\phi(z) \geq \phi(x)$. Аналогично предыдущему получаем

$$\phi(x) \leq \lim_{\substack{z \in Z \\ z \rightarrow 0}} \phi(z) = f'(0).$$

Следовательно, $\phi(x) = f'(0), f(x) = f'(0)x$ для всех $x \in [-b, b]$.

¹⁾ См. сноску перед леммой 7.

²⁾ Положим $x = 0$ в (7).

Докажем теперь, что $B = \mathbb{R}_+$, откуда следует теорема 6 для случая $f'(0) \neq 0, -1$. Предположим, что, наоборот, $\bar{b} = \sup_{b \in B} b < \infty$. Тогда для всех $x \in [-\bar{b}, \bar{b}]$ в силу непрерывности функции f имеем $f(x) = f'(0)x$. Найдётся положительное η , для которого $\bar{b} + \eta \in B$ ¹⁾. Это противоречит определению $\bar{b}$, и потому $B = \mathbb{R}_+$, как и утверждалось.

Пусть теперь $f'(0) = 0$. Определим B' как множество всех положительных чисел b со следующими свойствами.

Для всех $x \neq 0$ в $[-b, b]$ верно, что $x + f(x) \neq 0$, и если $[x + f(x)]/x < 0$ для одного из таких x , то это верно и для всех таких x .

Аналогично предыдущему доказывается, что B' непусто. Пусть для некоторого $x_0 \in [-b, b]$ мы имеем $f(x_0) \neq 0$. Определим Y как множество всех таких $y \neq 0$ из $[-b, b]$, что $\phi(y) \leq \phi(x_0)$. В силу леммы 7 множество Y непусто. Если $\bar{Y} \cap \ker f \neq \emptyset$, то $\phi(x_0) \geq 0$. В противном случае получаем, как и выше, что 0 — предельная точка для Y , откуда снова $\phi(x_0) \geq 0$. Используя теперь Z (см. выше) вместо Y , находим, что $\phi(x_0) \leq 0$. Значит, $\phi(x_0) = 0$, что противоречит выбору x_0 . Поэтому $f(x) = 0$ для всех $x \in [-b, b]$, если $b \in B'$. Как и для B получаем, что B' не ограничено. Поэтому $B' = \mathbb{R}_+$ и $f = 0$ на $\mathbb{R}$.

Если, наконец, $f'(0) = -1$, то определим B'' как множество всех таких положительных b , что $|[x + f(x)]/x| < 1/2$ для всех $x \neq 0$ из $[-b, b]$. Множество B'' непусто, и если $x_0 \in [-b, b]$, где $b \in B''$, то $f(x_0) \neq 0$. Если при этом $[f(x_0) + x_0]/x_0 > 0$, то в силу леммы 7 найдётся $z \in I_x$, для которого

$$\phi(z) \geq \phi(x_0).$$

Пусть Z , как и выше, — множество всех $z \neq 0$ из $[-b, b]$, таких что $\phi(z) \geq \phi(x_0)$. Если $z \in Z$, то неравенство $[f(z) + z]/z < 0$ невозможно, поскольку тогда $-1 > \phi(z) > \phi(x_0) > -1$ — противоречие. С учётом леммы 7 получаем, что 0 — предельная точка для Z и потому $\phi(x_0) \leq -1$, что противоречит неравенству $[f(x_0) + x_0]/x_0 > 0$. Значит, для всех $x \in [-b, b]$ верно, что $[f(x) + x]/x \leq 0$. Мы можем применить лемму 7 и получить, как и выше, что если $x \in [-b, b]$, то $f(x) = -x$. В силу определения B'' и непрерывности функции f множество B'' не ограничено и $f(x) = -x$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Теорема 6 доказана. ■

Утверждение теоремы 6 можно сформулировать и таким образом. Обозначим через $\mathcal{Z}$ соответствие между функцией $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и её графиком. Тогда $\mathcal{Z}$ аддитивно расширяемо (см. § 7.1) относительно класса непрерывных функций, дифференцируемых в нуле.

Метод, применённый в доказательстве теоремы 6, приводит также к некоторым результатам, которые сходны с теоремой 1, однако при этом накладываются менее жёсткие условия на g и h , но более жёсткие на класс функций f (существует $f'(0)$, причём функция f непрерывна в окрестности нуля; см. упр. 9 и 10).

16.2. Условия цилиндрического типа

Обратимся теперь к другому типу условных уравнений Коши, а именно к так называемому цилиндрическому случаю (Dhombres–Ger, 1978). В этом и следующем параграфе мы используем некоторые понятия из теории групп (подъём, канонический эпиморфизм), а также из теории меры и топологии (мера Лебега, свойство Бэра).

Предложение 8. Пусть Y — непустое подмножество абелевой группы G , а G_0 — порождённая им подгруппа. Далее, пусть F — абелева группа. Отображе-

¹⁾ Так как $f'(0) \neq -1$, то неравенство $x + f(x) \neq 0$ справедливо в точке $\bar{b}$, а по непрерывности и в некоторой её окрестности. Дальнейшее очевидно.

ние $f: G \rightarrow F$ является решением условного уравнения Коши относительно $Z = G \times Y$, т. е.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x \in G, y \in Y), \quad (8)$$

если и только если f имеет вид

$$f(x) = g(x - \xi[\pi(x)]) + h(\pi(x)), \quad (9)$$

где для $h: G/G_0 \rightarrow F$ выполнено равенство $h(0) = 0$, функция $g: G_0 \rightarrow F$ аддитивна, $\xi: G/G_0 \rightarrow G$ — подъём относительно G_0 с условием $\xi(0) = 0$, а $\pi: G \rightarrow G/G_0$ — канонический эпиморфизм.

Доказательство. Напомним, что отображение $\xi: G/G_0 \rightarrow G$ называется подъёмом, если $\pi \circ \xi$ — тождественное отображение на G/G_0 . Вначале пусть отображение f имеет вид (9) с указанными свойствами. Если $x \in G, y \in Y$, то

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g(x+y - \xi[\pi(x)]) + h(\pi(x)) = g(x - \xi[\pi(x)]) + g(y) + h(\pi(x)) = \\ &= f(x) + g(y) = f(x) + g(y - \xi[\pi(y)]) + h(\pi(y)) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Обратно, пусть $f: G \rightarrow F$ — решение уравнения (8), иначе говоря $(G \times Y)$ -аддитивная функция. Её ограничение $g: G_0 \rightarrow F$ аддитивно на G_0 . Рассмотрим множество H всех таких $y \in G$, что

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

для всех $x \in G$. Покажем, что H — подгруппа (которая содержит G_0)¹⁾. Возьмём $y \in Y$ и положим в уравнении (8) $x = 0$. Мы видим, что $f(y) = f(0) + f(y)$, т. е. $f(0) = 0$. Значит, $0 \in H$. Если теперь $y \in H$, то $0 = f(-y+y) = f(-y) + f(y)$, откуда $f(-y) = -f(y)$. Для любого $x \in G$ имеем

$$f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y),$$

откуда

$$f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = f(x - y).$$

Поэтому $-y \in H$. Если $y_1, y_2 \in H$, то

$$f(x+y_1+y_2) = f(x+y_1) + f(y_2) = f(x) + f(y_1) + f(y_2) = f(x) + f(y_1+y_2),$$

т. е. $y_1+y_2 \in H$.

Пусть теперь $\xi: G/G_0$ — некоторый подъём, причём $\xi(0) = 0$. Поскольку $x - \xi[\pi(x)]$ содержится в G_0 , а потому и в H , то

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\xi[\pi(x)]) + f(x - \xi[\pi(x)]), \\ f(x) &= g(x - \xi[\pi(x)]) + f(\xi[\pi(x)]) \end{aligned} \quad (10)$$

(напомним, что g обозначает ограничение функции f на G_0). Определим $h: G/G_0 \rightarrow F$, положив

$$h(\tilde{x}) = f(\xi(\tilde{x})) \quad (\tilde{x} \in G/G_0).$$

Тогда $h(0) = f(\xi(0)) = f(0) = 0$, а из (10) вытекает (9). Предложение 8 доказано. ■

Замечание. Уравнение (8) — пример функционального уравнения цилиндрического типа. Если некоторый подъём $\xi: G/G_0 \rightarrow F$ является гомоморфизмом, то абелеву группу G можно отождествить с прямой суммой $G_0 \oplus (G/G_0)$. Тогда любой элемент $x \in G$ можно представить как

$$x' \oplus x'',$$

¹⁾ Поскольку $H \supset Y$ в силу (8).

где $x' \in G_0$, $x'' \in G/G_0$, и общее решение $f: G \rightarrow F$ уравнения (8) записывается в виде

$$f(x) = g(x') + h(x''),$$

где отображение $g: G_0 \rightarrow F$ аддитивно, а отображение $h: G/G_0 \rightarrow F$ удовлетворяет условию $h(0) = 0$.

Следствие 9. Пусть $Y \subset \mathbb{R}$ — подмножество с положительной мерой Лебега. Тогда множество $\mathbb{R} \times Y$ обильно.

Доказательство. В силу теоремы 2.6 подгруппа, которую порождает Y , совпадает с $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{R}/G_0$ сводится к точке 0, $\xi(0) = 0$ и $h(0) = 0$. В силу предложения 8 имеем $f = g$. Поскольку функция g аддитивна, то такова и f . ■

Следствие 9 обобщается на любую локально компактную связную топологическую группу, если положительную меру Лебега заменить на ненулевую меру Хаара (см. упр. 3).

Можно также заменить условие, касающееся меры множества Y , на топологическое. Напомним некоторые классические определения. *Тощим подмножеством* топологического пространства называется счётное объединение подмножеств, замыкания которых имеют пустую внутренность. Подмножество топологического пространства обладает *свойством Бэра*, если пересечение его дополнения с некоторым непустым открытым множеством является тощим.

Теорема 10. Пусть G — связная локально компактная абелева группа, F — абелева группа, подмножество $Y \subset G$ обладает свойством Бэра и не является тощим. Тогда любое отображение $f: G \rightarrow F$, удовлетворяющее условию

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x \in G, y \in Y),$$

является аддитивным.

Иначе говоря (§ 7.1), множество $G \times Y$ расширяемо.

Доказательство. По условию существует непустое открытое множество $\mathcal{O} \subset G$, такое что $\mathcal{O} \cap CY$ является тощим. Пусть $x \in \mathcal{O}$, $\mathcal{V} = \mathcal{O} - x = \{y - x \mid y \in \mathcal{O}\}$, $Z = Y - x$. Ясно, что $\mathcal{V}$ является окрестностью нуля. Для произвольного $t \in \mathcal{V}$ положим $\mathcal{V}_t = \mathcal{V} \cap (t - \mathcal{V})$. Это множество открыто, поскольку открыто $\mathcal{V}$, и непусто, так как $t \in \mathcal{V}_t$. Из соотношений

$$\mathcal{V}_t \cap CZ \subset \mathcal{V} \cap CZ = (\mathcal{O} \cap CY) - x,$$

$$\mathcal{V}_t \cap C(t - Z) \subset (t - \mathcal{V}) \cap (t - CZ) = t - (\mathcal{V} \cap CZ)$$

следует, что множества в левой части являются тощими. Поэтому тощим является и их объединение, равное $\mathcal{V}_t \cap C(Z \cap (t - Z))$.

Если установлено, что множество $\mathcal{V}_t$ не может быть тощим, то не может быть тощим и $\mathcal{V}_t \cap (Z \cap (t - Z))$. Отсюда вытекает, что множество $Z \cap (t - Z)$ непусто. Формально последнее утверждение гораздо слабее, но только оно и потребуется для доказательства теоремы 10. Действительно, тогда для любого $t \in \mathcal{V}$ существуют $z_0, y_0 \in Z$, такие что

$$y_0 = t - z_0.$$

Используя представление $y_0 = -x + y$, $z_0 = -x + z$ ($y, z \in Y$), получаем: $t + 2x = y + z$. Отсюда $Y + Y \supset \mathcal{V} + 2x$. Значит, $Y + Y$ содержит непустое открытое подмножество, и потому подгруппа G_0 , натянутая на Y , открыта. Но она и замкнута: если x принадлежит её замыканию, то существует $y \in G_0$, для которого $x - y \in G_0$, так как G_0 является окрестностью нуля. Тогда $x = (x - y) + y \in G_0$, т.е. $G_0 = \overline{G_0}$. Но по условию группа G связна, и потому $G_0 = G$. Как и в доказательстве следствия 9, мы заключаем, что функция f аддитивна.

Осталось доказать, что множество $\mathcal{V}_t$ не является тощим. Это следует из общего результата Бэра, который мы докажем для полноты изложения. ■

Лемма 11. *Непустое открытое подмножество локально компактного пространства G не может быть тощим.*

Доказательство. Нужно показать, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ не может покрывать непустое открытое множество, если множества $\bar{A}_n$ ($n \geq 1$) имеют пустую внутренность. В этом случае множества $\mathcal{O}_n = \mathcal{C}\bar{A}_n$ открыты и плотны в G . Положим $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$. Нам достаточно показать, что X плотно в G .

Пусть $\mathcal{O}$ — непустое открытое подмножество в G . Покажем, что $X \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Положим $\mathcal{V}_0 = \mathcal{O}$. По индукции пусть $\mathcal{V}_n$ ($n > 0$) — непустое открытое множество, замыкание которого компактно и содержится в множестве $\mathcal{V}_{n-1} \cap \mathcal{O}_n$ (непустом, так как $\mathcal{O}_n$ плотно в G). Такие множества $\mathcal{V}_n$ найдутся при всех n ввиду локальной компактности пространства G . Так как их замыкания компактны, множество $\mathcal{V} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{V}}_n$ непусто. При этом $\emptyset \neq \mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}}_n \subset \mathcal{V}_{n-1} \subset \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_{n-1}$. Как следствие, $\mathcal{O} \cap X \neq \emptyset$. ■

В оставшейся части главы мы рассматриваем уравнения для функций, применяемых в теории чисел, и используем некоторые методы из первых двух параграфов.

16.3. Аддитивные теоретико-числовые функции и связанные с ними уравнения

В теории чисел уже давно применяются *аддитивные теоретико-числовые функции*, т. е. такие функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условному функциональному уравнению

$$f(mn) = f(m) + f(n), \quad \text{если } m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1. \quad (11)$$

Характерным примером служит количество простых делителей натурального числа (в частности, оно равно 1 для простого числа). Можно построить семейство решений уравнения (11) следующим образом: значения функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ на простых числах зададим произвольно и положим $f(1) = 0$. Каждое натуральное число n однозначно представляется в виде произведения степеней простых чисел:

$$n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m},$$

что позволяет продолжить функцию f на $\mathbb{N}$:

$$f(n) = k_1 f(p_1) + \dots + k_m f(p_m).$$

Для такой функции выполнено не только (11), но и уравнение

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{при всех } (m, n \in \mathbb{N}). \quad (12)$$

Указанными функциями исчерпываются все решения этого уравнения, называемые *вполне аддитивными теоретико-числовыми функциями*. Множество простых чисел играет здесь ту же роль, что и базис Гамеля для обычного аддитивного уравнения Коши (§ 2.2). Пример функции, равной количеству простых делителей данного числа, показывает, что уравнение (12) имеет меньше решений, чем (11).

Мы ещё более ограничим множество решений, рассматривая лишь те функции $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$f(xn) = f(x) + f(n) \quad \text{при всех } x \in [1, \infty[, n \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

В самом деле, уравнение (13) можно превратить в условное уравнение Коши цилиндрического типа на мультипликативной группе $G = \mathbb{R}_+$ и аддитивной группе $F = \mathbb{R}$. Для этого положим при $x \in \mathbb{R}_+$

$$F(x) := f(nx) - f(n) \quad \text{для некоторого целого } n, \text{ такого что } nx \geq 1.$$

Это определение корректно, так как если $nx \geq 1$ и $mx \geq 1$, то

$$f(nx) + f(m) = f(nmx) = f(mx) + f(n).$$

Поскольку $f(1) = 0$, то $F(x) = f(x)$ для всех $x \geq 1$. При этом $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(xn) = F(x) + F(n) \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Действительно, пусть m — целое, $mx \geq 1$. Тогда

$$F(x) + F(n) = f(mx) - f(m) + f(n), \quad F(xn) = f(mnx) - f(m).$$

Но $f(mnx) = f(mx) + f(n)$ ввиду (13), откуда получаем (14).

Как следствие, можно найти все решения уравнения (13), применяя предложение 8 к решению F уравнения (14) и полагая $G = \mathbb{R}_+$ (с операцией умножения), $Y = \mathbb{N}$, $G_0 = \mathbb{Q}_+$, $F = \mathbb{R}_+$. Большинство этих решений ведёт себя замысловато. В частности, уравнению (13) удовлетворяет ограничение любого (разрывного) решения уравнения $f(xy) = f(x) + f(y)$ (см. (3.1), (3.4)) на луч $[1, \infty[$. (С похожим уравнением мы будем иметь дело в конце следующего параграфа.) Как обычно, можно исключить такие причудливые решения, потребовав от функции некоторой регулярности. В качестве типичного примера приведём следующее рассуждение (хотя прямое доказательство предложения 12 также не представляет труда — см., например: Aczél–Daróczy, 1975, p. 22–23).

Предложение 12. *Монотонная функция $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ является решением условного уравнения Коши (13), если и только если существует вещественная константа α , такая что $f(x) = \alpha \ln x$ при всех $x \in [1, \infty[$.*

Доказательство. Очевидно, функции вида $x \mapsto \alpha \ln x$ являются монотонными решениями уравнения (13). Доказывая обратное, без ограничения общности можно считать функцию f неубывающей (иначе заменим f на $-f$). Заметим, что продолжение F функции f , определённое выше, также монотонно. (Если $0 < x \leq x'$, то существует n , для которого $nx \geq 1$. Тогда $F(nx) = f(nx) - f(n) \leq f(nx') - f(n) = F(x')$, если f не убывает.) Поскольку F удовлетворяет условному уравнению Коши цилиндрического типа, то в силу предложения 8

$$F(x) = g\left(\frac{x}{\xi(\pi(x))}\right) + h(\pi(x)), \quad (15)$$

где $\pi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+/\mathbb{Q}_+$ — канонический эпиморфизм; $\xi: \mathbb{R}_+/\mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — подъём относительно $\mathbb{Q}_+$; $g: \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — гомоморфизм ($g(xy) = g(x) + g(y)$); для отображения $h: \mathbb{R}_+/\mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено условие $g(\xi(\pi(1))) = h(\pi(1))$. Пусть $x = \beta y$, где β рационально, $0 < \beta \leq 1$. Тогда $x \leq y$, $F(x) \leq F(y)$. Поскольку $\pi(x) = \pi(y)$, то

$$g\left(\frac{\beta y}{\xi(\pi(y))}\right) \leq g\left(\frac{y}{\xi(\pi(y))}\right),$$

и так как g — гомоморфизм, то $g(\beta) \leq 0$. Аналогично, $g(\beta) \geq 0$ при рациональных $\beta \geq 1$. Продолжим g на $\mathbb{R}_+$, положив

$$G(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{Q}_+),$$

$$G(x) = \sup_{y < x, y \in \mathbb{Q}_+} g(y) \quad (x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+).$$

Переходя к пределу, получаем для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$G(xy) = G(x) + G(y). \quad (16)$$

Согласно следствию 3.2

$$G(x) = \alpha \ln x \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

с некоторой константой α . Ввиду (15) для всех $x \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$F(x) = \alpha \ln x + h(\pi(x)) - \alpha \ln (\xi[\pi(x)]) := \alpha \ln x + \zeta(\pi(x)).$$

Покажем, что $\zeta(\pi(x)) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$.

В самом деле, пусть $x \neq y$ в $\mathbb{R}_+$, а положительные рациональные числа γ, δ таковы, что $\delta x < y < \gamma x$. Поскольку $\pi(\gamma x) = \pi(x) = \pi(\delta x)$, то

$$F(\gamma x) \geq F(y) \Rightarrow \zeta(\pi(x)) - \zeta(\pi(y)) \geq \alpha \ln \frac{y}{\gamma x},$$

$$F(\delta x) \leq F(y) \Rightarrow \zeta(\pi(x)) - \zeta(\pi(y)) \leq \alpha \ln \frac{y}{\delta x}.$$

Выберем такие последовательности $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{\gamma_n x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y}{\delta_n x} = 1$. Получаем, что

$$\zeta(\pi(x)) = \zeta(\pi(y)).$$

Поскольку $x \neq y$ произвольны в $\mathbb{R}_+$, то величина $\zeta(\pi(x))$ постоянна на $\mathbb{R}_+$. Эта константа равна нулю ввиду (14). Предложение 12 доказано. ■

16.4. Применение: средняя длина кодовых слов

Предложение 12 имеет применение в теории информации (см., например: Acsél-Dagóczy, 1975, р. 145–147). Здесь мы обсудим применение уравнения, сходного с (13), в теории кодирования.

Энтропия Шеннона (5.30) (см. (5.31)) имеет то важное свойство, что она является (точной) нижней гранью средней длины кодовых слов в следующем смысле. Кодовые слова длины $k_1, \dots, k_n$ соответствуют сообщениям, имеющим вероятности (частоты)

$p_1, \dots, p_n$, где $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. Код имеет «алфавит» из D (≥ 2) символов (наиболее

распространены бинарные коды с $D = 2$ и символами 0 и 1). Кодовые слова — это строки из таких символов, а длина слова — количество символов в строке. Код однозначно дешифруется (однозначно декодируется), если по последовательности слов (без разделителей) однозначно восстанавливается последовательность закодированных сообщений. Казалось бы, это условие носит сугубо качественный характер, однако оно равносильно (см., например: Gallager, 1968, р. 47–49) количественному условию — неравенству Крафта

$$\sum_{j=1}^n D^{-k_j} \leq 1 \quad (17)$$

в следующем смысле. Для однозначно дешифруемых кодов неравенство Крафта выполняется. С другой стороны, если (17) выполнено для D и $k_1, \dots, k_n$, то существует однозначно дешифруемый код с D символами и со словами длины $k_1, \dots, k_n$.

Средняя длина кодового слова равна

$$\sum_{j=1}^n p_j k_j, \quad (18)$$

и теорема о кодировании без помех (см., например: Gallager, 1968, р. 51; Aczél-Dagócsy, 1975, р. 46–47) утверждает, что для любого однозначно дешифруемого кода выполняется следующее неравенство между средней длиной слова и энтропией Шеннона:

$$\sum_{j=1}^n p_j k_j \geq - \sum_{j=1}^n p_j \log_D p_j$$

(соответственно в (5.30) нужно взять $c = -1/\ln D$). Далее, для данных $p_1, \dots, p_n$ и D найдутся натуральные числа $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n$, удовлетворяющие неравенству (17), причём

$$\sum_{j=1}^n p_j \tilde{k}_j < - \sum_{j=1}^n p_j \log_D p_j + 1.$$

В работах Rényi (1960, 1965, 1970) введены *энтропии ранга a* :

$$H_n^{(a,D)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \frac{a+1}{a} \log_D \left(\sum_{j=1}^n p_j^{1/(a+1)} \right) \quad (a \neq 0).$$

Это экспоненциальные средние ¹⁾ (см. теорему 15.8) переменных $-\log_D p_j$ с весами p_j и показателями $a/(a+1)$, тогда как энтропии Шеннона — арифметические средние тех же переменных с теми же весами. (На самом деле Реньи использовал основание 2 и показатель $1/(a+1)$ и называл полученную величину энтропией порядка $1/(a+1)$. Вышеприведённая форма более сложна, но и более удобна для наших целей.) Нетрудно показать ²⁾, что энтропия Шеннона получается как предел энтропий ранга a при $a \rightarrow 0$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} H_n^{(a,D)}(p_1, p_2, \dots, p_n) = - \sum_{j=1}^n p_j \log_D p_j.$$

В работе Campbell (1965) доказано, что при $a > -1$ ($a \neq 0$) существует аналог упомянутой теоремы кодирования: для каждого однозначно дешифруемого кода верно неравенство

$$\frac{1}{a} \log_D \left(\sum_{j=1}^n p_j D^{a k_j} \right) \geq H_n^{(a,D)}(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

¹⁾ По основанию D .

²⁾ С помощью соотношений $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ и $\ln x \sim x - 1$ при $x \rightarrow 0$.

причём для данных $p_1, p_2, \dots, p_n$ и D существуют натуральные числа $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_n$, удовлетворяющие условию (17) и такие, что

$$\frac{1}{a} \log_D \left(\sum_{j=1}^n p_j D^{a\tilde{k}_j} \right) < H_n^{(a,D)}(p_1, p_2, \dots, p_n) + 1.$$

Величина в левой части этих неравенств называется *a-средней длиной кодового слова*. Её предел при $a \rightarrow 0$ равен средней длине кодового слова (18).

Можно было бы подумать, что *a-средняя длина слова* введена именно для того, чтобы выполнялись два последних неравенства. На самом деле смысл здесь в другом. Среднюю длину слова (18) обычно стремятся уменьшить (по теореме о кодировании без помех она не может стать меньше энтропии Шеннона, но их разность можно уменьшить до одного бита). Причина в том, что в экономичном коде часто встречающиеся сообщения (с большим p_j) должны иметь короткую кодировку (малое k_j), а длинная кодировка (большое k_j) допустима для редких сообщений (с малым p_j). Это хорошо отражено и в формуле (18), и в *a-средней длине слова*

$$\frac{1}{a} \log_D \left(\sum_{j=1}^n p_j D^{ak_j} \right) \quad (19)$$

при $a > 0$. Однако величина (18) может оставаться приемлемо малой, даже если длина кодировки *очень редких* сообщений *весьма велика*, что неэкономично и часто просто невозможно из-за ограниченной ёмкости кодировщика (см.: Humblet, 1981). В то же время легко видеть, что предел выражения (19) при $a \rightarrow \infty$ равен наибольшему из k_j независимо от p_j , если только $p_j \neq 0$ (Hardy–Littlewood–Pólya, 1934, p. 15). Поэтому при достаточно большом a очень большие k_j будут сильно увеличивать *a-среднюю длину слова* даже в случае малых p_j .

С другой стороны, как (18), так и (19) определяют *квазилинейные средние длины слов*, т. е. имеют вид (см. (15.32) и (17.16))

$$M(p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_n) = \psi^{-1} \left[\sum_{j=1}^n p_j \psi(k_j) \right] \left(\sum_{j=1}^n p_j = 1, p_j \geq 0, k_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, n \right), \quad (20)$$

где функция ψ непрерывна и строго монотонна (в формуле (18) $\psi(x) = x$, а в формуле (19) $\psi(x) = D^{ax}$). Отметим, что в соотношении (20) ψ применяется к натуральным числам, так что, казалось бы, следует потребовать строгой монотонности только на $\mathbb{N}$.

Но функцию ψ^{-1} требуется определить для $\sum_{j=1}^n p_j \psi(k_j)$, а эта величина меняется

непрерывно вместе с p_j . Поэтому функция ψ^{-1} должна быть определена и непрерывна на некотором промежутке. Соответственно мы предполагаем непрерывной функцию $\psi : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Далее, легко проверить, что функции (18) и (19) (при всех a) *аддитивны*, т. е. для соответствующих M выполнено равенство

$$\begin{aligned} M(p_1 q_1, \dots, p_1 q_m, p_2 q_1, \dots, p_n q_m; k_1 + l_1, \dots, k_1 + l_m, k_2 + l_1, \dots, k_n + l_m) = \\ = M(p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_n) + M(q_1, \dots, q_m; l_1, \dots, l_m) \\ \left(\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{i=1}^m q_i = 1; \sum_{j=1}^n D^{-k_j} \leq 1; \sum_{i=1}^m D^{-l_i} \leq 1; p_j \geq 0; q_i \geq 0; \right) \end{aligned}$$

$$k_j, l_i \in \mathbb{N}; \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, m \Big). \quad (21)$$

Это важное свойство означает, что если имеются два независимых множества сообщений (каждое сообщение из одного множества независимо от каждого сообщения из другого множества), а кодирование пар таких сообщений производится простым соединением соответствующих слов, то средняя длина полученных слов равна сумме средних длин слов для этих множеств сообщений. (Легко видеть, что если $\{k_1, \dots, k_n\}$ и $\{l_1, \dots, l_m\}$ удовлетворяют неравенству Крафта (17) с одинаковым D , то это верно и для $\{k_1 + l_1, \dots, k_1 + l_m, \dots, k_n + l_1, \dots, k_n + l_m\}$.) Это свойство позволяет, например, усилить теорему о кодировании без помех, заменив единичную разность между частями неравенства на произвольно малую величину (см., например: Gallager, 1968, p. 51; Aczél-Daróczy, 1975, p. 48–49).

Докажем теперь, что (18) и (19) — единственные аддитивные квазилинейные средние длины слов. В работе Campbell (1966) доказана сходная теорема при более сильных условиях; в данной форме она впервые появилась в статье Aczél, 1974a (см. также Aczél-Daróczy, 1975, p. 165–172).

Теорема 13. Квазилинейная средняя длина слова (20) со строго монотонной и непрерывной функцией ψ удовлетворяет условию аддитивности (21), если и только если она имеет вид

$$\psi(x) = cx + b \quad \text{или} \quad \psi(x) = cD^{ax} + b \quad (x \in [1, \infty]),$$

где a, b, c — произвольные константы с ограничением $a, c \neq 0$, а $D \geq 2$ — фиксированное целое число.

Доказательство. Утверждение «если» легко проверяется. Пусть теперь (20) и (21) выполнены при некоторых m, n ; для простоты возьмём $m = n = 2$. Тогда неравенства Крафта (17) автоматически выполнены, так как $D \geq 2$ и $k_1, k_2, l_1, l_2 \geq 1$. Подставим (20) в (21):

$$\begin{aligned} \psi^{-1}[p_1 q_1 \psi(k_1 + l_1) + p_1 q_2 \psi(k_1 + l_2) + p_2 q_1 \psi(k_2 + l_1) + p_2 q_2 \psi(k_2 + l_2)] = \\ = \psi^{-1}[p_1 \psi(k_1) + p_2 \psi(k_2)] + \psi^{-1}[q_1 \psi(l_1) + q_2 \psi(l_2)] \\ (p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1; \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 0; \quad k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (22)$$

или, в частном случае $l_1 = l_2 = l$,

$$\begin{aligned} \psi^{-1}[p_1 \psi(k_1 + l) + p_2 \psi(k_2 + l)] = \psi^{-1}[p_1 \psi(k_1) + p_2 \psi(k_2)] + l \\ (p_1 + p_2 = 1; \quad p_1, p_2 \geq 0; \quad k_1, k_2, l \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Это уравнение очень напоминает (15.45), но метод решения будет несколько иным, так как значения аргументов для ψ ограничены натуральными числами, зато p_1 переменна. Однако и в доказательствах есть сходство. Временно зафиксировав $l \in \mathbb{N}$, положим

$$\psi_l(x) = \psi(x + l) \quad (x \in [1, \infty])$$

и получим для $p_1 = p$ (и $p_2 = 1 - p$):

$$\begin{aligned} \psi_l^{-1}[p \psi_l(k_1) + (1 - p) \psi_l(k_2)] = \psi^{-1}[p \psi(k_1) + (1 - p) \psi(k_2)] \\ (p \in [0, 1]; \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (23)$$

что напоминает формулу (15.33). Разумеется, функция ψ_l непрерывна и строго монотонна вместе с ψ . В параллель к следствию 15.5 докажем следующий факт.

Лемма 14. *Общее непрерывное и строго монотонное решение $\psi : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (23) имеет вид*

$$\psi_l(x) = A\psi(x) + B \quad (x \in [1, \infty[),$$

где $A \neq 0$, но в остальном A, B — произвольные константы.

Доказательство. Пусть в уравнении (23) $k_2 = 1, k_1 > 1$. Положив

$$a_1 := \psi_l(1), \quad a_2 := \psi_l(k_1) - \psi_l(1) \neq 0,$$

$$b_1 := \psi(1), \quad b_2 := \psi(k_1) - \psi(1) \neq 0,$$

получаем

$$\psi_l^{-1}(a_2 p + a_1) = \psi^{-1}(b_2 p + b_1) \quad (p \in [0, 1]).$$

В силу непрерывности функции ψ_l величина $y = a_2 p + a_1$ пробегает все значения между $\psi_l(1)$ и $\psi_l(k_1)$. Поэтому для любого y из этого промежутка можно записать ¹⁾

$$\psi_l^{-1}(y) = \psi^{-1}(c_2 y + c_1)$$

и для всех $x \in [1, k_1]$

$$\psi_l(x) = A\psi(x) + B.$$

Но k_1 может быть произвольно большим, так что последнее уравнение (аналогичное (15.34)) выполняется для всех $x \geq 1$ ²⁾. Лемма доказана. ■

Чтобы завершить *доказательство теоремы 13*, снова сделаем l переменным. Тогда A и B могут зависеть от l , и так как $\psi_l(x) = \psi(x + l)$, то можно записать

$$\psi(x + l) = A(l)\psi(x) + B(l) \quad (x \in [1, \infty[; l \in \mathbb{N}). \quad (24)$$

Это уравнение напоминает (15.6) (см. доказательство теоремы 15.8), но решение отличается из-за ограничения области определения. Мы используем в одном пункте более сильное уравнение (22), чтобы получить аналоги к (15.17) и (15.18) (это действительно необходимо, как показано в статье: Aczél, 1974a, см. также: Aczél–Daróczy 1975, р. 171–172 и упр. 8).

Возможны два случая.

(i) Если $A(l) \equiv 1$, то для целого $x = k$ имеем

$$\psi(k + l) = \psi(k) + B(l)$$

и ввиду симметрии левой части

$$\psi(k) + B(l) = \psi(l) + B(k).$$

Отсюда $B(l) = \psi(l) + \gamma$, и (24) превращается в

$$\psi(x + l) = \psi(x) + \psi(l) + \gamma \quad (x \in [1, \infty[; l \in \mathbb{N}).$$

Это уравнение напоминает (13).

(ii) Пусть теперь $A(k_0) \neq 1$ для некоторого k_0 . На основании (24) получаем

$$\psi(x + k + l) = A(l)\psi(x + k) + B(l) = A(k)A(l)\psi(x) + A(l)B(k) + B(l).$$

Левая часть снова симметрична по k и l , так что

$$A(l)B(k) + B(l) = A(k)B(l) + B(k).$$

¹⁾ Здесь $c_2 = b_2/a_2, c_1 = b_1 - c_2, A_2 = a_2/b_2, B = -c_1/c_2$.

²⁾ Если A и B зависят от k_1 , то на некотором промежутке мы имеем $A\psi(x) + B = A'\psi(x) + B', A \neq A'$, откуда $\psi(x) = \text{const}$, тогда как ψ строго монотонна.

Положив $k = k_0$, $\delta = B(k_0)/[A(k_0) - 1]$, получаем, что

$$B(l) = \delta A(l) - \delta,$$

и (24) превращается в

$$\psi(x + l) = A(l)[\psi(x) + \delta] - \delta.$$

Положим $x = k \in \mathbb{N}$ и снова используем симметрию:

$$A(l)[\psi(k) + \delta] = \psi(k + l) + \delta = A(k)[\psi(l) + \delta].$$

Так как функция ψ строго монотонна, то можно выбрать k_1 , для которого $\psi(k_1) \neq -\delta$, и тогда

$$A(l) = \alpha[\psi(l) + \delta],$$

где $\alpha = A(k_1)/[\psi(k_1) + \delta]$. Уравнение (24) переходит в следующее:

$$\psi(x + l) = \alpha\psi(x)\psi(l) + \alpha\delta\psi(x) + \alpha\delta\psi(l) + \alpha\delta^2 - \delta.$$

В обоих случаях (i) и (ii) мы получим уравнение вида

$$\psi(x + l) = \alpha\psi(x)\psi(l) + \beta\psi(x) + \beta\psi(l) + \gamma$$

(в первом случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$, во втором $\alpha \neq 0$, $\beta = \alpha\delta$, $\gamma = \alpha\delta^2 - \delta$). Теперь нам потребуется уравнение (22), которое принимает вид

$$\begin{aligned} & \psi^{-1}(\alpha[p_1\psi(k_1) + p_2\psi(k_2)][q_1\psi(l_1) + q_2\psi(l_2)] + \\ & + \beta[p_1\psi(k_1) + p_2\psi(k_2)] + \beta[q_1\psi(l_1) + q_2\psi(l_2)] + \gamma) = \\ & = \psi^{-1}[p_1\psi(k_1) + p_2\psi(k_2)] + \psi^{-1}[q_1\psi(l_1) + q_2\psi(l_2)] \\ & (p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1; \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 0; \quad k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Положив $k_1 = l_1 = 1$, $k_2 = l_2 = n \in \mathbb{N}$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, $q_1 = q$, $q_2 = 1 - q$ и меняя p, q от 0 до 1, получаем, что величины $u = p\psi(1) + (1 - p)\psi(n)$ и $v = q\psi(1) + (1 - q)\psi(n)$ пробегает от $\psi(1)$ до $\psi(n)$. Отсюда

$$\psi^{-1}(\alpha uv + \beta u + \beta v + \gamma) = \psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v) \quad \text{при всех } u, v \in [\psi(1), \psi(n)],$$

и поэтому

$$\psi(x + y) = \alpha\psi(x)\psi(y) + \beta\psi(x) + \beta\psi(y) + \gamma$$

при всех $x, y \in [1, n]$, а так как n можно взять произвольно большим, то и при всех $x \in [1, \infty[$. (Этот приём мы уже использовали в доказательстве леммы 14.)

В случае (i) имеем $\alpha = 0, \beta = 1$, откуда

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in [1, \infty[),$$

где

$$f(x) = \psi(x) + \gamma.$$

В случае (ii) имеем $\alpha \neq 0, \beta = \alpha\delta, \gamma = \alpha\delta^2 - \delta$ и

$$g(x + y) = g(x)g(y) \quad (x, y \in [1, \infty[),$$

где

$$g(x) = \alpha[\psi(x) + \delta]$$

($\alpha \neq 0$, так что функция g строго монотонна). Мы получили условные уравнения Коши в области $Z = [1, \infty[^2$ (во втором случае — экспоненциальное уравнение, но

оно ведёт себя подобно (7.1), так как g нигде не обращается в нуль: из $g(x_0) = 0$ следовало бы $g(x_0 + y) = 0$ вопреки строгой монотонности. В обозначениях § 7.1 здесь $\Pi_1(Z) = \Pi_2(Z) = t(Z)$. Согласно замечанию после (7.12), существуют единственные продолжения функций f, g , удовлетворяющие тем же уравнениям на $\mathbb{R}^2$. Наконец, поскольку f и g монотонны вместе с ψ , то

$$f(x) = cx \quad (c \neq 0),$$

$$g(x) = e^{Cx} \quad (C \neq 0).$$

В первом случае

$$\psi(x) = cx - \gamma,$$

во втором

$$\psi(x) = \frac{1}{\alpha} e^{Cx} - \delta = cD^{ax} + b$$

($c = 1/\alpha \neq 0$, $b = -\delta$, $a = C/\ln D$; D дано в условии). Теорема 13 доказана. ■

Замечание. В случае (i) мы получили уравнение

$$B(x+l) = B(x) + B(l) \quad (x \in [1, \infty[, \quad l \in \mathbb{N}).$$

Оно имеет решения, отличные от $B(x) = cx$ и притом сколь угодно нерегулярные или регулярные (но всё же необычные). Действительно, зададим B произвольно на промежутке $[1, 2[$ и продолжим по формуле

$$B(x) = B(x-k) + kB(1) \quad \text{при } x \in [k+1, k+2[.$$

Легко показать, что этот алгоритм даёт общее решение. Можно даже получить из него общее непрерывное строго монотонное решение, задавая функцию B на промежутке $[1, 2[$ непрерывной, строго монотонной и такой, что $\lim_{x \rightarrow 2-} B(x) = 2B(1)$ (но в остальном произвольной) (см. упр. 8 и Aczél-Daróczy, 1975, p. 171–172).

16.5. Вполне аддитивные теоретико-числовые функции и их обобщения

В предложении 12 уравнение (13) (а в теореме 13 — уравнение Коши) решается для монотонных функций в области цилиндрического типа $Z = [1, \infty[\times \mathbb{N}$. В действительности это множество можно заменить дискретной решёткой $Z = \mathbb{N}^2$ (см. (12)), как доказано в работе Erdős (1946) (если при взаимно простых m, n выполнено нижеприведённое уравнение (25); см. (11) и теорему 17 ниже).

Теорема 15. *Монотонная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению*

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{при всех } m, n \in \mathbb{N}, \quad (25)$$

если и только если существует такая константа α , что $f(n) = \alpha \ln n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Как отмечено выше, такая функция называется *вполне аддитивной теоретико-числовой функцией*.

Существует много доказательств и обобщений теоремы 15 (см., например: упр. 6; Erdős, 1957; Kátai, 1967; Máté, 1967; Wirsing, 1969, 1979, 1980). В этих обобщениях ослабляется условие монотонности и/или уравнение (25) выполняется лишь для взаимно простых m, n . Здесь мы дадим другое обобщение (Dhombres, 1979, P. 4.59–4.68), которое показывает, что конкретное множество $\mathbb{N}$ не играет в теореме 15 существенной роли. Используем терминологию из § 7.1.

Теорема 16. Пусть Γ — подполугруппа аддитивной группы $(\mathbb{R}, +)$. Тогда множество Γ^2 квазирасширяемо относительно класса монотонных функций.

Эта теорема означает, что если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонное решение уравнения

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \Gamma), \quad (26)$$

то существует его монотонное квазипродолжение на всё $\mathbb{R}$. С учётом следствия 2.5 этот факт сводится к существованию таких вещественных чисел α, β , что

$$f(x) = \alpha x + \beta \quad (27)$$

при всех $x \in \Gamma$. Сначала приведём

Вывод теоремы 15 из теоремы 16. В качестве подполугруппы $\Gamma \subset (\mathbb{R}, +)$ возьмём $\ln \mathbb{N} = \{0, \ln 2, \ln 3, \dots\}$, и пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ является монотонным решением уравнения (25). Определим $f_1: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, положив $f_1(\ln n) = f(n)$. Ясно, что функция $f_1: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ аддитивна и монотонна. Значит, $f(n) = f_1(\ln n) = \alpha \ln n + \beta$. Подставив это выражение в (25), получаем, что $\beta = 0$ (то же следует и из условия $0 \in \Gamma$, см. § 7.1). Поэтому $f(n) = \alpha \ln n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Доказательство теоремы 16. Пусть $\Delta = \Gamma - \Gamma = \{z \mid z = x - y, x \in \Gamma, y \in \Gamma\}$. Для монотонной Γ^2 -аддитивной функции $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ определим $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ аналогично формуле (2.4):

$$g(z) = f(x) - f(y), \quad \text{если } z = x - y. \quad (28)$$

Такое определение корректно: если $z = x - y = x' - y'$, где $x, y, x', y' \in \Gamma$, то $x + y' = y + x'$, $f(x) + f(y') = f(x + y') = f(y + x') = f(y) + f(x')$, откуда $g(x - y) = g(x' - y')$.

Если $z = x - y$, $z' = x' - y'$, то, как в теореме 2.1,

$$g(z + z') = f(x + x') - f(y + y') = f(x) + f(x') - f(y) - f(y') = g(z) + g(z'),$$

т. е. функция g является Δ^2 -аддитивной.

Пусть $z > z'$ ($z, z' \in \Delta$). Тогда $x - y > x' - y'$, т. е. $x + y' > y + x'$. Без ограничения общности можно считать функцию f неубывающей. Тогда $f(x + y') \geq f(y + x')$, $g(z) = f(x) - f(y) \geq f(x') - f(y') = g(z')$, т. е. функция g также не убывает на Δ .

Очевидно, что Δ — это подгруппа в $\mathbb{R}$, которую порождает Γ . Вначале предположим, что $\Delta = \mathbb{Z}x_0$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $g(nx_0) = ng(x_0)$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Если $x_0 = 0$, то $g(0) = f(0)$, $\Gamma = \{0\}$, и аддитивным продолжением функции f служит тождественный нуль. Если $x_0 \neq 0$, то $g(x) = \alpha x$ при всех $x \in \Delta$ (здесь $\alpha = g(x_0)/x_0$). Значит, для некоторого x_1 и всех x в Γ верно, что $f(x) = \alpha(x - x_1) + f(x_1) = \alpha x + \beta$. Но функция f аддитивна на Γ , поэтому $\beta = 0$. Следовательно, на Γ , и тем более на $\Gamma + \Gamma$, функция f является ограничением аддитивной монотонной функции.

Пусть теперь $\Delta = \mathbb{Z}x_0 + \mathbb{Z}y_0$, где x_0, y_0 — положительные числа, линейно независимые над $\mathbb{Z}$. Если функция g аддитивна на Δ , то

$$g(nx_0 + my_0) = n\alpha_0 + m\beta_0$$

при всех $n, m \in \mathbb{Z}$, где $\alpha_0 = g(x_0)$, $\beta_0 = g(y_0)$. Поскольку g не убывает, то

$$nx_0 + my_0 \geq 0 \Rightarrow n\alpha_0 + m\beta_0 \geq 0. \quad (29)$$

Так как $x_0, y_0 > 0$, то $\alpha_0, \beta_0 \geq 0$. Легко проверить, что либо $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, либо $\alpha_0, \beta_0 > 0$ ¹⁾. В первом случае $g \equiv 0$, так что квазипродолжение существует. Во вто-

¹⁾ Если, скажем, $\alpha_0 > 0, \beta_0 = 0$, то возьмём такие n, m , что $my_0 > nx_0 > 0$. Тогда $g(nx_0) > 0 = g(my_0)$ вопреки монотонности.

ром случае положим $\alpha = \alpha_0/x_0 > 0$, $\beta = \beta_0/\alpha > 0$. Тогда

$$nx_0 + my_0 \geq 0 \Rightarrow nx_0 + m\beta \geq 0. \quad (30)$$

Покажем, что для любого $a > 0$ найдутся такие $n, m \in \mathbb{Z}$, что $0 < nx_0 - my_0 < a$. Пусть, наоборот, $0 < b = \inf (nx_0 - my_0)$, где инфимум взят по всем $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, таким что $nx_0 - my_0 > 0$. Множество всех целочисленных линейных комбинаций из x_0 и y_0 является подгруппой в $\mathbb{R}$, притом не циклической, поскольку x_0 и y_0 линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Поэтому замыкание этого множества совпадает с $\mathbb{R}$. Выберем такое ε , что $0 < 2\varepsilon < b$. Найдутся $n, m', n' \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, для которых $b \leq nx_0 - my_0 < b + \varepsilon$, $\varepsilon < n'x_0 + m'y_0 < 2\varepsilon$. В силу нашего предположения $m' \geq 0$. Тогда $0 < (n - n')x_0 - (m + m')y_0 < b$, причём $m + m' \in \mathbb{N}$. Это противоречит определению величины b и доказывает наше утверждение. Здесь $\pm x_0$ и $\pm y_0$ играют симметричную роль, поэтому найдутся $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, для которых $0 < nx_0 + my_0 < a$.

Докажем теперь, что при условии (30) $\beta = y_0$. Пусть $\beta > y_0$. Тогда существуют $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, для которых

$$0 < nx_0 - my_0 < \beta - y_0, \quad (31)$$

откуда

$$0 < nx_0 - (m - 1)y_0 < \beta.$$

Из (30) и первого неравенства в (31) следует, что $nx_0 - m\beta \geq 0$, поэтому

$$(m - 1)\beta < (m - 1)y_0. \quad (32)$$

Так как неравенство строгое, то $m \neq 1$, и условие $m \in \mathbb{N}$ противоречит предположению, что $\beta > y_0$. Аналогично получаем (используя величину $nx_0 + my_0$, где $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$), что β не может быть меньше y_0 . Для всех $x \in \Delta$ мы получили равенство $g(x) = \alpha x$, и потому для всех $x \in \Gamma$ и некоторого $\beta \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \alpha x + \beta.$$

Из Γ^2 -аддитивности функции f вытекает, что $\beta = 0$, т.е. теорема доказана и для второго случая.

Для произвольной подгруппы Δ положим $\Lambda = \{z \mid z = x/n, x \in \Delta, n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что это делимая группа, натянутая на Γ . Как и в доказательстве теоремы 7.4, определим $h : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$h(z) = h\left(\frac{x}{n}\right) := \frac{g(x)}{n}.$$

Определение корректно, поскольку из $z = x/n = y/m$, $x, y \in \Delta$, $n, m \in \mathbb{N}$ следует $mx = ny$ и $mg(x) = ng(y)$. При этом функция h является Λ -аддитивной: если $z = x/n$, $z' = y/m$, $x, y \in \Delta$, $n, m \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} h(z + z') &= h\left(\frac{mx + ny}{mn}\right) = \frac{g(mx + ny)}{mn} = \frac{mg(x) + ng(y)}{mn} = \\ &= \frac{g(x)}{n} + \frac{g(y)}{m} = h(z) + h(z'). \end{aligned}$$

При этом h не убывает и продолжает g на Λ . Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ — базис Гамеля для делимой подгруппы Λ (см. упр. 20). Используя подгруппу, порождённую двумя его элементами, и рассуждая, как в случае $\Delta = x_0\mathbb{Z} + y_0\mathbb{Z}$, получаем, что существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $h(x_i) = \alpha x_i$ для всех $i \in I$. Поэтому $h(x) = \alpha x$ при всех $x \in \Lambda$. Как следствие, $f(x) = \alpha x + \beta$ при всех $x \in \Gamma$. Но так как эта функция Γ^2 -аддитивна, то $\beta = 0$. ■

Замечание 1. Теорема 15 остаётся верной, если (25) выполнено лишь для взаимно простых n, m , т. е. если мы рассматриваем *аддитивные теоретико-числовые функции*. Это легко увидеть из нашего доказательства теоремы 15 с помощью теоремы 16. В этом случае, если $f_1(\ln n) = f(n)$, то функция f_1 аддитивна на логарифмах взаимно простых чисел. Множество H всех таких $y \in \mathbb{R}$, что

$$f_1(x + y) = f_1(x) + f_1(y) \quad (x \in \Gamma = \ln \mathbb{N}), \quad (33)$$

является подполугруппой в $\mathbb{R}$. Она содержит множество $\ln P$ логарифмов всех простых чисел. Это множество порождает $\ln \mathbb{N}$ как полугруппу, поэтому H содержит $\ln \mathbb{N}$. Здесь x и y играют симметричные роли, и мы возвращаемся к уравнению (26). Как следствие, справедлива

Теорема 17. *Монотонная функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию*

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{при всех взаимно простых } m, n, \quad (34)$$

если и только если $f(n) = \alpha \ln n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторого вещественного $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Замечание 2. Условие монотонности здесь не очень важно. Существенно иметь класс функций $\mathcal{F}$, сохраняющийся при переходах от Γ к Δ и от Δ к Λ в доказательстве теоремы 16, причём функции этого класса, аддитивные на $\mathbb{R}$, имеют вид $f(x) = dx$. (См. в упр. 6 другой пример такого класса.)

Ясно, что теорема 16 обобщается на любую упорядоченную архимедову группу. Более интересно было бы заменить монотонность каким-нибудь свойством, применимым в $\mathbb{R}^2$, устранив обращение к структуре порядка на $\mathbb{R}$. Эта проблема ещё открыта, и одна из идей здесь — определить для данной подполугруппы $\Gamma \subset \mathbb{R}$ максимальный класс функций $\mathcal{C}$, для которого множество Γ^2 является $\mathcal{C}$ -квазирасширяемым. Другой подход — отказаться от симметрии, присущей множеству Γ^2 , и заменить его на $X \times Y$, где X и Y в каком-то смысле алгебраически независимы. Чтобы глубже разобраться в этом, лучше всего взять в качестве X и Y подполугруппы, порождённые различными элементами x_0, y_0 соответственно. Будем считать, что $x_0, y_0 > 0$. Для $(X \times Y)$ -аддитивной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено уравнение

$$f(nx_0 + my_0) = f(nx_0) + f(my_0) \quad (n, m \in \mathbb{N}). \quad (35)$$

Такое множество $X \times Y$ не квазирасширяемо. Пусть, например, $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — периодические функции с периодами x_0, y_0 , причём $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Если $f = \phi + \psi$, то при всех $n, m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} f(nx_0 + my_0) &= \phi(nx_0 + my_0) + \psi(nx_0 + my_0) = \phi(my_0) + \psi(nx_0) = \\ &= \phi(my_0) + \psi(my_0) + \phi(nx_0) + \psi(nx_0) = f(nx_0) + f(my_0). \end{aligned}$$

При подходящем выборе ϕ и ψ функция f не будет аддитивна на $x_0\mathbb{N} + y_0\mathbb{N}$, т. е. $X \times Y$ не квазирасширяемо.

Квазирасширяемость не имеет места даже для классов непрерывных и монотонных функций. Однако в последнем случае мы можем найти все монотонные $(X \times Y)$ -аддитивные функции (Pisot-Schoenberg 1964). Начнём с более простого результата:

Предложение 18. *Пусть положительные числа x_0, y_0 линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Положим $X = x_0\mathbb{N}$, $Y = y_0\mathbb{N}$. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная $(X \times Y)$ -аддитивная функция. Тогда существует вещественная константа α и две ограниченные периодические функции $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодами x_0, y_0 соответственно, для кото-*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 0$$

и при всех $z \in t(X + Y) = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \subset x_0\mathbb{N} + y_0\mathbb{N}$

$$f(z) = \alpha z + \phi(z) + \psi(z). \quad (36)$$

Доказательство. Решающий шаг состоит в доказательстве того, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ существует и конечен (предел берётся по всем $x \in x_0\mathbb{N} + y_0\mathbb{N}$). Без потери общности можно считать $x_0 > y_0$. Для каждого натурального m найдётся натуральное m' , такое что

$$mx_0 < m'y_0 < (m+1)x_0.$$

Как следствие, для всех натуральных n

$$nx_0 + mx_0 < nx_0 + m'y_0 < nx_0 + (m+1)x_0.$$

Без потери общности можно считать функцию f неубывающей, так что

$$f(nx_0 + my_0) \leq f(nx_0) + f(m'y_0) \leq f(nx_0) + f((m+1)x_0),$$

$$f(nx_0) + f(mx_0) \leq f(nx_0) + f(m'y_0) = f(nx_0 + m'y_0) \leq f((n+m+1)x_0),$$

откуда

$$f(nx_0) + f((m-1)x_0) \leq f((n+m)x_0) \leq f(nx_0) + f((m+1)x_0).$$

Будем поочерёдно заменять n на $n+m, \dots, n+(h-1)m$:

$$f((n+m)x_0) + f((m-1)x_0) \leq f((n+2m)x_0) \leq f((n+m)x_0) + f((m+1)x_0),$$

...

$$\begin{aligned} f((n+(h-1)m)x_0) + f((m-1)x_0) &\leq f((n+hm)x_0) \leq \\ &\leq f((n+(h-1)m)x_0) + f((m+1)x_0). \end{aligned}$$

Суммирование этих неравенств даёт

$$f(nx_0) + hf((m-1)x_0) \leq f(n+hm)x_0 \leq f(nx_0) + hf((m+1)x_0).$$

Пусть m фиксировано, N — натуральное число. Существуют целые h, n ($0 \leq n < m$), такие что $N = hm + n$. Как следствие,

$$\frac{f(nx_0)}{N} + \frac{h}{N} f((m-1)x_0) \leq \frac{f(Nx_0)}{N} \leq \frac{f(nx_0)}{N} + \frac{h}{N} f((m+1)x_0).$$

Так как $\lim_{N \rightarrow \infty} h/N = 1/m$, то из левого и правого неравенства соответственно получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} \geq \frac{f((m-1)x_0)}{m}; \quad (37)$$

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} \leq \frac{f((m+1)x_0)}{m},$$

т. е. оба предела конечны. Из (37) получаем:

$$\frac{m}{m-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} \geq \frac{f((m-1)x_0)}{m-1},$$

откуда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{f((m-1)x_0)}{m-1} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N}.$$

Как следствие, существует конечный предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(Nx_0)}{N} =: \alpha.$$

Пусть теперь $x = nx_0 + my_0 > 0$ ($n, m \geq 1$). Существует целое N , такое что

$$Nx_0 \leq nx_0 + my_0 < (N+1)x_0.$$

Тогда

$$\frac{f(Nx_0)}{(N+1)x_0} \leq \frac{f(nx_0 + my_0)}{nx_0 + my_0} \leq \frac{f((N+1)x_0)}{Nx_0}.$$

Значит, при $x = nx_0 + my_0 \rightarrow \infty$ средний член имеет (конечный) предел α .

Теперь положим $g(x) = f(x) - \alpha x$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Поскольку x_0, y_0 линейно независимы над $\mathbb{Z}$, то найдётся функция $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом x_0 , совпадающая с g на $y_0\mathbb{N}$. Её можно выбрать ограниченной на множестве точек промежутка $[0, x_0]$, не равных ny_0 ($n \in \mathbb{N}$) по модулю x_0 . Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} (\phi(x)/x) = 0$. Аналогично определим функцию $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодом y_0 , совпадающую с g на $x_0\mathbb{N}$ и ограниченную на $[0, y_0]$. Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} (\psi(x)/x) = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} g(nx_0 + my_0) &= g(nx_0) + g(my_0) = \psi(nx_0) + \phi(my_0) = \\ &= \psi(nx_0 + my_0) + \phi(nx_0 + my_0). \end{aligned}$$

Это означает, что $f(x) = \alpha x + \phi(x) + \psi(x)$ при всех x из $x_0\mathbb{N} + y_0\mathbb{N} = t(X \times Y)$. Предложение 18 доказано. ■

Чтобы получить общее монотонное решение уравнения $(X \times Y)$ -аддитивности, потребуются дополнительные условия на ϕ и ψ . Действительно, пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определена всюду по формуле (36), где α — произвольное вещественное число, а функции ϕ, ψ обладают свойствами из предложения 18. Как уже было отмечено, функция f является тогда $(X \times Y)$ -аддитивной. Она, однако, не обязана быть монотонной. Например, чтобы f не убывала, необходимо и достаточно выполнения следующего неравенства при всех $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ (для невозрастания его следует обратить):

$$-\alpha \leq \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} + \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}.$$

Если первая дробь при $x \neq y$ имеет инфимум $-\beta$, а вторая $-\gamma$, причём $\alpha \geq \beta + \gamma$, то (36) определяет неубывающую $(X \times Y)$ -аддитивную функцию. Это условие является достаточным. Оказывается, оно является и необходимым. Здесь требуется уточнение, поскольку функции ϕ и ψ выбраны произвольно, а условие $(X \times Y)$ -аддитивности касается только множества $x_0\mathbb{N} + y_0\mathbb{N}$. Можно показать, что если f — монотонная $(X \times Y)$ -аддитивная функция, то ϕ и ψ однозначно определяются на $x_0\mathbb{Z} + y_0\mathbb{N}_0$ и $x_0\mathbb{N}_0 + y_0\mathbb{Z}$ соответственно, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём существуют конечные β, γ , такие что

$$-\beta = \inf_{x, y \in x_0\mathbb{Z} + y_0\mathbb{N}_0} \lim_{x \neq y} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x}; \quad -\gamma = \inf_{x, y \in x_0\mathbb{N}_0 + y_0\mathbb{Z}} \lim_{x \neq y} \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}.$$

При этом $\alpha \geq \beta + \gamma$. См.: Pisot-Schoenberg, 1964.

16.6. Дальнейшие уравнения для теоретико-числовых функций

В заключение этой главы рассмотрим некоторые более сложные примеры теоретико-числовых функций. Пусть G, F — абелевы группы, X_i ($i = 1, 2, \dots, k$; $k \geq 2$) — непустые подмножества в G . Нас интересуют функции $f: G \rightarrow F$, для которых

$$f\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) = \sum_{i=1}^k f(x_i) \quad (38)$$

при всех $x_i \in X_i$. Рассмотрим множество

$$\bigotimes_{i=1}^k X_i = \{(x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in X_i; i = 1, \dots, k\}$$

(в случае $k = 2$ это множество выглядит как прямоугольник.)

Нетрудно дать определение расширяемости такого множества, но более интересно определение $\mathcal{C}$ -квазирасширяемости. Именно, множество $\bigotimes_{i=1}^k X_i$ называется $\mathcal{C}$ -квазирасширяемым, если для любой функции $f: G \rightarrow F$, принадлежащей классу $\mathcal{C}$ и удовлетворяющей условию (38), найдётся аддитивная функция $g: G \rightarrow F$ в классе $\mathcal{C}$, такая что при любых $x_i \in X_i$

$$g\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^k x_i\right)$$

(обратите внимание на отличие от определений из § 7.1). Мы ограничимся монотонными функциями и случаем $X_i = a_i \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$), $G = F = \mathbb{R}$. Можно доказать, что множества $\bigotimes_{i=1}^k a_i \mathbb{N}_0$, и даже $\bigotimes_{i=1}^k a_i \mathbb{Z}$, не являются квазирасширяемыми.

В случае, когда a_i линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, нетрудно доказать

Предложение 19. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) — натуральные числа, взаимно простые в совокупности. Далее, пусть α_i ($i = 1, \dots, k$) — наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является $\left(\bigotimes_{i=1}^k a_i \mathbb{N}_0\right)$ -аддитивной, если и только если существуют вещественное α и периодические функции $\phi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с периодами α_i , такие что $\phi(0) = 0$ ($i = 1, \dots, k$) и для всех $x \in \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{N}_0$

$$f(x) = \alpha x + \sum_{i=1}^k \phi_i(x). \quad \blacksquare$$

Если a_i независимы над $\mathbb{Z}$, то при $k \geq 3$ ситуация иная, чем в предложении 18: монотонные решения уравнения (38) на $\sum_{i=1}^k a_i \mathbb{N}_0$ — это линейные функции. Справедлива

Теорема 20. Пусть числа a_i ($i = 1, 2, \dots, k$; $k \geq 3$) положительны и линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Тогда множество $\bigotimes_{i=1}^k a_i \mathbb{N}_0$ квазирасширяемо относительно класса монотонных функций.

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная $\bigotimes_{i=1}^k X_i$ -аддитивная функция, где $X_i = a_i \mathbb{N}_0$. Из доказательства предложения 18 вытекает существование конечного предела $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)/x)$, где x имеет вид $\sum_{i=1}^k n_i a_i$ ($n_i \in \mathbb{N}_0$). Положим $g(x) = f(x) - \alpha x$. Можно считать функцию f неубывающей, так что при всех $x \neq y$ в $\mathbb{R}$

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq -\alpha. \quad (39)$$

Очевидно, что $g(0) = f(0) = 0$. Пусть теперь

$$z = \sum_{i=2}^k a_i t_i \quad (t_i \in \mathbb{Z}).$$

Фиксируем $x_1 \in X_1$ и положим для натуральных j

$$y_i^{(j)} = j a_i t_i \quad \text{при } t_i \geq 0, \quad y_i^{(j)} = -(j-1) a_i t_i \quad \text{при } t_i < 0,$$

$$z_i^{(j)} = (j-1) a_i t_i \quad \text{при } t_i \geq 0, \quad z_i^{(j)} = -j a_i t_i \quad \text{при } t_i < 0.$$

Заметим, что $y_i^{(j)} - z_i^{(j)} = a_i t_i$. Положим в (39) $x = x_1 + \sum_{i=2}^k y_i^{(j)}$ и $y = \sum_{i=2}^k z_i^{(j)}$:

$$\frac{g(x_1) + \sum_{i=2}^k (g(y_i^{(j)}) - g(z_i^{(j)}))}{x_1 + z} \geq -\alpha. \quad (40)$$

При этом

$$\sum_{j=1}^n (g(y_i^{(j)}) - g(z_i^{(j)})) = \begin{cases} g(y_i^{(n)}) & \text{при } t_i \geq 0, \\ -g(z_i^{(n)}) & \text{при } t_i < 0. \end{cases}$$

Пусть $s_i^{(n)} = y_i^{(j)}$ при $t_i \geq 0$ и $s_i^{(n)} = z_i^{(j)}$ при $t_i < 0$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n (g(y_i^{(j)}) - g(z_i^{(j)})) = g(s_i^{(n)}) \operatorname{sgn} t_i.$$

Сложим неравенства (40) для $j = 1, \dots, n$ и разделим на n :

$$\frac{1}{x_1 + z} \left[g(x_1) + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^k g(s_i^{(j)}) \operatorname{sgn} t_i \right] \geq -\alpha.$$

Но из определения функции g следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x)/x) = 0$ при $x \in \sum_{i=1}^k X_i$. Как следствие, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) g(s_i^{(n)}) = 0$, откуда

$$\frac{g(x_1)}{x_1 + z} \geq -\alpha. \quad (41)$$

При $k \geq 3$ множество всех возможных z плотно в $\mathbb{R}$, и (41) верно лишь при $g(x_1) = 0$. Ввиду произвольности $x_1 \in X_1$ имеем: $g(X_1) = 0$. В силу симметрии между a_i получаем: $g\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = 0$. Иными словами, для всех $x \in \sum_{i=1}^k X_i$

$$f(x) = \alpha x,$$

что и доказывает квазирасширяемость множества $\bigotimes_{i=1}^k X_i$ относительно класса монотонных функций. Теорема 20 доказана. ■

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1–4 см.: Dhombres, 1979, p. 3.4–3.10.)

1*. Пусть F, G — группы, причём F содержит хотя бы один элемент порядка выше 2. Опровергните или докажите, что множество $Z = G \times Y$ обильно (относительно отображений $f : G \rightarrow F$), если и только если Y порождает G как группу.

2*. Обобщите предложение 8 следующим образом. Пусть F, G — группы, Y — непустое подмножество в G . В терминах порождённой им подгруппы H и подъёмов относительно H выразите общее решение $f : G \rightarrow F$ условного уравнения Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x \in G, y \in Y).$$

3. Пусть G — локально компактная связная топологическая группа, F — группа, Y — подмножество в G с положительной мерой Хаара. Опровергните или докажите, что множество $Z = G \times Y$ обильно (относительно $f : G \rightarrow F$).

4. Приведите пример множества $Y \subset \mathbb{R}$ нулевой лебеговой меры, такого что $\mathbb{R} \times Y$ обильно (относительно всех $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

5. (Erdős, 1946.) Дайте прямое доказательство предложения 12 без использования предложения 8.

6. (Kátai, 1967; Máté, 1967.) Докажите следующий факт. Функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1) - f(n)) \geq 0$, удовлетворяет уравнению

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{при всех взаимно простых } m, n,$$

если и только если существует вещественная константа α , такая что $f(n) = \alpha \ln n$ при всех $n \geq 1$.

7. Опровергните или докажите следующее. Пусть F, G — абелевы группы, причём F делима. Далее, пусть подмножество X в G содержит подгруппу H , а подмножество Y порождает H как группу. Предположим, что функция $f : G \rightarrow F$ является Z -аддитивной, где $Z = X \times Y$. Тогда существует аддитивная функция $g : G \rightarrow F$, совпадающая с f на H .

8. (Aczél–Daróczy, 1975, p. 171–172.) Определите общий вид непрерывной и строго монотонной функции $\psi : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, для которой существуют такие $A, B : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, что уравнение (24) выполняется при всех $x \in [1, \infty[, l \in \mathbb{N}$.

(В связи с упр. 9–10 см.: Forti, 1983.)

9*. Опровергните или докажите следующее. Если $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $h(0) = 0$ и $xh(x) > 0$ при всех $x \neq 0$, то множество $C_h = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ обильно относительно класса функций, непрерывных в окрестности нуля и дифференцируемых в нуле.

10*. Пусть Z отображает любую функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в её график $Z(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Опровергните или докажите, что Z аддитивно продолжаемо для всех функций f , непрерывных в окрестности нуля и таких, что $f'(0) \notin \{-1, 0\}$.

(В связи с упр. 11–14 см.: Parsloe, 1982.)

11. Равносильны ли следующие свойства функции $f :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ (при ненулевых знаменателях)?

$$a) \lim_{\substack{x+y \rightarrow 0 \\ x, y > 0}} \left| \frac{f(x) + f(y)}{f(x+y)} - 1 \right| = 0, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0+} \sup_{0 < s \leq 1} \left| \frac{f(sx)}{f(x)} - s \right| = 0.$$

12*. То же для

$$\lim_{\substack{x+y \rightarrow 0 \\ x, y > 0}} \frac{1}{F(x+y)} \left| \frac{f(x) + f(y)}{f(x+y)} - 1 \right| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \sup_{0 < s \leq 1} \frac{1}{F(x)} \left| \frac{f(sx)}{f(x)} - s \right| = 0,$$

где $F :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывает. Функцию f в этом случае назовём F -локально аддитивной в 0_+ .

13*. Функция $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно ϕ -медленно меняется, если для каждого ограниченного промежутка $I \subset \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup [\phi(x) |f(x + \alpha) - f(x)|] = 0,$$

где $\phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывает. Опровергните или докажите, что $f :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ является F -локально аддитивной функцией в 0_+ (см. упр. 12), если и только если $f(x) = x \exp g(\ln 1/x)$ ($x \in]0,1]$), где g меняется ϕ -медленно и $\phi(x) = F(e^{-x})^{-1}$.

14*. Пусть $\lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=0}^{\infty} [F(xe^{-n})]/[F(x)] < \infty$. Опровергните или докажите, что функция $f :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ является F -локально аддитивной в 0_+ (см. упр. 12), если и только если при некотором $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{F(x)} \left| \frac{f(x)}{x} - \lambda \right| = 0.$$

15. (Kuczma, 1963.) Пусть непрерывные функции g, h удовлетворяют условиям теоремы 1, функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в нуле, $f(0) > 0$ и при всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(g(x) + h(x)) = f(g(x))f(h(x)).$$

Докажите, что существует такое $a \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = e^{ax}.$$

16. Пусть функция $k : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна, причём $0 < k(x) < x$ при $x \in \mathbb{R}_+$ и $k(2x) = 2k(x)$ при $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Опровергните или докажите, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x) = f(k(x)) + f(x - k(x)) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

если и только если f аддитивна.

(В связи с упр. 17–19 см., например: Bachman, 1964, р. 17–22.)

17*. Два нормирования (см. § 10.6) f_1, f_2 тела K эквивалентны, если существует положительное ρ , такое что

$$f_1(x) = f_2(x)^\rho \quad \text{при всех } x \in K.$$

Найдите, с точностью до эквивалентности, все нормирования поля $\mathbb{Q}$.

18. Пусть K — тело, A — его подкольцо, F — алгебраически замкнутое тело, $f : A \rightarrow F$ — нетривиальный гомоморфизм. Докажите, что существует $\phi : K \rightarrow F \cup \{\infty\}$ со следующими свойствами:

- (i) ограничение функции ϕ на A совпадает с f ;
- (ii) множество $\phi^{-1}(F) = U$ является подкольцом в K ,
- (iii) ограничение функции ϕ на U — нетривиальный гомоморфизм,
- (iv) если $\phi(a) = \infty$, то $\phi(a^{-1}) = 0$.

19*. Пусть F — тело, $f_1, \dots, f_n$ — нетривиальные и неэквивалентные нормирования, λ_i ($i = 1, \dots, n$) — элементы из F . Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\lambda \in F$, что

$$f_i(\lambda - \lambda_i) < \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n).$$

20. Покажите, что любая делимая абелева группа G имеет базис Гамеля, т.е. существует такое подмножество $H \subset G$, что любой элемент $x \in G$ однозначно записывается в виде

$$x = \sum_{i=1}^n s_i x_i,$$

где $s_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, а x_i ($i = 1, \dots, n$) — различные элементы из H .

21*. (Piccard, 1939, Mehdi, 1964.) Пусть множество $S \subset \mathbb{R}$ имеет свойство Бэра, но не является тощим (определения см. в § 2 перед теоремой 10). По аналогии с теоремой 2.6 докажите, что $S + S$ содержит промежуток положительной длины. Далее, по аналогии с теоремой 2.8 докажите, что все аддитивные функции, ограниченные с одной стороны на не-тощем подмножестве в $\mathbb{R}$ со свойством Бэра, имеют вид $f(x) = cx$ (c — произвольная вещественная константа).

22. Сохраняется ли теорема 5, если нечётность функций заменить на непрерывность, (с дифференцируемостью в нуле)?

(В связи с упр. 23 и 24 см.: Bachman, 1964, p. 16–17.)

23*. Пусть K — тело. Докажите, что нетривиальные нормирования f_1, f_2 эквивалентны (см. упр. 17), если и только если $f_2(x) < 1$, как только $f_1(x) < 1$.

24. Пусть f — нетривиальное нормирование тела K . Нуль-последовательность $\{x_n\}$ в (K, f) — это такая последовательность элементов $x_n \in K$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$.

Докажите, что два нетривиальных нормирования тела K эквивалентны (см. упр. 17), если и только если им соответствуют одни и те же нуль-последовательности.

25*. (Daróczy–Káta, 1985.) Пусть G — компактная абелева группа, $A(G)$ — множество всех таких $f: \mathbb{N} \rightarrow G$, что

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{при всех } m, n \in \mathbb{N}.$$

Далее, пусть $K(G)$ — множество всех таких $f \in A(G)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1) - f(n)) = 0,$$

а $D(G)$ — множество всех таких $f \in A(G)$, что при любых $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ из существования предела $g = \lim_{k \rightarrow \infty} f(n_k)$ следует существование предела

$$g' = \lim_{k \rightarrow \infty} f(n_k + 1).$$

Верно ли, что $K(G) = D(G)$?

Глава 17

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ, БИСИММЕТРИЯ И САМОДИСТРИБУТИВНОСТЬ

В математике и её приложениях встречаются различные средние. Наиболее известны среднее геометрическое $(xy)^{1/2}$ и среднее арифметическое $(x+y)/2$. Это частные случаи так называемого квазиарифметического среднего, которое мы уже рассматривали в гл. 15. В данной главе различные средние характеризуются некоторыми их общими свойствами, которые мы выразим с помощью функциональных уравнений (бисимметрии, самодистрибутивности). При этом мы рассмотрим не только квазиарифметические, но и более общие квазилинейные средние (не обязательно симметричные, см. (16.20)).

Вместо $M(x, y)$ будем писать $x \circ y$:

$$x \circ y = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) \quad (x, y \in I), \quad (1)$$

где $I \subset \mathbb{R}$ — (открытый, замкнутый, полузамкнутый, конечный или бесконечный) промежуток положительной длины, $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная и строго монотонная функция. Будем использовать тождество бисимметрии (медиальности) (1.12), которое запишем в виде

$$(x \circ y)(z \circ w) = (x \circ z)(y \circ w) \quad (x, y, z, w \in I). \quad (2)$$

Разумеется, здесь нужно сделать предположение, что промежуток I замкнут относительно операции $\circ$. Очевидно, что (1) удовлетворяет уравнению (2). Этому тождеству посвящено много работ как в абстрактной алгебре, так и в теории средних; к последним относятся, например: Aczél (1948b, 1966c P. 278–287); Fuchs (1950); Sigmon (1968, 1970).

Теорема 1. *Непрерывная и строго монотонная функция $k: I \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению (1), существует тогда и только тогда, когда функция $\circ: I^2 \rightarrow I$ непрерывна, строго возрастает по обоим переменным, удовлетворяет уравнению (2), а также уравнениям*

$$x \circ x = x \quad (3)$$

(идемпотентность) и

$$x \circ y = y \circ x \quad (4)$$

(коммутативность или симметрия).

Доказательство. Утверждение «только если» очевидно. Чтобы доказать обратное утверждение, вначале ограничимся конечным отрезком $I = [a, b]$, $a < b$. Построим функцию

$$f = k^{-1}. \quad (5)$$

Как мы увидим, её областью определения можно считать отрезок $[0, 1]$. Чтобы функция k удовлетворяла уравнению (1), f должна удовлетворять уравнению

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = f(u) \circ f(v) \quad \text{при всех } u, v \in [0, 1]. \quad (6)$$

Положим

$$f(0) = a, \quad f(1) = b, \quad (7)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a \circ b, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = a \circ (a \circ b), \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = (a \circ b) \circ b, \dots; \quad (8)$$

более точно, определим f на двоичных дробях $m/2^n$ ($0 \leq m \leq 2^n$) (см. доказательство теоремы 8.1) посредством формулы (7) и рекурсии:

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k}{2^n}\right) \quad (0 \leq 2k+1 \leq 2^{n+1}).$$

Определение требуется лишь для нечётных m . Однако с учётом (3) верно также, что

$$f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k}{2^n}\right) = f\left(\frac{k}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

(Это уравнение будет полезно в дальнейшем, так как для упрощения выкладок иногда потребуется увеличить степень двойки в знаменателе.) Таким образом,

$$f\left(\frac{2k+\delta}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k+\delta}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k}{2^n}\right) \quad (\delta = 0, 1). \quad (9)$$

Докажем индукцией по n , что для такой функции выполнено (6). При $n = 0, 1$ это верно в силу (7) и (8). Предположим, что (6) выполнено для дробей со знаменателем 2^n . Пусть

$$u = \frac{2k+\delta}{2^{n+1}}, \quad v = \frac{2l+\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (\delta, \varepsilon = 0, 1)$$

(мы привели u и v к общему знаменателю). Тогда ввиду (9), (4), (2) и предположения индукции

$$\begin{aligned} f(u) \circ f(v) &= \left[f\left(\frac{k+\delta}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right] \circ \left[f\left(\frac{l}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{l+\varepsilon}{2^n}\right) \right] = \\ &= \left[f\left(\frac{k+\delta}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{l}{2^n}\right) \right] \circ \left[f\left(\frac{k}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{l+\varepsilon}{2^n}\right) \right] = f\left(\frac{k+l+\delta}{2^{n+1}}\right) \circ f\left(\frac{k+l+\varepsilon}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку δ и ε различаются на 0 или 1, то с учётом (9) и, если потребуется, (4), последнее выражение равно

$$f\left(\frac{2k+2l+\delta+\varepsilon}{2^{n+2}}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

т. е. (6) доказано для двоичных дробей. Такая функция f , определённая на двоичных дробях из отрезка $[0, 1]$, является строго возрастающей, поскольку функция $\circ$ строго возрастает по обоим переменным и $f(0) < f(1)$ в силу (7). В самом деле, пусть f возрастает на двоичных дробях со знаменателем 2^n . Тогда с учётом (3) и (9)

$$f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k}{2^n}\right) = f\left(\frac{k}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k}{2^n}\right) < f\left(\frac{k}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right),$$

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k}{2^n}\right) < f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \circ f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right).$$

Определим теперь $f(u)$ для всех $u \in]0, 1[$. Пусть $\{d_n\}$ и $\{D_n\}$ — соответственно возрастающая и убывающая последовательности двоичных дробей, сходящиеся к u ,

причём d_n и D_n — ближайшие к u (но отличные от u) дроби со знаменателем 2^n . Тогда

$$d_1 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n \leq d_{n+1} \leq \dots < u < \dots \leq D_{n-1} \leq D_n \leq D_{n+1} \leq \dots \leq D_1. \quad (10)$$

Поскольку f строго возрастает на двоичных дробях, то последовательности $f(d_n)$ и $f(D_n)$ монотонны, ограничены с соответствующей стороны и потому имеют пределы

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} f(d_n), \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(D_n). \quad (11)$$

На других монотонных последовательностях двоичных дробей, сходящихся к u снизу или сверху, пределы для f также существуют и равны соответственно λ и L . Если $\lambda \neq L$ в (11), то

$$\lambda < L. \quad (12)$$

Так как функция $\circ$ строго возрастает и удовлетворяет условию (3), то

$$\lambda = \lambda \circ \lambda < \lambda \circ L < L \circ L = L. \quad (13)$$

Существуют такие подпоследовательности $\{d_{n_k}\}, \{D_{n_k}\}$, что

$$\frac{d_{n_k} + D_{n_k}}{2} > u \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда ¹⁾

$$f(d_{n_k}) \circ f(D_{n_k}) = f\left(\frac{d_{n_k} + D_{n_k}}{2}\right) \geq L,$$

и при $k \rightarrow \infty$ получаем

$$\lambda \circ L \geq L$$

в противоречии с (13). Значит, случай (12) невозможен, и на самом деле

$$\lambda = L.$$

Положим для любого $u \in [0, 1]$

$$\bar{f}(u) = \lambda = L.$$

Если u — двоичная дробь, то $\lambda \leq f(u) \leq L$ и $f(u) = \bar{f}(u)$. Таким образом, функция $\bar{f}$ является продолжением для f . Мы будем обозначать её просто f .

Функция f строго возрастает на $[0, 1]$. Действительно, пусть $u < v$. Возьмём двоичные дроби D, d , такие что $u < D < d < v$. Тогда

$$f(u) \leq f(D) < f(d) \leq f(v).$$

Будучи монотонной, функция f может иметь разрывы лишь типа скачка. Но для внутренней точки отрезка $[0, 1]$ отсюда вытекало бы $\lambda < L$ (см. (11), (12)), что невозможно. Непрерывность в точках 0 и 1 также очевидна. Таким образом, f непрерывна на отрезке $[0, 1]$, и так как условие (6) выполнено для двоичных дробей, то по непрерывности оно выполнено для всех $u, v \in [0, 1]$.

Поскольку функция f непрерывна, строго монотонна и удовлетворяет условиям (7), то корректно определена обратная функция $k = f^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, для которой ввиду (6) выполнено (1). Тем самым теорема 1 доказана для отрезков.

Пусть теперь промежуток I открыт с одной или обеих сторон (и, возможно, бесконечен). Выберем в нём (не обязательно строго) убывающую последовательность

¹⁾ Поскольку (6) доказано для двоичных дробей.

$\{\alpha_n\}$ и возрастающую последовательность $\{\beta_n\}$, стремящиеся к границам промежутка (возможно, к бесконечности), причём $\alpha_n < \beta_n$ ($n = 1, 2, \dots$). По доказанному, существуют непрерывные (и строго монотонные) функции $k_n : [\alpha_n, \beta_n] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$x \circ y = k_n^{-1} \left[\frac{k_n(x) + k_n(y)}{2} \right] \quad \text{на } [\alpha_n, \beta_n]. \quad (14)$$

Как мы видели в следствии 15.5, k_n определяется лишь с точностью до ненулевой мультипликативной, а также аддитивной константы (при этом функция k_n может стать строго убывающей и поменять область значений, но это ничего не меняет по существу — вот почему в теореме 1 от k требуется лишь строгая монотонность). Так как по определению $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \in [\alpha_n, \beta_n]$, то при всех $n > 1$ можно выбрать k_n так, что

$$k_n(\alpha_{n-1}) = k_{n-1}(\alpha_{n-1}), \quad k_n(\beta_{n-1}) = k_{n-1}(\beta_{n-1}).$$

Тогда (см. теорему 15.4)

$$k_n(x) = k_{n-1}(x) \quad \text{при всех } x \in [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}] \quad (15)$$

(функция k_{n-1} определена лишь на этом отрезке). Получаем последовательность функций, каждая из которых продолжает предыдущую на больший отрезок, и в пределе — функцию $k : I \rightarrow \mathbb{R}$. Из формул (14) и (15) вытекает, что

$$x \circ y = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) \quad \text{при всех } x, y \in I.$$

Теорема 1 доказана. ■

Вернёмся к обозначению M . Мы (почти) доказали

Следствие 2. *Общее решение $M : I^2 \rightarrow I$ системы функциональных уравнений*

$$M(x, x) = x,$$

$$M(x, y) = M(y, x),$$

$$M[M(x, y), M(z, w)] = M[M(x, z), M(y, w)] \quad (x, y, z, w \in I)$$

в классе непрерывных функций, строго монотонных по каждому переменному, имеет вид

$$M(x, y) = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) \quad (x, y \in I),$$

где $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная строго монотонная функция.

Доказательство. В силу теоремы 1 нужно лишь показать, что $M(x, y)$ строго возрастает по обоим переменным. Прежде всего, невозможна ситуация, когда $y_1 < y_2$, функция $x \mapsto M(x, y_1)$ строго возрастает, а $x \mapsto M(x, y_2)$ строго убывает. Действительно, тогда при $x < x'$ мы получили бы $M(x, y_1) - M(x', y_1) < 0$, $M(x, y_2) - M(x', y_2) > 0$. Так как функция M непрерывна, то существует $y \in]y_1, y_2[$, при котором $M(x, y) - M(x', y) = 0$ вопреки строгой монотонности отображения $x \mapsto M(x, y)$. Будучи симметричной, функция M не может возрастать по одному переменному и убывать по другому. Наконец, M не может и убывать по обоим переменным, поскольку тогда из $x < x'$ следовало бы $x = M(x, x) > M(x, x') > M(x', x') = x'$. Следствие 2 доказано. ■

В предложении 15.9 мы уже получили характеризацию несимметричного среднего (арифметического). Теперь охарактеризуем с помощью вышеприведённых условий,

но без симметрии (4), следующее обобщение квазиарифметического среднего (1):

$$x \square y = k^{-1}[(1 - q)k(x) + qk(y)], \quad (16)$$

которое будем называть *квазилинейным средним*, см. (16.20). (Функция k снова предполагается непрерывной и строго монотонной на нашем базовом промежутке I . Константа q не равна 0 и 1. Операция обозначена $\square$, так как $\circ$ зарезервировано для симметрических средних, к которым мы намереваемся свести $\square$.) См.: Aczél, 1948b; Fuchs, 1950.

Будем предполагать, что операция $\square$ строго монотонна по обоим переменным (на этот раз не обязательно возрастает), непрерывна и удовлетворяет тождествам

$$(x \square y) \square (u \square v) = (x \square u) \square (y \square v), \quad (17)$$

$$z \square z = z. \quad (18)$$

Положив в тождестве (17) соответственно $x = y$ или $u = v$, получаем уравнения самодистрибутивности

$$\begin{aligned} x \square (u \square v) &= (x \square u) \square (x \square v), \\ x \square (y \square u) &= (x \square u) \square (y \square u). \end{aligned} \quad (19)$$

Разумеется, функция вида (16) обладает всеми этими свойствами.

Определим теперь операцию $\circ$, которая будет удовлетворять *всем* условиям теоремы 1 (включая *симметрию*). Возьмём произвольную точку $a \in I$ и определим

$$z = x \circ y$$

как решение уравнения

$$(a \square z) \square (z \square a) = (a \square x) \square (y \square a). \quad (20)$$

Иначе говоря,

$$[a \square (x \circ y)] \square [(x \circ y) \square a] = (a \square x) \square (y \square a). \quad (21)$$

Уравнение (20) действительно имеет ровно одно решение z , возрастающее по x и y , в силу того что обе его части непрерывны, строго монотонны по z и строго монотонны в одинаковом направлении по x и y . Во всех случаях имеет место строгое возрастание, если $\square$ возрастает по обоим переменным, и строгое убывание, если $\square$ возрастает по одному переменному и убывает по другому. Как и выше, $\square$ не может убывать по обоим переменным в силу (18), а непрерывность и строгая монотонность исключают ситуацию, когда, скажем, $x \mapsto x \square y_1$ возрастает, а $x \mapsto x \square y_2$ убывает. Область значений обеих частей в (20) одинакова: $(a \square I) \square (I \square a)$. Поскольку левая часть непрерывна и строго монотонна по z , то (20) имеет единственное решение, а строгая монотонность обеих частей в одинаковом направлении означает, что z возрастает по x и по y . Непрерывность операции $\circ$ очевидна, а (4) вытекает из (21) и (17). Положив в (21) $y = x$, получаем (3). Чтобы применить теорему 1, осталось убедиться, что операция $\circ$ бисимметрична. Нам потребуется следующая важная лемма (Aczél, 1948b; Fuchs, 1950).

Лемма 3. При условии (17) и предшествующих ему выполнено тождество

$$(x \circ y) \square (u \circ v) = (x \square u) \circ (y \square v) \quad (x, y, u, v \in I). \quad (22)$$

Доказательство. Применим последовательно (19), (17), (21), (17), (19), (21):

$$\begin{aligned}
 & \{a \sqcap [(x \circ y) \sqcap (u \circ v)]\} \sqcap \{[(x \circ y) \sqcap (u \circ v)] \sqcap a\} = \\
 & = \{[a \sqcap (x \circ y)] \sqcap [a \sqcap (u \circ v)]\} \sqcap \{[(x \circ y) \sqcap a] \sqcap [(u \circ v) \sqcap a]\} = \\
 & = \{[a \sqcap (x \circ y)] \sqcap [(x \circ y) \sqcap a] \sqcap [a \sqcap (u \circ v)] \sqcap [(u \circ v) \sqcap a]\} = \\
 & = [(a \sqcap x) \sqcap (y \sqcap a)] \sqcap [(a \sqcap u) \sqcap (v \sqcap a)] = \\
 & = [(a \sqcap x) \sqcap (a \sqcap u)] \sqcap [(y \sqcap a) \sqcap (v \sqcap a)] = [a \sqcap (x \sqcup u)] \sqcap [(y \sqcap v) \sqcap a] = \\
 & = \{a \sqcap [(x \sqcup u) \circ (y \sqcap v)]\} \sqcap \{[(x \sqcup u) \circ (y \sqcap v)] \sqcap a\}.
 \end{aligned}$$

Равенство (22) следует из строгой монотонности отображения $z \mapsto (a \sqcap z) \sqcap (z \sqcap a)$, и лемма доказана. ■

Теперь мы сможем доказать бисимметрию операции $\circ$. Применим (21), (3), (4) и дважды (22):

$$\begin{aligned}
 & \{a \sqcap [(x \circ y) \circ (u \circ v)]\} \sqcap \{[(x \circ y) \circ (u \circ v)] \sqcap a\} = \\
 & = [a \sqcap (x \circ y)] \sqcap [(u \circ v) \sqcap a] = [(a \circ a) \sqcap (y \circ x)] \sqcap [(u \circ v) \sqcap (a \circ a)] = \\
 & = [(a \sqcap y) \circ (a \sqcap x)] \sqcap [(u \sqcap a) \circ (v \sqcap a)] = [(a \sqcap y) \sqcap (u \sqcap a)] \circ [(a \sqcap x) \sqcap (v \sqcap a)].
 \end{aligned}$$

С учётом бисимметрии (17) можно поменять местами y и u в последнем из этих выражений, а тогда и в первом. Вместе со строгой монотонностью отображения $z \mapsto (a \sqcap z) \sqcap (z \sqcap a)$ это обеспечивает бисимметрию операции $\circ$. Тогда по теореме 1 существует непрерывная возрастающая функция k , такая что

$$x \circ y = k^{-1} \left(\frac{k(x) + k(y)}{2} \right) \quad (x, y \in I).$$

Подставляя это выражение в (22) при

$$X := k(x), \quad Y := k(y), \quad U := k(u), \quad V := k(v), \quad G(X, U) := k[k^{-1}(X) \sqcap k^{-1}(U)], \quad (23)$$

получаем

$$G\left(\frac{X+Y}{2}, \frac{U+V}{2}\right) = \frac{G(X, U) + G(Y, V)}{2}.$$

Поскольку функции $\sqcap$ и k непрерывны, то переменные X, Y, U, V пробегает промежуток $J = k(I)$, а функция G непрерывна на J^2 . Она линейна в силу предложения 15.3, т. е. существуют такие константы p, q, r , что

$$G(X, U) = pX + qU + r,$$

или, с учётом (23),

$$x \sqcap u = k^{-1}[pk(x) + qk(u) + r]. \quad (24)$$

В силу (18) $p + q = 1$, $r = 0$, а строгая монотонность функции $\sqcap$ исключает случаи $p = 0$, $q = 0$. Доказана

Теорема 4. *Общее непрерывное, строго монотонное решение $\sqcap$ уравнений (17) и (18) имеет вид*

$$x \sqcap y = k^{-1}[(1 - q)k(x) + qk(y)],$$

где $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная непрерывная, строго монотонная функция, а q — произвольная константа, отличная от 0 и 1. ■

Общее непрерывное и строго монотонное решение одного уравнения (17) (см.: Aczél, 1948b, 1966с, р. 287–292) имеет вид (24) (см. упр. 2). В статье Fuchs (1950) все эти результаты обобщаются для операций на произвольных упорядоченных множествах.

Другую характеристику квазилинейных средних (16) можно дать с помощью уравнений *самодистрибутивности*

$$x \square (y \square z) = (x \square y) \square (x \square z), \quad (25)$$

$$(x \square y) \square z = (x \square z) \square (y \square z), \quad (26)$$

уже встречавшихся в качестве (19). Найдём общий вид самодистрибутивной непрерывной, строго возрастающей по обоим переменным операции $\square$ (вместо строгого возрастания достаточно предположить строгую монотонность, см. ниже замечание после следствия 6). Именно, покажем, что $\square$ удовлетворяет уравнениям идемпотентности (18) и бисимметрии (17). Первая часть нижеприведённого доказательства содержится в работе Hosszú, 1959b, относительно второй см.: Aczél, 1964.

Положив в уравнении (25) $x = y = z$, в силу строгой монотонности операции $\square$ получаем

$$z \square z = z, \quad (27)$$

что совпадает с (18). Чтобы доказать бисимметрию, предположим, например, что v лежит между t и u ; определим $f(v)$ условием

$$(s \square t) \square (u \square v) = (s \square u) \square (t \square f(v)). \quad (28)$$

Это определение корректно. Действительно, ввиду строгой монотонности операции $\square$ существует *не более* одного возможного значения $f(v)$. Если $v = t$, то с учётом (26) и (27)

$$(s \square t) \square (u \square t) = (s \square u) \square t = (s \square u) \square (t \square t),$$

и с учётом (28)

$$f(t) = t. \quad (29)$$

Аналогично при $v = u$

$$(s \square t) \square (u \square u) = (s \square t) \square u = (s \square u) \square (t \square u),$$

и

$$f(u) = u. \quad (30)$$

Так как функция $\square$ непрерывна, то (28) теперь имеет *не менее* одного решения $f(v)$ (при $v \in [t, u]$; в противном случае условие (28) нужно несколько изменить). В итоге функция f определена однозначно.

Мы хотим доказать, что $f(v) = v$ на $[t, u]$. Вначале покажем, что

$$f(x \square y) = f(x) \square f(y) \quad (31)$$

при $x, y \in [t, u]$. Действительно, в силу (28) и (25)

$$\begin{aligned} (s \square u) \square (t \square f(x \square y)) &= (s \square t) \square [u \square (x \square y)] = \\ &= (s \square t) \square [(u \square x) \square (u \square y)] = [(s \square t) \square (u \square x)] \square [(s \square t) \square (u \square y)] = \\ &= \{(s \square u) \square (t \square f(x))\} \square \{(s \square u) \square (t \square f(y))\} = \\ &= (s \square u) \square \{[t \square f(x)] \square [t \square f(y)]\} = (s \square u) \square \{t \square [f(x) \square f(y)]\}. \end{aligned}$$

Равенство (31) вытекает из строгого возрастания функции $\square$. Выполнены также равенства (29) и (30). Так как $\square$ строго возрастает, то с учётом (27) функция $\square$ является внутренней (internal):

$$x = x \square x < x \square y < y \square y = y \quad \text{при } x < y.$$

Таким образом, при $F(x, y) = x \square y$, $H(u, v, x, y) = u \square v$ выполнены все условия теоремы 15.4. Но равенство (31) справедливо для тождественного отображения, поэтому $f(v) = v$ (при $v \in [t, u]$) и аналогично на любом отрезке в промежутке I . Сравнивая с (28), получаем тождество бисимметрии:

$$(s \square t) \square (u \square v) = (s \square u) \square (t \square v).$$

Мы доказали следующий факт (см. теорему 4).

Теорема 5. *Непрерывная самодистрибутивная строго монотонная (возрастающая) операция $\square$ на промежутке I удовлетворяет тождествам (18) и (17). ■*

Следствие 6. *Непрерывная строго возрастающая самодистрибутивная операция $\square$ в общем случае имеет вид (16), где k — произвольная непрерывная строго монотонная функция, $q \in]0, 1[$ — произвольная константа. ■*

Замечание. Если функция $y \mapsto x \square y$ строго убывает, то q отрицательно, а если строго убывает $x \mapsto x \square y$, то $q > 1$. С помощью более сложных алгебраических и топологических средств в работе Strambach (1975) установлено, что и в отсутствие тождества (25) следствие 6 по существу остаётся верным при некоторых дополнительных предположениях (см. упр. 18.14).

Строгую монотонность в предыдущих результатах можно заменить на сократимость (взаимную однозначность) отображений $x \mapsto x \square y$ и $y \mapsto x \square y$, см. упр. 5.

Отметим, что вытекающие соответственно из (1) и (16) равенства (6) и

$$k(x \circ y) = \frac{k(x) + k(y)}{2}, \quad k(x \square y) = (1 - q)k(x) + qk(y) \quad (q \in]0, 1[) \quad (32)$$

имеют вид (15.21), так что выполнены условия теоремы 15.4. Но здесь нас больше интересовал не вопрос единственности, а вопрос существования. Тем не менее теоремы 1, 4 и следствия 2, 6 дают *необходимые и достаточные условия существования непрерывных и строго возрастающих решений функциональных уравнений (32)*.

Последующие результаты и упражнения

1. Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$, а $M(x, y)$ — квазиарифметическое среднее на I . Найдите общее непрерывное решение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(x + y) + f(M(x, y)) = f(x + M(x, y)) + f(y) \quad (x, y \in I).$$

(В связи с упр. 2–5 см.: Aczél, 1966с, р. 287–299.)

2*. Покажите, что любое решение $\square: I^2 \rightarrow I$ уравнения (17), непрерывное и строго монотонное по каждому переменному (I — собственный промежуток в $\mathbb{R}$), имеет вид

$$x \square y = k^{-1}[ak(x) + bk(y) + c] \quad (x, y \in I), \quad (33)$$

где a, b, c — константы, $ab \neq 0$, функция $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна.

3. Установите, в какой мере для заданной операции $\square$ в (33) определены a, b, c, k .

4. Пусть α, β — концы промежутка I (возможно, на бесконечности). При каких соотношениях между α, β, a, b, c в (33) будет выполнено условие $I \square I \subset I$?

5. Покажите, что в упр. 2, теоремах 4, 5 и следствиях 2, 6 требование строгой монотонности операций можно заменить на их сократимость (сократимость означает, что из $z_1 \square t = z_2 \square t$ или $t \square z_1 = t \square z_2$ для некоторого t следует $z_1 = z_2$).

(В связи с упр. 6–11 см.: Aczél, 1966с, р. 245–269.)

6. Пусть I — собственный промежуток вещественной оси, $(I, \circ)$ — непрерывная группа. Покажите, что существует непрерывная и строго монотонная функция $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$x \circ y = g^{-1}[g(x) + g(y)] \quad (x, y \in I). \quad (34)$$

Какие ограничения на I (открытость, замкнутость, полужамкнутость) вытекают из этого результата?

7*. Как меняется результат предыдущего упражнения, если $(I, \circ)$ — непрерывная сократимая (см. упр. 5) полугруппа?

8. Пусть $e, b \in \mathbb{R}$, $e < b$; $I = [b, e[$; $c \in]e, b[$. Рассмотрим отображение $\circ : I^2 \rightarrow I$. Предположим, что $e \circ x = x$ и $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ при $x, y, z, x \circ y, y \circ z, (x \circ y) \circ z \in [e, c[$ (уравнение условной ассоциативности). Найдите все операции $\circ$ на промежутке $[e, c[$, удовлетворяющие этому уравнению, непрерывные и сократимые (см. упр. 5).

9*. Пусть дан собственный промежуток вещественной оси I , а также отображение $F : \mathbb{R} \times I \rightarrow I$. Пусть отображение $x \mapsto F(t, x)$ непрерывно при всех $t \in \mathbb{R}$, отображение $t \mapsto F(t, x)$ непостоянно при каждом $x \in I$ и непрерывно хотя бы при одном. Покажите, что в этом классе общее решение функционального уравнения

$$F[s, F(t, x)] = F(s + t, x) \quad (s, t \in \mathbb{R}; x \in I) \quad (35)$$

имеет вид

$$F(t, x) = h^{-1}[t + h(x)] \quad (t \in \mathbb{R}, x \in I), \quad (36)$$

где функция $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна. Покажите, что промежуток I должен быть открытым.

10*. Как меняется результат предыдущего упражнения, если (35) предполагается выполненным только для $s, t \in]c, \infty[$, где $c \geq 0$, но при этом функция F строго возрастает по обоим переменным и непрерывна по x ?

11. Установите, в какой мере функции g и h в (34) и (36) определены при данных $\circ$ и F соответственно.

12*. Попробуйте обобщить результаты упр. 1–11 с $\mathbb{R}$ (и I) на более общие (упорядоченные) топологические пространства.

Глава 18

ОБОВЩЁННАЯ БИСИММЕТРИЯ. СВЯЗЬ С ТКАНЯМИ И НОМОГРАММАМИ

Эта глава служит естественным продолжением гл. 17 и посвящена связи функциональных уравнений с тканями и номограммами. В предыдущей главе мы использовали уравнение бисимметрии (17.2) для характеристики квазиарифметических средних. Здесь мы обобщим его до уравнения с шестью неизвестными функциями (операциями) тем же способом, каким уравнение Пексидера (4.25) обобщает уравнение (2.1): всем неизвестным функциям (операциям) позволяет быть различными.

Обозначим шесть операций цифрами ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥ и запишем уравнение *обовщённой бисимметрии* в виде

$$(x \text{ ① } y) \text{ ② } (z \text{ ③ } w) = (x \text{ ④ } z) \text{ ⑤ } (y \text{ ⑥ } w). \quad (1)$$

Следующие ниже замечания о *номографии*¹⁾ содержат также элементарные факты из *теории тканей*, которые помогут решить уравнение (1) при достаточно общих условиях. *Номограммы* позволяют визуально представлять на плоскости (или плоскостях) функции двух и более переменных и вычислять их. Мы ограничимся случаем двух переменных и, в основном, представлением функций с помощью *линий уровня* и его модификациями. Линии уровня на координатной плоскости соединяют точки, в которых функция принимает одинаковое значение. Например, на рис. 15 представлена такая номограмма для функции, равной $(x(1-y))^{1/2}$ при $x > 0$, $y < 1$. С помощью этой номограммы мы можем (точно или приближённо) найти значение $z = (x(1-y))^{1/2}$ при любых x, y в этой области путём интерполяции между линиями на номограмме. Точно так же можно найти y по данным x, z или x по данным y, z .

Здесь возникает определённая трудность, поскольку вычерчивание всех этих кривых требует большой работы. С другой стороны, даже приближённая интерполяция между кривыми линиями более трудна, чем между прямыми. Поэтому весьма полезно заменить кривые линии прямыми — произвести *анаморфозу*. Иногда это можно сделать, вводя неравномерные шкалы на осях. Например, $z = (x(1-y))^{1/2}$ можно записать как $2 \ln z = \ln x + \ln(1-y)$. Введя переменные $x' = \ln x$, $y' = \ln(1-y)$, $z' = 2 \ln z$ (т.е. применяя логарифмические шкалы), мы получим соотношение $z' = x' + y'$ и преобразуем рис. 15 в рис. 16, состоящий из параллельных (но не равноудалённых) прямых, пересекающих горизонтальную ось под углом 135° (удобно, чтобы углы, образуемые прямыми с обеими осями, были достаточно велики).

Вообще, задача *параллельной анаморфозы* состоит в следующем: для данной функции двух переменных F найти такие отображения f, g, h (если они существуют), для которых

$$h[F(x, y)] = f(x) + g(y), \quad (2)$$

т.е. преобразовать представление функции F линиями уровня в *номограмму из параллельных прямых*, как на рис. 16. Разумеется, (2) обобщает уравнение Пексидера (4.25). Отметим, что и на исходной (рис. 15), и на преобразованной (рис. 16) номо-

¹⁾ Подробнее о номографии см., например: *Хованский Г. С.* Основы номографии. — М., 1976.

граммах имеется несколько семейств линий: прямые, параллельные осям координат, составляют ещё два семейства. Линиям из трёх семейств отвечают значения пере-

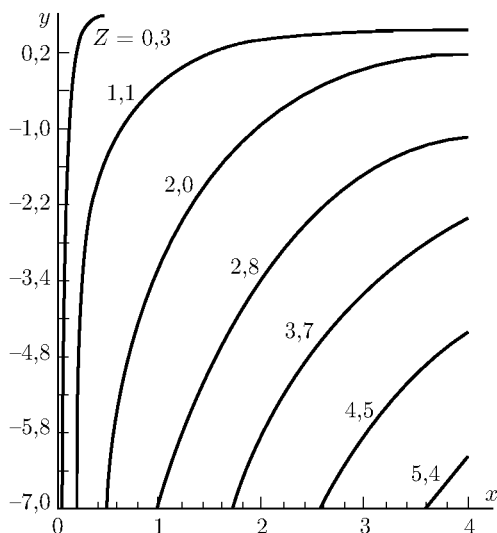


Рис. 15

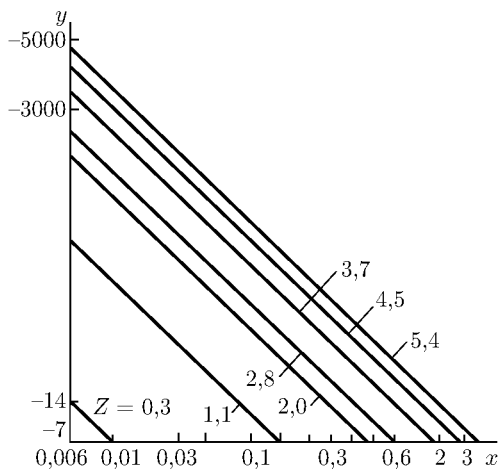


Рис. 16

менных x, y, z соответственно; через точку пересечения данной x -линии с данной y -линией проходит некоторая z -линия, которой соответствует определённое значение переменного z . (Аналогично, y и z определяют x , а x и z определяют y .)

Более широкий класс составляют *прямолинейные* номограммы, где каждое из трёх семейств состоит из (не обязательно параллельных) прямых. Такие номограммы возникают в результате общей *анаморфозы*.

Другой важный тип номограмм составляют *номограммы из выравненных точек*. Как известно, при проективной двойственности точки соответствуют прямым, причём точки одной прямой соответствуют прямым, пересекающимся в одной точке, и наоборот. На прямолинейной номограмме переменным x, y, z отвечают три семейства прямых, и пересечение x -, y - и z -линий в одной точке соответствует функциональному соотношению $z = F(x, y)$ между значениями переменных. Номограммы из выравненных точек двойственны прямолинейным номограммам. Здесь значения переменных x, y, z отвечают точки (или кривые), и соотношение $z = F(x, y)$ выполнено для точек x, y, z , если и только если они лежат на одной прямой (рис. 17).

Если на прямолинейной номограмме каждый из трёх пучков состоит из прямых, проходящих через одну точку (конечную или бесконечно удалённую), то на двойственной номограмме из выравненных точек все три шкалы прямолинейны (рис. 18). Если эти три точки лежат на бесконечно удалённой прямой, т.е. каждый пучок состоит из параллельных прямых, как на диаграмме с параллельными шкалами, то на второй номограмме соответствующие три прямые проходят через одну точку. Она также может быть бесконечно удалённой, и тогда мы получаем *номограмму из выравненных точек с параллельными прямолинейными шкалами* (рис. 19). Если точки на шкалах определяются функциями ϕ, ψ, χ , а расстояния между шкалами

равны $p, q^1)$, то выполняется равенство

$$(p + q)\chi(z) = p\phi(x) + q\psi(y),$$

равносильное условию (2). Здесь снова видно значение условия (2) и класса функций, для которых существуют такие отображения. Соответствующие необходимые и достаточные условия изучаются в теории тканей (сетей).

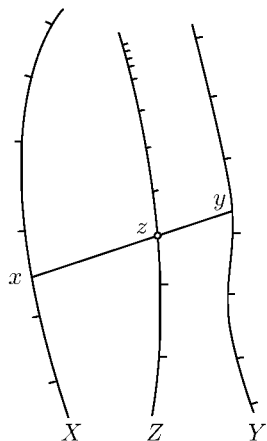


Рис. 17

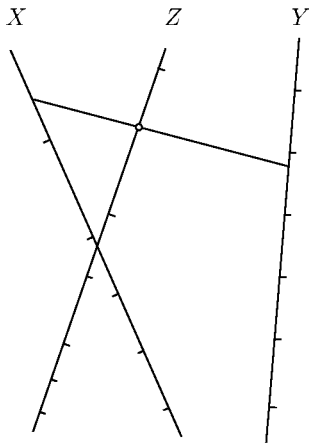


Рис. 18

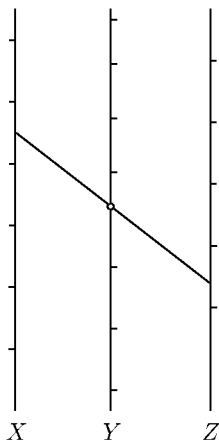


Рис. 19

До сих пор мы не конкретизировали область определения и значений функции F , а также области, в которых выполнены уравнения (1) или (2). В нашем примере с $z = (x(1 - y))^{1/2}$ естественной областью определения для F служит множество $\{(x, y) \mid x > 0, y < 1\}$, а областью значений — $\mathbb{R}_+$. В общем случае нужно рассматривать обобщённый группоид $(X, Y, Z; F)$, состоящий из трёх множеств X, Y, Z и операции (функции) F , которая каждой паре $x \in X, y \in Y$ ставит в соответствие элемент $z \in Z$. Поскольку в этой главе не потребуется перемножать числа, мы будем вместо $F(x, y)$ писать для простоты $xy, x \circledast y$ и т. п.; аналогично, вместо $(X, Y, Z; F)$ будем писать $(X, Y, Z; \cdot)$. Обобщённый группоид является обобщённой квазигруппой, если

при всех $x \in X, y \in Y, z \in Z$ существуют и единственны $x' \in X, y' \in Y$,
такие что $x'y = z, xy' = z$. (3)

Мы получаем обычные группоиды и квазигруппы, если $X = Y = Z$. Лупа — это квазигруппа с единицей или нейтральным элементом e , для которого

$$ze = ez = z \quad \text{при всех } z \in Z. \quad (4)$$

Привычное алгебраическое понятие изоморфизма здесь следует заменить изотопией. Два обобщённых группоида (например, квазигруппы) $(X, Y, Z; \circledast)$ и $(X', Y', Z'; \circledcirc)$ изотопны, если существуют биекции $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y', h : Z \rightarrow Z'$, такие что

$$h(x \circledast y) = f(x) \circledcirc g(y) \quad (x \in X, y \in Y). \quad (5)$$

¹⁾ Последующее равенство подразумевает, что p и q — расстояния от шкалы Z до шкал Y и X соответственно.

Тройка (f, g, h) называется *изотопией*, так же как и само соотношение между $(X, Y, Z; \textcircled{1})$ и $(X', Y', Z'; \textcircled{2})$. Например, если f, g, h в уравнении (2) — взаимно однозначные отображения в $\mathbb{R}$, то (2) выражает *изотопию между* $(X, Y, Z; F)$ и $(R_1, R_2, R_3; +)$, где R_i ($i = 1, 2, 3$) — подмножества в $\mathbb{R}$, а $+$ обозначает сложение вещественных чисел. Как уже отмечено, с помощью теории тканей мы получим условия, при которых выполняются более общие уравнения, где $(R_1, R_2, R_3; +)$ заменено произвольной абелевой группой.

Ткань, соответствующая обобщённому группоиду, состоит из всевозможных точек (x, y) , где $x \in X, y \in Y$, и из трёх семейств линий. А именно, X -, Y - и Z -линии определяются условиями

$$X_a = \{(a, y) \mid y \in Y\}, \quad Y_b = \{(x, b) \mid x \in X\},$$

$$Z_c = \{(x, y) \mid xy = c, x \in X, y \in Y\}$$

соответственно. Мы получаем три семейства линий, когда точки a, b, c пробегают соответственно множества X, Y, Z . Точка (x, y) *лежит на* X_a (на Y_b , на Z_c), если (x, y) принадлежит X_a (или Y_b , или Z_c). Каждая точка из $X \times Y$ лежит ровно на одной линии каждого семейства. Линии X_a и Z_c *пересекаются* в точке (x, y) , если $(x, y) \in X_a$ и $(x, y) \in Z_c$ (аналогично и в случае Y_b). Каждая точка принадлежит только одной линии каждого семейства, и потому две линии одного семейства *не пересекаются*. Линия из X -семейства может пересечься с линией из Y -семейства *только в одной точке*. Если (и только если) ткань соответствует *обобщённой квазигруппе*, то любая X (или Y)-линия пересекается с любой Z -линией *ровно в одной точке*.

Мы говорим, что ткань (как и соответствующий обобщённый группоид) удовлетворяет *условию Томсена* (сокращённо T), если

$$x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_3 = x_3 y_1 \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2 \quad (x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y) \quad (6)$$

(см. рис. 20 для вещественного случая). Условие T *инвариантно относительно изотопии*. Это и есть необходимое и достаточное условие, о котором шла речь выше. (Thomsen, 1929; ниже, в том числе в последующих результатах и упражнениях, мы ссылаемся не на первоисточники, а на более доступную работу: Aczél, 1965a.)

Лемма 1. *Обобщённая квазигруппа $(X, Y, Z; \cdot)$ изотопна абелевой группе, если и только если она удовлетворяет условию Томсена (6).*

Доказательство. Утверждение «только если» легко проверяется. Для доказательства обратного утверждения построим на множестве Z лупу, изотопную исходной квазигруппе, и докажем, что она является абелевой группой. Фиксируем произвольные $u \in X, v \in Y$. Поскольку $(X, Y, Z; \cdot)$ — обобщённая квазигруппа, то формула

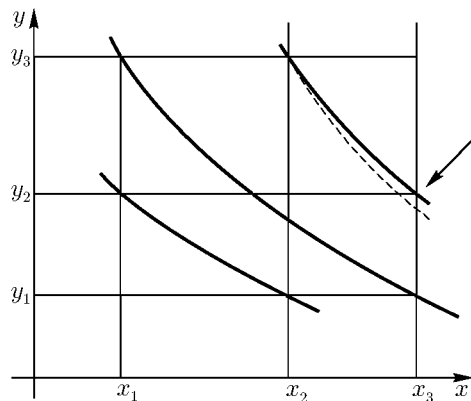


Рис. 20

$$(xv) \circ (uy) = xy \quad (x \in X, y \in Y) \quad (7)$$

однозначно и корректно определяет операцию $\circ$ на Z . В самом деле, для данных $s, t \in Z, u \in X, v \in Y$ найдутся единственные $x \in X, y \in Y$, такие что

$$s = xv, \quad t = uy. \quad (8)$$

Условия (7) и (8) однозначно определяют $s \circ t$. (Необходимость ввести эту новую операцию и заставляет рассматривать обобщённые квазигруппы, а не просто обобщённые группоиды. Однако условия разрешимости соответствующих уравнений можно ослабить; см., например, ссылки в конце главы.) Сопоставление (7) с (5) показывает, что $(X, Y, Z; \cdot)$ и $(Z, Z, Z; \circ)$ (сокращённо $(Z, \circ)$) *изотопны*: как мы только что видели, соответствия $f(x) = xv$, $g(y) = uy$, $h(z) = z$ биективны. Ясно, что свойство быть обобщённой квазигруппой сохраняется при изотопии, и потому $(Z, \circ)$ — квазигруппа. Наконец, положив в (7) $x = u$ или $y = v$, видим, что $e = uv$ является единицей (см. (4)). Таким образом, $(Z, \circ)$ — *луна, изотопная квазигруппе* $(X, Y, Z; \cdot)$. Фактически мы нашли *семейство таких лун, зависящих от выбора* $u \in X, v \in Y$.

Теперь докажем (основываясь на статье: Aczél, 1981c), что если выполнено условие T , то $(Z, \circ)$ — абелева группа. Как отмечено, условие T сохраняется при изотопии. Возьмём в (6) $y_1 = e, y_2 = s, y_3 = t, x_1 = r, x_2 = r \circ s, x_3 = r \circ t$. Тогда

$$x_1 \circ y_2 = r \circ s = x_2 \circ y_1, \quad x_1 \circ y_3 = r \circ t = x_3 \circ y_1,$$

и в силу условия T

$$x_2 \circ y_3 = x_3 \circ y_2,$$

или

$$(r \circ s) \circ t = (r \circ t) \circ s \quad (9)$$

при любых $r, s, t \in Z$. Положив в (9) $r = e$, получаем *коммутативность*:

$$s \circ t = t \circ s.$$

Теперь (9) можно превратить в

$$t \circ (r \circ s) = (r \circ s) \circ t = (r \circ t) \circ s = (t \circ r) \circ s,$$

т. е. квазигруппа $(Z, \circ)$ также и *ассоциативна*. Таким образом, она является абелевой группой. Так как она изотопна квазигруппе $(X, Y, Z; \cdot)$, то лемма 1 доказана. ■

Вернёмся к уравнению обобщённой бисимметрии (1):

$$(x \textcircled{1} y) \textcircled{2} (z \textcircled{3} w) = (x \textcircled{4} z) \textcircled{5} (y \textcircled{6} w) \quad \text{для всех } x \in X, y \in Y, z \in Z, w \in W \quad (10)$$

с неизвестными функциями (операциями) $\textcircled{1} : X \times Y \rightarrow S, \textcircled{2} : S \times T \rightarrow G, \textcircled{3} : Z \times W \rightarrow T, \textcircled{4} : X \times Z \rightarrow U, \textcircled{5} : U \times V \rightarrow G, \textcircled{6} : Y \times W \rightarrow V$. Для краткости мы будем указывать в обобщённом группоиде только операцию, т. е. писать $\textcircled{1}$ вместо $(X, Y, S; \textcircled{1})$ и т. п. Справедлива следующая теорема ¹⁾ (Aczél–Belousov–Hosszú, 1960; Aczél, 1965a; Taylor, 1972b, 1973a, 1978).

Теорема 2. *Обобщённые квазигруппы $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6}$ удовлетворяют уравнению (10), если и только если существуют абелева группа $(G, \circ)$ и биекции $f : X \rightarrow G, g : Y \rightarrow G, h : Z \rightarrow G, k : W \rightarrow G, m : S \rightarrow G, n : T \rightarrow G, p : U \rightarrow G, q : V \rightarrow G$, такие что при всех $x \in X, y \in Y, z \in Z, w \in W, s \in S, t \in T, u \in U, v \in V$*

$$s \textcircled{2} t = m(s) \circ n(t), \quad (11)$$

$$x \textcircled{1} y = m^{-1}[f(x) \circ g(y)], \quad (12)$$

$$z \textcircled{3} w = n^{-1}[h(z) \circ k(w)], \quad (13)$$

¹⁾ Ниже доказано, что обобщённые квазигруппы из уравнения (10) изотопны одной и той же абелевой группе. Вывод соотношений (11)–(16) см. в статье Aczél–Belousov–Hosszú, 1960. Обратное утверждение теоремы проверяется непосредственно.

$$u \circledcirc v = p(u) \circ q(v), \quad (14)$$

$$x \circledast z = p^{-1}[f(x) \circ h(z)], \quad (15)$$

$$y \circledcirc w = q^{-1}[g(y) \circ k(w)]. \quad (16)$$

Доказательство. Покажем, что операция $\circledast$ удовлетворяет условию Томсена. Пусть

$$x_1 \circledast y_2 = x_2 \circledast y_1, \quad (17)$$

$$x_1 \circledast y_3 = x_3 \circledast y_1 \quad (18)$$

($x_1, x_2, x_3 \in X, y_1, y_2, y_3 \in Y$). Тогда в силу (10)

$$\begin{aligned} (x_2 \circledast z) \circledcirc (y_1 \circledcirc w) &= (x_2 \circledast y_1) \circledast (z \circledcirc w) = \\ &= (x_1 \circledast y_2) \circledast (z \circledcirc w) = (x_1 \circledast z) \circledcirc (y_2 \circledcirc w). \end{aligned} \quad (19)$$

Существуют такие $z_1, z_2 \in Z, w_1, w_2 \in W$, что для данных x_1, x_3, u, y_1, y_3, v

$$x_1 \circledast z_1 = x_3 \circledast z_2 = u, \quad y_1 \circledcirc w_1 = y_3 \circledcirc w_2 = v. \quad (20)$$

Положив в (19) $z = z_1, w = w_1$, получаем из (20):

$$(x_2 \circledast z_1) \circledcirc (y_3 \circledcirc w_2) = (x_3 \circledast z_2) \circledcirc (y_2 \circledcirc w_1)$$

и, с учётом (10),

$$(x_2 \circledast y_3) \circledast (z_1 \circledcirc w_2) = (x_3 \circledast y_2) \circledast (z_2 \circledcirc w_1). \quad (21)$$

В силу (20)

$$(x_1 \circledast z_1) \circledcirc (y_3 \circledcirc w_2) = (x_3 \circledast z_2) \circledcirc (y_1 \circledcirc w_1)$$

и снова ввиду (10)

$$(x_1 \circledast y_3) \circledast (z_1 \circledcirc w_2) = (x_3 \circledast y_1) \circledast (z_2 \circledcirc w_1).$$

В силу (18) выражения в первых скобках левой и правой части равны. Поскольку операция $\circledast$ квазигрупповая и, следовательно, сократимая (см. упр.17.5), то

$$z_1 \circledcirc w_2 = z_2 \circledcirc w_1.$$

Теперь из (21) аналогично вытекает, что

$$x_2 \circledast y_3 = x_3 \circledast y_2,$$

т.е. операция $\circledast$ действительно удовлетворяет условию Томсена. По лемме 1 обобщённая квазигруппа $(X, Y, S; \circledast)$ изотопна некоторой абелевой группе $(G, \circ)$, т.е. мы доказали (12).

Теперь покажем, что все обобщённые квазигруппы $\circledast$ – $\circledcirc$ изотопны. Положим в (10) $z = a, w = b$:

$$(x \circledast y) \circledast (a \circledcirc b) = (x \circledast a) \circledcirc (y \circledcirc b).$$

Поскольку отображения $f(x) = x \circledast a, g(y) = y \circledcirc b, h(s) = s \circledast (a \circledcirc b)$, где $x \in X, y \in Y, s \in S$, являются биекциями, то $\circledast$ и $\circledcirc$ изотопны. Аналогично доказывается изотопия между $\circledast$ и $\circledcirc$, а также между $\circledast, \circledast$ и между $\circledast, \circledcirc$. Таким образом, изотопны все операции с нечётными номерами, так же как и все операции с чётными номерами.

Осталось показать, что, например, изотопны ① и ④. Выберем константы $c \in T$, $d \in V$. Для каждого $y \in Y$ существует единственное $w = \phi(y)$, для которого $y \circledast w = d$, и единственное $z = \psi(w) \in Z$, для которого $z \circledast w = c$. Подставим их в (10):

$$(x \circledast y) \circledast c = (x \circledast \psi[\phi(y)]) \circledast d,$$

откуда вытекает, что ① и ④, а тем самым и все шесть обобщённых квазигрупп, изотопны. ■

Условия теоремы 2 можно ослабить (в частности, ограничение, что все обобщённые группоиды являются обобщёнными квазигруппами), и в такой общности могут быть решены и другие подобные уравнения с несколькими неизвестными многоместными функциями. См., например: Aczél–Belousov–Hosszú 1960; Aczél, 1966с, р. 310–319; Taylor, 1972b, 1973a, 1978.

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1–11 см., например: Aczél, 1965a.)

1. Мы говорим, что ткань удовлетворяет *условию Рейдемейстера* R , если

$$(x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_4 = x_2 y_3 \ \& \ x_3 y_2 = x_4 y_1) \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3.$$

Покажите, что в случае (обобщённых) квазигрупп условие Рейдемейстера следует из условия Томсена (6): $T \Rightarrow R$ (сделайте чертежи).

2. Покажите, что обобщённая квазигруппа изотопна группе, если и только если она удовлетворяет условию R из упр. 1 (сделайте чертёж).

3. С помощью результатов упр. 1 и 2 дайте другое доказательство леммы 1.

4. Условия Бола B_1 , B_2 , B_3 определяются следующим образом:

$$B_1 : (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_4 = x_2 y_3 \ \& \ x_2 y_2 = x_4 y_1) \Rightarrow x_2 y_4 = x_4 y_3,$$

$$B_2 : (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_4 = x_2 y_2 \ \& \ x_3 y_2 = x_4 y_1) \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_2,$$

$$B_3 : (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_4 = x_2 y_3 \ \& \ x_3 y_2 = x_4 y_1) \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3.$$

Покажите, что для (обобщённых) квазигрупп верно, что $(B_1 \ \& \ B_2) \Rightarrow B_3$ (сделайте чертёж).

5. Покажите, что обобщённая квазигруппа удовлетворяет условию B_1 или B_2 , если и только если она изотопна лупе $(L, \circ)$, соответственно удовлетворяющей тождеству

$$y \circ [z \circ (y \circ x)] = [y \circ (z \circ y)] \circ x \quad (22)$$

или

$$[(x \circ y) \circ z] \circ y = x \circ [(y \circ z) \circ y] \quad (23)$$

(сделайте чертёж). *Замечание:* для B_3 такое тождество неизвестно.

6*. Лупа $(L, \circ)$ называется *лупой Муфанг*, если она удовлетворяет тождеству

$$[(x \circ y) \circ z] \circ y = x \circ [y \circ (z \circ y)].$$

Докажите, что лупа является лупой Муфанг, если и только если в ней выполнены (22) и (23). Соедините этот результат с упр. 4 и 5 и изобразите следствия на чертеже.

7. Условие шестиугольника H имеет вид

$$H : (x_1 y_2 = x_2 y_1 \ \& \ x_1 y_3 = x_2 y_2 = x_3 y_1) \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2.$$

Покажите, что квазигруппа удовлетворяет условию H , если и только если в каждой лупе, ей изотопной, выполнено тождество $x \circ (x \circ x) = (x \circ x) \circ x$ (сделайте чертёж).

8. Левый обратный элемент x^{-1} в лупе определяется условием $x^{-1} \circ x = e$. Покажите, что в квазигруппе выполнено условие H (см. упр. 7), если и только если в каждой лупе, ей изотопной, левые обратные являются и правыми (т. е. $x \circ x^{-1} = e$).

9*. Степени элемента в лупе определяются равенствами $x^0 = e$, $x^{n+1} = x \circ x^n$ ($n \geq 0$), $x^{-n} = (x^{-1})^n$ ($n \geq 1$, см. упр. 8). Докажите, что в квазигруппе выполнено условие H , если и только если в каждой лупе, изотопной ей, выполнено тождество $x^{m+n} = x^m \circ x^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) (сделайте чертежи).

10*. Пусть собственный промежуток вещественной оси I является лупой относительно непрерывной операции $\circ$, причём $x^{m+n} = x^m \circ x^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) (определение степеней см. в упр. 9). Покажите, что $(I, \circ)$ и $(\mathbb{R}, +)$ изоморфны как упорядоченные лупы, т. е. существует непрерывная строго монотонная функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$x \circ y = f^{-1}[f(x) + f(y)] \quad (x, y \in I).$$

Докажите как следствие, что для непрерывных (обобщённых) квазигрупп на I равносильны условия замыкания T (6), R (упр. 1), B_1 , B_2 , B_3 (упр. 4) и H (упр. 7).

11. Покажите, что условие Томсена (6) для (обобщённой) квазигруппы равносильно коммутативности ($x \circ y = y \circ x$) *всех* луп, изотопных ей. Сопоставьте этот результат с леммой 1.

12. Покажите, что (обобщённая) квазигруппа удовлетворяет условию B_1 или B_2 , если и только если в *каждой* лупе, ей изотопной, соответственно выполнено тождество $(x \circ x) \circ y = x \circ (x \circ y)$ или $(x \circ y) \circ y = x \circ (y \circ y)$.

13*. (Aczél, 1965a, 1966c, p. 311–313; Taylor, 1972b, 1978.) Найдите общее решение ①, ②, ③, ④ следующего уравнения обобщённой ассоциативности на квазигруппах: $(x \textcircled{1} y) \textcircled{2} z = x \textcircled{3} (y \textcircled{4} z)$. Можно ли ослабить предположение, что соответствующие множества являются квазигруппами относительно всех четырёх операций?

14*. (Strambach, 1975.) Пусть промежуток вещественной оси I является квазигруппой относительно непрерывной операции $\square$. Найдите все $(I, \square)$, в которых выполнено тождество $(x \square y) \square u = (x \square u) \square (y \square u)$ (см. (17.26)).

Глава 19

СНОВА О СЛОЖНЫХ УРАВНЕНИЯХ. ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УСРЕДНЕНИЯ

Нам уже встречались *сложные уравнения*, где неизвестная функция действует на комбинацию её самой и переменного. В этой главе мы рассмотрим различные уравнения такого рода и их применения.

В § 1, 2 изложен достаточно общий метод отыскания подгрупп непрерывной группы преобразований путём решения сложных уравнений (без допущений о регулярности). В § 3 решается, в числе других, типичное сложное уравнение на абелевой группе

$$f(x + f(y)) = f(y + f(x)).$$

Оно возникло из задачи усреднения в теории турбулентных движений жидкости и произвело на свет несколько семейств линейных операторов, удовлетворяющих дополнительным уравнениям: операторы Рейнольдса, усредняющие, интерполяционные, операторы продолжения, мультипликативно симметричные, операторы дифференцирования и т. д. В трёх последних параграфах мы даём представления для этих операторов (используя сведения из функционального анализа, в частности теорему Рисса о представлении) и описываем их свойства для случая, когда операторы ограничены и действуют на пространствах непрерывных функций на компакте (относительно равномерной нормы).

Приведём некоторые сведения, касающиеся этих вопросов, особенно темы первых двух параграфов.

При изучении заданной непрерывной группы (или полугруппы) преобразований всегда бывает важно найти все её подгруппы. Классический метод Ли для определения однопараметрических подгрупп предполагает строгую регулярность. Применение функциональных уравнений возможно и при более слабых допущениях (Gołąb-Schinzel, 1959; Aczél-Gołąb, 1960, p. 24–86, 1970; Gołąb-Krzeszowiak, 1970; Dhombres, 1984b и др.), а именно: мы будем рассматривать проблему в следующей постановке. Требуется найти подполугруппы H в полугруппе (или группе) $(\mathcal{G}, *)$, где $\mathcal{G} = G \times F$ — декартово произведение непустых множеств G, F .

Будем говорить, что подмножество $H \subset \mathcal{G}$ *точно* (*faithfully*) зависит от множества E , если существует отображение $g : E \rightarrow H$, записываемое как $g(u) = (\alpha(u), \beta(u))$, такое что

(i) $g(E) = H$

и либо

(ii) $\beta(E) = F, \beta(u) = \beta(u') \Rightarrow \alpha(u) = \alpha(u'),$

либо

(iii) $\alpha(E) = G, \alpha(u) = \alpha(u') \Rightarrow \beta(u) = \beta(u').$

Пусть E, F, G — топологические пространства, $\mathcal{G}$ наделено топологией произведения, а операция $*$ непрерывна. Будем говорить, что H зависит от E *точно и непрерывно*, если отображение g непрерывно, в случае (ii) отображение β локально допускает непрерывный подъём (т. е. для каждого $x \in F$ существует открытая окрестность U и непрерывное отображение $\gamma : F \rightarrow E$, такие что $\beta \circ \gamma$ — тождественное отображение на U), а в случае (iii) отображение α локально допускает непрерывный подъём.

Иными словами, в этой ситуации можно рассматривать E как семейство параметров для H . Будем говорить, что H допускает точную непрерывную параметризацию. Мы хотим определить все подполугруппы в $(\mathcal{G}, *)$, допускающие такую параметризацию (не требуя слишком сильной регулярности). Для любых $u, v \in E$ существует такое $w \in E$, что

$$(\alpha(w), \beta(w)) = (\alpha(u), \beta(u)) * (\alpha(v), \beta(v)). \quad (1)$$

Пусть, например, имеет место случай (ii). Тогда уравнение $f(\beta(u)) = \alpha(u)$ однозначно определяет функцию $f : F \rightarrow G$ (поскольку $\beta(E) = F$ и из $\beta(u) = \beta(u')$ следует $\alpha(u) = \alpha(u')$). Эта функция непрерывна, так как отображение $g : E \rightarrow H$ (а потому и $\alpha : E \rightarrow G$) непрерывно, а $\beta : E \rightarrow F$ сюръективно и локально допускает непрерывный подъём. Положив $x = \beta(u)$, $y = \beta(v)$, $z = \beta(w)$, получаем из (1):

$$(f(z), z) = (f(x), x) * (f(y), y). \quad (2)$$

Правая часть однозначно определяет z и $f(z)$; таким образом, (2) является функциональным уравнением для f . Наша цель — решить это уравнение и как следствие получить искомое описание множества H в терминах функции f . Достоинство такого метода в том, что он показывает относительную несущественность множества параметров E . Естественно, в случае (iii) мы получаем другое функциональное уравнение¹⁾ и действуем аналогично. Эта глава посвящена сложным функциональным уравнениям такого рода.

19.1. Однопараметрические подгруппы аффинных групп

Вид функционального уравнения (2) зависит от бинарной операции $*$; в случае сложения или умножения уравнение сводится к классическим. Приведём два примера.

Пусть сначала $F = G = (\mathbb{R}, +)$ и $(\mathcal{G}, *) = G \oplus F = (\mathbb{R}^2, +)$. Тогда уравнение (2) превращается в аддитивное уравнение Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

Если же F — аддитивная группа $(\mathbb{R}, +)$, а G — мультипликативная группа $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, то (2) становится экспоненциальным уравнением Коши

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

Рассмотрение более сложных операций $*$ начнём с уравнения

$$(\alpha, \beta) * (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha', \alpha\beta' + \beta), \quad (5)$$

где $(G, \cdot)$ — мультипликативная полугруппа, действующая на аддитивной группе $(F, +)$. Полугруппу $(\mathcal{G}, *)$ можно считать состоящей из всех собственных аффинных преобразований на F ($x \mapsto \alpha x + \beta$, $\beta \in F$, $\alpha \in G \setminus \{0\}$). Тогда (2) превращается в уравнение

$$f(x + f(x)y) = f(x)f(y), \quad (6)$$

впервые рассмотренное в работах Aczél, 1957a и Gołąb–Schinzel (см.: Aczél–Gołąb 1970). Это типичное сложное функциональное уравнение в том смысле, что оно описывает действие функции f на выражение, содержащее её значения, в данном случае на $x + f(x)y$.

¹⁾ А именно $(z, f(z)) = (x, f(x)) * (y, f(y))$, где $\beta(u) = f(\alpha(u))$; см. (12).

Полезный приём при изучении подобных уравнений — рассмотреть множество S периодов функции $f: F \rightarrow G$, т. е. таких $y \in F$, что

$$f(x+y) = f(x) \quad \text{при всех } x \in F. \quad (7)$$

Легко проверить, что S — подгруппа в группе F . (Если $y_1, y_2 \in S$, то $f(x+y_1+y_2) = f(x+y_1) = f(x)$, поэтому $y_1+y_2 \in S$. Так как уравнение (7) можно записать в виде $f(x-y) = f(x)$, то $-y \in S$. Разумеется, нуль также содержится в S .)

Но из уравнения (6) вытекают и другие свойства множества S . Именно, если $f(x_1) = f(x_2)$ и существует $f(x_1)^{-1} \in (G, \cdot)$, то $x_2 - x_1 \in S$. Действительно, в этом случае для любого $x \in F$ существует такое $y \in F$, что $x = x_1 + f(x_1)y$. В силу (6)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 + f(x_1)y) = f(x_1)f(y) = f(x_2)f(y) = f(x_2 + f(x_2)y) = \\ &= f(x_2 + f(x_1)y) = f(x + x_2 - x_1), \end{aligned}$$

т. е. $x_2 - x_1 \in S$.

Предложение 1. *Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (6), если и только если f имеет одну из следующих взаимоисключающих форм:*

$$f(x) = ax + 1 \quad (a \in \mathbb{R}), \quad (8)$$

$$f(x) = 0, \quad (9)$$

$$f(x) = \sup(ax + 1, 0) \quad (a \in \mathbb{R}^*). \quad (10)$$

Доказательство. По непрерывности, подгруппа S замкнута в $\mathbb{R}$. Известно (см. упр. 1), что все замкнутые аддитивные подгруппы в $\mathbb{R}$ совпадают с $\mathbb{R}$ или с $\alpha\mathbb{Z}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Если $S = \mathbb{R}$, то функция f тождественно равна константе, а именно единице, что соответствует случаю (8) при $a = 0$, или нулю, что соответствует случаю (9). Последний случай мы далее не рассматриваем.

Пусть теперь $S = \alpha\mathbb{Z}$ и $f(x) \not\equiv 0$. Ввиду (6) $f(0) = 1$, и по непрерывности существует $y_0 \neq 0$, для которого $f(y_0) \neq 0$. Если при этом $f(x) \neq 0$, то в силу (6)

$$0 \neq f(x)f(y_0) = f(x + f(x)y_0) = f(y_0 + f(y_0)x).$$

Значит, $z = x - y_0 + f(x)y_0 - f(y_0)x \in S$. Если $z \neq 0$, то $\alpha \neq 0$. Будучи периодичной и непрерывной, функция f ограничена по модулю, причём максимум модуля достигается в некоторой точке x_0 . Так как $f(x_0) \neq 0$, то в любой окрестности точки x_0 найдутся такие x_1, x_2 , что $x_1 < x_0 < x_2$ и $f(x_1) = f(x_2) \neq 0$, откуда $x_1 - x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$. Но случай $\alpha \neq 0$ невозможен, поскольку x_1, x_2 можно выбрать в сколь угодно малой окрестности точки x_0 , и тогда $|x_1 - x_2| < \alpha$. Поэтому $\alpha = 0$ и $z = 0$.

Следовательно, если $f(x) \neq 0$, то $f(x) = ax + 1$, где $a = (f(y_0) - 1)/y_0$. С учётом непрерывности функция f имеет вид (8), (10) или

$$f(x) = \inf(ax + 1, 0) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (11)$$

где a — ненулевая вещественная константа.

Обратно, (8), (9) и (10) являются непрерывными решениями уравнения (6). Однако для формы (11) это неверно. В самом деле, из $f(x) \neq 0$ тогда вытекало бы $f(x) < 0$. В противоречии с этим, при $y = x$ уравнение (6) принимает вид $f(x)^2 = f(x + xf(x))$. Предложение 1 доказано. ■

Вернёмся к задаче отыскания подгрупп группы всех собственных аффинных преобразований на $\mathbb{R}$.

Предложение 2. Единственные подполугруппы в группе всех собственных линейных отображений $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, имеющие точную непрерывную параметризацию, — это группа всех сдвигов

$$x \mapsto x + \beta \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

и группы H_a ($a \in \mathbb{R}$), состоящие из преобразований вида

$$x \mapsto \alpha(x + a) - a \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

Доказательство (обозначения см. в начале главы). В данном случае $G = \mathbb{R}^*$, $F = \mathbb{R}$. Сначала рассмотрим случай точной параметризации (ii) и найдём непрерывные решения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ функционального уравнения (6). Поскольку функция f нигде не равна нулю, то в силу предложения 1 $f(x) \equiv 1$. Так как параметризация точная, то искомые подполугруппы сводятся к группе всех сдвигов¹⁾.

В случае (iii) нужно найти непрерывные решения $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(xy) = xf(y) + f(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}^*). \quad (12)$$

Ввиду симметрии левой части

$$(x - 1)f(y) = (y - 1)f(x),$$

откуда для некоторого $a \in \mathbb{R}$ получаем

$$f(x) = a(x - 1) \quad (13)$$

(непрерывность здесь не использовалась). Обратно, функция (13) с любым $a \in \mathbb{R}$ является (непрерывным) решением уравнения (12).

В результате для каждого $a \in \mathbb{R}$ получаем семейство H_a , состоящее из всех преобразований вида $x \mapsto \alpha(x + a) - a$, где α пробегает $\mathbb{R}^*$. Это семейство является подгруппой. Предложение 2 доказано. ■

Решая уравнения (6) и (12) в более общей ситуации, получаем и более общий результат:

Предложение 3. Пусть F — вещественное топологическое линейное пространство, $\mathcal{G}$ — группа всех собственных аффинных преобразований на F , т. е. преобразований вида

$$x \mapsto \alpha x + \beta \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in F).$$

Тогда единственные подполугруппы в $\mathcal{G}$, имеющие точную непрерывную параметризацию, — это группа всех сдвигов

$$x \mapsto x + \beta \quad (\beta \in F)$$

и группы H_a ($a \in F$), состоящие из всех преобразований вида

$$x \mapsto \alpha(x + a) - a \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

Доказательство. В данном случае $G = \mathbb{R}^*$. Уравнение (12) для $f : \mathbb{R}^* \rightarrow F$ снова имеет решение (13), но a теперь пробегает F . Отсюда возникает семейство подгрупп H_a в $\mathcal{G}$. Уравнение (6) для функции $f : F \rightarrow \mathbb{R}^*$ требует большего внимания. Для полноты мы найдём все непрерывные решения $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (6). Нам потребуется

¹⁾ В данном случае $\alpha(u) \equiv 1$ и в силу (ii) $\beta(E) = \mathbb{R}$.

Предложение 4. Пусть F — вещественное топологическое линейное пространство. Непрерывные решения $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (6) имеют одну из следующих взаимоисключающих форм:

$$f(x) = \langle x, x^* \rangle + 1 \quad (x^* \in F^*), \quad (14)$$

$$f(x) = 0, \quad (15)$$

$$f(x) = \sup (\langle x, x^* \rangle + 1, 0) \quad (x^* \in F^* \setminus \{0\}). \quad (16)$$

(Обратите внимание, что здесь F^* — двойственное топологическое пространство для F , а не $F \setminus \{0\}$ ¹⁾.)

Доказательство. Положив $y = 0$ в (6), видим, что либо выполнено (15), либо $f(0) = 1$, что и предполагается далее. Вначале ограничим функцию f на одномерные линейные подпространства в F . А именно, для $x_0 \in F \setminus \{0\}$ определим функцию $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$g(\lambda) = f(\lambda x_0). \quad (17)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (6): $g(\lambda + g(\lambda)\mu) = f(\lambda x_0 + f(\lambda x_0)\mu x_0) = f(\lambda x_0)f(\mu x_0) = g(\lambda)g(\mu)$. Поэтому g имеет вид (8) или (10), но не (9), так как $g(0) = f(0) = 1$.

Теперь докажем, что множество $I = \{x \in F \mid f(x) = 1\}$ является замкнутой гиперплоскостью. Оно непусто, так как $f(0) = 1$. Если $x, y \in I$, то ввиду (6) $x + y \in I$. Если $x_0 \in I$, то в силу (17) $g(0) = g(1) = 1$. Это исключает для g форму (10) (если $1 = g(1) = \sup(a + 1, 0)$, то $a = 0$ вопреки (10)). В случае (8) получаем $a = 0$, т. е. $g \equiv 1$. Значит, $\lambda x_0 \in I$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, и I — линейное подпространство в F . Оно замкнуто в силу непрерывности функции f .

Пусть теперь векторы $x_1, x_2 \in F$ порождают плоскость, пересечение которой с I состоит лишь из нуля. Определим g_1, g_2 по формуле (17), используя x_1 и x_2 вместо x_0 . Поскольку g_1, g_2 имеют вид (8) или (10), то существуют вещественные λ_1, λ_2 , для которых $g_1(\lambda_1) < 1$, $g_2(\lambda_2) > 1$ (случаи $g_1 \equiv 1$ и $g_2 \equiv 1$ невозможны, так как по предположению имеются векторы x_1, x_2 , не принадлежащие I). Рассмотрим отрезок $[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2]$, состоящий из всех векторов вида $z_\lambda = \lambda(\lambda_1 x_1) + (1 - \lambda)(\lambda_2 x_2)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. Функция f переводит его в отрезок на $\mathbb{R}$, один конец которого находится слева от 1, а другой — справа, и потому этот отрезок содержит 1. Значит, исходный отрезок содержит вектор z_λ , для которого $f(z_\lambda) = 1$. Иначе говоря, ненулевая линейная комбинация векторов x_1, x_2 содержится в I , что противоречит их выбору. Значит, либо $I = F$ и (14) выполнено при $x^* = 0$, либо I — замкнутая гиперплоскость в F . В последнем случае I — множество всех $x \in F$, для которых $\langle x, y^* \rangle = 0$ при некотором фиксированном $y^* \in F^* \setminus \{0\}$. Пусть $x_0 \in F \setminus I$. Любой элемент $x \in F$ имеет вид $y + \lambda x_0$ ($y \in I, \lambda \in \mathbb{R}$). Поэтому (с учётом равенства $f(y) = 1$)

$$f(x) = f(y + \lambda x_0) = f(y + \lambda x_0 f(y)) = f(y)f(\lambda x_0) = g(\lambda) = g\left(\frac{\langle x, y^* \rangle}{\langle x_0, y^* \rangle}\right).$$

Для $a \in \mathbb{R}^*$ положим $x^* = \frac{a}{\langle x_0, y^* \rangle} y^* \in F^* \setminus \{0\}$. Если g имеет вид (8), то $f = \langle x, x^* \rangle + 1$ при всех $x \in F$, т. е. выполнено (14) при $x^* \neq 0$. Если же g имеет вид (10), то $f(x) = \sup(\langle x, x^* \rangle + 1, 0)$, т. е. выполнено (16).

Обратно, нетрудно показать, что функции вида (14), (15) или (16) являются непрерывными решениями уравнения (6). Предложение 4 доказано. ■

¹⁾ А также что x^* не зависит от x .

Окончание доказательства предложения 3. Вернёмся к отысканию подполугрупп в $\mathcal{G}$. Исключим все решения уравнения (6), которые где-либо принимают значение нуль. В силу предложения 4 останется лишь решение $f(x) \equiv 1$, и предложение 3 доказано. ■

Известно и общее решение уравнения (6) без каких-либо условий регулярности на $f: F \rightarrow K$, где F — линейное пространство над полем K . В один год были получены два результата скорее теоретического, чем прикладного значения: характеристика решений уравнения (6) (Javor, 1968) и их явное построение (Wołodźko 1968). Начнём с первого.

Теорема 5. *Не равная тождественно нулю функция $f: F \rightarrow K$, где F — линейное пространство над полем K , является решением уравнения (6), если и только если существуют аддитивная подгруппа L в F , мультипликативная подгруппа Λ в $K \setminus \{0\}$ и функция $l: \Lambda \rightarrow F$, такие что:*

- (a) *если $\lambda \in \Lambda$, $x \in L$, то $\lambda x \in L$, и, обратно, если $y \in L$, $\lambda \in \Lambda$, то существует $x \in L$, для которого $\lambda x = y$ (т. е. $\lambda L = L$ для всех $\lambda \in \Lambda$);*
- (b) *$l(\lambda) \in L$, если и только если $\lambda = 1$;*
- (c) *$l(\lambda_1 \lambda_2) = l(\lambda_1) + \lambda_1 l(\lambda_2) \in L$ при всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$;*
- (d) *$f(x) = \lambda$, если $x \in l(\lambda) + L$, и $f(x) = 0$, если $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (l(\lambda) + L)$.*

Доказательство. Пусть $L = \{x \in F \mid f(x) = 1\}$, $M = F \setminus \ker f \neq \emptyset$, $\Lambda = f(M)$. Как и выше при доказательстве предложения 1, прежде всего определим группу периодов функции f .

Первый шаг: L совпадает с множеством всех периодов для f . Поскольку $f \neq 0$, то, как и в предложении 4, получаем, что $f(0) = 1$, так что L непусто. При $x \in L$, $y \in F$

$$f(x + y) = f(x + f(x)y) = f(x)f(y) = f(y).$$

Таким образом, L содержится в множестве периодов. Обратно, пусть x — период для f , т. е. $f(x + y) = f(y)$ для всех $y \in F$. Положив $y = 0$, получаем, что $f(x) = f(0) = 1$, т. е. $x \in L$. Как следствие, $(L, +)$ — подгруппа в $(F, +)$.

Определим на M бинарную операцию $*$ по формуле $x * y = x + f(x)y$.

Второй шаг: $(M, *)$ — группа. Можно записать (6) в виде

$$f(x * y) = f(x)f(y). \quad (18)$$

Очевидно, M замкнуто относительно операции $*$, причём нуль принадлежит M и является нейтральным элементом ($0 * y = y = y * 0$). Операция $*$ ассоциативна:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= x + f(x)y + f(x + f(x)y)z = x + f(x)y + f(x)f(y)z = \\ &= x + f(x)(y + f(y)z) = x + f(x)(y * z) = x * (y * z). \end{aligned}$$

Наконец, для любого $x \in M$ элемент $x' = -f(x)^{-1}x$ является обратным относительно операции $*$. Действительно, непосредственно получаем $x * x' = 0$. Тогда из (18) вытекает, что $1 = f(x)f(x')$, откуда $f(x') = f(x)^{-1}$. Как следствие, $x' * x = 0$.

Третий шаг: $(\Lambda, \cdot)$ — мультипликативная подгруппа в $K \setminus \{0\}$, а $(L, *)$ — нормальная подгруппа в $(M, *)$. Действительно, f является гомоморфизмом группы $(M, *)$ в мультипликативную группу $K \setminus \{0\}$, образ которого совпадает с Λ , а ядро — с L .

Четвёртый шаг: $\lambda L = L$ при любом $\lambda \in \Lambda$. Так как $(L, *)$ — нормальная подгруппа в $(M, *)$, то при любом $x \in M$ имеем

$$L * x = x * L.$$

Но $f(L) = 1$, поэтому $L * x = L + x$. В то же время $x * L = x + f(x)L$. Значит,

$$L + x = x + f(x)L,$$

откуда $L = f(x)L$. Поэтому $\lambda L = L$ при любом $\lambda \in \Lambda$, и выполнено свойство (а).

Теперь построим отображение $l: \Lambda \rightarrow F$. Так как подгруппа Λ изоморфна M/L , то существует отображение $l: \Lambda \rightarrow M$, такое что

$$f(l(\lambda)) = \lambda \quad \text{при любом } \lambda \in \Lambda \quad (19)$$

(рассмотрим подъём из M/L в M относительно L и отождествим Λ с M/L). Теперь свойство (b) из теоремы 5 становится очевидным.

Для каждого $x \in M$ смежный класс $L * x (= x * L)$, т.е. множество $f^{-1}(f(x))$, совпадает с $L + x$. Ввиду (18) элемент $l(\lambda_1 \lambda_2)$ содержится в $l(\lambda_1) * l(\lambda_2) + L$. Имеем

$$l(\lambda_1 \lambda_2) - l(\lambda_1) * l(\lambda_2) = l(\lambda_1 \lambda_2) - l(\lambda_1) - f(l(\lambda_1))l(\lambda_2) = l(\lambda_1 \lambda_2) - l(\lambda_1) - \lambda_1 l(\lambda_2),$$

т.е. (с) доказано.

Если теперь $x \in l(\lambda) + L$, то $f(x) = \lambda$. Если же $x \notin M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (l(\lambda) + L)$, то

$x \in \ker f$, т.е. $f(x) = 0$. Свойство (d) доказано.

Обратно, пусть (a), (b) и (c) выполнены для каких-либо Λ, l , а множество L таково, как в условии теоремы 5. Функция $f: F \rightarrow K$ корректно определена посредством (d), если множества $l(\lambda) + L$ не пересекаются при различных $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что

$$l(\lambda_1) = l(\lambda_2) + y, \quad y \in L.$$

Так как Λ — подгруппа в $K \setminus \{0\}$, то существует элемент λ_3 , такой что $\lambda_2 = \lambda_1 \lambda_3$. С учётом (с) имеем: $l(\lambda_2) = l(\lambda_1) + \lambda_1 l(\lambda_3) \bmod L$. Поэтому $\lambda_1 l(\lambda_3) \in L$, и на основании (a) получаем $l(\lambda_3) \in L$. Но в силу (b) имеем: $\lambda_3 = 1$, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2$, что и требовалось.

Заметим, что L содержится в группе периодов функции f , определённой посредством (d). Действительно, если $x \in l(\lambda) + L$, то $f(x + L) = f(x)$. А если $x \notin M$, то $(x + L) \cap M = \emptyset$, и снова $f(x + L) = f(x)$.

Вычислим теперь $f(x + f(x)y)$ и $f(x)f(y)$. Возможны следующие случаи.

Если $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (l(\lambda) + L)$, то $f(x) = 0$, $f(x + f(x)y) = f(x) = 0$. Так как $f(x)f(y) = 0$, то при любом y выполнено (6).

Пусть $x \in l(\lambda_1) + L$. Здесь возможны два подслучая. Если $y \in l(\lambda_2) + L$, то для некоторых $z_1, z_2 \in L$

$$x + f(x)y = l(\lambda_1) + z_1 + f(x)(l(\lambda_2) + z_2) = l(\lambda_1) + z_1 + \lambda_1(l(\lambda_2) + z_2).$$

В силу (b) и (с) последнее выражение равно $l(\lambda_1 \lambda_2) \bmod L$. Значит, $f(x + f(x)y) = f(l(\lambda_1 \lambda_2)) = \lambda_1 \lambda_2 = f(l(\lambda_1))f(l(\lambda_2)) = f(x)f(y)$, т.е. (6) снова выполнено.

Если же $y \notin M$, то $f(y) = 0$. Нам достаточно показать, что если $f(x)f(y) = 0$, то $f(x + f(x)y) = 0$. Предположим противное. Тогда существует $\lambda \in \Lambda$, такое что

$$x + f(x)y \in l(\lambda) + L.$$

Положим $\lambda_2 = \lambda/\lambda_1$. Тогда $f(x)y = l(\lambda) - l(\lambda_1) \bmod L$ и на основании (с) имеем $f(x)y = \lambda_1 l(\lambda_2) \bmod L$. Но $f(x) = \lambda_1$. Поэтому

$$\lambda_1(y - l(\lambda_2)) \in L.$$

С учётом (a) имеем

$$y - l(\lambda_2) \in L$$

и $f(y) = \lambda_2$. Но это противоречит равенству $f(y) = 0$, что завершает доказательство теоремы 5. ■

Для применения теоремы 5 неудобно то обстоятельство, что требуется явно построить функцию l со свойством (с), тогда как для данной функции f в действительности подходит в качестве l любой подъем с M/L на M относительно L . Эту трудность смягчает следующая конструкция, которую мы назовём по фамилии автора (Wołodźko):

Конструкция W . Возьмём любую мультипликативную подгруппу Λ' в $K \setminus \{0\}$ и произвольное отображение $l: \Lambda' \rightarrow F$. Рассмотрим любое множество $L' \subset F$, содержащее все значения функции $l(\lambda_1 \lambda_2) - l(\lambda_1) - \lambda_1 l(\lambda_2)$ для $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda'$. Пусть множество $L'' = \Lambda' L'$ порождает аддитивную подгруппу L в F . Возьмём в качестве Λ любую подгруппу в Λ' , такую что $l(\lambda) \in L$, если и только если $\lambda = 1$. Это возможно, так как проверяется, что $l(1) \in L$ ¹⁾, и мы можем положить $\Lambda = \{1\}$.

Убедимся, что Λ, l, L , полученные посредством конструкции W , обладают свойствами (а), (б) и (с) из теоремы 5. Свойства (б) и (с) выполнены по построению. Нетрудно проверить, что $\Lambda L \subset L$. Пусть теперь $y \in L$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда $\lambda^{-1} \in \Lambda$, $x = \lambda^{-1}y \in L$ и $y = \lambda x \in \lambda L$. Значит, $\lambda L = L$ при любом λ , т.е. выполнено (а). Определяя $f: F \rightarrow K$ посредством (д), получаем решение уравнения (6).

Обратно, любое решение для (6) определяется посредством (д) и некоторой конструкции W . Достаточно положить в теореме 5 $\Lambda' = \Lambda$ и использовать l и L из условия теоремы. Доказано

Предложение 6. Все решения $f: F \rightarrow K$ уравнения (6) получаются из некоторой конструкции W с помощью определения (д) теоремы 5. ■

Предложение 6 обеспечивает нас средством для отыскания подполугрупп с точной параметризацией в семействе всех аффинных преобразований линейного пространства F над полем K . Ограничившись собственными аффинными преобразованиями ($x \mapsto \alpha x + \beta$, $\alpha \in K \setminus \{0\}$, $\beta \in F$), получаем следующую теорему.

Теорема 7. Пусть F — линейное пространство над полем K , $\mathcal{G}$ — группа всех собственных аффинных преобразований на F . Единственные подполугруппы в $\mathcal{G}$, допускающие точную параметризацию, — это группа всех сдвигов

$$x \mapsto x + \beta \quad (\beta \in F)$$

и группы H_a :

$$x \mapsto \alpha(x + a) - a \quad (\alpha \in K \setminus \{0\}),$$

где $a \in F$.

Доказательство. В отличие от предложения 3, здесь параметризация не предполагается непрерывной. Функциональное уравнение (12) для $f: K \setminus \{0\} \rightarrow F$ имеет решение (13), где $a \in F$. Для уравнения (6) мы ищем решение $f: F \rightarrow K \setminus \{0\}$. Тогда в обозначениях теоремы 5 имеем $M = F$. Докажем, что в этом случае $\Lambda = \{1\}$ и потому $F = M = L$, т.е. $f \equiv 1$.

Предположим противное: пусть $\lambda_1 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq 1$. Существует $x \in F$, для которого $f(x) = \lambda_1$. Поскольку $M = F$, то существует также $\lambda_2 \in \Lambda$, для которого $(1 - \lambda_1)^{-1}x \in l(\lambda_2) + L$. Как следствие, $x = l(\lambda_2) - \lambda_1 l(\lambda_2) \bmod L$ и $x = l(\lambda_1) \bmod L$. Поэтому $l(\lambda_1) + \lambda_1 l(\lambda_2) = l(\lambda_2) \bmod L$. В силу условия (с) теоремы 5 имеем $l(\lambda_1 \lambda_2) = l(\lambda_2) \bmod L$. Отсюда $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2$, что невозможно, так как $\lambda_1 \neq 1$. Теорема 7 доказана. ■

Для других групп преобразований (например, $GL(F)$) аналог теоремы 7 неизвестен.

¹⁾ Положив $\lambda_1 = \lambda_1 = 1 \in \Lambda'$, получаем $l(1) \in L'$. Так как аддитивная подгруппа L содержит L' , то $l(1) \in L$.

19.2. Другой пример на отыскание однопараметрических подгрупп

Рассмотрим теперь ещё один пример, с другой бинарной операцией $*$. Пусть $F' = G$ — некоторое кольцо. В качестве операции $*$ возьмём следующую:

$$(\alpha, \beta) * (\alpha', \beta') = (\lambda \alpha \alpha', \alpha \beta' + \beta \alpha'), \quad (20)$$

где элемент $\lambda \in F'$ фиксирован.

Если λ — единица в F' , то можно рассматривать $\mathcal{G}$ как мультипликативную полугруппу всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in F'$ (если α пробегает $F' \setminus \{0\}$, то это группа Клиффорда над F').

Если F' — топологическое кольцо и мы хотим найти все подполугруппы в $(\mathcal{G}, *)$ с точной непрерывной параметризацией, то мы сталкиваемся с необходимостью решения следующих функциональных уравнений:

$$f(\lambda xy) = xf(y) + f(x)y \quad (x, y \in F'), \quad (21)$$

$$f(xf(y) + f(x)y) = \lambda f(x)f(y) \quad (x, y \in F'). \quad (22)$$

При $\lambda = 1$ уравнение (21) сводится к классическому функциональному уравнению дифференцирования (см. упр. 2.11). Сложное функциональное уравнение (22) в общем случае представляется достаточно трудным. Однако для непрерывных f при $F' = \mathbb{R}$ оно решено (Brillouët 1982).

Теорема 8. Пусть $\lambda > 0$, функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда она удовлетворяет уравнению (22), если и только если имеет одну из следующих форм:

$$f = 0, \quad (23)$$

$$f = \frac{1}{\lambda}, \quad (24)$$

а при $\lambda = 2$ также

$$f(x) = Ax \quad (25)$$

или

$$f(x) = \sup(Ax, 0), \quad (26)$$

где $A \in \mathbb{R}^*$ — константа.

Доказательство. Очевидно, что функция (23) удовлетворяет уравнению (22), и далее мы её не рассматриваем, т. е. предполагаем существование такого $x_0 \in \mathbb{R}$, что $f(x_0) = \gamma \neq 0$.

Определим $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$g(y) = \gamma y + x_0 f(y). \quad (27)$$

С учётом (22) получаем

$$g(g(y)) = (\lambda + 1)\gamma g(y) - \lambda \gamma^2 y. \quad (28)$$

Уравнение (28) при $\gamma = 1$ называется уравнением линейной итерации порядка 2, и его непрерывное решение известно не только для $\mathbb{R}$ (Dhombres, 1977b). Ту же конструкцию мы применим и в данном случае. Ввиду (27) функция g непрерывна. Так как $\lambda \gamma^2 \neq 0$, то в силу (28) из $y_1 \neq y_2$ следует $g(y_1) \neq g(y_2)$. Как следствие, функция g строго монотонна. Также в силу (28) её пределы при $y \rightarrow \pm\infty$ не могут быть конечными. Значит, g — биекция из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$.

Полагая $g^0(y) = y$, $g^n(y) = g^{n-1}(g(y))$ при $n = 1, 2, \dots$, по индукции получаем (с учётом (28))

$$g^n(y) = \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \gamma^{n-1} g(y) - \lambda \frac{1 - \lambda^{n-1}}{1 - \lambda} \gamma^n y \quad \text{при } \lambda \neq 1, \quad (29)$$

$$g^n(y) = n\gamma^{n-1}g(y) - (n-1)\gamma^n y \quad \text{при } \lambda = 1. \quad (30)$$

Здесь n — неотрицательное целое. Но g является биекцией, и нетрудно доказать, что равенства (29) и (30) сохраняются и для отрицательных целых, если g^{-1} — обратная функция для g и $g^{-k}(x) = (g^{-1})^k(x)$ при $k = 2, 3, \dots$ ¹⁾.

В зависимости от значения γ возможны различные случаи.

Первый случай. Пусть $f(x) \neq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^*$. Покажем, что тогда $f \equiv 1/\lambda$. С учётом (22) либо $f(0) = 0$, либо $f(0) = 1/\lambda$.

(а) Пусть $f(0) = 0$. Так как функция f непрерывна и нигде не равна 1, то всюду $f(x) < 1$. Положив в (22) $x = y$, получаем

$$f(2xf(x)) = \lambda f(x)^2 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (31)$$

Поэтому $|f(x)| < \lambda^{-1/2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По индукции получаем из (31)

$$|f(x)| < \lambda^{-(2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-n})}.$$

Если $\lambda > 1$, то при $n \rightarrow \infty$ получаем $|f(x)| \leq 1/\lambda$. Это заведомо верно (даже как строгое неравенство) и при $0 < \lambda \leq 1$. Значит, $|\gamma| \leq 1/\lambda$. Поскольку функция f непрерывна и равна нулю при $x = 0$, то можно считать $|\gamma| < 1/\lambda$.

Выберем μ так, что $\lambda|\gamma| < \mu < 1$, и определим $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив $h(y) = x_0 f(y)$. Функция h ограничена по абсолютной величине; пусть M — наименьшая верхняя грань для h . Так как $f(x_0) = \gamma \neq 0$, то $x_0 \neq 0$ и потому $M > 0$. В силу непрерывности функции h существует $y_0 \in \mathbb{R}$, для которого

$$|h(y_0)| > \mu M.$$

Поскольку g — биекция, то найдётся такое z_0 , что $g(z_0) = y_0$. Отсюда

$$h(y_0) = h(g(z_0)) = h(\gamma z_0 + x_0 f(z_0)) = \lambda \gamma h(z_0),$$

$$\mu M < |h(y_0)| = \lambda |\gamma h(z_0)|.$$

Следовательно, $|h(z_0)| > M$, что невозможно. Поэтому невозможно и равенство $f(0) = 0$.

(б) Пусть $f(0) = 1/\lambda$. Рассмотрим три варианта: $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 1$ и $\lambda > 1$.

Пусть $0 < \lambda < 1$. Так как $f(0) = 1/\lambda$ и f нигде не равна 1, то $f(x) > 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Аналогично случаю (а) получаем, что всюду $f(x) \geq 1/\lambda$. Используем равенство (29) для отрицательных n . Предположим, что $f(x) \neq 1/\lambda$. Пусть, например, $f(x_0) = \gamma > 1/\lambda$. Поскольку $\gamma > 1$, $\lambda\gamma > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g^n(y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Но $g^{n+1}(y) = g(g^n(y))$, поэтому $g(0) = 0$, и в силу (27) имеем $f(0) = 0$ (учитывая, что $x_0 \neq 0$). Это противоречит предположению. Значит, в действительности $f(x) \equiv 1/\lambda$ (случай (24)).

Пусть теперь $\lambda = 1$. Если существует x_0 , для которого $\gamma = f(x_0) > 1$, то $x_0 \neq 0$. Как и выше, получаем, что, наоборот, $x_0 = g(0) = 0$, вопреки предыдущему. Если существует x_0 , для которого $f(x_0) < 1$, то снова $x_0 \neq 0$. Используя (30) для больших

¹⁾ Полагая $y = g^{-1}(z)$ в (28), получаем выражение для $g^{-1}(z)$. Затем проводим индукцию по n , используя равенство $g^{-n}(z) = g^{1-n}(g^{-1}(z))$.

положительных n , получаем, что, наоборот, $x_0 = g(0) = 0$. Поэтому в действительности $f \equiv 1$.

Если $\lambda > 1$, то $f(x) < 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Аналогично предыдущему получаем, что $f(x) \leq 1/\lambda$. Докажем, что $f(x) \equiv 1/\lambda$. В противном случае найдётся $x_0 \neq 0$, для которого $\gamma = f(x_0) < 1/\lambda < 1$. Используя (29) для больших положительных n , получаем, что $x_0 = g(0) = 0$. Это противоречие доказывает (24).

Второй случай. Существует такое $x_0 \in \mathbb{R}^*$, что $f(x_0) = 1$. Уравнение (28) принимает вид

$$g(g(y)) = (\lambda + 1)g(y) - \lambda y \quad (y \in \mathbb{R}). \quad (32)$$

Нам потребуется предложение 9 (Dhombres, 1977b, 1979, р. 6.7–6.19), доказательство которого приводится после доказательства теоремы 8. Введём следующую терминологию.

Будем говорить, что функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет тип (λ, a, b) , где $\lambda \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, если

$$g(y) = \begin{cases} \lambda y + (1 - \lambda)a, & y < a; \\ y, & a \leq y \leq b; \\ \lambda y + (1 - \lambda)b, & y > b. \end{cases}$$

(Естественно, при $b = \infty$ случай $y > b$ не имеет места, и т. п.)

Будем также говорить, что функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет тип (λ, δ) , если $g(y) = \lambda y + \delta$ при всех $y \in \mathbb{R}$.

Предложение 9. Непрерывная функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (32) при $\lambda > 0$, если и только если она имеет один из следующих типов:

$$\lambda \neq 1: \text{ тип } (\lambda, a, b) \text{ или } (\lambda, \delta),$$

$$\lambda = 1: \text{ тип } (1, \delta).$$

Окончание доказательства теоремы 8. Если $\lambda = 1$, то согласно предложению 9 $g(y) = y + \delta$ для некоторого $\delta \in \mathbb{R}$. Положив в (27) $\gamma = 1$, получаем $f(y) = \delta/x_0$. Но $f(x_0) = 1$. Значит, $f \equiv 1$, и выполнено (24) при $\lambda = 1$.

Если $\lambda \neq 1$, то g может иметь один из двух типов. В случае типа (λ, δ) получаем $f(x) = [(\lambda - 1)x + \delta]/x_0$, $1 = f(x_0) = \lambda - 1 + (\delta/x_0)$, откуда

$$f(x) = (\lambda - 1)\frac{x}{x_0} + (2 - \lambda). \quad (33)$$

Подставим (33) в обе части функционального уравнения (31). Получаем квадратный трёхчлен относительно x , тождественно равный нулю. Поэтому все его коэффициенты равны 0:

$$\frac{(2 - \lambda)(\lambda - 1)^2}{x_0^2} = 0, \quad \frac{-2(2 - \lambda)(\lambda - 1)^2}{x_0} = 0, \quad (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Так как $\lambda \neq 1$, то $\lambda = 2$. Тогда из (33) вытекает $f(x) = x/x_0$, т. е. (25). Обратное, (25) является решением для (22).

Если g относится к типу (λ, a, b) , то функция f имеет вид (в силу (27) при $\gamma = 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda - 1}{x_0} (x - a) & \text{при } x \leq a, \\ 0 & \text{при } a \leq x \leq b, \\ \frac{\lambda - 1}{x_0} (x - b) & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

Пусть $x = y \in [a, b]$. Так как $f(y) = f(x) = 0$, то в силу (22) $f(0) = \lambda f(x)f(y) = 0$, т. е. $0 \in [a, b]$. Возможны два случая.

(i) $(\lambda - 1)/x_0 > 0$. Покажем, что $a = -\infty$, $b = 0$ и $\lambda = 2$. Поскольку $f(x_0) = 1$ и $f(x) \leq 0$ при $x \leq b$, то $x_0 > b$. Отсюда $(\lambda - 1)(x_0 - b)/x_0 = 1$, что даёт $\lambda \geq 2$, $b < \infty$. Если теперь в (22) $y = b$, $x \geq b$, то $f(bf(x)) = \lambda f(b)f(x) = 0$. Но так как $(\lambda - 1)/x_0 > 0$, то при $b > 0$ для достаточно большого x имеем $bf(x) > b$. Тогда $f(bf(x)) \neq 0$, что противоречит предыдущему. Следовательно, $(\lambda - 1)(x_0 - 0)/x_0 = 1$ и $\lambda = 2$.

Предположим, что $a > -\infty$. Если в (22) $y = a$, $x < a$, то $f(af(x)) = \lambda f(x)f(a) = 0$, $a < 0$ (так как $b = 0$). Отсюда

$$af(x) = a \frac{\lambda - 1}{x_0} (x - a) > 0,$$

$$f(af(x)) = \frac{\lambda - 1}{x_0} \left(a \frac{\lambda - 1}{x_0} (x - a) - b \right).$$

Тогда найдётся $x < a$, для которого $f(af(x)) \neq 0$, вопреки полученному выше. Значит, $a = -\infty$, и f имеет вид (26) с $A > 0$.

(ii) $(\lambda - 1)/x_0 < 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем: $\lambda = 2$, $a = 0$. Если $b > 0$, то $b = \infty$ и f имеет вид (26) с $A < 0$. Теорема 8 доказана, за вычетом предложения 9. ■

Доказательство предложения 9. Так как (32) — частный случай уравнения (28), то его непрерывное решение является биекцией (если не равно тождественно нулю).

При $\lambda = 1$ положим $f(x) = g(x) - x$. Тогда выполнено уравнение

$$f(x + f(x)) = f(x). \quad (34)$$

Оно называется *уравнением Эйлера* (Euler, 1764). Аналогом уравнения (30) на этот раз является

$$g^n(x) = x + n f(x) \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (35)$$

Если $f \equiv 0$, то $g(x) \equiv x$ (тип (1,0)). Если $f(x_0) \neq 0$ при некотором x_0 , то любая точка $x \in \mathbb{R}$ принадлежит отрезку с концами $x_0 + n f(x_0) = g^n(x_0)$, $x_0 + n' f(x_0) = g^{n'}(x_0)$ для некоторых целых n, n' . Поскольку функция g^n монотонна, то $g^m(x)/m$ при всех m принадлежит отрезку с концами $(x_0/m + ((n + m)/m) f(x_0))$, $(x_0/m + ((n' + m)/m) f(x_0))$. Устремив m к бесконечности, получаем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(x)/m = f(x_0)$.

Но ввиду (35) $\lim_{m \rightarrow \infty} g^m(x)/m = f(x)$, т.е. f — константа и g имеет тип (1, δ) для некоторого $\delta \in \mathbb{R}$. В частности, мы доказали, что *все непрерывные решения функционального уравнения Эйлера (34) являются константами*.

Если $\lambda \neq 1$ ($0 < \lambda < \infty$), то определим $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, положив

$$h(x) = \frac{g(x) - \lambda x}{1 - \lambda}.$$

В силу (32)

$$h(g(x)) = h(x), \quad (36)$$

и по индукции

$$g^n(x) = x + (\lambda^n - 1)(x - h(x)) \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (37)$$

Пусть сначала $0 < \lambda < 1$. Ввиду (37)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = h(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Функция h непрерывна вместе с g , и из (36) получаем

$$h^2(x) = h(x). \quad (38)$$

Пусть $I = \{x \mid x \in \mathbb{R}, h(x) = x\}$. Это множество непусто ввиду (38), замкнуто вследствие непрерывности функции h и связно, поскольку совпадает с $h(\mathbb{R})$. Если I

состоит из одной точки a , то для всех x имеем $h(x) = a$, $g(x) = \lambda x + \delta$, где $\delta = (1 - \lambda)a$, т. е. g имеет тип (λ, δ) .

Если I не сводится к точке, то содержит собственный отрезок. На I выполнено равенство $h(x) = x$ и потому также $g(x) = x$. Значит, g возрастает на I — а тогда и на $\mathbb{R}$, поскольку g является непрерывной биекцией из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. То же верно для всех g^n ($n \in \mathbb{N}$). Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(x) = h(x),$$

то h не убывает на $\mathbb{R}$, при этом принимая значения в I . Следовательно, возможны три случая.

Первый случай: $I = [a, b]$, где $-\infty < a < b < \infty$. Мы знаем, что h не убывает на $\mathbb{R}$, $h(x) = x$ на I и $h(x) \in I$ на $\mathbb{R}$. Поэтому $h(x) = b$ при $x \geq b$ и $h(x) = a$ при $x \leq a$. Значит, $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)b$ при $x \geq b$, $g(x) = x$ при $x \in [a, b]$ и $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)a$ при $x \leq a$. Это тип (λ, a, b) .

Второй случай: $I =]-\infty, b]$, где $b < \infty$. Легко показать, что $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)b$ при $x \geq b$ и $g(x) = x$ — в противном случае. Это тип $(\lambda, -\infty, b)$.

Третий случай: $I = [a, \infty[$, где $a > -\infty$. Аналогично предыдущему, получаем тип (λ, a, ∞) .

Для доказательства предложения 9 осталось рассмотреть случай $\lambda > 1$. Так как g является биекцией, то (36) можно записать в виде $h(G(x)) = h(x)$, где $G = g^{-1}$. Тогда из (37) при отрицательных n и $\Lambda = \lambda^{-1}$ получаем

$$G^n(x) = x + (\Lambda^n - 1)(x - h(x)). \quad (39)$$

Но $0 < \Lambda < 1$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(x) = h(x)$, откуда следует (38), и случай сводится к уже рассмотренному. Предложение 9 доказано. ■

О решении уравнения (32) для случая $\lambda \leq 0$, не охваченного предложением 9, см. упр. 11 и Dhombres, 1979, р. 6.17–6.19.

Теорема 8 позволяет найти подгруппы в группе Клиффорда для $\mathbb{R}$, т. е. в группе всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 10. Пусть $\mathcal{G}$ — группа Клиффорда для $\mathbb{R}$. Единственными подполугруппами в $\mathcal{G}$, имеющими точную непрерывную параметризацию, являются: группа всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$, где $\beta \in \mathbb{R}$, и группы H_a ($a \in \mathbb{R}$), состоящие из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a\alpha \ln |\alpha| & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Доказательство. Нужно найти общие непрерывные решения уравнений (21) и (22) при $\lambda = 1$. Более точно, в случае (21) мы ищем непрерывные функции $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению (21) при $\lambda = 1$. Разделим обе части этого уравнения на xy ($y \neq 0$) и положим $g(x) = f(x)/x$. Выполняется уравнение

$$g(xy) = g(x) + g(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^*).$$

Так как функция g непрерывна на $\mathbb{R}^*$, то по теореме 3.3

$$g(x) = a \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R}^*).$$

Поэтому

$$f(x) = ax \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R}^*), \quad (40)$$

и мы получаем семейство матриц H_a . Легко проверить, что оно является подгруппой в $\mathcal{G}$.

В случае (22) мы ищем непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$. В силу теоремы 8 имеем $f(x) \equiv 1$, что соответствует семейству всех матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ ($\beta \in \mathbb{R}$). Легко видеть, что оно является подгруппой. Теорема 10 доказана. ■

19.3. Ещё два сложных уравнения

Решая уравнение (22), мы использовали (28) и (32). Однако в доказательстве предложения 9 было существенно, что речь идёт о вещественных числах. Теперь мы займёмся решением сложных функциональных уравнений на структурах более общего вида, а именно на абелевых группах. В этом параграфе используются некоторые теоретико-групповые понятия (смежный класс, подъём).

Чтобы ввести уравнения, о которых идёт речь, мы внесём изменение в формулу (32), положив $f(y) = g(y) - y$. Если для g выполнено (32), то f удовлетворяет уравнению

$$f(y + f(y)) = \lambda f(y). \quad (41)$$

Из предложения 9 мы знаем его непрерывные решения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при $\lambda > 0$ (случай $\lambda \leq 0$ см. в упр. 11). Положим $\lambda = 2$ и введём второе переменное:

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y). \quad (42)$$

Любое решение $f: G \rightarrow G$ уравнения (42), где $(G, +)$ — абелева группа, является решением для (41) при $\lambda = 2$ (но обратное неверно).

Введём некоторые обозначения. Пусть $(G, +)$ — абелева группа, H — её подгруппа, π_H — канонический эпиморфизм G на G/H , h — подъём относительно H , т. е. такое отображение $h: G/H \rightarrow G$, что отображение $\pi_H \circ h$ является тождественным.

Предложение 11. Пусть $(G, +)$ — абелева группа. Функция $f: G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению (42), если и только если существуют подгруппа H в G и подъём h относительно H , для которых выполнено соотношение

$$f(x) = x - h(\pi_H(x)) \quad (x \in G). \quad (43)$$

Доказательство. Пусть выполняется формула (43). Тогда $\pi_H(f(x)) = \pi_H(x) - \pi_H(h(\pi_H(x))) = 0$, откуда $f(x + f(y)) = x + f(y) - h(\pi_H(x) + \pi_H(f(y))) = x - h(\pi_H(x)) + f(y) = f(x) + f(y)$, т. е. (42) выполнено.

Обратно, пусть $f: G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению (42). Положим $H = f(G)$ и в (42) заменим x на $x - f(y)$:

$$f(x) = f(x - f(y) + f(y)) = f(x - f(y)) + f(y),$$

или $f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$. Это означает, что H — подгруппа в G ¹⁾. Положим $g(x) = x - f(x)$. Ввиду (42)

$$g(x + f(y)) = g(x), \quad (44)$$

т. е. все элементы из H служат периодами для g . При этом $\pi_H(g(x)) = \pi_H(x)$, так как $\pi_H(f(x)) = 0$. Таким образом, $g(x)$ зависит только от класса смежности элемента x и содержится с ним. Поэтому существует подъём h относительно H , такой что $g(x) = h(\pi_H(x))$, и мы получаем (43), что и требовалось. ■

¹⁾ Если непустое подмножество H (аддитивно записанной) группы замкнуто относительно разностей, то оно является подгруппой. Действительно, пусть $x, y \in H$. Тогда $0 = x - x \in H$; $-x = 0 - x \in H$; $x + y = x - (-y) \in H$.

Предложение 11 обобщается на неабелев случай (упр. 18), а в коммутативном варианте — на более общие структуры, чем группы (упр. 19). Интересно, что в случае коммутативной группы $(G, +)$ уравнение (42) можно сделать симметричным:

$$f(x + f(y)) = f(f(x) + y). \quad (45)$$

Уравнение (45) может служить типичным примером сложного функционального уравнения. Для абелевых групп оно полностью решено (Dhombres, 1972b, 1977a).

Теорема 12. Пусть $(G, +)$ — абелева группа. Функция $f : G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению (45) для всех $x, y \in G$, если и только если существуют подгруппы $H \subset I$ в G и подъёмы $h : G/H \rightarrow G/H$, $i : I/H \rightarrow I$, такие что

$$f(x) = i[\pi_H(x) - h(\pi_I(x))] \quad \text{при всех } x \in G. \quad (46)$$

Доказательство. отождествим обычным образом $(G/H)/(I/H)$ с G/I и используем обозначения, введённые перед предложением 11. По определению $\pi_H \circ i \circ \pi_H(x) = \pi_H(x)$ при всех $x \in I$.

Пусть функция $f : G \rightarrow G$ определена посредством (46). Заметим, что

$$\pi_H(x) - h(\pi_I(x)) \in I/H \quad (x \in G)$$

и что $f(G) \subset I$. Как следствие,

$$\pi_H(f(x)) = \pi_H(x) - h(\pi_I(x)) \quad \text{для всех } x \in G,$$

$$\pi_I(f(x) + y) = \pi_I(y), \quad \pi_I(x + f(y)) = \pi_I(x) \quad \text{для всех } x, y \in G.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= i[\pi_H(x + f(y)) - h(\pi_I(x))] = \\ &= i[\pi_H(x) - h(\pi_I(x)) + \pi_H(y) - h(\pi_I(y))] = \\ &= i[\pi_H(y + f(x)) - h(\pi_I(y))] = f(y + f(x)), \end{aligned}$$

т. е. (45) выполнено.

Обратно, пусть $f : G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению (45). Как уже отмечалось, при решении таких уравнений полезно найти группу периодов искомой функции. Начнём со следующей выкладки:

$$\begin{aligned} f(x + f(y + f(z))) &= f(x + f(f(y) + z)) = f(f(x) + f(y) + z) = \\ &= f(f(y) + f(x) + z) = f(y + f(f(x) + z)) = \\ &= f(y + f(x + f(z))) = f(f(y) + x + f(z)), \end{aligned}$$

т. е.

$$f(x + f(y + f(z))) = f(x + f(y) + f(z)) \quad \text{для всех } x, y, z \in G. \quad (47)$$

Пусть H — подгруппа в G , порождённая всеми элементами вида $f(y + f(z)) - f(y) - f(z)$, где $y, z \in G$. В силу (47) все элементы из H являются периодами для f . Определим отображение $g : G/H \rightarrow G/H$, положив

$$g(\pi_H(x)) = \pi_H(f(x)).$$

Оно удовлетворяет функциональному уравнению

$$g[\pi_H(x) + g(\pi_H(y))] = \pi_H[f(x + f(y))] = \pi_H[f(x) + f(y)] = g(\pi_H(x)) + g(\pi_H(y)),$$

т. е. при всех $x, y \in G/H$

$$g(x + g(y)) = g(x) + g(y).$$

Это уравнение (42), решения которого известны из предложения 11. А именно, существует такая подгруппа H' в G/H , что

$$g(x) = x - h'(\pi_{H'}(x)) \quad \text{при всех } x \in G/H,$$

где $\pi_{H'}$ — канонический эпиморфизм группы G/H на $(G/H)/H'$, а $h' : (G/H)/H' \rightarrow G/H$ — подъём относительно H' . Существует подгруппа $I \supset H$ в G , для которой H' можно отождествить с I/H , а $(G/H)/(I/H)$ — с G/I . Пусть $h : G/I \rightarrow G/H$ — соответствующий подъём относительно I/H . Тогда

$$\pi_H(f(x)) = g(\pi_H(x)) = \pi_H(x) - h(\pi_I(x)).$$

Поскольку правая часть принадлежит I/H , то подъём $i : I/H \rightarrow I$ относительно H даёт соотношение ¹⁾

$$f(x) = i[\pi_H(x) - h(\pi_I(x))] \quad \text{для всех } x \in G.$$

Теорема 12 доказана. ■

Теорема 12 обобщается на неабелевы группы, но при дополнительных условиях на f . Общее решение для этого случая неизвестно, так же как и для коммутативных квазигрупп. Вариантом теоремы 12 является

Теорема 13. *Функция $f : G \rightarrow G$ на абелевой группе $(G, +)$ удовлетворяет уравнению (45), если и только если $f = f_2 \circ f_1$, где функции $f_1 : G \rightarrow G$, $f_2 : I \rightarrow I$ таковы, что $I = f_1(G)$ — подполугруппа в G , f_1 удовлетворяет уравнению (42), а f_2 — уравнению*

$$f_2(x + f_2(y)) = f_2(x + y) \quad (x, y \in I). \quad (48)$$

Доказательство. Пусть $f = f_2 \circ f_1$ и перечисленные условия выполнены. Возьмём $z \in G$, для которого $f_1(z) = f_2 \circ f_1(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= f_2 \circ f_1[x + f_1(z)] = f_2(f_1(x) + f_1(z)) = \\ &= f_2(f_1(x) + f_2 \circ f_1(z)) = f_2(f_1(x)) + f_1(y). \end{aligned}$$

По симметрии

$$f(x + f(y)) = f(y + f(x)).$$

Пусть теперь f удовлетворяет уравнению (45). Применяя обозначения из теоремы 12, положим

$$f_1(x) = x - \tilde{h}(h(\pi_I(x))),$$

где $\tilde{h} : G/H \rightarrow G$ — подъём относительно H . Тогда $f_1(x) \in I$ для всех $x \in G$. Непосредственно проверяется, что f_1 удовлетворяет уравнению (42) и что $I = f_1(G)$ (если x пробегает I , то $f_1(x) = x - \tilde{h}(h(0))$ также пробегает I). Используя подъём i , введённый при доказательстве теоремы 12, определим $f_2 : I \rightarrow I$ формулой

$$f_2(x) = i(\pi_H(x)).$$

¹⁾ Напомним, что элементы из H являются периодами для f .

Выполнено (48), поскольку $\pi_H \circ i \circ \pi_H(x) = \pi_H(x)$. С учётом теоремы 12

$$f_2 \circ f_1(x) = i[\pi_H(x) - \pi_H(\tilde{h}(h(\pi_I(x))))] = i[\pi_H(x) - h(\pi_I(x))] = f(x),$$

что и требовалось. ■

Уравнения (42) и (48) являются вариантами уравнения (45). Общее решение уравнения (42) на группе см. в предложении 11 и упр. 18. В качестве упражнения предлагаем найти общее решение уравнения (48) (упр. 16).

Следствие 14. *Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ служит непостоянным непрерывным решением для (45), если и только если существует такая вещественная константа a , что*

$$f(x) = x + a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Очевидно, что $f(x) = x + a$ является непрерывным решением уравнения (45). Обратно, пусть f — непрерывное решение для (45). Его подгруппа периодов есть $\alpha\mathbb{Z}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Но подгруппа H , определённая в теореме 12, должна содержаться в $\alpha\mathbb{Z}$. Поэтому функция $f(y + f(z)) - f(y) - f(z)$ принимает значения в $\alpha\mathbb{Z}$. По непрерывности она равна некоторой константе $b \in \alpha\mathbb{Z}$, т. е.

$$f(y + f(z)) = f(y) + f(z) + b.$$

Положим $f_1(y) = f(y) + b$; из предыдущего уравнения и равенства $f(y + b) = f(y)$ вытекает, что функция f_1 удовлетворяет уравнению (42). Как показано в предложении 11, её область значений — некоторая подгруппа H_1 в $\mathbb{R}$. Поскольку f_1 непрерывна и вместе с f не является константой, то $H_1 = \mathbb{R}$. Значит, $h_1(\pi_{H_1}(x))$ равно некоторой константе b_1 . В силу предложения 11 $f_1(x) = x - b$, поэтому $f(x) = x + b - b_1 = x + a$, и следствие 14 доказано. ■

19.4. Операторы Рейнольдса и усредняющие операторы

Функциональные уравнения (42), (45) и (48) потребовались для применения теории усреднения к турбулентному движению жидкости. Движение ньютоновской жидкости описывается нелинейным дифференциальным уравнением Навье–Стокса:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p + \nu \rho \Delta \mathbf{V} - \rho \text{div} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}), \quad (49)$$

где $\mathbf{V}(t, M)$ — скорость в точке $M = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t с компонентами V_1, V_2, V_3 ; вектор $\Delta \mathbf{V}$ имеет компоненты $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3$, где Δ — лапласиан; p — давление; $\mathbf{f}$ — внешняя сила; $\text{div}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V})$ — нелинейный член, а именно вектор с компонентами

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i V_j), \quad i = 1, 2, 3.$$

Для несжимаемых жидкостей нужно добавить условие

$$\text{div } \mathbf{V} = 0. \quad (50)$$

В конце XIX века О. Рейнольдс нашёл линейный оператор P , который действует на $\mathbf{V}$ и p таким образом, что $P(\mathbf{V})$ удовлетворяет уравнению Навье–Стокса, в кото-

ром к внешней силе добавлен член, выражающий турбулентность:

$$\rho \frac{\partial P(\mathbf{V})}{\partial t} = P(\mathbf{f} - \operatorname{div}[(\mathbf{V} - P(\mathbf{V})) \otimes (\mathbf{V} - P(\mathbf{V}))]) + \nu \rho \Delta P(\mathbf{V}) - \\ - \rho \operatorname{div}(P(\mathbf{V}) \otimes P(\mathbf{V})) - \operatorname{grad}(P(p)). \quad (51)$$

Чтобы вывести (51) из (50) при некоторых условиях регулярности на P , достаточно предположить, что

$$P(f(x)^2) = (Pf(x))^2 + P((f(x) - Pf(x))^2).$$

Заменяя f на $f + g$ и используя линейность оператора P , получаем так называемое *тождество Рейнольдса*:

$$P(f \cdot Pg + g \cdot Pf) = Pf \cdot Pg + P(Pf \cdot Pg). \quad (52)$$

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторая коммутативная алгебра функций. Линейный оператор $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, удовлетворяющий тождеству (52) для всех $f, g \in \mathcal{A}$, называется *оператором Рейнольдса*. Если вместо (52) выполнено тождество

$$P(f \cdot Pg) = Pf \cdot Pg, \quad (53)$$

то оператор называется *усредняющим*. Существуют тесные связи между операторами Рейнольдса и усредняющими операторами (Kampé de Fériet 1957; Rota, 1964; Miller, 1966b, 1968; Fox–Miller 1968; Gamlen–Miller, 1968; Dhombres, 1971b).

Далее мы используем некоторые факты о представлениях банаховых алгебр (см.: Dunford and Schwartz, 1963, p. 859–864). Конкретизируем класс алгебр $\mathcal{A}$. Поскольку речь идёт об уравнениях в частных производных, то интерес представляют такие алгебры, как L^∞ (т.е. алгебра вещественных функций на $\mathbb{R}^n$, ограниченных по Лебегу). Но один из классических результатов функционального анализа состоит в том, что банахова алгебра L^∞ изоморфна $C_R(X)$ — алгебре вещественнозначных непрерывных функций на хаусдорфовом компакте X специального типа (гиперстоуновом пространстве). В частности, это пространство вполне несвязно. Поэтому представляет интерес

Теорема 15. Пусть X — компактное хаусдорфово вполне несвязное пространство; $C_R(X)$ — банахова алгебра всех вещественнозначных непрерывных функций на X с равномерной нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$; P — непрерывный оператор Рейнольдса на $C_R(X)$. Тогда P — идемпотентный усредняющий оператор.

Доказательство состоит из трёх шагов. Первый шаг — комбинаторный: докажем, что при всех $n \geq 1$, $f \in C_R(X)$

$$nP(f(Pf)^{n-1}) = (Pf)^n + (n-1)P((Pf)^n). \quad (54)$$

При $n = 1$ формула тривиальна, а при $n = 2$ вытекает из определения (52) оператора Рейнольдса. Далее проведём индукцию. Пусть формула справедлива для n . Умножим на f и применим P :

$$P(f(Pf)^n) = nP(f \cdot P(f(Pf)^{n-1})) - (n-1)P(f \cdot P((Pf)^n)).$$

Дважды применим тождество Рейнольдса, с $g = f(Pf)^{n-1}$ и с $g = (Pf)^n$:

$$(n+1)P(f(Pf)^n) = n[Pf \cdot P(f(Pf)^{n-1}) + P(Pf \cdot P(f(Pf)^{n-1}))] - \\ - (n-1)(Pf \cdot P[(Pf)^n] + P(Pf \cdot P[(Pf)^n]) - P[(Pf)^{n+1}]).$$

Дважды заменим $nP(f(Pf)^{n-1})$ в соответствии с предположением индукции:

$$\begin{aligned}(n+1)P(f(Pf)^n) &= (Pf)^{n+1} + (n-1)P[(Pf)^n] \cdot Pf + P[(Pf)^{n+1}] + \\ &+ (n-1)P(Pf \cdot P[(Pf)^n]) - (n-1)P[(Pf)^n] \cdot Pf + \\ &+ (n-1)P[(Pf)^{n+1}] - (n-1)P(P[(Pf)^n] \cdot Pf),\end{aligned}$$

откуда

$$(n+1)P(f(Pf)^n) = (Pf)^{n+1} + nP[(Pf)^{n+1}],$$

и (54) доказано.

Второй шаг — топологический. Докажем, что алгебра $C_R(X)$ — замкнутая линейная оболочка содержащихся в ней идемпотентов. Они являются характеристическими функциями открыто-замкнутых множеств в X . Поскольку совокупность таких множеств замкнута относительно конечных пересечений, то подмножество идемпотентов в $C_R(X)$ замкнуто по умножению, а его линейная оболочка является подалгеброй. Эта подалгебра B разделяет точки пространства X , так как вполне несвязное пространство характеризуется тем, что пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих данную точку, состоит только из этой точки. По теореме Стоуна–Вейерштрасса алгебра B плотна в $C_R(X)$.

На третьем и последнем шаге мы вычислим действие оператора P на некоторый идемпотент из $C_R(X)$. Пусть Pf — идемпотент из $P(C_R(X))$. С учётом (54)

$$P(f \cdot Pf) = \frac{1}{n} Pf + \left(1 - \frac{1}{n}\right) P(Pf).$$

Устремляя n к бесконечности, получаем $P(Pf) = P(f \cdot Pf)$, откуда с учётом (52)

$$P(Pf) = Pf. \quad (55)$$

Таким образом, P действует как тождественный оператор на идемпотенты из $C = P(C_R(X))$.

Записав (52) в виде

$$P(f \cdot Pg + g \cdot Pf - Pf \cdot Pg) = Pf \cdot Pg,$$

мы видим, что C является подалгеброй в $C_R(X)$. Снова применив теорему Стоуна–Вейерштрасса, получаем, что замыкание $\overline{C}$ алгебры C в $C_R(X)$ изоморфно $C_R(Y)$, где Y — вполне несвязный хаусдорфов компакт. Повторяя второй шаг с учётом (55), получаем, что P действует тождественно на $\overline{C}$, т.е. P — идемпотентный оператор. В тождестве Рейнольдса (52) заменим f на Pf :

$$P(Pf \cdot Pg) + P(g \cdot Pf) = Pf \cdot Pg + P(Pf \cdot Pg).$$

Отсюда $P(g \cdot Pf) = Pf \cdot Pg$, т.е. мы получили функциональное уравнение усредняющего оператора. Теорема 15 доказана. ■

В случае хаусдорфовых компактов X структура непрерывных усредняющих линейных операторов на $C_R(X)$ известна (Birkhoff, 1950, Kelley, 1958). Для $P: C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ определим $\mathcal{P}(x)$ как множество всех $y \in X$, таких что $Pf(x) = Pf(y)$ для всех $f \in C_R(X)$. Множество $\mathcal{P}(x)$ замкнуто в X .

Предложение 16. Пусть X — хаусдорфов компакт. Непрерывный линейный оператор $P: C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ является усредняющим, если и только если для любой функции $f \in C_R(X)$ значение функции Pf в любой точке x зависит только от значений f на $\mathcal{P}(x)$.

Доказательство. Пусть $Pf(x)$ зависит только от значений функции f на $\mathcal{P}(x)$. Так как Pg — константа на $\mathcal{P}(x)$, а оператор P линеен, то $P(f \cdot Pg)(x) = Pf(x)Pg(x)$, т. е. выполнено (53).

Обратно, пусть (53) выполнено на X . Существует вещественная мера Радона μ_x на X , такая что

$$Pf(x) = \int_X f(y) d\mu_x(y).$$

Тогда (53) можно записать как

$$0 = \int_X f(y)[Pg(y) - Pg(x)] d\mu_x(y).$$

Поскольку функция $f \in C_R(X)$ произвольна, то $Pg(y) = Pg(x)$ на носителе меры μ_x . Следовательно, последний содержится в $\mathcal{P}(x)$, и $Pf(x) = \int_{\mathcal{P}(x)} f(y) d\mu_x(y)$.

Таким образом, $Pf(x)$ зависит только от значений f на $\mathcal{P}(x)$. Предложение 16 доказано. ■

В последние десятилетия возрос интерес к линейным операторам, удовлетворяющим дополнительным функциональным уравнениям («алгебраическим тождествам»). Операторы Рейнольдса и усредняющие операторы дают два таких примера.

Мы не будем здесь касаться весьма тесной связи усредняющих операторов с операторами условного математического ожидания на пространствах $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, возникающими в теории вероятностей.

Другой класс линейных операторов, а именно операторы Бакстера, определяется на коммутативных алгебрах функций посредством функционального уравнения, очень близкого к (52):

$$P(f \cdot Pg + g \cdot Pf) = Pf \cdot Pg + P(f \cdot g).$$

Операторы Бакстера применяются в теории очередей (см., например: Kingman, 1966) и интересны комбинаторными и другими свойствами, сильно отличающимися их от операторов Рейнольдса. Они подробно изучались, например, в работах: Atkinson, 1963; Miller, 1966a, 1969; Rota, 1969a, b; Dhombres, 1971b; Nguyen Huu Bong 1976. См. также упр. 31, 32 и 33. Следующие два параграфа посвящены линейным операторам, которые удовлетворяют другим (хотя родственным) уравнениям.

19.5. Операторы продолжения и интерполяции

Рассмотрим теперь операторы, удовлетворяющие функциональному уравнению (48) из теоремы 13 в форме

$$P(f \cdot Pg) = P(fg) \quad (56)$$

(в оставшейся части главы предполагается знакомство со свойствами мер Радона на хаусдорфовых компактах.)

Линейный оператор $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ называется *интерполяционным*, если при всех $f, g \in C_R(X)$ выполнено (56). Для произвольного линейного оператора $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ определим его *интерполятор* $\text{int } P$ как множество всех таких $x \in X$, что $Pf(x) = f(x)$ для всех $f \in C_R(X)$. Оно часто бывает пустым, но не в случае интерполяционного оператора.

Предложение 17. Пусть $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ — непрерывный линейный оператор. Он является интерполяционным, если и только если его интерполятор $\text{int } P$ непуст, причём $Pf = 0$ для любой функции $f \in C_R(X)$, равной 0 на $\text{int } P$.

Доказательство. Пусть оператор P — интерполяционный. Для каждого $x \in X$ существует такая мера Радона μ_x на X , что $Pf(x) = \int_X f(y) d\mu_x(y)$. Из (56) вытекает,

что

$$\int_X f(y)(g(y) - Pg(y)) d\mu_x(y) = 0.$$

Следовательно, $g(y) = Pg(y)$ почти всюду на носителе меры μ_x , и последний при любом $x \in X$ содержится в интерполяторе оператора P , который, таким образом, непуст. Поэтому если $f(y) = 0$ для всех $y \in \text{int } P$, то $\int_X f(y) d\mu_x(y) = 0$ при всех $x \in$

X , откуда $Pf(x) = 0$, т.е. $Pf = 0$.

Обратно, пусть P — ограниченный линейный оператор на $C_R(X)$ с непустым интерполятором, причём $Pf = 0$ для всех f , равных нулю на $\text{int } P$. Пусть $x \in X$, а μ_x — мера Радона на X , для которой

$$Pf(x) = \int_X f(y) d\mu_x(y) \quad (f \in C_R(X)).$$

Очевидно, что множество $\text{int } P$ замкнуто в X . Если носитель меры μ_x не содержится в нём, то существует функция $f \in C_R(X)$ с $Pf \neq 0$, равная нулю на $\text{int } P$, что противоречит предположению. Значит, носитель меры μ_x содержится в $\text{int } P$ при всех $x \in X$, и потому

$$\begin{aligned} P(f \cdot Pg)(x) &= \int_X f(y)Pg(y) d\mu_x(y) = \int_{\text{int } P} f(y)Pg(y) d\mu_x(y) = \\ &= \int_{\text{int } P} f(y)g(y) d\mu_x(y) = \int_X f(y)g(y) d\mu_x(y) = P(fg)(x), \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Интерполяционные операторы тесно связаны с *линейными операторами продолжения*. Пусть Y — замкнутое подмножество в X . Ограниченный линейный оператор $E : C_R(Y) \rightarrow C_R(X)$ называется линейным оператором продолжения относительно Y , если $Ef(y) = f(y)$ для всех $y \in Y$, $f \in C_R(Y)$.

Предложение 18. Пусть Y — замкнутое подмножество хаусдорфова компакта X . Линейный оператор продолжения относительно Y существует, если и только если существует линейный интерполяционный оператор $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$, для которого Y является интерполятором.

Доказательство. Пусть E — линейный оператор продолжения относительно Y . Для любого $x \in X$ существует мера Радона μ_x , носитель которой сосредоточен на Y , причём

$$Ef(x) = \int_Y f(t) d\mu_x(t).$$

Определим $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$, положив

$$Pf(x) = \int_X f(t) d\mu_x(t).$$

Интерполятор оператора P равен Y , и, согласно предложению 17, оператор P интерполяционный.

Обратно, пусть P — интерполяционный оператор, причём $Y = \text{int } P$. Для каждой функции $f \in C_R(Y)$ положим $Ef = P(\tilde{f})$, где $\tilde{f}$ — любое непрерывное продолжение функции f на X (мы используем теорему Титце о продолжении). Тогда E — ограниченный линейный оператор, и в силу предложения 17 он не зависит от выбранного продолжения для f . При этом E является оператором продолжения. Предложение 18 доказано. ■

Следующая интересная задача не решена в общем случае: описать компактные пространства X , в которых каждое замкнутое множество является интерполятором некоторого интерполяционного оператора на $C_R(X)$ (см. Dhombres, 1971b).

Имеется функциональное уравнение, которому удовлетворяют и усредняющие, и интерполяционные операторы. Будем говорить, что оператор $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ мультипликативно симметричен, если при всех $f, g \in C_R(X)$

$$P(f \cdot Pg) = P(Pf \cdot g) \quad (57)$$

(см. (45)). Таких операторов существует много в силу следующей теоремы, которую мы приведём без доказательства (см. Dhombres, 1968, где она доказана для алгебры $C(X)$ комплекснозначных непрерывных функций на X).

Теорема 19. Пусть $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ — линейный непрерывный идемпотентный оператор с нормой 1, причём в его области значений содержится строго положительная функция. Тогда (57) выполнено при всех $f, g \in C_R(X)$. ■

В случае $\|P\| = 1$, $P(1) = 1$ с мультипликативно симметричными операторами совпадают так называемые экзавы (exaves), введённые в работе Pełczyński 1968, P. 15–27. Нам потребуются следующие обозначения.

Пусть A, B — компакты, $\pi : A \rightarrow B$ — непрерывная функция, а линейный оператор композиции $[\pi] : C_R(B) \rightarrow C_R(A)$ определяется равенством

$$[\pi](f) = f \circ \pi.$$

Линейный экзав P для $\pi : A \rightarrow B$ — это линейный оператор $P : C_R(A) \rightarrow C_R(B)$, такой что $[\pi] = [\pi] \circ P \circ [\pi]$. Мы не будем доказывать эквивалентность линейных экзавов и мультипликативно симметричных операторов (см. Dhombres, 1979, P. 7.28–7.34), но некоторые результаты перечислим.

Пусть P — ограниченный мультипликативно симметричный оператор на $C_R(X)$, а множество A состоит из всех таких $x \in X$, что из $f, g \in C_R(X)$ вытекает

$$P(f \cdot Pg)(x) = Pf(x)Pg(x).$$

Это замкнутое множество называется усредняющим множеством оператора P . Если оператор марковский ($\|P\| = 1$, $P(1) = 1$), то можно доказать непустоту множества A . Обозначим через B факторпространство пространства X , состоящее из всех множеств $\mathcal{P}(x)$ (напомним, что $y \in \mathcal{P}(x)$, если и только если $Pf(y) = Pf(x)$ при всех $f \in C_R(X)$). Пусть $\pi : X \rightarrow X/P = B$ — каноническое проектирование; $\tilde{\pi}$ — его ограничение на A ; $\tilde{P} : C_R(A) \rightarrow C_R(B)$ определяется формулой

$$(\tilde{P}g)(\pi(x)) = (Pg)(x),$$

где $\tilde{g}$ — непрерывное продолжение функции $g \in C_R(A)$ на X . Можно показать, что $\tilde{P}$ не зависит от выбора продолжения для g и является марковским линейным экзавом для $\tilde{\pi}$.

Обратно, каждому марковскому экзаву поставим в соответствие мультипликативно симметричный оператор. Пусть A, B — хаусдорфовы компакты; $\tilde{\pi} : A \rightarrow B$ — непрерывное отображение; $\pi : X \rightarrow B$ — компактное расслоение над B , которое продолжает данное расслоение $\tilde{\pi} : A \rightarrow \pi(A)$; $R : C_R(X) \rightarrow C_R(A)$ ставит в соответствие каждой функции из $C_R(X)$ её ограничение на A :

$$Rf(a) = f(a) \quad \text{для всех } f \in C_R(X), a \in A.$$

Если определить оператор $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ равенством

$$Pf(x) = \tilde{P}(Rf)(\pi(x)),$$

то можно показать, что P — марковский мультипликативно симметричный оператор.

Пусть Y — замкнутое подмножество хаусдорфова компакта X ; $\sim$ обозначает замкнутое отношение эквивалентности на X ; $\tilde{C}_R(X)(= C_R(X/\sim))$ — подалгебра в $C_R(X)$, состоящая из всех функций, постоянных на классах эквивалентности; $\tilde{C}_R(Y)$ определяется аналогично, путём ограничения отношения $\sim$ на Y . *Линейным оператором q -продолжения для Y и отношения $\sim$* называется ограниченный линейный оператор $Q : \tilde{C}_R(Y) \rightarrow C_R(X)$, такой что $Qf(y) = f(y)$ при всех $f \in \tilde{C}_R(Y)$, $y \in Y$. В работе Dhombres, 1976b доказана

Теорема 20. *Марковский оператор $P : C_R(X) \rightarrow C_R(X)$ мультипликативно симметричен, если и только если*

$$P = Q \circ S \circ R,$$

где R — оператор ограничения на замкнутое подмножество Y в X ; S — усредняющий марковский оператор на $C_R(Y)$, причём $S(C_R(Y)) = R(P[C_R(X)])$; Q — марковский линейный оператор q -расширения для Y и отношения эквивалентности $\tilde{P}$. ■

19.6. Операторы дифференцирования

Операторы Рейнольдса тесно связаны с операторами дифференцирования. Пусть оператор Рейнольдса P обратим. Линейный оператор D , заданный формулой

$$Df = P^{-1}(f) - f,$$

удовлетворяет функциональному уравнению, определяющему оператор дифференцирования (см. (21) и упр. 2.11):

$$D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg. \quad (58)$$

Пусть $C(T)$ — алгебра всех комплекснозначных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с периодом 2π . Назовём оператор $P : C(T) \rightarrow C(T)$ *стационарным*, если $P(T_h(f)) = T_h(Pf)$ при всех $h \in \mathbb{R}$, $f \in C(T)$, где T_h — оператор сдвига:

$$T_h(f)(x) = f(x + h).$$

Легко доказать, что единственный непрерывный и стационарный оператор дифференцирования — это нулевой оператор. В самом деле, единственными собствен-

ными функциями для всех T_h являются функции $e_n : x \mapsto e^{inx}$, где n — целое. Они являются собственными и для оператора P , поскольку он перестановочен с T_h :

$$P(e_n) = a_n e_n, \quad (59)$$

где a_n — комплексные константы. С учётом (58) получаем простое функциональное уравнение (уравнение Коши на $\mathbb{Z}^2$):

$$a_{n+m} = a_n + a_m \quad (n, m \in \mathbb{Z}).$$

Отсюда $a_n = \lambda n$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку оператор P непрерывен относительно равномерной нормы, то

$$\|P(e_n)\| = |\lambda| \cdot |n| \leq \|P\|,$$

откуда $\lambda = 0$, $P \equiv 0$. Согласно классической теореме анализа этот результат верен и без предположения о стационарности.

Теорема 21. Пусть X — хаусдорфов компакт, $C(X)$ — банахова алгебра всех комплекснозначных непрерывных функций на X . Линейный оператор $D : C(X) \rightarrow C(X)$ является дифференцированием, лишь если он нулевой.

Доказательство. Ввиду линейности достаточно доказать, что $Df = 0$ для вещественнозначных $f \in C(X)$. Вначале предположим, что квадратный корень g из f существует и принадлежит $C_R(X)$. В силу (58) $D(f) = 2gD(g)$. Поэтому если g обращается в нуль в некоторой точке x_0 , то $D(g^2)(x_0) = 0$. Любая вещественнозначная функция f из $C_R(X)$, равная нулю в x_0 , может быть записана в виде $f(x) = g(x)^2 - h(x)^2$, где $g(x_0) = h(x_0) = 0$. Как следствие, $Df(x_0) = 0$. Тогда для произвольной функции $f \in C_R(X)$ верно, что $D(f - f(x_0)1)(x_0) = 0$. Но в силу (58) $D(1) \equiv 0$, откуда

$$Df(x_0) = 0,$$

и ввиду произвольности x_0 получаем $D \equiv 0$, что и требовалось. ■

Теорема 21 обобщается на коммутативные комплексные банаховы алгебры на основе следующего подхода (Singer–Wermer, 1955). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, а $D : A \rightarrow A$ — ограниченный линейный оператор дифференцирования. Тогда линейный оператор

$$e^{\lambda D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n D^n}{n!} \quad (60)$$

ограничен (здесь $D^0 = I$). Для мультипликативной линейной формы $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ рассмотрим мультипликативный линейный функционал

$$Q(\lambda, f) = \chi(e^{\lambda D}(f)).$$

Тогда

$$Q(\lambda, fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \chi(D^n(fg)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{i+j=n} \frac{\chi(D^i(f))}{i!} \frac{\chi(D^j(g))}{j!},$$

где i, j — неотрицательные целые. Поскольку ряд (произведение Коши) сходится абсолютно, то

$$Q(\lambda, fg) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \chi(D^n(f)) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \chi(D^n(g)) \right),$$

т. е.

$$Q(\lambda, fg) = Q(\lambda, f)Q(\lambda, g). \quad (61)$$

Как следствие, любой ненулевой мультипликативный линейный функционал на A ограничен и имеет норму 1:

$$|Q(\lambda, f)| \leq \|f\|. \quad (62)$$

Но для любого элемента $f \in A$ функция $Q(\lambda, f)$ является целой. Из (62) в сочетании с теоремой Лиувилля вытекает, что $Q(\lambda, f) = Q(0, f) = 1$ при всех $f \in C(X)$. Как следствие, $\chi(D^n f) = 0$ при $n \geq 1$. Таким образом, $\chi(Df) = 0$ для любой мультипликативной линейной формы χ на A и любого элемента $f \in A$. В коммутативной комплексной банаховой алгебре A множество всех таких f , что $\chi(f) = 0$ для всех мультипликативных линейных форм χ на A , называется *радикалом*. Если он состоит только из нуля, то алгебра называется *полупростой*. Легко показать, что банахова алгебра $C(X)$ полупроста. Доказана

Теорема 22. *Единственным ограниченным линейным дифференцированием на полупростой комплексной банаховой алгебре является нулевой оператор.* ■

Отметим, что в теореме 21, в противоположность теореме 22, отсутствуют какие-либо условия регулярности для оператора дифференцирования. Поэтому теорема 21 не содержится в теореме 22. Однако можно доказать, что теорема 22 также верна и без условия регулярности (ограниченности). Известны существенные обобщения этой теоремы.

Последующие результаты и упражнения

1. Докажите, что S является замкнутой собственной подгруппой топологической аддитивной группы $\mathbb{R}$, если и только если $S = \alpha\mathbb{Z}$ для некоторого вещественного α .

2. (См., например: Hewitt–Ross, 1963, р. 587.) Пусть $H = \{(x, \alpha x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, где $\alpha \in \mathbb{R}^*$ — константа. Тогда $(H, +)$ — замкнутая подгруппа в топологической аддитивной группе $\mathbb{R}^2$. Обозначим через ϕ каноническое отображение из $\mathbb{R}^2$ на топологическую факторгруппу $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Опровергните или докажите, что подгруппа $\phi(H)$ замкнута в $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, если и только если α рационально, и всюду плотна (и не совпадает с $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$), если и только если α иррационально.

3. Докажите, что характеристическая функция непустого множества в $\mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению Голомба–Шинцеля (6):

$$f(x + f(x)y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

если и только если это множество — подгруппа в $(\mathbb{R}, +)$. Верно ли это в произвольном кольце?

4. (См. Dhombres, 1982.) Решите пексидеровский аналог уравнения (6), т. е. найдите все $f, g, h : F \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$f(x + g(x)y) = g(x)h(y) \quad (x, y \in F),$$

где F — вещественное линейное пространство.

5. (Lawgense, 1981a.) Пусть D — тело. Докажите, что все решения $f : D \setminus \{0\} \rightarrow D$ уравнения

$$f(xy) = xf(y) + f(x) \quad (x, y \in D \setminus \{0\}),$$

обобщающего уравнение (12), имеют вид $f(x) = (x - 1)a$ ($x \in D$), где $a \in D$ — произвольная константа.

6. Докажите предложение 1 с помощью теоремы 5.

7. (См. Рора, 1965.) Опровергните или докажите, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, измеримая по Лебегу и удовлетворяющая уравнению

$$f(x + f(x)y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

либо непрерывна, либо почти всюду равна нулю.

(В связи с упр. 8–9 см.: Wołodźko 1968.)

8. Пусть нуль не является предельной точкой для группы периодов функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, причём $f(\mathbb{R}) \neq \{-1, 0, 1\}$. Опровергните или докажите, что

$$f(x + f(x)y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

если и только если существуют мультипликативная подгруппа G в $\mathbb{R}^*$ и константа a , такие что

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax & \text{при } (1 + ax) \in G, \\ 0 & \text{при } (1 + ax) \notin G. \end{cases}$$

9. Найдите все непрерывные функции $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$f(x + f(x)y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbb{C}).$$

10*. (Brillouët–Dhombres, 1986.) Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — диагональная матрица 2×2 при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Найдите все непрерывные решения $\mathbf{F}$ уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$).

(В связи с упр. 11–13 см.: Dhombres, 1979, p. 6.10–6.19.)

11. Найдите все непрерывные решения $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$g(g(x)) = (\lambda + 1)g(x) - \lambda x$$

при $\lambda \leq 0$.

12*. Пусть $0 < \lambda < 1$, G — вещественное отделимое линейное пространство. *Регулярной итеративной выпуклой декомпозицией* пространства G называется его разбиение на непересекающиеся замкнутые множества S_x ($x \in I$), где I — замкнутое непустое подмножество в G , $S_x \cap I = \{x\}$, $\lambda y + (1 - \lambda)x \in S_x$ при $y \in S_x$, причём естественное отображение $h: G \rightarrow I$ ($h(y) = x$, если $y \in S_x$) непрерывно. Опровергните или докажите, что функция $g: G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению

$$g(g(x)) = (\lambda + 1)g(x) - \lambda x \quad (x \in G),$$

если и только если существует регулярная итеративная выпуклая декомпозиция пространства G , такая что $h(x) = [g(x) - \lambda x]/(1 - \lambda)$.

13. Что произойдёт с решениями предыдущего уравнения, если $\lambda > 1$ или $\lambda \leq 0$?

14*. Приведите примеры регулярных итеративных выпуклых декомпозиций (упр. 12) в $\mathbb{R}^n$.

15. (Dhombres, 1979, p. 640.) Опровергните или докажите, что все непостоянные непрерывные решения функционального уравнения

$$f(xf(y)) = f(yf(x)) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

имеют одну из следующих форм:

- (i) $f(x) = ax$,
- (ii) $f(x) = \sup(bx, cx)$,
- (iii) $f(x) = \inf(dx, -dx)$,

где a, b, c, d — произвольные вещественные константы с ограничениями $a \neq 0$, $b \leq 0 \leq c$, $b < c$, $d > 0$.

16. (Dhombres, 1977a.) Пусть $(G, *)$ — группа. Найдите все решения $f : G \rightarrow G$ функционального уравнения

$$f(x * f(y)) = f(x * y) \quad (x, y \in G).$$

17. (Dhombres, 1984c.) Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $f(x)f(y) - f(xy)$ зависит только от $x + y$ (см. упр. 4.5, 4.24).

18. (Dhombres, 1977a.) Пусть $(G, *)$ — группа. Опровергните или докажите, что функция $f : G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению

$$f(x * f(y)) = f(x) * f(y) \quad (x, y \in G),$$

если и только если существуют подгруппа H (не обязательно нормальная) и подъём $h : (G/H)_l \rightarrow G$, такие что

$$f(x) = (h(\pi_H(x)))^{-1} * x \quad (x \in G),$$

где $(G/H)_l$ — множество левых смежных классов по H , а $\pi_H : G \rightarrow (G/H)_l$ — каноническое отображение.

(В связи с упр. 19–22 см.: Dhombres, 1979, р. 6.41–6.50.)

19*. Пусть $(G, *)$ — сократимый коммутативный моноид. (Моноид — полугруппа с единицей. Определение сократимости см. в упр. 17.5.) Опровергните или докажите, что $f : G \rightarrow G$ удовлетворяет уравнению

$$f(x * f(y)) = f(x) * f(y) \quad (x, y \in G),$$

если и только если существуют группа $(\bar{G}, *)$ и её подгруппа $(H, *)$, такие что $G \subset \bar{G}$ и

$$f(x) = (h(\pi_H(x)))^{-1} * x \quad (x \in G),$$

где h — подъём относительно H .

20*. Пусть $(G, *)$ — сократимый коммутативный моноид. Найдите общий вид операции $\Delta : G^2 \rightarrow G$, для которой

$$(x * y)\Delta z = x * (y\Delta z) \quad \text{при всех } x, y, z \in G.$$

21. Пусть $(G, *)$ — простая абелева группа. Опровергните или докажите, что ассоциативные операции $\Delta : G^2 \rightarrow G$, удовлетворяющие уравнению $(x * y)\Delta z = x * (y\Delta z)$, имеют вид либо $x\Delta y = x * y * a$ для некоторого $a \in G$, либо $x\Delta y = x$.

22*. Докажите следующий факт. Пусть $(G, +)$ — абелева группа, а операция $\Delta : G^2 \rightarrow G$ такова, что $e\Delta e = e$, причём элемент $((x + y)\Delta z) - (y\Delta z)$ зависит только от x . Тогда операция Δ ассоциативна, если и только если существуют: такая подгруппа I , что $G = G/I \otimes I$, а также подгруппа H в I , подъём $h : I/H \rightarrow I$ и отображение $i : G \rightarrow G/I$, такие что $h(e) = e$, $i(e) = e$, $i(y + z) = z$ при всех $y \in \in I$, $z \in i(I)$ и

$$x\Delta y = \pi_I(x + y) - h(\pi_H(y)) + i(y) \quad \text{при всех } x, y \in G.$$

23. (См. Dhombres, 1976c.) Докажите или опровергните следующее утверждение. Пусть Δ — ассоциативная бинарная операция на $\mathbb{R}$, непрерывная по обоим переменным, причём элемент $((x + y)\Delta z) - (y\Delta z)$ зависит только от x , а отображения $x \mapsto x_0\Delta x$ и $x \mapsto x\Delta y_0$ при некоторых x_0, y_0 не являются константами. Тогда существует вещественная константа a , такая что $x\Delta y = x + y + a$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

24. (См. Dhombres, 1979, р. 6.50–6.55.) Пусть $(G, +)$ — абелева группа. Найдите все $f : G \rightarrow G$, для которых $f(0) = 0$ и операция $x \square y = f(x + f(y))$ ассоциативна.

25. (Dhombres, 1979, p. 6.2–6.6.) Опровергните или докажите, что функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ является непрерывным решением уравнения $f(xf(x)) = (f(x))^2$ ($x \in \mathbb{R}_+$), если и только если f имеет одну из следующих форм:

(a) $f(x) = 1$;

(b) $f(x) = \mu x$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x/\lambda & (0 \leq x < \lambda), \\ 1 & (x \geq \lambda); \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x/\lambda_1 & (0 \leq x < \lambda_1), \\ 1 & (\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2), \\ x/\lambda_2 & (x > \lambda_2), \end{cases}$

где $\mu, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ — произвольные вещественные константы с ограничениями $\mu \geq 0$, $\lambda > 0$, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$.

(В связи с упр. 26–28 см.: Dhombres, 1979, p. 7.4–7.9, 7.16–7.19.)

26. Обозначим через $C(T)$ алгебру всех комплекснозначных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с периодом 2π . Опровергните или докажите, что ненулевой непрерывный стационарный линейный оператор $P: C(T) \rightarrow C(T)$ является оператором Рейнольдса, если и только если существуют целое k и комплексное s , не принадлежащее $k\mathbb{Z}$ (возможно, бесконечное), для которых $P = R_{s,k} \circ P_k$, где

$$P_0 f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad P_k f(x) = \frac{f(x) + f\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) + \dots + f\left(x + \frac{k-1}{k}2\pi\right)}{k} \quad (k \neq 0),$$

$$R_\infty f(x) = R_{s,0} f(x) = f(x), \quad R_{s,k} f(x) = \frac{s}{2 \sin(\pi s/k)} \int_{-\pi/k}^{\pi/k} e^{-its} f\left(x - t - \frac{\pi}{k}\right) dt.$$

27. Найдите необходимые и достаточные условия, при которых непрерывный линейный оператор $P: C_R(T) \rightarrow C_R(T)$ мультипликативно симметричен (см. (57)) и стационарен.

28*. Найдите необходимые и достаточные условия, при которых непрерывный линейный оператор $P: C_R(T) \rightarrow C_R(T)$ стационарен, причём $P(1) = 1$ и

$$P(fPg + gPf) = \alpha P(fg) + (1 - \alpha)Pf \cdot Pg + P(Pf \cdot Pg)$$

при всех $f, g \in C_R(T)$.

29*. (Brillouët–Dhombres, 1986.) Найдите все непрерывные решения $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$f(xf(y) + yf(x)) = 2f(x)f(y),$$

где E — вещественное топологическое векторное пространство.

30. Пусть $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $|\phi(x)| \leq |x|$ при всех $x \in [0,1]$. Найдите все дифференцируемые функции $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(0) = 0$ и при всех $x \in [0,1]$ выполнено функционально-дифференциальное уравнение

$$f'(x) = f(\phi(x)).$$

31*. (Dhombres, 1971b.) Обозначим через $\mathbb{T}$ компактное пространство $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Пусть $1 < p < \infty$. Найдите все ограниченные линейные операторы $P: L^p(\mathbb{T}) \rightarrow L^p(\mathbb{T})$, которые являются операторами Бакстера и коммутируют со сдвигами (т. е. $P(\tau_h f) = \tau_h(Pf)$ для всех $h \in \mathbb{T}$, где $\tau_h f(x) = f(x - h)$).

(В связи с упр. 32–33 см.: Miller, 1966a.)

32*. Пусть A — банахова алгебра с единицей e , а $L(A)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов $A \rightarrow A$. Резольвентой $\text{Res } P$ оператора $P \in L(A)$ называется множество всех комплексных λ , для которых оператор $\lambda I - P$ обратим в $L(A)$. Точно так же для $a \in A$ определим $\text{Res } a$ как множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\lambda e - a)^{-1} \in A$ (см. упр. 11.31). Пусть $P \in L(A)$,

$$P(x \cdot Py + Px \cdot y) = Px \cdot Py - P(\vartheta xy) \quad (x, y \in A),$$

где ϑ — фиксированный элемент из A . Докажите, что

$$(\lambda I - P)^{-1}x = \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} f_\lambda \cdot P(f^{-1}(\lambda e - \vartheta)^{-1}x),$$

где

$$f_\lambda = (P - \lambda I)^{-1}e, \quad \lambda \in (\text{Res } P) \cap (\text{Res } \vartheta), \quad f_\lambda^{-1} \in A.$$

33*. Пусть B — алгебра всех многочленов от x с комплексными коэффициентами, $P : B \rightarrow B$ — линейный оператор, причём $P(1) = x$. Покажите, что P является оператором Бакстера, если и только если

$$P(x^n) = \frac{1}{n+1} B_{n+1}(1+x) \quad (n \geq 1),$$

где B_n обозначает n -й многочлен Бернулли, определяемый условием

$$z \frac{e^{zx} - 1}{e^z - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

34. (Volkman–Weigel, 1984.) Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f(xf(y) + yf(x) - xy) = f(x)f(y).$$

35. (Benz, 1983.) Покажите, что все $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f\left(x+z, y+\frac{1}{z}\right) - f(x, y) - z^2\left(g\left(x+z, y+\frac{1}{z}\right) - g(x, y)\right) = 0$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^*$, имеют вид

$$f(x, y) = d(x) + \alpha x + \beta, \quad g(x, y) = d(y) - \alpha y + \gamma,$$

где d — дифференцирование, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (см. упр. 2.11).

Глава 20

ОДНОРОДНОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ОБОБЩЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Свойство однородности функции можно выразить функциональным уравнением. В этой главе мы рассмотрим уравнения более общего вида, их общие решения и применения в математической экономике.

В конце гл. 15, в формуле (15.47), мы встретились с *уравнением однородности*, которое можно записать в виде

$$f(x_1u, x_2u, \dots, x_nu) = u^c f(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n, u \in \mathbb{R}_+). \quad (1)$$

(В гл. 15 мы имели $c = 1$, $n = 2$, и область определения была несколько иной.) Теперь рассмотрим два обобщения этого уравнения. Одно из них — функциональное уравнение с двумя неизвестными функциями, n -местной и одноместной:

$$f(x_1u, x_2u, \dots, x_nu) = g(u)f(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n, u \in \mathbb{R}_+). \quad (2)$$

Это уравнение *обобщённой однородности*. Из него следует, что

$$\begin{aligned} g(uv)f(x_1, \dots, x_n) &= f(x_1uv, x_2uv, \dots, x_nuv) = \\ &= g(v)f(x_1u, x_2u, \dots, x_nu) = g(u)g(v)f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда, за исключением тривиального случая

$$f \equiv 0, \quad \text{функция } g \text{ произвольна}, \quad (4)$$

выполнено уравнение

$$g(uv) = g(u)g(v) \quad (u, v \in \mathbb{R}_+), \quad (5)$$

т. е. степенное уравнение Коши (3.23). Если $g \equiv 0$, то $f \equiv 0$ в силу (2), что охватывается случаем (4). В остальных случаях, полагая в (5) $u = 1$ или $u = 1/v$, получаем соответственно

$$g(1) = 1; \quad g\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{g(v)} \quad (v \in \mathbb{R}_+).$$

Подставим $u = 1/x_1$ в (2) и положим $h(t_2, \dots, t_n) = f(1, t_2, \dots, t_n)$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1)h\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) \quad \text{при всех } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

И в случае (4), и в случае (5)–(6) с произвольной функцией h выполнено (2). Мы установили следующий факт (см. также предположение 3.6).

Теорема 1. *Общие решения $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2) имеют вид (4) и (6), где функция $h : \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ произвольна, а g — произвольное решение уравнения (5). В частности, если функция g непрерывна в точке или ограничена на множестве положительной меры, то общие решения в соответствующих классах функций (но*

без ограничений на f) имеют вид (4) (где функция g произвольна в данном классе), а также

$$\begin{aligned} g(u) &= u^c \quad (u \in \mathbb{R}_+; \quad c — произвольная константа), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1^c h\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) \\ (x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+; \quad \text{функция } h \text{ произвольна}). \end{aligned} \quad (7)$$

В последнем случае уравнение (2) сводится к (1). ■

Ещё проще с помощью подстановки $u = x_1^{-1/c_1}$ решается следующее обобщение уравнения (1).

Предложение 2. Общее решение $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(x_1 u^{c_1}, \dots, x_n u^{c_n}) = u^c f(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n, u \in \mathbb{R}_+) \quad (8)$$

(где, например, $c_1 \neq 0$, но в остальном $c, c_1, \dots, c_n$ — произвольные вещественные константы) имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{c/c_1} h(x_2 x_1^{-c_2/c_1}, \dots, x_n x_1^{-c_n/c_1}) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+) \quad (9)$$

с произвольной функцией $h: \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. ■

(Разумеется, если $c \neq 0$, но $c_1 = \dots = c_n = 0$, то решения сводятся к нулевому.)

На эту тему см., например: Wellstein, 1910; Halphen, 1911; Favre, 1917; Lions, 1958; Aczél, 1966с, р. 231–232, 304–310.

Рассмотренные уравнения применяются, например, в математической экономике. Так, в работе Eichhorn 1972 *экономическая эффективность* определяется как вещественная функция f от времени t , капитала x , результата y (возможно, отрицательного) и доходности z (возможно, нулевой) производственного процесса, причём для всех $y \in \mathbb{R}$, $t, u, x \in \mathbb{R}_+$, $z \in \overline{\mathbb{R}}_+$ выполнены следующие условия:

$$f(t, x, y, z) \text{ имеет тот же знак, что и } y^1 \quad (10)$$

(эффективность положительна, отрицательна или равна нулю вместе с результатом);

$$f(ut, x, uy, z) = f(t, ux, uy, z) = f(t, x, y, z) \quad (11)$$

(эффективность не меняется, если время и результат или капитал и результат меняются в одинаковое число раз);

$$f(t, x, uy, z) = u f(t, x, y, z) \quad (12)$$

(если капитал, доходность и время не меняются, то эффективность меняется пропорционально результату);

$$f(t, x, y, uz) = g(u) f(t, x, y, z), \quad (13)$$

где функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая. Последнее свойство означает рост эффективности при росте доходности.

Теорема 3. Общее решение системы (10)–(13) ($t, u, x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \overline{\mathbb{R}}_+$) с возрастающей функцией g имеет вид

$$f(t, x, y, z) = a_{\text{sgn } y} \frac{y}{tx} z^c, \quad (14)$$

где a_0, a_1, a_{-1}, c — произвольные положительные константы.

¹) В действительности из (13) вытекает, что $f(t, x, y, 0) \equiv 0$, и нужно либо добавить это условие, либо считать $z > 0$.

Доказательство. Очевидно, что функции вида (14) удовлетворяют условиям (10)–(13). Обратно, пусть для функции f выполнены эти условия. Применим к $f(t, x, y, z)$ равенства (11), положив сначала $u = t$, потом $u = x^1$, а затем применим (12) при $u = |y|/tx^2$:

$$\begin{aligned} f(t, x, y, x) &= f\left(t \cdot 1, x, t \cdot \frac{y}{t}, z\right) = f\left(1, x, \frac{y}{t}, z\right) = f\left(1, x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{tx}, z\right) = \\ &= f\left(1, 1, \frac{y}{tx}, z\right) = f\left(1, 1, \frac{|y|}{tx} \operatorname{sgn} y, z\right) = \frac{|y|}{tx} f(1, 1, \operatorname{sgn} y, z) \quad (15) \end{aligned}$$

(с учётом (10) это верно и при $y = 0$, так же как и (14), поэтому дальше считаем $y \neq 0$). С другой стороны, из (13) вытекает

$$g(uv)f(1, 1, s, z) = f(1, 1, s, uvz) = g(u)g(v)f(1, 1, s, z) \quad (s = \pm 1, u > 0, v > 0),$$

откуда с учётом (10)

$$g(uv) = g(u)g(v) \quad \text{при } u > 0, v > 0.$$

Если g возрастает, то в силу предложения 3.6 $g(u) = u^c$ ($u > 0$), где $c > 0$, и из (13) следует, что при $z > 0$

$$f(1, 1, s, z \cdot 1) = z^c f(1, 1, s, 1) = sa_s z^c,$$

где $a_s = \frac{1}{s} f(1, 1, s, 1)$, $s = \pm 1$. Подставляя затем $t = x = 1$, $y = s$, $z = 0$ в (13) при $g(u) = u^c$ ($c > 0$), получаем $f(1, 1, s, 0) = 0$. Ввиду (10) $a_s > 0$, и с учётом (15) получаем (14). Как уже отмечено, (14) выполняется и при $y = 0$. Теорема 2 доказана. ■

(В работе Eichhorn, 1972 условие (13) несколько ослаблено и результат получается более сложным.)

Однородные функции и их обобщения имеют много других приложений в математической экономике (см. Eichhorn, 1978). Одно из них относится к производственным функциям. Следующий результат модифицирует и несколько обобщает изложенное в книге Eichhorn, 1978, р. 69–97, 184–227. В результате производственного процесса неотрицательные «входные переменные» $x_1, \dots, x_n$ можно преобразовать в неотрицательный *максимальный выпуск* $F(x_1, \dots, x_n)$ (в натуральной или стоимостной форме); при этом $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *производственной функцией*. Обратите внимание, что от $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ требуется *неотрицательность*. Производственная функция обычно предполагается строгой монотонной, но мы наложим более слабое условие.

Существуют положительные константы $d_1, \dots, d_n$, такие что

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) &\leq F(x_1, \dots, x_{j-1}, x'_j, x_{j+1}, \dots, x_n), \\ \text{как только } 0 < x_k < d_k \quad (k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n), \quad 0 < x_j < x'_j < d_j; \quad (16) \\ \text{при этом неравенство является строгим хотя бы для одной пары } x_j < x'_j \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

В теореме 5 (см. ниже) достаточно предположить, что *при $j = 1, \dots, n$ существуют константы s_j, d_j и положительные константы $b_{j,1}, \dots, b_{j,j-1}, b_{j,j+1}, \dots, b_{j,n}$*

¹) В первом случае мы переходим от левой части (11) к правой, во втором — от средней к правой.

²) Условие (12) можно применять при $u > 0$, т.е. $y \neq 0$.

такие что $0 \leq c_j < d_j$ и

$$F(b_{j,1}, \dots, b_{j,j-1}, x_j, b_{j,j+1}, \dots, b_{j,n}) \leq F(b_{j,1}, \dots, b_{j,j-1}, x'_j, b_{j,j+1}, \dots, b_{j,n}),$$

как только $c_j < x_j < x'_j < d_j$;

при этом неравенство является строгим хотя бы для одной такой пары $x_j < x'_j$. (17)

Это утверждение несколько сильнее, чем требование, чтобы производственная функция была непостоянной по каждому переменному.

Остальные два допущения касаются однородности и обобщённой однородности. Потребуем однородности степени 1 по всем переменным:

$$F(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = tF(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (18)$$

при всех $x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $t > 0$. Последним условием будет частная обобщённая однородность.

Существуют такие функции $g_j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$), что

$$F(tx_1, \dots, tx_{j-1}, x_j, tx_{j+1}, \dots, tx_n) = g_j(t)F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

при всех $t > 0$, $x_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$). (19)

Условие (18) выглядит довольно жёстким. Но, по мнению ряда экономистов, если производственная функция не является однородной (степени 1), то это означает, что рассмотрены не все входные переменные. Математики могут в определённом смысле согласиться, поскольку справедливо

Предложение 4. Пусть $f : \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция, $c > 0$ — произвольная константа. Тогда существует одна и только одна функция $F : \mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет уравнению

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, c) = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{на } \mathbb{R}_+^{n-1} \quad (20)$$

и однородна степени 1:

$$F(tx_1, \dots, tx_{n-1}, tx_n) = tF(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (21)$$

при всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}_+$, $x_n > 0$, $t > 0$. Можно так доопределить F , что равенство (21) сохранится и при $x_n = 0$.

Доказательство. Из (20) и (21) следует, что

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{x_n}{c} F\left(\frac{x_1}{x_n} c, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} c, c\right) = \frac{x_n}{c} f\left(\frac{x_1}{x_n} c, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n} c\right).$$

И обратно: такая функция, доопределённая равенством

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) := 0, \quad (22)$$

удовлетворяет уравнениям (20) и (21). ■

Здесь в качестве $F(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ можно было бы взять любую функцию от $n - 1$ переменных, однородную степени 1 (так что при $x_n = 0$ выбор функции F не единствен), но определение (22) окажется удобным позже. Предложение 4 выглядит менее (или более) неожиданным, если заметить, что аналогичные предложения верны для однородных функций любой степени, а также для обобщённо однородных функций. Все эти утверждения можно рассматривать как утверждения о продолжении функций.

Если какое-то из входных переменных не меняется (может быть потому, что мы его не рассматривали), то уже нельзя рассчитывать на однородность степени 1.

Но условие (19) означает наличие некоей обобщённой однородности и в этих случаях. Справедлива следующая

Теорема 5. *Функция $F: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям (17), (18) и (19), если и только если существуют такие константы $b, a_1, \dots, a_n$, что*

$$0 < a_j < 1, \quad \sum_{j=1}^n a_j = 1, \quad b > 0, \quad (23)$$

$$g_j(t) = t^{1-a_j} \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad (24)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = b x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \quad \text{на } \mathbb{R}_+^n. \quad (25)$$

Такие функции называются *производственными функциями Кобба–Дугласа*. В их прежних характеристиках (см.: Eichhorn, 1978, р. 185–189) утверждение (24) включалось в число предположений.

Доказательство. Так же как (5) выводилось из (2), мы получаем из (19)

$$g_j(tu) = g_j(t)g_j(u) \quad (t, u \in \mathbb{R}_+; \quad j = 1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

поскольку $F \not\equiv 0$ ввиду (17). В силу (17) и (19) каждая из функций g_j не равна 0 хотя бы в одной точке — а тогда и всюду на $\mathbb{R}_+$. Из (26) следует их неотрицательность¹⁾, и потому g_j всюду положительны, как и в гл. 3. Многократно применяя (18) и (19), получаем при положительных значениях переменных

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n \times \\ &\times F\left(\frac{1}{x_2 x_3 x_4 \dots x_n}, \frac{1}{x_1 x_3 x_4 \dots x_n}, \frac{1}{x_1 x_2 x_4 \dots x_n}, \dots, \frac{1}{x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1}}\right) = \\ &= x_1 g_1\left(\frac{1}{x_1}\right) x_2 x_3 \dots x_n \times \\ &\times F\left(\frac{1}{x_2 x_3 x_4 \dots x_n}, \frac{1}{x_3 x_4 x_5 \dots x_n}, \frac{1}{x_2 x_4 x_5 \dots x_n}, \dots, \frac{1}{x_2 x_3 x_4 \dots x_{n-1}}\right) = \\ &= x_1 g_1\left(\frac{1}{x_1}\right) x_2 g_2\left(\frac{1}{x_2}\right) x_3 \dots x_n \times \\ &\times F\left(\frac{1}{x_3 x_4 \dots x_n}, \frac{1}{x_3 x_4 \dots x_n}, \frac{1}{x_4 x_5 \dots x_n}, \dots, \frac{1}{x_3 x_4 \dots x_{n-1}}\right) = \dots \\ &\dots = x_1 g_1\left(\frac{1}{x_1}\right) x_2 g_2\left(\frac{1}{x_2}\right) \dots x_n g_n\left(\frac{1}{x_n}\right) F(1, \dots, 1). \quad (27) \end{aligned}$$

Так как $F(1, \dots, 1) \geq 0$, $x_k g_k\left(\frac{1}{x_k}\right) > 0$ ($k = 1, \dots, n$), то ввиду (17) функции $x_j g_j(1/x_j)$ не убывают на интервале $]c_j, d_j[$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Поэтому

$$x_j g_j\left(\frac{1}{x_j}\right) \leq d_j g_j\left(\frac{1}{d_j}\right), \quad g_j(t) \leq \frac{d_j}{c_j} g_j\left(\frac{1}{d_j}\right) \quad \text{при } t \in \left]\frac{1}{d_j}, \frac{1}{c_j}\right[.$$

Таким образом, функция g_j ограничена сверху на собственном промежутке и потому (предложение 3.6) $g_j(t) = t^{1-a_j}$ ($t \in \mathbb{R}_+$), где константа a_j положительна, поскольку

¹⁾ Положив $t = u = \sqrt{x}$, получаем $g_j(x) = g_j(t)^2$.

$x_j g(1/x_j)$ возрастает. Значит, (24) выполнено, а (27) превращается в равенство (25) на $\mathbb{R}_+^n$:

$$F(x_1, \dots, x_n) = b x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \quad (x_1 > 0, \dots, x_n > 0). \quad (28)$$

При этом $b, a_1, \dots, a_n > 0$ ввиду (17) и неотрицательности функции F . В силу (18) $\sum_{j=1}^n a_j = 1$, поэтому $a_j < 1$ ($j = 1, \dots, n$), т.е. получено (23).

Если теперь, скажем, $x_j = 0$, то в силу (18) и (19)

$$\begin{aligned} tF(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) &= F(tx_1, \dots, tx_{j-1}, 0, tx_{j+1}, \dots, tx_n) = \\ &= g_j(t)F(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Поскольку $g_j(t) = t^{1-a_j}$ при $0 < a_j < 1$, то случай $g_j(t) = t$ исключён, и потому

$$F(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(см. (22)). Таким образом, (25) выполнено и в случае равенства некоторых x_j нулю. Обратно, из (23)–(25) следуют условия (17)–(19) (и (16)). Теорема 5 доказана. ■

В математической экономике рассматриваются и другие свойства производственных функций. Мы сейчас увидим, что некоторые из них *всегда* присущи производственным функциям Кобба–Дугласа, т.е. следуют из (16) (или (17)), (18) и (19). Другие условия могут для таких функций и не выполняться.

Закон убывающих (в конце) предельных выпусков утверждает, что отображения

$$\begin{aligned} x_j &\mapsto F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) & (j = 1, 2, \dots, n), \\ t &\mapsto F(tx_1, \dots, tx_k, x_{k+1}, \dots, x_n) & (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (29)$$

вогнуты, по крайней мере *начиная с некоторой точки x_{j_0} или, соответственно, t_0* . Это заведомо верно для функции (25) при условиях (23), но не вытекает из любых двух условий из совокупности (16)–(19). В самом деле, функция (25) при

$b > 0$, $\sum_{j=1}^n a_j = 1$ и хотя бы одном отрицательном a_k удовлетворяет условиям (18),

(19) (для $g_j(t) = t^{1-a_j}$; $j = 1, \dots, n$), но не условиям (16) и (17), и отображение $x_k \mapsto F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ выпукло, а не вогнуто. Аналогично, если в (25)

$b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, но $\sum_{j=1}^n a_j = \sigma > 1$ и некоторое a_k больше единицы, то вы-

полняется (16) (а тогда и (17)), (19) для $g_j(t) = t^{\sigma-a_j}$, но не (18), и отображение $x_k \mapsto F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ выпукло. Наконец, отображение $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ удовлетворяет условиям (16) (а тогда и (17)) и (18), но не (19) (при любой функции g_j), и каждое из отображений $x_j \mapsto F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ выпукло.

Закон убывающих (в конце) средних выпусков требует, чтобы функции

$$x_j \mapsto \frac{1}{x_j} F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$t \mapsto \frac{1}{t} F(tx_1, \dots, tx_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

убывали при достаточно больших x_j или t . (В обоих законах можно заменить $\{x_1, \dots, x_k\}$ другими подмножествами из $\{x_1, \dots, x_n\}$.) Последний закон выполнен

для функции (25) с условием (23), но он следует уже из (16) и (18) независимо от (19). Действительно,

$$\frac{1}{x_j} F(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = F\left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right),$$

$$\frac{1}{t} F(tx_1, \dots, tx_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = F\left(x_1, \dots, x_k, \frac{x_{k+1}}{t}, \dots, \frac{x_n}{t}\right),$$

а согласно (16) функция F при небольших значениях переменных возрастает. Этот закон выполняется также, если F однородна степени меньше 1, но больше 0.

Закон возрастающих в начале и убывающих в конце предельных выпусков постулирует существование таких $x_{10}, \dots, x_{n0}, t_0$, что функции (29) возрастают и выпуклы при $x_j \leq x_{j0}, t \leq t_0$, но вогнуты при $x_j > x_{j0}, t > t_0$. Этот закон *противоречит* условиям (17), (18) и (19), поскольку не выполняется для функции вида (25) (с условием (23)).

Последующие результаты и упражнения

(В связи с упр. 1–4 см.: Eichhorn, 1978, p. 141–142, 152–155, 174–179, 210.)

1. *Уровень цен*, зависящий от цен n товаров — это функция $P: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которой существуют такие $c_j \in \mathbb{R}_+$ ($j = 1, 2, \dots, n$), что

$$P(\lambda p_1, \dots, \lambda p_{j-1}, p_j, \lambda p_{j+1}, \dots, \lambda p_n) = \lambda^{c_j} P(p_1, \dots, p_n)$$

при всех $p_1, \dots, p_n, \lambda \in \mathbb{R}_+$; $j = 1, \dots, n$. Найдите все такие функции P .

2. *Индекс цен* группы из n товаров для текущего года $((p_1, \dots, p_n) = \mathbf{p})$ по отношению к базовому году $((p_1^0, \dots, p_n^0) = \mathbf{p}^0)$ — это функция $I: \mathbb{R}_+^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_+$, на которую накладываются определённые условия, в том числе, обычно, следующие $(\mathbf{p}^0, \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n, \lambda \in \mathbb{R}_+)$:

$$I(\mathbf{p}^0, \lambda \mathbf{p}) = \lambda I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}), \quad (30)$$

$$I(\lambda \mathbf{p}^0, \lambda \mathbf{p}) = I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}), \quad (31)$$

$$I(\lambda \mathbf{p}^0, \mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda} I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}), \quad (32)$$

$$I(\mathbf{p}^0, \lambda \mathbf{p}^0) = \lambda, \quad (33)$$

в частности

$$I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0) = 1. \quad (34)$$

(Попробуйте мотивировать эти допущения.) Покажите, что из (30) и (34) следует (33); из (30) и (31) следует (32); из (30) и (32) следует (31); из (31) и (32) следует (30). Найдите все функции, удовлетворяющие условиям (30) и (31).

3. При изучении роста в секторной экономике применяются функции $\mathbf{H}: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, такие что существуют функции $\phi: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, которые не убывают по каждому переменному на соответствующих промежутках и удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{H}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{H}(x_1, \dots, x_n)$$

при всех $\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Найдите все такие $\mathbf{H}$ и ϕ .

4. Кроме экономической эффективности (см. теорему 3), в экономике рассматривается и техническая эффективность производственного процесса $T: \mathbb{R}_+^{m+2} \rightarrow \mathbb{R}$, зависящая от затрат s , времени t и выпуска производственного процесса

$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$. При этом обычно предполагается существование возрастающих функций $\psi, \chi, \rho, \sigma, \tau : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ и убывающей функции $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, таких что

$$T(\lambda s, \lambda t, \lambda \mathbf{u}) = T(s, t, \mathbf{u}), \quad (35)$$

$$T(\lambda s, \lambda t, \mathbf{u}) = \phi(\lambda)T(s, t, \mathbf{u}), \quad (36)$$

$$T(s, \lambda t, \lambda \mathbf{u}) = \psi(\lambda)T(s, t, \mathbf{u}), \quad (37)$$

$$T(\lambda s, t, \lambda \mathbf{u}) = \chi(\lambda)T(s, t, \mathbf{u}), \quad (38)$$

$$T(\lambda s, t, \mathbf{u}) = \rho(\lambda)T(s, t, \mathbf{u}), \quad (39)$$

$$T(s, \lambda t, \mathbf{u}) = \sigma(\lambda)T(s, t, \mathbf{u}), \quad (40)$$

$$T(s, t, \lambda \mathbf{u}) = \tau(\lambda)T(s, t, \mathbf{u}) \quad (41)$$

$(\lambda, s, t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m)$. Определите, из каких условий здесь вытекают все остальные. Найдите все функции $T, \phi, \psi, \chi, \rho, \sigma, \tau$, удовлетворяющие этим условиям.

5. (Aczél, 1976b.) Покажите, что если выполнены условия (36), (37) и (38) из предыдущего упражнения с убывающей функцией ϕ и возрастающими ψ, χ , то выполнено и условие (41) с возрастающей функцией τ .

(В связи с упр. 6–8 см.: Aczél, 1969a, p. 57–62; Eichhorn, 1978, p. 23–24, 94–97.)

6. Обобщением уравнения (2) при $n = 2$ является уравнение

$$f(xu, yu) = g(x, y, u)f(x, y) \quad (x, y, u \in \mathbb{R}_+). \quad (42)$$

Но в этом случае оно бессодержательно, так как соответствующая функция $g : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ существует для любой функции $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, а именно:

$$g(x, y, u) = \frac{f(xu, yu)}{f(x, y)}. \quad (43)$$

Однако то рассуждение, которое привело нас от (2) к (5), в данном случае приводит к уравнению

$$g(x, y, tu) = g(xu, yu, t)g(x, y, u) \quad (x, y, u \in \mathbb{R}_+). \quad (44)$$

Покажите, что его общее решение имеет вид (43), где функция $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ произвольна (это утверждение не зависит от (42)).

7. Бывает интересен частный случай уравнения (42):

$$f(xu, yu) = h\left(\frac{x}{y}, u\right)f(x, y) \quad (x, y, u \in \mathbb{R}_+).$$

Определите его общие решения $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+, h : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow [a, \infty[$, где $a > 0$.

8. То же, что в упр. 7, но с дополнительными предположениями: функция $u \mapsto h(z, u)$ возрастает при $z > 0$; $f(x, y) \geq f(s, t)$ при $x \geq s, y \geq t$.

9. (Eichhorn, 1978, p. 90–93.) Пусть функция $f : \overline{\mathbb{R}}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ однородна степени $c \in]0, 1]$:

$$f(x_1 u, \dots, x_n u) = u^c f(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n, u \in \overline{\mathbb{R}}_+), \quad (45)$$

удовлетворяет условию $f(y_1, \dots, y_n) \geq f(x_1, \dots, x_n)$ при $y_j \geq x_j$ ($j = 1, \dots, n$), непрерывна около координатных гиперплоскостей в том смысле, что

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

и квазивогнута, т. е. множество $L(u) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \geq u\}$ выпукло. Покажите, что функция f вогнута на множестве $\mathbb{R}_+^n$.

(В связи с упр. 10–12 см., например: Aczél, 1966с, р. 324–325, 377–378.)

10. Покажите, что из (45) (при произвольном $c > 0$) в случае дифференцируемости f по каждому переменному вытекает дифференциальное уравнение Эйлера

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = cf.$$

Обратно, найдите общее дифференцируемое решение этого уравнения.

11. Для уравнения $\mathbf{h}(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$) найдите общие решения $\mathbf{h} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, дифференцируемые в начале координат.

12. В дополнение к условиям упр. 11 предположим, что при одновременном вращении векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вектор $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ подвергается такому же вращению. Докажите, что тогда существуют константы $a, b \in \mathbb{R}$, такие что $\mathbf{h}(x, y) = ax + by$ при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

13. (Eichhorn–Gehrig, 1982.) В математической экономике возникает следующий вопрос в связи с проблемой измерения неравенства (например, в доходах). Предполагая, что величина неравенства не меняется, когда все доходы умножаются на одно и то же число или возрастают на одну и ту же величину, мы получаем функциональное уравнение

$$I(tu_1, \dots, tu_n) = I(u_1, \dots, u_n) \quad (u_1, \dots, u_n, t > 0)$$

или соответственно

$$I(x_1 + s, \dots, x_n + s) = I(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n, s > 0).$$

Существуют ли функции $I : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие обоим уравнениям? Если да, то найдите все такие функции. Среди них найдите все непрерывные.

Глава 21

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Как показывают размеры библиографии (содержащей лишь малую долю литературы по функциональным уравнениям с несколькими переменными), в одной главе невозможно дать сколько-нибудь полную историю предмета. Поэтому ограничимся немногими замечками (см. также: Aczél, 1966с, р. 5–12; Dhombres 1986) о зарождении этой ветви математики и вехах её развития, а также набросаем панораму современных тенденций и приложений.

21.1. Определение линейных и квадратичных функций посредством функциональных уравнений в средние века. Применение полученной характеристики Галилеем

Появление функциональных уравнений неизбежно вытекало из развития понятия функции, но мы, конечно, не можем входить в детали этого процесса. Лишь с большой натяжкой можно истолковать тексты Евклида или Архимеда как формулировки функциональных уравнений (хотя бы неявные) ввиду отсутствия у них какого-либо понятия функции. Нужно также различать *установление* для *данных* функций каких-то свойств, выраженных в функциональных уравнениях, и *определение* *всех* функций с такими свойствами, т. е. *решение* этих уравнений.

Важная историческая роль функциональных уравнений состояла в том, что функции *определялись* с их помощью (или посредством каких-то их переформулировок). Но во многих работах не доказывалось (хотя из них и следовало), что эти функции являются *единственными* решениями этих уравнений. В качестве раннего примера упомянем Орема (Oresme, 1347, 1352), который употреблял некую разновидность координат и ввёл «однородно деформируемые» (аффинные) «качества», что привело к функциональному уравнению

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} \quad \text{для всех } x_1, x_2, x_3 \text{ при } x_1 > x_2 > x_3. \quad (1)$$

В соответствующем отрывке из трактата Oresme (1352) говорится следующее:

«*Qualitas vero uniformiter difformis est cuius omnius trium punctorum proportio distantiae inter primum et secundum ad distantiam inter secundum et tertium est sicut proportio excessum primi supra secundum ad excessum secundi supra tertium in intensione. . . Omnis autem qualitas se habens alio modo a predictio dicitur difformiter difformis et potest describi negative, scilicet qualitas que non est in omnibus partibus subiecti equaliter intensa nec omnium trium punctorum ipsius proportio excessum primi supra secundum ad excessum secundi supra tertium est sicut proportio distanciarum eorum.*»

(«Качество равномерно-дифформное это такое, в котором для любых трёх точек отношение расстояния между первой и второй к расстоянию между второй и третьей равно отношению избытка интенсивности первой по сравнению со второй к избытку интенсивности второй по сравнению с третьей...¹⁾ Всякое же, отличающееся от

¹⁾ Перевод дан по изданию: Орем Н. О конфигурации качеств. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. С. 56.

указанных выше, называется дифформно-дифформным и может быть описано посредством отрицания, а именно: это есть качество не во всех своих частях одинаково интенсивное и отношение между избытками интенсивностей трёх точек (первой в сравнении со второй и второй в сравнении с третьей) не равно отношению их расстояний.»¹⁾

«Описанными выше качествами» были «униформные» (постоянные) и только что определённые «униформно-дифформные» (аффинные).

Если в соотношении (1) мы возьмём x_2 посередине между x_1 и x_3 , то получим «уравнение Иенсена» (15.19)

$$f\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_3)}{2}. \quad (2)$$

Оно имеет отношение к результату, который известен как «мертонская теорема», поскольку авторы, которым он приписывается (Суайнсхед, Хейтсбери, Дамблтон) работали в оксфордском Мертон-колледже (основан в 1264 г.). Этот результат был известен Орему и часто повторялся в более поздних учебниках, что доказывает его педагогическое значение.

Мертонская теорема утверждает, что расстояние, покрываемое объектом, движущимся по прямой с «униформно-дифформной» скоростью, таково же, как и для объекта, скорость которого постоянна и равна среднему арифметическому от начальной и конечной скорости первого объекта. В современных обозначениях, если $x(t)$ есть расстояние, проходимое первым объектом, а $v(t)$ — его скорость, то мы получаем функциональное уравнение (для двух функций)

$$x(t_2) - x(t_1) = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2} (t_2 - t_1).$$

В трактате Oresme (1352) оно применено в форме

$$x(t_2) - x(t_1) = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) (t_2 - t_1) \quad (3)$$

(в современных обозначениях), что подразумевает равенство

$$v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}. \quad (4)$$

На современном языке мертонская теорема связывает простой факт интегрального исчисления с функциональным уравнением (4), характеризующим аффинные функции. Орем (Oresme, 1352) дал геометрическое обоснование этого результата, используя равенство площадей трапеции и прямоугольника на рис. 21 для доказательства равенства (3).

Орем пошёл дальше, чем авторы мертонской теоремы, поскольку установил (3) не только для движений, но, более абстрактно, для произвольных «качеств» (как примеры он рассматривает количества теплоты и даже «белизны»). Как мы увидим, Орем даже «решил» соответствующее функциональное уравнение. В 1352 г. он явно формулирует уравнение (3):

«Omnis qualitas, si fuerit uniformiter difformis, ipsa est tanta quanta foret qualitas eiusdem subiecti vel equalis uniformis secundum gradum puncti medii eiusdem subiecti. . .

¹⁾ Там же, с. 58.

(«Всякое качество, если оно равномерно-дифформно, по своей величине таково, каким было бы равномерное качество того же или равного ему предмета, соответствующее градусу средней точки того же предмета.»)¹⁾

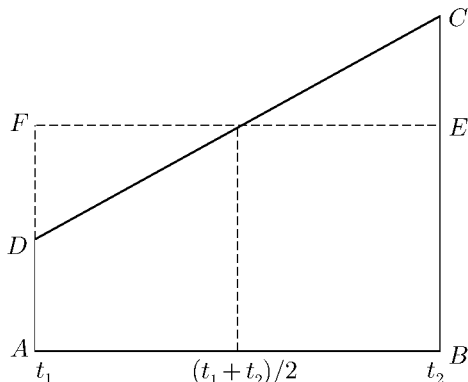


Рис. 21

В современных обозначениях уравнение (4) приводит к формуле $v(t) = at + b$, и тогда (3) принимает вид

$$x(t_2) - x(t_1) = \left(a \frac{t_1 + t_2}{2} + b\right) (t_2 - t_1). \quad (5)$$

Ранее (в 1347 г.) Орем ввёл «финальное» t_0 , для которого $v(t_0) = 0$ (тогда в формуле (5) $b = -at_0$), и выбрал три точки (лишь две из которых независимы) так, что $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. Этот приём превращает (5) в уравнение для двух отношений:

$$\frac{x(t_3) - x(t_2)}{x(t_2) - x(t_1)} = \frac{(t_0 - t_2) + (t_0 - t_3)}{(t_0 - t_1) + (t_0 - t_2)}. \quad (6)$$

Разумеется, положив здесь $t_3 = 2t_2 - t_1$, мы получаем функциональное уравнение с двумя независимыми переменными, справедливое для $x(t) = (t_0 - t)^2$. Если опустить условие $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, то вместо (6) мы получим из (5) уравнение (с тремя независимыми переменными t_1, t_2, t_3)

$$\frac{x(t_3) - x(t_2)}{x(t_2) - x(t_1)} = \frac{t_3^2 - 2t_0t_3 - t_2^2 + 2t_0t_2}{t_2^2 - 2t_0t_2 - t_1^2 + 2t_0t_1},$$

которое ещё яснее показывает, что x может быть многочленом второй степени. Но это, конечно, выходит далеко за пределы математических понятий, обозначений и приёмов того времени.

Однако Орем в 1347 г. осознал *квадратичную* природу процесса, оперируя с целочисленным вариантом уравнения (6), где $t_0 - t_1, t_0 - t_2, t_0 - t_3$ являются последовательными кратными некоторого отрезка, так что отношение приращений равно отношению последовательных нечётных чисел:

$$\frac{x(t_0 - (n+1)t) - x(t_0 - nt)}{x(t_0 - nt) - x(t_0 - (n-1)t)} = \frac{2n+1}{2n-1}. \quad (7)$$

¹⁾ Там же, с. 110

то проходимые расстояния находятся в отношении, равном квадрату отношения соответствующих времён, т.е. отношению квадратов времён.) Галилей столь ясно осознавал, что функциональное уравнение (8) характеризует квадратичный закон (хотя и не доказал это в обе стороны), что в своих экспериментах по падению тел он проверял именно (8) для подтверждения этого закона.

Галилей дал также другое доказательство мертонской теоремы посредством «метода неделимых» Кавальери. Как хорошо известно, именно он заявил, что «законы природы написаны на математическом языке».

21.2. Функциональные уравнения логарифма и показательной функции

И Орем, и даже Евклид знали и использовали следующие свойства степеней:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{и} \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

для целых положительных показателей и в некоторых других частных случаях (Орем — даже для некоторых рациональных показателей, которые он ввёл). В работе Stifel (1544) определение степени и эти уравнения распространены на произвольные (не только положительные) целые числа.

Эти уравнения применил Бюрги (Bürgi, 1620, написано ранее); затем в книге Briggs (1624; см. также Kepler, 1624) соответствующее свойство логарифмов:

$$\log xy = \log x + \log y,$$

применяется для *построения* логарифмов, введённых этими авторами и Непером. Используя определённый вариант непрерывности, Бригс решил функциональное уравнение

$$g(xy) = g(x) + g(y) \quad (9)$$

в том смысле, что *построил некоторое его решение*. Можно рассматривать это как первый пример определения новой функции посредством функционального уравнения. (В трактатах Oresme, 1347, 1352 функциональные уравнения применяются для работы с линейными и квадратичными функциями, которые уже были известны.) Технические выкладки с логарифмами впоследствии затушевали этот аспект. Но он ярко проявился, когда де Сен-Венсан (Saint-Vincent, 1647, написано около 1625) осознал, что (в современной терминологии) интеграл от $1/x$ удовлетворяет аналогичному уравнению. Его студент де Сараса (de Sarasa, 1649) вывел отсюда, что этот определённый интеграл как функция верхнего предела равен логарифму с точностью до (мультипликативной) константы, а именно: де Сен-Венсан выбрал точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ... на гиперболе $y = 1/x$ (рис. 24) таким образом, что площади под соответствующими отрезками гиперболы равны. Архимедовским методом исчерпывания он получил, что

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \dots, \quad \text{т.е.} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \dots$$

Первое уравнение этой цепочки даёт $x_2^2 = x_1 x_3$, тогда как из условия на площади следует равенство

$$g(x_2) - g(x_1) = g(x_3) - g(x_2),$$

где $g(x)$ означает площадь под отрезком гиперболы между точками $(1, 1)$ и $(x, 1/x)$. Отсюда $2g(x_2) = g(x_1) + g(x_3)$, т.е.

$$2g((x_1 x_3)^{1/2}) = g(x_1) + g(x_3).$$

Поскольку $g(1) = 0$, то $2g(x^{1/2}) = g(x)$, откуда получаем

$$g(x_1 x_3) = g(x_1) + g(x_3),$$

т. е. уравнение (9). Де Сараса формулирует затем утверждение, что *поскольку логарифм имеет такое же свойство, то $g(x)$ есть логарифм с точностью до мульт-*

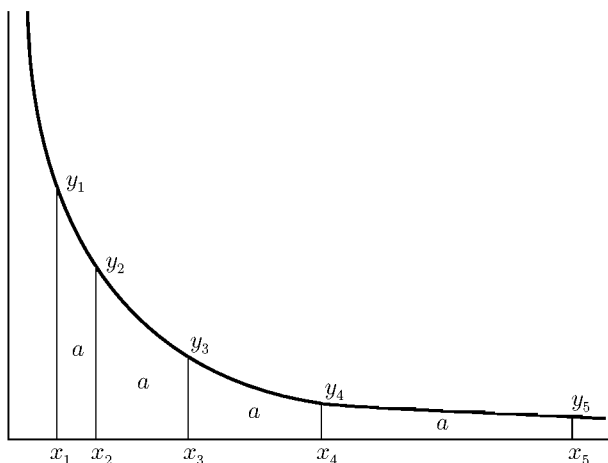


Рис. 24

пликативной константы (которая не обязана быть равной 1, так как возможны различные основания логарифмов). Говоря словами де Сарасы (1649): «*unde hae superficies supplere possunt locum logarithmorum*» («следовательно, эти площади могут быть использованы вместо логарифмов»).

21.3. Функциональные уравнения в работах Эйлера

Ньютон, Лейбниц и их последователи, особенно Эйлер, дали отчётливую формулировку анализа бесконечно малых, и это, конечно, в огромной мере развило мышление в терминах функций, но в основном применительно к дифференциальным уравнениям. Тем не менее в работах Euler (1748) и Lambert (1768) собраны — соответственно для тригонометрических и гиперболических функций — различные функциональные уравнения, хотя, разумеется, в виде формул, описывающих поведение функции, когда аргументы складываются, вычитаются и т. д. Переход от одного такого свойства к другому без обращения к определениям может рассматриваться как оперирование функциональными уравнениями.

Кроме того, Эйлер (Euler, 1764) с помощью геометрических методов свёл функционально-дифференциальное уравнение

$$g[x + g(x)g'(x)]^2 = g(x)^2[1 + g'(x)^2]$$

(которое он получил из геометрической задачи, сформулированной для учебных целей) к «чисто» функциональному уравнению

$$f[x + f(x)] = f(x), \quad (10)$$

где $f(x) = g'(x)g(x)$. Это одно из немногих функциональных уравнений с одним переменным, разбираемых в нашей книге сколько-нибудь подробно (см. (19.34)). Эйлер «решил» уравнение (10) с помощью геометрических методов, использующих

бесконечно малые. Эти методы он затем применял и к другим подобным уравнениям. Он не увидел, что здесь все непрерывные решения являются константами, и потому вряд ли мог заметить, что найденные им решения разрывны (как с точки зрения того времени, так и с современной).

С другой стороны, Эйлер решал и функциональные уравнения с несколькими переменными. Между прочим он отметил (Euler, 1768) как самоочевидный факт, что «... *functio homogenea nullis dimensionis, quae ergo posito $y=ux$ abit in functionem ipsius u* » («однородная функция нулевого порядка... при $y=ux$ превращается в функцию от u »), что составляет случай $n = 2$, $g(u) \equiv 1$ теоремы 20.1. Для более общего случая $g(u) = u^c$ Эйлер (Euler, 1755) дал пример сведения функционального уравнения к уравнению в частных производных: он вывел «дифференциальное уравнение Эйлера» (см. упр. 20.10)

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = c f \quad (11)$$

из уравнения

$$f(x_1 u, x_2 u, \dots, x_n u) = u^c f(x_1, \dots, x_n),$$

а также показал (Euler, 1770), что общее (дифференцируемое) решение уравнения (11) для положительных переменных имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^c \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

21.4. Функциональные уравнения, возникающие из физики

В то время как функциональные уравнения, рассмотренные в предыдущем параграфе, связаны с геометрией и дифференциальными уравнениями, более важные достижения были порождены физикой и привели к варианту аксиоматического подхода, который мы назовём функциональным методом.

Роль функциональных уравнений теперь осознавалась гораздо более отчётливо, чем следовало из рассуждений Орема, Галилея и де Сарасы, приведённых в первых двух параграфах этой главы. А именно, мы устанавливаем законы (свойства) физического процесса с помощью наблюдения и «здравого смысла, направляемого рассуждением» (Декарт), чтобы в итоге найти или предположить некоторое явное описание (функцию). Разумеется, функция должна обладать указанными свойствами, но этого недостаточно, поскольку другие функции могут иметь те же свойства. Поэтому важно показать, что *только* данная функция удовлетворяет данным «законам»; и для этого часто нужны функциональные уравнения. Бывает полезно охарактеризовать эти функции по возможности немногими (и слабыми) условиями, поскольку тогда эти функции проще идентифицировать.

Характерный пример, послуживший отправной точкой этой книги, — композиция сил, или, на более современном языке, отыскание суммы двух векторов. Над обоснованием этой конструкции работали ведущие математики с конца XVII и вплоть до XX в. Д. Бернулли (D. Bernoulli, 1726) решительно отверг экспериментальное «доказательство» в терминах композиции движений, которое Ньютон дал в 1687 г.: «*Nihil in illa demonstratione ut falsam rejicio, sed quaedam ut obscuram, quaedam ut non necessario veram*» («Я не говорю, что это доказательство в чём-то ложно, но что оно тёмно и не обязательно верно»). Взамен он предложил доказательство, использующее геометрию и анализ.

Даламбер (d'Alembert 1769) вернулся к этой проблеме и использовал функциональное уравнение

$$\phi(x+y) + \phi(x-y) = 2\phi(x) \quad (12)$$

(см. упр. 2.2), которое он решил посредством довольно длинной процедуры дифференцирования, сначала по x :

$$\phi'(x+y) + \phi'(x-y) = 2\phi'(x),$$

затем по y :

$$\phi'(x+y) - \phi'(x-y) = 0,$$

откуда

$$\phi'(x+y) = \phi'(x).$$

Он не осознал, что в этом случае ϕ' является константой, и смог получить решение, только продифференцировав снова по x и по y :

$$\phi''(x+y) = \phi''(x) \quad \text{и} \quad \phi''(x+y) = 0, \quad \text{поэтому} \quad \phi''(x) = 0.$$

В этой работе (d'Alembert 1769) для той же цели используется и вариант (см. упр. 14.7)

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y) \quad (13)$$

функционального уравнения (1.6)

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y) \quad (14)$$

($g(x) = f(x)/2$), ныне называемого уравнением Даламбера. Он нашёл решение этого уравнения:

$$f(x) = c^{xA/2} + c^{-xA/2}$$

(в действительности как его общее дважды дифференцируемое решение, не равное тождественно нулю, хотя Даламбер не сформулировал явно эти ограничения, как и в случае с (12)). Поскольку из сложения сил очевидно, что первый нуль функции f появляется при $\pi/2$, то

$$f(x) = 2 \cos x,$$

что и требуется, чтобы получить правило параллелограмма. Дальнейшие усовершенствования принадлежат Пуассону (Poisson, 1804, 1805).

Даламбер, Монж, Лагранж, Лаплас и другие авторы применяли в той же задаче (явно или неявно) другие функциональные уравнения, в том числе и от одного переменного, например

$$f(x)^2 = 2 + f(2x)$$

(мы получим его, положив в уравнении (13) $y = 0$ при $f(x) \neq 0$, а затем $y = x$), а также

$$f(x)^2 + f(a-x)^2 = 1.$$

В статье Darboux (1875) для той же цели использовано уравнение Коши (1.2):

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Рассуждения Даламбера–Пуассона–Дарбу объединены и усовершенствованы в работах Schimmak (1903, 1909b) и Picard (1928, с. 6–17).

В действительности Даламбер и раньше (d'Alembert 1747a,b) в связи с задачей о колеблющейся струне рассматривал родственное функциональное уравнение (с тремя неизвестными функциями)

$$f(x+y) - f(x-y) = g(x)h(y),$$

сводя его к дифференциальным уравнениям.

Уравнение Даламбера (14) было решено Коши (1821) в предположении непрерывности. Позже мы вернёмся к этому, а сейчас отметим другое доказательство того же результата, имеющее более широкое значение. В заметке Andrade (1900) предполагается непрерывность, но достаточно и интегрируемости. Его метод пригоден и для других уравнений (см. § 5.1, 5.4 и гл. 13, 14). Андраде проинтегрировал (14) по y и получил, обозначая первообразную от g через G :

$$G(x+y) - G(x-y) = 2g(x)[G(y) - G(0)],$$

откуда он сначала вывел, что функция g дифференцируема, а затем — что она дважды дифференцируема. После этого, дважды продифференцировав уравнение (14) и разделив переменные, он получил дифференциальное уравнение

$$g''(x) = Cg(x).$$

21.5. Теорема о биноме и уравнения Коши

После успехов в физике функциональный метод был применён и в самой математике. Важным примером служит формула бинорма Ньютона:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad (15)$$

где α и x — комплексные числа, причём абсолютная величина x меньше 1. Зная доказательство, основанное на формуле Тейлора, мы забыли, насколько важным (даже ключевым) было соотношение (15) для анализа в XVIII и XIX вв. Для целых α оно восходит по крайней мере к Паскалю. С другими α , особенно с $\alpha = \pm 1/2$, эта формула являлась существенной в локальном анализе большинства кривых, которые интересовали математиков того времени. Вот такая формула была открыта Ньютоном, и вот почему она носит его имя.

Проблема была в том, чтобы доказать (15) для иррациональных и даже комплексных значений α . Доказательство для случая $\alpha = \pm 1/2$ было до Эйлера формально распространено на все вещественные и комплексные значения α . Эйлер много раз пытался с помощью производных получить корректное и убедительное доказательство, но возникал порочный круг, так как формула (15) использовалась в самых началах анализа для вычисления производной степенной функции (см., например: Euler, 1755). Позже Эйлер (1774) доказал (15) (но только для рациональных показателей), найдя решения $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ функционального уравнения

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

Затем в одном из своих популярных учебников Лакруа (Lacroix, 1797), стремившийся дать энциклопедическое и строгое изложение всего анализа того времени и его приложений, рассмотрел вопрос о доказательстве формулы (15) с помощью функциональных уравнений. Его подход вполне современен: «*Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres quantités est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.*» («Любая величина, значение которой зависит от одной или более величин, называется функцией последних независимо от того, известно ли, какие операции нужны, чтобы получить из этих величин первую.»)

Однако Лакруа, как и Эйлер, предполагал, что функцию $(1+x)^\alpha$ можно разложить в ряд. Он показал, что его коэффициенты можно рекурсивно определить начиная с первого, и, обозначив первый коэффициент через $f(\alpha)$ («буква f является

сокращением от слова функция»), проверил, что f удовлетворяет уравнению, впоследствии названному именем Коши:

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad (16)$$

«*équation qui exprime la propriété caractéristique de la fonction représentée par f* » («уравнение, которое описывает характеристическое свойство функции, обозначенной через f »). Поскольку из определения следует, что $f(1) = 1$, а ввиду (16) $f(m+1) = f(m) + 1$, Лакруа получил формулу $f(m) = m$ для целых положительных m , затем $f(m/n) = m/n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) и, наконец, $f(-q) = -f(q) = -q$, откуда следует $f(q) = q$ для всех $q \in \mathbb{Q}$. Он обещал доказать это равенство для иррациональных и даже комплексных α , но не сделал этого непосредственно. Вместо этого он вначале обратился к разложениям в ряд показательной и логарифмической функций, используя уравнения $h(x+y) = h(x)h(y)$ и (9) соответственно, откуда получил коэффициенты в разложении функции a^x , и, в частности, e^x . Затем из (9) он получил разложение в ряд для $\ln(1+x)$ и с учётом формулы $\ln(1+x)^\alpha = \alpha \ln(1+x)$ установил равенство

$$f(\alpha) = \alpha$$

для всех вещественных, а на нестрогом уровне — и для комплексных α , обойдя тем самым эйлеровский порочный круг. Лакруа не использовал соображения, связанные с пределами или непрерывностью, а с другой стороны — не заботился о доказательстве сходимости, хотя иногда занимался вопросом её ускорения на численном уровне. Подобным же образом Лакруа использовал уравнение Даламбера (13), чтобы получить степенной ряд для косинуса (а позже и для синуса).

Коши продвинулся дальше (Cauchy, 1821; написано ранее). В своей монографии он не только попытался достичь строгости, какую позволяла математика того времени, но и организовал материал последовательно — скажем так, *по евклидовой образцу*. Напомним, что одно из достижений «Элементов» Евклида состояло в расположении их содержания в определённом логическом порядке. Коши впервые ввёл ряд важнейших новых понятий (функция, предел, непрерывность и др.) — правда, в туманном окружении «измеримых величин», ныне называемых вещественными числами (которые были чётко определены лишь Дедекиндом и Кантором около 1870 г.). На этой основе, с редким чувством экономии, Коши попытался получить как можно больше без введения производной.

В целом его книга содержит изящное и систематическое построение обширной области математического знания, основанное на технике сходимости, столь существенной для вывода формулы (15). Именно в этом построении функциональные уравнения играют важную роль. Данная сторона дела заслуживает пояснения. Напомним вкратце метод Коши, ведущий к доказательству соотношения (15). Мы полагаем здесь

$$f(\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (17)$$

Целая глава книги Коши посвящена критериям сходимости для таких рядов как в вещественном, так и в комплексном случае. С их помощью сходимость ряда (17) устанавливается для всех комплексных α при $|x| < 1$. Затем Коши доказывает непрерывность функции f с помощью теоремы, утверждающей, что непрерывность сохраняется при переходе к пределу. В такой общности она неверна, поскольку Коши не предполагает равномерной сходимости. Абель (1826b) в замечательной статье о формуле биннома заметил ошибку Коши. С помощью соответствующих функциональных уравнений для многоместных функций (см. § 5.1) он получил то, что можно считать первым строгим доказательством теоремы о биноме Ньютона (15) для комплексных экспонент. Абель даже проверил сходимость ряда в формуле (15)

при $x = 1$ и $x = -1$. Замечательно при этом, что именно Коши в 1853 г. дал строгое определение равномерной сходимости, для которой верна его теорема о сохранении непрерывности.

Используя приёмы, специально изобретённые им для перемножения степенных рядов, а также комбинаторные соображения, Коши (1821) пришёл к тому же уравнению, что и Эйлер:

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta).$$

Он хорошо подготовился, решив это уравнение в более ранней главе для вещественнозначных непрерывных функций f . Длинное, но остроумное доказательство было найдено им и для комплексного случая (фиксировался один определённый корень из единицы), и это доказательство — не математическая игрушка: оно действительно необходимо для вывода формулы (15). В итоге получается $f(\alpha) = A^\alpha$, откуда и следует (15). Используются почти все результаты книги Коши, причём ключевую роль играют функциональные уравнения, в связи с которыми разрабатываются технические приёмы.

Общеизвестно, что Коши внёс строгость в анализ, создав в нём стереотипный стиль доказательств со стандартизированным использованием пределов, «эпсилон-техники» и неравенств (хотя он и делал, как отмечено выше, систематическую ошибку из-за отсутствия понятия равномерной сходимости). Характерными примерами служат доказательства теоремы о промежуточном значении, основной теоремы интегрального исчисления, трактовка определённого интеграла непрерывной функции, признак Коши сходимости положительных рядов и т.д. Некоторые из этих новаторских методов появились в монографии Cauchy, 1821. Широко известно введение к ней, из которого мы процитируем отрывок, подчёркивающий необходимость строгого построения анализа.

«Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et de quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques.»

(«Что касается методов, то я старался придать им строгость, какая требуется в геометрии, чтобы никогда не обращаться к общим соображениям, привнесённым из алгебры. Хотя подобные соображения часто используются, обычно при переходе от сходящихся рядов к расходящимся и от вещественных величин к комплексным выражениям, — они, как мне кажется, могут рассматриваться лишь как наводящие соображения, которые иногда позволяют угадать результат, но плохо согласуются со строгостью, столь необходимой в математических науках.»)

Как уже отмечено, в книге Коши мы находим первое систематическое рассмотрение некоторых основных функциональных уравнений — ныне классических уравнений Коши:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x + y) = f(x)f(y), \quad (18)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad (19)$$

и уравнения Даламбера (14). При этом вполне очевидно, что один из мотивов Коши — показать, насколько мощны и полезны некоторые абстрактные понятия, введённые им в начале книги: понятие предела (определяемое через неравенства) и понятие непрерывной функции. Функциональные уравнения служат для доказательства силы разработанных методов. С их помощью Коши легко нашёл непрерывные решения этих уравнений в вещественных функциях одного вещественного переменного, при-

чём первым сделал это без более сильных предположений о регулярности. Ещё важнее, что он осознал необходимость каких-то условий регулярности вообще.

Приведём здесь формулировку задачи, рассмотренной в книге Коши, и ключевой шаг в решении, где существенно используются пределы и непрерывность: *«Déterminer la fonction $\phi(x)$ de manière qu'elle reste continue entre deux limites réelles quelconques de la variable x , et que l'on ait pour toutes les valeurs réelles des variables x et y*

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y). \quad (20)$$

(«Определить функцию $\phi(x)$ таким образом, чтобы она оставалась непрерывной между любыми двумя вещественными значениями переменного x , причём для любых вещественных значений переменных x и y выполняется равенство (20).»)

Как и Лакруа, Коши получает равенство $\phi[(m/n)\alpha] = (m/n)\phi(\alpha)$ для положительных целых m, n : *«Puis, en supposant que la fraction m/n varie de manière à converger vers un nombre quelconque μ , et passant aux limites, on trouvera*

$$\phi(\mu\alpha) = \mu\phi(\alpha). \quad (21)$$

(«Тогда, предположив, что дробь m/n меняется таким образом, что она сходится к некоторому μ , и переходя к пределу, получаем (21).»)

От положительных вещественных μ Коши переходит к $\mu \leq 0$ и затем полагает $\alpha = 1$. Он проверяет, что функция $\phi(x) = ax$ непрерывна и удовлетворяет уравнению (20) при произвольном a .

Далее Коши тем же способом получает общее непрерывное решение уравнения (18), выводя неотрицательность функции f из соотношения $f(2x) = f(x)^2$. Для этого ему пришлось определить (в дополнении к книге) функцию A^x при вещественных показателях, снова устремляя рациональные показатели к вещественному пределу x .

Как уже отмечено, позже Коши распространил этот результат на комплекснозначные функции, весьма аккуратно определяя A^x при комплексных A и x . Это привело к доказательству теоремы о биноме Ньютона (15) для комплексных x ($|x| < 1$). При этом Коши осознал, что сходимость соответствующего ряда необходимо доказывать, и действительно доказал её.

Чтобы по-настоящему оценить достижения Коши в плане строгости доказательств, надо вспомнить, что некоторые его известные современники при работе с функциональными уравнениями всего за несколько лет до этого не достигли даже уровня строгости Лакруа.

Лежандр (Legendre, 1791; первое из многих изданий его популярной монографии по геометрии) пытался приблизиться к системе и методам Евклида с помощью (часто неявных) аксиом и аргументов *ad hoc*, причём иногда использовал функциональные уравнения. Решая их, он подчас перескакивал от результата, доказанного лишь для целых (даже не для рациональных) чисел, к произвольным вещественным значениям. Например, «доказывая» формулу для площади $\Phi(x, y)$ прямоугольника со сторонами x и y , Лежандр неявно предположил аддитивность площадей и получил (рис. 25)

$$\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y).$$

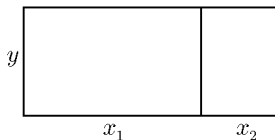


Рис. 25

Отсюда для положительных целых k следует $\Phi(kx, y) = k\Phi(x, y)$; Лежандр записывает это как

$$\frac{\Phi(kx, y)}{kx} = \frac{\Phi(x, y)}{x}$$

и заключает, что $\Phi(x, y)/x$ не зависит от x . По симметрии он аналогично «доказывает», что $\Phi(x, y)/y$ не зависит от y и потому постоянно. Отсюда $\Phi(x, y) = cxy$ (где c зависит от выбора единиц).

В приведённом рассуждении, разумеется, происходит скачок от равенства $\phi(kx) = k\phi(x)$ для натуральных k , вытекающего из (20), к соотношению $\phi(tx) = t\phi(x)$ для всех положительных t .

Гаусс (Gauss, 1809) даёт остроумную характеристику нормального распределения с помощью функционального свойства, приводящего к уравнению Коши (см. упр. 2.1, 3.6, 3.7), но при этом решение уравнения демонстрирует тот же пробел.

Достигнув высокого уровня формальной строгости, Коши глубоко понял и саму природу функциональных уравнений. Его взгляды выражены в следующих важных высказываниях (Cauchy, 1821):

«Lorsque au lieu de fonctions entières on considère des fonctions quelconques, dont on laisse la forme entièrement arbitraire, on ne peut plus réussir à les déterminer d'après un certain nombre de valeurs particulières quelque grand que soit ce même nombre; mais on y parvient quelquefois dans le cas où l'on suppose connues certaines propriétés générales de fonctions... il y a une grande différence entre les questions où il s'agit de calculer les valeurs inconnues de certaines quantités et des questions dans lesquelles on se propose de découvrir la nature inconnue de certaines fonctions d'après des propriétés données. En effet dans le premier cas, les valeurs des quantités inconnues se trouvent finalement exprimées par le moyen d'autres quantités connues et déterminées, tandis que dans le second cas les fonctions inconnues peuves comme on le voit ici, admettre dans leur expression des constantes arbitraires...»

(«Если вместо целых функций рассматривать произвольные, то будет уже невозможно определить их по некоторому числу отдельных значений, как бы ни было оно велико; но иногда этого можно достичь, если знать некоторые общие свойства этих функций... существует большая разница между задачами вычисления неизвестных значений определённых величин и такими задачами, в которых требуется выяснить неизвестную природу каких-то функций по данным их свойствам. Действительно, в первом случае значения неизвестных величин выражаются через значения других величин, известных и определённых, тогда как во втором случае выражения для неизвестных функций могут, как мы видим здесь, включать произвольные константы...»)

21.6. Уравнения Коши после Коши

Дадим краткий обзор дальнейшего изучения уравнения Коши и связанных с ним функциональных уравнений. Разумеется, нам придётся отступить от хронологического порядка (и даже больше, чем в предыдущих исторических заметках), поскольку всё больше уравнений изучалось параллельно.

Дарбу (Darboux, 1875) применил уравнение Коши (20) к задаче сложения сил, с которой мы имели дело в § 4, причём он свёл условие регулярности к *непрерывности в точке* (вместо непрерывности всюду). Он также показал, что взамен достаточно потребовать *монотонности* решения или его неотрицательности при неотрицательных значениях аргументов. Пятью годами позже Дарбу (Darboux 1880) применил это же уравнение к доказательству результата, который он назвал основной теоремой проективной геометрии (см. теорему 6.3). На этот раз он предположил *ограниченность на некотором отрезке*. Исчерпывающее рассмотрение этого и других уравнений и их приложений дано в работах Pincherle, 1906, 1912 (особенно в последней).

Условие регулярности, необходимое для того, чтобы решение уравнения Коши имело вид $\phi(x) = ax$, вскоре было вновь ослаблено. Наиболее важным стало сведение — в контексте новой тогда лебеговой теории меры — к измеримости (Fréchet,

1913; Sierpiński, 1920a,b; Banach, 1920) или к мажорируемости измеримой функцией (Sierpiński, 1924), пока теорема из статьи Steinhaus, 1920 (см. теорему 2.6) не сделала возможным потребовать лишь *ограниченности на множестве положительной меры* (Kormes, 1926; Ostrowski, 1929). Многие ранее известные факты были доказаны новыми методами в работах Кас, 1937 (см. доказательство теоремы 5.4; бесспорно, здесь остроумно усовершенствован метод из заметки Andrade, 1900, упомянутый в § 4); Weil, 1940; Alexiewicz–Orlicz, 1945; Kestelman, 1946 и т. д. В работе Piccard, 1939 доказан топологический аналог теоремы Штейнгауза (см. упр. 16.21), что сделало возможным (Mehdi, 1964) найти все решения уравнения Коши, *ограниченные на множестве, которое не является тощим*.

Совершенно новый (и для того времени неожиданный) подход предложен в заметке Hamel 1905. Используя базис пространства вещественных чисел над $\mathbb{Q}$, введённый (с помощью аксиомы выбора) *специально для этой цели*, Гамель показал, что существуют *разрывные* решения уравнения Коши, и описал все эти решения. Свойства базисов Гамеля послужили предметом многих последующих работ, например: Burstin, 1916, Jones 1942b, Erdős, 1963 и т. д.

Даже если не знать о базисах Гамеля или о необходимости аксиомы выбора для их построения, очевидно, что невозможно построить разрывное решение уравнения Коши без применения аксиомы выбора. Действительно, никакое разрывное решение не является измеримым, а неизмеримую функцию невозможно построить без использования аксиомы выбора (или какого-то её эквивалента). Однако тот факт, что график любого разрывного решения уравнения Коши всюду плотен в $\mathbb{R}^2$ (теорема 2.3), можно доказать без обращения к аксиоме выбора или базисам Гамеля. Сам Гамель (Hamel, 1905) использовал в доказательстве такой базис, сформулировав результат как общий критерий того, что все решения уравнения Коши имеют вид $f(x) = Ax$: *«Weiß man daher, daß in einem ganz beliebigen Bereiche der Variablen x eine Lösung $f(x)$ der in Rede stehenden Funktionalgleichung irgend einem Werte B nicht beliebig nahe kommt, so darf man schließen, daß $f(x)$ stetig ist und die Form Ax hat.»* («Итак, если известно, что в некоторой произвольной области значений переменного x решение $f(x)$ рассматриваемого функционального уравнения не приближается произвольно близко к значению B , то можно заключить, что $f(x)$ непрерывна и имеет вид Ax »). Однако доказательство в действительности не зависит от базисов Гамеля, и в таком виде оно восходит по крайней мере к работе: Wilson 1899 (для уравнения (18)), а также San Juan 1946 (для (16)).

Решения каждого из уравнений Коши определяют эндоморфизмы алгебраической структуры на вещественных числах, в которой *единственной* операцией является сложение или умножение. Если же рассмотреть *кольцо* (или поле) вещественных чисел (с *обеими* операциями сложения и умножения), то для определения эндоморфизмов базисы Гамеля не требуются: существуют лишь тривиальные эндоморфизмы — тождественный и нулевой, т. е. единственными совместными решениями уравнений (16) и (19) являются $f(x) = x$ и $f(x) = 0$, без всяких допущений о регулярности. Это показано в работе: Darboux, 1880; см. предложение 5.6 в настоящей книге. В кольце (поле) комплексных чисел это неверно (даже если к операциям добавить сопряжение); контрпримеры (см. теорему 5.7) построены в работах: Segre (1947) и Kestelman (1951; написано ранее). Интересно отметить, что Лебег (Lebesgue, 1907a) использовал неполный вариант такого контрпримера (основанный на континуум-гипотезе), чтобы объяснить разницу между аксиоматической («idéaliste») и интуиционистской («empiriste») точками зрения.

Множество простых чисел является счётным аналогом базиса Гамеля в случае логарифмического уравнения в области $\mathbb{N}^2$:

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad (m, n \in \mathbb{N}), \quad (22)$$

которое определяет *вполне аддитивные теоретико-числовые функции*. Ситуация отличается от $\mathbb{R}^2$: на $\mathbb{N}^2$ легко определить *общее* решение без дополнительных условий (см. § 16.3, 16.5). Зато потребовалась определённая изобретательность, чтобы доказать, что $f(n) = c \log n$ исчерпывает все решения *при некоторых условиях регулярности*, таких как монотонность, или $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n+1) - f(n)] = 0$ (Erdős, 1946), или же (предположение из Erdős 1957, доказанное в Kátai, 1967 и Mát'e 1967)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n+1) - f(n)] \geq 0$$

(см. теоремы 16.15, 16.17 и упр. 16.6). Последние результаты были доказаны даже для аддитивных теоретико-числовых функций, т. е. для решений уравнения (22) при условии, что m и n *взаимно просты*. Уравнение

$$f(mn) = f(m) + f(n), \quad (m, n) = 1$$

можно рассматривать как один из первых примеров существенно *условного* уравнения, или уравнения с ограниченной областью определения (более тривиальными примерами служат (14) при $0 \leq y \leq x \leq \pi/4$ и (20) при $x \geq 0, y \geq 0$).

Другой класс условных уравнений Коши был введён в виде альтернативных уравнений (см., например: Vincze, 1964b; Świątak, 1965) типа $f(x+y)^2 = (f(x) + f(y))^2$, т. е.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{при} \quad f(x+y) + f(x) + f(y) \neq 0$$

(см. упр. 6.1–6.5).

Исследование *продолжений* и квазипродолжений уравнений Коши и др. с подмножеств на всё $\mathbb{R}^2$ (или более общие области) началось со статьи Daróczy–Losonczi, 1967.

21.7. Дальнейшие достижения

Создатели неевклидовой геометрии Больяи (Bolyai, 1832) и Лобачевский (1837, 1840, 1856) применили показательное уравнение Коши (18) для вывода соотношения $s' = se^x$ между длинами дуг двух орициклов с общим центром, находящихся на расстоянии x друг от друга. Лобачевский вывел также формулу для угла параллельности

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k},$$

из функционального уравнения (см. упр. 6.7)

$$f(x)^2 = f(x+y)f(x-y),$$

которое он решил методом, схожим с методами Лакруа и Коши.

Важный вклад Бэббеджа в изучение функциональных уравнений в основном относится к случаю одного переменного. Однако стоит привести его слова из статьи Babbage, 1815: «Я склонен думать, что для изучения функциональных уравнений нужны методы, специфичные для этой области».

Значительный вклад в теорию функциональных уравнений принадлежит Абелю. В дополнение к уже упомянутой работе о биномиальном ряде (Abel, 1826b), он опубликовал в 1823–1827 гг. ещё три важные статьи. В первой (Abel, 1823) дан общий метод решения функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями с помощью дифференцирования; некоторые неясности были устранены

в работе Kiesewetter (1957). Во второй статье (Abel, 1826a) он решил систему

$$\begin{aligned} F[x, F(y, z)] &= F[z, F(x, y)] = F[y, F(z, x)] = \\ &= F[x, F(z, y)] = F[z, F(y, x)] = F[y, F(x, z)], \end{aligned}$$

в которой соединяются коммутативность и ассоциативность (предполагают, что именно отсюда возник термин «абелева группа»). Наконец, в третьей статье (Abel, 1827) решено *сложное* функциональное уравнение

$$\phi(x) + \phi(y) = \psi[xf(y) + yf(x)]$$

относительно *трёх* неизвестных функций f, ϕ, ψ (Абель записывает его просто как $\phi x + \phi y = \psi(xfy + yfx)$). Все три работы последовательно используют метод сведения функциональных уравнений к дифференциальным и содержат важные комментарии по этому поводу. процитируем последнюю из статей (исправив очевидную опечатку):

«Durch das Verfahren, welches hier oben die Functionen gab, die der Gleichung $\phi x + \phi y = \psi(xfy + yfx)$ genuehthun, lassen sich auch die unbekannten Functionen in jeden anderen Gleichung mit zwei unabhängig veränderlichen Größen finden. In der That lassen sich durch wiederholte Differentiationen nach den beiden veränderlichen Größen, so viel Gleichungen finden, als nöthig sind, um beliebige Functionen zu eliminieren, so daß man zu einer Gleichung gelangt, welche nur noch eine dieser Functionen enthält und welche im Allgemeinen eine Differential-Gleichung von irgend einer Ordnung sein wird. Man kan also im Allgemeinen alle die Functionen vermittelst einer einzigen Gleichung finden. Daraus folgt, daß eine solche Gleichung nur selten möglich sein wird. Denn da die Form einer beliebiger Function die in der gegebenen Bedingungs-Gleichung vorkommt, vermöge der Gleichung selbst, von den Formen der andern abhängig sein soll, so ist offenbar, daß man im Allgemeinen keine dieser Functionen als gegeben annehmen kann. So z.B. könnte der obigen Gleichung nicht mehr genug gethan werden, wenn $f(x)$ eine andere als die gefundene Gestalt hätte.»

(«Посредством процедуры, которая приводит к функциям, удовлетворяющим уравнению $\phi x + \phi y = \psi(xfy + yfx)$, можно найти неизвестные функции и в любом другом уравнении с двумя независимыми переменными. В самом деле, повторяя дифференцирование по двум независимым переменным, можно получить столько уравнений, сколько необходимо для исключения произвольных функций. В итоге получается уравнение, содержащее только одну из этих функций, и в общем случае это дифференциальное уравнение некоторого порядка. В итоге можно найти, вообще говоря, все функции из единственного уравнения. Отсюда следует, что подобное уравнение выполняется лишь в редких случаях. Так как вид каждой произвольной функции, входящей в данное условное уравнение, зависит от вида других функций в силу самого уравнения, то очевидно, что, вообще говоря, нельзя считать заданными какие-либо из этих функций. Например, вышеприведённое уравнение не может выполняться, если $f(x)$ имеет иной вид, чем найденный.»)

Теперь необходимо коснуться пятой и тринадцатой проблем Гильберта (1900). Приведём его замечание (Hilbert, 1900) по поводу пятой проблемы:

«Überhaupt werden wir auf das weite und nicht uninteressante Feld der Funktionalgleichungen geführt, die bisher meist nur unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen untersucht worden sind. Insbesondere die von Abel mit so vielem Scharfsinn behandelten Funktionalgleichungen... und andere in die Literatur vorkommenden Gleichungen weisen an sich nichts auf, was zur Forderung der Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen zwingt...»

(«В общем, мы приходим в обширную и небызынтересную область функциональных уравнений, которые до сих пор обычно изучались в предположении диффе-

ренцируемости рассматриваемых функций. Между тем функциональные уравнения, в исследовании которых Абель проявил так много остроты ума, разностные и другие уравнения, встречающиеся в литературе, не содержат в себе ничего такого, что требовало бы дифференцируемости входящих в них функций.»¹⁾

Несколько уравнений с одной или более неизвестными функциями привлекли внимание Швейцера, чьи публикации в основном сводятся к кратким сообщениям в Бюллетене Американского математического общества между 1911 и 1920 гг. Однако эти сообщения достаточно содержательны и показывают квалификацию и изобретательность автора. Он собирался также составить библиографию по функциональным уравнениям, но, видимо, дал лишь их классификацию (Schweizer, 1918), которая интересна и сама по себе.

Уравнение

$$F[f(x+y), f(x), f(y)] = 0$$

с рациональной функцией F также можно рассматривать как уравнение с несколькими неизвестными функциями. Вейерштрасс использовал его как отправную точку в развитии теории эллиптических функций (см., например: Rausenberger, 1884; Schwarz, 1892). Функциональное уравнение (см. упр. 15.9)

$$f(x+y) = G[f(x), f(y)]$$

в общем виде (без предположения об алгебраичности функции G) изучалось в статье Сассиорполи (1928) и др. Особенно интересен результат из работы Pexider, 1903, где вполне элементарным способом решены обобщения уравнений Коши (см. § 4.3) для трёх неизвестных функций:

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad f(x+y) = g(x)h(y),$$

$$f(xy) = g(x) + h(y), \quad f(xy) = g(x)h(y).$$

Целый ряд интересных функциональных уравнений с несколькими неизвестными функциями исследуется в содержательной статье Синцова (1903).

Вильсон (Wilson, 1919) дал обзор (долго остававшийся непревзойдённым) связей между многими функциональными уравнениями для тригонометрических и гиперболических функций (а также между их решениями; см. гл. 13). Как правило, это частные случаи уравнения (14.1)

$$f(x+y) + g(x-y) = \sum_{j=1}^n f_j(x)g_j(y), \quad (23)$$

которое было решено с некоторыми пробелами в статье Satô, 1928 в общем виде, но при условиях интегрируемости. Следующий важный шаг в изучении таких уравнений сделан в работе Kemperman, 1957. Случай $g = 0$, т. е.

$$f(x+y) = \sum_{j=1}^n f_j(x)g_j(y), \quad (24)$$

при аналогичных условиях был рассмотрен ранее: Stephanos, 1904; Levi-Civita 1913; Stäckel, 1913 (некоторые необходимые усовершенствования см. в статье Radó, 1962). В работах Vincze, 1962a,b, 1963a,b создан метод, позволяющий найти общие решения

¹⁾ Перевод дан по изданию: Проблемы Гильберта / Сб. под ред. П. С. Александрова. — М.: Наука, 1969. С. 33.

уравнения (24) без предположений о регулярности. В статье Haupt, 1944 доказана теорема единственности для решений другого широкого класса уравнений.

В работах Schur, 1901, 1928; Perron, 1942, Hosszú, 1960 и др. изучался аналог степенного уравнения Коши для квадратных матриц:

$$F(\mathbf{XY}) = F(\mathbf{X})F(\mathbf{Y}).$$

Отметим также, что в книге Fréchet, 1938 рассмотрено решение условного матричного уравнения

$$\mathbf{F}(x, z) = \mathbf{F}(x, y)\mathbf{F}(y, z) \quad (x \leq y \leq z)$$

и его применение в теории вероятностей.

После этого требовался лишь один шаг, чтобы перейти к уравнению

$$f(x + y) = f(x) \circ f(y),$$

где x, y принадлежат полугруппе, $f(x)$ — непрерывный эндоморфизм банахова пространства, $\circ$ — композиция таких эндоморфизмов, и рассмотреть аналогичные уравнения для операторов. Путь к быстрому развитию теории операторных полугрупп открыла монография Hille 1948 (расширенное издание: Hille–Phillips, 1957).

Характеризация арифметических и квазиарифметических средних, начатая в работе Schiaparelli, 1868, см. также Колмогоров 1930 и Nagumo, 1930, дала новый толчок исследованию уравнений для многоместных функций (о дальнейших результатах см. гл. 15 и 17).

21.8. Современное развитие

В этих исторических заметках мы не касались, во-первых, своих собственных результатов, а во-вторых — достижений последних двух десятилетий (хотя в других главах дело обстоит иначе). Всё же, как было обещано, мы вкратце обрисуем важнейшие направления современного развития теории функциональных уравнений (не упоминая конкретных авторов и работ, главным образом из-за их многочисленности).

Исследователей по-прежнему привлекают *уравнения Коши* (см. гл. 2–4), но налицо и много других интересных предметов для изучения. В последнее время достигнуты успехи в исследовании более общих типов уравнений, таких как (23), их *общих решений*, вопросов их *регулярности* (гл. 14), *существования* и особенно *единственности* (гл. 15). Как показано в этой книге, такие уравнения и задачи, приобретая всё более общую и абстрактную постановку, затрагивают различные области *алгебры* и *функционального анализа*. И, разумеется, интенсивно изучаются *условные уравнения* (гл. 6, 7, 16) и уравнения на ограниченных областях.

Отметим три направления, мало затронутые в книге, поскольку они имеют лишь косвенное отношение к функциональным уравнениям с несколькими переменными, но в которых наблюдается большая исследовательская активность. Одно из них имеет дело с функциональными уравнениями для *специальных функций* (таких как эллиптические функции, дилогарифмы и т. д. — см., например, упр. 1.8 и 14.11). Другое направление — теория *итерационных процессов* (см. § 19.2) с её широкими связями и возможностями приложений к теории динамических систем, астрономии, теории автоматов, комбинаторике и т. д. Хотя наиболее важные функциональные уравнения, связанные с итерационными процессами (уравнения Абеля, Шрёдера и др.), содержат только одно переменное, непрерывная итерация $f^t(x) = F(t, x)$ всегда является решением так называемого уравнения сдвига (см. упр. 17.9)

$$F[s, F(t, x)] = F(s + t, x),$$

содержащего три переменных; в действительности это уравнение вместе с равенством $F(1, x) = f^1(x) = f(x)$, где функция $f(x)$ задана, определяет непрерывные итерации и приводит к уравнению Абеля $g[f(x)] = g(x) + 1$. Наконец, упомянем *функциональные неравенства* (см. упр. 2.9, 5.4, 5.12, 5.13, 5.14, 5.16, 10.1, 13.12, 13.13), особенно те, которые характеризуют «устойчивость» (или её отсутствие) в уравнениях Коши, Даламбера и др., например неравенства

$$|g(x + y) - g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x + y) - f(x)f(y)| < \varepsilon,$$

(см. упр. 11.27, 11.28, 11.29, 11.44), которые применяются при характеристизации распределений вероятностей.

Приложения функциональных уравнений сейчас более широки и актуальны, чем когда-либо. Среди приложений внутри математики упомянем, например, некоторые применения в геометрии (§ 4.2 и гл. 6), гармоническом анализе (§ 5.3, 7.2 и 10.5), функциональном анализе (гл. 10, 11 и 19) и теории вероятностей (гл. 12). За пределами математики или на её границах можно отметить, среди прочих, приложения к теории информации (гл. 3, § 5.4 и 16.4), физике (гл. 8 и § 11.4), экономике (гл. 20) и теории принятия решений (§ 7.3). В действительности в этих областях гораздо больше приложений, чем охватывают перечисленные разделы. Есть применения и в других областях математики, наук о природе, человеке и обществе. Продолжают появляться новые области приложений и новые результаты в «старых» областях. Вместе с прогрессом во внутреннем развитии теории функциональных уравнений это показывает её силу и динамичность, вселяя большие надежды на будущее.

Обозначения

Символы $:=$ и $=$: означают, что та сторона равенства, где стоит двоеточие, *определяется* через другую сторону.

Для множеств всех натуральных чисел, неотрицательных целых, всех целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел, как обычно, используются символы $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Вещественная и мнимая части числа z обозначаются соответственно $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$. Кроме того, $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \geq 0\}$.

Пусть $S_1, \dots, S_n$ — некоторые множества. Используются следующие обозначения:

$$\otimes_{k=1}^n S_k = S_1 \times \dots \times S_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in S_k \quad (k = 1, \dots, n)\}$$

— *декартово произведение* множеств; в частности, $S_1^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_k \in S_1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)\}$;

$$\sum_{k=1}^n S_k = S_1 + \dots + S_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid x_k \in S_k \quad (k = 1, \dots, n)\}$$

— *сумма* множеств (в частности, $S_1 + x = S_1 + \{x\} = \{x_1 + x \mid x_1 \in S_1\}$);

$$S_1 - S_2 = \{x_1 - x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$$

— *разность* множеств;

$$\prod_{k=1}^n S_k = \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_k \in S_k \quad (k = 1, \dots, n)\}$$

— *произведение* множеств. Если T — некоторое множество, $f : \bigotimes_{k=1}^n S_k \rightarrow T$ — отображение, то его *образ* обозначается $f(S_1, S_2, \dots, S_n) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_k \in S_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)\} \subset T$. В частности, $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$. Если, с другой стороны, S — некоторое множество, $x \in S$, то $S \setminus \{x\}$ обозначает совокупность всех элементов множества S , за исключением x . Используется обозначение $S^* = S \setminus \{0\}$, кроме тех случаев, когда S^* — двойственное пространство к S (это оговаривается в тексте; тогда P^* означает сопряжённый к P оператор). *Характеристическая функция* множества S обозначается χ_S .

Символ g^n обозначает n -кратную *итерацию* функции g . Соответственно, $g^n(x)$ — её значение в точке x (т.е. $g^n(x) = g(g^{n-1}(x), g^1(x) = g(x))$), тогда как n -я степень от $g(x)$ обозначается $g(x)^n$.

Для векторов и векторнозначных функций часто используются жирный шрифт; $|\mathbf{p}|$ обозначает длину вектора $\mathbf{p}$, а $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ — угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. *Ортогональность* векторов обозначается символом $\perp$. Для *матриц* используются заглавные буквы или обозначения элементов, например $[a_{ij}]$. Если X — матрица, то $\det X$ обозначает её определитель.

Равномерная норма функции f обозначается $\|f\|_\infty$ (иногда кратко $\|f\|$), тогда как $\langle, \rangle$ или $(,)$ обозначает *внутреннее (скалярное) произведение*.

Число, набранное жирным шрифтом (например, $\mathbf{0}$), означает функцию, тождественно равную ему. *Натуральный логарифм* обозначается $\ln$, *дылогарифм* — Li .

Мы пишем $A \equiv B \bmod a$, если существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $A = B + na$. *Интеграл Фурье* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(2\pi i a x) dx$ обозначается $F(f)$ или $\hat{f}(a)$. *Свёртка* функций f, g обозначается через $f * g$, а *ядро* (множество нулей) функции f — через $\ker f$.

- Для *отношения порядка* используется символ $\prec$, для *бинарных операций* — символы $\circ, *, \square$, а также числа. *Прямая сумма* алгебраических структур обозначается $\oplus$.
- $\mathcal{A}$: множество почти периодических функций
- $A(Z) = \{x \mid \exists y : (x, y) \in Z\} \cup \{y \mid \exists x : (x, y) \in Z\} \cup \{x + y \mid (x, y) \in Z\}$
- $\mathcal{B}$: спектр
- $(\mathcal{B}, *)$: группа Бора
- $B_1(X, Y) = \{P : C(X) \rightarrow C(Y) \mid \text{оператор } P \text{ линеен, } \|P\| \leq 1\}$
- $B_1^+ = B_1^+(X, Y) = \{P \in B_1(X, Y) \mid \|P\| = 1, P(1) = 1\}$
- $\mathcal{C}$ — операция дополнения
- $C(X)$: банахово пространство всех непрерывных функций $X \rightarrow \mathbb{C}$, наделённое топологией равномерной нормы
- $C_{\mathbb{R}}(X)$: совокупность всех вещественнозначных функций в $C(X)$
- $C_0(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ функция } f \text{ непрерывна, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0\}$
- $C_{g,h} = \{(g(x), h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- C_x : конус в $\mathbb{R}^4$ с вершиной x ; $C_0 = C$
- $C_1 = \{(x, y) \mid 0 < y < -x\} \cup \{(x, y) \mid 0 > y > -x\} \cup \{(0, 0)\}$
- δ_{x_0} : дираковская мера, соответствующая точке x_0
- $\Delta_\alpha^1 f(x) = f(x + \alpha) - f(x)$, $\Delta_\alpha^n f(x) = \Delta_\alpha^1(\Delta_\alpha^{n-1} f(x))$ ($n = 2, 3, \dots$)
- $\mathcal{E}(x_1, x_2) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}\}$
- $e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$
- $G^\wedge$: группа, двойственная к топологической группе G
- G/G_0 : факторгруппа
- $H_\alpha = \{x \mapsto \alpha(x + a) - a \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}$
- $H_n(p_1, \dots, p_n)$: энтропия Шеннона
- $H_n^{(a,D)}(p_1, \dots, p_n)$: энтропии Реньи
- $I_x = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 < |t| < x\}$, $I'_x = \{t \mid t \in I_x, tx > 0\}$
- $L^\infty(\mathbb{R})$: множество измеримых по Лебегу, существенно ограниченных функций
- $M_n(F)$: группоид (моноид) $n \times n$ -матриц над F
- $M(X)$: множество всех ограниченных мер Радона на X
- $M_1(X)$: множество комплекснозначных мер Радона на X с нормой ≤ 1
- $M_1^+(X)$: множество неотрицательных мер Радона на X с полной мерой 1
- $\mathcal{P}$: комплексное линейное пространство всех тригонометрических многочленов
- π : канонический эпиморфизм
- $\Pi_1(Z) = \{x \mid \exists y : (x, y) \in Z\}$, $\Pi_2(Z) = \{y \mid \exists x : (x, y) \in Z\}$
- $\mathbb{Q}(E)$: $\mathbb{Q}$ -выпуклая оболочка множества E
- $Q(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(y) dy$
- $\mathbb{R}_d$: пространство $\mathbb{R}$ с дискретной топологией
- $\text{sgn } t$: 1 при $t > 0$; -1 при $t < 0$; 0 при $t = 0$
- $t(Z) = \{x + y \mid (x, y) \in Z\}$
- $U_r(a, b) = \{(x, y) \mid |x - a| + |y - b| \leq r\}$
- $\hat{x}(f) = f(x)$
- ξ : подъём
- Z : отображение, сопоставляющее функциям $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ подмножества в $\mathbb{R}^2$. Если отображение является константой, то обозначается Z
- $Z_1(g) = t^{-1}(C \ker g)$
- $Z_2(g) = \mathbb{R} \times g(\mathbb{R})$

Указания к «последующим результатам и упражнениям»

Замечание. Мы не даём указаний к упражнениям, которые содержат ссылки на легко доступные источники, имеют простое решение либо требуют приёмов, близких к описанным в тексте.

К главе 1

5. Если $F(x, z_0)$ при некотором z_0 нигде не обращается в нуль, то подставьте $z = z_0$ в уравнение. См. также упр. 6 и содержащуюся в нём ссылку.
7. Покажите, что $f(x/2)^2 = f(x)^2$.
11. Используйте $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (конечный или бесконечный предел) и тот факт, что f имеет только одну неподвижную точку x_0 ($f(x_0) = x_0$).

К главе 2

2. Покажите, что функция $f(x) - f(0)$ нечётна, затем поменяйте местами x и y .
3. Если $f(0) \neq 0$, то можно принять $f(0) = 1$. Докажите тогда, что $f(x) > 0$, возьмите логарифмы и примените результат упр. 2.
4. Используйте результат упр. 3.
8. Покажите, что $f \geq 0$ на некотором промежутке, и примените следствие 5.
10. С помощью равенства $1/[x(x-1)] = 1/(x-1) - 1/x$ покажите, что $f(x^2) = 2xf(x) - x^2f(1)$.
12. Используйте результат упр. 11.
18. Покажите, что если ϕ не является константой, то f не принимает значений в интервале $]-2a^{1/2}, 2a^{1/2}[$.
21. Чтобы доказать утверждение «если», используйте неравенство Коши–Буняковского–Шварца для $(x, y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ («почти» внутреннее произведение, но из $(x, x) = 0$ не следует $x = 0$).
25. Докажите от противного, применяя теоремы 6 и 10.
26. Заметьте, что любая точка отрезка $[0, 1]$ является средним арифметическим двух точек канторова множества.
27. Примените теорему 10 (конструкцию Гамеля).

К главе 3

5. Положите $u = x^2, v = y^2$ ($u, v \in \overline{\mathbb{R}_+}$), $g(u) := f(u^{1/2})$.
6. Используйте упр. 5 для $|f|$ и непрерывность функции $f/|f|$ при $f \neq 0$.
11. При $\lambda \neq 0$ сведите уравнение к $g(x+y) = g(x)g(y)$.

К главе 4

1. Сведите уравнение к (2.1).
2. Сведите уравнение к (25).
3. Покажите (в случае $n = 2$) для элементов a, b из центров полугрупп S_1, S_2 соответственно, что $f(a, b)$ принадлежит центру полугруппы $f(S_1, S_2) = \{f(x, y) \mid x \in S_1, y \in S_2\}$, а $-f(a, b)$ коммутирует с любым элементом в $f(S_1, S_2)$.
6. Да.
7. Покажите, что $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (\phi(x)/\phi(x+\alpha)) = A(\alpha)$ существует при всех $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ и удовлетворяет уравнениям $A(\alpha + \beta) = A(\alpha)A(\beta)$, $g(\alpha + \beta) = A(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)$ при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^n$.
17. Покажите, что производная $f'(x)$ существует и равна $g(x)$ при всех $x \in I$. Докажите, что функция f дифференцируема нужное число раз, и выведите дифференциальное уравнение для f . Другое доказательство см. в упр. 18.

19. Любой линейный оператор на конечномерном нормированном пространстве ограничен.

21. Докажите, что если при $f(x) \neq 1$ положить $m(x) = [f(x) + 1]/[f(x) - 1]$, то m будет эндоморфизмом мультипликативной группы $\mathbb{R}^*$.

25. Примените теорему Гельфанда–Шнейдера, которая утверждает, что если α алгебраично ($\alpha \neq 0, 1$), а β иррационально и алгебраично, то α^β трансцендентно.

27. Используйте упр. 26.

К главе 5

5. Покажите, что образ не может совпадать с $\mathbb{R}$, и воспользуйтесь тем, что $z\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{C}$ при любом $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

7. Нет. (Такой эндоморфизм должен быть непрерывен на данной прямой. Покажите, что отсюда вытекала бы непрерывность на всём $\mathbb{C}$.)

13. Положите $G(x) = g(x + x_0) + f(-x_0)$ и докажите, что $-G(-h)/h \geq [f(x + h) - f(x)]/h \geq G(h)$ при $h > 0$.

17. Нет при $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$. Да при $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

18, 19, 21, 22. Используйте теорему 8.

К главе 6

5. $f \equiv 0$ или $f(x) = \varepsilon(x)e^{h(x)}$, где $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon(x)^2 = 1$, $h(x + y) = h(x) + h(y)$.

7. При $f(0) \neq 0$ покажите, что $g(x) = f(x)/f(0)$ удовлетворяет условию $g(u + v) = g(u)g(v)$.

8. $\ker f$ — двусторонний идеал.

10. Рассмотрите ядро функции f .

К главе 7

1. Возьмите $Z = \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \sqrt{2}$, где $\mathbb{Q}^+$ — множество всех положительных рациональных чисел, $g(x) = x^2$ при $x \in \Pi_1(Z) \cup \Pi_2(Z)$ и $g(z) = x^2 + y^2$ при $z \in t(Z)$.

2. Используйте то же Z , что и в решении упр. 1, положите $g(x) = x + 1$ при $x \in \Pi_1(Z) \cup \Pi_2(Z)$ и $g(z) = z + 2$ при $z \in t(Z)$.

3. Теорема 8 показывает, что множество $]1, 2[\times]1, 2[$ однозначно квазирасширяемо. Покажите, что это верно и для $[1, 2] \times [1, 2]$, причём тогда квазипродолжение является продолжением.

5. $]2, 3[\cup]4, 6[\subset \mathbb{R}^2$.

7. $f(x) = h(\Pi_H(x)) + g(x - \xi(\Pi_H(x)))$, где H — подгруппа в G , Π_H — канонический эпиморфизм $G \rightarrow G/H$, $g: H \rightarrow H$ — аддитивная функция, $\xi: G/H \rightarrow H$ — подъём, $h: G/H \rightarrow H$ — такое отображение, что $h(0) = g(\xi(0))$.

8. В обозначениях из предыдущего указания $f(x) = \zeta(\Pi_H(x)) + g(x - \zeta(\Pi_H(x)))$, где $\zeta: G/H \rightarrow G$ — подъём, $g(\xi(0)) = \zeta(0)$.

9. Используйте упр. 8.

10. Используйте упр. 7.

11. Аналогично доказательству теоремы 4.

13. См. упр. 5.17.

К главе 8

5. Покажите, что либо f , либо $-f$ удовлетворяет уравнению Даламбера.

6. Примените (26) к $2f(x)f(yz^{-1})$ при $x \in G, y, z \in S$.

7. Примените (26) к $f(xy^{-1})f(z)$ при $x, y \in S, z \in G$.

8. Примените (26) к $2f(x)f(uv^{-1}w)$, где $y = uv^{-1}w$ и $u, v, w \in S, x \in G$. Используя равенство $f(xyz) = f(xzy)$, покажите, что $f(xuww^{-1}) = f(xy), f(xw^{-1}u^{-1}v) = f(xy^{-1})$.

10. В данном случае (24) превращается в $f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{inx} e^{imy} \mu(n, m)$,

где $\mu(n, m) \geq 0$, $\sum_n \sum_m \mu(n, m) = 1$.

16. Используйте корни n -й степени из единицы в $\mathbb{C}$.

17. Используйте упр. 16 и тот факт, что группа G изоморфна прямому произведению конечного множества групп вида $\mathbb{Z}_n$, где n — степень простого числа.

18. Используйте тот факт, что непрерывные характеры равномерно непрерывны.

20. Используйте упр. 18.

23. При $x, y \in S$ положите $h(xy^{-1}) = 2g(x)g(y) - g(xy)$.

К главе 9

6. Примените теорему 2.

8. $f(x) = |g(x)|$, где функция g аддитивна, $g(x_0) = 0$ при некотором $x_0 \neq 0$, но $g(x) \not\equiv 0$.

10. Примените теорему 6 к $(-f)$.

13. Используйте множество $E + E$ и результаты о регулярности из § 2.1.

15. Рассмотрите борелевские множества $(B_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ в $\mathbb{R}^2$, проекции которых $P(B_\alpha)$ на вещественную ось несчётны. При $\alpha \in \Omega$ возьмите числа $h_\alpha \in P(B_\alpha)$, в совокупности независимые над $\mathbb{Q}$. Подходящим образом определите $f(h_\alpha)$ и продолжите f на $\mathbb{R}$.

К главе 10

1. С помощью упр. 5.16 покажите, что $P(f + g) = Pf + Pg$, $P(fg) = Pf \cdot Pg$.

3. Если бы отображение h было гомеоморфизмом, то пространство $\mathbb{R}^\Lambda$ было бы локально компактным.

4. Примените теорему 17.

5. Примените теорему 17 и упр. 4.

7. Если F — решение, то возьмите такое λ , что $F(\phi) = \phi(\lambda)$.

10. Покажите, что $\|f\| = 2^n$.

14. В конечном поле всякий ненулевой элемент — корень из единицы.

20. Можно использовать Q_μ из теоремы 19 и показать, что $Q_\mu(e_\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ и $Q_\mu(1) = 1$; другое доказательство опирается только на теорию меры и использует теорему Фубини для $\mathcal{B}$.

23. Обобщите доказательство теоремы 7.10.

К главе 11

8. Используйте упр. 2.10.

9. Используйте равенство $1/[x(x-1)] = 1/(x-1) - 1/x$ и вычислите $f(\lambda^2)$.

25. Разделите f на чётную и нечётную части.

31. Используйте тот факт, что всякая ограниченная аналитическая функция $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ постоянна.

45. Докажите, что отношение линейной независимости ортогонально. Примените упр. 39 к непрерывной функции f на нормированном пространстве E . Попробуйте снять допущение о непрерывности.

К главе 12

6. Покажите, что решение нулевого уравнения из (3), равное 0 при $t > 0$ и 1 при $t = 0$, нельзя включить в систему решений для (1) и (3) ($k = 0, 1, \dots$; $t, u \in \mathbb{R}_+$).

11. Используя симметрию или путём сведения к уравнению Коши определите несколько первых S_k , а затем примените индукцию. См. также упр. 12.

К главе 13

4. Используйте упр. 3.

5. Используйте обратимость элементов $g(z_0)$ и $e - g(2t_0)$ в B .

6. Нильпотентная группа имеет возрастающий центральный ряд

$$\{e\} = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n = G,$$

где Z_{i+1}/Z_i — центр группы G/Z_i . Докажите утверждение индукцией по n . При $n = 1$ группа G коммутативна и можно применить результат упр. 4.

8. Покажите, что $f(x)f(0)$ удовлетворяет уравнению Даламбера, и примените теорему 16.

9. Если $A \neq 0$, то функция f нечётна и $g(x) = -f(x + A)$ удовлетворяет уравнению Даламбера.

12. Покажите, что $f(x)^2 = f(-x)^2$.

13. Возьмите $f(x) = e^x$.

14. Или $f(e) = 0$ и $f \equiv 0$, или $f(e) = 1$. В последнем случае покажите, что $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, $f(xy) = f(yx)$ и $f(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$. Выведите отсюда, что $f(x)f(y) = f(y)f(x)$.

К главе 14

4. Используйте (14), (15) и результаты из работ Járai, 1979, 1986.

9. См. упр. 13.9.

10. См. теорему 13.14.

12. Сведите уравнение к (13.53) и (3.14).

К главе 15

7. Покажите, что если f удовлетворяет первому уравнению, то функция $g(x) = f(x) - f(0)$ нечётна и аддитивна.

10, 11. Примените предложение 6.

12. Аналогично предложению 7.

14. Либо $g(x) = \lambda \exp(h(\ln x))$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, где функция h аддитивна, и при этом $g(0) = 0$, либо функция g постоянна.

15. Положите $h(x) = f(g(f^{-1}(x)))$ и покажите, что h удовлетворяет уравнению Иенсена. Необходимое и достаточное условие состоит в том, что I содержится в некотором n -квадранте, т.е. множестве всех таких $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, что для некоторого фиксированного $a = (a_1, \dots, a_n)$ имеем

$$x_i \succ_i a_i,$$

где $\succ_i$ означает $>$ или $<$ ¹⁾.

16. $F(x) = ax^2 + b$; $a \geq 0$, $b \geq 0$.

17. $F(x) = a$; $a > 0$.

18. $g(x) = 1/(ax + b)$; $a, b > 0$.

20. Примените теорему 11.9.

¹⁾ Иными словами, каждая из координат ограничена на I хотя бы с одной стороны.

22. Определите, как зависит от первого переменного функция F , определяемая соотношением $u(rx) - u(ry) = F[u(x) - u(y), r]$. Затем используйте упр. 21.

К главе 16

1. Если Y порождает подгруппу $G_0 \neq G$, используйте некоммутативный вариант предложения 8.

2. $f(x) = h(\pi(x))g((\xi(\pi(x)))^{-1}x)$, где ξ — подъём относительно множества левых смежных классов по подгруппе, которую порождает Y в G .

3. Обобщите теорему 2.6 и примените предложение 8.

4. Примером служит канторово множество.

7. Примените предложение 8.

15. Аналогично доказательству теоремы 1.

20. Примените лемму Цорна.

21. Используйте доказательство теоремы 10.

25. Используйте множество точек накопления для $\{f(n)\}$ и покажите, что функция F , определённая как $F(g) = g'$, удовлетворяет уравнению $2F(g) = F(g + F[F(g)])$.

К главе 17

1. $f(x) = ax + b$.

К главе 18

12. Сделайте чертёж, аналогичный рис. 20, используя метод, сходный с доказательством леммы 1.

К главе 19

1. Положите $\alpha = \inf \{x \mid x > 0; x \in S\}$ и примените деление вещественных чисел на α по алгоритму Евклида.

4. Решение имеет вид

$$f(x) = aH(x - \lambda)b,$$

$$g(x) = aH(x - \lambda), \quad \text{кроме случая } b = 0, \text{ когда функция } g \text{ произвольна,}$$

$$h(x) = H(xa)b, \quad \text{кроме случая } a = 0, \text{ когда функция } h \text{ произвольна.}$$

Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \in F$ — константы, H удовлетворяет уравнению $H(x + yH(x)) = H(x)H(y)$.

11. Докажите, что g — биекция, и действуйте как при доказательстве предложения 9.

12. Определите h условием $g(x) = x + (\lambda - 1)(x - h(x))$ и покажите, что $h(g(x)) = h(x)$, $h(h(x)) = h(x)$. Используйте множество $I = \{x \mid h(x) = x\}$.

13. Предположите, что функция g сюръективна, если $\lambda > 1$.

15. Определите замкнутое подмножество H следующим условием: $f(xH) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Далее действуйте как при доказательстве теоремы 12.

19. Определите отношение P на множестве G следующим образом: tPt' , если $t' * f(x * t') = t * f(x * t)$ при всех $x \in G$. Покажите, что P — отношение эквивалентности на G , совместимое с операцией $*$.

20. Покажите, что $x\Delta y = x * f(y)$, где $f : G \rightarrow G$, $f(x * f(y)) = f(x) * f(y)$.

21. Используйте упр. 20.

22. Покажите, что $x\Delta y = g(x) + f(y)$, где g — гомоморфизм. Примените предложение 11.

23. Используйте упр. 22.

24. Операция $\square$ ассоциативна, если и только если она коммутативна. Примените теорему 12.

25. Покажите, что $f(x) > 0$ при $x > 0$, если f не является тождественным нулём. Положите $F(y) = \ln f(e^y)$, $H(y) = y - F(y)$, $G(y) = y + F(y)$. Докажите, что $H(G(y)) = H(y) = H(H(y))$.

26. Положив $P(e_n) = a(n)e_n$, покажите, что $a(n)^{-1} + a(m)^{-1} = a(n+m)^{-1} + 1$ при $a(n)a(m) \neq 0$.

27. $P(e_n) = a(n)e_n$ и $a(n) = a(m)$, если $a(n+m) \neq 0$.

28. $Pf(x) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k f(x+k\beta)$ для некоторого вещественного β .

30. Покажите, что при любом натуральном n выполнено неравенство $|f(x)| \leq M|x|^n$, где M — верхняя граница для $|f|$ на отрезке $[0,1]$.

К главе 20

5. Выразите $T(s, t, \lambda^2 \mathbf{u})$ с помощью (38), (37) и (36) (в указанном порядке).

13. Один из способов — сначала положить $s = -(x_1 + \dots + x_n)/n$, затем $u_k = x_k + s$ ($k = 1, \dots, n$), $t = \left(\sum_{k=1}^n (x_k + s)^2 \right)^{-1/2}$, исключая случай $x_1 = \dots = x_n$.

Определите I также и для последнего случая. Чтобы найти непрерывные решения (если они существуют), убедитесь, что переход между двумя случаями непрерывен.

Библиография ¹⁾

Несмотря на обширность, приведённая библиография весьма избирательна. В своём выборе мы не следовали каким-либо жёстким принципам. Некоторые из включённых работ представляют исторический интерес; разумеется, многие содержат важные или яркие результаты; ряд работ включён из-за интересных методов доказательства, а многие другие содержат интересные и/или необычные приложения.

Кроме работ, непосредственно посвящённых функциональным уравнениям, библиография также включает первичные и вторичные источники сведений по истории предмета и по материалу из других областей, использованному в книге. По возможности даны ссылки на рефераты в *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (= *Fortschr.*, 1868–1943) и *Mathematical Reviews* (= *MR* с 1940; начиная с 1980 г. год не указан, поскольку номер тома состоит из двух последних цифр года публикации).

Читатель получит почти полный список работ по функциональным уравнениям, если добавит библиографию из книги *Aczél J. Lectures on Functional Equations and Their Applications*. — N.Y.–L.: Academic Press, 1966) и присоединит к ней библиографическую серию *Works on functional equations* из журнала *Aequationes Mathematicae* (**1** (1968), 152–91; **3** (1969), 271–312; **7** (1971), 270–319; **13** (1975), 159–96; **18** (1978), 218–56; **21** (1980), 283–317; **23** (1981), 305–39; **24** (1982), 299–316; **26** (1983), 298–313; **29** (1985), 113–21; **30** (1986), 288–99; **33** (1987), 269–95; **36** (1988), 303–18).

около 1347

Oresme N. Questiones super geometriam Euclidis (Manuscript). Paris. (Ed. H. L. L. Busard, E. J. Brill, Leiden, 1961).

около 1352

Oresme N. Tractatus de configurationibus qualitatuum et motuum (Manuscript). Paris. (Ed., transl. and comm. M. Clayett. Univ. of Wisconsin Press, Madison–Milwaukee–L., 1968). (Рус. перевод: *Орем Н. О конфигурации качеств*. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.)

1544

Stifel M. Arithmetica integra. Nürnberg, 1544.

1620

Bürgi J. Arithmetische und geometrische Progress Tabulen. Univ. Prague, 1620.

1624

Briggs H. Arithmetica logarithmica. L., 1624.

Kepler J. Chilias logarithmorum ad totidem numeros rotundas. Marburg, 1624.

1638

Galilei G. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze. Leyden, 1638. (*Opere*, Vol. VIII. P. 209–10. Barbèra, Firenze, 1968).

1647

de Saint-Vincent G. Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii. Problema Austriacum. Plus ultra quadratura circuli. Antwerpen, 1647.

¹⁾ Литература, добавленная при переводе, отмечена звёздочкой.

1649

de Sarasa A. Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno minimo propositi. Antwerpen, 1649.

1726

Bernoulli D. Examen principiorum mechanicae et demonstrationes geometricae de compositione et resolutione virium. *Comm. Acad. Petropol.*, 1, 126–42.

1747

d'Alembert J.

(a) Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, I. *Hist. Acad. Berlin*, 1747, 214–19.

(b) Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, II. *Hist. Acad. Berlin*, 1747, 220–49.

1748

Euler L. Introductio in analysin infinitorum. Caput 8. Bousquet, Lausanne (*Opera omnia*, ser. I. V. 8. P. 133–52. Teubner, Leipzig-Berlin, 1922). (Рус. перевод: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1, 2. — М.: Физматгиз, 1961.)

1750

d'Alembert J. Addition au Mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. *Hist. Acad. Berlin*, 1750, 355–60.

1755

Euler L. Institutiones calculi differentialis. Part. Prior. § 222. Part. Post. § 70–75. Acad. Imp. Sci. Petropol., 1755 (*Opera omnia*, Ser. 1. V. 10. P. 151. 276–9. Teubner, Leipzig-Berlin, 1913). (Рус. перевод: Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.)

1760

de Foncenex D. Sur les principes fondamentaux de la mécanique. *Misc. Taurinensia*, 2, 299–322.

1764

Euler L. De insigne promotione methodi tangentium inversae. *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, 10, 135–55 (*Opera omnia*, Ser. 1. V. 27. P. 365–83. Füssli, Lausanne, 1954).

1768

Euler L. Institutiones calculi integralis, I. § 406. Acad. Imp. Sci. Petropol., 1768 (*Opera omnia*, Ser. 1. V. 2. P. 259–60. Teubner, Leipzig-Berlin, 1913). (Рус. перевод: Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1957.)

Lambert J. H. Observations trigonométriques. *Mém. Acad. Berlin*, 24, 327–54. (*Opera mathematica*. V. 2. P. 245–69. Füssli, Zürich, 1948).

1769

d'Alembert J. Mémoire sur les principes de mécanique. *Hist. Acad. Sci. Paris*, 1769, 278–86.

1770

Euler L. Institutiones calculi integralis, III. § 174–7. Acad. Imp. Sci. Petropol., 1770 (*Opera omnia*, Ser. I. V. 13. P. 116–9. Teubner, Leipzig-Berlin, 1925). (Рус. перевод: Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 3. — М.: Гостехиздат, 1958.)

1774

Euler L. Demonstratio theorematis neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri. *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, 19, 103–11 (*Opera Omnia*, Ser. 1. V. 15. P. 207–16. Teubner, Leipzig-Berlin, 1927).

1791

Legendre A. M. Éléments de géométrie. Note II. Didot, Paris, 1791. (Рус. перевод: Лежандр А. М. Начальные основания геометрии. СПб., 1819.)

1797

Lacroix S. F. Traité du calcul différentiel et intégral. Duprat, Paris, 1797.

1804

Poisson S. D. Du parallélogramme des forces. *Corresp. sur l'École Polytechn.* 1, 356–60.

1805

Poisson S. D. Mécanique rationnelle. Bachelier, Paris, 1805.

1809

Gauss C. F. Theoria motus corporum coelestium. § 175–177. Perthes-Besser, Hamburg, 1809 (*Werke*, Vol. VII, 240–44. Teubner, Leipzig, 1906).

1811

Poisson S. D. Traité de mécanique. Bachelier, Paris, 1811.

1815

Babbage C. Essay towards the calculus of functions. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 105, 389–423.

1821

Cauchy A. L. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. V. 1. Analyse algébrique, Debure, Paris, 1821 (*Oeuvres*, Sér. 2. V. 3. Gauthier-Villars, Paris. 1897). (Рус. перевод: Коши О. Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе. СПб., Имп. Акад. наук, 1831.)

1823

Abel N. H. Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables (норвежск.), *Mag. Naturvidenskab.*, 1, No. 1, 1–10 (*Oeuvres complètes*. V. 1. P. 1–10. Grøndahl & Søn, Christiania, 1881).

1826

Abel N. H.

(a) Untersuchung der Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen Grössen x und y , wie $f(x, y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f[z, f(x, y)]$ eine symmetrische Function von x, y und z ist. *J. Reine Angew. Math.*, **1**, 11–5 (*Oeuvres complètes*. V. 1. P. 61–5. Grøndahl & Søn, Christiania, 1881).

(b) Untersuchungen über die Reihe

$$1 + (m/1)x + (m(m-1)/(1.2))x^2 + (m(m-1)(m-2)/(1.2.3))x^3 + \dots$$

J. Reine Angew. Math., **1**, 311–39 (*Oeuvres complètes*. V. 1. P. 219–50. Grøndahl & Søn, Christiania, 1881).

1827

Abel N. H. Über die Functionen, die der Gleichung $\phi x + \phi y = \psi(xfy + yfx)$ genug thun. *J. Reine Angew. Math.*, **2**, 386–94 (*Oeuvres complètes*. V. 1. P. 389–98. Grøndahl & Søn, Christiania, 1818).

1829

Лобачевский Н. И. О началах геометрии III. *Казанский вестник*, **27**, кн. XI–XII. С. 227–43¹⁾.

1830

Magnus L. J. Über die Relationen der Functionen, welche der Gleichung

$$F_1 y \phi_1 x + F_2 y \phi_2 x + \dots + F_n y \phi_n x = F_1 x \phi_1 y + F_2 x \phi_2 y + \dots + F_n x \phi_n y$$

genug thun. *J. Reine Angew. Math.*, **5**, 365–73.

1831

Encke J. F. Über die Begründung der kleinsten Quadrate. *Abh. Berlin Akad. Wiss.*, **1831**, 6–13.

1832

Bolyai J. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. § 23, 24. Marosvásárhely, 1832.

Gauss C. F.

(a) Brief an W. Bolyai 6.3.1832. Manuscript, 1832 (*Werke*, Vol. VIII. P. 220–4. Teubner, Leipzig, 1900).

(b) Zur Astralgeometrie. Manuscript, 1832 (*Werke*, Vol. VIII. P. 226–8. Teubner, Leipzig, 1900).

1837

Лобачевский Н. И. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных IV. *Учёные записки Казанского имп. университета*, 1837, кн. 1, 3–97¹⁾.

¹⁾ См. также: *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

1840

Lobachevskii N. I. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, § 33. 36. Berlin, 1840. (Англ. перевод: *Halsted G. B.* Open Court Publ., LaSalle, IL 1914.) ¹⁾

1844

Grassmann H. Die lineale Ausdehnungslehre. Wigand, Leipzig, 1844.

1854

Lottner J. C. Über die Functionen, welche der Gleichung

$$\phi(x) + \phi(y) = \phi \frac{fy \cdot Fx + fx \cdot Fy}{\chi(xy)}$$

genüge leisten. *J. Reine Angew. Math.*, **46**, 367–88.

1855

Лобачевский Н. И. Пангеометрия или изложение геометрии, основанное на общей и строгой теории параллельных линий. *Учёные записки Казанского университета*, **1855**, кн. I, 1–76. (Фр. перевод: *Lobachevskii N. I.* Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. *Сборник учёных статей, написанных профессорами Императорского Казанского университета в память пятидесятилетнего его существования*. Т. I. — Казань, 1856. С. 227–330.) ¹⁾

1860

Maxwell J. C. Illustrations of the dynamical theory of gases. *Philos. Mag.*, **19**, 19–32. (*Scientific Papers*. V. 1. P. 377–409. Cambridge University Press, Cambridge, 1890; Dover, N.Y., 1965).

Stokes G. On the intensity of light reflected from or transmitted through a pile of plates. *Proc. Roy. Soc. London*, **11**, 545–57 (*Math. and Phys. Papers*, Vol. IV. P. 145–56. Cambridge University Press, Cambridge, 1904).

1867

Henckel H. Theorie der komplexen Zahlensysteme. — Leipzig, 1867.

1868

Schiaparelli G. О принципе арифметического среднего при обработке результатов наблюдений (итал.) *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend.* (2), **1**, 771–8. *Fortschr.*: **1**, 75 (1868).

1871

Saint Robert P. De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante. *Mem. Accad. Sci. Torino* (2), **25**, 53–72. *Fortschr.*: **3**, 28 (1871).

1872

Glaisher J. W. L. On the law of facility of errors of observations and on the method of least squares. *Mem. Astronom. Soc. L.*, **39**, 75–124. *Fortschr.*: **4**, 92 (1872).

Schlömilch O. Über die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers. *Z. Math. Phys.*, **17**, 87–8. *Fortschr.*: **4**, 588 (1872).

¹⁾ См. также: *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

1873

Stone E. J. On the most probable result which can be derived from a number of direct determinations of assumed equal values. *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, **33**, 570–2. *Fortschr.*: **5**, 122 (1873).

1875

Darboux G. Sur la composition des forces en statique. *Bull. Sci. Math.* (1), **9**, 281–8. *Fortschr.*: **7**, 550 (1875).

Schiaparelli G. Sur le principe de la moyenne arithmétique. *Astronom. Nachr.*, **87**, 55–8. *Fortschr.*: **7**, 109 (1875).

1877

Genocchi A. Sur une mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries noneuclidiennes. *Mem. Accad. Sci. Torino* (2), **39**, 365–404. *Fortschr.*: **10**, 345 (1878).

Merriman M. A list of writings relating to the method of least squares with historical and critical notes. *Trans. Connecticut Acad. Arts Sci.* **4**, 151–231. *Fortschr.*: **9**, 154 (1877).

1878

Cayley A. On a functional equation. *Quart. J. Math.*, **15**, 315–25 (*Collected Math. Papers*, V. X. P. 298–306. Cambridge University Press, Cambridge, 1896). *Fortschr.*: **10**, 290 (1978).

Jensen J. L. W. V. О решении фундаментальных уравнений элементарными средствами (дат.). *Tidsskr. Math.* (4), **2**, 149–55. *Fortschr.*: **10**, 289 (1878).

1880

Darboux G. Sur le théorème fondamental de la géométrie projective. *Math. Ann.*, **17**, 55–61. *Fortschr.*: **12**, 447 (1880).

1881

Schröder E. Über eine eigentümliche Bestimmung einer Funktion durch formale Anforderungen. *J. Reine Angew. Math.*, **90**, 189–220. *Fortschr.*: **13**, 325 (1881).

1882

Weierstrass K. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* **1882**, 505–9 (*Werke*. V. 111. P. 155–9. Mayer & Müller, Berlin, 1903). *Fortschr.*: **14**, 415 (1882).

1884

Koenigs G. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), Suppl. 3–41. *Fortschr.*: **16**, 376 (1884).

Kronecker L. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **1884**, 1179–93, 1271–99 (*Werke*, Vol. III. P. 47–100, Teubner, Leipzig, 1899). *Fortschr.*: **16**, 83–4 (1884).

Rausenberger O. Functionen einer Variablen mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte, nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionentheorie. Teubner, Leipzig, 1884. *Fortschr.*: **16**, 334 (1884).

1885

Koenigs G. Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **2**, 385–404. *Fortschr.*: **17**, 370 (1885).

Phragmén E. Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques. *Acta Math.*, **7**, 33–42. *Fortschr.*: **17**, 425 (1885).

1886

Lecornu L. Sur le problème de l'anamorphose. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **102**, 813–16. *Fortschr.*: **18**, 829 (1886).

Massau J. Mémoires sur l'intégration graphique et ses applications. Vol. III, Chap. III, No. 178. Gauthier-Villars, Paris, 1886. *Fortschr.*: **19**, 285 (1886).

Weierstrass K. Zur Determinantentheorie. (Manuscript, ed. P. Günther). Univ. Berlin, Berlin, 1886 (*Werke*, Vol. III. P. 271–87. Mayer & Müller, Berlin, 1903). *Fortschr.*: **34**, 23 (1903).

1888

Bertrand J. Sur la loi de probabilité des erreurs d'observation. *C.R. Acad. Sci. Paris* **106**, 153–6. *Fortschr.*: **20**, 219 (1888).

Tisserand F. Remarque à l'occasion d'une communication de M. Bertrand. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **106**, 231–2. *Fortschr.*: **20**, 220 (1888).

1889

Segre C.

(a) Новое поле геометрических исследований, I (итал.). *Atti Accad. Sci. Torino*, **25**, 276–301. *Fortschr.*: **22**, 609 (1890).

(b) Новое поле геометрических исследований, II (итал.). *Atti Accad. Sci. Torino*, **25**, 430–57. *Fortschr.*: **22**, 609 (1890).

1890

Laurent H. Traité d'analyse. Vol. VI, Chap. VI. Gauthier-Villars, Paris, 1890. *Fortschr.*: **22**, 274 (1890).

Segre C.

(a) Новое поле геометрических исследований, III (итал.). *Atti Accad. Sci. Torino*, **26**, 35–71. *Fortschr.*: **22**, 609 (1890).

(b) Новое поле геометрических исследований, IV (итал.). *Atti Accad. Sci. Torino*, **26**, 592–612. *Fortschr.*: **22**, 609 (1890).

1891

Czuber B. Theorie der Beobachtungsfehler. Teubner, Leipzig, 1891. *Fortschr.*: **23**, 235 (1891).

1892

Hermite C. Sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. *Teixeira J. Sci. Math. Astronom.* **11**, 65–66. *Fortschr.*: **24**, 429 (1892).

Schottky F. Über das Additionstheorem der Cotangente und der Funktion $\zeta(u) = \sigma'(u)/\sigma(u)$. *J. Reine Angew. Math.*, **110**, 324–37. *Fortschr.*: **24**, 427 (1892).

Schwarz H.A. Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen. Springer, Berlin, 1892. *Fortschr.*: **25**, 757 (1893, 1894).

1894

Hurwitz A. Zur Invariantentheorie. *Math. Ann.*, **45**, 381–404 (*Math. Werke*, Vol. II. P. 508–32. Birkhäuser, Basel, 1933). *Fortschr.*: **25**, 171 (1893, 1894).

1896

Cantor M. Funktionalgleichungen mit drei von einander unabhängigen Veränderlichen. *Z. Math. Phys.*, **41**, 161–3. *Fortschr.*: **27**, 312 (1896).

Tisserand F. Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. 2nd ed. Chap. II. Gauthier-Villars, Paris, 1896. *Fortschr.*: **27**, 221 (1896).

1897

Andrade J. Leçons de mécanique physique. Soc. d'Éditions Scient., Paris, 1897. *Fortschr.*: **28**, 613 (1897).

Hayashi T. О функциональном уравнении, которое рассматривалось Абелем (япон.). *Tokyo Sugaku-Buts.* (1), **8**, 129–34. *Fortschr.*: **31**, 403 (1900).

Jensen J. L. W. V. О решении функциональных уравнений при минимальном количестве предположений (дат.). *Mat. Tidsskr. B*, **1897**, 25–8. *Fortschr.*: **28**, 346 (1897).

Stäckel P. Über eine von Abel untersuchte Funktionalgleichung. *Z. Math. Phys.*, **42**, 323–6. *Fortschr.*: **28**, 353 (1897).

1898

Алексеевский В. П. Об определении длины в неевклидовой геометрии. *Сообщения Харьковского матем. общества* (2), **6**, 139–53. *Fortschr.*: **29**, 411 (1898).

1899

Hayashi T. On a functional equation treated by Abel. *Z. Math. Phys.*, **44**, 346–9. *Fortschr.*: **39**, 353 (1899).

Lémeray E. M.

(a) Sur le problème de l'iteration. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **128**, 278–9. *Fortschr.*: **30**, 351 (1899).

(b) Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives. *Bull. Soc. Math. France*, **27**, 130–7. *Fortschr.*: **30**, 351 (1899).

Siacci F.

(a) О сложении сил в статике и его постулатах, I (итал.). *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (3), **5**, 34–9. *Fortschr.*: **30**, 614 (1899).

(b) О сложении сил в статике и его постулатах, II (итал.). *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (3), **5**, 69–78. *Fortschr.*: **30**, 615 (1899).

(c) О сложении сил в статике и его постулатах, III (итал.). *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (3), **5**, 147–51. *Fortschr.*: **30**, 615 (1899).

de la Vallée Poussin C. J. Cours d'analyse infinitésimale. V. 1. Introduction § 5. Libr. Univ., Louvain; Gauthier-Villars, Paris, 1899. *Fortschr.*: **30**, 267 (1899).

Wilson E. B. Note on the function satisfying the functional relation $\phi(u)\phi(v) = \phi(u+v)$. *Ann. Math.* (2), **1**, 47–8. *Fortschr.*: **30**, 353 (1899).

Zignano I. Обобщение двух проблем Коши (итал.). *Atti Accad. Pont. Nuovi Lincei*, **53**, 139–49. *Fortschr.*: **30**, 402 (1899).

1900

Зейлигер Д. Н. Об одном функциональном уравнении. *Известия Казанского физико-математического общества* (2), **10**, 187–90. *Fortschr.*: **30**, 403 (1899).

Andrade J. Sur l'équation fonctionnelle de Poisson. *Bull. Soc. Math. France*, **28**, 58–63. *Fortschr.*: **31**, 403 (1900).

Hilbert D. Mathematisches Probleme (Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris, 1900). *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* **1900**, 253–97 (*Gesammelte Abhandl.*, Vol.III. P. 290–329. Springer, Berlin, 1935). *Fortschr.*: **31**, 68 (1900). (Рус. перевод: Проблемы Гильберта. — М.: Наука, 1969. С. 11–64.

Pezider J. V. Исследование по функциональным уравнениям (чешск.). *Časopis Pěst. Mat.*, **29**, 153–95. *Fortschr.*: **31**, 403 (1900).

Severi F. О кониках, которые касаются или пересекают одну или более пространственных кривых (итал.). *Atti Accad. Sci. Torino*, **36**, 74–93. *Fortschr.*: **32**, 553 (1901).

1901

Синцов Д. М. К задаче г. Семиколенова. *Известия Казанского физико-математического общества* (2), **11**, 13–16. *Fortschr.*: **32**, 391, 1901.

Зейлигер Д. Н. По поводу статьи Д. М. Синцова «К задаче Семиколенова». *Известия Казанского физико-математического общества* (2), **11**, 103–13. *Fortschr.*: **32**, 39 (1901).

Hölder O. Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Ber. Sächs. Gesellsch. Wiss. Leipzig*, **53**, 1–64. *Fortschr.*: **32**, 79 (1901).

Pincherle S., Amaldi U. Дистрибутивные операции и их применение в анализе (итал.). Zanichelli, Bologna, 1901. *Fortschr.*: **32**, 75 (1901).

Schur I. Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Dissertation, Berlin, 1901. *Fortschr.*: **32**, 165 (1901).

1903

Синцов Д. М. Заметки по функциональному исчислению. *Известия Казанского физико-математического общества* (2), **13**, 46–72. *Fortschr.*: **34**, 421 (1903).

Hamel G. Über die Zusammensetzung von Vektoren. *Z. Math. Phys.*, **49**, 362–71. *Fortschr.*: **34**, 621 (1903).

Pezider J. V. Notiz über Funktionaltheoreme. *Monatsh. Math. Phys.*, **14**, 293–301. *Fortschr.*: **34**, 420 (1903).

Schimmack R. Über die axiomatische Begründung der Vektoraddition. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, **1903**, 317–25. *Fortschr.*: **34**, 621 (1903).

Schur F. Über die Zusammensetzung von Vektoren. *Z. Math. Phys.*, **49**, 352–61. *Fortschr.*: **34**, 621 (1903).

Sincov D. M. Über eine Funktionalgleichung. *Arch. Math. Phys.* (3), **6**, 216–17. *Fortschr.*: **34**, 421 (1903).

Volpi R. Замечания о чисто аналитической и элементарной теории круговых и гиперболических функций и их соотношениях с показательными (итал.). *Giorn. Mat. Battaglini*, **41**, 33–46. *Fortschr.*: **34**, 474 (1903).

1904

Schur I. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *J. Reine Angew. Math.*, **127**, 20–50. *Fortschr.*: **35**, 155 (1904).

Stephanos C. Sur une catégorie d'équations fonctionnelles. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18**, 360–2. *Fortschr.*: **35**, 391 (1904).

1905

Hamel G. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Math. Ann.*, **60**, 459–62. *Fortschr.*: **36**, 446 (1905).

1906

Bernstein F. Über eine Funktionalgleichung und eine erweiterte Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes. *Leipzig. Ber.*, **58**, 228–36. *Fortschr.*: **37**, 265 (1906).

Bonola R. Неевклидова геометрия (итал.). Appendix I. Zanichelli, Bologna, 1906. *Fortschr.*: **37**, 422 (1906).

Jensen J.L.W.V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math.* **30**, 175–93. *Fortschr.*: **37**, 422 (1906).

Pincherle S. Funktionaloperationen und Gleichungen. B: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Vol. II. 1.2. Teubner, Leipzig, 1906. P. 761–81. *Fortschr.*: **37**, 346 (1906).

1907

Lebesgue H.

(a) Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans, qu'on peut définir par des procédés analytiques. *Atti Accad. Sci. Torino*, **42**, 532–9. *Fortschr.*: **38**, 967 (1907).

(b) Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo. *Bull. Soc. Math. France*, **35** (1907), 202–12. *Fortschr.*: **38**, 96 (1907).

Schiaparelli G. Как обосновывается применение арифметических средних при обработке результатов наблюдений (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Lett. Rend.* (2), **40**, 752–64. *Fortschr.*: **38**, 280 (1907).

1908

Peano G. Собрание математических формул (итал.). 5-е изд., Fratres Bocca, Torino, 1908. *Fortschr.*: **39**, 84 (1908).

1909

Broggi U. Sur le principe de la moyenne arithmétique. *Enseign. Math.*, **11**, 14–17. *Fortschr.*: **40**, 286 (1909).

Fréchet M. Une definition fonctionnelle des polynômes. *Nouv. Ann.* (4), **9**, 145–62. *Fortschr.*: **40**, 389 (1909).

Schimmack R.

(a) Der Satz vom arithmetischem Mittel in axiomatischer Begründung. *Math. Ann.*, **68**, 125–32. *Fortschr.*: **40**, 285 (1909).

(b) Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition. *Abh. Akad. Naturforsch. Halle*, **90**, 5–104. *Fortschr.*: **40**, 148 (1909).

1910

Curtiss D.R. Relations between the Gramian, the Wronskian and a third determinant connected with the problem of linear independence. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **17**, 462–7. *Fortschr.*: **42**, 173 (1911).

van Vleck E.B. A functional equation for the sine. *Ann. Math.* (2), **11**, 161–5. *Fortschr.*: **41**, 375 (1910).

Wellstein J. Zwei Funktionalgleichungen. *Arch. Math. Phys.* (3), **16**, 93–100. *Fortschr.*: **41**, 373 (1910).

1911

Carmichael R.D. A generalization of Cauchy's functional equation. *Amer. Math. Monthly* **18**, 198–203. *Fortschr.*: **42**, 385 (1911).

Halphen C. Sur les fonctions homogènes. *Rev. Math. Spec.*, **21**, 130–1. *Fortschr.*: **42**, 447 (1911).

1912

Gronwall T. H. Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés. *J. Math. Pures Appl.* (6), **8**, 59–102. *Fortschr.*: **43**, 159 (1912).

Pincherle S. Équations et opérations fonctionnelles. B: *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Vol. II₅. 1, II, 26. Gauthier-Villars, Paris; Teubner, Leipzig, 1912.

Schweitzer A. R. Theorems on functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **19**, 66–70. *Fortschr.*: **43**, 408 (1912).

Soreau R. Réduction de $F_{123} = 0$ à la forme $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **155**, 1065–7. *Fortschr.*: **43**, 160 (1912).

1913

Fréchet M. О функциональном уравнении $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (эсперанто). *Enseign. Math.*, **15**, 390–3. *Fortschr.*: **44**, 399 (1913).

Levi-Civita T. О функциях, которые допускают формулу сложения типа $f(x + y) = \sum_{i=1}^n X_i(x)Y_i(y)$ (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* (5), **22**, Pt 2, 181–3. *Fortschr.*: **44**, 502 (1913).

Stäckel P. О функциональном уравнении $f(x + y) = \sum_{i=1}^n X_i(x)Y_i(y)$ (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* (5), **22**, Pt 2, 392–3. *Fortschr.*: **44**, 174 (1913).

Stephanos C. Sur une propriété caractéristique des déterminants. *Ann. Mat. Pura Appl.* (3), **21**, 233–6. *Fortschr.*: **44**, 174 (1913).

Sutô O. On some classes of functional equations. *Tôhoku Math. J.*, **3**, 47–62.

van Vleck E. B. On the functional equation for the sine. Additional note. *Ann. Math.* (2), **13**, 154. *Fortschr.*: **43**, 530 (1912).

1914

Koebe P. Über diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen und die endlich-vieldeutig umkehrbaren Abelschen Integrale. B: *Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem 50-jährigen Doktorjubiläum gewidmet*. Springer, Berlin, 1914. P. 192–4. *Fortschr.*: **45**, 699 (1914, 1915).

Stirling J. Note on a functional equation employed by Sir George Stokes. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **90**, 237–9. *Fortschr.*: **45**, 516 (1914, 1915).

Sutô O.

(a) Studies on some functional equations. *Tôhoku Math. J.*, **6**, 1–15. *Fortschr.*: **45**, 1310 (1914, 1915).

(b) Law of arithmetical mean. *Tôhoku Math. J.*, **6**, 79–81. *Fortschr.*: **45**, 1265 (1914, 1915).

(c) Studies on some functional equations. *Tôhoku Math. J.*, **6**, 82–101. *Fortschr.*: **45**, 1310 (1914, 1915).

1915

Beetle R. D. On the complete independence of Schimmack's postulates for the arithmetic mean. *Math. Ann.*, **76**, 444–6. *Fortschr.*: **45**, 354 (1914, 1915).

1916

Burstin C. Die Spaltung des Kontinuums in c in L-Sinne nichtmessbare Mengen. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math. Natur. Kl. Abt. IIa*, **125**, 209–17. *Fortschr.*: **46**, 293–4 (1916–1918).

Noether E. Die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung. *Math. Ann.*, **77**, 536–45. *Fortschr.*: **46**, 170 (1916–1918).

van Vleck E.B., Doubler F.H. A study of certain functional equations for the θ -functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17**, 9–49. *Fortschr.*: **46**, 604 (1916–1918).

Wilson W.H. On a certain general class of functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **23**, 392–3. *Fortschr.*: **46**, 711 (1916–1918).

1917

Бернштейн С.Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей, Харьков, Зап. Матем. об-ва (2), **15** (1917), 209–274. *Fortschr.*: **48**, 596–9 (1921, 1922).

Favre A. Sur les fonctions homogenes. *Nouv. Ann.* (4), **17**, 426–8. *Fortschr.*: **46**, 317 (1916–1918).

Ostrowski A. Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(xy)$. *Acta. Math.*, **41**, 271–84. *Fortschr.*: **46**, 169 (1916–1918).

1918

Bell E.T. A partial isomorph of trigonometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, 311–21. *Fortschr.*: **47**, 319 (1919, 1920).

Schweitzer A.R. On the history of functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, 439.

Wilson W.H. On a certain general class of functional equations. *Amer. J. Math.*, **40**, 263–82. *Fortschr.*: **46**, 711 (1916–1918).

Loewy A. Axiomatische Begründung der Zinstheorie. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **28**, 26–31. *Fortschr.*: **47**, 58 (1919, 1920).

Lunn A.C. Some functional equations in the theory of relativity. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26**, 26–34. *Fortschr.*: **47**, 808 (1919, 1920).

Perron O. Über Additions- und Subtraktionstheoreme. *Arch. Math. Phys.* (3), **28**, 97–100. *Fortschr.*: **47**, 189 (1919, 1920).

Wilson W.H. On certain related functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26**, 300–312. *Fortschr.*: **47**, 320 (1919, 1920).

1920

Banach S. Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Fund. Math.*, **1**, 123–4. *Fortschr.*: **47**, 235 (1919, 1920).

Campbell N.R. Physics, the Elements. Cambridge University Press, 1920. (Перепечатано как: *Foundations of Science: the Philosophy of Theory and Experiment.*) Dover, N.Y., 1957.)

Mineur H. Sur les solutions discontinues d'une classe d'équations fonctionnelles. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **170**, 793–6. *Fortschr.*: **47**, 235 (1919, 1920).

Sierpiński W.

(a) Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Fund. Math.*, **1**, 116–22. *Fortschr.*: **47**, 235 (1919, 1920).

(b) Sur les fonctions convexes mesurables. *Fund. Math.*, **1**, 125–9. *Fortschr.*: **47**, 235 (1919, 1920).

Steinhaus H. Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. *Fund. Math.*, **1**, 93–104. *Fortschr.*: **47**, 179 (1919, 1920).

1921

Minetti S.

(a) О функциональном уравнении $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, I (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* (5), **31**, 12–15. *Fortschr.*: **48**, 298 (1921, 1922).

(b) О функциональном уравнении $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, II (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* (5), **31**, 202–3. *Fortschr.*: **48**, 298 (1921, 1922).

Mineur H. Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **172**, 1461–3. *Fortschr.*: **48**, 392 (1921, 1922).

1922

Banach S., Ruziewicz S. Sur les solutions d'une équation fonctionnelle de J. Cl. Maxwell. *Bull. Internal. Acad. Polon. Sci. Lett.*, **1922**, 1–8. *Fortschr.*: **48**, 1204 (1921, 1922).

Mineur H. Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique. *Bull. Sci. Math.* (2), **46**, 156–76. *Fortschr.*: **48**, 443 (1921, 1922).

Myrberg P. J. Über Systeme analytischer Funktionen, welche ein Additionstheorem besitzen. (Preisschriften d. fürstl. Jablonowski. Ges. Leipzig). Teubner, Leipzig, 1922. *Fortschr.*: **48**, 433 (1921, 1922).

Picard É.

(a) Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la géométrie noneuclidienne, I. *Bull. Sci. Math.* (2), **46**, 404–16. *Fortschr.*: **48**, 639 (1921, 1922).

(b) Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la géométrie noneuclidienne, II. *Bull. Sci. Math.* (2), **46**, 425–32. *Fortschr.*: **48**, 639 (1921, 1922).

1923

Alaci V.

(a) Псевдо-однородные функции (рум.). *Rev. Mat. Timișoara*, **3**, No. 1, 3–4.

(b) О псевдо-однородных функциях (рум.). *Rev. Mat. Timișoara*, **3**, No.1, 6–7.

Andreoli G. Об одном простом и известном функциональном уравнении (итал.). *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (3), **29**, 12–14. *Fortschr.*: **49**, 197 (1923).

Frattini G.

(a) Задача расширения посредством изоморфизма, возникающая из теории относительности, I (итал.). *Atti Accad. Pont. Nuovi Lincei*, **76**, 94–8. *Fortschr.*: **49**, 631 (1923).

(b) Задача расширения посредством изоморфизма, возникающая из теории относительности, II (итал.). *Atti Accad. Pont. Nuovi Lincei*, **76**, 146–56. *Fortschr.*: **49**, 631 (1923).

Hille E. A Pythagorean functional equation. *Ann. Math.* (2), **24**, 175–80. *Fortschr.*: **49**, 327 (1923).

Myrberg P. J. Über das Additionstheorem analytischer Funktionen. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.*, **19**, No. 17, 1–9. *Fortschr.*: **51**, 293 (1925).

1924

Kaczmarz S. Sur l'équation fonctionnelle $f(x) + f(x+y) = \phi(y)f[x + (y/2)]$. *Fund. Math.* **6**, 122–9. *Fortschr.*: **50**, 183 (1924).

Ruziewicz S. Une application de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ à la décomposition de la droite en ensembles superposables nonmesurables. *Fund. Math.*, **5** (1924), 92–5. *Fortschr.*: **50**, 143 (1924).

Sierpiński W. Sur une propriété des fonctions de M. Hamel. *Fund. Math.*, **5**, 334–6. *Fortschr.*: **50**, 183 (1924).

1925

Wilson W.H. Two general functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **31**, 330–4. *Fortschr.*: **51**, 311 (1925).

1926

Caccioppoli R. О функциональном уравнении $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (итал.). *Boll. Un. Mat. Ital.*, **5**, 227–8. *Fortschr.*: **52**, 406 (1926).

Colucci A. О функциональном уравнении $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (итал.). *Giorn. Mat. Battaglini*, **64**, 222–3. *Fortschr.*: **52**, 407 (1926).

Kormes M. On the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **32**, 689–93. *Fortschr.*: **52**, 407 (1926).

1927

Ritt J.F. Real functions with algebraic addition theorems. *Trans. Amer. Math. Soc.* **29**, 361–8. *Fortschr.*: **53**, 245 (1927).

1928

Caccioppoli R. О функциональном уравнении $f(x+y) = F[f(x), f(y)]$ (итал.). *Giorn. Mat. Battaglini* **66**, 69–74. *Fortschr.*: **54**, 440 (1928).

Campbell N.R. An Account of the Principles of Measurement and Calculation. Longmans, Green & Co., L., 1928. *Fortschr.*: **54**, 62, 935 (1928).

Haupt O. Zur Theorie der Exponentialfunktion und der Kreisfunktionen. *Sitzungsber. Phys.-Med. Soz. Erlangen*, **60**, 155–60. *Fortschr.*: **54**, 384 (1928).

Hille E. A class of functional equations. *Ann. Math.* (2), **29**, 215–22. *Fortschr.*: **54**, 330 (1928).

Picard É. Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique. Gauthier-Villars, Paris, 1928. *Fortschr.*: **54**, 426 (1928).

Pólya G. Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **1928**, 96–9. *Fortschr.*: **54**, 111 (1928).

Satô R. A study of functional equations. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3), **10**, 213–20. *Fortschr.*: **54**, 440 (1928).

Schur I. Über die stetigen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **1928**, 100–124. *Fortschr.*: **54**, 148–9 (1928).

1929

Ostrowski A. Mathematische Miszellen, XIV. Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **38**, 54–62. *Fortschr.*: **55**, 800 (1929).

Thomsen G. Topologische Fragen der Differentialgeometrie, XII. Schnittpunktsätze in ebenen Geweben. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **7**, 99–106. *Fortschr.*: **55**, 1014 (1929).

1930

Jessen B. Über die Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels. *Acta Sci. Math.* (Szeged) **5**, 108–16. *Fortschr.*: **57**, 309 (1931).

Kolmogorov A.N. Sur la notion de la moyenne. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* (6), **12**, 388–91. *Fortschr.*: **56**, 198 (1930).

Nagumo M. Über eine Klasse der Mittelwerte. *Japan. J. Math.*, **7**, 71–9. *Fortschr.*: **56**, 198 (1930).

1931

Angheluța T. Sur une équation fonctionnelle caractérisant les polynômes. *Bull. Soc. Sci. Cluj*, **6**, 139–45. *Fortschr.*: **58**, 1100 (1932).

de Finetti B. О понятии среднего значения (итал.). *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **2**, 369–96. *Fortschr.*: **57**, 609 (1931).

Montel P. Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **48**, 65–94. *Fortschr.*: **57**, 1397 (1931).

Myrberg P. J. Sur les systèmes de fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **193**, 916–17. *Fortschr.*: **57**, 1398 (1931).

Satô R. On the solutions of a system of some functional equations. *Japan J. Math.*, **8**, 13–15. *Fortschr.*: **57**, 1434 (1931).

1932

Bohr H. Fastperiodische Funktionen. (Ergebnisse Math. (1), No. 5). Springer, Berlin, 1932. (Reprint 1974). *Fortschr.*: **58**, 264 (1932).

Golqb S. Sur les fonctions homogènes, I. Équation d'Euler. *C.R. Soc. Sci. Varsovie*, **25**, 105–10. *Fortschr.*: **59**, 979 (1933).

Mazur S., Ulam S. M. Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels, normés. *C.R. Acad. Sci. Paris*. **194**, 946–8. *Fortschr.*: **58**, 423 (1932).

1933

Favard J. Leçons sur les fonctions presque périodiques. Gauthier-Villars, Paris, 1933. *Fortschr.*: **59**, 996–7 (1933).

1934

Bell E. T. Exponential polynomials. *Ann. of Math.*, **35**, 258–77. *Fortschr.*: **60**, 295 (1934).

Bohr H. Again the Kronecker theorem. *J. London Math. Soc.*, **9**, 5–6. *Fortschr.*: **60**, 302 (1934).

Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge, 1934 (second edn. 1952). *Fortschr.*: **60**, 169 (1934).

Kitagawa T. On some class of weighted means. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3), **16**, 117–26. *Fortschr.*: **60**, 170 (1934).

Mazur S., Orlicz W.

(a) Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. I. *Studia Math.*, **5**, 50–68. *Fortschr.*: **60**, 1074 (1934).

(b) Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, II. *Studia Math.*, **5**, 179–89. *Fortschr.*: **60**, 1074 (1934).

Sierpiński W. Remarques sur les fonctions de plusieurs variables réelles. *Prace Mat.-Fiz.* **41**, 171–5. *Fortschr.*: **60**, 971 (1934).

1935

Aumann G. Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente, II. *Math. Ann.* **111**, 713–30. *Fortschr.*: **61**, 200 (1935).

Jordan P., von Neumann J. On inner products in linear, metric spaces. *Ann. Math.* (2), **36**, 719–23. *Fortschr.*: **61**, 435 (1935).

Nakahara I. Axioms for the weighted means. *Tôhoku Math. J.*, **41**, 424–34. *Fortschr.*: **62**, 200 (1936).

1936

Popoviciu T. Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle. *Mathematica (Cluj)*, **12**, 5–12. *Fortschr.*: **62**, 429 (1936).

Sierpiński W. Sur une fonction universelle de deux variables réelles. *Bull. Internal. Acad. Polon. Sci. Lett. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A.*, **1936**, 8–12. *Fortschr.*: **62**, 232 (1936).

1937

Венков Б. А. Элементарная теория чисел. — М.-Л.: Гл. ред. общетехн. и техн.-теор. лит., 1937. (Англ. перевод: Walters-Noordhoff, Groningen, 1970. *MR*: **42**, #178 (1971).).

Gołqb S. Sur une définition axiomatique des nombres conjugués pour les nombres complexes ordinaires. *Opusc. Math. (Cracov.)* **1**, 1–11. *Fortschr.*: **63**, 839 (1937).

Kac M. Une remarque sur les équations fonctionnelles. *Comment. Math. Helv.*, **9**, 170–171. *Fortschr.*: **63**, 408 (1937).

Lévy P. Théorie de l'addition des variables aléatoires. Gauthier-Villars, Paris, 1937. *Fortschr.*: **63**, 490 (1937).

1938

Doebelin W. Sur l'équation matricielle $A^{(1+s)} = [A^{(t)} A^{(s)}]$ et ses applications aux probabilités en chaîne. *Bull. Sci. Math. (2)*, **62**, 21–32. *Fortschr.*: **64**, 539 (1938).

Fréchet M. Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Vol. II: Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. Gauthier-Villars, Paris, 1938. *Fortschr.*: **64**, 536 (1938).

Gołqb S. Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte. *Wiadom. Mat.*, **45**, 97–137. *Fortschr.*: **64**, 754 (1938).

1939

Erdős P., Wintner A. Additive arithmetic functions. *Amer. J. Math.*, **61**, 713–21. *MR*: **1**, 40 (1940).

Hostinsky B. Équations fonctionnelles relatives aux probabilités continues en chaîne. (Actualités Sci. Indust., No. 782). Hermann, Paris, 1939. *Fortschr.*: **65**, 1348 (1939).

Krafft M. Herleitung der trigonometrischen Funktionen aus ihren Funktionalgleichungen. *Deutsch. Math.* **4**, 194–201. *Fortschr.*: **65**, 276 (1939).

Piccard S. Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace Euclidien. (Mém. Univ. Neuchâtel. V. 13). Université, Neuchâtel, 1939. *MR*: **2**, 129 (1941).

1940

Alt W. Über die reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen welche ein rationales Additionstheorem besitzen. *Deutsch. Math.*, **5**, 1–12. *MR*: **1**, 297 (1940).

Bohnenblust A. Axiomatic characterization of L_p -spaces. *Duke Math. J.*, **6**, 627–40. *MR*: **2**, 102 (1941).

van der Corput J. G.

(a) Гониометрические функции, характеризующиеся функциональным уравнением, I (голл.). *Euclides (Groningen)*, **17**, 55. *Fortschr.*: **66**, 1236–7 (1940).

(b) Гониометрические функции, характеризующиеся функциональным уравнением, II (голл.). *Euclides (Groningen)*, **17**, 65–75. *Fortschr.*: **66**, 1236–7 (1940).

Lorenzen P. Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen. *J. Reine Angew. Math.*, **182**, 50. *MR*: **2**, 1 (1941).

van der Lyn G.

(a) Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\phi(y)$. *Mathematica (Cluj)*, **16**, 91–6. *MR*: **2**, 134 (1941).

- (b) Les polynômes abstraits. *Bull. Sci. Math.* (2), **64**, 55–80. MR: 1, 259 (1940).
 (c) Les polynômes abstraits. (Suite). *Bull. Sci. Math.* (2), **64**, 102–12. MR: 2, 222 (1941).

Weil A. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. (Actualités Sci. Indust., No. 869), Hermann, Paris, 1940 (второе изд. 1965). MR: 3, 198 (1942). (Рус. перевод: Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. — М.: ИЛ, 1950.)

1941

van der Corput J. G. A remarkable family. *Euclides (Groningen)*, **18**, 50–64. MR: 7, 385 (1946).

Hyers D. H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **27**, 222–4. MR: 2, 315 (1941).

1942

Haruki H. On a certain simultaneous functional equation concerning the elliptic functions. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3), **24**, 450–4. MR: 7, 395 (1946).

Jones F. B.

(a) Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x) + f(y) = f(x + y)$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**, 115–20. MR: 3, 229 (1942).

(b) Measure and other properties of a Hamel basis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**, 472–81. MR: 4, 4 (1943).

Perron O. Über eine für die Invariantentheorie wichtige Funktionalgleichung. *Math. Z.* **48**, 136–72. MR: 5, 30 (1944).

1943

Dieudonné J. Les déterminants sur un corps non commutatif. *Bull. Soc. Math. France*, **71**, 27–45. MR: 7, 3 (1946).

1944

Ficken F. A. Note on the existence of scalar products in normed linear spaces. *Ann. of Math.*, **45**, 362–6. MR: 5, 270 (1944).

Haupt O. Über einen Eindeigkeitsatz für gewisse Funktionalgleichungen. *J. Reine Angew. Math.*, **186**, 58–64. MR: 6, 275 (1945).

Haymann W. K. A property of the probability integral. *Math. Gaz.*, **28**, 114–15.

Perron O. Neuer Aufbau der nichteuclidischen (hyperbolischen) Trigonometrie. *Math. Ann.*, **119**, 247–65. MR: 6, 183 (1945).

Reisch P. Neue Lösungen der Funktionalgleichung für Matrizen $\phi(X)\phi(Y) = \phi(XY)$. *Math. Z.*, **49**, 411–26. MR: 6, 199 (1945).

Vietoris L. Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, **186**, 1–15. MR: 6, 271 (1945).

Watson G. N. On a functional equation. *Math. Gaz.*, **28**, 218–20.

1945

Нейшулер Л. Я. О табулировании одного класса функций четырёх переменных, заданных в неявном виде. *ДАН СССР*, **48**, N 7, 488–491. MR: 8, 171 (1947).

Alexiewicz A., Orlicz W. Remarque sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Fund. Math.*, **33**, 314–15. MR: 8, 227 (1947).

Hadwiger H. Über Verteilungsgesetze vom Poissonschen Typus. *Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath.*, **45** (1945), 257–77. MR: 7, 215 (1946).

Hyers D. H., Ulam S. M. On approximate isometries. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**, 288–92. MR: **7**, 143 (1946).

1946

Aczél J. The notion of mean values. *Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim)*, **19**, 83–6. MR: **8**, 504 (1947).

Aczél J., Fenyő I.

(a) Über die Theorie der Mittelwerte. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **11**, 239–45. MR: **10**, 237 (1949).

(b) On fields of forces in which centres of gravity can be defined. *Hungar. Acta Math.*, **1**, 53–60. MR: **10**, 159 (1949).

Erdős P. On the distribution of additive functions. *Ann. of Math. (2)*, **47**, 1–20. MR: **7**, 416 (1946).

Ghircoiasiu N. Une équation fonctionnelle caractérisant les coniques. *Mathematica (Cluj)* **22**, 66–8. MR: **8**, 84 (1947).

Gołab S. Sur la théorie des objets géométriques. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **19**, 7–35. MR: **9**, 206 (1948).

Kestelman H. On the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Fund. Math.*, **34**, 144–7. MR: **9**, 188 (1948).

Riordan J. Derivatives of composite functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 664–7. MR: **8**, 208 (1947).

San Juan R. Применение диофантовых приближений к функциональному уравнению $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (испан.). *Publ. Inst. Mat. Univ. Litoral*, **6**, 221–4. MR: **8**, 27 (1947).

Ulam J. General means and its applications. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **19**, 225–6.

Waraszkiewicz Z. Sur les fonctions définies par les équations fonctionnelles $f((x + y)/2) = 2f(x)f(y)/(f(x) + f(y))$ et $f((x + y)/2) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$, où $0 < \lambda < 1$. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **19**, 237.

1947

Aczél J. On mean values and operations defined for two variables. *Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim)*, **20**, 37–40. MR: **9**, 572 (1948).

Bohr H. Almost periodic functions. Chelsea, N.Y. 1947. (Reprinted 1951). MR: **8**, 512 (1947).

Day M. M. Some characterizations of inner-product spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **62**, 320–37. MR: **9**, 192 (1948).

Dunford N., Hille E. The differentiability and uniqueness of continuous solutions of addition formulas. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 799–805. MR: **9**, 95 (1948).

Hoheisel G. Funktionalgleichung und Differenzierbarkeit bei den trigonometrischen Funktionen. *Math. Ann.*, **120**, 10–11. MR: **9**, 274 (1948).

Horváth J. Sur le rapport entre les systèmes de postulats caractérisant les valeurs moyennes quasi arithmétiques symétriques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **225**, 1256–7. MR: **9**, 337 (1948).

Hyers D. H., Ulam S. M. Approximate isometries in the space of continuous functions. *Ann. of Math. (2)*, **48**, 285–9. MR: **8**, 588 (1947).

James R. C. Inner products on normed linear spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**, 559–66. MR: **9**, 42 (1948).

Segre B. Автоморфизмы поля комплексных чисел и проблема Коррадо Серге (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (8)*, **3**, 414–20. MR: **10**, 231 (1949).

1948

Aczél J.

(a) Über eine Klasse von Funktionalgleichungen. *Comment. Math. Helv.*, **21**, 247–52. MR: **9**, 514 (1948).

(b) On mean values. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, 392–400. MR: **9**, 54 (1948).

(c) Un problème de M. L. Fejer sur la construction de Leibniz, *Bull. Sci. Math.* (2), **72**, 35–45. MR: **10**, 357 (1949).

Gołąb S. Sur la notion de dérivée covariante. *Colloq. Math.*, **1**, 160.

Hille E. Functional Analysis and Semigroups. (Colloq. Publ. Amer. Math. Soc. V. 31). Amer. Math. Soc., N.Y., 1948. MR: **9**, 594 (1948).

Horváth J. Note sur un problème de L. Fejer. *Bul. Inst. Politehn. Iași*, **3**, 164–8. MR: **10**, 237 (1949).

Lorch E. R. On certain implications which characterize Hilbert space. *Ann. of Math.* (2), **49**, 523–32. MR: **10**, 129 (1949).

Martis-Biddau S. О характеристизации некоторых классов функций (итал.). *Collect. Math.*, **1**, 67–84. MR: **11**, 251 (1950).

Mikusiński J. Sur quelques équations fonctionnelles. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **21**, 346.

Montel P. Sur des équations fonctionnelles caractérisant les polynômes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **226**, 1053–5. MR: **9**, 515 (1948).

Shannon C. E.

(a) A mathematical theory of communication, I. *Bell System Tech. J.* **27**, 379–423. MR: **10**, 133 (1949).

(b) A mathematical theory of communication, II. *Bell System Tech. J.* **27**, 623–56. MR: **10**, 133 (1949).

Ulam J. The general mean. B: *Sixth Meeting of Polish Mathematicians*. (Dodatek do Roczn. Polsk. Tow. Mat., No. 22). Warszawa, 1950. P. 57–9.

1949

Фридман А. А. О выпуклых функциях, определённых на множестве, и функциональном уравнении $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Учён. зап. Казах. ун-та, **12**, 21–33.

Aczél J.

(a) Sur les opérations définies pour nombres réels. *Bull. Soc. Math. France*, **76**, 59–64. MR: **10**, 685 (1949).

(b) Über einparametrische Transformationen. *Publ. Math. Debrecen*, **1**, 243–7. MR: **12**, 673 (1951).

(c) Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlichen ableitbare Differentialgleichungen. *Acta Sci. Math.* (Szeged), **13**, 179–89. MR: **13**, 246 (1952).

Aczél J., Fenyő I., Horváth J. Sur certaines classes de fonctionnelles. *Portugal. Math.*, **8**, 1–11. MR: **11**, 584 (1950).

Arrighi G. О функциональном уравнении $2\phi(x)\phi(y) = \phi(x + y) + \phi(x - y)$ (итал.). *Boll. Un. Mat. Ital.* (3), **4**, 255–7. MR: **11**, 598 (1950).

Barnard G. A. Statistical inference. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **11**, 119–49. MR: **11**, 672 (1950).

de Bruijn N. G. Functions whose differences belong to a given class. *Nieuw. Arch. Wisk.* (2), **23**, 194–218. MR: **13**, 332 (1952).

Etherington I. M. H. Non-associative arithmetics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **62**, 442–53. MR: **10**, 677 (1949).

Gołąb S. Sur les objets géométriques non différentiels. *Bull. Internat. Acad. Polon. Sci. Lett. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A*, **1949**, 67–72. MR: **11**, 690 (1950).

Hua L. K. On the automorphisms of a sfield. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35**, 386–9. MR: **10**, 675 (1949).

Knaster B. Sur une équivalence pour les fonctions. *Colloq. Math.*, **2**, 1–4. MR: **12**, 395 (1951).

Ryll-Nardzewski C. Sur les moyennes. *Studia Math.*, **11**, 31–7. MR: **12**, 12 (1951).

Tamari D. Caractérisation des semi-groupes à un paramètre. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **28**, 1092–4. MR: **10**, 508 (1949).

Thielman H. P. (a) On generalized means. *Proc. Iowa Acad. Sci.*, **56**, 241–7. MR: **12**, 12 (1951).

(b) On generalized Cauchy functional equations. *Amer. Math. Monthly*, **56**, 452–7. MR: **11**, 183 (1950).

1950

Aczél J. Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **12A**, 73–86. MR: **12**, 541 (1951).

Birkhoff G. Moyennes des fonctions bornées. B: *Algèbre et théorie des nombres*. (Colloq. Internal. CNRS. 1950. V. 24). CNRS, Paris. P. 143–53. MR: **13**, 361 (1952).

Fuchs L. On mean systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **1**, 303–20. MR: **13**, 922 (1952).

Gołqb S. Sur les objets géométriques a une composante. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **23**, 79–89. MR: **12**, 749 (1951).

Good I. J. Probability and the Weighing of Evidence. Appendix III. Charles Griffin, L.; Haffner, N.Y., 1950. MR: **12**, 837 (1951).

Halmos P. R. Measure Theory. Van Nostrand, N.Y., 1950. MR: **11**, 504 (1950). (Рус. перевод: Халмош П. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.)

Hewitt E., Zuckerman H. S. A group-theoretic method in approximation theory. *Ann. of Math.* (2), **52**, 557–67. MR: **12**, 801 (1951).

Jánosy L., Rényi A., Aczél J. On composed Poisson-distributions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **1**, 209–24. MR: **13**, 663 (1952).

Lebesgue H. Leçons sur les constructions géométriques. Gauthier-Villars, Paris, 1950. MR: **11**, 678 (1950).

Maak W. Fastperiodische Funktionen. (Grundlehren math. Wiss. V. 61). Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1950. MR: **11**, 101 (1950).

Milkman J. Note on the functional equations $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(x^n) = nf(x)$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, 505–8. MR: **10**, 411 (1951).

Sade A. Quasigroupes. Marseille, 1950. MR: **13**, 203 (1952).

Thielman H. P. On a pair of functional equations. *Amer. Math. Monthly*, **57**, 544–7. MR: **12**, 680 (1951).

1951

Aczél J., Kalmár L., Mikusiński J. Sur l'équation de translation. *Studia Math.*, **12**, 112–16. MR: **13**, 246 (1952).

Halperin I. Nonmeasurable sets and the equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2**, 221–4. MR: **12**, 685 (1951).

Higman G., Neumann B. H. Groups as groupoids with one law. *Publ. Math. Debrecen*, **2**, 215–21. MR: **15**, 284 (1954).

Kestelman H. Automorphisms in the field of complex numbers. *Proc. London Math. Soc.* (2), **53**, 1–12. MR: **12**, 812 (1951).

Kuwagaki A. Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = R[f(x), f(y)]$. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A*, **26**, 139–44. MR: **13**, 466 (1952).

Mohr E. Bemerkung zur Dimensionsanalyse. *Math. Nachr.*, **6**, 145–53. MR: **13**, 616 (1952).

Pidek H. Sur les objets géométriques de classe zéro qui admettent un algèbre. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **24**, 111–28. MR: **15**, 899 (1954).

Rényi A. On composed Poisson-distributions, II. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **2**, 83–98. MR: **13**, 663 (1952).

Sierpiński W. Algèbre des ensembles. § 27. (Monografie Mat. 1951. V. 23). P.W.N. Warszawa-Wrocław, MR: **13**, 541 (1952).

Thielman H. P. A note on a functional equation. *Amer. J. Math.*, **73**, 482–4. MR: **13**, 43 (1952).

1952

Aczél J.

(a) On composed Poisson-distributions, III. *Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3**, 219–24. MR: **14**, 770 (1953).

(b) Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quarternionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3**, 309–16. MR: **15**, 383 (1954).

Bellman R. A note on scalar functions of matrices. *Amer. Math. Monthly*, **59**, 391. MR: **14**, 6 (1953).

de Bruijn N. G. A difference property for Riemann integrable functions. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **14**, 145–51. MR: **13**, 830 (1952).

Kuwagaki A.

(a) Sur les fonctions de deux variables satisfaisant une formule d'addition algébrique. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A*, **27**, 139–43. MR: **14**, 760 (1953).

(b) Sur l'équation fonctionnelle rationnelle de la fonction inconnue de deux variables. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A*, **27**, 145–51. MR: **14**, 760 (1953).

(c) Sur la fonction analytique de deux variables complexes satisfaisant l'associativité $f\{x, f(y, z)\} = f\{f(x, y), z\}$. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A*, **27**, 225–34. MR: **15**, 324 (1954).

Szasz P. Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch Verwendung der Grenzkugel. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3**, 327–33. MR: **14**, 1007 (1953).

1953

Хинчин А. Я. Понятие энтропии в теории вероятностей, УМН **8**: 3 (55), 3–20. MR: **15**, 238 (1954).

Caspar G. Eine neue Definition der Determinanten. *Publ. Math. Debrecen*, **3**, 257–260. MR: **17**, 338 (1956).

Hosszú M. (a) On the functional equation of distributivity. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4**, 159–67. MR: **15**, 324 (1954).

(b) A generalization of the functional equation of bisymmetry. *Studia Math.* **14**, 100–6. MR: **15**, 962 (1954).

(c) On the functional equation of autodistributivity. *Publ. Math. Debrecen*, **3**, 83–6. MR: **15**, 962 (1954).

(d) Some functional equations related with the associative law. *Publ. Math. Debrecen*, **3**, 205–14. MR: **17**, 236 (1956).

(e) On the functional equation of transitivity. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **15**, 203–8. MR: **16**, 371 (1955).

Moser L., Lambek J. On monotone multiplicative functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, 544–5. MR: **15**, 104 (1953).

Redheffer R. M. A note on the Poisson law. *Math. Mag.*, **26**, 185–8. MR: **14**, 1098 (1953).

Schutzenberger M. P. Une interpretation de certaines solutions de l'équation fonctionnelle $F(x + y) = F(x)F(y)$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **236**, 352–3. MR: **14**, 768 (1953).

1954

Goldb S. Über den Begriff der kovarianten Ableitung. *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **2**, 90–6. MR: **16**, 76 (1955).

Maier W. Inhaltsmessung in R_3 fester Krümmung. Ein Beitrag zur imaginären Geometrie. *Arch. Math. (Basel)*, **5**, 266–73. MR: **16**, 394 (1955).

Pidek H.

(a) Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1 . *Ann. Polon. Math.*, **1**, 114–26. MR: **16**, 173 (1955).

(b) Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_m . *Ann. Polon. Math.*, **1**, 127–34. MR: **16**, 174 (1955).

Redheffer R. M. Novel uses of functional equations. *J. Rational Mech. Anal.*, **3**, 271–9. MR: **15**, 763 (1954).

1955

Aczél J.

(a) Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff, I. *Publ. Math. Debrecen*, **4**, 33–42. MR: **16**, 989 (1955).

(b) Über Additions und Subtraktionstheoreme. *Publ. Math. Debrecen*, **4**, 325–33. MR: **18**, 488 (1957).

(c) Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen n -dimensionalen einparametrischen 'Translation' der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und des stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrals. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **6**, 131–41. MR: **17**, 272 (1956).

Aczél J., Varga O. Bemerkung zur Cayley-Kleinschen Massbestimmung. *Publ. Math. Debrecen*, **4**, 3–15. MR: **17**, 177 (1956).

van den Berg J. Über die Funktionalgleichung $\phi(\alpha x) - \beta\phi(x) = F(x)$, II. *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **3**, 113–23. MR: **17**, 375 (1956).

Erdős P., Golomb M. Functions which are symmetric about several points. *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **3**, 13–19. MR: **16**, 931 (1955).

Fürstenberg H. The inverse operation in groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6**, 991–7. MR: **17**, 1053 (1956).

Singer I. M., Wermer J. Derivations on commutative normed algebras. *Math. Ann.*, **129**, 260–4. MR: **16**, 1125 (1955).

Vaughan H. E. Characterization of the sine and cosine. *Amer. Math. Monthly*, **62**, 707–13. MR: **17**, 631 (1956).

1956

Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных. ДАН СССР **108**, 179–182. MR: **18**, 197 (1957).

Фаддеев Д. К. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы. УМН **11**: 1 (67), 227–231. MR: **17**, 1098 (1956).

Aczél J.

(a) Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte, I–II. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**, 339–54. MR: **19**, 677 (1958).

(b) Об определении натурального логарифма и показательной функции (венг.). *Mat. Lapok*, **7**, 101–5.

Aczél J., Hosszú M. On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**, 327–38. MR: **19**, 41 (1958).

Climescu A. Об аксиоматическом определении детерминантов (рум.). *Bul. Inst. Politehn. Iasi* **2**(6), Nos. 3–4, 1–7. MR: **20**, #1694 (1959).

Császár Á. Sur une caractérisation de la repartition normale de probabilités. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**, 359–82. MR: **19**, 326 (1958).

Fenyő I. Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **1**, 383–96. MR: **19**, 152 (1958).

Kurepa S.

(a) On some functional equations. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **11**, 3–5. MR: **18**, 217 (1957).

(b) Convex functions. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **11**, 89–94. MR: **19**, 408 (1958).

Marcus S. Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* (8), **20**, 584–9. MR: **18**, 794 (1957).

Mycielski J., Paszkowski S. Sur un problème du calcul de probabilité, I. *Studia Math.*, **15**, 188–200. MR: **19**, 588 (1958).

Redheffer R. M. On solutions of Riccati's equation as functions of the initial values. *J. Rational Mech. Anal.*, **5**, 835–48. MR: **19**, 558 (1958).

Richter H. Wahrscheinlichkeitstheorie. (Grundlehren math. Wiss. V. 86). Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1956. MR: **18**, 767 (1957).

Stein S. K. Foundations of quasigroups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **42**, 545–6. MR: **18**, III (1957).

Steinhaus H. Un problème sur la classification des fonctions continues de plusieurs variables. *Colloq. Math.*, **4**, 264.

1957

Арнольд В. И. О представлении функций двух переменных в виде $\chi[\phi(x) + \psi(y)]$. УМН **12**: 2 (74), 119–121. MR: **19**, 841 (1958).

Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. ДАН СССР, **114** (1957), N 5, 953–956. MR: **22**, #2669 (1961). (Англ. перевод: *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **28**, 55–9. MR: **27**, #3760 (1964).

Соркин Ю. И. Кольца как множества с одной операцией, подчинённой единственному тождеству. УМН, **12**, No. 4 (76), 357–62. MR: **19**, 1035 (1958).

Aczél J.

(a) Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte, III–IV. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8**, 19–52. MR: **19**, 677 (1958).

(b) Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte, V. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8**, 53–64. MR: **19**, 677 (1958).

Aczél J., Egerváry J. Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff, II. *Publ. Math. Debrecen*, **5**, 60–71. MR: **19**, 891 (1958).

Aczél J., Kiesewetter H. Über die Reduktion der Stufe bei einer Klasse von Funktionalgleichungen. *Publ. Math. Debrecen*, **5**, 348–63. MR: **26**, #6633 (1963).

Artin E. Geometric algebra. Interscience publishers, inc. N.Y. — L., 1957. (Русский перевод: Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969. Французский перевод: Artin E. Algèbre géométrique. Traduit par M. Lazard. Gauthier-Villars, Paris, 1978.)

Dizmier J. Quelques propriétés des groupes abéliens localement compacts. *Bull. Sci. Math.* (2), **81**, 38–48. MR: **20**, #3926 (1959).

Erdős P. On the distribution function of additive arithmetical functions and on some related problems. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **27**, 45–49. MR: **20**, #7004 (1959).

Gołqb S., Pidek H. Sur l'algèbre des objets géométriques de première classe à une composante. *Ann. Polon. Math.*, **4**, 226–48. MR: **20**, #4282 (1959).

Hadwiger H. Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Grundlehren math. Wiss. V. 93). Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957. MR: **21**, #1561 (1960).

Haruki H. On the functional equation $f(x + y) = Ff(x), f(y)$. *Sci. Rep. Osaka Univ.*, **6**, 11–12. MR: **31**, #524 (1966).

Hille E., Phillips R. S. Functional Analysis and Semi-groups. (Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., No. 31). Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957. MR: **19**, 664 (1958). (Рус. перевод: Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.).

Hosszú M. Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects. *Publ. Math. Debrecen*, **5**, 294–329. MR: **21**, #3518 (1960).

Kampé de Fériet J. Notion de moyenne dans la théorie de la turbulence. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **27**, 167–207. MR: **24**, #A2995 (1962).

Kemperman J. H. B. A general functional equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86**, 28–56. MR: **20**, #22 (1959).

Kiesewetter H. Eine Bemerkung über partielle Differentiationen bei N. H. Abel. *Publ. Math. Debrecen*, **5**, 265–8. MR: **22**, #9554 (1961).

Robinson R. M. A curious trigonometric identity. *Amer. Math. Monthly*, **64**, 83–5. MR: **18**, 569 (1957).

Sade A. Quasigroupes obéissant a certaines lois. *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul Sér. A*, **22**, 151–84. MR: **21**, #4987 (1960).

Stein S. K. On the foundations of quasigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85**, 228–56. MR: **20**, #922 (1959).

Vietoris L. Vom Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x / x)$. *Elem. Math.*, **12**, 8–10.

1958

* Белоусов В. Д. Производные операции и ассоциаторы в лупах. *Матем. сб.*, **45(87)**: 1, 51–70. РЖМат, 1959, 4, 3572.

* Белоусов В. Д. Ассоциативные системы квазигрупп (Всесоюзный colloquium по общей алгебре). *УМН*, **13**: 3, 243. РЖМат 1958, 7, 5542.

Aczél J. Miscellen über Funktionalgleichungen, I. *Math. Nachr.*, **19**, 87–99. MR: **21**, #7374 (1960).

Bergmann A. Über den Zusammenhang von Norm und Spur und ihrer Funktionalgleichungen in gewissen Algebren und dessen Anwendung auf Ringe mit Spurenbedingungen. *Math. Nachr.*, **19**, 237–54. MR: **21**, #4165 (1960).

Bruck R. H. A Survey of Binary Systems. (Ergebnisse Math., (2), No. 20). Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. MR: **20**, #76 (1959).

Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I. General theory. Interscience, N.Y.-L., 1958. MR: **22**, #8302 (1960). (Рус. перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Ч. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.).

Kelley J. L. Averaging operators on $C_\infty(X)$. *Illinois J. Math.*, **2**, 214–23. MR: **21**, #2179 (1960).

Kurepa S.

(a) Semigroups of linear transformations in n -dimensional vector space. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **13**, 3–32. MR: **21**, #695 (1960).

(b) A cosine functional equation in n -dimensional vector space. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **13**, 169–89. MR: **20**, #7156 (1959).

Lions J. L. Problèmes mixtes abstraits. B: *Proc. Intern. Math. Congr. Edinburgh, 1958*. Cambridge University Press, Cambridge, 1960. P. 389–97. MR: **23**, #A3925 (1962).

Moór A. Über die kovariante Ableitung der Vektoren. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **19**, 237–46. MR: **21**, #887 (1960).

Riordan J. An Introduction to Combinatorial Analysis. Wiley, N.Y., 1958. MR: **20**, #3077 (1959).

Tverberg H. A new derivation of the information function. *Math. Scand.*, **6**, 297–8. MR: **21**, #3691 (1960).

Young G. S. The linear functional equation. *Amer. Math. Monthly*, **65**, 37–8. MR: **20**, #4106 (1959).

Zariski O., Samuel P. Commutative Algebra. V. 1. Chapt. II. Van Nostrand, Princeton, N.J.–Toronto–L.–N.Y., 1958. MR: **19**, 833 (1959). (Рус. перевод: Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1. — М.: ИЛ, 1963.)

1959

Арнольд В. И. О представлении непрерывных функций трёх переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных. *Матем. сборник*, **48**(90), 3–74. MR: **22**, #12191 (1961).

Белюсов В. Д. Медальные системы квазигрупп (II Всесоюзный colloquium по общей алгебре). *УМН*, **14**: 5 (89), 213–14.

Aczél J. Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte, VI. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10**, 1–12. MR: **21** #6595 (1960).

Bergmann A. Ein Axiomensystem für Determinanten. *Arch. Math. (Basel)*, **10**, 243–56. MR: **21**, #4168 (1962).

Carroll F. W. Difference properties for polynomials and exponential polynomials on topological groups. *Notices Amer. Math. Soc.*, **6**, 844.

Ciesielski C. Some properties of convex functions of higher orders. *Ann. Polon. Math.*, **7**, 1–7. MR: **22**, #89 (1961).

Climescu A. Об определении тригонометрических функций (рум.). *Bul. Inst. Politehn. Iasi*, **5**(9), 35–8. MR: **23**, #266 (1962).

Erdős J. A remark on the paper 'On some functional equations' by S. Kurepa. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **14**, 3–5. MR: **21**, #7375 (1960).

Gáspár G. Eine axiomatische Theorie der Dieudonneschen Determinanten. *Publ. Math. Debrecen*, **6**, 298–302. MR: **22**, #4734 (1961).

Gołqb S. Sur l'équation $f(X) \cdot f(Y) = f(X \cdot Y)$, *Ann. Polon. Math.*, **6**, 1–13. MR: **21**, #2659 (1960).

Gołqb S., Schinzel A. Sur l'équation fonctionnelle $f[x + y \cdot f(x)] = f(x) \cdot f(y)$. *Publ. Math. Debrecen* **6**, 113–25. MR: **21**, #5828 (1960).

Guinand A. P. Les équations fonctionnelles de la loi d'associativité ternaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **249**, 23–4. MR: **21**, #5831 (1960).

Hosszú M.

(a) A generalization of the functional equation of distributivity. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **20**, 67–80. MR: **21**, #434 (1960).

(b) Nonsymmetric means. *Publ. Math. Debrecen*, **6**, 1–9. MR: **20**, #4109 (1959).

(c) A remark on scalar valued multiplicative functions of matrices. *Publ. Math. Debrecen*, **6**, 288–9. MR: **22**, #3744 (1961).

Kucharzewski M. Über die Funktionalgleichung $f(a_k^i) \cdot f(b_k^i) = f(b_\alpha^i a_k^\alpha)$. *Publ. Math. Debrecen* **6**, 181–98. MR: **22**, #3742 (1961).

Kuczma M. Bemerkung zur vorhergehenden Arbeit von M. Kucharzewski. *Publ. Math. Debrecen*, **6**, 199–203. MR: **22**, #3743 (1961).

Kurepa S.

(a) Functional equations for invariants of a matrix. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **14**, 97–113. MR: **22**, #5745 (1961).

(b) On the quadratic functional. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, **13**, 57–72. MR: **24**, #A1040 (1962).

Luce R. D. On the possible psychophysical laws. *Psychological Rev.*, **66**, 81–95.

Marcus S. Généralisations, aux fonctions de plusieurs variables, des théorèmes de Alexander Ostrowski et de Masuo Hukuhara concernant les fonctions convexes (J). *J. Math. Soc. Japan*, **11**, 173–6. MR: **22**, #12179 (1961).

Moór A. Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, **6**, 15–25. MR: **21**, #3877 (1960).

Pfanzagl J. Die axiomatischen Grundlagen einer allgemeinen Theorie des Messens. (Schriftenreihe Stat. Inst. Univ. Wien [N.F.], No. 1). Physica, Würzburg, 1959. MR: **21**, #2529 (1960).

Radó F.

(a) Équations fonctionnelles caractérisant les nomogrammes avec trois échelles rectilignes. *Mathematica (Cluj)*, **1**(24), 143–66. MR: **22**, #11238 (1961).

(b) Sur quelques équations fonctionnelles avec plusieurs fonctions à deux variables. *Mathematica (Cluj)*, **1**(24), 321–39. MR: **23**, #A1961 (1962).

Stein S. K.

(a) On a construction of Hosszú. *Publ. Math. Debrecen*, **6**, 10–14. MR: **21**, #3503 (1960).

(b) Left-distributive quasigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**, 577–8. MR: **21**, #7263 (1960).

Straus E. G. A functional equation proposed by R. Bellman. *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, 860–2. MR: **22**, #5831 (1961).

1960

Aczél J.

(a) Verallgemeinerte Addition von Dichten. *Publ. Math. Debrecen*, **7**, 10–15. MR: **22**, #7077 (1961).

(b) Über die Differenzierbarkeit der integrierbaren Lösungen gewisser Funktionalgleichungen. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **3–4**, 5–8. MR: **27**, #2745 (1964).

Aczél J., Belousov V. D., Hosszú M. Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11**, 127–36. MR: **25**, #4518 (1963).

Aczél J., Ghermănescu M., Hosszú M. On cyclic equations. *Magyar. Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5**, 215–21. MR: **23**, #A2660 (1962).

Aczél J., Gołqb S. Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte. (Monografie Mat. V. 39). P. W. N., Warszawa, 1960. MR: **24**, #3588 (1962).

Aczél J., Gołqb S., Kuczma M., Sivek E. Das Doppelverhältnis als Lösung einer Funktionalgleichung. *Ann. Polon. Math.*, **9**, 183–7. MR: **27**, #1731 (1964).

Baxter G. An analytic problem whose solution follows from a single algebraic identity. *Pacific J. Math.*, **10**, 731–42. MR: **22**, #9990 (1960).

Billik M., Rota G.-C. On Reynolds operators in finite-dimensional algebras. *J. Math. Mech.*, **9**, 927–32. MR: **23**, #A 2449 (1962).

Chaundy T. W., McLeod J. B. On a functional equation. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **43**, 7–8. MR: **27**, #1732 (1964).

Ghermănescu M. Функциональные уравнения (рум.). Acad. R.P. Rom., București, 1960, MR: **23**, #A3931 (1962).

Gołqb S. Sur les comitants algébriques des tenseurs. *Ann. Polon. Math.*, **9**, 113–18. MR: **24**, #A359 (1962).

Good I. J. Weight of evidence, corroboration, explanatory power, information and the utility of experiments. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **22**, 319–331. MR: **22**, #7182 (1961).

Henney D. R. Quadratic setvalued functions. *Ark. Mat.*, **4**, 377–8. MR: **25**, #3940 (1963).

Herman V. Функциональное уравнение, которое определяет рациональные функции (рум.). *Gaz. Mat. Fiz. Ser. A*, **12**(65), 636–9. MR: **23**, #A2656 (1962).

Hosszú M. Замечания о скалярнозначных мультипликативных функциях матриц (венг.). *Nehézip. Műsz. Egy. Közl.* **5**, 173–7.

Kucharzewski M., Kuczma M. On linear differential geometric objects with one component. *Tensor (N.S.)* **10**, 245–54. MR: **24**, #A3590 (1962).

Kurepa S.

(a) A cosine functional equation in Hilbert space. *Canad. J. Math.* **12**, 45–50. MR: **22**, #152 (1961).

(b) On the functional equation $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2) **15**, 31–48. MR: **25**, #355 (1963).

(c) Functional equation $F(x+y)F(x-y) = F^2(x) - F^2(y)$ in n -dimensional vector space. *Monatsh. Math.* **64**, 321–9. MR: **22**, #8239 (1961).

(d) On some functional equations in Banach space. *Studia Math.* **19**, 149–158. MR: **22**, #9755 (1961).

Luce R. D. The theory of selective information and some of its behavioral applications. B: *Developments in mathematical psychology, information, learning and tracking*. Glencoe Free Press, Glencoe, IL, 1960. P. 1–119. MR: **22**, #12000 (1961).

Prešić S. B. Sur l'équation fonctionnelle de translation. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* **1960**, No. 44–48, 15–16.

Radó F. Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe. *Mathematica (Cluj)*, **2**(25), 325–334. MR: **23**, #A3771 (1962).

Rådström H. One parameter semigroups of subsets of a real linear space. *Ark. Mat.*, **4**, 87–97. MR: **26**, #3802 (1963).

Rényi A. On measures of entropy and information. B: *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, 1960*. 1961. V. 1. Univ. of Calif. Press, Berkeley. P. 547–61. MR: **24**, #A2410 (1962).

Rota G.-C.

(a) On the representation of averaging operators. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **30**, 52–64. MR: **22**, #2899 (1961).

(b) Endomorphismes de Reynolds et théorie ergodique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **250**, 2791–3. MR: **22**, #8932 (1961).

(c) Représentation des opérateurs de Reynolds. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **250**, 2831–3. MR: **22**, #8933 (1961).

(d) Spectral theory of smoothing operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **46**, 863–8. MR: **26**, #2882 (1963).

Ulam S. M. A collection of mathematical problems. Interscience, N.Y.-L., 1960. MR: **22**, #10884 (1961). (Рус. перевод: Улам С. Нерешённые математические задачи. — М.: Наука, 1964.).

Vincze E.

(a) Über das Problem der Berechnung der Wirtschaftlichkeit. *Acta Tech. Acad. Sci. Hungar.*, **28**, 33–41.

(b) Über die Verallgemeinerung der trigonometrischen und verwandten Funktionalgleichungen. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **3–4**, 389–404. MR: **25**, #305 (1963).

1961

Сакович Г. Н. Решение одного многомерного функционального уравнения. *Укр. матем. ж.*, **2**, 13, 173–89. MR: **25**, #2337 (1963).

Aczél J.

(a) Miszellen über Funktionalgleichungen, II. *Mat. Nachr.*, **23**, 39–50. MR: **27**, #5056 (1964).

(b) Sur une classe d'équations fonctionnelles bilinéaires à plusieurs fonctions inconnues. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* **1960**, No. 61–64, 12–20. *MR*: **26**, #508 (1963).

(c) Über die Begründung der Additions- und Multiplikationsformeln von bedingten Wahrscheinlichkeiten. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **6**, 110–22. *MR*: **32**, #4712 (1966).

(d) *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1961. *MR*: **23**, #A1959 (1962).

(e) Über Homomorphismen und Isomorphismen der affinen Gruppen von Körper und von Ringe. *Bul. Inst. Politehn. Iași* **7**(11), No. 3–4, 7–14 *MR*: **26**, #509 (1963).

Aczél J., Hosszú M., Straus E. G. Functional equations for products and compositions of functions. *Publ. Math. Debrecen*, **8**, 218–24. *MR*: **26**, #509 (1963).

Cox R. T. The algebra of probable inference. John Hopkins Press, Baltimore, 1961. *MR*: **24**, #A563 (1962).

Daróczy Z.

(a) Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen. *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **22**, 31–41. *MR*: **24**, #A378 (1962).

(b) Elementare Lösung einer mehrere unbekannte Funktionen enthaltenden Funktionalgleichung. *Publ. Math. Debrecen*, **8**, 160–8. *MR*: **27**, #2750 (1964).

Djoković D. Ž. Sur une équation fonctionnelle cyclique. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* **1961**, No. 49–50, 15–16. *MR*: **23**, #A3933 (1962).

Flatto L. Functions with a mean value property. *J. Math. Mech.* **10**, 11–18. *MR*: **25**, #212 (1963).

Hosszú M., Vincze E. Über die Verallgemeinerungen eines Funktionalgleichungssystems der Wirtschaftlichkeit. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **6**, 313–21. *MR*: **26**, #2759 (1963).

Kiesewetter H. Struktur linearer Funktionalgleichungen im Zusammenhang mit dem Abelschen Theorem. *J. Reine Angew. Math.* **206**, 113–71. *MR*: **24**, #A936 (1962).

Kuczma M. On the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Fund. Math.* **50**, 387–91. *MR*: **25**, #1378 (1962).

Kurepa S. On the functional equation $f(x + y)f(x - y) = f^2(x) - f^2(y)$. *Ann. Polon. Math.*, **10**, 1–5. *MR*: **23**, #A3940 (1962).

Mitrinović D. S., Djoković D. Ž. Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **252**, 1090–2. *MR*: **24**, #A2160 (1962).

Schmidt H. Über das Additionstheorem der zyklischen Funktionen. *Math. Z.* **76**, 46–50. *MR*: **24**, #A276 (1962).

Vincze E. Verallgemeinerung eines Satzes über assoziative Funktionen von mehreren Veränderlichen. *Publ. Math. Debrecen*, **8**, 68–74. *MR*: **24**, #2777 (1962).

1962

Aczél J.

(a) Ein Blick auf Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. D.V.W., Berlin, 1962. *MR*: **26**, #6632 (1963).

(b) Remarques sur les relations d'équivalence. *Fund. Math.*, **51**, 267–9. *MR*: **26**, #6892 (1963).

Aczél J., Fladt K., Hosszú M. Lösungen einer mit dem Doppelverhältnis zusammenhängender Funktionalgleichung. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **7**, 335–52. *MR*: **27**, #2746 (1964).

Carroll F. W. Difference properties for continuity and Riemann integrability of locally compact groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102**, 284–92. *MR*: **24**, #A3438 (1962).

Choczewski B., Kuczma M. Sur certaines équations fonctionnelles considérées par I. Stamate. *Mathematica (Cluj)*, **4**(27), 225–33. MR: **29**, #5013 (1965).

Daróczy Z.

(a) Über die Funktionalgleichung $\phi[\phi(x)y] = \phi(x)\phi(y)$. *Acta Univ. Debrecen Ser. Fiz. Chem.*, **8**, 125–32.

(b) Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von Rényi, Z. *Wahrsch. Verw. Gebiete*, **1**, 381–8. MR: **32**, #9141 (1966).

Djoković D.Ž. Sur l'équation fonctionnelle $f(x_3, x_1 + x_2) - f(x_1, x_2 + x_3) + f(x_2, x_1) - f(x_2, x_3) = 0$. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1962**, No. 70–76, 7–8. MR: **26**, #6631 (1963).

Friedman A., Littman W.

(a) Bodies for which harmonic functions satisfy the mean value property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102**, 147–66. MR: **27**, #1611 (1964).

(b) Functions satisfying the mean value property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **102**, 167–180. MR: **27**, #1612 (1964).

Friedman D. The functional equation $f(x + y) = g(x) + h(y)$. *Amer. Math. Monthly*, **69**, 769–72.

Garsia A.M. A note on the mean value property. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102**, 181–6. MR: **27**, #1613 (1964).

Haruki H. Another proof of Kaczmarz's theorem. *Sci. Rep. Osaka Univ.*, **11**, 1–2.

Hosszú M. Note on commutable mappings. *Publ. Math. Debrecen*, **9**, 105–6. MR: **26**, #504 (1963).

Ionescu-Tulcea A., Ionescu-Tulcea C. On the lifting property. I. *J. Math. Anal. Appl.*, **3**, 537–46. MR: **27**, #257 (1964).

Kurepa S.

(a) A cosine functional equation in Banach algebra. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **23**, 255–67. MR: **26**, #2901 (1963).

(b) On the functional equation $T_1(t + s)T_2(t - s) = T_3(t)T_4(s)$. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **2**(16), 99–108. MR: **30**, #507 (1963).

Kuwagaki A. Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy pour les matrices. *J. Math. Soc. Japan*, **14**, 359–66. MR: **26**, #507 (1963).

Radó F. Caractérisation de l'ensemble des intégrales des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre donné. *Mathematica (Cluj)* **4**(27), 131–43. MR: **27**, #2667 (1964).

Rudin W. Fourier analysis on groups. Interscience, N.Y.-L., 1962. MR: **27**, #2808 (1964).

Vincze E.

(a) Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, I. *Publ. Math. Debrecen*, **9**, 149–63. MR: **26**, #503 (1963).

(b) Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, II. *Publ. Math. Debrecen*, **9**, 314–23. MR: **27**, #2749 (1964).

Wendel J. G. Brief proof of a theorem of Baxter. *Math. Scand.*, **11**, 107–8. MR: **26**, #4204 (1963).

1963

Aczél J. Remarks on probable inference. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **6**, 3–11. MR: **29**, #6207 (1965). Aczél J., Daróczy Z. (a) Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14**, 95–121. MR: **32**, #9140 (1966).

(b) Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 171–90. MR: **29**, #6961 (1965).

(c) Sur la caractérisation axiomatique des entropies d'ordre positif, y comprise l'entropie de Shannon. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **257**, 1581–4. MR: **27**, #5635 (1964).

Aczél J., Hosszú M. On concomitants of mixed tensors. *Ann. Polon. Math.* **13**, 163–71. MR: **28**, #545 (1964).

Aczél J., Vincze E. Über eine gemeinsame Verallgemeinerung zweier Funktionalgleichungen von Jensen. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 326–44. MR: **29**, #3782 (1965).

Atkinson F. V. Some aspects of Baxter's functional equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **7**, 1–30. MR: **27**, #5135 (1964).

Bajraktarević M. Sur une généralisation des moyennes quasilineaires. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **3(17)**, 69–76. MR: **30**, #5077 (1965).

Djoković D. Ž. A theorem on semigroups of linear operators. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **3(17)**, 129–30. MR: **30**, 2089 (1965).

Dunford N., Schwartz J. T. Linear operators. Part II. Spectral theory. Selfadjoint linear operators in Hilbert space. Interscience, N.Y.-L., 1963. MR: **32**, #6181 (1966). (Рус. перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Ч.2. Спектральная теория. Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1966.)

Eichhorn W. Lösung einer Klasse von Funktionalgleichungssystemen. *Arch. Math. (Basel)*, **14**, 266–70. MR: **27**, #3956 (1964).

Erdős P. On some properties of Hamel bases. *Colloq. Math.*, **10**, 267–9. MR: **28**, #4068 (1964).

Etherington I. M. H. Note on quasigroups and trees. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **13**, 219–22. MR: **28**, #157 (1964).

Flatto L. Functions with a mean value property, II. *Amer. J. Math.* **85**, 248–70. MR: **28**, #1314 (1964).

Flett T. M. Continuous solutions of the functional equation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$. *Amer. Math. Monthly*, **70**, 392–7. MR: **26**, #6635 (1963).

Fuchs L. Partially ordered algebraic systems. Pergamon, Oxford-L.-N.Y.-Paris; Addison-Wesley, Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-L., 1963. MR: **30**, #2090 (1965). (Рус. перевод: Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.)

Haruki H. On some functional equations, I. *Sci. Rep. Osaka Univ.*, **12**, 1–3.

Hewitt E., Ross K. Abstract harmonic analysis. Vol. I. (Grundlehren math. Wiss. V. 115). Academic Press, N.Y.; Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963. MR: **28**, #158 (1964). (Рус. перевод: Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. — М.: Мир, 1975.)

Hosszú M.

(a) On the explicit form of n -group operations. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 88–92. MR: **29**, #4816 (1965).

(b) On a class of functional equations. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **3(17)**, 53–5. MR: **30**, #4080 (1965).

(c) On a functional equation treated by S. Kurepa. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske*, **18**, 59–60. MR: **29**, #2557 (1965).

(d) Die Lösung einer verallgemeinerten Bisymmetriergleichung. *Mathematica (Cluj)*, **5(28)**, 39–44. MR: **32**, #2763 (1966).

Hosszú M., Vincze E. Über den wahrscheinlichsten Wert. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14**, 131–6. MR: **27**, #6291 (1964).

Kucharzewski M., Kuczma M. On the functional equation $F(A \cdot B) = F(A) \cdot F(B)$. *Ann. Polon. Math.*, **13**, 1–18. MR: **27**, #2747 (1964).

Kuczma M. A characterization of the exponential and logarithmic functions by functional equations. *Fund. Math.*, **52**, 283–8. MR: **27**, #1730 (1964).

Losonczi L. Über eine multilineare Funktionalgleichung mit mehreren unbekannten Funktionen. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **3**(17), 47–52. MR: **30**, #2251 (1965).

Phelps R. R. Extreme positive operators and homomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* **108**, 265–74. MR: **27**, #6153 (1964).

Sato T. On the functional equality $|f(x + iy)| = |f(x)||f(iy)|$. *J. College Arts Sci. Chiba Univ.*, **4**, No. 2, 9–10. MR: **32**, #2764 (1966).

Schweizer B., Sklar A. Associative functions and abstract semigroups. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 69–81. MR: **30**, #1201 (1965).

Vincze E.

(a) Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, III. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 191–200. MR: **29**, #3781 (1965).

(b) Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, IV. *Publ. Math. Debrecen*, **10**, 283–318. MR: **29**, #3781 (1965).

1964

Сакович Г. Н.

(a) Функциональные уравнения для сумм экспоненциалов. *Publ. Math. Debrecen*, **11**, 1–10. MR: **30**, #2253 (1965).

(b) Функциональные уравнения для сумм экспоненциалов (укр. яз.). *Доповіди АН УРСР*, 1964, N 6, 714–718.

Aczél J.

(a) Ein Eindeutigkeitssatz in der Theorie der Funktionalgleichungen und einige ihrer Anwendungen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**, 355–62. MR: **30**, #375 (1965).

(b) On a generalization of the functional equations of Pexider. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **4**(18), 77–80. MR: **30**, #2246 (1965).

(c) Zur gemeinsamen Charakterisierung der Entropien α -ter Ordnung und der Shannonschen Entropie bei nicht unbedingt vollständigen Verteilungen. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **3**, 177–83. MR: **30**, #969 (1965).

(d) Some unsolved problems in the theory of functional equations. *Arch. Math. (Basel)*, **16**, 435–44. MR: **30**, #376 (1965).

Andalafte E. Z., Blumenthal L. M. Metric characterization of Banach and Euclidean spaces. *Fund. Math.*, **55**, 23–55. MR: **29**, #2625 (1965).

Bachman G. Introduction to p -adic numbers and valuation theory. Academic Press, N.Y.-L., 1964. MR: **30**, #90 (1965).

Belousov V. D., Hosszú M. Some problems on ternary quasigroups. *Mat. Vesnik*, **1**(16), 319–24. MR: **32**, #2503 (1966).

Carroll F. W. Functions whose differences belong to $L^p[0, 1]$. *Indag. Math.*, **26**, 250–5. MR: **30**, #1226 (1965).

Daróczy Z. Über Mittelwerte und Entropien vollständiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15**, 203–10. MR: **28**, #3271 (1964).

Djoković D. Ž. Generalization of a result of Aczél, Ghermănescu and Hosszú. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **8**, 51–60. MR: **30**, #378 (1965).

Hosszú M.

(a) On local solutions of the generalized functional equation of associativity. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **7**, 129–32. MR: **30**, #4081 (1965).

(b) On the Fréchet's functional equation. *Bul. Inst. Politehn. Iași*, **10**, 27–8. MR: **33**, #2986 (1967).

Howroyd T. D. The solutions of some functional equations. *Canad. Math. Bull.*, **7**, 279–82. MR: **29**, #3779 (1965).

Kucharzewski M., Kuczma M. Basic concepts of the theory of geometric objects. (Rozprawy Mat. V. 43). P.W.N., Warszawa, 1964. MR: **30**, #1467 (1965).

Kuczma M. A survey of the theory of functional equations. *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1964**, No. 130, 1–64. MR: **30**, #5073 (1965).

Kuczma M., Żajitz A. Über die multiplikative Cauchysche Funktionalgleichung. *Arch. Math. (Basel)*, **15**, 136–43. MR: **29**, #381 (1965).

Kurepa S.

(a) The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **19**, 23–36. MR: **30**, #1331 (1965).

(b) On a characterization of the determinant. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **19**, 189–98. MR: **31**, #3436 (1966).

Lee P. M. On the axioms of information theory. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 415–18. MR: **28**, #1990 (1964).

Losonczi L. Bestimmung aller nichtkonstanten Lösungen von linearen Funktionalgleichungen. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **25**, 250–4. MR: **30**, #4084 (1965).

Luce R. D. A generalization of a theorem of dimensional analysis. *J. Math. Psych.*, **1**, 278–84.

Makai I. Über Differentialkomitanten erster Ordnung der homogenen linearen geometrischen Objekte in bezug auf einem kontravarianten Vektorfeld. *Publ. Math. Debrecen*, **11**, 191–241. MR: **30**, #1468 (1965).

Mehdi M. R. On convex functions. *J. London Math. Soc.*, **39**, 321–6. MR: **28**, #5153 (1964).

Meyniew R.

(a) Sur l'équation fonctionnelle vectorielle $f[x(u), y(v), z(u+v)] = 0$, I. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **81**, 77–106. MR: **30**, #5084 (1965).

(b) Sur l'équation fonctionnelle vectorielle $f[x(u), y(v), z(u+u)] = 0$, II. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **81**, 107–63. MR: **30**, #5084 (1965).

Pisot C., Schoenberg I. J. Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation. *Illinois J. Math.*, **8**, 40–56. MR: **30**, #3321 (1965).

Rota G.-C. Reynolds operators. B: *Stochastic processes in mathematical physics and engineering (Proc. Sympos. Appl. Math. 1964. V. 16)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. P. 70–83. MR: **28**, #4349 (1964).

Vajzović F. On the functional equation $T_1(t+s)T_2(t-s) = T_3(t)T_4(s)$. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **4(18)**, 21–7. MR: **30**, #3320 (1965).

Vincze E.

(a) Über eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Funktionalgleichung. *Funkcial. Ekvac.*, **6**, 55–62. MR: **29**, #6211 (1965).

(b) Beitrag zur Theorie der Cauchyschen Funktionalgleichungen. *Arch. Math. (Basel)*, **15**, 132–5. MR: **29**, #390 (1965).

1965

Белюсов В. Д. Системы квазигрупп с обобщёнными тождествами. *УМН*, **20**, 1 (121), 75–146. MR: **30**, #3934 (1965).

Aczél J.

(a) Quasigroups — nets — nomograms. *Advances in Math.*, **1**, 383–450. MR: **33**, #1395 (1967).

(b) The Monteiro-Botelho-Teixeira axiom and a «natural» topology in abelian semigroups. *Portugal. Math.*, **24**, 173–7. MR: **35**, #4320 (1968).

(c) The general solution of two functional equations by reduction to functions additive in two variables and with aid of Hamel-bases. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **20**, 65–73. MR: **33**, #6182 (1967).

Aczél J., Erdős P. The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for nonnegative numbers. *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 259–63. MR: **32**, #4022 (1966).

Aczél J., Hosszú M. Further uniqueness theorems for functional equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16**, 51–5. MR: **32**, #300 (1966).

Bajraktarević M. Quelques remarques sur ma note «Sur une généralisation des moyennes quasilineaires». *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **5** (19), 97–8. MR: **32**, #6091 (1966).

Bellman R. Functional equations. B: *Handbook of mathematical psychology*, Vol. III. Wiley & Sons, N.Y.–L.–Sydney, 1965. P. 487–513. MR: **33**, #7144 (1967).

*Belousov V. D., Hosszú M. Some reduction theorems on the functional equation of generalized distributivity. *Bull. of Math.* 1965, **12**, no. 1–4, 175–180. ПЖМат 1966, 10 A183.

Blumenthal R. M., Lindenstrauss J., Phelps R. R. Extreme operators into $C(K)$. *Pacific J. Math.*, **15**, 747–56. MR: **35**, #758 (1968).

Borges R., Pfanzagl J. One-parameter exponential families generated by transformation groups. *Ann. Math. Statist.*, **36**, 261–71. MR: **31**, #835 (1966).

Campbell L. L. A coding theorem and Rényi's entropy. *Inform. and Control*, **8**, 423–9. MR: **31**, #4638 (1966).

Carroll F. W. A difference property for polynomials and exponential polynomials on abelian locally compact groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114**, 147–55. MR: **30**, #2101 (1965).

Djoković D. Ž.

(a) General solution of a functional equation. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1965**, No. 132–142, 55–7. MR: **34**, #521 (1967).

(b) A special cyclic functional equation. *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1965**, No. 143–155, 45–50. MR: **34**, #8022 (1967).

Gotčb S. Einige grundlegende Fragen der Theorie der Funktionalgleichungen. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **20**, 58–63. MR: **33**, #4510 (1967).

Gotčb S., Losonczi L. Über die Funktionalgleichung der Funktion Arcosinus, I. *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 159–74. MR: **32**, #4416 (1966).

Henney D. R. N -parameter semigroups. *Portugal. Math.*, **24**, 30–7. MR: **33**, #4177 (1967).

Hille E.

(a) Topics in classical analysis. B: *Lectures on modern mathematics*, V. III. Wiley & Sons, N.Y., 1965. P. 1–57. MR: **31**, #2357 (1966).

(b) What is a semigroup? B: *Studies in real and complex analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965. P. 55–66. MR: **32**, #1080 (1966).

Hosszú M.

(a) Some functional equations in connection with a theorem of Dubordieu. *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 181–7. MR: **33**, #2987 (1967).

(b) Über eine Verallgemeinerung der Distributivitätsgleichung. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **26**, 103–7. MR: **31**, #2345 (1966).

Jong J. K. A class of linear functional equations. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1965**, No. 143–155, 39–44. MR: **34**, #4742 (1967).

Jurkat W. B. On Cauchy's functional equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**, 683–86. MR: **31**, #3744 (1966).

Kiesewetter H. Über die arc tan-Funktionalgleichung, ihre mehrdeutigen, stetigen Lösungen und eine nichtstetige Gruppe. *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena Math.-Natur. Reihe*, **14**, 417–21. MR: **38**, #2468 (1969).

Kotz S. On the solutions of some «isomoment» functional equations. *Amer. Math. Monthly*, **72**, 1072–5. MR: **34**, #6367 (1967).

Kucharzewski M., Kuczma M. Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte von Typus J mit drei Komponenten. (Rozprawy Mat. V. 48). P.W.N., Warszawa, 1965, MR: **31**, #3966 (1966).

Kuczma M.

(a) Bemerkungen über die Klassifikation der Funktionalgleichungen. *Prace Mat.*, **9**, 169–83. MR: **33**, #456 (1967).

(b) Einige Sätze über die Reduktion der Ordnung der Funktionalgleichungen. *Prace Mat.*, **9**, 185–92. MR: **33**, #457 (1967).

Kurepa S.

(a) Remarks on the Cauchy functional equation. *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, **5** (19), 85–8. MR: **32**, #4418 (1966).

(b) Note on additive functions. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **20**, 75–8. MR: **33**, #458 (1967).

(c) Quadratic and sesquilinear functionals. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **20**, 79–92. MR: **33**, #1610 (1967).

(d) On a nonlinear functional equation. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske* (2), **20**, 243–9. MR: **37**, #4451 (1969).

Ling C. H. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen* **12**, 189–212. MR: **32**, #7987 (1966).

Makai I. Cauchy-Gleichungen für Quaternionenfunktionen. *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 235–58. MR: **32**, #459 (1967).

Miller J. B. Möbius transforms of Reynolds operators. *J. Reine Angew. Math.*, **218**, 6–16. MR: **31**, #610 (1966).

Moszner Z. Solution générale de l'équation $F(x, y)F(y, z) = F(x, z)$ pour $x \leq y \leq z$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, **261**, 28. MR: **31**, #3749 (1966).

Pfanzagl J. A general theory of measurement — applications to utility. B: *Readings in mathematical psychology*, V. II. Wiley & Sons, N.Y.–L.–Sydney, 1965. P. 492–502. MR: **33**, #7146 (1967).

Pisot C., Schoenberg I. J. Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation, II. *Illinois J. Math.*, **9**, 129–36. MR: **30**, #3323 (1965).

Popa C. G. Sur l'équation fonctionnelle $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$. *Ann. Polon. Math.*, **17**, 193–198. MR: **32**, #4420 (1966).

Rényi A. On the foundations of information theory. *Rev. Inst. Internal. Statist.*, **33**, 1–14. MR: **31**, #5712 (1966).

Świątak H. On the equation $[\phi(x + y)]^2 = [\phi(x)g(y) + \phi(y)g(x)]^2$. *Zeszyty Nauk. Univ. Jagielloń.*, *Prace Mat.*, **10**, 97–104. MR: **34**, #527a (1967).

Vasić P. M., Dordević R. Ž. Sur l'équation fonctionnelle cyclique généralisée. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1965**, No. 132–142, 33–8. MR: **32**, #4421 (1966).

1966

Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах. *Матем. сб.*, **70**(112), 55–97. MR: **34**, #2757 (1967).

Белоусов В. Д., Рыжсков В. В. Об одном способе получения фигур замыкания. *Матем. исслед.*, **1**, 2, 140–50. MR: **36**, #6526 (1968).

* *Белоусов В. Д., Сандик М. Д.* n -арные квазигруппы и лупы. *Сиб. матем. ж.*, **7**: 1, 31–54. MR: **34**, #4403 (1967).

Aczél J.

(a) On strict monotonicity of continuous solutions of certain types of functional equations. *Canad. Math. Bull.*, **9**, 229–32. MR: **33**, #7729 (1967).

(b) Funktionskomposition, Iterationsgruppen und Gewebe. *Arch. Math. (Basel)*, **17**, 469–75. MR: **34**, #3473 (1967).

(c) Lectures on functional equations and their applications. (Mathematics in Science and Engineering. V. 19). Academic Press, N.Y.–L., 1966. MR: **34**, #8020 (1967).

Aczél J., Pickert G. Nichtkommutative monotone Gruppen reeller Zahlen. Arch. Math. (Basel), **17**, 292–7. MR: **36**, #3855 (1968).

Bass J., Dhombres J. Moyennes des fonctions. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A. **262**, 29–31. MR: **33**, #4674 (1967).

de Bruijn N. G. On almost additive functions. Colloq. Math., **15**, 59–63. MR: **33**, #4221 (1967).

Campbell L. L. Definition of entropy by means of a coding problem. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **6**, 113–18. MR: **34**, #7266 (1967).

Climescu A.

(a) Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale, I. Bul. Inst. Politehn. Iași, **12**(16), No. 1–2, 1–6. MR: **36**, #558 (1968).

(b) Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale, II. Bul. Inst. Politehn. Iași, **12**(16), No. 3–4, 1–6. MR: **36**, #558 (1968).

Daróczy Z., Györy K. Die Cauchysche Funktionalgleichungen über diskrete Mengen. Publ. Math. Debrecen, **13**, 249–56. MR: **34**, #6364 (1967).

Eichhorn W. Über die multiplikative Cauchysche Funktionalgleichung für die Hamiltonschen Quaternionen und die Cayleyschen Zahlen. J. Reine Angew. Math., **221**, 2–13. MR: **32**, #5698 (1966).

Flatto L. On polynomials characterized by a certain mean value property. Proc. Amer. Math. Soc., **17**, 598–601. MR: **33**, #4217 (1967).

Gleason A. M. The definition of a quadratic form. Amer. Math. Monthly, **73**, 1049–56. MR: **34**, #7543 (1967).

Goldb S., Losonczi L. Über die Funktionalgleichung der Funktion Arccosinus, II. Die alternative Gleichung. Publ. Math. Debrecen **13**, 183–5. MR: **34**, #6366 (1967).

Haruki H. On the functional equations $|f(x + iy)| = |f(x) + f(iy)|$ and $|f(x + iy)| = |f(x) - f(iy)|$ and on Ivory's theorem. Canad. Math. Bull., **9**, 473–80. MR: **34**, #3145 (1967).

Havel V. Verallgemeinerte Gewebe, I. Arch. Math. (Brno), **2**, 63–70. MR: **34**, #120 (1967).

Hosszú M. On some functional equations and their classification. Mat. Vesnik, **33** (18) 139–45. MR: **35**, 1998 (1968).

Kingman J. F. C. On the algebra of queues. J. Appl. Probability, **3**, 285–326. MR: **34**, #3678 (1967).

Kuczma M., Zajtz A. On the form of real solutions of the matrix functional equation $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ for nonsingular matrices ϕ . Publ. Math. Debrecen, **13**, 257–62. MR: **34**, #3147 (1967).

Kuwagaki A. Sur les équations fonctionnelles généralisées de Cauchy et quelques équations qui s'y rattachent. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, **2**, 397–422. MR: **35**, #2000 (1968).

Miller J. B.

(a) Some properties of Baxter operators. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **17**, 387–400. MR: **34**, #4909 (1967), **35**, 1577 (1968).

(b) Averaging and Reynolds operators on Banach algebras, I. Representation by derivations and antiderivations. J. Math. Anal. Appl., **14**, 527–48. MR: **33**, #3104 (1966), **35**, 1577 (1968).

Moór A., Pintér L. Untersuchungen über den Zusammenhang von Differential- und Funktionalgleichungen, I. Publ. Math. Debrecen, **13**, 207–23. MR: **34**, #6264 (1967).

Soya M. Cosine operator functions. (Rozprawy Mat. V. 49). P.W.N., Warszawa, 1966.

Vajzović F. On a functional which is additive on A -orthogonal pairs. Glas. Mat. Ser. III, **1**(21), 75–81. MR: **34**, #8198 (1967).

Vasić P. M. Sur une équation fonctionnelle de J. K. Jong. Mat. Vesnik, **3**(18), 271–4. MR: **34**, #8025 (1967).

1967

Белюсов В. Д.

(а) Неассоциативные бинарные системы. В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки). — М.: ВИНТИ, 1967. С. 63–81. (English translation in *Progress in Mathematics*. 1969. V. 5. *Algebra*, Plenum, N.Y.-L. P. 57–76. *MR*: **35**, #5537 (1968).

(b) Основы теории квазигрупп и луп. М., «Наука», 1967. *MR*: **36**, #1569 (1968).

Aczél J. General solution of 'isomoment' functional equations. *Amer. Math. Monthly*, **74**, 1068–71. *MR*: **37**, #4440 (1969).

Aczél J., McKiernan M. A. On the characterization of plane projective and complex Moebius-transformations. *Math. Nachr.*, **33**, 315–37. *MR*: **33**, #5806 (1967).

Aczél J., Wallace A. D. A note on generalizations of transitive systems of transformations. *Colloq. Math.*, **17**, 29–34. *MR*: **36**, #867 (1968).

Alexandrov A. D. A contribution to chronogeometry. *Canad. J. Math.*, **19**, 1119–28. *MR*: **36**, #2101 (1968).

Climescu A. Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale. III. *Bul. Inst. Politehn. Iași (N.S.)*, **13(17)**, No. 1–2, 23–4. *MR*: **38**, #444 (1969).

Corrádi K. A., Kátai I. On multiplicative characters. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **28**, 71–6. *MR*: **35**, #2838 (1968).

Daróczy Z.

(а) Über eine Charakterisierung der Shannonschen Entropie. *Statistica*, **27**, 189–205. *MR*: **35**, #7727 (1968).

(b) Über eine Klasse von Funktionalgleichungen im Hilbert-Raum. *Enseign. Math.* (2), **13**, 99–102. *MR*: **36**, #5555 (1968).

Daróczy Z., Losonczi L. Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen. *Publ. Math. Debrecen*, **14**, 239–45. *MR*: **39**, #1839 (1970).

Denny J. L. Sufficient conditions for a family of probabilities to be exponential. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **57**, 1184–7. *MR*: **35**, #2396 (1968).

Dhombres J. Sur une classe de moyennes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **17**, 135–56. *MR*: **36**, #5730 (1968).

Djoković D. Ž. Triangle functional equation and its generalization. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1967**, No. 181–196, 47–52. *MR*: **37**, #1830 (1969).

Fischer P., Muszély G. On some new generalizations of the functional equation of Cauchy. *Canad. Math. Bull.*, **10**, 197–205. *MR*: **35**, #7025 (1968).

Haruki H. On a well-known improper integral. *Amer. Math. Monthly*, **74**, 846–8.

Havrdá J., Charvát F. Quantification method of classification processes. Concept of structural α -entropy. *Kybernetika (Prague)*, **3**, 30–5. *MR*: **34**, #8875 (1967).

Kátaí I. A. remark on additive arithmetical functions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **12**, 81–3. *MR*: **41**, #1666 (1971).

Kuczma M., Zajtz A. Quelques remarques sur l'équation fonctionnelle matricielle multiplicative de Cauchy. *Colloq. Math.*, **18**, 159–68. *MR*: **36**, #5554 (1968).

Kurepa S. Конечномерные пространства и их применения (сербо-хорв.). *Tehnička Knjiga, Zagreb*, 1967.

Kuwagaki A. Теория функциональных уравнений (япон.). Asakura, Tokyo, 1967.

Lukacs E. Analytical methods in probability theory. В: *Symposium on Probability Methods in Analysis. (Lecture Notes in Math. 1967. V. 31).* Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y. P. 207–38. *MR*: **36**, #2192 (1968).

Máté A. A new proof of a theorem of P. Erdős. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18**, 159–62. *MR*: **34**, #4234 (1967).

McKiernan M. A. On vanishing n -th order differences and Hamel bases. *Ann. Polon. Math.*, **19**, 331–6. *MR*: **36**, #4183. (1968).

Miller J. B. Homomorphisms, higher derivations and derivations on associative algebras. Acta Sci. Math. (Szeged), **28**, 221–31. MR: **35**, #2927 (1968).

Monroe I. On the generalized Cauchy equation. Canad. J. Math., **19**, 1314–18. MR: **36**, #4188 (1968).

Neumann H. Varieties of groups. (Ergebnisse Math., No. 37). Springer, N.Y., 1967. MR: **35**, #6734 (1968). (Рус. перевод: *Нейман Х.* Многообразия групп. — М.: Мир, 1969.).

Saaty T. L. Modern nonlinear equations. Chapter 3. McGraw-Hill. N.Y.-St. Louis-San Francisco-Toronto-L.-Sydney, 1967. MR: **36**, #1249 (1968).

Schweizer B. Probabilistic metric spaces — the first 25 years. N.Y. Statist., **19**, No. 2, 3–6.

Schweizer B., Sklar A. The algebra of multiplace vectorvalued functions. Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 510–15. MR: **35**, #4138 (1968).

Świątak H. On the functional equations $f_1(x_1 + \dots + x_n)^2 = [\sum_{(i_1, \dots, i_n)} f_1(x_{i_1}) \dots \dots f_n(x_{i_n})]^2$. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. math., **10**, 49–52. MR: **39**, #3180 (1970).

Targonski G. Seminar on functional operators and equations. (Lecture Notes in Math. V. 33). Springer, Berlin-Heidelberg-N.Y., 1967. MR: **36**, #744 (1968).

Vajzović F. Über das Funktional H mit der Eigenschaft $(x, y) = 0 \implies H(x + y) + H(x - y) = 2H(x)H(y)$. Clas. Mat. Ser. III, **2(22)**, 73–80. MR: **36**, #4326 (1968).

Wetzel J. E. On the functional inequality $f(x + y) \geq f(x)f(y)$. Amer. Math. Monthly, **74**, 1065–8. MR: **37**, #4444 (1969).

Wilansky A. Additive functions. B: Lectures on calculus. Holden Day, San Francisco-Cambridge-L.-Amsterdam, 1967. P. 97–124.

1968

*Белоусов В. Д., Сандик М. Д. О функциональном уравнении Диккера. Исслед. по общей алгебре, Кишинёв, 1968, вып. 1, 36–44. РЖМат 1970, 9 А187.

Aczél J. On different characterizations of entropies. B: Probability and information theory (Proc. Internal. Sympos., McMaster Univ., 1968). (Lecture Notes in Math. V. 89). Springer, Berlin-Heidelberg-N.Y. 1969. P. 1–11. MR: **43**, #5991 (1972).

Aczél J., Fischer P. Some generalized 'isomoment' equations and their general solutions. Amer. Math. Monthly, **75**, 952–8. MR: **38**, #4841 (1969).

Aczél J., Haruki H., Mckiernan M. A., Saković G. N. General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials. Aequationes Math., **1**, 37–53. MR: **43**, #5193 (1972).

Bajraktarević M. Quelques remarques sur les solutions générales de certaines équations fonctionnelles aux plusieurs inconnues. Mat. Vesnik, **5(20)**, 497–503. MR: **39**, #1840 (1970).

Baker J. A. On quadratic functionals along rays. Glas. Mat. Ser. III, **3(23)**, 215–29. MR: **41**, #669 (1971).

Baker J. A., Segal S. L. On a problem of Kemperman concerning Hamel-functions (P2851). Aequationes Math., **2**, 114–5. MR: **39**, #664 (1970).

*Belousov V. D. Some remarks on functional equation of generalized distributivity. Aequat. math., **1**: 1/2, 54–65. РЖМат 1969, 4Б14.

Benz W. Die 4-Punkt-Invarianten in der projektiven Geraden über einem Schiefkörper. Ann. Polon. Math., **21**, 97–101. MR: **38**, #510b (1969).

Climescu A. Un théorème de transfert pour certaines équations fonctionnelles. Bul. Inst. Politehn. Iași, Sect. I, **14(18)**, No. 1–2, 19–22. MR: **38**, #5684 (1969).

Daróczy Z. Über eine Funktionalgleichung im Hilbertraum. Publ. Inst. Math. (Beograd), **8**(22), 121–3. MR: **37**, #3234 (1969).

Dhombres J. Opérateurs semi-multiplicatifs de norme unité. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **266**, 1046–9. MR: **38**, #557 (1969).

Eichhorn W.

(a) Über die multiplikativen Abbildungen endlichdimensionaler Algebren in kommutative Halbgruppen. J. Reine Angew. Math., **231**, 10–46. MR: **38**, #197 (1969).

(b) Funktionalgleichungen in Vektorräumen, Kompositionsalgebren und Systeme partieller Differentialgleichungen. Aequationes Math., **2**, 287–303. MR: **39**, #4240 (1970).

Fischer P. Sur l'équivalence des équations fonctionnelles $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f^2(x+y) = [f(x) + f(y)]^2$. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **1968**, 71–3. MR: **40**, #1729 (1970).

Forder H. G. Groups from one axiom. Math. Gaz., **52**, 263–6. MR: **38**, #3325 (1969).

Fox R. A. S., Miller J. B. Averaging and Reynolds operators on Banach algebras, III. Spectral properties of Reynolds operators. J. Math. Anal. Appl., **24**, 225–38. MR: **38**, #561 (1969).

Gallager C. G. Information theory and reliable communication. Wiley & Sons, N.Y.–L.–Sydney–Toronto, 1968. (Рус. перевод: Галлагер Р. Дж. Теория информации и надёжная связь. М., Сов. радио, 1974.).

Gamlen J. L. B., Miller J. B. Averaging and Reynolds operators on Banach algebras, II. Spectral properties of averaging operators. J. Math. Anal. Appl., **23**, 183–97. MR: **37**, #3365 (1969).

Good I. J. Corrigendum: Weight of evidence, corroboration, explanatory power, information and the utility of experiments. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, **30**, 203. MR: **37**, #4919 (1969).

Haruki H.

(a) On parallelogram functional equations. Math. Z., **104**, 358–63. MR: **37**, #1828 (1969).

(b) On inequalities generalizing the Pythagorean functional equation and Jensen's functional equation. Pacific J. Math., **20**, 85–90. MR: **37**, #6633 (1969).

Javor P. On the general solution of the functional equation $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$. Aequationes Math., **1**, 235–238. MR: **38**, #3644 (1969).

Jessen B. The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem. Math. Scand., **22**, 241–56. MR: **40**, #4860 (1970).

Jessen B., Karpf J., Thorup A. Some functional equations in groups and rings. Math. Scand., **22**, 257–65. MR: **44**, #1963 (1972).

Johnson B. E., Sinclair A. M. Continuity of derivations and a problem of Kaplansky. Amer. J. Math., **90**, 1067–73. MR: **39**, #776 (1970).

Jong J. K. A generalization of a linear functional equation. Univ. Beograd. Publ. Elektrohn. Fak. Ser. Mat. Fiz., **1968**, No. 232, 13–20. MR: **39**, #7316 (1970).

Kannappan Pl.

(a) The functional equation $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y)$ for groups. Proc. Amer. Math. Soc., **19**, 69–74. MR: **36**, #3006 (1968).

(b) A functional equation for the cosine. Canad. Math. Bull., **11**, 495–8.

Kucharzewski M.

(a) Über eine axiomatische Auszeichnung der Determinanten. Ann. Polon. Math., **20**, 199–202. MR: **36**, #3798 (1968).

(b) Charakterisierung des Flächeninhalts mit Hilfe der Funktionalgleichungen. Ann. Polon. Math., **21**, 59–65. MR: **38**, #6470 (1969).

Kuczma M. Functional equations in a single variable. (Monografie Mat. V. 46). P.W.N., Warszawa, 1968. MR: **37**, #4441 (1969).

Lukacs E. Non-negative definite solutions of certain differential and functional equations. *Aequationes Math.*, **2**, 137–43. *MR*: **39**, #4539 (1970).

Miller J. B. A formula for the resolvent of a Reynolds operator. *J. Austral. Math. Soc.*, **8**, 447–56. *MR*: **38**, #540 (1969).

Pearson K. R.

(a) Certain topological semigroups in R_1 . *J. Austral. Math. Soc.*, **8**, 171–82. *MR*: **37**, #1509 (1969).

(b) Embedding semirings in semirings with multiplicative unit. *J. Austral. Math. Soc.*, **8**, 183–91. *MR*: **37**, #1510 (1969).

Pelczyński A. Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classifications of spaces of continuous functions. (*Dissertationes Math. Rozprawy Mat.* V. 58). Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968. *MR*: **37**, #3335 (1969).

Pfanzagl J. Theory of measurement. *Physica-Verlag, Würzburg-Vienna; Wiley & Sons, N.Y.*, 1968. *MR*: **40**, #4180 (1970).

Randolph J. F. Basic real and abstract analysis. Chapter 6. *Academic Press, N.Y.-L.*, 1968. *MR*: **37**, #1211 (1969).

Senechalle D. A. A characterization of inner product spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**, 1306–12. *MR*: **39**, #761 (1970).

Sigmon K. Medial topological groupoids. *Aequationes Math.*, **1**, 217–34. *MR*: **39**, #1586 (1970).

Smital J. On the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13**, 555–61. *MR*: **38**, #2472 (1969).

Świątek H. On the functional equation $f(x+y-xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$. *Mat. Vesnik*, **5(20)**, 177–82. *MR*: **38**, #4844 (1969).

Vajda I. Аксиомы для α -энтропии обобщённой вероятностной схемы (чешск.). *Kybernetika (Prague)*, **4**, 105–12. *MR*: **38**, #1947 (1969).

Wirsing E. A characterization of $\log n$ as an additive arithmetic function. B: *INDAM (Roma 1968–69)*. (*Symposia Math.* V. 4). *Academic Press, L.* 1970. P. 45–57. *MR*: **42**, #5932 (1971).

Wołodzko S. Solution générale de l'équation fonctionnelle $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$. *Aequationes Math.*, **2**, 12–29. *MR*: **38**, #1422 (1969).

1969

* *Белоусов В. Д.* Функциональное уравнение Муфанг. *Матем. исслед.*, **4**: 4, 3–19. Кишинёв, РИО АН МССР. РЖМат 1970, 8А197.

Aczél J.

(a) On applications and theory of functional equations. (*Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus*, Bd. V). *Birkhäuser, Basel; Academic Press, N.Y.*, 1969. *MR*: **39**, #1838 (1970).

(b) Über Zusammenhänge zwischen Differential- und Funktionalgleichungen. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **71**, 55–7. *MR*: **41**, #674 (1971).

Aczél J., Benz W. Kollineationen auf Drei- und Vierecken in der Desarguesschen projektiven Ebene und Äquivalenz der Dreiecksnomogramme und der Dreigewebe von Loops mit der Isotopie-Isomorphie-Eigenschaft. *Aequationes Math.*, **3**, 86–92. *MR*: **40**, #6355 (1970).

Bajraktarević M. Über die Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **4**, 3–8. *MR*: **40**, #275 (1970).

Baker J. A. An analogue of the wave equation and certain related functional equations. *Canad. Math. Bull.*, **12**, 837–46. *MR*: **40**, #7663 (1970).

- Carroll F. W., Koehl F. S.* Difference properties for Banach-valued functions on compact groups. *Indag. Math.*, **31**, 327–32. *MR*: **40**, #1763 (1970).
- Choquet G.* Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory. Benjamin, N.Y.-Amsterdam, 1969. *MR*: **40**, #3253 (1970).
- Daróczy Z.* Über die Funktionalgleichung $f(xy) + f(x + y - xy) = f(x) + f(y)$. *Publ. Math. Debrecen*, **16**, 129–32. *MR*: **41**, #7320 (1971).
- Haruki H.* On a 'cube functional equation'. *Aequationes Math.*, **3**, 156–9. *MR*: **43**, #5194 (1972).
- Hewitt E., Zuckerman H. S.* Remarks on the functional equation $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Math. Mag.*, **42**, 121–3. *MR*: **39**, #7313 (1970).
- Hosszú M.*
- (a) Some remarks on the cosine functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, **16**, 93–8. *MR*: **41**, #5820 (1971).
- (b) A remark on the square norm. *Aequationes Math.*, **2**, 190–3. *MR*: **39**, #7317 (1970).
- Howroyd T. D.* Some uniqueness theorems for functional equations. *J. Austral. Math. Soc.*, **9**, 176–9. *MR*: **39**, #7309 (1970).
- Johnson B. E.* Continuity of derivations on commutative algebras. *Amer. J. Math.*, **91**, 1–10. *MR*: **39**, #7433 (1970).
- Kannappan Pl.* On sine functional equation. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **4**, 331–3. *MR*: **40**, #3100 (1970).
- Kemperman J. H. B.* On the regularity of generalized convex functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135**, 69–93. *MR*: **38**, #1223 (1969).
- Koehl F. S.* Difference properties for Banach-valued functions. *Math. Ann.*, **181**, 288–96. *MR*: **39**, #5775 (1970).
- Kuczma M. E.* On discontinuous additive functions. *Fund. Math.*, **66**, 383–92. *MR*: **41**, #3676 (1971).
- Matras Y.* Sur l'équation fonctionnelle $f[xf(y)] = f(x)f(y)$. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)*, **55**, 731–51. *MR*: **42**, #2204 (1971).
- Miller J. B.* Baxter operators and endomorphisms on Banach algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, **25**, 503–20. *MR*: **39**, #815 (1970).
- Ostrowski A.* Über eine Funktionalgleichung (Bemerkung zur vorstehenden Mitteilung von J. Aczél). *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **71**, 58–9. *MR*: **41**, #675 (1971).
- Radó F.* Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen. *Math. Z.* **110**, 153–70. *MR*: **40**, #1866 (1970).
- Rota G.-C.*
- (a) Baxter algebras and combinatorial identities, I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**, 325–9. *MR*: **39**, #5387 (1970).
- (b) Baxter algebras and combinatorial identities, II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75**, 330–4. *MR*: **39**, #5387 (1970).
- Rota G.-C., Mullin R.* On the foundations of combinatorial theory, III. Theory of binomial enumeration. B: Graph theory and its applications (Proc. Advanced Sem., Math. Research Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1969). Academic Press, N.Y., 1970. P. 167–213. *MR*: **43**, #65 (1972).
- Segal S. L.* Remark to Problem 28 (**P28R1**). *Aequationes Math.*, **2**, 111–12.
- Wirsing E.* Characterisation of the logarithm as an additive function. B: 1969 Number Theory Institute, State Univ. N.Y., Stony Brook, NY. (Proc. Symp. Pure Math. V. 20). Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1971. P. 375–81. *MR*: **54** #256 (1977).

1970

- Александров А. Д.* Об одном обобщении функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Сиб. матем. ж.*, **11**, 2. С. 264–278 = *Siberian Math. J.*, **11**, 198–209. *MR*: **42**, #714 (1971).

*Белюсов В.Д. О функциональном уравнении общей ассоциативности. Мат. записки УрГУ, Свердловск, VII, тетр. 3, 20–35. РЖМат 1971, 3A203.

Aczél J. Some applications of functional equations and inequalities to information measures. B: Functional equations and inequalities [C.I.M.E., III Ciclo, La Mendola, 1970]. Cremonese, Rome, 1971. P. 1–20. MR: 58, #23210 (1979).

Aczél J., Góqb S. Remarks on one-parameter subsemigroups of the affine group and their homo- and isomorphisms. Aequationes Math., 4, 1–10. MR: 41, #8561 (1971).

Baker J.A. A sine functional equation. Aequationes Math., 4, 56–62. MR: 42, #715 (1971).

*Belousov V.D., Kannappan Pl. Generalized Bol functional equation. Pacific. J. Math., 35: 2, 259–265. РЖМат 1971, 7A275.

Blanuša D. The functional equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$. Aequationes Math., 5, 63–7. MR: 43, #5198 (1972).

Cashwell E.D., Everett C.J. Extension of the Riesz representation theorem and solution of the Maxwell-Boltzmann functional equation. Aequationes Math., 5, 315–18. MR: 44, #1960 (1972).

Cooper J.L.B. Functional equations for linear transformations. Proc. London Math. Soc. (3), 20, 1–32. MR: 40, #7870 (1970).

Dacić R. The sine functional equation for groups. Mat. Vesnik, 7(22), 279–84. MR: 43, #5200 (1972).

Daróczy Z. Generalized information functions. Inform. and Control, 16, 36–51. MR: 42, #7409 (1971).

Denny J.L. Cauchy's equation and sufficient statistics on arcwise connected spaces. Ann. Math. Statist., 41, 401–11. MR: 41, #6346 (1971).

Djoković D.Ž. On homomorphisms of the general linear group. Aequationes Math., 4, 99–102. MR: 46, #5460 (1973).

Fattorini H.O. Uniformly bounded cosine functions in Hilbert space. Indiana Univ. Math. J., 20, 411–25. MR: 42, #2319 (1971).

Fenyő I. Über die Funktionalgleichung $f(a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy) + g(b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy) = h(x) + k(y)$. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 21, 35–46. MR: 58, #29526 (1979).

Ger R., Kuczma M. On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions. Aequationes Math., 4, 157–62. MR: 41, #8650 (1971).

Góqb S. Functional equations in geometry. Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. 14, 13–19.

Góqb S., Krzeszowiak Z. Les équations fonctionnelles et la théorie des groupes. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 15, 1395–406. MR: 43, #760 (1972).

Hamilton J. Remarks 31 on the translation equation. Aequationes Math., 4, 254–5.

Hille E. Meanvalues and functional equations. B: Functional equations and inequalities (C.I.M.E., III Ciclo, La Mendola, 1970). Cremonese, Rome, 1971. P. 153–62. MR: 58, #23210 (1979).

Howroyd T.D.

(a) On the equivalence of a functional equation in n variables with n functional equations in a single variable. Aequationes Math., 4, 191–7. MR: 41, #7327 (1971).

(b) The uniqueness of bounded or measurable solutions of some functional equations. J. Austral. Math. Soc., 11, 186–90. MR: 41, #8857 (1971).

Kannappan Pl., Kurepa S. Some relations between additive functions-I. Aequationes Math., 4, 163–75. MR: 41, #8858 (1971).

Kiesewetter H. Ein Zusammenhang zwischen assoziativen und zyklisch-bisymmetrischen Verknüpfungen. Aequationes Math., 4, 83–8. MR: 42, #4912 (1971).

Kuczma M. Some remarks about additive functions on cones. Aequationes Math., 4, 303–6. MR: 42, #8121 (1971).

Kurepa S. Functional equations on vector spaces. B: Functional equations and inequalities (C.I.M.E., III Ciclo, La Mendola, 1970). Cremonese, Rome, 1971. P. 215–31. *MR*: **58**, #23210 (1979).

Larsen R. The functional equation $f(t)f(s)g(ts) = g(t)g(s)$. *Aequationes Math.*, **5**, 47–53. *MR*: **44**, #1964 (1972).

McKiernan M. A. Difference and mean value type functional equations. B: Functional equations and inequalities (C.I.M.E., III Ciclo, La Mendola, 1970). Cremonese, Rome, 1971. P. 259–86. *MR*: **58**, #23210 (1979).

Miller J. B.

(a) Aczél's uniqueness theorem and cellular internity. *Aequationes Math.* **5**, 319–25. *MR*: **45**, #2359 (1973).

(b) Higher derivations on Banach algebras. *Amer. J. Math.*, **92**, 301–31. *MR*: **44**, #4520 (1972).

Ng C. T. Uniqueness theorems for a general class of functional equations. *J. Austral. Math. Soc.*, **11**, 362–6. *MR*: **42**, #3457 (1971).

Rätz J.

(a) Zur Definition der Lorentztransformationen. *Math.-Phys. Semesterber.*, **17**, 163–7. *MR*: **42**, #3094 (1971).

(b) On isometries of inner product spaces. *SIAM J. Appl. Math.*, **18** (1970), 6–9. *MR*: **41**, #4214 (1971).

Rényi A. Probability theory. (Transl. from Hungarian by L. Vekardi). (North Holland Series Appl. Math., Mech. V. 10), North Holland, Amsterdam–L.; American Elsevier, N.Y., 1970. *MR*: **47**, #4296 (1974).

Sigmon K. Cancellative medial means are arithmetic. *Duke Math. J.*, **37**, 439–45. *MR*: **43**, #407 (1972).

Świątek H., Hosszú M.

(a) Remarks on the functional equation $e(x, y)f(xy) = f(x) + f(y)$. *Publ. Techn. Univ. Miskolc.*, **30**, 323–5.

(b) Notes on functional equations of polynomial form. *Publ. Math. Debrecen.* **17**, 61–6. *MR*: **47**, #674 (1974).

Vincze E. Über ein Funktionalgleichungsproblem von E. Hille. *Arch. Math. (Basel)*, **21**, 498–501. *MR*: **43**, #2378 (1972).

Ward L. E. Sr.

(a) Solution of elementary problem E2176. *Amer. Math. Monthly*, **77**, 310–11.

(b) Editorial note, solution of elementary problem E2176. *Amer. Math. Monthly*, **77**, 767–8.

1971

Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в алгебрах с квазигрупповыми операциями. II. Матем. исслед., **6**, 1, 3–40. Кишинёв, РИО АН МССР. РЖМат. 1971, 11 А255.

* *Белоусов В. Д.* К функциональному уравнению Муфанг. Вопросы теории квазигрупп и луп, 11–20. Кишинёв, РИО АН МССР. РЖМат. 1971, 7А279.

Aczél J.

(a) Some recent applications of functional equations to semigroups. *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **1971**, No. 94, 35–48. *MR*: **47**, #2217 (1974).

(b) Some recent applications of functional equations to geometry. *J. Geometry*, **11**, 127–42. *MR*: **48**, #7106 (1974).

Aczél J., Baker J. A., Djoković D. Ž., Kannappan Pl., Radó F. Extensions of certain homomorphisms of subsemigroups to homomorphisms of groups. *Aequationes Math.*, **6**, 263–71. *MR*: **45**, #2004 (1973).

Baker J. A.

(a) Regularity properties of functional equations. *Aequationes Math.*, **6**, 243–8. *MR*: **45**, #2360 (1973).

(b) D'Alembert's functional equation in Banach algebras. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **32**, 225–34. *MR*: **48**, #746 (1974).

Bednarek A. R., Wallace A. D. The functional equation $(xy)(yz) = xz$. *Rev. Roumaine Math. Pures. Appl.*, **16**, 3–6. *MR*: **44**, #353 (1972).

Buche A. B. On the cosine-sine operator functional equations. *Aequationes Math.* **6**, 231–4. *MR*: **45**, #961 (1973).

Daróczy Z. On the general solution of the functional equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$. *Aequationes Math.*, **6**, 130–2. *MR*: **45**, #2352 (1973).

Dhombres J.

(a) Quelques équations fonctionnelles provenant de la théorie des moyennes. *C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A*, **273**, 989–91. *MR*: **44**, #4119 (1972).

(b) Sur les opérateurs multiplicativement liés. (*Bull. Soc. Math. France Mém.*, No. 277). *Soc. Math. France, Paris*, 1971. *MR*: **58**, #30450 (1979).

Eichhorn W. Effektivität von Produktionsverfahren. *Operations Research Verfahren*, **12**, 98–115.

Ger R. On some properties of polynomial functions. *Ann. Polon. Math.*, **25**, 195–203. *MR*: **46**, #4035 (1973).

Haruki H. On a relation between the «square» functional equation and the «square» mean-value property. *Canad. Math. Bull.*, **14**, 161–5. *MR*: **47**, #7263 (1974).

Horinouchi S., Kannappan Pl. On the system of functional equations $f(x + y) = f(x) + f(y)$ and $f(xy) = p(x)f(y) + q(y)f(x)$. *Aequationes Math.*, **6**, 195–201. *MR*: **45**, #7338 (1973).

Hosszú M. On the functional equation $F(x + y, z) + F(x, y) = F(x, y + z) + F(y, z)$. *Period. Math. Hungar.*, **1**, 213–16. *MR*: **44**, #7176 (1972).

Howroyd T. D. Some existence theorems for functional equations in many variables and the characterization of weighted quasiarithmetic means. *Aequationes Math.*, **7**, 1–15. *MR*: **45**, #7337 (1973).

Iitzkowitz G. L. Measurability and continuity for a functional equation on a topological group. *Aequationes Math.*, **7**, 194–8. *MR*: **47**, #5477 (1974).

Krantz D. H., Luce R. D., Suppes P., Tversky A. Foundations of measurement. V. 1. Additive and polynomial representations. *Academic Press, N.Y.-L.*, 1971. *MR*: **56**, #17265 (1978).

Kurepa S. Quadratic functionals conditioned on an algebraic basic set. *Glas. Mat. Ser. III*, **6**(26), 265–75. *MR*: **46**, #7278(1973).

Losonczi L. Über eine neue Klasse von Mittelwerten. *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **32**, 71–81. *MR*: **47**, #421 (1974).

Maier W., Kiesewetter H. Funktionalgleichungen mit analytischen Lösungen. (*Studia Mathematica — Mathematische Lehrbücher, Band 20*). *Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen-Zürich*, 1971. *MR*: **48**, #2359 (1974).

Paganoni L. Существование решений одного общего класса функциональных уравнений (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*. **105** (1971), 891–906. *MR*: **46**, #2289 (1973).

Paganoni Marzegalli S.

(a) Теоремы единственности для функционального уравнения $f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ в метрических пространствах (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), **50**, 438–43. *MR*: **46**, #4044 (1973).

(b) Обобщение некоторых теорем единственности на один широкий класс функциональных уравнений в векторных топологических пространствах (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **105**, 713–20. *MR*: **46**, #570 (1973).

Rätz J. Zur Linearität verallgemeinerter Modulisometrien. *Aequationes Math.*, **6**, 249–55. *MR*: **48**, #4048 (1974).

Reich S. Solution of elementary problem E2176. *Amer. Math. Monthly*, **78**, 675.

Rota G.-C., Smith D.A. Fluctuation theory and Baxter algebras. B: Convegno di Calcolo delle Probabilità (INDAM Roma, 1971). (Symposia Math. V. 9). Academic Press, L. 1972. P. 179–201. *MR*: **49**, #7838 (1975).

Soublin J.-P.

(a) Étude algébrique de la notion de moyenne (chapitre 1). *J. Math. Pures Appl.* (9), **50**, 53–96. *MR*: **45**, #436 (1973).

(b) Étude algébrique de la notion de moyenne (suite). *J. Math. Pures Appl.* (9), **50**, 97–192. *MR*: **45**, #437 (1973).

(c) Étude algébrique de la notion de moyenne (suite et fin). *J. Math. Pures Appl.* (9), **50**, 193–264. *MR*: **45**, 438 (1973).

Świątak H.

(a) A proof of the equivalence of the equation $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$ and Jensen's functional equation. *Aequationes Math.*, **6**, 24–9. *MR*: **45**, #766 (1973).

(b) Criteria for the regularity of continuous and locally integrable solutions of a class of functional equations. *Aequationes Math.*, **6**, 170–87. *MR*: **45**, #763 (1973).

1972

Белоусов В.Д. n -арные квазигруппы. Кишинёв, «Штиинца», 1972. *MR*: **50**, #7396 (1975).

Белоусов В.Д., Рыжков В.В.

(a) Геометрия тканей. I. Дифференциальная геометрия тканей. В сб. *Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки)*. 1972. Т. 10. М., ВИНТИ, С. 159–77.

(b) Геометрия тканей. II. Алгебраические сети (ткани). Там же. С. 178–188, 191. *MR*: **50**, #8318 (1975).

Aczél J.

(a) Sur une équation fonctionnelle liée à la théorie des groupes. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **17**, 819–28. *MR*: **48**, #745 (1974).

(b) Remarque 14. *Aequationes Math.*, **8**, 176.

Aczél J., Nath P. Axiomatic characterizations of some measures of divergence in information. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **21**, 215–24. *MR*: **46**, #5043 (1973).

Aczél J., Vranceanu G. Équations fonctionnelles liées aux groupes linéaires commutatifs. *Colloq. Math.*, **26**, 371–83. *MR*: **49**, #11084 (1975).

Ahsanullah M., Rahman M. A characterization of the exponential distribution. *J. Appl. Probab.*, **9**, 457–61. *MR*: **49**, #8158 (1975).

Belousov V.D. (a) Balanced identities in algebras of quasigroups. *Aequationes Math.*, **8**, 1–73. *MR*: **46**, #7429 (1973).

Benz W. The n -point-invariants of the projective line and crossratio of n -tuples. *Ann. Polon. Math.*, **26**, 53–60. *MR*: **46**, #782 (1973).

Bos W.

(a) Mittelwertstrukturen. *Math. Ann.*, **198**, 317–33. *MR*: **48**, #4765 (1974).

(b) Die Einbettung von Mittelwertstrukturen in Q -Vektorräume. *Math. Z.*, **128**, 207–16. *MR*: **48**, #4766 (1974).

Campbell L.L. Characterization of entropy of probability distributions on the real line. *Inform. and Control*, **21**, 329–38. *MR*: **48**, #1803 (1974).

Carroll F.W. Functions whose differences are integrable. *Aequationes Math.*, **8**, 150–1.

Chein O., Robinson D.A. An «extra» law for characterizing Moufang loops. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33**, 29–32. *MR*: **45**, #2068 (1973).

Dacić D. Функциональное уравнение синуса в случае групп (сербо-хорв.). *Mat. Vesnik*, **9** (24), 49–53. *MR*: **48**, #4564 (1974).

Daróczy Z. Über eine Klasse von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen* **19**, 211–7. *MR*: **48**, #6350 (1974).

Dhombres J.

(a) Moyennes de fonctions et opérateurs multiplicativement liés. B: Actes du colloque d'analyse fonctionnelle (Univ. de Bordeaux, Bordeaux, 1971). (Bull. Soc. Math. France Mém., No. 31–32). Soc. Math. France, Paris, 1972. P. 143–9. *MR*: **52**, #1402 (1976).

(b) Functional equations on semi-groups arising from the theory of means. *Nanta Math.*, **5**, 48–66. *MR*: **49**, #5625 (1975).

(c) Sur les opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres de dimension finie. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B*, **8**, 333–63. *MR*: **50**, #5249 (1975).

Eichhorn W. Systems of functional equations determining the effectiveness of a production process. B: Mathematical models in economics (Proc. Sympos. Warsaw, 1972 and Conf. on von Neumann Models. Warsaw, 1972). North-Holland, Amsterdam, 1974. P. 433–9. *MR*: **51**, #13503 (1976).

Fishburn P. C. Alternative axiomatizations of one-way expected utility. *Ann. Math. Statist.*, **43**, 1648–51. *MR*: **50**, #3886 (1975).

Gołqb S., Świątak H. Note on inner product in vector spaces. *Aequationes Math.*, **8**, 74–5. *MR*: **46**, #4180 (1973).

Guilmard A. Sur l'équation fonctionnelle $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$. *Rev. Math. Spéciales*, **83**, 161.

Hall R. L. On single-product functions with rotational symmetry. *Aequationes Math.*, **8**, 281–6. *MR*: **47**, #7255 (1974).

Hille E. Methods in classical and functional analysis. Addison Wesley, Reading, Mass.-L.-Don Mills, Ont., 1972. *MR*: **57**, #3802 (1979).

Jasińska E. J., Kucharzewski M. Kleinsche Geometrie und Theorie der geometrischen Objekte. *Colloq. Math.*, **26**, 271–9. *MR*: **49**, #3713 (1975).

Kannappan Pl. On some identities. *Math. Student*, **40**, 260–4. *MR*: **54**, #7686 (1977).

Kiszyński J.

(a) On operator-valued solutions of d'Alembert's functional equation. II. *Studia Math.*, **42**, 43–66. *MR*: **47**, #2428b (1974).

(b) On cosine operator functions and one-parameter groups of operators. *Studia Math.*, **44**, 93–105. *MR*: **47**, #890 (1974).

Kucharzewski M., Węgrzynowski S. On scalar concomitants of geometric objects and their transitive domains. *Colloq. Math.*, **26**, 263–9. *MR*: **48**, #12338 (1974).

Kuczma M. Note on additive functions of several variables. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk-Prace Mat.*, **2**, 49–51. *MR*: **46**, #7750 (1973).

Lajkó K. Über die allgemeinen Lösungen der Funktionalgleichung $F(x) + F(y) - F(xy) = H(x+y-xy)$. *Publ. Math. Debrecen*, **19**, 219–23. *MR*: **48**, #11833 (1974).

Lax P., Burstein S., Lax A. Calculus with applications and computing. V. 1. Courant Inst., N.Y., 1972. (Reprinted by Springer, N.Y.-Heidelberg-Berlin, 1976). *MR*: **50**, #7428 (1975).

Levine M. V. Transforming curves into curves with the same shape. *J. Math. Psych.*, **9**, 1–16. *MR*: **45**, #1618 (1973).

Lin Y.-F., McWaters M. M. On the triviality of the law $(xy)(zy) = yz$. *J. London Math. Soc.* (2), **5**, 276–8. *MR*: **46**, #9228 (1973).

Mauclaire J.-L. Sur la régularité des fonctions additives. *Enseign. Math.* (2) **18**, 167–74. *MR*: **48**, #3898 (1974).

Mosznar Z.

(a) Structure de l'automate plein, réduit et inversible. *Aequationes Math.* **8**, 155–7. *MR*: **47**, #3585 (1974).

(b) Sur le prolongement des objets géométriques transitifs. *Tensor* (N.S.), **26**, 239–42. *MR*: **48**, #4938 (1974).

Nordon J. Sur une équation fonctionnelle. *Rev. Math. Spéciales*, **83**, 89–90.

Paganoni L.

(a) Метод неподвижной точки для функциональных уравнений вида $f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$ (итал.). *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **52**, 675–81. *MR*: **49**, #3367 (1975).

(b) Теоремы единственности для одного общего класса функциональных уравнений (итал.). *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **6**, 450–61. *MR*: **47**, #9112 (1974).

Pokropp F. Aggregation von Produktionsfunktionen. Klein-Nataf-Aggregation ohne Annahmen über Differenzierbarkeit und Stetigkeit. (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. 1972. V. 74). Springer, Berlin—N.Y. *MR*: **50**, #1704 (1975).

Sharir M. Characterization and properties of extremal operators into $C(Y)$. *Israel J. Math.*, **12**, 174–8. *MR*: **47**, #5574 (1974).

Smital J. On boundedness and discontinuity of additive functions. *Fund. Math.*, **76**, 245–53. *MR*: **47**, #9109 (1974).

Sundaresan K. Orthogonality and nonlinear functions on Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **34**, 187–90. *MR*: **45**, #925 (1973).

Székeleyhidi L. Общее представление аддитивной функции на открытом точечном множестве (венг.). *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **21**, 503–9. *MR*: **48**, #4561 (1974).

Tan P. Functional equations in mathematical statistics. *Math. Mag.*, **45**, 179–83.

Taylor M. A.

(a) Relational systems with a Thomsen or Reidemeister cancellation condition. *J. Math. Psych.*, **9**, 456–8. *MR*: **47**, #4665 (1974).

(b) The generalized equations of bisymmetry, associativity and transitivity on quasigroups. *Canad. Math. Bull.*, **15**, 119–24. *MR*: **51**, #8317 (1976).

Traynor T. Decomposition of group-valued additive set functions. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **22**, 131–40. *MR*: **48**, #11439 (1974).

Ušan J. Globally associative systems of ternary quasigroups. *Math. Balkanica*, **2**, 270–87. *MR*: **48**, #4179 (1974).

Zajtz A.

(a) Automorphisms of differential groups. *Colloq. Math.*, **26**, 241–8. *MR*: **49**, #11556 (1976).

(b) Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte von Typus J mit messbarer Transformationsregel. *Ann. Polon. Math.*, **26**, 31–43. *MR*: **50**, #14536 (1975).

Zdun M. C. On the uniqueness of solutions of the functional equation $\psi(x + f(x)) = \psi(x) + \psi(f(x))$. *Aequationes Math.*, **8**, 229–32. *MR*: **47**, #3869 (1974).

1973

Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., Наука, 1972. *MR*: **49**, #11689 (1975).

Морита К. Номография в Японии, «Номограф. сб.», N 9. С. 3–8, 190. М., Выч. центр АН СССР, 1973. *MR*: **50**, #6759 (1975).

Aczél J. Zusammenhang zwischen einer Abelschen Kurvenkonstruktion und der Thom-sen Figur. *Demonstratio Math.*, **6**, 71–5. *MR*: **50**, #336 (1975).

Baron K., Ger R. On Mikusiński–Pexider functional equation. *Colloq. Math.*, **28**, 307–12. *MR*: **49**, #3365 (1975).

Bellman R., Giertz M. On the analytic formulation of the theory of fuzzy sets. *Inform. Sci.*, **5**, 149–56. *MR*: **48**, #2417 (1977).

Bos W. Die Charakterisierung einer Mittelwertstruktur durch deren zweistellige Mittelwertfunktion. *Arch. Math. (Basel)*, **24**, 397–401. *MR*: **49**, #3362 (1975).

Brown R. B. Sequences of functions of binomial type. *Discrete Math.*, **6**, 313–31. *MR*: **53**, #149 (1977).

Choczewski B. Asymptotic series expansions of continuous solutions of a linear functional equation. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **21**, 925–30. *MR*: **49**, #908 (1975).

Daróczy Z., Kieseewetter H. Eine Funktionalgleichung von Abel und die Grundlegung der Information. *Period. Math. Hungar.*, **4**, 25–8. *MR*: **48**, #8107 (1974).

Dhombres J. Hemi-multiplicative operators and related operators in finite-dimensional algebras. *Aequationes Math.*, **9**, 284–95. *MR*: **48**, #2612 (1974).

Drobot V. Discontinuous solutions of the functional equation $f(x + y) = H(f(x), f(y))$. *Funkcial. Ekvac.*, **16**, 165–8. *MR*: **50**, #2729 (1975).

Eichhorn W.

(a) Zur axiomatischen Theorie des Preisindex. *Demonstratio Math.*, **6**, 561–73. *MR*: **50**, #1702 (1975).

(b) Characterization of the CES production functions by quasilinearity. B: Production theory (Proc. Internal. Sem. Univ. Karlsruhe, Karlsruhe, 1973). (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. 1974. V. 99). Springer, Berlin. P. 21–33. *MR*: **52**, #4976 (1976).

Eichhorn W., Kolm S.-C. Technical progress, neutral inventions, and Cobb–Douglas. B: Production theory (Proc. Internal. Sem. Univ. Karlsruhe, Karlsruhe, 1973). (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. 1974. V. 99). Springer, Berlin. P. 35–45. *MR*: **53**, #2302 (1977).

Färe R. A characterization of Hicks neutral technical process. B: Production theory (Proc. Internal. Sem. Univ. Karlsruhe, Karlsruhe, 1973). (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. 1974. V. 99). Springer, Berlin. P. 47–51. *MR*: **52**, #16539 (1976).

Forte B. Why Shannon's entropy. B: Convegno di Informatica Teorica (I NOAM, Roma, 1973). (Symposia Math. V. 15). Academic Press, L. 1975. P. 137–52. *MR*: **53**, #7610 (1977).

Forte B., Ng C. T. On a characterization of the entropies of degree β . *Utilitas Math.*, **4**, 193–205. *MR*: **48**, #10667 (1974).

Garsia A. M. An exposé of the Mullin–Rota theory of polynomials of binomial type. *Linear and Multilinear Algebra*, **1**, 47–65. *MR*: **47**, #9321a (1974).

Ger R. Thin sets and convex functions. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **21**, 413–16. *MR*: **48**, #4232 (1974).

Gotqb S. Theorie der Quasigruppen. B: Grundlagen der Geometrie und algebraische Methoden (Internat. Kolloq., Pädagog. Hochsch. «Karl Liebknecht», Potsdam, 1973). (Potsdamer Forschungen. Reihe B, Heft 3). Pädagog. Hochsch. «Karl Liebknecht», Potsdam, 1974. P. 137–51. *MR*: **51**, #778 (1976).

Haruki H. On the equivalence of Hille's and Robinson's functional equations. *Ann. Polon. Math.*, **28**, 261–4. *MR*: **49**, #7430 (1975).

Haruki Sh.

(a) A note on a pentomino functional equation. *Ann. Polon. Math.*, **27**, 129–31. *MR*: **47**, #670 (1974).

(b) Multiple integrals evaluated by functional equations. *Ann. Polon. Math.*, **27**, 197–9. *MR*: **47**, #671 (1974).

(c) A note on a square type functional equation. *Canad. Math. Bull.*, **16**, 443–5. *MR*: **49**, #909 (1975).

(d) On the functional equation $\sum_{i=1}^3 (X_i^t - 1) \cdot f = 0$ and two related equations. *Utilitas Math.*, **4**, 3–7. *MR*: **49**, #5619 (1975).

Hille E. On a class of adjoint functional equations. *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **34**, 141–61. *MR*: **48**, #2611 (1974).

Howroyd T.D. Cancellative medial groupoids and arithmetic means. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **8**, 17–21. *MR*: **47**, #6927 (1974).

Jou S.S. Convex functions on topological groups. *Glas. Mat. Ser. III*, **8**(28), 175–8. *MR*: **51**, #6205 (1976).

Kampé de Fériet J. Une équation fonctionnelle de la théorie de l'information généralisant l'équation de Cauchy. *Demonstratio Math.*, **6**, 665–85. *MR*: **50**, #1770 (1975).

Kannappan Pl., Ng C.T. Measurable solutions of functional equations related to information theory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38**, 303–10. *MR*: **47**, #672 (1974).

Kopp P.E., Strauss D., Yeadon F.J. Positive Reynolds operators on Lebesgue spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **44**, 350–65. *MR*: **48**, #4813 (1974).

Kuczma M.

(a) On some set classes occurring in the theory of convex functions. *Comment. Math. Prace Mat.*, **17**, 127–35. *MR*: **48**, #4224 (1974).

(b) Cauchy's functional equation on a restricted domain. *Colloq. Math.*, **28**, 313–15. *MR*: **49**, #3366 (1975).

Kurepa S.

(a) On bimorphisms and quadratic forms on groups. *Aequationes Math.*, **9**, 30–45. *MR*: **48**, #4565 (1974).

(b) A weakly measurable selfadjoint cosine function. *Glas. Mat. Ser. III*, **8**(28), 73–9. *MR*: **48**, #12147 (1974).

Lehmann I. Einige Ergebnisse zur Theorie der bisymmetrischen Quasigruppen. B: Grundlagen der Geometrie und algebraische Methoden (Internat. Kolloq., Pädagog. Hochsch. «Karl Liebknecht», Potsdam, 1973). (Potsdamer Forschungen, Reihe B, Heft 3). Pädagog. Hochsch. «Karl Liebknecht», Potsdam, 1974. P. 154–6. *MR*: **51**, #10489 (1976).

Lin S.-Y.T. On a functional equation arising from the Monteiro-Botelho-Teixeira axioms for a topological space. *Aequationes Math.*, **9**, 281–3. *MR*: **48**, #6750 (1974).

Lorch E.R. *Precalculus*. Norton, N.Y., 1973.

Luchter J.

(a) The determination of non-homogeneous linear geometric objects of the first class for which the number of coordinates is not greater than the dimension of the space. *Demonstratio Math.*, **5**, 231–43. *MR*: **49**, #6060 (1975).

(b) On some multiplicative functional equation defined on a differential group. *Demonstratio Math.*, **5**, 245–60. *MR*: **49**, #5616 (1975).

(c) Non-existence of linear differential geometric objects of class $s \geq 3$, whose component number is not greater than the dimension of the space. *Demonstratio Math.*, **6**, 211–22. *MR*: **52**, #1542 (1976).

Miller J.B. Analytic structure and higher derivations on commutative Banach algebras. *Aequationes Math.*, **9**, 171–83. *MR*: **51**, #13696 (1976).

Mosznar Z.

(a) Structure de l'automate plein réduit et inversible. *Aequationes Math.*, **9**, 46–59. *MR*: **47**, #3585 (1974).

(b) The translation equation and its application. *Demonstratio Math.*, **6**, 309–27. *MR*: **49**, #9461 (1975).

Ng C.T.

(a) On the functional equation $f(x) + \sum_{i=1}^n g_i(y_i) = h(T(x, y_1, y_2, \dots, y_n))$. *Ann. Polon. Math.*, **27**, 329–36. *MR*: **48**, #6752 (1974).

(b) Local boundedness and continuity for a functional equation on topological spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **39**, 525–9. *MR*: **47**, #7265 (1974).

Paganoni Marzegalli S. Теоремы существования для одного общего класса функциональных уравнений (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **107**, 34–43. *MR*: **49**, #11099 (1975).

Piquet C. Opérateurs multiplicativement liés. B: Séminaire Choquet, 13e année (1973/74). (Initiation à l'analyse, Exp. No. 4). Secrétariat Mathématique, Paris, 1975. *MR*: **57**, #17379 (1979).

Rota G.-C., Kahane D., Odlyzko A. On the foundation of combinatorial theory, VIII. Finite operator calculus. *J. Math. Anal. Appl.*, **42**, 684–760. *MR*: **49**, (1974), #10556.

Rudin W. Functional analysis. McGraw-Hill, N.Y.–Düsseldorf–Johannesburg, 1973. *MR*: **51**, #1315 (1976). (Рус. перевод: *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.).

Shih K.S. On the functional equations $P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_{n-k}(x) P_k(y)$. Chinese

J. Math., **1**, 113–17. *MR*: **52**, #14726 (1976).

Simone J.N. On number theoretic functions which satisfy $f(x+y) = f(f(x) + f(y))$. *Math. Mag.*, **46**, 213–15. *MR*: **48**, #2045 (1974).

Stehling F. Neutral inventions and CES production functions. B: Production theory (Proc. Internat. Sem. Univ. Karlsruhe, Karlsruhe, 1973). (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. V. 99). Springer, Berlin. 1974. P. 65–94. *MR*: **52**, #2548 (1976).

Strecker R. Über entropische Gruppoide. B: Grundlagen der Geometrie und algebraische Methoden (Internat. Kolloq., Pädagog. Hochsch. «Karl Liebknecht» Potsdam, 1973). (Potsdamer Forschungen, Reihe B, Heft 3). Pädagog. Hochsch. «Karl Liebknecht», Potsdam, 1974. P. 153–4. *MR*: **50**, #7384 (1975).

Szymiczek K. Note on semigroup homomorphisms. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk.* — *Prace Mat.*, **3**, 75–8. *MR*: **47**, #8735 (1974).

Targonski G. Charakterisierung von Operatoren durch Funktionalgleichungen. *Demonstratio Math.*, **6**, 861–70. *MR*: **50**, #13952 (1975).

Täuber J. Über die Lösungen einer von A.D. Alexandrov verallgemeinerten Cauchyschen Funktionalgleichung. *An. Univ. Timișoara Ser. Sti. Mat.*, **11**, 175–82. *MR*: **52**, #14724 (1976).

Taylor M.A.

(a) Certain functional equations on groupoids weaker than quasigroups. *Aequationes Math.*, **9**, 23–9. *MR*: **51**, #13507 (1976).

(b) Cartesian nets and groupoids. *Canad. Math. Bull.*, **16**, 347–62. *MR*: **49**, #444 (1975).

Vrbová P. Quadratic functionals and bilinear forms. *Časopis Pěst. Mat.*, **98**, 159–61. *MR*: **49**, #11082 (1976).

1974

Белоусов В.Д., Лившиц Э.С. Функциональное уравнение общей ассоциативности на бинарных квазигруппах. *Матем. исслед.*, **9**, вып. 4 (34), 5–22. Кишинёв, «Штиинца», 1974. *MR*: **54**, #10463 (1977).

Пелюх Г.П., Шарковский А.Н. Введение в теорию функциональных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1974. *MR*: **51**, #3735 (1976).

Рухин А.Л. Замечание о функциональном уравнении Даламбера. *Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР*, **47**, 182–183, 190, 195. *MR*: **52**, #8708 (1976).

Ушан Я. О точности, с которой определены группа и подстановки в решении системы функциональных уравнений $\Lambda_{j \in \{2, \dots, n\}} X_1[X_2(a_1, \dots, a_m), a_{m+1}, \dots, a_{m+n-1}] = X_{2j-1}[a_1, \dots, a_{j-1}, X_{2j}(a_j, \dots, a_{j+m-1}), a_{j+m}, \dots, a_{m+n-1}], m = n$. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **17(31)**, 173–182. *MR*: **52**, #11397 (1976).

* *Френкин Б.Р.* О сводимости n -квазигрупп. *УМН*, **29**: 4, 185. *MR*: **56**, #15817 (1978).

Чебан А. М. Функциональные уравнения типа Бола–Муфанг. «Матем. исслед.», 9, вып. 4 (34), 150–160. Кишинёв, «Штиинца», 1974. *MR*: 54, #10464 (1977).

Aczél J.

(a) Determination of all additive quasiarithmetic mean codeword lengths. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 29, 351–360. *MR*: 50, #16076 (1975).

(b) General solution of a functional equation connected with a characterization of statistical distributions. B: Statistical distributions in scientific work, 1975. V. 3. (Proc. NATO Advanced Study Institute, University of Calgary, Calgary, 1974). Reidel, Dordrecht-Boston. P. 47–55.

Aczél J., Eichhorn W. Systems of functional equations determining price and productivity indices. *Utilitas Math.*, 5, 213–26. *MR*: 50, #13944 (1975).

Aczél J., Forte B., Ng C. T.

(a) On a triangular functional equation and some applications, in particular to the generalized theory of information. *Aequationes Math.*, 11, 11–30. *MR*: 50, #5246 (1975).

(b) Why the Shannon and Hartley entropies are 'natural'. *Adv. in Appl. Probab.*, 6, 131–46. *MR*: 49, #4658 (1975).

Baker J. A. On the functional equation $f(x)g(y) = \sum_{i=1}^n h_i(a_i x + b_i y)$. *Aequationes Math.*, 11, 154–62. *MR*: 51, #10932 (1976).

Carroll T. B. A characterization of completely multiplicative arithmetic functions. *Amer. Math. Monthly*, 81, 993–5. *MR*: 50, #4462 (1975).

Chinda K. P. The equation $F(F(x, y), F(z, y)) = F(x, z)$. *Aequationes Math.*, 11, 196–8. *MR*: 52, #11395 (1976).

Crombez G., Six G. On topological n -groups. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 41, 115–24. *MR*: 52, #14143 (1976).

Csiszár I. Information measures: a critical survey. B: Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eighth European Meeting of Statisticians (Tech. Univ. Prague, Prague, 1974), Vol. B. Academia, Prague, 1978. P. 73–86.

Daróczy Z. Remarks on the entropy equation. B: Symposium en quasigroupes et équations fonctionnelles (Belgrade-Novı Sad, 1974). *Math. Inst.*, Belgrade, 1976. P. 31–4. *MR*: 54, #9848 (1977).

Davison T. M. K. On the functional equation $f(m + n - mn) + f(mn) = f(m) + f(n)$. *Aequationes Math.*, 10, 206–11. *MR*: 49, #11086 (1975).

Donnell W. A note on entropic groupoids. *Portugal. Math.*, 33, 77–8. *MR*: 48, #11357 (1974).

Ecsedi I.

(a) Один класс разрывных решений функционального уравнения $f(ax + by) \times g(cx + dy) = h(x)k(y)$ (венг.). *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, 22, 3–10. *MR*: 51, #6203 (1976).

(b) On a functional equation which contains a real-valued function of vector variable. *Period. Math. Hungar.*, 5, 333–42. *MR*: 51, #6204 (1976).

Eichhorn W. (compil.) Elfte internationale Tagung über Funktionalgleichungen, Oberwolfach vom 14 bis 20. December 1973. *Aequationes Math.* 11, 277–314.

Etigson L. Equivalence of 'cube' and 'octahedron' functional equations. *Aequationes Math.*, 10, 50–6. *MR*: 49, #912 (1975).

Forte B., Ng C. T. Entropies with the branching property. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 101, 355–73. *MR*: 51, #15188 (1976).

Galambos J. Characterizations of probability distributions by properties of order statistics, I. B: Statistical Distributions in Scientific Work, 1975. V. 3 (Proc. NATO Advanced Study Institute, University of Calgary, Calgary, 1974). Reidel, Dordrecht-Boston. P. 71–88.

Godini G. Uniqueness theorems for a class of functional equations. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **19**, 1013–20. *MR*: **50**, #7871 (1975).

Gołqb S.

(a) Sur un système d'équations fonctionnelles lié au rapport anharmonique. *Ann. Polon. Math.*, **29**, 273–80. *MR*: **50**, #813 (1975).

(b) *Tensor Calculus*. Elsevier, Amsterdam–L.–N.Y., 1974. (Польское издание в 1956). *MR*: **49**, #11411 (1975).

Haruki H. A famous definite integral. *Math. Notae*, **24**, 23–5. *MR*: **53**, #8700 (1977).

Hollocou Y. Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **278**, 649–51. *MR*: **49**, #11083 (1975).

Hosszú M., Csikós M. Normenquadrat über Gruppen. B: Symposium en quasigroupes et équations fonctionnelles (Belgrade–Novi Sad, 1974). *Math. Inst., Belgrade*, 1976. P. 35–9. *MR*: **55**, #915 (1978).

Hsu I. C. On a cubic functional equation defined on groups. *Elem. Math.*, **29**, 112–17.

Kannappan Pl., Ng C. T.

(a) A functional equation and its application to information theory. *Ann. Polon. Math.*, **30**, 105–12. *MR*: **49**, #5621 (1975).

(b) On functional equations connected with directed divergence, inaccuracy and generalized directed divergence. *Pacific J. Math.*, **54**, 157–67. *MR*: **51**, #10939 (1976).

Kotz S. Characterizations of statistical distributions: a supplement to recent surveys. *Internat. Statist. Rev.*, **42**, 39–65. *MR*: **50**, #6015 (1975).

Kucharzewski M., Zajtz A. Über die multiplikative Funktionalgleichung für stochastische Matrizen. *Aequationes Math.*, **11**, 128–37. *MR*: **51**, #3737 (1976).

Lajkó K.

(a) Applications of extensions of additive functions. *Aequationes Math.*, **11**, 68–76. *MR*: **49**, #7637 (1975).

(b) Special multiplicative deviations. *Publ. Math. Debrecen*, **21**, 39–45. *MR*: **51**, #1186 (1976).

Maksa Gy. A functional equation with differences. B: Symposium en quasigroupes et équations fonctionnelles (Belgrade–Novi Sad, 1974). *Math. Inst., Belgrade*, 1976. P. 49–52. *MR*: **52**, #912 (1978).

Mills T. M. An algebraic functional equation. *Portugal. Math.*, **33**, 51–6. *MR*: **48**, #11837 (1974).

Mokanski J. P. Extensions of functions satisfying Cauchy and Pexider type equations defined on arbitrary groups. *Mathematica (Cluj)*, **16**, 99–108. *MR*: **53**, #13908 (1977).

Morgan C. L. Addition formulae for field-valued continuous functions on topological groups. *Aequationes Math.*, **11**, 77–96. *MR*: **49**, #8999 (1975).

Nagy B.

(a) On a generalization of the Cauchy equation. *Aequationes Math.* **10**, 165–71. *MR*: **50**, #5912 (1975).

(b) On the generators of cosine operator functions. *Publ. Math. Debrecen*, **21**, 151–4. *MR*: **50**, #14368 (1975).

(c) On cosine operator functions in Banach spaces. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **36**, 281–9. *MR*: **51**, #11191 (1976).

Ng C. T.

(a) Representation for measures of information with the branching property. *Inform. and Control*, **25**, 45–56. *MR*: **49**, #7019 (1975).

(b) On the measurable solutions of the functional equation $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 F_{i,j}(p_i q_j) = \sum_{i=1}^2 G_i(p_i) + \sum_{j=1}^3 H_j(q_j)$. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **25**, 249–54. *MR*: **50**, #7875 (1975).

Paganoni L.

(a) О единственности решений одного класса функциональных уравнений (итал.). *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **6**, 77–88. *MR*: **50**, #5252 (1976).

(b) Обобщение теоремы Штейнгауза (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **108**, 262–73. *MR*: **50**, #7457 (1975).

(c) О равносильности измеримости и непрерывности для решений одного класса функциональных уравнений (итал.). *Riv. Mat. Univ. Parma*, **3**, 175–88. *MR*: **56**, #6174 (1978).

Rao C. R.

(a) Functional equations and characterization of probability distributions. B: *Proc. Internat. Congress of Mathematicians. (Vancouver, 1974). V. 2. Canadian Mathematical Congress. 1975. P. 163–8. MR*: **54**, #8945 (1977).

(b) Inaugural Linnik memorial lecture — Some problems in the characterization of the multivariate normal distribution. B: *Statistical distributions in scientific work, 1975. V. 3 (Proc. NATO Advanced Study Institute, University of Calgary, Calgary, 1974). Reidel, Dordrecht–Boston. P. 1–13.*

Rimán J. On an extension of Pexider's equation. B: *Symposium en quasigroupes et équations fonctionnelles (Belgrade–Novi Sad, 1974). Math. Inst., Belgrade, 1976. P. 65–72. MR*: **54**, #8064 (1977).

Samuelson H. To e via convexity. *Amer. Math. Monthly*, **81**, 1012–14.

Schmidt H. Über das Additionstheorem der Binomialkoeffizienten, *Aequationes Math.* **10**, 302–6.

Schwarz W., Spilker J. Über zahlentheoretische Funktionen, die $f(x+y) = f(f(x) + f(y))$ erfüllen. *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **111**, 80–6. *MR*: **51**, #8014 (1976).

Strambach K. Distributive quasigroups. B: *Foundations of geometry (Proc. Conf. Univ. Toronto, Toronto, 1974). Univ. Toronto Press, Toronto, 1976. P. 251–76. MR*: **54**, #2861 (1977).

Strecker R. Über entropische Gruppoide. *Math. Nachr.*, **64**, 363–71. *MR*: **50**, #13323 (1975).

Van der Mark J. On the functional equation of Cauchy. *Aequationes Math.*, **10**, 57–77. *MR*: **48**, #11832 (1974).

Volkman P. Eine Charakterisierung der positiv definiten quadratischen Formen. *Aequationes Math.*, **11**, 174–82. *MR*: **50**, #10776 (1975).

1975

Дёнин В. Решение системы функциональных уравнений $X_1[X_2(a_1^n), a_{n+1}^{2n+d-1}] = X_{2j-1}[a_1^{i-1}, X_{2j}(a_j^{i+n-1}), a_{j+n}^{2n+d-1}]$, $j \in \{2, 3, \dots, n+d\}$, на алгебре квазигрупп. «Мат. весник», **12(27)**, N 2, 135–142. *MR*: **52**, #8313 (1976).

Лившиц Э. С. Функциональные уравнения II рода на бинарных квазигруппах. «Матем. исслед.», **10**, N 2(36), 168–181, 285. Кишинёв, «Штиинца». *MR*: **53**, #3177 (1977).

* *Ушан Я.* Ассоциативные в целом системы n -арных квазигрупп. *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., Nouv. Ser.*, **19**, 155–165. *MR*: **55**, #555 (1978).

Aczél J. On a system of functional equations determining price and productivity indices. *Utilitas Math.*, **7**, 345–62. *MR*: **51**, #10940 (1976).

Aczél J., Benz W. Über das harmonische Produkt und eine korrespondierende Funktionalgleichung. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **43**, 1–10. MR: **52**, #8704 (1976).

Aczél J., Daróczy Z. On Measures of Information and Their Characterizations. (Mathematics in Science and Engineering; V. 115). Academic Press, N.Y.-San Francisco-L. MR: **58**, #33509 (1979).

Baumgartner E. Zur Einführung der Logarithmus- und Exponentialfunktionen in der Sekundarstufe, II. Didaktik Math., **3**, 1–28.

de Bragança S.L. Finite dimensional Baxter algebras. Stud. Appl. Math., **54**, 75–89. MR: **56**, #6464 (1978).

Buche A.B. On an exponential-cosine operator-valued functional equation. Aequationes Math., **13**, 233–41. MR: **53**, #3789 (1977).

Chernoff P.R. Solution of elementary problem E2479. Amer. Math. Monthly, **82**, 668–9.

Dhombres J.

(a) Itération linéaire d'ordre 2. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A, **280**, 275–7. MR: **51**, #13506 (1976).

(b) A functional characterization of Markovian linear exaves. Bull. Amer. Math. Soc., **81**, 703–6. MR: **51**, #13751 (1976).

Diderrich G.T. The role of boundedness in characterizing Shannon entropy. Inform. and Control, **29**, 149–61. MR: **54**, #9849 (1977).

Dordević R.Ž., Mitrović Ž.M. On a function related to Binet-Cauchy's functional equation. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., **1975**, No. 498–541, 125–8. MR: **52**, #3770 (1976).

Fearnley-Sander D. A characterization of the determinant. Amer. Math. Monthly, **82**, 838–40. MR: **53**, #2977 (1977).

Forte B., Ng C.T. Derivation of a class of entropies including those of degree β . Inform. and Control, **28**, 335–51. MR: **51**, #9962 (1976).

Ger R. On some functional equations with a restricted domain. Fund. Math., **89**, 131–49. MR: **52**, #8706 (1976).

Ger R., Kuczma M. On inverse additive functions. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **11**, 490–5. MR: **52**, #6234 (1976).

Gołqb S. Über das Carnotsche Skalarprodukt in schwach normierten Vektorräumen. Aequationes Math., **13**, 9–13. MR: **53**, #3664 (1977).

Gudder S., Strawther D. Orthogonally additive and orthogonally increasing functions on vector spaces. Pacific J. Math., **58**, 427–36. MR: **52**, #11542 (1976).

Haruki H. A characteristic property of orthogonal pencils of coaxial circles from the standpoint of conformal mapping. Ann. Polon. Math., **31**, 171–7. MR: **52**, #14295 (1976).

Jean R. Mesure et intégration. Les Presses de l'Université du Québec, Montréal, 1975. MR: **57**, #6341 (1979).

Kannan D., Kannappan Pl. On a characterization of Gaussian measures in a Hilbert space. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B., **11**, 397–404. MR: **52**, #15586 (1976).

Kucharzewski M., Szociński B. Über Homomorphismen einer Gruppe von Matrizen. Ann. Polon. Math., **30**, 237–42. MR: **55**, #8068 (1978).

Lundberg A., Ng C.T. Uniqueness theorems for the representation $\phi(f(x)g(y)+h(y))$. Aequationes Math., **13**, 77–87. MR: **52**, #11396 (1976).

Marsaglia G., Tubilla A. A note on the 'lack of memory' property of the exponential distribution. Ann. Probab., **3**, 353–4. MR: **51**, #2073 (1975).

Moszner Z. Sur les solutions d'une équation fonctionnelle, II. Aequationes Math. **13**, 269–73. MR: **54**, #773 (1977).

Moszner Z., Tabor J. L'équation de translation sur une structure avec zéro. Ann. Polon. Math. **31**, 255–64. MR: **53**, #13910 (1977).

Nashed M. Z. A functional equation which characterizes polynomial operators with applications to uniqueness. *Applicable Anal.*, **5**, 55–63. *MR*: **52**, #15156 (1976).

Neuman F. (compil.) Twelfth International Symposium on Functional Equations (Waterloo and Victoria Harbour, Ont., August 30–September 9, 1974). *Aequationes Math.* **12**, 262–310. *MR*: **51**, #10923 (1976).

Olkin I. Problem **P128**. *Aequationes Math.*, **12**, 290–2.

Paganoni L. Меры Коши, Островского и Штейнгауза на вещественной оси (итал.). *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **109**, 145–55. *MR*: **53**, #5823 (1977).

Strambach K. Rechtsdistributive Quasigruppen auf 1-Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.*, **145**, 63–8. *MR*: **52**, #3425 (1976).

Tabor J. Solution of Cauchy's functional equation on a restricted domain. *Colloq. Math.*, **33**, 204–8. *MR*: **52**, #8701 (1976).

1976

* *Белоусов В. Д.* Уравнение общей медиальности. *Матем. исслед.*, **39**, 21–31. Кишинёв, «Штиинца». *РЖМат.* 1976, 10 А171.

* *Белоусов В. Д., Лившиц Э. С.* Уравновешенные функциональные уравнения на квазигруппах любой арности. «Матем. исслед.», вып. 43 «Квазигруппы и комбинаторика», 9–29, 203. Кишинёв, «Штиинца». *MR*: **58**, #29536 (1979).

* *Лившиц Э. С.* Уравновешенные функциональные уравнения 1 рода на квазигруппах произвольной арности. «Матем. исслед.», вып. 39 «Сети и квазигруппы», 108–127. Кишинёв, «Штиинца». *РЖМат.* 1976, 10А170.

Соколов Е. И.

(а) О теореме Глускина — Хоссу для n -групп Дёрнте. «Матем. исслед.», вып. 39 «Сети и квазигруппы», 187–189, 235. Кишинёв, «Штиинца». *MR*: **56**, #523 (1978).

(б) Решение функционального уравнения обобщённой транзитивности. «Матем. исслед.», вып. 43 «Квазигруппы и комбинаторика», 160–161, 210. Кишинёв, «Штиинца». *MR*: **58**, #29543 (1979).

Ушан Я. Некоторые системы функциональных уравнений общей ассоциативности и их связь с функциональными уравнениями общей ассоциативности на алгебре квазигрупп. «Зб. радова Мат. ин-т» (Белград), 1976, N 1. С. 73–80. *MR*: **55**, #552 (1978).

* *Френкин Б. Р.* Сводимые n -квазигруппы и их гомоморфные образы. «Матем. иссл.», вып. 43 «Квазигруппы и комбинаторика», 162–189, 210. Кишинёв, «Штиинца».

Aczél J.

(а) *Picardus ab omni naevo liberatus* (On the axiomatics of vector addition). B: *General Inequalities 1* (Proc. First Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1976). Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1978. P. 249–53. *MR*: **80**, #51017 (1980).

(б) Some recent applications of functional equations to combinatorics, probability distributions, information measures and to the theory of index numbers in mathematical economics. B: *Theory and Applications of Economic Indices* (Proc. Internal. Sympos., Univ. Karlsruhe, 1976). Physica, Würzburg, 1978. P. 565–90. *MR*: **58**, #23220 (1979).

Babescu G. H. On the D'Alembert's functional equation in the Banach algebras. *Bul. Şti. Tehn. Inst. Politehn. 'Traian Vuia' Timişoara*, **21(35)**, 136–8. *MR*: **55**, #13110 (1978).

Baker J. A. On the functional equation $f(x)g(y) = p(x + y)q(x/y)$. *Aequationes Math.*, **14**, 493–506. *MR*: **55**, #3581 (1978).

Benz W. On characterizing Lorentz transformations. B: *General Inequalities 1* (Proc. First Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1976). Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1978. P. 319.

Berg L. Functional equations in a field. *Math. Nachr.*, **74**, 309–12. *MR*: **54**, #10912 (1977).

Bilinski S. Die linearadditiven Zweiindizesfunktionen. *Aequationes Math.*, **14**, 95–104. *MR*: **54**, #1065 (1977).

Buche A.B., Vasudeva H.L. The generalized Cauchy equation for operator-valued functions. *Aequationes Math.*, **14**, 387–90. *MR*: **54**, #8355 (1977).

Burk R., Gehrig W. Indices of income inequality and societal income. An axiomatic approach. B: Theory and Applications of Economic Indices. (Proc. Internat. Sympos., Univ. Karlsruhe, 1976). *Physica, Würzburg*, 1978. P. 309–56. *MR*: **57**, #15319 (1979).

Corovei I. The extensions of the functions satisfying the cosine functional equation. *Mathematica (Cluj)*, **18(41)**, 131–6. *MR*: **57**, #6927 (1979).

Dhombres J.G.

(a) Interpolation linéaire et équations fonctionnelles. *Ann. Polon. Math.* **32**, 287–302. *MR*: **55**, #3590 (1978).

(b) Функциональные уравнения, усредняющие операторы, операторы интерполяции и линейного продолжения (кит.). *Nanta Math.*, **9**, 109–16. *MR*: **57**, #6930 (1979).

(c) Associativity on the real axis. *Glas. Mat. Ser. III*, **11(31)**, 37–40. *MR*: **54**, #2745 (1977).

Dhombres J., Spilker J. Über die Funktionalgleichung $f(f(x) \cdot (f(y))) = f(x \cdot y)$. *Manuscripta Math.*, **18**, 371–90. *MR*: **53**, #13905 (1977).

Eichhorn W.

(a) Fisher's tests revisited. *Econometrica*, **44**, 247–56. *MR*: **56**, #10853 (1978).

(b) Inequalities and functional equations in the theory of the price index. B: General Inequalities 1 (Proc. First Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1976). *Birkhäuser, Basel-Stuttgart*, 1978. P. 23–8.

(c) What is an economic index? An attempt of an answer. B: Theory and applications of economic indices (Proc. Internat. Sympos., Karlsruhe, 1976). *Physica, Würzburg*, 1978. P. 3–42. *MR*: **58**, #4228 (1979).

Eichhorn W., Voeller J. The Theory of the Price Index. Fisher's Test Approach and Generalizations. (Lecture Notes in Econom. and Math. Systems. V. 140). *Springer, Berlin-N.Y.*, 1976. *MR*: **56**, #16479 (1978).

Ger R.

(a) On a method of solving of conditional Cauchy equations. *Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1976**, No. 554–76, 159–65. *MR*: **56**, #6179 (1978).

(b) On some functional equations with a restricted domain. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **24**, 429–32. *MR*: **53**, #13907 (1977).

(c) О некоторых функциональных уравнениях с ограниченной областью (польск.). *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk.*, **132**, 1–36. *MR*: **55**, #13116 (1978).

Haruki H. A functional equation connected with the sine addition theorem. *Portugal. Math.*, **35**, 75–79. *MR*: **56**, #909 (1978).

Hemdan H.T. Solution of the 'cube' functional equation in terms of 'trilinear coefficients'. *Canad. Math. Bull.*, **19**, 181–91. *MR*: **54**, #13361 (1977).

Hofmann K.H. Topological semigroups. History, theory, applications. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, **78**, 9–59.

Jung C.F.K., Boonyasombat V., Barbançon G., Jung F.R. On the functional equation $f(x + f(y)) = f(x)f(y)$. *Aequationes Math.* **14**, 41–8. *MR*: **54**, #774 (1977).

Kannappan Pl., Taylor M.A. On closure conditions. *Canad. Math. Bull.* **19**, N. 3, 291–296. *MR*: **55**, #5767 (1978).

Kareńska Z. On some functional equations occurring in the theory of geometric objects. *Demonstratio Math.*, **9**, 379–91. *MR*: **54**, #10911 (1977).

Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Second edn. (Grundlehren Math. Wiss. V. 132). Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y., 1976. *MR*: **53**, #11389 (1977).

Kuczma M. (compil.) Dreizehnte internationale Tagung über Funktionalgleichungen, Oberwolfach vom 6.7 bis 12.7. 1975. *Aequationes Math.* **14**, 197–236. *MR*: **53**, #8695 (1977).

Kuczma M., Smítal J. On measures connected with the Cauchy equation. *Aequationes Math.* **14**, 421–8. *MR*: **53**, #13502 (1977).

Kurepa S. Decomposition of weakly measurable semigroups and cosine operator functions. *Glas. Mat. Ser. III*, **11**(31), 91–5. *MR*: **53**, #11431 (1977).

Lambek J. Lectures on Rings and Modules. Second edn. Chelsea, N.Y., 1976. *MR*: **54**, #7514 (1977). (Рус. перевод: Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.)

Miron R., Radó F. On the definitions of a module and a vector space by independent axioms. *Mathematica (Cluj)*, **18**(41), 179–86. *MR*: **58**, #28017 (1979).

Myers D. E. On the exponential function and Pólya's proof. *Portugal. Math.*, **35**, 35–9. *MR*: **55**, #3588 (1978).

Nagy B. Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem. *Period. Math. Hungar.*, **7**, 213–17. *MR*: **56**, #9023 (1978).

Narens L., Luce R. D. The algebra of measurement. *J. Pure Appl. Algebra*, **8**, 197–233. *MR*: **57**, #5203 (1979).

Nguyen Huu Bong. Some apparent connection between Baxter and averaging operators. *J. Math. Anal. Appl.* **56**, 330–45. *MR*: **55**, #1130 (1978).

Paganoni L. Uniqueness structure and parametrization for a class of a functional equation's solutions. *Riv. Mat. Univ. Parma* (4), **2**, 337–45. *MR*: **56**, #9127 (1978).

Paganoni Marzegalli S. Ограниченность и непрерывность решений одного класса функциональных уравнений (итал.). *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **8**, 73–83. *MR*: **55**, #3585 (1978).

Papp F. J. The functional equation $f(xy) = ff(x)xy ff(y)$ in a partially ordered monoid. *Aequationes Math.*, **14**, 33–5. *MR*: **53**, #10681 (1977).

Ratz J.

(a) Quadratic functionals satisfying a subsidiary inequality. B: General Inequalities 1 (Proc. First Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1976). Birkhäuser, Basel–Stuttgart, 1978. P. 261–70.

(b) On the homogeneity of additive mappings. *Aequationes Math.*, **14**, 67–71. *MR*: **53**, #13320 (1977).

Robinson D. A. Concerning functional equations of the generalized Bol — Moufang type. *Aequationes Math.*, **14**, 429–34. *MR*: **54**, #2860 (1977).

Sander W. Verallgemeinerungen eines Satzes von H. Steinhaus in *Fund. Math.* **1** (1920), 93–104. *Manuscripta Math.*, **18**, 25–42. *MR*: **52**, #14210 (1976).

Schwerdtfeger H. Invariants of a class of transformation groups. *Aequationes Math.*, **14**, 105–10. *MR*: **53**, #14291 (1977).

Seneta E. Regularly Varying Functions. (Lecture Notes in Math. V. 508). Springer, Berlin–N.Y., 1976. *MR*: **56**, #12189 (1978).

Sharir M. A counterexample on extreme operators. *Israel J. Math.*, **24**, 320–37. *MR*: **55**, #11096 (1978).

Smítal J.

(a) A necessary and sufficient condition for continuity of additive functions. *Czechoslovak Math. J.*, **26**(101), 171–3. *MR*: **53**, #6138 (1977).

(b) On convex functions bounded below. *Aequationes Math.*, **14**, 345–50. *MR*: **55**, #3189 (1978).

Świątak H. The regularity of the locally integrable and continuous solutions of nonlinear functional equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **221**, 97–118. *MR*: **55**, #3583 (1978).

Tretiaĭk O.J., Eisenstein B.A. Separator functions for holomorphic filtering. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal process, ASSP-24, 359–64. MR: 55, #12253 (1978).

1977

Aczél J.

(a) Functions of binomial type mapping groupoids into rings. Math. Z., 154, 115–24. MR: 55, #13115 (1978).

(b) General solution of a system of functional equations satisfied by the sums of powers. Mitt. Math. Sem. Giessen, 123, 121–8. MR: 58, #12054 (1979).

Aljančič S., Arandelović D. O-regularly varying functions. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 22(36), 5–22. MR: 57, #6317 (1979).

Alo R.A., De Korvin A., Roberts C. Averaging operators on normed Köthe spaces. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 112, 33–48. MR: 55, #8871 (1978).

Barcz E., Kania M., Moszner Z. Sur les automates commutatifs. Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Nauk. - Prace Mat., 19, 195–9. MR: 58, #33592 (1979).

Benz W. The functional equation of distance preservice in spaces over rings. Aequationes Math., 16, 303–7. MR: 57, #17064 (1979).

Corovei I.

(a) The cosine functional equation for nilpotent groups. Aequationes Math., 15, 99–106. MR: 55, #8603 (1978).

(b) The extensions of functions satisfying the functional equation $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)g(y)$. Mathematica (Cluj), 19(42), 33–39. MR: 58, #29537 (1979).

Daróczy Z., Lajkó K., Székelyhidi L. Functional equations on ordered fields. Publ. Math. Debrecen, 24, 173–9. MR: 56, #6178 (1978).

Daróczy Z., Maksa Gy. Nonnegative information functions. B: Analytic Function Methods in Probability Theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Kossuth L. Univ., Debrecen, 1977). (Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1980. V. 21). North-Holland, Amsterdam. P. 67–78. MR: 81h, #39008.

Dhombres J.G.

(a) Solution générale sur un groupe abélien de l'équation fonctionnelle $f(x * f(y)) = f(f(x) * y)$. Aequationes Math., 15, 173–93. MR: 57, #10302 (1979).

(b) Itération linéaire d'ordre deux. Publ. Math. Debrecen, 24, 277–87. MR: 58, #6798 (1979).

(c) On some extensions of homomorphisms. Nanta Math., 10, 135–41. MR: 80e, #39003.

Forte B. Non-symmetric entropies in information theory and statistical mechanics. B: Théorie de l'information, développements récents et applications (Cachan, France, 1977). (Colloq. Internat. CNRS. 1978. V. 276). CNRS, Paris. P. 69–76. MR: 81f, #94008.

Forti G.L. On the functional equation $f(L + x) = f(L) + f(x)$. Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 111, 296–302. MR: 80h, #39009.

Ger R.

(a) On an alternative functional equation. Aequationes Math., 15, 145–62. MR: 58, #1801 (1979).

(b) Almost additive functions on semigroups. Aequationes Math., 15, 291.

(c) Functional equations with a restricted domain. Rend. Sem. Mat. Fiz. Milano, 47, 175–84. MR: 80j, #39010.

Grzysiewicz A. On the solutions of the generalizing equation of homomorphism. Wyż. Szkół. Fed. Kraków. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat., 61, 31–60. MR: 58, #29539 (1979).

Haruki Sh. Four different unknown functions satisfying the triangle mean value property for harmonic polynomials. Ann. Polon. Math., 33, 219–21. MR: 55, #3276 (1978).

Kannappan Pl. On Shannon's entropy and a functional equation of Abel. *Period. Math. Hungar.*, **8**, 41–44. *MR*: **56**, #16190 (1978).

Kuczma M. On mappings preserving linear dependence and independence. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk. Prace Mat.*, **158**, 29–49. *MR*: **55**, #913 (1978).

Lester J. A., McKiernan M. A. On null cone preserving mappings. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **81**, 455–62. *MR*: **57**, #15192 (1979).

Lundberg A. On the functional equation $f(\lambda(x) + g(y)) = \mu(x) + h(x + y)$. *Aequationes Math.*, **16**, 21–30. *MR*: **58**, #29529 (1979).

Lunenburg H., Plaumann P. Die Funktionalgleichung von Götzsch und Schinzel in Galoisfeldern. *Arch. Math. (Basel)*, **28**, 55–59. *MR*: **58**, #29542 (1979).

Lutz D. Which operators generate cosine operator functions? *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)*, **63**, 314–17. *MR*: **80k**, #47042.

Maksa Gy. On the functional equation $f(x + y) + g(xy) = h(x) + h(y)$. *Publ. Math. Debrecen* **24**, 25–9. *MR*: **56**, #6177 (1978).

Mangolini M. О некоторых свойствах решений обобщённых функциональных уравнений Пексиде (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **111**, 194–202. *MR*: **80m**, #39008.

Mangolini M., Paganoni L. Теоремы регулярности для одного класса функциональных уравнений (итал.). *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **57**, 93–105. *MR*: **80h**, #39008.

McKennon K., Dearden B. Functional equations for polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **63**, 23–28. *MR*: **55**, #10490 (1978).

McKiernan M. A.

(a) The matrix equation $a(x \circ y) = a(x) + a(x)a(y) + a(y)$. *Aequationes Math.*, **15**, 213–23. *MR*: **58**, #1802 (1979).

(b) Equations of the form $H(x \circ y) = \sum_i f_i(x)g_i(y)$. *Aequationes Math.*, **16**, 51–8.

MR: **58**, #1803 (1979).

Nagy B.

(a) Approximation theorems for cosine operator functions. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **29**, 69–76. *MR*: **55**, #13294 (1978).

(b) A sine functional equation in Banach algebras. *Publ. Math. Debrecen*, **24**, 77–90. *MR*: **57**, #943 (1979).

(c) On some functional equations in Banach algebras. *Publ. Math. Debrecen* **24**, 257–61. *MR*: **57**, #3682 (1979).

Ng C. T. Representation for measures of information having the branching property over a simple graph. *B: Théorie de l'information, développements récents et applications* (Cachan, France, 1977). (Colloq. Internal CNRS. 1978. V. 276). CNRS, Paris. P. 121–4.

O'Connor T. A.

(a) A solution of the functional equation $\phi(x - y) = \sum_l^n a_j(x)\overline{a_j(y)}$ on a locally compact abelian group. *J. Math. Anal. Appl.* **60**, 120–2. *MR*: **56**, #12695 (1978).

(b) A solution of D'Alembert's functional equation on a locally compact abelian group. *Aequationes Math.*, **15**, 235–8. *MR*: **56**, #12694 (1978).

Paganoni Marzegalli S. Cauchy's equation on a restricted domain. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)*, **14**, 398–408. *MR*: **56**, #12690 (1978).

Reis C. M., Shyr H. J. A note on a problem of Hua. *Semigroup Forum*, **14**, 7–13. *MR*: **57**, #9875 (1979).

Röhmel J. Eine Charakterisierung quadratischer Formen durch eine Funktionalgleichung. *Aequationes Math.*, **15**, 163–8. *MR*: **58**, #22130 (1979).

Sathyabhama V. Transitivity, associativity and bisymmetry equations on GD-groupoids. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **21(35)**, 175–83. *MR*: **56**, #12148 (1978).

Schwerdtfeger H. Invariants à cinq points dans le plan projectif. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **285**, 127–8. MR: **57**, #10576 (1979).

Sempi C. (compil.) The Fourteenth International Symposium on Functional Equations (Lecce and Castro Marina, Italy, May 21–28, 1976). Aequationes Math. **15**, 265–300.

Sharir M. A non-nice extreme operator. Israel J. Math, **26**, 306–12. MR: **56**, #12970 (1978).

Strambach K. Kommutative distributive Quasigruppen. Math.-Phys. Semesterber., **24**, 71–83. MR: **56**, #519 (1978).

Świątek H.

(a) On alternative functional equations. Aequationes Math., **15**, 35–47. MR: **55**, #13117 (1978).

(b) Existence and regularity problems for non-linear functional equations. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **30**, 21–31. MR: **57**, #942 (1979).

Vitushkin A. G. On representation of functions by means of superpositions and related topics. Enseign. Math. (2), **23**, 255–320. MR: **58**, #17008 (1979).

Yellott J. I. Jr. The relationship between Luce's choice axiom, Thurstone's theory of comparative judgement, and the double exponential distribution. J. Math. Psych., **15**, 109–44. MR: **56**, #8096 (1978).

1978

Aczél J. Some recent results on characterizations of measures of information related to coding. IEEE Trans. Inform. Theory IT-**24**, 592–5. MR: **58**, #26526 (1979).

Anumann G. Der abbildungstheoretische Zugang zur Topologie, II Bayer. Akad. Wss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber L., **1978**, 85–93. MR: **81a**, #54002.

Blackorby C., Primont D., Russell R. R. Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications. North Holland, N.Y.–Oxford–Shannon, 1978.

Dhombres J., Ger R. Conditional Cauchy equations. Glas. Mat. Ser. III, **13** (33), 39–62. MR: **58**, #17636 (1979).

Diderrich G. Local boundedness and the Shannon entropy. Inform. and Control, **36**, 292–308. MR: **58**, #4631 (1979).

Eichhorn W. Functional Equations in Economics. (Applied Math. and Computation, No. 11). Addison–Wesley, Reading, Mass. 1978. MR: **80e**, #90034.

Elliott P. D. T. A. On certain asymptotic functional equations. Aequationes Math., **17**, 44–52. MR: **81e**, #39003.

Forti G. L. Bounded solutions with zeros of the functional equation $f(L + x) = f(L) + f(x)$. Boll. Un. Mat. Ital. A (5), **15**, 248–56. MR: **57**, #17061 (1979).

Galambos J., Kotz S. Characterization of Probability Distributions. A Unified Approach with an Emphasis on Exponential and Related Models. (Lecture Notes in Math. V. 675). Springer, Berlin–N.Y., 1978. MR: **80a**, #62022.

Ger R.

(a) Note on almost additive functions. Aequationes Math. **17**, 73–6. MR: **57**, #13279 (1979).

(b) On some functional equations with a restricted domain, II. Fund. Math., **98**, 250–72. MR: **57**, #17065 (1979).

(c) Homogeneity sets for Jensen-convex functions. B: General Inequalities 2 (Proc. Second Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1978). Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1980. P. 193–201. MR: **82d**, #39007.

Grzaślewicz A.

(a) On extensions of homomorphisms. Aequationes Math., **17**, 199–207. MR: **58**, #6799 (1979).

(b) Some remarks to additive functions. *Math. Japan.*, **23**, 573–8. *MR*: **80b**, #39004.
Grz̧ślewicz A., Pow̧zka Z., Tabor J. On Cauchy's nucleus. *Publ. Math. Debrecen*,
25, 47–51. *MR*: **58**, #23229 (1979).

Janardan K. G. A new functional equation analogous to Cauchy-Pexider functional equation and its application. *Biometrical J.*, **20**, 323–8. *MR*: **80f**, #39009.

Káta I. On additive functions. *Publ. Math. Debrecen*, **25**, 251–7. *MR*: **80b**, #10005.

Kirsch A. Beziehungen zwischen der Additivität und der Homogenität von Vektorraum-Abbildungen. *Math.-Phys. Semesterber.*, **25**, 207–10. *MR*: **80b**, #15005.

Krapež A. On solving a system of balanced functional equations on quasigroups, I. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **23** (37), 117–27. *MR*: **80a**, #39007.

Kuczma M.

(a) On some alternative functional equations. *Aequationes Math.*, **17**, 182–98. *MR*: **80k**, #39003.

(b) Functional equations on restricted domains. *Aequationes Math.*, **18**, 1–34. *MR*: **58**, #29532 (1979).

Lajkó K. Generalized difference-property for functions of several variables. *Publ. Math. Debrecen* **25**, 169–76. *MR*: **58**, #29540 (1979).

Mosner Z. On the equivalence of Thurstone models. *J. Math. Psych.*, **17**, 263–5. *MR*: **58**, #4467 (1979).

Neuman F. (compil.) Fifteenth International Symposium on Functional Equations (Oberwolfach, Germany, May 22–28, 1977). *Aequationes Math.* **17**, 348–78.

Ng C. T. Inverse systems and the translation equation on topological spaces. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **31**, 227–32. *MR*: **57**, #13280 (1979).

Paganoni L. On uniqueness structures: some conditions and applications. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **27**, 41–52. *MR*: **80h**, #39016.

Pokropp F. The functional equation of aggregation. B: Functional equations in Economics, by W. Eichhorn. Addison-Wesley, Reading, Mass. P. 122–39. *MR*: **80e**, #90034.

Rätz J. On approximately additive mappings. B: General Inequalities 2 (Proc. Second Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1978). Birkhäuser, Basel, 1980. P. 233–51. *MR*: **83e**, #90131.

Sander W.

(a) Verallgemeinerte Cauchy-Funktionalgleichungen. *Aequationes Math.*, **18**, 357–69. *MR*: **80h**, #39017.

(b) Regularitätseigenschaften von Funktionalgleichungen. *Glas. Mat. Set. III*. **13**(33), 237–47. *MR*: **80h**, #39018.

Schwerdtfeger H.

(a) Invariants of a class of transformation groups, II. *Aequationes Math.*, **17**, 292–4. *MR*: **58**, #12720 (1979).

(b) On $(n + 1)$ -point invariants of the group $GL(n, F)$, II. Linear and Multilinear Algebra, **6**, 63–4. *MR*: **58**, #919 (1979).

Speiser J. M., Whitehouse H. J., Berg N. J. Signal processing architectures using convolutional technology. *Real Time Signal Processing*, SPIE **154**, 66–80.

Stehling F. The functional equation $f(yx) = g(y)f(x) + b(y)$ on a restricted domain. *Aequationes Math.*, **17**, 360–1.

Täuber J., Neuhaus N.

(a) Monotone Lösungen zweier Komplexfunktionalgleichungen, die aus der Jensenfunktionalgleichung hervorgehen. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **23**, 299–307. *MR*: **58**, #12059 (1979).

(b) Über die monotonen Lösungen der auf Mengen verallgemeinerten Jensenfunktionalgleichung. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **23**, 309–12. *MR*: **58**, #12060 (1979).

Taylor M. A. On the generalized equations of associativity and bisymmetry. *Aequationes Math.*, **17**, 154–63. *MR*: **58**, #931 (1979).

Vincze E.

(a) Über die Einführung der komplexen Zahlen mittels Funktionalgleichungen. Publ. Math. Debrecen, **25**, 303–9. MR: **80f**, #39010.

(b) Über ein Funktionalgleichungsproblem von I. Olkin. Publ. Techn. Univ. Heavy Industry (Miskolc) Ser. D, **33**, 113–24.

1979

Baker J.A., Lawrence J., Zorzitto F. The stability of the equation $f(x + y) = f(x)f(y)$. Proc. Amer. Math. Soc., **74**, 242–6. MR: **80d**, #39009.

Benz W.

(a) On a conjecture of I. Fenyő. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **1**, 249–52. MR: **80i**, #39006.

(b) Über eine Funktionsgleichung von G. Aumann. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber., **1979**, 7–13. MR: **81m**, #39013.

Borelli Forti C., Forti G.L. Vector-valued solutions of a functional equation. Boll. Un. Mat. Ital. B(5), **16**, 266–77. MR: **80h**, #39012.

Brillouët N. Opérateurs extrémaux et opérateurs sympathiques. (Thèse Doctorale 3-ème Cycle). Université de Nantes, Nantes, 1979.

Buchs A.B. The generalized Cauchy equation for selfadjoint operators on a Hilbert space. Indian J. Pure Appl. Math., **10**, 166–70. MR: **80e**, #39006.

Daróczy Z., Járai A. On the measurable solution of a functional equation arising in information theory. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **34**, 105–16. MR: **80i**, #39008.

Dhombres J.G. Some Aspects of Functional Equations. Chulalongkorn University, Department of Mathematics, Bangkok, 1979. MR: **80j**, #39001.

Eichhorn W. Wirtschaftliche Kennzahlen. B: Quantitative Wirtschafts- und Unternehmensforschung (Ergebnisband des St. Galler Symposiums, 1979). Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y., 1980. P. 143–77.

Forti G.L. Общее решение функционального уравнения $\{cf(x + y) - af(x) - bf(y) - d\}\{f(x + y) - f(x) - f(y)\} = 0$ (итал.). Matematiche (Catania), **34**, 219–42.

Ger R. Almost additive functions on semigroups and a functional equation. Publ. Math. Debrecen, **26**, 219–28. MR: **81e**, #39010.

Głowacki E., Kuczma M. Some remarks on Hosszú's functional equation on integers. Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk. — Prace Mat., **9**, 53–63. MR: **81m**, #39014.

Grzysiewicz A.

(a) On the solution of the system of functional equations related to quadratic functionals. Glas. Mat. Ser. III **14**(**34**), 77–82. MR: **80b**, #39004.

(b) On some homomorphisms in product Brandt groupoids. Wyż. Szkół. Ped. Kraków. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat., **9**, 67–72. MR: **81i**, #20111.

Grzysiewicz A., Sikorski P. On some homomorphisms in Ehresmann groupoids. Wyż. Szkół. Ped. Kraków. Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., **9**, 55–66. MR: **81i**, #20110.

Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth edn. Oxford University Press, N.Y., 1979. MR: **81i**, #10002.

Haruki H. On a generalization of Hille's functional equation. Ann. Polon. Math. **36**, 205–11. MR: **80i**, #30040.

Haruki Sh. A property of quadratic polynomials. Amer. Math. Monthly, **86**, 577–9. MR: **80g**, #26010.

Járai A. On measurable solutions of functional equations. Publ. Math. Debrecen, **26**, 17–35. MR: **80f**, #39008.

Johnson R.W. Axiomatic characterization of the directed divergences and their linear combinations. IEEE Trans. Inform. Theory, IT- **25**, 709–16. MR: **80m**, #94027.

Jou S.S. On the functional equation $f[x + yf(x)] = f(x)f(y)$. Kyungpook Math. J. **19**, 115–18. MR: **80j**, #39007.

Kannappan Pl.

(a) An application of a differential equation in information theory. *Glas. Mat. Ser. III*, **14**(34), 269–74. *MR*: **83f**, #39006.

(b) Solution 2 of Problem 177 (**P177S2**). *Aequationes Math.*, **19**, 114–15.

Krapež A.

(a) On solving a system of balanced functional equations on quasigroups, II. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **25**(39), 70–8. *MR*: **81a**, #39006.

(b) On solving a system of balanced functional equations on quasigroups, III. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **26**(40), 145–56. *MR*: **81h**, #39012.

Laird P. G. On characterizations of exponential polynomials. *Pacific J. Math.*, **80**, 503–7. *MR*: **80h**, #43003.

Lajkó K. Remark to a paper by J. A. Baker. *Aequationes Math.*, **19**, 227–31. *MR*: **83a**, #39008.

Lawrence J., Mess G., Zorzitto F. Near derivations and information functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **76**, 117–22. *MR*: **80d**, #39005.

Lester J. A. A characterization of non-Euclidean non-Minkowskian inner product space isometries. *Utilitas Math.*, **16**, 101–9. *MR*: **81f**, #51014.

McKiernan M. A.

(a) General Pexider equations, I. Existence of injective solutions. *Pacific J. Math.*, **82**, 499–502. *MR*: **81f**, #39009a.

(b) General Pexider equations, II. An application of the theory of webs. *Pacific J. Math.*, **82**, 503–14. *MR*: **81f**, #39009b.

Mosznier Z., Waśko M. Sur les solutions d'une équation fonctionnelle, III. *Aequationes Math.*, **19**, 79–88. *MR*: **80g**, #20074.

Nagy B. On cosine operator functions. *Publ. Math. Debrecen*, **26**, 133–8. *MR*: **81**, #47042.

Natale E. Medial idempotent commutative n -quasigroups. *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli*, (4), **46**, 221–9. *MR*: **82a**, #20083.

Pavlović V. The Moufang functional equation

$$B_1(x, B_2(y, B_3(x, z))) = B_4(B_5(B_6(x, y), x), z)$$

on GD-groupoids. *Aequationes Math.*, **19**, 37–47. *MR*: **80h**, #20112.

Penney R. C., Rukhin A. L. D'Alembert's functional equation on groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **77**, 73–80. *MR*: **80h**, #39013.

Reich L., Schwaiger J. Analytische und fraktionelle Iteration formal-biholomorpher Abbildungen. B: Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1979. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1979. P. 123–44. *MR*: **81h**, #58056.

Roberts F. S. Measurement Theory. With applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 7). Addison-Wesley, Reading, Mass., 1979. *MR*: **81b**, #90003.

Ruzsa I. Z. Additive functions with bounded difference. *Period. Math. Hungar.*, **10**, 67–70. *MR*: **58**, #10795 (1979).

Schwaiger J. (compil.) Sechzehntes Internationales Symposium über Funktionalgleichungen (Schloss Retzhof, Österreich, 3–10. September 1978). *Aequationes Math.* **19**, 245–99.

Schwerdtfeger H. Geometry of Complex Numbers. Second edn. Dover, N.Y., 1979. *MR*: **82g**, #51032.

Sen D. K. The special-relativistic velocity-addition law and a related functional equation. *Internat. J. Theoret. Phys.*, **18**, 179–84. *MR*: **81a**, #83004.

Shimizu R. On a lack of memory property of the exponential distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **31**, 309–13. *MR*: **81f**, #62026.

Székelyhidi L. Remark on a paper of M.A. McKiernan: 'On vanishing n -th ordered differences and Hamel-bases'. *Ann. Polon. Math.*, **36**, 245–7. *MR*: **80h**, #39011.

Ušan J. Квазигруппы (сербохорват.). *Inst. Mat., Novi Sad*, 1979. *MR*: **81g**, #20133.

Wirsing E. Additive and completely additive functions with restricted growth. *B: Recent Progress in Analytic Number Theory (Durham. 1979)*. 1982. V. 2. Academic Press, L. P. 231–80. *MR*: **83a**, #10096.

Zdun M. C. Continuous and Differentiable Iteration Semigroups. (Uniw. Śląski w Katowicach *Prace Nauk.*, No. 308). Uniw. Śląski, Katowice, 1979. *MR*: **81e**, #39006.

1980

Головинский И. А. Ранняя история аналитических итераций и функциональных уравнений. «Истор.-матем. исслед.», **25**, 25–31. *MR*: **82f**, #01040.

Соколов Е. И. Исследование функционального уравнения $f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = F(g(x), h(y), l(x), k(y))$ над кольцом непрерывных функций на R . В сб.: «Общая алгебра и дискретная геометрия», Кишинёв, «Штиинца», 1980. С. 99–107, 163. *MR*: **83h**, #39011.

Ядренко М. И. Спектральная теория случайных полей. Киев, «Вища школа», 1980. (Англ. перевод: Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y.; Optimization Software, N.Y., 1983). *MR*: **82e**, #60081.

Aczél J.

(a) General solution of a system of functional equations satisfied by sums of powers on arithmetic progressions. *Aequationes Math.*, **21**, 39–43. *MR*: **81m**, #39009.

(b) Information functions on open domain, III. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**, 281–5. *MR*: **81m**, #39012.

(c) Some good and bad characters I have known and where they led. (Harmonic analysis and functional equations). *B: 1980 Seminar on Harmonic Analysis. (Canad. Math. Soc. Conf. Proc. V. 1)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1981. P. 177–87. *MR*: **84j**, #39009.

Aczél J., Wagner C. A characterization of weighted arithmetic means. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, **1**, 259–60. *MR*: **81m**, #39012.

Bühl E., Rüthing D. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. *Praxis Math.*, **22**, 37–40. *MR*: **81a**, #39003.

Baker J. A.

(a) On a theorem of Daróczy, Lajkó and Székelyhidi. *Publ. Math. Debrecen* **27**, 283–8. *MR*: **82h**, #39007.

(b) The stability of the cosine equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**, 411–16. *MR*: **81m**, #39015.

Beddingfield N. K. An initial value problem for a functional equation. *Aequationes Math.*, **20**, 90–6. *MR*: **81g**, #39004.

Benz W.

(a) Eine Beckman-Quarles-Charakterisierung der Lorentztransformation des R^n . *Arch. Math. (Basel)*, **34**, 550–9. *MR*: **82h**, #51022.

(b) On a functional equation arising from hyperbolic geometry. *Aequationes Math.*, **21**, 113–9. *MR*: **82b**, #51024.

Borelli Forti C. Some classes of solutions of the functional equation $f(L + x) = f(L) + f(x)$. *Riv. Mat. Univ. Parma (4)* **6**, 37–45. *MR*: **82m**, #39008.

Borelli Forti C., Fenyő I. О разностных уравнениях относительно приращений переменных (итал.). *Stochastica*, **4**, 93–101. *MR*: **82b**, #39002.

Chung J. K. A generalization of a linear functional equation, II. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, **1980**, no. 678–715, 183–190. *MR*: **83h**, #39012.

Corovei I. The functional equation $f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)g(y)$ for nilpotent groups. *Mathematica (Cluj)*, **22(45)**, 33–41. *MR*: **82j**, #39007.

Cowell F. A. On the structure of additive inequality measures. *Rev. Econom. Stud.*, **47**, 521–31.

Daróczy Z. Über die stetigen Lösungen der Aczél-Benz'schen Funktionalgleichung. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **50**, 210–8. *MR*: **81k**, #39005.

Davidson T. M. K. A functional equation for quadratic forms. *Aequationes Math.*, **21**, 1–7. *MR*: **82a**, #39004.

Davidson T. M. K., Redlin L. Hosszú's functional equation over rings generated by their units. *Aequationes Math.*, **21**, 121–8. *MR*: **82h**, #39004.

Fenyő I. Замечания о некоторых теоремах Д. Х. Хайерса (итал.). *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, **114**, 235–42. *MR*: **85a**, #39008.

Forti G. L. An existence and stability theorem for a class of functional equations. *Stochastica*, **4**, 23–30. *MR*: **81i**, #39006.

Gehrig W. On generalized quasilinear functions and their applications in economic theory. *Methods Oper. Res.*, **38**, 103–14.

Haruki H. On a theorem of inverse geometry. *Ann. Polon. Math.*, **38**, 163–8. *MR*: **82b**, #51020.

Haruki Sh. Note on the equation $(\Delta_{x,t}^2 - \Delta_{y,t}^2)f = 0$. *Aequationes Math.*, **21**, 49–52. *MR*: **82f**, #39008.

Kairies H. H. (compil.) Siebzehnte internationale Tagung über Funktionalgleichungen, Oberwolfach vom 17.6. bis 23.6.1979. *Aequationes Math.* **20**, 286–315.

Kannappan Pl. On directed divergence, inaccuracy and a functional equation connected with Abel, II. *Period. Math. Hungar.*, **11**, 213–19. *MR*: **82c**, #39008.

Kannappan Pl., Ng C. T.

(a) On functional equations and measures of information, II. *J. Appl. Probab.*, **17**, 271–7. *MR*: **83h**, #39015.

(b) Measurable solutions of the functional equation $f(q, u) - g(pq, uv) - h(q - pq, uw) = A(p, q, v, w)$. *Nanta Math.*, **13**, 69–77.

Krapež A.

(a) Generalized associativity on groupoids. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **28** (42), 105–12. *MR*: **83h**, #20084.

(b) Almost trivial groupoids. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **28**(42), 113–24. *MR*: **83c**, #20085.

Laczkovich M. Functions with measurable differences. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **35**, 217–35. *MR*: **82a**, #39002.

Lajkó K.

(a) Some general functional equations. *Publ. Math. Debrecen*, **27**, 177.

(b) On the functional equation $f(x)g(y) = h(ax + by)k(cx + dy)$. *Period. Math. Hungar.*, **11**, 187–95. *MR*: **81k**, #39007.

Lester J. A. The solution of a system of quadratic functional equations. *Ann. Polon. Math.*, **37**, 113–17. *MR*: **81g**, #39010.

Lutz D.

(a) Compactness properties of operator cosine functions. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**, 277–80. *MR*: **82f**, #47047.

(b) Über operatorwertige Lösungen der Funktionalgleichung des Cosinus. *Math. Z.*, **171**, 233–45. *MR*: **81i**, #47043.

Maksa Gy. Bounded symmetric information functions. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**, 247–52. *MR*: **82a**, #94032.

Marchionna C. Непрерывность решений одного класса функциональных уравнений (итал.). *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), **17**, 727–39. *MR*: **81i**, #39008.

Midura S. Sur les solutions de l'équation fonctionnelle $f[x + 3f^2(y) - 3f(x)f(y) - y] = f(x) - f(y)$. *Aequationes Math.*, **20**, 302–3.

Mosznér Z. Sur l'équation $f(x)f(y)f(-x-y) = g(x)g(y)g(-x-y)$. *Aequationes Math.*, **21**, 20–32. *MR*: **82a**, #39003.

Ng C. T.

(a) Information functions on open domains. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**, 119–23. *MR*: **83a**, #39010a.

(b) Information functions on open domains, II. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **2**, 155–8. *MR*: **83a**, #39010b.

Paganoni L. Решения функциональных уравнений на ограниченной области (итал.). *Boll. Un. Mat. Ital. B* (5), **17**, 979–93.

Paganoni L. Paganoni Marzegalli, S. Cauchy's functional equation on semigroups. *Fund. Math.*, **110**, 63–74. *MR*: **82c**, #39009.

Radó F. On the characterization of plane affine isometries. *Resultate Math.*, **3**, 70–3. *MR*: **82e**, #51015.

Rădulescu M. On a supra-additive and supra-multiplicative operator of $C(X)$. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.)*, **24(72)**, 303–5. *MR*: **82g**, #47024.

Redlin L. (compil.) Proceedings of the Eighteenth International Symposium on Functional Equations (Waterloo and Scarborough, Ontario, Canada, 26 August–6 September, 1980). Centre for Information Theory, University of Waterloo, Waterloo, Ont., 1980. *MR*: **83f**, #39001.

Reich L. Neuere Ergebnisse über kontinuierliche Iteration formaler Potenzreihen. *Bonner Math. Schriften*, **121**, 62–79. *MR*: **83h**, #39011.

Świątek H. On an equation of information theory. *Aequationes Math.*, **20**, 18–22. *MR*: **81d**, #39004.

Székeleyhidi L. Almost periodic functions and functional equations. *Acta Sci. Math.* (Szeged), **42**, 165–9. *MR*: **81f**, #39010.

Taylor M. A. A Pexider equation for functions defined on a semigroup. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **36**, 211–13. *MR*: **83d**, #39012.

Truesdell C., Muncaster R. G. Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monatomic Gas Treated as a Branch of Rational Mechanics. Academic Press, N.Y.–L.–Toronto–Sydney–San Francisco, 1980. *MR*: **81f**, #80001.

Wirsing E. Additive functions with restricted growth on the numbers of the form $p+1$. *Acta Arith.*, **37**, 345–57. *MR*: **82b**, #10056.

1981

Aczél J.

(a) Notes on generalized information functions. *Aequationes Math.*, **22**, 97–107. *MR*: **83e**, #94020.

(b) Second solution to problem 206 (P206S2). *Aequationes Math.*, **22**, 310–11.

(c) On the Thomsen condition on webs. *J. Geom.*, **17**, 155–60. *MR*: **83e**, #20081.

Aczél J., Kannappan Pl., Ng C. T., Wagner C. Functional equations and inequalities in 'rational group decision making'. B: General Inequalities 3 (Proc. Third Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1981). Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983. P. 239–43. *MR*: **86j**, #39009.

Aczél J., Ng C. T. On general information functions. *Utilitas Math.*, **19**, 157–70. *MR*: **82m**, #39011.

Aczél J., Wagner C. Rational group decision making generalized: the case of several unknown functions. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **3**, 139–42.

Baker J. A. A generalized Pexider equation. *Publ. Math. Debrecen*, **28**, 265–70. *MR*: **84c**, #39003.

Baker J. A., Davidson K. R. Cosine exponential and quadratic functions. *Glas. Mat. Ser. III*, **16** (36), 269–74. *MR*: **83e**, #39010.

Benz W.

(a) Über eine Charakterisierung des hyperbolischen Flächeninhaltes und eine Funktionalgleichung. Publ. Math. Debrecen, **28**, 259–63. MR: **83k**, #53016.

(b) Die Heavisidefunktion als spezielle Lösung ihrer Funktionalgleichung. Aequationes Math., **23**, 151–5. MR: **84d**, #39005.

Bergman G. M. Solution to problem 178 (P178S1). Aequationes Math., **23**, 311–2.

Borelli Forti C., Forti G. L. On the structure of semigroups occurring in the representation of the solutions of a functional equation. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, **39**, 99–106. MR: **83m**, #39007.

Cowell F. A., Kuga K. Additivity and the entropy concept: Axiomatic approach to inequality measurement. J. Econom. Theory, **25**, 131–43.

Davidson K. R., Ng C. T. Information measures and cohomology. Utilitas Math., **20**, 27–34. MR: **83e**, #94021.

Davison T. M. K. On Gleason's definition of quadratic forms. Canad. Math. Bull., **24**, 233–6. MR: **82h**, #15030.

Ebanks B. R. A characterization of separable utility functions. Kybernetika (Prague), **17**, 244–55. MR: **82m**, #90024.

Falmagne J. C. On a recurrent misuse of a classical functional equation result. J. Math. Psych., **23**, 190–3. MR: **83d**, #26004.

Fenyő I., Paganoni L. On a system of functional equations. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **3**, 109–12. MR: **82g**, #39007.

Fischer P., Mokanski J. P. A class of symmetric biadditive functionals. Aequationes Math., **23**, 169–74. MR: **84d**, #15025.

Flatto L., Jacobson D. Functions satisfying a discrete mean value property. Aequationes Math., **22**, 173–93. MR: **84g**, #31004.

Forti G. L., Paganoni L. A method for solving a conditional Cauchy equation on abelian groups. Ann. Mat. Pura Appl. (4), **127**, 79–99. MR: **84d**, #39009.

Ger R. Almost approximately additive mappings. B: General Inequalities 3 (Proc. Third Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1981). Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983. P. 263–76. MR: **86k**, #39008.

Haruki Sh. On the theorem of S. Kakutani, M. Nagumo and J. L. Walsh for the mean value property of harmonic and complex polynomials. Pacific J. Math., **94**, 113–23. MR: **83d**, #30025.

Heuvers K. J. Functional equations which characterize n -forms and homogeneous functions of degree n . Aequationes Math., **22**, 223–48. MR: **83h**, #39013.

Humblet P. A. Generalization of Huffman coding to minimize the probability of buffer overflow. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-**27**, 230–2.

Janssen A. J. E. M. Note on a paper by M. Laczkovich: «Functions with measurable differences» [Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **35** (1980), no. 1–2, 217–235]. Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., **43**, 309–13. MR: **83i**, #26005.

Jurkat W. B., Sawyer B. L. R. On continuous maps of sequence spaces. Analysis, **1**, 209–10. MR: **83g**, #40005.

Jussila O. История функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (финн.). Arkhivedes, **33**, 193–203. MR: **83d**, #01033.

Kominek Z. On the continuity of Q -convex functions and additive functions. Aequationes Math., **23**, 146–50. MR: **84e**, #26012.

Krapež A. Functional equations of generalized associativity, bisymmetry, transitivity and distributivity. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **30**, 81–87. MR: **84d**, #39007.

Laczkovich M. A generalization of Kemperman's inequality $2f(x) \leq f(x + h) + f(x + 2h)$. B: General Inequalities 3 (Proc. Third Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1981). Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983. P. 281–93. MR: **86h**, #39021.

Lajkó K. On the general solution of rectangle-type functional equations. Publ. Math. Debrecen, **28**, 137–43. MR: **82i**, #39007.

Lawrence J.

(a) The cocycle equation in division rings. Aequationes Math., **22**, 70–2. MR: **82h**, #39005.

(b) The Shannon kernel of a non-negative information function. Aequationes Math., **23**, 233–5.

Lehrer K., Wagner C. Rational Consensus in Science and Society. A Philosophical and Mathematical Study. (Philosophical Studies Series in Philosophy. V. 24). Reidel, Dordrecht–Boston–L. 1981. MR: **84k**, #03018.

Lewin L. Polylogarithms and Associated Functions. North Holland, N.Y.–Amsterdam, 1981. MR: **83b**, #33019.

Ljubenova E. T. On d'Alembert's functional equation on an abelian group. Aequationes Math., **22**, 54–5. MR: **82k**, #39006.

Losonczi L., Maksa Gy. The general solution of a functional equation of information theory. Glas. Mat. Ser. III, **16(36)**, 261–8. MR: **83h**, #39010.

Lutz D. Strongly continuous operator cosine functions. B: Functional Analysis (Dubrovnik, 1981). (Lecture Notes in Math. V. 948). Springer, Berlin. 1982. P. 73–97. MR: **84f**, #47044.

Maksa Gy.

(a) On near-derivations. Proc. Amer. Math. Soc., **81**, 406–8. MR: **81m**, #39010.

(b) On the bounded solutions of a functional equation. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **37**, 445–50. MR: **82g**, #94008.

(c) The general solution of a functional equation related to the mixed theory of information. Aequationes Math., **22**, 90–6. MR: **82i**, #39006.

(d) First solution to problem 206 (**P206S1**). Aequationes Math., **22**, 311.

Nikodem K. On additive set-valued functions. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **6**, 1005–13. MR: **82m**, #28005.

Pokropp F. Macroeconomic production correspondence and consistent aggregation. Methods Oper. Res., **39**, 145–60.

Polonijo M. Associativity and n -ary cyclic bisymmetry. Rostock. Math. Kolloq. **16**, 81–6. MR: **83d**, #39010.

Powgżka Z. On the differentiability of generalized subadditive functions. Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat., **22**, 189–94. MR: **82m**, #39012.

Rätz J.

(a) Zur Charakterisierung des Skalarproduktes. Elem. Math., **36**, 94–7. MR: **82i**, #15026.

(b) On light-cone-preserving mappings of the plane. B: General Inequalities 3 (Proc. Third Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1981). Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983. P. 349–67. MR: **84h**, #00007.

Redlin L. (compil.) Proceedings of the Nineteenth International Symposium on Functional Equations (Nantes and LaTurbaille, France, 3–13 May, 1981). Centre for Information Theory, University of Waterloo, Waterloo, Ont., 1981. MR: **83b**, #39001.

Reich L. Über die allgemeine Lösung der Translationsgleichung in Potenzreihenringen. Ber. Math.-Statist. Sect. Forsch. Graz, **159**, 1–22. MR: **83k**, #39008.

Sander W. Pexider equations. Glas. Mat. Ser. III, **16 (36)**, 275–85. MR: **83f**, #39007.

Sweet L. On the generalized cube and octahedron equations. Aequationes Math. **22**, 29–38. MR: **83m**, #49050.

Świątak H. On alternatives equivalent to the Cauchy functional equation and a related equation. Aequationes Math., **23**, 66–75. MR: **84a**, #39007.

Székeleyhidi L.

(a) The stability of linear functional equations. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **3**, 63–7. MR: **82e**, #39007.

(b) On a stability theorem. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **3**, 253–5. MR: **83a**, #39012.

(c) Functional equations on abelian groups. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **37**, 235–43. MR: **82f**, #39010.

(d) An extension theorem for a functional equation. Publ. Math. Debrecen, **28**, 275–9. MR: **82k**, #39005.

Targonski G. Topics in Iteration Theory. (Studia Math., Skr. 6). Vandenhoeck Ruprecht, Göttingen-Zürich, 1981. MR: **82j**, #39001.

Valenti S., Rodono L.G. Sur une suite liée à l'équation fonctionnelle $f(xy) = g(y)f(x) + g(x)f(y)$. Atti Accad. Sci. Lett. Arti Palermo Parte I (4) **38**, 87–97. MR: **83k**, #39009.

Volkman P. Existenz einer zwischen zwei Funktionen v, w gelegenen Lösung von Funktionalgleichungen der Form $u(\Phi(x_1, \dots, x_n)) = \phi(u(x_1), \dots, u(x_n))$, wenn u, w entsprechenden Funktionalungleichungen genügen. B: General Inequalities 3 (Proc. Third Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1981). Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1983. P. 531–2.

Volkman P., Weigel H. Systeme von Funktionalgleichungen. Arch. Math. (Basel), **37**, 443–9. MR: **83e**, #39014.

Žižović M.R. Topological medial n -quasigroups. B: Algebraic Conference (Novi Sad, 1981). Inst. Mat. Novi Sad, 1982. P. 61–6. MR: **84i**, #22004.

1982

Борисов И. С. Об одном критерии марковости гауссовских случайных процессов. «Теория вероятностей и её применения», **27**, N 4, 802–805. MR: **84e**, #60054.

Aczél J., Chung J.K. Integrable solutions of functional equations of a general type. Studia Sci. Math. Hungar., **17**, 51–67. MR: **85i**, #39008.

Albert M., Baker J.A. Bounded solutions of a functional inequality. Canad. Math. Bull., **25**, 491–5. MR: **84k**, #39018.

Bagyinszki J. The solution of the Hosszú equation over finite fields. Közl. MTA Számítástech. Automat. Kutató Int. Budapest, **25**, 25–33. MR: **84d**, #39008.

Blanton G., Baker J.A. Iteration groups generated by C^n functions. Arch. Math. (Brno), **18**, 121–7. MR: **85e**, #26004.

Brillouët N. Équations fonctionnelles et théorie des groupes. Publ. Math. Univ., Nantes, 1982.

Brunner N. A note on the difference property. Collect. Math., **33**, 221–3. MR: **85j**, #39001.

Campbell L.L. Information submartingales. B: Transactions of the Ninth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague, 1982. Academia, Prague, 1983. P. 171–6. MR: **85i**, #00018a.

Dankiewicz K., Moszner Z. Prolongements des homomorphismes et des solutions de l'équation de translation. Wyz. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat., **10**, 27–44.

Daróczy Z., Páles Zs. On comparison of mean values. Publ. Math. Debrecen, **29**, 107–15. MR: **84e**, #39007.

Dhombres J.

(a) Recent applications of functional equations. B: Proc. Second World Conf. Math. at the Service of Man, Las Palmas, 1982. 1982. V. 2. Univ. Politec., Barcelona.,

(b) Moyennes. Publ. Math. Univ., Nantes, 1982.

(c) Remark 7. Aequationes Math., **24**, 289.

Dyjak C. On a characterization of trigonometrical and hyperbolic functions by functional equations. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **32(46)**, 45–8. MR: **84i**, #39005.

Ebanks B. R.

(a) A note on symmetric utility rules for gambles. J. Math. Econom., **9**, 107–11. MR: **83c**, #90018.

(b) The Twentieth International Symposium on Functional Equations, August 1 — August 7, 1982, Oberwolfach, Germany. Aequationes Math., **24**, 261–97.

Eichhorn W., Gehrig W. Measurement of inequality in economics. B: Modern Applied Mathematics—Optimization and Operations Research. North Holland, Amsterdam–N.Y., 1982. P. 657–93.

Fishburn P. C.

(a) A note on linear utility. J. Econom. Theory, **27**, 444–6. MR: **83k**, #90016.

(b) Math. Psych., **26**, 31–67. MR: **84g**, #90020.

(c) The Foundations of Expected Utility. (Theory and Decision Library. V. 31). Reidel, Dordrecht–Boston–L., 1982. MR: **85k**, #90021.

Forti G. L.

(a) On some Cauchy Equations on Thin Sets. (Univ. Studi Milano, No. 16/S(II)). 1st. Mat. F. Enriques, Milano, 1982.

(b) On an alternative functional equation related to the Cauchy equation. Aequationes Math., **24**, 195–206. MR: **85c**, #39011.

Galambos J. The role of functional equations in stochastic model building. Aequationes Math., **25**, 21–41. MR: **85g**, #62028.

Glazek K., Gleichgewicht B. Bibliography of n -groups (polyadic groups) and some group-like n -ary structures. B: Proc. Symp. n -ary Structures (Skopje, 1982). Makedonska Akad. Nauk Umetnost., Skopje, 1982. P. 77–86. MR: **85j**, #20078.

Hildebrand A. A characterization of the logarithm as an additive arithmetic function. Arch. Math. (Basel), **38**, 535–9. MR: **84e**, #10049.

Járai A. Regularity properties of functional equations. Aequationes Math., **25**, 52–66. MR: **84k**, #39015.

Kannappan Pl. Information functions on open domain. IV. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **4**, 207–12. MR: **84b**, #94017.

Kovács K. On the characterization of additive and multiplicative functions. Studio Sci. Math. Hungar., **18**, 1–11. MR: **86m**, #11004.

Kuwagaki A. Sur l'équation fonctionnelle des vecteurs dans R^3 : $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$. Studia Humana Natur. (Kyoto), **16**, 1–6.

Losonczi L., Maksa Gy. On some functional equations of the information theory. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **39**, 73–82. MR: **85b**, #39003.

Lundberg A. Generalized distributivity for real, continuous functions. I: Structure theorems and surjective solutions. Aequationes Math., **24**, 74–96. MR: **85d**, #39010.

Maksa Gy. Solution on the open triangle of the generalized fundamental equation of information with four unknown functions. Utilitas Math., **21**, 267–82. MR: **83k**, #94015.

Mosznér Z. Quelques remarques sur les solutions continues de l'équation de translation sur un groupe. Demonstratio Math., **15**, 279–84. MR: **84k**, #39017.

Neuman F.

(a) Functions of the form $\sum_{i=1}^N f_i(x)g_i(t)$ in L_2 . Arch. Math. (Brno), **18**, 19–22. MR: **85a**, #26026.

(b) Factorizations of matrices and functions of two variables. Czechoslovak Math. J., **32 (107)**, 582–8. MR: **84d**, #15017.

Páles Zs. Characterization of quasideviation means. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **40**, 243–60. MR: **84j**, #26018.

- Parsloe A. J.* An asymptotic form of Cauchy's functional equation. *Aequationes Math.*, **25**, 194–208. *MR*: **85c**, #39007.
- Rukhin A. L.* The solution of the functional equation of d'Alembert's type for commutative groups. *Internat. J. Math. Sci.*, **5**, 315–35. *MR*: **84g**, #39006.
- Sander W.* Boundedness properties for functional inequalities. *Manuscripta Math.* **39**, 271–6. *MR*: **84d**, #39013.
- Székeleyhidi L.*
- (a) On a theorem of Baker, Lawrence and Zorzitto. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84**, 95–6. *MR*: **83a**, #39011.
 - (b) The stability of d'Alembert-type functional equations. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **44**, 313–20. *MR*: **84m**, #39020.
 - (c) Note on a stability theorem. *Canad. Math. Bull.*, **25**, 500–1. *MR*: **83m**, #39002.
 - (d) On the zeros of exponential polynomials. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **4**, 189–94. *MR*: **83k**, #22012.
 - (e) On a class of linear functional equations. *Publ. Math. Debrecen* **29**, 19–28.
- Targonski G.* Unsolved problems in iteration theory. B: *Theorie de l'iteration et ses Applications* (Toulouse, 1982). (Colloq. Internal. CNRS. V. 332). CNRS, Paris, 1982. *MR*: **86m**, #58079.
- Tsutsumi A., Haruki Sh.* Functional equations and hypoeilpticity. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **58**, 105–8. *MR*: **83j**, #39008.
- Turdza E.* Stability of Cauchy equations. *Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, **10**, 141–6.
- Volkmann P.* Sur un système d'équations fonctionnelles. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **4**, 155–8. *MR*: **83k**, #39010.
- Volkmann P., Weigel H.* Sur la solution de certaines équations fonctionnelles. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Nauk. — Prace Mat.*, **12**, 22–9. *MR*: **83g**, #39005.
- Wagner C.* Allocation, Lehrer models, and the consensus of probabilities. *Theory and Decision*, **14**, 207–20. *MR*: **83m**, #90002.
- Wołodzko S.* A modification of a construction of Z. Moszner. *Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt.*, **10**, 165–9.

1983

- Бродский Я. С., Слипченко А. К.* Функциональные уравнения, Киев «Вища школа» (библиотека физ.-мат. школы. Математика).
- Aczél J.*
- (a) On locally bounded maps of sequence spaces. *Real Anal. Exchange*, **9**, 111–15.
 - (b) Some unsolved problems in the theory of functional equations, II. *Aequationes Math.*, **26**, 255–60.
 - (c) Diamonds are not the Cauchy extensionist's best friend. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **5**, 259–64. *MR*: **85a**, #39005.
- Aczél J., Ng C. T.* Determination of all semisymmetric recursive information measures of multiplicative type on n positive discrete probability distributions. *Linear Algebra Appl.*, **52/53**, 1–30. *MR*: **84j**, #94016.
- Aczél J., Saaty T. L.* Procedures for synthesizing ratio judgements. *J. Math. Psych.*, **27**, 93–102. *MR*: **85a**, #90002.
- Albert M., Baker J. A.* Functions with bounded n -th differences. *Ann. Polon. Math.*, **43**, 93–103.
- Benz W.* On a functional equation in connection with derivations. *Math. Z.*, **183**, 495–501. *MR*: **84m**, #39019.
- Blanton G.* Smoothness in disjoint groups of real functions under composition. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **5**, 169–72. *MR*: **85a**, #26006.

Chew S. H. A generalization of the quasilinear mean with applications to the measurement of income inequality and decision theory resolving the Allais paradox. *Econometrica*, **51**, 1065–92. *MR*: **85g**, #90019.

Cholewa P. W. The stability of the sine equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **88**, 631–4. *MR*: **84m**, #39016.

Christian R. R. Another way to introduce natural logarithms and e . *Two-Year College Math. J.* **14**, 424–6.

Corovei I. The sine functional equation for groups. *Mathematica (Cluj)*, **25(48)**, 11–19. *MR*: **85d**, #39012.

Darsow W. F., Frank M. J. Associative functions and Abel — Schröder systems. *Publ. Math. Debrecen*, **30**, 253–72. *MR*: **85f**, #39007.

Dhombres J. Sur les fonctions simultanément suradditives et surmultiplicatives. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **5**, 207–10. *MR*: **84k**, #16053.

Diminnie C. R., Freese R. W., Andalafte E. Z. An extension of Pythagorean and isosceles orthogonality and a characterization of inner-product spaces. *J. Approx. Theory*, **39**, 295–8. *MR*: **85d**, #46028.

Forti G. L. On some conditional Cauchy equations on thin sets. *Bol. Un. Mat. Ital. B(6)*, **2**, 391–402. *MR*: **84h**, #39007.

Foster J. E. An axiomatic characterization of the Theil measure of income inequality. *J. Econom. Theory*, **31**, 105–21. *MR*: **85a**, #90074.

Gehrig W. On a characterization of the Shannon concentration measure. *Utilitas Math.* **24**, 67–85. *MR*: **85c**, #94010.

Grzegorzczak A., Tabor J. Monotonic solution of the translation equation. *Ann. Polon. Math.*, **43**, 253–60.

Haruki H. On a functional equation for Jacobi's elliptic function $\text{cn}(z; k)$. *Abstracts Amer. Math. Soc.*, **4**, 464, #808-39-75.

Haruki Sh. A truncated cube functional equation. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **59**, 372–4. *MR*: **85e**, #39005.

Hyers D. H. The stability of homomorphisms and related topics. *B: Global Analysis — Analysis of Manifolds*. (Teubner-Texte zur Math., No. 57). Teubner, Leipzig, 1983. P. 140–53. *MR*: **86a**, #39004.

Ježek J., Kepka T. Medial groupoids. *Rozprawy Československé Akad. Věd. Řada Mat. Přírod. Věd.*, **93**, no. 2, 1–93. *MR*: **85k**, #20165.

Kannappan Pl., Ng C. T. On a generalized fundamental equation of information. *Canad. J. Math.*, **35**, 862–72.

Kestelman H. Advanced Problem 6436. *Amer. Math. Monthly*, **90**, 485.

Kovács K. On the characterization of additive and multiplicative functions. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **18**, 1–11. *MR*: **86m**, #11004.

Krause G. M. Interior idempotents and nonrepresentability of groupoids. *Stochastica* **1**, 5–10. *MR*: **86a**, #26015.

Kuhn M. A note on t -convex functions. *B: General Inequalities 4 (Proc. Fourth Internal. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1983)*. Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1984. P. 269–76.

Laird P. G., Mills J. On systems of linear functional equations. *Aequationes Math.*, **26**, 64–73. *MR*: **85c**, #39010.

Lajkó K. Some general functional equations. *Publ. Math. Debrecen*, **30**, 225–33. *MR*: **86d**, #39011.

Luce R. D., Cohen M. Factorizable automorphisms in solvable conjoint structures. *I. J. Pure Appl. Algebra*, **27**, 225–61. *MR*: **84d**, #92048.

Mosner Z. Sur un problème concernant des 1-paramétriques Lie-groupes. *Tensor (N.S.)* **40**, 32–4. *MR*: **87f**, #39013.

Paganoni L., Rusconi D. A characterization of some classes of functions F of the form $F(x, y) = g(\alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma)$ or $F(x, y) = \phi(h(x) + k(y))$. *Aequationes Math.*, **26**, 138–62. *MR*: **85f**, #39008.

Przeworska-Rolewicz D. Non-Leibniz algebras. *Studia Math.*, **77**, 69–79. *MR*: **85c**, #47003.

Sander W. Some functional inequalities. *Monatsh. Math.*, **95**, 149–57. *MR*: **84h**, #39011.

Schweizer B., Sklar A. Probabilistic Metric Spaces. North-Holland, N.Y.–Amsterdam, 1983. *MR*: **86g**, #54045.

Skof F.

(a) Локальные свойства и аппроксимация операторов (итал.). *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **53**, 113–29. *MR*: **87m**, #39009.

(b) On the approximation of locally δ -additive mappings. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **117**, 377–89.

Sprecher D. A. On functional complexity and superpositions of functions. *Real Anal. Exchange*, **9**, 412–31. *MR*: **86b**, #26001.

Székeleyhidi L.

(a) Local polynomials and functional equations. *Publ. Math. Debrecen*, **30**, 283–90. *MR*: **85i**, #39010.

(b) Almost periodicity and functional equations. *Aequationes Math.*, **26**, 163–75. *MR*: **85h**, #39003.

Voxman W., Goetschel R. A note on the characterization of the max and min operator. *Inform. Sci.*, **30**, 5–10. *MR*: **84j**, #04001.

Vukman J. Bilinear quadratic functionals (Slovenian). *Obzornik Mat. Fiz.*, **30**, no. 3, 80–5. *MR*: **85f**, #15022.

Zorzitto F. (compil.) The Twenty-first International Symposium on Functional Equations, August 6–August 13, 1983, Konolfingen, Switzerland. *Aequationes Math.*, **26**, 225–94.

1984

Янушкявичене О. Л. Оценка устойчивости одной характеристики экспоненциального закона. *Теория вероятностей и её применения*, **29**, N 2, 279–288. Англ. перевод: *Theory Probab. Appl.*, **29**, 281–292. *MR*: **86a**, #60022.

Aczél J.

(a) On history, applications and theory of functional equations. B: *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 3–12.

(b) Some recent results on information measures, a new generalization and some 'real life' interpretations of the 'old' and new measures. B: *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 175–89.

(c) Related functional equations applied to Korovkin approximation and to the characterization of Rényi entropies — links to uniqueness theory. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **6**, 319–36. *MR*: **86f**, #39003.

(d) On weighted synthesis of judgements. *Aequationes Math.*, **27**, 288–306. *MR*: **86g**, #90008.

Aczél J., Alsina C. Characterization of some classes of quasilinear functions with applications to triangular norms and to synthesizing judgements. B: *Contributions to Production Theory, Natural Resources, Economic Indices and Related Topics*. (Methods of Operations Research. 1984. V. 487). Athenäum–Hain–Hanstein–Königstein. P. 3–12.

Aczél J., Ng C. T., Wagner C. Aggregation theorems for allocation problems. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, **5**, 1–8. MR: **85a**, #90139.

Adamaszek I. Almost trigonometric functions. Glas. Mat. Ser. III, **19(39)**, 83–104. MR: **87m**, #39012.

Birsan T. Une application d'un théorème de J. Aczél. Publ. Math. Debrecen, **31**, 113–18. MR: **86f**, #54047.

Brockett P. L. General bivariate Makeham laws. Scand. Actuar. J., 1984, 150–6. MR: **86k**, #62178.

Cholewa P. W.

(a) Remarks on the stability of functional equations. Aequationes Math. **27**, 76–86. MR: **86d**, #39016.

(b) The stability for a generalized Cauchy type functional equation. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **29**, 457–60. MR: **86c**, #39013.

Daróczy Z., Kotora E. Die Aczél-Benzsche Funktionalgleichung auf der additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Publ. Math. Debrecen, **31**, 221–7. MR: **86d**, #39008.

Dhombres J.

(a) On the historical role of functional equations. B: Functional Equations: History, Applications and Theory. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 17–31.

(b) Some recent applications of functional equations. B: Functional Equations: History, Applications and Theory. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 67–91.

(c) Autour de $f(x)f(y) - f(xy)$. Aequationes Math., **27**, 231–5. MR: **86b**, #39008.

(a) Utilisation des équations fonctionnelles pour la caractérisation des espaces préhilbertiens. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **54**, 159–86.

Drljević H. On the stability of the functional quadratic on A-orthogonal vectors. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **36(50)**, 111–18. MR: **87c**, #47084.

Ebanks B. R. Kurepa's functional equation on Gaussian semigroups. B: Functional Equations: History, Applications and Theory. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 167–73.

Elliott P. D. T. A. Cauchy's functional equation in the mean. Adv. in Math., **51**, 253–7. MR: **86d**, #39009.

Forte B., Ng C. T., Lo Schiavo M. Additive and subadditive entropies for discrete random variables. J. Combin. Inform. System Sci., **9**, 207–16.

Gajda Z.

(a) Additive and convex functions in linear topological spaces. Aequationes Math., **27**, 214–9.

(b) On some properties of Hamel bases connected with the continuity of polynomial functions. Aequationes Math., **27**, 57–75. MR: **86e**, #39006.

Gehrig W.

(a) Functional equation methods applied to economic problems: some examples. B: Functional Equations: History, Applications and Theory. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster. 1984. P. 33–52.

(b) On a characterization of the Shannon concentration measure. B: Functional Equations: History, Applications and Theory. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 191–205.

Haruki H.

(a) An improvements of the Nevalinna–Pólya theorem. B: Functional Equations: History, Applications and Theory. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 113–26.

(b) On a conformal-mapping property. Ann. Polon. Math. **44**, 39–44. MR: **86a**, #30013.

(c) On a functional equation for Jacobi's elliptic function $\operatorname{cn}(z; k)$. Aequationes Math., **27**, 317–21. MR: **85m**, #33003.

Járal A. A remark to a paper of J. Aczél and J.K. Chung. *Studia Sci. Math. Hung.*, **19**, 273–4. *MR*: **87m**, #39006.

Kovács K. The characterization of complex-valued additive functions. *Studia Soc. Math. Hungar.*, **19**, 159–61. *MR*: **86f**, #26003.

Krapež A.

(a) Functional equations on groupoids and related structures. B: *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 57–64.

(b) Groupoids with Δ -kernels. B: *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 93–7.

Krtcha M. A characterization of the Edgeworth–Marshall index. B: *Contributions to Production Theory, Natural Resources, Economic Indices and Related Topics*. (Methods of Operation Research. 1984. V. 48). Athenäum–Hain–Hanstein, Königstein. P. 127–35.

Kuwagaki A. Sur l'équation fonctionnelle du type Pexider pour des 3-vecteurs: $f([x, y]) = [g(x), h(y)]$. *Mem. Konan Univ., Sci. Ser.*, **31**, 113–18.

Laczkovich M.

(a) On Kemperman's inequality $2f(x) \leq f(x+h) + f(x+2h)$. *Colloq. Math.*, **49**, 109–15. *MR*: **86g**, #26028.

(b) On the difference property of the class of pointwise discontinuous functions and some related classes. *Canad. J. Math.*, **36**, 756–68. *MR*: **85j**, #26003.

Matkowski J. Cauchy functional equation on a restricted domain and commuting functions. B: *Iteration Theory and Its Functional Equations* (Proc. Schloss Hofen, 1984). (Lecture Notes in Math. V. 1163). Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y.–Tokyo. 1985. P. 101–6. *MR*: **87a**, #39001.

Mitchell T. M. A functional equations approach to the theory of production, technical change and invariance. *Z. Nationalökonom.*, **44**, 177–87. *MR*: **86i**, #90014.

Páles Zs. On the characterization of means defined on a linear space. *Publ. Math. Debrecen* **31**, 19–27. *MR*: **86d**, #26024.

Papp F. J. Some generalizations of the functional equation satisfied by Russell's 'wage income' and 'optimal consumption plan' functions. *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, **15**, 107–15. *MR*: **85j**, #39007.

Pokropp F. The functional equation of aggregation with weakly monotonically increasing functions. B: *Contributions to Production Theory, Natural Resources, Economic Indices and Related Topics*. (Methods of Operations Research. 1984. V. 48). Athenäum–Hain–Hanstein, Königstein. P. 63–81. *MR*: **86h**, #39009.

Reich L., Schwaiger J. On polynomials in additive and multiplicative functions. B: *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 127–60.

Sander W. Applications of certain $\mathfrak{A}$ -families. *Fund. Math.*, **122**, 77–84. *MR*: **85i**, #28002.

Targonski G. New directions and open problems in iteration theory. *Ber. Math. Statist. Sekt. Forsch. Graz*, **229**, 1–51. *MR*: **86k**, #39009.

Tsutsumi A., Haruki Sh. The regularity of solutions of functional equations and hypoellipticity. B: *Functional equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster, 1984. P. 99–112.

Vilks A. Zur Klein–Nataf–Aggregation bei limitationalen Produktionsfunktionen. B: *Contributions to Production Theory, Natural Resources, Economic Indices and Related Topics*. (Methods of Operations Research. 1984. V. 48). Athenäum–Hain–Hanstein, Königstein. P. 285–93.

Volkman P. Une équation fonctionnelle pour les différences divisées. *Mathematica (Cluj)*, **26(49)**, 175–81. *MR*: **87a**, #39016.

Volkman P., Weigel H. Über ein Problem von Fenyő. *Aequationes Math.*, **27**, 135–49. *MR*: **85h**, #39005.

1985

Aczél J.

(a) A mean value property of the derivative of quadratic polynomials — without mean values and derivatives. *Math. Mag.*, **58**, 42–5. *MR*: **86c**, #39012.

(b) Solutions of a system of functional-differential equations arising from an optimization problem. *Linear Algebra Appl.*, **71**, 9–13. *MR*: **87j**, #39018.

Aczél J., Paganoni L. A generalization of affine functions. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **7**, 257–62. *MR*: **86k**, #39011.

Alsina C., Ger R. Associative operations close to a given one. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **7**, 207–10. *MR*: **87f**, #39014.

Baker J. A. A note on iteration groups. *Aequationes Math.*, **28**, 129–31. *MR*: **86g**, #26003.

Balk B. M. A simple characterization of Fisher's price index. *Statist. Hefte (N.F.)*, **26**, 59–63.

Baron K. A remark on the stability of the Cauchy equation. *Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakl. Prace Mat.*, **11**, 7–12.

Benz W.

(a) On mappings preserving a single Lorentz–Minkowski-distance in Hjelmslev's classical plane. *Aequationes Math.*, **28**, 80–7. *MR*: **86f**, #51010.

(b) Isometrien in normierten Räumen. *Aequationes Math.*, **29**, 204–9.

Buchwalter H. Formes quadratiques sur un semi-groupe involutif. *Math. Ann.* **271**, 619–35.

Cenzer D. The stability problem: new results and counterexamples. *Lett. Math. Phys.*, **10**, 155–63. *MR*: **87e**, #39015.

Chung J. K., Kannappan Pl., Ng C. T. A generalization of the cosine-sine functional equation on groups. *Linear Algebra Appl.*, **66**, 259–77. *MR*: **87c**, #39008.

Corovei I. The functional equation $f(xy) + f(yx) = f(x)f(y) + f(y)f(x)$ on a semigroup into a ring. *Mathematica (Cluj)*, **27(50)**, 97–9. *MR*: **87i**, #39019.

Daróczy Z., Kátai I. On additive number-theoretical functions with values in a compact abelian group. *Aequationes Math.*, **28**, 288–92. *MR*: **86l**, #39010.

Davison T. M. K. (compil.) *Proceedings of the Twenty-third International Symposium on Functional Equations* (Gargnano, Italy, June 2–June 11, 1985). Centre for Information Theory, University of Waterloo, Waterloo, Ont., 1985.

Ebanks B. R.

(a) Measurable solutions of functional equations connected with information measures on open domains. *Utilitas Math.*, **27**, 217–23. *MR*: **87b**, #94020.

(b) (compil.) *The Twenty-second International Symposium on Functional Equations*, Dec. 16–22, 1984, Oberwolfach, Germany. *Actuations Math.*, **29**, 62–111.

Escalone E. F. Problem No. 296. *College Math. J.*, **16**, 153.

Fenyő I. On the general solution of a system of functional equations. *Aequationes Math.*, **28**, 233–5. *MR*: **86m**, #39018.

Forti G. L. A note on a general difference-functional equation. *Stochastica*, **9**, 19–24. *MR*: **87j**, #39004.

Foster J. E. *Inequality measurement. B: Fair Allocation* (AMS Short Course, Anaheim, Cal., Jan. 7–8, 1985). Amer. Math. Soc., Providence, RI 1985. P. 31–68. *MR*: **87g**, #90016.

Ger R. A consistency equation for three geometries. *Aequationes Math.*, **29**, 50–5. *MR*: **87b**, #39007.

Grabmüller H. Cosine families of unbounded operators. *Appl. Anal.*, **19**, 1–38. *MR*: **86h**, #47060.

Haruki H. A proof of Euler's identity by a functional equation. *Aequationes Math.*, **28**, 138–43. *MR*: **86c**, #30045.

Haruki Sh. A nonsymmetric partial difference functional equation analogous to the wave equation. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **61**, 302–4. MR: **87d**, #39003.

Heuvers K. J. A family of symmetric biadditive nonbilinear functions. Aequationes Math., **29**, 14–8. MR: **87j**, #15049.

Kannappan Pt., Sahoo P. K. On a functional equation connected to sum form nonadditive information measures on an open domain. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **7**, 45–50. MR: **86c**, #39011.

Krapež A., Taylor M. A. On the Pexider equation. Aequationes Math., **28**, 170–89. MR: **86e**, #39010.

Kuczma M.

(a) An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality. Univ. Śląsk — P.W.N., Warszawa-Kraków-Katowice, 1985. MR: **86i**, #39008.

(b) On some analogies between measure and category and their applications in the theory of additive functions. Ann. Math. Sil. **13**, 155–62.

Kuwagaki A. Sur l'équation fonctionnelle de type de Pexider pour des matrices carrées: $F(p[X, Y]) = [G(X), H(Y)]$. Mem. Konan Univ., Sci. Ser. **32**, 43–9.

Lawrence J.

(a) The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras. I. Aequationes Math., **28**, 94–101. MR: **86d**, #46041.

(b) Orthogonality and additive functions on normed linear spaces. Colloq. Math., **49**, 253–5. MR: **87g**, #46028.

Losonczi L.

(a) Sum form equations on an open domain, I. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **7**, 85–90. MR: **86i**, #39009.

(b) An extension theorem. Aequationes Math., **28**, 293–9. MR: **86i**, #39005.

Luce R. D., Narens L. Classification of concatenation measurement structures according to scale types. J. Math. Psych., **29**, 1–72. MR: **87j**, #92044.

Lundberg A. Generalized distributivity for real continuous functions. II. Local solutions in the continuous case. Aequationes Math., **28**, 236–51. MR: **86k**, #39012.

Moschner Z. Sur la stabilité de l'équation d'homomorphisme. Aequationes Math., **29**, 290–306. MR: **87b**, #39009.

Narens L. Abstract Measurement Theory. MIT Press, Cambridge, MA-L., 1985.

Neuwirth E. Latent additivity and a differential equation. Publ. Math. Debrecen, **32**, 129–31. MR: **87b**, #92034.

Ng C. T. On a functional equation related to income inequality measures. Aequationes Math., **28**, 161–9. MR: **86d**, #39013.

Paganoni L. On an alternative Cauchy equation. Aequationes Math., **29**, 214–21.

Papp F. J. The d'Alembert functional equation. Amer. Math. Monthly, **92**, 273–5. MR: **86g**, #39003.

Rašković M. An application of nonstandard analysis to functional equations. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **37(51)**, 23–4. MR: **87a**, #39013.

Rätz J. The orthogonally additive mappings. Aequationes Math., **28**, 35–49. MR: **87b**, #39012.

Reich L. Über Iteration ohne Regularitätsbedingungen im Ring der formalen Potenzreihen in einer Variablen. Aequationes Math., **29**, 44–9. MR: **87d**, #13018.

Russell R. R. A note on decomposable inequality measures. Rev. Economic Stud., **52**, 347–52. MR: **87a**, #90015.

Sablík M. Note on a Cauchy conditional equation. Rad. Mat., **1**, 241–5. MR: **87e**, #39015.

Sander W. About solutions of a functional equation. Aequationes Math., **29**, 135–44. MR: **87d**, #39027.

Schroth P. Note on initial topologies in rational vector spaces induced by real valued linear mappings. *Aequationes Math.*, **28**, 252–4. *MR*: **86g**, #39010.

Smítal J. On a problem of Aczél and Erdős concerning Hamel bases. *Aequationes Math.*, **28**, 135–7. *MR*: **86e**, #04004.

Stettler R. Eine axiomatische Herleitung der 2-dimensionalen Lorentztransformation. *Z. Angew. Math. Phys.*, **36**, 538–48. *MR*: **87a**, #83005.

Székeleyhidi L.

(a) Regularity properties of polynomials on groups. *Acta Math. Hungar.*, **45**, 15–19. *MR*: **86h**, #39018a.

(b) Regularity properties of exponential polynomials on groups. *Acta Math. Hungar.*, **45**, 21–6. *MR*: **86h**, #39018b.

Targonski G. Iterationstheorie zwischen Funktionalgleichungen und Dynamik. *Jbuch. Überblicke Math.*, **1985**, 9–28.

Tissier A. Solution of Advanced Problem 6436. *Amer. Math. Monthly*, **92**, 291.

Volkman P. Caractérisation de la fonction $f(x) = x$ par un système de deux inéquations fonctionnelles. *Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, **97**, 177–82.

Vukman J. Some results concerning the Cauchy functional equation in certain Banach algebras. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **31**, 137–44. *MR*: **86f**, #39005.

1986

Мовсисян Ю. М. Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ереван, изд-во университета, 1986. *MR*: **88f**, #08001.

Aczél J. Characterizing information measures: approaching the end of an era. B: Uncertainty in Knowledge-Based Systems (Int. Conf. Inf. Proc. Manag. Uncert. Knowl.-Based Systems, Paris, June-July, 1986). (Lecture Notes in Comp. Sci. V. 286). Springer, Berlin-Heidelberg-N.Y.-L.-Paris-Tokyo. 1987. P. 359–84.

Aczél J., Alsina C. On synthesis of judgements. *Socio-Econom. Plann. Sci.*, **20**, 333–9.

Aczél J., Roberts F. S., Rosenbaum Z. On scientific laws without dimensional constants. *J. Math. Anal. Appl.*, **119**, 389–416. *MR*: **88b**, #00019.

Amir D. Characterizations of Inner Product Spaces. (Operations Theory, Advances and Applications. V. 20). Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart. 1986.

Bacchelli B. Representation of continuous associative functions. *Stochastica*, **10**, 13–28. *MR*: **88e**, #39014.

Bauer H.

(a) A class of means and related inequalities. *Manuscripta Math.*, **55**, 199–211. *MR*: **87j**, #26027.

(b) Mittelwerte und Funktionalgleichungen. *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber.*, **1986**, 1–9.

Benz W. A class of nowhere continuous solutions of Baxter's equation. *Aequationes Math.*, **31**, 169–172. *MR*: **88d**, #39015.

Brillouët N., Dhombres J. Équations fonctionnelles et recherche de sous-groupes. *Aequationes Math.*, **31**, 253–93.

Cheng L. The impact of changes in relative weights on the optimal solution of a maximization problem. *J. Math. Econom.*, **15**, 143–50.

Daróczy Z. On the general solution of a system of functional equations on a commutative semigroup. *Period. Math. Hungar.*, **17**, 27–35. *MR*: **87h**, #39006.

Dhombres J. Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction. *Arch. Hist. Exact Sci.*, **36**, 91–181. *MR*: **88a**, #01019.

Diderrich G. T. Boundedness on a set of positive measure and the fundamental equation of information. *Publ. Math. Debrecen*, **33**, 1–7. *MR*: **87i**, #39014.

- Drljević H.* On a functional which is quadratic on A -orthogonal vectors. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), **40**(54), 63–71.
- Ebanks B.R.* The equation $F(x) + M(x)F(x^{-1}) = 0$ for additive F and multiplicative M on the positive cone of R^n . C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **8**, 247–52. MR: **87m**, #39011.
- Ebanks B.R., Maksa Gy.* Measures of inset information on the open domain—I. Inset entropies and information functions of all degrees. Aequationes Math., **30**, 187–201.
- Eberl W. Jr.* A functional equation for the Mellin-Stieltjes transforms of gamma distributions. J. Math. Anal. Appl., **116**, 538–52. MR: **87h**, #44007.
- Fenyő I.* On an inequality of P.W. Cholewa. B: General Inequalities 5 (Proc. 5th Int. Conf. General Inequalities, Oberwolfach, May 4–10, 1986). Birkhäuser, Basel–Boston, 1987. P. 277–80.
- Fifer Z.* Set-valued Jensen functional equation. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **31**, 297–302.
- Gajda Z.* Christensen measurable solutions of generalized Cauchy functional equations. Aequationes Math., **31**, 147–58. MR: **88d**, #3902.
- Ger J.* Convex functions in metric spaces. Radovi Mat., **2**, 217–36.
- Gueraggio A.* Функциональные уравнения в основаниях финансовой математики (итал.). Riv. Mat. Sci. Econom. Social., **9**, 33–52.
- Ito T., Nara C.* Quasi-arithmetic means of continuous functions. J. Math. Soc. Japan, **38**, 697–720. MR: **87k**, #39003.
- Járai A.* On regular solutions of functional equations. Aequationes Math., **30**, 21–54. MR: **87g**, #39010.
- Johnson B.E.* Approximately multiplicative functionals. J. London Math. Soc. (2), **34**, 489–510. MR: **87k**, #46105.
- Kovács K.* On the characterization of additive functions with monotonic norms. J. Number Theory, **24**, 298–304.
- Kumari K., Parnami J.C., Vasudeva H.L.* On the functional equation $\Delta_y^n f(x) - n!f(y) = 0$. Math. Today, **4**, 11–20. MR: **88d**, #39022.
- Losonczi L.* Sum form equations on an open domain. II. Utilitas Math., **29**, 125–32. MR: **88d**, 94006.
- Luce R.D.* Uniqueness and homogeneity of ordered rational structures. J. Math. Psych., **30**, 391–415. MR: **88h**, #06027.
- Maehara R.* On a connected dense proper subgroup of R^2 whose complement is connected. Proc. Amer. Math. Soc., **97**, 556–8. MR: **87i**, #54042.
- Maksa Gy., Ng C.T.* The fundamental equation of information on open domain. Publ. Math. Debrecen, **33**, 9–11. MR: **87j**, #39015.
- McDougall J.A., Ozeki A.* The octahedron equation implies the cube equation. Aequationes Math., **31**, 243–6.
- McKiernan M.A.*
- (a) On iteration groups and related functional equations. Aequationes Math., **31**, 37–46. MR: **87i**, #39012.
 - (b) Pexider type functional equations and Cartan equivalence problems. Utilitas Math., **30**, 57–62. MR: **87m**, #39010.
- Pannenberg M.* A discrete integral representation for polynomials of fixed maximal degree and their universal Korovkin closure. J. Reine Angew. Math., **370**, 74–82. MR: **87j**, #41083.
- Perelli A., Zannier U.* О функциональном уравнении, связанном с гомоморфизмами группы в поле (итал.). Boll. Un. Mat. Ital. B (6), **5**, 235–45. MR: **87h**, #39008.
- Sablik M.* On extending functions to solutions of some functional equations. Aequationes Math., **31**, 142–6.

Šemrl P. On quadratic and sesquilinear functionals. *Aequationes Math.*, **31**, 184–90. *MR*: **88h**, #39007.

Szabó Gy. On mappings, orthogonally additive in the Birkhoff-James sense. *Aequationes Math.*, **30**, 93–105. *MR*: **87k**, #46040.

Székegyhidi L.

(a) Note on Hyers's theorem. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **8**, 127–9. *MR*: **87g**, #39019.

(b) The Fourier transform of mean periodic functions. *Utilitas Math.*, **29**, 43–8. *MR*: **88c**, #42021.

(c) The Fourier transform of exponential polynomials. *Publ. Math. Debrecen*, **33**, 13–20. *MR*: **87i**, #35082.

Szigei J. Homological methods in the solution of certain functional equations. *Aequationes Math.*, **31**, 310–14.

Talwalker S. Functional equations in characterizations of discrete distributions by Rao-Rubin conditions and its variants. *Commun. Statist. — Theor. Math.*, **15**, 961–79. *MR*: **87f**, #62028.

Volkman L. Über ein System von zwei Funktionalgleichungen. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.)*, **30(78)**, 79–87. *MR*: **88d**, #39017.

Vukman J. An application of S. Kurepa's extension of Jordan-Neumann characterization of pre-Hilbert space. *Glas. Mat. Ser. III*, **21(41)**, 349–52.

1987

Aczél J.

(a) A Short Course on Functional Equations Based upon Recent Applications to the Social and Behavioral Sciences. Reidel, Dordrecht–Boston–Lancaster–Tokyo, 1987.

(b) Scale-invariant equal sacrifice in taxation and conditional functional equations. *Aequationes Math.*, **32**, 336–49. *MR*: **88d**, #39013.

Alsina C., Garcia-Roig J. L. On a functional equation related to the Ptolemaic inequality. *Aequationes Math.*, **34**, 298–303.

Alsina C., Sklar A. A characterization of continuous associative operations whose graphs are ruled surfaces. *Aequationes Math.*, **33**, 114–19.

Bell D. E. Multilinear representation for ordinal utility functions. *J. Math. Psych.*, **31**, 44–59.

Benz W.

(a) The cardinality of the set of discontinuous solutions of a class of functional equations. *Aequationes Math.*, **32**, 58–62.

(b) Ein Beitrag zu einem Problem von Herrn Fenyő. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57**, 21–5.

(c) Ästhetische Rechteckmasse die massstabunabhängig sind. *Math. Methods Appl. Sci.*, **9**, 53–8. *MR*: **88b**, #51037.

Choczewski B. (compil.) Proceedings of the II International Conference on Functional Equations and Inequalities, June 22–27, 1987, Szawnica (Poland). *Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, **12**, 163–234.

Christensen J. P. R., Fischer P. Small sets and a class of general functional equations. *Aequationes Math.*, **33**, 18–23.

Davison T. M. K. Röhmel's equation for quadratic forms. *Aequationes Math.*, **34**, 78–81.

Dhombres J. Moyennes. B: Espaces de Marcinkiewicz — corrélations — mesures — systèmes dynamiques. Masson, Paris–N.Y.–Barcelona–Milan–Mexico–São Paulo, 1987. P. 197–246. *MR*: **88g**, #11049.

Dhombres J., Dahan-Dalmedico A., Bkouche R., Guillemot M. Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars, Paris, 1987. *MR*: **88e**, #10007.

- Ebanks B. R., Kannappan Pl., Ng C. T.* Generalized fundamental equation of information of multiplicative type. *Aequationes Math.*, **32**, 19–31. *MR*: **88d**, #39018.
- Fenyő I.* On the hyperbolic linear functional equations. *Aequationes Math.*, **32**, 252–58.
- Filipescu R.* A simple characterisation of the exponential distribution. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumaine (N.S.)*, **31(79)**, 23–4.
- Forti G. L.* The stability of homomorphisms and amenability with applications to functional equations. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **57**, 215–26.
- Gajda Z.* A solution of a problem of J. Schwaiger. *Aequationes Math.*, **32**, 38–44. *MR*: **88f**, #39005.
- Gracia J. M.* On Pólya's functional equation. *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, **18**, 403–11. *MR*: **88h**, #39008.
- Gronau D.* Johannes Kepler und die Logarithmen. *Ber. Math.-Statist. Sect. Forsch. Graz*, **284**, 1–41.
- Gzyl H.* Characterization of vector valued, gaussian stationary Markov processes. *Statist. Probab. Lett.*, **6**, 17–19.
- Iverson G. J.* Thurstonian psychophysics: Case III. *J. Math. Psych.*, **31**, 219–47.
- Kovács K.* A note on a theorem of P. Erdős. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **22**, 203–6.
- Kurepa S.*
- (a) Quadratic and sesquilinear forms. B: Functional Analysis, II. (Lecture Notes in Math. V. 1242). Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y.–L.–Paris–Tokyo. 1987. P. 43–76. *MR*: **88e**, #46001.
 - (b) On quadratic forms. *Aequationes Math.*, **34**, 125–38.
 - (c) On the definition of a quadratic norm. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **42**, 35–41.
- Maher P. J.* What makes an operator linear. *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, **18**, 177–9.
- Mak K.-T.* Coherent continuous systems and the generalized functional equation of associativity. *Math. Oper. Res.*, **12**, 597–625.
- Maksa Gy.* A characterization of the signed hyperbolic distance. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **9**, 21–4. *MR*: **88h**, #51018.
- Mehring G. H.* Der Hauptsatz über Iteration im Ring der formalen Potenzreihen. *Aequationes Math.*, **32**, 274–96. *MR*: **88h**, #13014.
- Ng C. T.* The equation $F(x) + M(x)G(1/x) = 0$ and homogeneous biadditive forms. *Linear Algebra Appl.*, **93**, 255–79. *MR*: **88g**, #39006.
- Nikodem K.* Midpoint convex functions majorized by midpoint concave functions. *Aequationes Math.*, **32**, 45–51.
- Paganoni L.* On a functional equation concerning affine transformations. *J. Math. Anal. Appl.*, **127**, 475–91.
- Páles Zs.* On the characterization of quasiarithmetic means with weight function. *Aequationes Math.*, **32**, 171–94. *MR*: **88h**, #26007.
- Radó F., Baker J. A.* Pexider's equation and aggregation of allocations. *Aequationes Math.*, **32**, 227–39.
- Rudin W.* Real and Complex Analysis. Third edn. McGraw-Hill, New York–St. Louis–San Francisco–Auckland–Bogota–Hamburg–Johannesburg–L.–Madrid–Mexico–Milan–Montreal–New Delhi–Panama–Paris–São Paulo–Singapore–Sydney–Tokyo–Toronto, 1987.
- Saaty T. L., Vargas L. G.* Stimulus-response with reciprocal kernels. The rise and fall of sensation. *J. Math. Psych.*, **31**, 83–92.
- Sablik M.* (a) (compil.) The Twenty-fourth International Symposium on Functional Equations. August 12 – August 20, 1986, South Hadley, MA. *Aequationes Math.*, **32**, 96–150.
- (b) Generating solutions of some Cauchy and cosine functional equations. *Aequationes Math.*, **32**, 216–26. *MR*: **88f**, #39009.

Strambach K. Multiplikationen mit grossen Automorphismengruppen. *Aequationes Math.*, **32**, 312–26. *MR*: **88g**, #51041.

Sundberg C., Wagner C. A functional equation arising in multi-agent statistical decision theory. *Aequationes Math.*, **32**, 32–7. *MR*: **88d**, #39021.

Székeleyhidi L.

(a) On addition theorems. *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **9**, 139–41.

(b) Remarks on Hyers's theorem. *Publ. Math. Debrecen*, **34**, 131–5. *MR*: **88g**, #39005.

Tabor J. On mappings preserving the stability of the Cauchy functional equation. *Wyż. Szkoła Ped. Krakow. Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, **12**, 139–47.

Vukman J.

(a) Some functional equations in Banach algebras and an application. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **100**, 133–6. *MR*: **88d**, #46093.

(b) A note on additive mappings in noncommutative fields. *Bull. Austral. Math. Soc.*, **36**, 499–502.

Young H. P. Progressive taxation and the equal sacrifice principle. *J. Public Econom.*, **32**, 203–14.

1988

Гантмахер Ф. П. Теория матриц. 4-е изд. М., «Наука», 1988. (1-е изд.: М., Гостехиздат, 1953.) (Англ. перевод: К. А. Hirsch, second edn. Chelsea, N.Y., 1960. *MR*: **21**, #6372 (1960).).

Aczél J. 'Cheaper by the dozen': Twelve functional equations and their applications to the 'laws of science' and to measurement in economics. B: *Measurement in Economics. Theory and Applications of Economic Indices. Physica. Heidelberg*, 1988. P. 3–17.

Blanton G. Smoothness in disjoint groups of real functions under composition. *Aequationes Math.*, **35**, 1–16. *MR*: **89h**, #26004.

Cooke W. P. L'Hôpital's rule in Poisson derivation. *Amer. Math. Monthly*, **95**, 253–4.

Dhombres J. Relations de dépendance entre les équations fonctionnelles de Cauchy. *Aequationes Math.*, **35**, 186–212. *MR*: **89i**, #39011.

Ebanks B. R., Kannappan Pl., Ng C. T. Recursive inset entropies of multiplicative type on open domains. *Aequationes Math.* **36**, 268–93. *MR*: **90a**, #39013.

Eichhorn W., Gleissner W.

(a) The equation of measurement. B: *Measurement in Economics. Theory and Applications of Economic Indices. Physica, Heidelberg*, 1988. P. 19–27.

(b) The solutions of important special cases of the equation of measurement. B: *Measurement in Economics. Theory and Applications of Economic Indices. Physica, Heidelberg*, 1988. P. 29–37.

Farnsworth D., Orr R. Transformation of power means and a new class of means. *J. Math. Anal. Appl.*, **129**, 394–400. *MR*: **89f**, #26021.

Gajda Z. On stability of the Cauchy equation on semigroups. *Aequationes Math.*, **36**, 76–9.

Galambos J. *Advanced Probability Theory.* (Probability: Pure and Appl. Ser., V. 3). Marcel Dekker, N.Y.-Basel, 1988. *MR*: **90j**, #60001.

Ger R.

(a) (compil.) The Twenty-fifth International Symposium on Functional Equations, August 16–22, 1987, Hamburg-Rissen, Germany. *Aequationes Math.*, **35**, 82–121.

(b) Almost approximately convex functions. *Math. Slovaca*, **38**, 61–78. *MR*: **89m**, #26020a.

(c) Errata to (b). *Math Slovaca*, **38**, 423. *MR*: **89m**, #26020b.

Gronau D., Reich L. (compil.) Seminar on functional equations Katowice-Graz, May 22–23, 1986. *Aequationes Math.*, **35**, 281–98.

Johnson B. E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras. J. London Math. Soc. (2), **37**, 294–316. MR: **89h**, #46072.

Kulkarni R. D. D'Alembert's functional equation on products of topological groups. Indian J. Pure Appl. Math., **19**, 539–48. MR: **89g**, #39016.

Mak K.-T., Sigmon K. Standard threads and distributivity. Aequationes Math., **36**, 251–67. MR: **89j**, #22001.

Paganoni L. On a functional equation with applications to measurement in economics. B: Measurement in Economics. Theory and Applications of Economic Indices. Physica, Heidelberg, 1988. P. 39–45.

Páles Zs.

(a) On a Pexider-type functional equation for quasideviation means. Acta Math. Hungar., **51**, 205–24. MR: **89e**, #39014.

(b) On homogeneous quasideviation means. Aequationes Math., **36**, 132–52. MR: **90c**, #26050.

Šemrl P. On quadratic functionals. Bull. Austral. Math. Soc., **37**, 27–8.

Smital J. On Functions and Functional Equations. Adam Hilger, Bristol–Philadelphia, 1988. MR: **90c**, #39001.

Stam A. J. Polynomials of binomial type and compound Poisson processes. J. Math. Anal. Appl., **130**, 493–508. MR: **89d**, #60134.

Tabor J. On functions behaving like additive functions. Aequationes Math., **35**, 164–85. MR: **89h**, #39015.

Vukman J. Some remarks on derivations in Banach algebras and related results. Aequationes Math., **36**, 165–75. MR: **90a**, #46120.

Young H. P. Distributive justice in taxation. J. Econom. Theory, **44**, 321–35.

Литература за 1989–2002 гг.

Английское издание этой книги вышло в 1989 г. Ниже приведена небольшая выборка из более чем 1500 работ по функциональным уравнениям за 1989–2002 гг. Более полная библиография, в основном за 1964–2001 гг., опубликована в виде серии Works on Functional Equations in Several Variables (позднее — ... Equations and Inequalities...) в журнале Aequationes Mathematicae: **1** (1968), 152–191; **3** (1969), 271–312; **7** (1971), 270–319; **13** (1975), 159–196; **18** (1978), 218–256; **21** (1980), 283–317; **23** (1981), 277–311; **24** (1982), 299–316; **26** (1983), 298–319; **29** (1985), 113–121; **30** (1986), 288–299; **33** (1987), 269–295; **36** (1988), 303–319; **38** (1989), 255–276; **40** (1990), 94–105; **42** (1991), 107–118; **46** (1993), 308–316; **51** (1996), 181–205; **55** (1998), 177–198; **65** (2003), 164–200.

Я. Ацел

1989

Aczél J., Kuczma M. On two mean value properties and functional equations associated with them. Aequationes Math., **38**, 216–235. MR: **90k**, #39005.

Aczél J., Roberts F. S. On the possible merging functions. Math. Social Sci., **17**, 205–243. MR: **91d**, #90005.

Alsina C., Benz W. Proportion functions in three dimensions. Aequationes Math., **37**, 293–305. MR: **90h**, #39018.

Baker J. A. Functional equations, tempered distributions and Fourier transforms. Trans. Amer. Math. Soc., **315**, 57–68. MR: **90k**, #39006.

Borelli Forti C. Solutions of a nonhomogeneous Cauchy equation. Rad. Mat., **5**, 213–222. MR: **91g**, #39004.

Craigen R., Páles Zs. The associativity equation revisited. Aequationes Math., **37**, 306–312. MR: **90g**, #39019.

Ebanks B.R. (compil.) The Twenty-sixth International Symposium on Functional Equations., April 24 — May 3, 1988, Sant Feliu de Guixols, Catalonia, Spain, Aequationes Math. **37**, 57–127.

Hyers D.H. Polynomial operators. In Topics in mathematical analysis. World Scientific, Singapore. P. 410–444.

Kominek Z. On a local stability of the Jensen functional equation. Demonstratio Math., **22**, 499–507. MR: **91c**, #39010.

Lajkó K. Differences. Publ. Math. Debrecen, **36**, 157–160. MR: **91c**, #39011.

Mosznér Z. Une généralisation d'un résultat de J. Aczél et M. Hosszú sur l'équation de translation. Aequationes Math., **37**, 267–278. MR: **90e**, #39014.

Paganoni L., Paganoni-Marzegalli S. Holomorphic solutions of an inhomogeneous Cauchy equation. Aequationes Math., **37**, 197–200. MR: **90e**, #39013.

Páles Zs., Volkmann P. Characterization of a class of means. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **11**, 221–224. MR: **90k**, #39008.

Smajdor A., Smajdor W. Jensen equation and Nemytskiĭ operator for set-valued functions. Rad. Mat., **5**, 311–320. MR: **97c**, #47127.

Suppes P., Krantz D.M., Luce R.D., Tversky A. Foundations of measurement. V. 2. Geometrical, threshold, and probabilistic representations. Academic Press, San Diego. MR: **91g**, #00022.

Szabó Gy. New results on quadratic functions. Glasnik Mat. Ser. III, **24**, 35–43. MR: **91h**, #39007.

Székeleyhidi L. An abstract superstability theorem. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **59**, 81–83. MR: **91c**, #39012.

1990

Белоусов В.Д. Скрепленные изотопии квазигрупп. Матем. исслед., **113** (Квазигруппы и их системы), 14–20. MR: **91j**, #20165.

Бухштабер В.М. Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы. УМН, **45**, **3**, 185–186. MR: **91j**, #39002.

Бухштабер В.М., Холодов А.Н. Формальные группы, функциональные уравнения и обобщённые теории когомологий. Матем. сб., **81**, **1**, 75–94. MR: **91e**, #55009.

Aczél J. Determining merged relative scores. J. Math. Anal. Appl., **150**, 20–40. MR: **90g**, #90089.

Anczyk L. (compil.) The Twenty-seventh International Symposium on Functional Equations, August 14–24, Bielsko-Biała — Katowice — Kraków, Poland. Aequationes Math., **39**, 264–329. MR: **91b**, #39010.

Baker J.A. On some mathematical characters. Glas. Mat. Ser. III, **25**, 319–328. MR: **94h**, #39006.

Deeba Y., Koh E.L. The Pexider functional equations in distributions. Canadian J. Math., **42**, 314–324. MR: **91i**, #39002.

Gajda Z., Miller H.I. On quadratic functionals and some properties of Hamel bases. J. Math. Anal. Appl., **145**, 45–51. MR: **90m**, #39020.

Haruki H. A new Pythagorean functional equation. Aequationes Math., **40**, 271–280. MR: **92c**, #39018.

Losonczi L. Local solutions of functional equations. Glas. Mat. Ser. III, **25**, 57–67. MR: **92c**, #39023.

Luce R.D., Krantz D.M., Suppes P., Tversky A. Foundations of measurement. V. 3. Representation, axiomatization, and invariance. Academic Press, San Diego. MR: **91e**, #92024.

Neuman F. Finite sums of products of functions in single variables. Linear Algebra Appl., **134**, 153–164. MR: **91h**, #26013.

Ng C. T. Jensen's functional equation on groups. *Aequationes Math.*, **39**, 85–94. *MR: 91c*, #39014.

Roberts F. S. Merging relative scores. *J. Math. Anal. Appl.*, **147**, 30–52. *MR 91e: #92029*.

Sablik M. The continuous solutions of a functional equation of Abel. *Aequationes Math.*, **39**, 19–39. *MR: 91a*, #39006.

Šemrl P. Additive functions and two characterizations of inner-product spaces. *Glas. Mat. Ser. III*, **25**, 309–317. *MR: 94f*, #46028.

Székeleyhidi L. The stability of the sine and cosine functional equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **110**, 109–115. *MR: 90m*, #39024.

1991

Alsina C., Garcia-Roig J. L. On a functional equation characterizing inner product spaces. *Publ. Math. Debrecen*, **39**, 299–304.

Baker J. A. The stability of certain functional equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112**, 729–732. *MR: 91j*, #39003.

Ebanks B. R., Heuvers K. J., Ng C. T. On Cauchy differences of all orders. *Aequationes Math.*, **42**, 137–153.

Faber V., Kuczma M., Mycielski J. Some models of plane geometries and a functional equation. *Colloq. Math.*, **62**, 279–281. *MR: 93b*, #39005.

Krapež A., Taylor M. A. Quasigroups satisfying balanced but not Belousov equations are group isotopes. *Aequationes Math.*, **42**, 37–46.

Kuczma M. On quasiarithmetic means in a mean value property and the associated functional equation. *Aequationes Math.*, **41**, 33–54.

Marshall A. W., Olkin I. Functional equations for multivariate exponential distributions. *J. Multivariate Anal.*, **39**, 209–215. *MR: 92i*, #60039.

Rassias Th. M. On a modified Hyers-Ulam sequence. *J. Math. Anal. Appl.*, **158**, 106–113.

Roberts F. S. Characterization of the plurality function. *Math. Social Sci.* **21**, 101–127. *MR: 92f*, #90006.

Schwaiger J. (compil.) The Twenty-eighth International Symposium on Functional Equations, August 23–September 1, 1990. Graz-Mariatrost, Austria. *Aequationes Math.*, **41**, 248–312.

Schweizer B. Thirty years of copulas. In *Advances in probability distributions with given marginals*. Kluwer, Dordrecht. P. 13–50. *MR: 94c*, #60023.

Šemrl P. Additive derivations of some operator algebras. *Illinois J. Math.*, **35**, 234–240.

Stengel B. V. Eine Dekompositionstheorie für mehrstellige Funktionen. Hain, Frankfurt/Main.

Székeleyhidi L. Convolution type functional equations on topological algebraic groups. World Scientific, Singapore. *MR: 92f*, #39004.

Tsutsumi A., Haruki S. On hypoelliptic functional equations. *Math. Japon.*, **36**, 581–590. *MR: 92j*, #39018.

1992

Benz W. Functional equations which are exorbitant. *Arch. Math. (Basel)*, **58**, 301–306. *MR: 93c*, #39002.

Bonk M. On the second part of Hilbert's fifth problem. *Math. Z.*, **210**, 475–493. *MR: 93f*, #39017.

Castillo E., Ruiz-Cobo M. R. Functional equations and modelling in science and engineering. Marcel-Dekker, N.Y. *MR: 93k*, #39006.

Gudder S. A generalization of d'Alembert's functional equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**, 419–425. *MR: 92i*, #39010.

Járai A. Hölder continuous solutions of functional equations. C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **14**, 213–218. MR: **94b**, #39027.

Niemenmaa M., Kepka T. On a general associativity law on groupoids. Monatsh. Math., **113**, 51–57. MR: **93b**, #20112.

Páles Zs.

(a) On reduction of linear two variable functional equations to differential equations without substitutions. Aequationes Math., **43**, 236–247.

(b) (compil.) The Twenty-ninth International Symposium on Functional Equations, June 3–10, 1991, Wolfville, NS, Canada. Aequationes Math., **43**, 264–309.

Rassias J. M. On the stability of the Euler-Lagrange functional equation. C.R. Acad. Bulgare Sci., **45**, No. **6**, 17–20. MR: **94e**, #39022.

Rochberg R., Rubel L. A. A functional equation. Indiana Univ. Math. J., **41**, 363–372. MR: **94f**, #39009.

Šimša J. A note on certain functional determinants. Aequationes Math., **44**, 35–41. MR: **93i**, #39005.

Tabor Jo. Approximate endomorphisms of the complex plane. J. Nator. Geom., **1**, No. **2**, 71–86. MR: **93e**, #39011.

Tóth J. A functional equation related to random fields. Rev. Roum. Math. Pures Appl., **37**, 261–264. MR: **93g**, #60109.

1993

Alsina C., Guíjarro P., Tomás M. S. A characterization of inner product spaces based on a property of height's transformation. Arch. Math. (Basel), **61**, 560–566.

Baker J. A. A functional equation of Aczél and Chung. Aequationes Math., **46**, 99–111.

Benz W. On a general principle of geometry that leads to functional equations. Aequationes Math., **46**, 3–10. MR: **94k**, #39036.

Candea J. C., Indurain E. On the structure of homothetic functions. Aequationes Math., **45**, 207–218. MR: **94d**, #39006.

Ebanks B. R. Factoring multiadditive mappings. Linear and Multilinear Algebra, **33**, 175–184.

Kannappan Pl., Laird P. G. Functional equations and second degree polynomials. J. Ramanujan Math. Soc., **8**, 95–110. MR: **95e**, #39003.

Nikodem K. (compil.) The Thirtieth International Symposium on Functional Equations, September 20–26, 1992, Oberwolfach, Germany. Aequationes Math., **46**, 264–307.

Szabó Gy. A conditional Cauchy equation on normed spaces. Publ. Math. Debrecen, **42**, 265–271.

1994

Бухштабер В. М., Веселов А. П. Операторы Данкла, функциональные уравнения и преобразования эллиптических родов. УМН, **49**, 2, 147–148. MR: **95g**, #39026.

Aczél J., Alsina C. On building indices. Utilitas Math., **45**, 17–31. MR: **95h**, #39014.

Aczél J., Gronau D., Schwaiger J. Increasing solutions of the homogeneity equation and of similar equations. J. Math. Anal. Appl., **182**, 436–464. MR: **95h**, #39013.

Aczél J., Moszner Z. New results on «scale» and «size» arguments justifying invariance properties of empirical indices and laws. Math. Social Sci., **28**, 3–33. MR: **95k**, #92027.

Badora R. On approximately additive functions. Ann. Math. Sil., No. **8**, 11–126. MR: **96i**, # 39038.

Borelli Forti C. On Hyers-Ulam stability of Hosszú's functional equation. Resultate Math., **26**, 221–224.

Bukhstaber V. M., Felder G., Veselov A. P. Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations. Duke Math. J., **76**, 885–911. MR: **96b**, #39014.

Chung J. K., Ebanks B. R., Ng C. T., Sahoo P. K. On a functional equation connected with Rao's quadratic entropy. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120**, 843–848. *MR*: **94c**, #39019.

Förg-Rob W., Schwaiger J. On the stability of some functional equations for generalized hyperbolic functions and for the generalized cosine equation. *Resultate Math.*, **26**, 274–280.

Haruki S., Ng C. T. Partial difference equations analogous to the Cauchy–Riemann equation on rings and fields. *Resultate Math.*, **26**, 313–323.

Jóó I., Szabó S. Remark on additive functions. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, **37**, 165–170. *MR*: **95i**, #11004.

Sablik M. A functional equation of Abel revisited. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **64**, 203–210. *MR*: **95i**, #39015.

Schwaiger J.

(a) Funktionalgleichungen: Grundlegende Gleichungen und Anwendungen — ein kleiner Überblick. In *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, Vieweg, Braunschweig. P. 1–13. *MR*: **95j**, #39029.

(b) On a characterization of polynomials by divided differences. *Aequationes Math.*, **48**, 317–323.

Szabó Gy. The Thirty-first International Symposium on Functional Equations, August 22–28, 1993, Debrecen, Hungary. *Aequationes Math.*, **47**, 263–327.

Zorzitto F. Groups acting on circulant matrices. *Aequationes Math.*, **48**, 294–305.

1995

Aczél J. Some recent applications of functional equations to the social and behavioral sciences. Further problems. *Aequationes Math.*, **50**, 38–49. *MR*: **97a**, #39028.

Baker J. A. Triangular mean value theorems and Fréchet's equation. *Acta Math. Hungar.*, **69**, 111–126. *MR*: **96k**, #39028.

Bonk M. The characterization of theta functions by functional equations. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **65**, 29–55.

Brzdek J. On some conditional functional equations of Gołąb–Schinzel type. *Ann. Math. Sil.*, No. 9, 65–80.

Candéal J. C., Indurain E. Homothetic and weakly homothetic preferences. *J. Math. Econom.*, **24**, 147–158. *MR*: **96b**, #90006.

Chung J. K., Ebanks B. R., Ng C. T., Sahoo P. K. On a quadratic-trigonometric functional equation and some applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**, 1131–1161. *MR*: **95j**, #39041.

Davison T. M. K., Ebanks B. R. Cocycles on cancellative semigroups. *Publ. Math. Debrecen*, **46**, 137–147. *MR*: **96c**, #20120.

Forti G. L. Hyers–Ulam stability of functional equations in several variables. *Aequationes Math.*, **50**, 143–190. *MR*: **96i**, #39033.

Forti G. L., Paganoni L. Description of the solutions of a system of functional equations related to the plurality functions: the low-dimensional cases. *Resultate Math.*, **27**, 346–351. *MR*: **96h**, #39009.

Laczkovich M. On the resultant of forces. *Acta Math. Hungar.*, **68**, 239–251. *MR*: **96j**, #15024.

Marshall A. W., Olkin I. Multivariate exponential and geometric distributions with limited memory. *J. Multivariate Anal.*, **53**, 110–125. *MR*: **96f**, #60021.

Moszner Z. General theory of the translation equation. *Aequationes Math.*, **50**, 17–37. *MR*: #96h, #39013.

Paganoni L., Rätz J. Conditional functional equations and orthogonal additivity. *Aequationes Math.*, **50**, 135–142.

Palumbo B. A characterization of a certain class of arithmetical multiplicative functions. *Matematiche (Catania)*, **50**, 39–45. *MR*: **96m**, #11003.

Sablik M. (compil.) The Thirty-second International Symposium on Functional Equations, June 12–19, Gargnano, Italy. *Aequationes Math.*, **49**, 166–202.

Stetkaer H. Wilson's functional equation on groups. *Aequationes Math.*, **49**, 252–275. *MR*: **96j**, #39023.

1996

Aczél J., Luce R. D., Maksa Gy. Solutions to three functional equations arising from different ways of measuring utility. *J. Math. Anal. Appl.* **204**, 451–471. *MR*: **99a**, #90049.

Aczél J., Maksa Gy. Solution of the rectangular $m \times n$ generalized bisymmetry equation and of the problem of consistent aggregation. *J. Math. Anal. Appl.*, **203**, 104–126. *MR*: **99f**, #90022.

Aczél J., Rote G., Schwaiger J. Webs, iteration groups, and equivalent changes of probabilities. *Quart. Applied Math.*, **54**, 475–499. *MR*: **97m**, #39003.

Andersen K. M. A characterization of polynomials. *Math. Mag.*, **69**, 137–142.

Brdzdek J. On almost additive functions. *Bull. Austral. Math. Soc.* **54**, 281–290. *MR*: **97j**, #39017.

Forti G. L., Paganoni L. A system of functional equations related to plurality functions. A method for the construction of solutions. *Aequationes Math.* **52**, 135–156.

Kovács K. On a conjecture concerning additive number theoretical functions. *Publ. Math. Debrecen*, **49**, 367–370. *MR*: **97m**, #367–370.

Lawson J. D. The earliest semigroup paper? *Semigroup Forum*, **52**, 55–60. *MR*: **97b**, #01012.

Sablik M.

(a) Basic sets for functional equations. *Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego*, Katowice. *MR*: **99a**, #39061.

(b) (compil.) The Thirty-third International Symposium on Functional Equations, May 21–27, 1995, Caldes de Malavella, Catalonia, Spain. *Aequationes Math.* **51**, 145–180.

Tabor Ja. Hosszú's functional equation on the unit interval is not stable. *Publ. Math. Debrecen*, **49**, 335–340. *MR*: **98k**, #39014.

1997

* *Лихтарников Л. М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. Санкт-Петербург, «Лань».

* *Френкин Б. Р.* Интеграл от степени: неочевидное в очевидном. Математическое просвещение, третья серия, вып. 1, 103–108. М.: МИИМО, 1997. *РЖ Мат.* 1998, 6Б7.

Aczél J., Maksa Gy., Marley A. A. J., Moszner Z. Consistent aggregation of scale families of selection probabilities. *Math. Social Sci.*, **33**, 227–250. *MR*: **98g**, #60008.

Badora R. (compil.) The Thirty-fourth International Symposium on Functional Equations, June 10–19, 1996, Wisła-Jawornik, Poland. *Aequationes Math.*, **53**, 162–205.

Bajger M. A generalized Pexider equation. *Acta Math. Hungar.*, **75**, 43–54. *MR*: **98k**, #39008.

Braden H. W., Buchstaber V. M. The general analytic solution of a functional equation of additive type. *SIAM J. Math. Anal.*, **28**, 903–923. *MR*: **99h**, #39027.

Brdzdek J. On orthogonally exponential functions. *Pacific J. Math.*, **181**, 247–267. *MR*: **99c**, #39035.

Ger R. A Pexider-type equation in normed linear spaces. *Österr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, **206**, 291–303. *MR*: **00a**, #39029.

Gilányi A. On locally monotonic functions. *Publ. Math. Debrecen*, **51**, 343–361. *MR*: **99c**, #39028.

Grabiec A. The stability of a generalized quadratic functional equation. *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, No. 14, 81–91. *MR*: **98m**, #39079.

Mosznier Z., Pilecka-Oborska B. On a generalized quadratic functional equation. *J. Natur. Geom.*, **11**, 17–28. *MR*: **98k**, #39017.

Sinopoulos P. Wilson's functional equation for vector and matrix functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**, 1089–1094.

Tabor Ja. Lipschitz stability of the Cauchy and Jensen equations. *Results Math.* **32**, 133–144. *MR*: **99b**, #39035.

1998

Aczél J. What to do until (and when) the functional equationist arrives. *Publ. Math. Debrecen*, **52**, 247–274. *MR*: **99c**, #39027.

Baron K., Volkmann P. On orthogonally additive functions. *Publ. Math. Debrecen*, **52**, 291–297. *MR*: **99c**, #39034.

Benz W. The translation equation in geometry. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, No. 53, 15–22. *MR*: **99j**, #39022.

Chmieliński J., Rätz J. Orthogonality equation almost everywhere. *Publ. Math. Debrecen*, **52**, 317–335. *MR*: **99e**, #39087.

Davison T. M. K., Ebanks B. R. The cocycle equation and periodic semigroups. *Aequationes Math.*, **56**, 216–221. *MR*: **99h**, #39029.

Ebanks B. R., Sahoo P., Sander W. Characterizations of information measures. World Scientific, Singapore. *MR*: **00g**, #94012.

Gilányi A. Solving linear functional equations with computer. *Math. Pannon.*, **9**, 57–70. *MR*: **99b**, #39033.

Kannappan Pl., Riedel T., Sahoo P. K. On a generalization of a functional equation associated with Simpson's rule. *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, No. 15, 85–101. *MR*: **02b**, #39015.

Kominek Z., Reich L., Schwaiger J. On additive functions fulfilling some additional condition. *Österr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, **207**, 35–42. *MR*: **01g**, #39047.

Matkowski J. Continuous solutions of a functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, **52**, 559–562. *MR*: **99c**, #39030.

Midura S. On solutions of some system of functional equations. *Demonstratio Math.* **31**, 299–304. *MR*: **99k**, 39065.

Ng C. T. An application of a uniqueness theorem to a functional equation arising from measuring utility. *J. Math. Anal. Appl.* **228**, 66–72. *MR*: **99k**, #39066.

Páles Zs., Volkmann P., Luce R. D. Hyers-Ulam stability of functional equations with a square-symmetric operation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **95**, 12772–12775. *MR*: **00a**, #39030.

Sahoo P. K., Riedel T. Mean value theorems and functional equations. World Scientific, Singapore. *MR*: **01h**, #39027.

Šemrl P. Hyers-Ulam stability of isometries. *Houston J. Math.* **24**, 699–706. *MR*: **00b**, #46033.

Sikorska J. (compil.)

(a) The Thirty-fifth International Symposium on Functional Equations, September 7–14, 1997, Graz-Mariatrost, Austria. *Aequationes Math.* **55**, 281–318.

(b) The Thirty-sixth International Symposium on Functional Equations, May 24–30, 1998, Brno, Czech Republic. *Aequationes Math.* **56**, 284–318.

1999

Aczél J., Boros Z., Heller J., Ng C. T. Functional equations in binocular space perception. *J. Math. Psych.*, **43**, 71–101. *MR*: **00f**, #91058.

Batko B., Tabor Jo. Stability of the generalized alternative Cauchy equation. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **69**, 67–73. *MR*: **01k**, #39045.

- Benz W.* Einstein distances in Hilbert spaces. *Results Math.*, **36**, 195–207. *MR*: **01f**, #51008.
- Brzdęk J.* On measurable orthogonally exponential functions. *Arch. Math. (Basel)*, **72**, 185–191. *MR*: **00k**, #39019.
- Daróczy Z., Hajdu G.* On an identity of Ramanujan. *Acta Math. Hungar.*, **82**, 1–9. *MR*: **00a**, #39028.
- Daróczy Z., Maksa Gy.* On a problem of Matkowski. *Colloq. Math.*, **82**, 117–123. *MR*: **02a**, #39028.
- Gilányi A.* Hyers-Ulam stability of monomial functional equations on a general domain. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **96**, 10588–10590. *MR*: **02b**, #39018.
- Jabłoński W.* Stability of the Pexider-type homogeneous equation. *Demonstratio Math.*, **32**, 759–766. *MR*: **01b**, #39026.
- Jung S.-M., Kim B.* On the stability of the quadratic functional equation on bounded domains. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **69**, 293–308. *MR*: **01c**, #39053.
- Laczkovich M.* The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation. *Aequationes Math.*, **58**, 135–142. *MR*: **01d**, #39028.
- Maksa Gy.* Solution of generalized bisymmetry type equations without surjectivity conditions. *Aequationes Math.*, **57**, 50–74. *MR*: **00f**, 39029.
- Mosznér Z.* Les équations et les inégalités liées à l'équation de translation. *Opuscula Math.*, No. 19, 19–43. *MR*: **01j**, #39037.
- Rätz J.* Characterization of inner product spaces by means of orthogonally additive mappings. *Aequationes Math.*, **58**, 111–117. *MR*: **00i**, #46016.
- Skof F.* Use of stability to select deeply characteristic properties of some function classes. *Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **133**, 235–246. *MR*: **01m**, #39075.
- Smajdor W.* Note on Jensen and Pexider functional equations. *Demonstratio Math.*, **32**, 363–376. *MR*: **01h**, 39031.
- Tabor Ja., Tabor Jo.* Stability of the Cauchy type equations in the class of differentiable functions. *J. Approx. Theory*, **98**, 167–182. *MR*: **00f**, #39032.

2000

- Aczél J., Falmagne J.-C., Luce R. D.* Functional equations in the behavioral sciences. *Math. Japon.*, **52**, 469–512. *MR*: **01m**, #39061.
- Aczél J., Gilányi A., Maksa Gy., Marley A. A. J.* Consistent aggregation of simply scalable families of choice probabilities. *Publ. Math. Debrecen*, **57**, 91–96. *MR*: **01d**, #91065.
- Benz W.* A characterization of relativistic addition. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **70**, 201–208. *MR*: **01m**, #83003.
- Boros Z.* Stability of the Cauchy equation in ordered fields. *Math. Pannon.*, **11**, 191–197. *MR*: **01m**, #39045.
- Cabello-Sánchez F.* Pseudo-characters and almost multiplicative functionals. *J. Math. Anal. Appl.*, **248**, 275–289. *MR*: **01i**, #22008.
- Daróczy Z., Ng C. T.* A functional equation on complementary means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **66**, 603–611. *MR*: **01m**, #39056.
- Falmagne J.-C., Lundberg A.* Compatibility of gain control and power law representations — a János Aczél connection. *Aequationes Math.*, **60**, 201–210. *MR*: **02b**, #39022.
- Girgensohn R., Lajkó K.* A functional equation of Davison and its generalization. *Aequationes Math.*, **60**, 219–224. *MR*: **01k**, #39032.
- Jarczyk W., Matkowski J.* Remarks on quasi-arithmetic means. *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, No. 7, 125–141. *MR*: **02d**, #39031.
- Kannappan Pl.* On quadratic functional equations. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **9**, 35–60. *MR*: **01g**, #39062.

Lee Y.-H., Jun K.-W. On the stability of approximately additive mappings. Proc. Amer. Math. Soc., **128**, 1361–1369. MR: **00j**, #39023.

Luce R. D. Utility of gains and losses: Measurement-theoretical and experimental approaches. Erlbaum, Mahwah NJ–L.

Maksa Gy., Marley A. A. J., Páles Zs. On a functional equation arising from joint-receipt utility models. Aequationes Math. **59**, 273–286. MR: **01h**, #39032.

Maksa Gy., Volkmann P. Characterization of group homomorphisms having values in an inner product space. Publ. Math. Debrecen **56**, 197–200. MR: **01a**, #39064.

Riedel T. (compil.) The Thirty-seventh International Symposium on Functional Equations, May 16–23, 1999, Huntington, WV USA. Aequationes Math., **60**, 167–200.

Sikorska J. Orthogonal stability of the Cauchy equation on balls. Demonstratio Math. **33**, 527–546. MR: **01m**, #39074.

Stetkaer H. D'Alembert's and Wilson's functional equations for vector and 2×2 matrix valued functions. Math. Scand. **87**, 115–132. MR: **02a**, #39033.

Tryhuk V. On global transformations of ordinary differential equations of the second order. Czechoslovak. Math. J. **50**, 499–508. MR: **01e**, #34006.

2001

Михайличенко Г. Г., Малышев В. М. Феноменологическая симметрия и функциональные уравнения. Изв. высших учебных завед. Математика, 2001, **7**, 77–79. MR: **02j**, #39018.

Aczél J., Maksa Gy., Páles Zs. Solution of a functional equation arising in an axiomatization of the utility of binary gambles. Proc. Amer. Math. Soc., **129**, 483–493. MR: **01e**, #39008.

Boros Z. (compil.) The Thirty-eighth International Symposium on Functional Equations, June 11–18, Noszvaj, Hungary. Aequationes Math. **51**, 281–320.

Brillouët-Belluot N. More about some functional equations of multiplicative symmetry. Publ. Math. Debrecen, **58**, 575–585.

Brzdęk J. On functions which are almost additive modulo a subgroup. Glas. Mat. Ser. III, **36**, 1–9. MR: **02h**, #39033.

Davison T. M. K. A Hosszú-like functional equation. Publ. Math. Debrecen, **58**, 505–513. MR: **02d**, #39046.

Jung S.-M. On the stability of a multiplicative functional equation. J. Math. Anal. Appl., **254**, 247–261. MR: **01k**, 39035.

Riedel T., Sablik M., Sahoo P. K. On a functional equation in actuarial mathematics. J. Math. Anal. Appl., **253**, 16–34. MR: **01m**, #39066.

Szostok T. Modified version of Jensen's equation and additivity. Publ. Math. Debrecen **58**, 491–504. MR: **02e**, #39084.

2002

Aczél J., Luce R. D. Two functional equations preserving functional forms. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **99**, 5512–55216.

Benvenuti P., Vivona D., Divari M. The Cauchy equation on I-semigroups. Aequationes Math., **63**, 220–230.

Daróczy Z., Páles Zs. Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski-Sutô problem. Publicationes Math. Debrecen, **61**, 157–218.

Früß P. de Pl. (compil.), The Thirty-ninth International Symposium on Functional Equations, August 12–18, 2001, Sandbjerg, Denmark. Aequationes Math. **64**, 170–200.

Früß P. de Pl., Stetkaer H. On the cosine-sine functional equation on groups. Aequationes Math., **64**, 145–164.

Ger J. On Sahoo-Riedel equations on real intervals. Aequationes Math., **63**, 168–179.

Járai A., Sander W. On the characterization of Weierstrass's sigma function. In Functional Equations—Results and Advances, Kluwer, Dordrecht. P. 29–75.

Lajkó K., Páles Zs. On a Mikusiński-Jensen functional equation. In Functional Equations—Results and Advances, Kluwer, Dordrecht. P. 81–87.

Ng C. T., Luce R. D., Aczél J. Functional characterizations of basic properties of utility representations. *Monatsh. Math.*, **135**, 305–319.

Sablik M. Final part of the answer to a Hilbert question. In Functional Equations—Results and Advances, Kluwer, Dordrecht. P. 231–242.

Сакоєвич Г. Н. Собрание научных трудов. Киев, 2002.

Tabor Ja. Proper families and almost additive functions. *Aequationes Math.*, **63**, 18–25.

Taylor M. A. The aggregation equation: solutions with non-intersecting partial functions. In Functional Equations — Results and Advances, Kluwer, Dordrecht. P. 351–360.

Wesołowski J. On a functional equation related to the Matsumoto-Yor property. *Aequationes Math.*, **63**, 245–250.

Авторский указатель

- Abel, N.H. 320, 321
Aczél, J. 11, 13, 18–21, 28–30, 32, 34, 38,
43, 47, 52–54, 67, 68, 70, 71, 78, 95, 100,
172, 179, 183–187, 193, 200, 209, 210,
214, 215, 221–223, 233–235, 237, 238,
240, 248, 251, 255, 257, 258, 263, 264,
266–269, 298, 304–306
Alexiewicz, A. 25, 319
Andalafte, E.Z. 132
Andrade, J. 209, 314, 319
Artin, E. 81
Atkinson, F.V. 287

Bürgi, J. 310
Babbadge, C. 320
Bachman, G. 142, 249, 250
Baker, J.A. 20, 21, 174, 176, 195, 199, 201
Banach, S. 25, 172, 175, 319
Bell, D.E. 180
Belousov, V.D. 264, 266
Benz, W. 30, 78, 82, 296
Berg, L. 202
Bernoulli, D. 312
Birkhoff, G. 286
Blanuša, D. 31
Blumenthal, L.M. 124, 132
Bohr, H. 65
Bolyai, J. 320
Borelli Forti, C. 112, 117
Briggs, H. 310
Brillouët, N. 124, 276, 293, 295
Brown, R.B. 179
Burstin, C. 319

Campbell, L.L. 235, 237
Cauchy, A.L. 15, 20, 32, 98, 315, 316, 318
Chernoff, P.R. 96
Cholewa, P.W. 176, 178
Choquet, G. 126, 146
Christian, R.R. 19
Chung, J.K. 188, 193, 209, 210
Corovei, I. 105
Curtiss, D.R. 202, 203

D'Alembert, J. 13, 98, 187, 312, 313
Daróczy, Z. 31, 53, 54, 71, 83, 85, 86, 89,
233–235, 237, 238, 240, 248, 250, 320
Darboux, G. 59, 313, 318, 319
Davison, T.M.K. 173
De Bruijn, N.G. 91
De Sarasa, A. 310

Dhombres, J. 29, 37, 51, 54, 72, 74, 76,
83–86, 96, 97, 111, 112, 117, 130, 145,
222, 224, 229, 240, 248, 268, 276, 278,
280, 282, 285, 287, 289, 290, 292–295,
306
Diderrich, G. 70
Dixmier, J. 106
Djoković, D.Ž. 20, 21, 45
Dunford, N. 119, 135, 137, 197, 285

Eichhorn, W. 298, 299, 301, 303–305
Erdős, J. 20, 240, 248, 319, 320
Euler, L. 279, 311, 312, 314

Favard, J. 66, 73, 145, 146
Favre, A. 298
Fenyő, I. 54, 78
Ficken, F.A. 160
Fischer, P. 29, 126, 175
Forti, G.L. 112, 227, 248
Fox, R.A.S. 285
Fréchet, M. 25, 318, 323
Fuchs, L. 251, 255, 257

Gajda, Z. 118
Galilei, G. 309
Gallager, C.G. 234, 235, 237
Gamlen, J.L.B. 285
Gauss, C.F. 318
Gehrig, W. 305
Ger, J. 74, 83–86, 91, 97, 117, 118, 229
Gleason, A.M. 175
Gołąb, S. 43, 268, 269
Grzaślewicz, A. 20, 30, 174
Guilmard, A. 211

Hadwiger, H. 179
Halmos, P.R. 24
Halphen, C. 298
Hamel, G. 22, 26, 319
Hardy, G.H. 66, 73, 236
Haruki, H. 52, 53, 70, 211
Haupt, O. 323
Heuvers, K.J. 178
Hewitt, E. 22, 67, 106, 140, 146, 292
Hilbert, D. 321
Hille, E. 50, 70, 323
Horinouchi, S. 211
Hosszú, M. 45, 215, 257, 264, 266, 323
Howroyd, T.D. 215
Hua, L.K. 81

- Humblet, P.A. 236
 Hyers, D.H. 176

 Ionescu-Tulcea, C. 120

 Jánossy, L. 179, 183, 184
 Járαι, A. 209, 211, 330
 James, R.C. 169, 170
 Janardan, K.G. 221
 Javor, P. 273
 Jessen, B. 54
 Jones, F.B. 23, 319
 Jurkat, W.B. 29, 52, 91

 Káтай, I. 240, 248, 250, 320
 Kac, M. 67, 319
 Kampé de Fériet, J. 285
 Kannappan, Pl. 20, 21, 29, 82, 95, 188, 193, 201, 211
 Karpf, J. 54
 Kato, T. 50
 Kelley, J.L. 286
 Kemperman, J.H.B. 322
 Kepler, J. 310
 Kestelman, H. 25, 61, 319
 Kiesewetter, H. 321
 Kingman, J.F.C. 287
 Kormes, M. 319
 Kronecker, L. 66
 Krzeszowiak, Z. 268
 Kuczma, M. 47, 49, 74, 76, 81, 113, 117, 118, 126, 147, 219, 249
 Kurepa, S. 29, 152, 173

 Lacroix, S.F. 314
 Laczkovich, M. 72
 Lambek, J. 173
 Lambert, J.H. 311
 Lawrence, J. 85, 292
 Lebesgue, H. 61, 319
 Legendre, A.M. 317
 Lindenstrauss, J. 124
 Lions, J.L. 298
 Littlewood, J.E. 236
 Ljubenova, E.T. 105
 Lorch, E.R. 159
 Losonczi, L. 83, 85, 86, 89, 320
 Luce, R.D. 34
 Lutz, D. 200, 201

 Máté, A. 240, 248
 Maksa, Gy. 70, 71
 Maxwell, J.C. 171
 Mazur, S. 130
 McKiernan, M.A. 52, 210

 Mehdi, M.R. 250, 319
 Mikusiński, J. 76
 Miller, H.I. 215, 285, 287, 295
 Mills, J. 215
 Mokanski, J.P. 175
 Moszner, Z. 18, 38
 Mullin, R. 179
 Muncaster, R.G. 170
 Muszély, G. 126

 Nagumo, M. 323
 Neuhaus, N. 112, 117
 Ng, C.T. 24, 85, 86, 95, 188, 193, 215
 Nguyen Huu Bong 287

 O'Connor, T.A. 103, 104
 Oresme, N. 306, 307, 310
 Orlicz, W. 25, 319
 Ostrowski, A. 25, 142, 319

 Pólya, G. 236
 Paganoni Marzegalli, S. 215
 Parsloe, A.J. 249
 Penney, R.C. 210
 Perron, O. 323
 Pexider, J.V. 46, 322
 Phelps, R.R. 120, 124
 Phillips, R.S. 50, 323
 Picard, É. 13, 100, 313
 Piccard, S. 250, 319
 Pincherle, S. 318
 Pisot, C. 243, 245
 Poisson, S.D. 13, 313
 Popa, C.G. 293

 Rätz, J. 174, 177
 Röhmel, J. 175
 Rényi, A. 34, 179, 183, 184, 235
 Rădulescu, M. 72, 145
 Radó, F. 20, 21, 322
 Rausenberger, O. 322
 Redheffer, R.M. 179, 184, 185
 Reich, L. 38
 Reis, C.M. 82
 Riordan, J. 180
 Robinson, D.A. 70
 Ross, K. 67, 106, 140, 292
 Rota, G.-C. 179, 285, 287
 Rudin, W. 42, 57, 62, 67, 94, 140
 Rukhin, A.L. 210
 Ruziewicz, S. 172, 175

 Saint-Vincent, D. 310
 Samuel, P. 29

- Samuelson, H. 19
 San Juan, R. 22, 319
 Sató, R. 209, 322
 Schiaparelli, G. 323
 Schinzel, A. 268, 269
 Schmidt, H. 179, 184
 Schoenberg, I.J. 243, 245
 Schur, F. 323
 Schwartz, J.T. 119, 135, 137, 197, 285
 Schwarz, H.A. 322
 Schweizer, B. 322
 Segal, S.L. 29
 Segre, B. 61, 319
 Segre, C. 61
 Sharir, M. 124
 Shawyer, B.L.R. 52
 Sierpiński 25
 Sierpiński, W. 30, 118, 319
 Sigmon, K. 251
 Sikorski, P. 20
 Singer, I.M. 291
 Smital, J. 117, 118
 Speiser, J.M. 202
 Stäckel, P. 322
 Steinhaus, H. 24, 319
 Stephanos, C. 322
 Stifel, M. 310
 Strambach, K. 258, 267
 Sundaresan, K. 177
 Sweet, L. 53
 Światak, H. 31, 320
 Székelyhidi, L. 210
 Szabó, Gy. 170
 Szymiczek, K. 47, 50, 51

 Täuber, J. 112, 117
 Taylor, M.A. 47, 264, 266, 267
 Thielman, H.P. 37
 Thomsen, G. 263
 Thorup, A. 54
 Truesdell, C. 170
 Tverberg, H. 68

 Ulam, J. 130

 Van der Corput, J.G. 57
 Vietoris, L. 57, 193
 Vincze, E. 188, 193, 202, 211, 212, 320, 322
 Volkmann, L. 29, 72, 164, 175, 296
 Vranceanu, G. 179, 184

 Wagner, C. 95
 Walsh, J.L. 95
 Ward, L.E. 38
 Weigel, H. 296

 Weil, A. 67, 97, 145, 146, 319
 Wellstein, J. 298
 Wermer, J. 291
 Whitehouse, H.J. 202
 Wilansky, A. 22
 Wilson, E.B. 190, 193, 319, 322
 Wirsing, E. 240
 Wright, E.M. 66, 73

 Young, G.S. 223

 Zariski, O. 29
 Zdun, M.C. 226
 Zinde, V. 95
 Zuckerman, H.S. 22, 146

 Абель, Н.Х. 10, 315, 320–323
 Александров, А.Д. 112, 118
 Александров, П.С. 322
 Андраде, Ж. 314
 Артин, Э. 10
 Архимед 306
 Ацел, Я. 12

 Бернулли, Д. 296, 312
 Бернштейн, С.Н. 126
 Больяи, Я. 320
 Бор, Х. 61, 65, 67
 Бохнер, С. 104, 140, 147
 Бригс 310
 Бэббедж, Ч. 320
 Бюрги, И. 310

 Вейерштрасс, К. 322
 Вейль, Г. 45
 Венков, Б.А. 66, 73

 Галилей, Г. 309, 310
 Галилией, Г. 312
 Гамель 319
 Гантмахер, Ф.Р. 45
 Гаусс, К.Ф. 38, 318
 Гильберт, Д. 321

 Даламбер, Ж. 10, 312, 313
 Ламблтон 307
 Дарбу, Ж. 10, 318
 Де Сараса, А. 310–312
 Де Сен-Венсан, Г. 310
 Дедекин, Р. 315
 Декарт, Р. 312
 Домбр, Ж. 12

Евклид 306, 310, 315, 317

Йордан, Э.П. 149

Кавальери, Б. 310

Кантор, Г. 315

Колмогоров, А.Н. 323

Коши, О.Л. 10, 15, 314–318, 320

Кронекер, Л. 72, 73

Лагранж, Ж.Л. 313

Лакруа, С.Ф. 314, 315, 317, 320

Лаплас 313

Лебег, А. 319

Лежандр, А.М. 317

Лейбниц, Г.В. 19, 311

Лобачевский, Н.И. 10, 320

Максвелл, Дж.К. 171, 172

Микусинский, Я. 76

Монж, Г. 313

Непер, Дж. 310

Ньютон, И. 311

Орем, Н. 10, 306–310, 312

Пикар, Ш.Э. 10

Пуассон, С.Д. 313

Рейнольдс, О. 284

Реньи, А. 235, 326

Синцов, Д.М. 322

Суайнсхед, Р. 307

Фон Нейман, Дж. 149

Харди, Г.Х. 9

Хейтсбери 307

Хованский, Г.С. 260

Швейцер, Б. 12, 322

Шеннон, К.Э. 326

Шоке, Г. 126, 147

Шрёдер, Э. 323

Эйлер, Л. 8, 10, 311, 312, 314, 316

Предметный указатель

- Автоморфизм 59, 61, 71
Аддитивная функция 27, 29–31
Аддитивность ортогональная 148
Аксиома выбора 319
Алгебра полупростая 292
Анализ гармонический 102
Анаморфоза 260
— параллельная 260
Антигоморфизм 82
Антиэндоморфизм 82
Аффинная функция 30
- Базис Гамеля 26–28, 31, 115, 116, 250, 319
Банахова алгебра 90, 139, 147, 176, 285, 291
Банахово пространство 50, 90
Бином Ньютона 314, 317
Бисимметрия 18, 251, 256, 257
— обобщённая 260
Борелевское подмножество 118
- Величина случайная 185
Вероятность события 34
Вес плотности 45
Выбор рациональный групповой 95
Выпуск 299, 303
- Газовая динамика 170
Гармонический анализ 55, 61, 67, 94
Геометрический объект однородный линейный чисто дифференциальный 45
Геометрия гиперболическая 102
— евклидова 102
— неевклидова 98, 100
— эллиптическая 102
Гомоморфизм 82
График функции 22, 31
Группа 2-делимая 29, 53, 173, 176
— , 2-делимость в слабом смысле 191
— абелева локально компактная 94, 102, 104, 106, 210
— Бора 61, 67, 134, 138, 139, 145, 147
— двойственная 139
— делимая 186, 242, 248, 250
— Клиффорда 280
— компактная топологическая абелева 67
— локально компактная 97, 248
Группоид 46, 262
— обобщённый 262
- Декомпозиция регулярная итеративная выпуклая 293
Дилогарифм 19
Дифференцирование 29, 291, 292
— нетривиальное 173
Дифференцируемость решения функционального уравнения 55
Длина вектора 14
— слов квазилинейная средняя 236, 237
— средняя кодового слова 235
Доходность 298
Дробь двоичные 99, 252
- Ж**идкость ньютоновская 284
- Зависимость подмножества точная 268
Закон распределения Максвелла–Больцмана 176
- И**деальный газ 170, 171
Идемпотент 286
Идемпотентность 251
Изменение функции ϕ -медленное 249
Измеримость (измеримая функция) 25
— локальная по Лебегу 210
— — — Хаару 210
Изометрия 130, 131, 133
Изоморфность изометрическая 138
Изотопия 262
Индекс цен 303
Интеграл Лебега 58
Интегральное среднее 63
Интегрируемость решения функционального уравнения 55
Интерполятор 287–289
- К**анторово множество 28, 31
Квазигруппа 262
— обобщённая 262
Квазипродолжение 87, 89, 96
— аддитивное 86
Квазипродолжения уравнений 320
Квазирасширение аддитивное 96
Количество информации 34, 67, 68
Коллинеарность 75, 77
Коллинеации 74
Коллинеация 77
Комбинаторика 179
Компакт хаусдорфов 285, 286
Константа Больцмана 171
Конус 108, 112, 117, 145, 146, 226

- выпуклый 111
- Косинус Якоби эллиптический 211
- Крайний луч 147
- Кривая 224
- Лапласиан 284
- Лебегова мера 28, 30, 31
- Линейное пространство локально выпук-
лое 42
- Линия уровня 260
- Лупа 262, 264
- Муфанг 266
- Луч 108
- крайний 125, 145
- Максимальная цепь 60
- Марковский процесс 179
- Матрица унитарная 45
- эрмитова 45
- Якоби 43
- Матрицы подобные 44, 45
- Медialьность 18, 251
- Медиана 159
- Мера дираковская 123, 133
- Лебега 24, 94
- — положительная линейная 41, 42, 53
- Радона 104, 122, 123, 133, 138, 147, 288
- Хаара 102, 139, 146, 231
- Метризациянное кольцо 146
- Механика неевклидова 98, 100
- Многочлен Белла 180
- Бернулли 296
- биномиального типа 179
- тригонометрический 134
- экспоненциальный 210
- Многочлены Белла 184
- Множество $\mathbb{Q}$ -выпуклое 113, 115
- $\mathbb{Q}$ -звёздное 113, 115, 116
- $\mathcal{C}$ -квазирасширяемое 246
- $\mathcal{R}$ -обильное 84
- выпуклое 108
- квазиобильное 87
- квазирасширяемое 87, 89, 241
- обильное 84, 224, 231, 248
- открыто-замкнутое 286
- полное (full) 86
- положительной меры 52
- регулярное 78
- тощее 250
- усредняющее 289
- Моноид 47, 294
- Мультипликативность 63, 90
- Неравенства функциональные 324
- Неравенство Йенсена 215
- Коши–Буняковского–Шварца 104, 105,
120, 327
- Крафта 234, 237
- Номограмма 260
- из выравненных точек 261
- — — с параллельными прямолиней-
ными шкалами 261
- — параллельных прямых 261
- прямолинейная 261
- Номография 260
- Норма 42, 148
- равномерная 62, 120, 138, 285
- Нормальное распределение 37, 38
- Нормирование 140, 155
- p -адическое 141
- неархимедово 142, 146
- нетривиальное 140, 142, 177
- Нормирования эквивалентные 249
- Нормы неэквивалентные 42
- эквивалентные 177
- Область определения функционального
уравнения 20
- Оболочка $\mathbb{Q}$ -выпуклая 115, 116
- Обращение порядка 108, 111
- Однородность 179, 297
- обобщённая 297
- первой степени 220
- частная обобщённая 300
- Оператор Бакстера 287, 295, 296
- дифференцирования 290
- идемпотентный 285, 286, 289
- интерполяционный 287–289
- инфинитезимальный порождающий 50
- линейный 41
- — q -продолжения 290
- — замкнутый 51
- — ограниченный 41, 50, 53, 120
- — стационарный 295
- марковский 289, 290
- — усредняющий 290
- мультипликативно симметричный 289,
290
- мультипликативный 120
- неотрицательный 120
- продолжения линейный 288
- Рейнольдса 285, 290, 295
- стационарный 290
- усредняющий 285, 286
- хороший (nice) 124, 133
- Операция бинарная, порождаемая опера-
цией над случайными величинами 73
- монотонная 258
- самодистрибутивная 258
- Определитель Вронского 203
- Непрерывное решение функционального
уравнения 26
- Непрерывность 112
- Непрерывное решение функционального
уравнения 26
- Непрерывность 112

- Грама 203
- Казорати 203
- Ортогональная аддитивность 165
- Отображение аддитивное 21
- Параллелограмм сил 13**
- Параметризация точная 275
- — непрерывная 269, 271, 280
- Плоскость бикомплексная 78
- Плотность (обычная) 45
- Вейля 45
- вероятности 170
- Подгруппа однопараметрическая 106
- Подмножество относительно плотное 145
- тощее 231
- Подъём 97, 230
- Поле квадратично замкнутое 187, 200
- нормированное полное 177
- Полезность 223
- Пополнение метрического пространства 142
- Правило параллелограмма 100
- Преобразование аффинное 118, 131
- Лоренца 112
- собственное аффинное 271
- Фурье 94, 104
- Принцип максимальной Хаусдорфа 60
- Продолжение 87, 96
- аддитивное 83, 87
- уравнений 320
- Произведение внутреннее (скалярное) 149
- Коши 291
- Промежуток 19
- Пространство вполне несвязное 285
- гиперстоуново 285
- двойственное 42, 90
- нормированное полное 177
- ортогонально богатое 169, 170, 177
- ортогональности 177
- предгильбертово 148–150, 159, 160, 165, 169, 173, 176, 178
- с внутренним произведением 148
- строго выпуклое 126, 131
- хаусдорфово 119, 123, 132
- Процедура линейного суммирования 52
- Равенство Парсеваля 146**
- Радикал 292
- Разложение Гамеля 26
- Распределение Вейбулла 221
- Максвелла–Больцмана 171
- Пуассона 185
- пуассоновское обычное 183
- — составное (сложное) 183
- скоростей Максвелла–Больцмана 148
- Расширение аддитивное 83–86, 97
- Регулярность 112, 201, 202, 320
- уравнения 152
- Резольвента 176, 296
- Рекурсивность 68
- Решение дифференцируемое 56
- , локально измеримое по Лебегу 27
- , непрерывное в точке 52
- общее 32, 55
- регулярное 20, 32, 55
- функционального уравнения 20
- Ромб 85, 86
- Самодистрибутивность 257
- Свёртка 90, 97
- Свойство архимедовости 142
- Бэра 231, 250
- Дарбу 118
- Скалярное произведение 170
- Сложение векторное 100
- векторов 13
- Случайная величина 73
- Событие 34, 67
- Сократимость 258, 259
- Сохранение порядка 108, 110, 111
- Спектр 90, 147
- пространства 62
- свёрток 94
- Средне квазиарифметическое 323
- Среднее арифметическое 73, 217, 220, 235, 323
- — взвешенное 95
- гармоническое 217
- геометрическое 73, 217
- квадратичное 217, 219
- квазиарифметическое 217–223, 258
- квазилинейное 73, 255
- степенное 217, 219
- экспоненциальное 217, 219–221, 235
- Струна колеблющаяся 313
- Тело кватернионов 155, 173
- Теорема Алаоглу и Бурбаки 135
- Банаха–Стоуна 133
- Бернштейна 126
- Бохнера 104, 147
- Гельфанда–Шнейдера 328
- Крейна–Мильмана 119, 126
- Кронекера 72
- Лебега 57
- Лиувилля 292
- мертонская 307
- о кодировании без помех 235, 237
- обобщённая Стоуна–Вейерштрасса 90
- основная аффинной геометрии 76
- Понтрягина 140
- Радона–Никодима 122

- Рисса о представлении 123, 132, 138
- Стоуна–Вейерштрасса 137, 286
- Титце о продолжении 289
- Фубини 90, 91, 329
- Хуа 81
- Штейнгауза 319
- Теоремы вычитания 190
- сложения 187, 190
- Теория геометрических объектов 43
- информации 34, 55, 234
- кодирования 234
- меры 107
- относительности 112
- Тип функции (λ, δ) 278
- (λ, a, b) 278
- Ткань 263
- Тождество Рейнольдса 285
- Топология p -адическая 141
- нормы 199
- поточечной сходимости 135, 136
- равномерной нормы 137
- — сходимости 145
- слабая звёздная 94, 135, 136, 138, 145
- Точка крайняя 119, 122, 123, 133, 145
- Тригонометрический многочлен 61, 62
- Угол параллельности** 102, 320
- Уравнение Абеля 323
- волновое 202
- Гаусса 37
- Голomba–Шинцеля 292
- Даламбера 16, 98–101, 105, 195, 197, 200, 313, 315
- Иенсена 215, 307
- Коши 20, 40, 74, 89, 94, 127, 181, 313, 319
- — аддитивное 32, 35, 269
- — логарифмическое 32
- — основное 182
- — степенное 35, 45, 323
- — условное 74, 81, 233
- — — многоместное 96
- — — экспоненциальное 91
- — экспоненциальное 34, 91, 183, 200, 269
- линейной итерации 276
- Лобачевского 29, 81, 105
- Микусиньского 76
- Навье–Стокса 284
- Пексидера 46, 96, 213
- сдвига 323
- теории информации основное 69
- условное функциональное 45
- функциональное сложное 269
- — условное 81, 160
- Шрёдера 323
- Эйлера 279
- — дифференциальное 305, 312
- Уравнения альтернативные 320
- Коши условные 320
- функциональные 9
- — на ограниченных областях 74
- — разностного типа 210
- — с несколькими переменными 9
- — условные 74
- Уровень цен 303
- Условие C -обильное 169
- Маркова 179
- редкости 183
- Рейдемейстера 266
- Томсена 263, 267
- шестиугольника 266
- Условия Бола 266
- цилиндрического типа 229
- Устойчивость 324
- Форма непрерывная линейная** 42
- Функции аддитивные теоретико-числовые 232
- Бора почти периодические 67, 138
- вполне аддитивные теоретико-числовые 232
- многоместные 39
- производственные Кобба–Дугласа 301, 302
- производящие 183
- Функционал квадратичный 148, 149, 152, 159, 162, 166, 168, 173–175
- линейный мультипликативный 90
- мультипликативный 97
- ортогонально аддитивный 168
- Функция f -аффинная 222
- F -локально аддитивная 249
- M -аффинная 222
- Z -аддитивная 89
- «внутренняя» 215
- Z -аддитивная 74
- аддитивная 21, 113, 154
- — теоретико-числовая 243
- биаддитивная 148, 152, 156, 157, 178
- Бора почти периодическая 134, 145, 146
- векторная 40
- внутренняя 217, 218
- вполне аддитивная теоретико-числовая 240, 320
- — монотонная (totally monotonic) 124, 126
- , выпуклая по Иенсену 117, 118, 124
- , измеримая по Лебегу 58
- , интегрируемая по Лебегу 90
- , локально интегрируемая по Лебегу 208–211
- монотонная 23
- , непрерывная в точке 23

- ограниченная 23, 112
- ортогонально аддитивная 165, 166, 169, 171, 176, 178
- положительно определённая 104, 146
- полубилинейная 152, 155, 156
- производственная 299
- радиально ограниченная 152
- совершенно монотонная (completely monotonic) 126
- характеристическая 79, 80
- Хевисайда 80

Характер 102, 104, 106, 136

- непрерывный 102
- поля разрывный 72

Характеры группы 67

Хроногеометрия 107, 112

Числа p -адические 142

Экзавы 289, 290

Экономика математическая 298, 305

Элемент, алгебраичный над подполем 60

- нейтральный 46, 262

Эндоморфизм 55, 59, 71, 82, 319

Энтропии рекурсивные 55

Энтропия 34

- ранга a 235

- Шеннона 68, 234, 235

Эрмитовость 150

Эффективность техническая 303

- экономическая 298

a -средняя длина кодового слова 236

R -расширение аддитивное 84