

УДК 51
ББК 22.1
А94

АВТОРЫ:

В. И. Афанасьев, О. В. Зимина, А. И. Кириллов,
И. М. Петрушко, Т. А. Сальникова

Решebник. Высшая математика. Специальные разделы / Под ред. А.И. Кириллова. — 2-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 400 с. — ISBN 5-9221-0423-3.

Книга содержит примеры решения типовых задач по теории функций комплексной переменной, операционному исчислению, рядам Фурье, преобразованию Фурье, уравнениям математической физики, теории вероятностей и математической статистике. Каждой задаче отведен отдельный раздел, содержащий общую постановку задачи, план ее решения с необходимыми теоретическими пояснениями и решение конкретного примера. Кроме того, в раздел включены десять задач для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для студентов, аспирантов и преподавателей технических, экономических и сельскохозяйственных вузов, университетов, а также для научных работников и инженеров; может быть использована как при очной, так и при дистанционной формах обучения.

Ил. 43.

© ФИЗМАТЛИТ, 2001, 2003

© В. И. Афанасьев, О. В. Зимина, А. И. Кириллов,
И. М. Петрушко, Т. А. Сальникова, 2001, 2003

ISBN 5-9221-0423-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ	9
ПРЕДИСЛОВИЕ	15
Глава 1. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	17
1.1. Извлечение корня из комплексного числа	17
1.2. Кривые в комплексной области	19
1.3. Аналитичность, условия Коши–Римана	20
1.4. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части	23
1.5. Интеграл от функции комплексной переменной	26
1.6. Интеграл от аналитической функции	30
1.7. Ряд Тейлора	32
1.8. Ряд Тейлора рациональных функций	34
1.9. Разложение в ряд Тейлора с использованием табличных разложений	37
1.10. Ряды Лорана рациональной функции	39
1.11. Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее особой точки	44
1.12. Нули аналитической функции	47
1.13. Тип изолированной особой точки	51
1.14. Особые точки функции вида $\varphi(z)/\psi(z)$	53
1.15. Вычисление вычетов	54
1.16. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов	58
1.17. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов	60
1.18. Несобственные интегралы от рациональных функций	63
1.19. Несобственные интегралы от функций $R(x) \cos \lambda x$ и $R(x) \sin \lambda x$	67
Глава 2. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	72
2.1. Понятия оригинала и изображения	72
2.2. Изображение функции вида $\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$	75
2.3. Изображение функции вида $f(at)$	76
2.4. Изображение функции вида $e^{-at} f(t)$	77
2.5. Изображение функции вида $\sum_{k=1}^n f_k(t - \tau_k) \eta(t - \tau_k)$	78
2.6. Изображение функции вида $t^n f(t)$	80
2.7. Изображение функции вида $f(t)/t$	81
2.8. Восстановление оригинала по изображению $P_m(p)/Q_n(p)$	83

2.9. Восстановление оригинала по теореме разложения	85
2.10. Восстановление оригинала по изображению $F(p) \cdot G(p)$	87
2.11. Восстановление оригинала по изображению $R(p)e^{-pt}$	89
2.12. Решение линейных дифференциальных уравнений	90
2.13. Решение систем линейных дифференциальных уравнений	93
Глава 3. РЯДЫ ФУРЬЕ	96
3.1. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$	96
3.2. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$	100
3.3. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале (a, b)	104
3.4. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0, \pi)$ по тригонометрической системе	108
3.5. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0, l)$ по тригонометрической системе	113
3.6. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$ в комплексной форме	119
3.7. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале (a, b) по заданной ортогональной системе	122
Глава 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	137
4.1. Синус-преобразование Фурье	137
4.2. Косинус-преобразование Фурье	139
4.3. Комплексное преобразование Фурье	141
4.4. Комплексное преобразование Фурье функции вида $\sum_{k=1}^n a_k x^{m_k} f_k(b_k x + c_k)$	142
4.5. Восстановление функции по ее преобразованию Фурье	146
Глава 5. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	151
5.1. Тип и канонический вид уравнения	152
5.2. Общее решение гиперболического уравнения	158
5.3. Общее решение параболического уравнения	159
5.4. Общее решение эллиптического уравнения	161
5.5. Уравнение Лапласа в круге	162
5.6. Уравнение Лапласа в цилиндре	169
5.7. Уравнение Лапласа в шаре	176
5.8. Уравнение Гельмгольца в круге	182
5.9. Уравнение Гельмгольца в шаре	188
5.10. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа	194
5.11. Уравнение Пуассона в кольце	199
5.12. Уравнение Пуассона в прямоугольнике	206

5.13. Уравнение Пуассона в шаре	217
5.14. Однородное волновое уравнение на отрезке	220
5.15. Неоднородное волновое уравнение на отрезке	225
5.16. Однородное волновое уравнение в прямоугольнике	230
5.17. Задача Коши для волнового уравнения на прямой	237
5.18. Уравнение теплопроводности на отрезке	241
5.19. Уравнение теплопроводности в круге	246
5.20. Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой	251

Глава 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 254

6.1. Классическая вероятностная модель	255
6.2. Гипергеометрическая формула	257
6.3. Размещение шаров по ящикам	261
6.4. Геометрические вероятности (ограниченная область)	263
6.5. Геометрические вероятности (неограниченная область)	266
6.6. Независимые события	269
6.7. Схема Бернулли: фиксированное число испытаний	272
6.8. Схема Бернулли: неограниченное число испытаний	274
6.9. Формулы Муавра–Лапласа и Пуассона	275
6.10. Простейший поток событий	281
6.11. Формулы полной вероятности и Байеса	283
6.12. Распределение дискретной случайной величины	287
6.13. Распределение непрерывной случайной величины	290
6.14. Числовые характеристики дискретной случайной величины	293
6.15. Числовые характеристики непрерывной случайной величины	295
6.16. Распределение и числовые характеристики дискретного случайного вектора	299
6.17. Распределение непрерывного случайного вектора	303
6.18. Числовые характеристики непрерывного случайного вектора	306
6.19. Характеристическая функция	312
6.20. Распределение функции случайной величины	315
6.21. Числовые характеристики функции случайной величины	317
6.22. Распределение функции случайного вектора	320
6.23. Числовые характеристики функции случайного вектора	323
6.24. Нормальное распределение	325
6.25. Центральная предельная теорема	327

Глава 7. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА 329

7.1. Группированный статистический ряд абсолютных частот	330
7.2. Группированного статистический ряд относительных частот	334
7.3. Полигон абсолютных частот	338
7.4. Полигон относительных частот	340
7.5. Гистограмма относительных частот	342
7.6. Эмпирическая функция распределения	346

7.7. Выборочное среднее негруппированной выборки	349
7.8. Выборочное среднее группированного статистического ряда абсолютных частот	351
7.9. Выборочная дисперсия негруппированной выборки	354
7.10. Выборочная дисперсия группированного статистического ряда абсолютных частот	355
7.11. Определение параметров закона распределения методом моментов	358
7.12. Определение параметров закона распределения методом наибольшего правдоподобия	361
7.13. Метод наименьших квадратов	366
7.14. Выравнивание результатов измерений	371
7.15. Случайные интервалы	374
7.16. Доверительный интервал для единственного неизвестного параметра распределения	377
7.17. Доверительные интервалы для параметров нормального закона	384
7.18. Проверка гипотезы о законе распределения по критерию Уилкоксона	389
7.19. Критерий согласия Пирсона χ^2	392

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Учебные пособия серии РЕШЕБНИК создаются в рамках проекта EduXXI, начатого О.В. Зиминной и А.И. Кирилловым в апреле 1999 г. Главная цель EduXXI — максимально облегчить учебу, сделать ее интересной и побуждающей к самостоятельным исследованиям. Основными средствами достижения этой цели в проекте EduXXI служат компьютеры и учебные пособия нового типа — учебные комплексы и решебники.

Учебный комплекс точно соответствует программе дисциплины и содержит конспекты лекций, разработки практических занятий с подробным решением типовых примеров, задачи и упражнения для самостоятельного решения, контрольные вопросы по всем темам (с ответами), варианты контрольных работ, а также программы зачета и экзамена с образцами зачетного и экзаменационного билетов. Пока в России существует только один учебный комплекс — книга „Линейная алгебра и аналитическая геометрия“ О.В. Зиминной (М.: Изд-во МЭИ, 2000.— 328 с.).

Решебник, согласно толковому словарю русского языка под редакцией профессора Д.Н. Ушакова, — это учебное пособие, содержащее подробные решения задач, помещенных в каком-нибудь задачнике; ключ к задачнику. Учебные пособия серии РЕШЕБНИК — ключи сразу к нескольким основным задачникам по соответствующей дисциплине. Они содержат классифицированные образцы решения типовых задач. Каждой задаче отведен отдельный раздел. Он начинается с общей постановки задачи. Затем следует полный и подробный план решения, содержащий необходимые теоретические сведения. Общая постановка задачи и план ее решения пояснены примерами. Они могут служить основой для рассуждений по аналогии. Раздел завершают задачи, предназначенные для самостоятельного решения в точности тем же способом, что в плане и примерах. Все задачи приведены с ответами.

Чтобы научиться решать задачи того или иного типа, рекомендуется сначала изучить план решения в общем виде (алгоритм), затем рассмотреть пример реализации плана в конкретном случае и, по

аналогии с ним, решить несколько задач из числа предлагаемых для самостоятельного решения.

Хотя в отечественной учебной литературе имеется целый ряд превосходных книг, она не соответствует государственным образовательным стандартам во многих отношениях. Учебные пособия серии РЕШЕБНИК призваны устранить этот недостаток в части, касающейся предусмотренных стандартами навыков решения задач.

Чтобы приобрести устойчивый навык решения типовых задач, необходимо решить не менее трех-пяти задач каждого типа. Однако в имеющихся задачниках редко встречается достаточное количество задач одного типа и отсутствует детальная классификация типовых задач по методам их решения. Поэтому решебник, содержащий решения задач из одного задачника, для большинства учащихся окажется бесполезным.

Иначе обстоит дело со сборниками заданий для типовых расчетов. Эти сборники представляют собой сравнительно новый вид учебной литературы и содержат большое количество задач одного типа. Во многих из них задачи хорошо классифицированы.

Типовые расчеты выполняются студентами после изучения одного или нескольких разделов курса. Поэтому в заданиях предполагается, что студенты имеют навыки решения определенного круга задач и для выполнения задания должны использовать совокупность этих навыков. Каждый студент выполняет только один вариант типового расчета. Поэтому студенты не могут научиться решать комбинированные задачи, т.е. именно такие, с какими они впоследствии будут сталкиваться в своей профессиональной деятельности.

В книгах серии РЕШЕБНИК задачи детально классифицированы таким образом, чтобы решение каждой задачи вырабатывало, по возможности, единственный навык. В каждом разделе решебника содержится не менее десяти задач одного типа. Преподаватели могут предложить часть задач на аудиторных практических занятиях, другие — в виде домашних заданий, остальные — использовать в контрольных работах, на коллоквиумах, зачетах и экзаменах.

Решение объективно необходимого количества задач не предусмотрено действующими учебными планами из-за недостатка времени. Студенты должны все понять, решив лишь одну-две задачи, при том, что их внимание отвлекается от сути дела на второстепенные или уже пройденные вопросы, а также на выполнение различных громоздких преобразований и расчетов.

Из-за недостатка времени на практических занятиях приходится

опускать некоторые этапы решения задач, графические иллюстрации и анализ ответов, а также анализ и проверку промежуточных результатов. Поэтому студенты не вполне уясняют себе суть задач и методы их решения.

Некоторые важные и интересные задачи имеют столь громоздкие решения, что преподаватели не могут предложить их студентам. В результате у студентов остаются более или менее обширные пробелы в знаниях. Еще хуже то, что из-за недостатка времени содержание учебных дисциплин существенно отстает от развития науки и технологии. Например, в курсе высшей математики не нашли отражения теоремы и методы, разработанные за последние сто лет.

Серьезные недостатки, имеющиеся в содержании и качестве высшего образования, все чаще и сильнее ощущаются обществом в виде техногенных катастроф и социальных катаклизмов. Неудовлетворительная оценка нашего высшего образования стала доминирующей среди профессионалов. Так, по данным ряда опросов, около 60 % специалистов, имеющих высшее образование, не довольны его качеством. Следовательно, нужна реформа. Любая реформа должна быть подготовлена. В образовании подготовка реформ обязательно включает в себя издание учебных пособий нового типа. Каковы их основные черты?

Современное учебное пособие должно представлять собой комплекс „книга+дискета“, с которым возможно разнообразное общение: от пассивного чтения книги до диалога с соответствующим компьютерным пакетом и даже внесения в него изменений.

В процессе работы пакет экономит время учащегося, выполняя за него всю рутинную работу, и помогает концентрировать внимание на сути дела. Пакет адаптируется к потребностям учащегося, совершенствуется, помогает ему применять на практике полученные знания и становится элементом личной электронной библиотеки, которую студент впоследствии будет использовать в своей профессиональной деятельности.

При использовании таких пакетов на компьютеры возлагается вся та работа, которая скучна, утомительна и отвлекает от сути изучаемого. Компьютеры могут выполнить эту работу гораздо быстрее и лучше, чем человек. Поэтому высвобождается много времени на изучение и глубокую проработку учебного материала, отвечающего современным требованиям, а внимание учащихся удастся концентрировать на тех проблемах, которые действительно достойны внимания разумного человека в начале XXI века.

Книги серии РЕШЕБНИК сопровождаются программным обеспечением, разработанным на основе пакета AcademiaXXI. Это программное обеспечение удовлетворяет следующим требованиям, которые должны предъявляться к программному обеспечению учебной и исследовательской деятельности:

- использование компьютерных программ должно осуществляться только по лицензиям производителей;
- программы должны реализовывать современные алгоритмы обработки математических выражений в численной и символьной форме с автоматическим контролем точности вычислений, а также алгоритмы компьютерной графики;
- программа не должна отнимать время на изучение правил ее использования;
- итогом работы с программой должен быть документ высокого типографского качества, пригодный для публикации, а также для редактирования в стандартных текстовых процессорах;
- программы должны быть пригодны для решения не только учебных, но и профессиональных задач.

Подробное объяснение необходимости соблюдения этих требований имеется на сайте www.AcademiaXXI.ru.

Пакеты, входящие в комплексы РЕШЕБНИК, состоят из документов MS Word, программ Word-CAS Interface и системы символьной математики типа DERIVE, Maple V, MuPAD, Reduce и т.п.

Документы MS Word, в основном, идентичны включенным в книгу, но являются интерактивными шаблонами для документов студентов и преподавателей. Например, если студенту нужно решить какую-нибудь задачу, то он может:

- 1) легко найти задачу данного типа;
- 2) изучить план ее решения;
- 3) изучить пример;
- 4) изменить исходные данные и выполнить действия с ними;
- 5) сохранить содержание окна в каком-нибудь файле;
- 6) передать файл преподавателю непосредственно или предварительно распечатав его.

Программы Word-CAS Interface позволяют переслать математические выражения из документа Word в систему символьной математики, поручить ей выполнить математические действия и графические построения и вставить результат в документ Word как его органическую часть, а не как объект OLE.

Такая технология предложена А.И. Кирилловым в 1999 г. и реализована им в пакете AcademiaXXI. Пакет AcademiaXXI является единой образовательно-научной информационной средой, в которой все элементы новых информационных технологий находятся во взаимодействии и работают как единый организм. Пакет подробно представлен на сайте www.AcademiaXXI.ru.

Мощные модули AcademiaXXI являются основой для пакетов, которые, в сочетании с книгами серии РЕШЕБНИК, образуют комплексы „книга+дискета“,

Использование комплексов РЕШЕБНИК предоставит студентам возможность решать столько задач, сколько действительно необходимо, чтобы приобрести устойчивые навыки. Кроме того, студенты смогут анализировать полученные ими решения, исследовать, как эти решения изменяются в зависимости от исходных данных, и использовать компьютерную графику для иллюстраций. Таким образом, возникает основание для индуктивных умозаключений, которых студентам так не хватает при традиционном обучении.

Использование комплексов РЕШЕБНИК позволит преподавателям переложить на компьютеры составление и проверку обязательных заданий, поможет подбирать примеры для лекций и практических занятий и снимет ограничения на трудоемкость предлагаемых студентам задач. Кроме того, благодаря использованию модулей пакета AcademiaXXI становится возможной разработка и применение новых методов решения задач, важных для приложений.

При разработке компьютерной поддержки занятий с книгами серии РЕШЕБНИК совершенствуются имеющиеся и создаются новые алгоритмы решения задач. В процессе такого развития теории алгоритмов имеются этапы, на каждом из которых становится возможным полностью передать компьютерам решение некоторого класса типовых задач.

Подобно тому как с появлением калькуляторов из учебных программ были исключены, например, правила извлечения корня „углом“, в будущем из учебных программ исключат и рецепты решения целого ряда задач высшей математики и выполнения инженерных расчетов. В триаде „Что–Зачем–Как“ (делается, решается, вычисляется и т.п.) акцент сместится с „Как“ на „Что“ и „Зачем“. Таким образом, книги серии РЕШЕБНИК вносят вклад не только в совершенствование образования, но и в изменение его целей и содержания.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодар-

ность Первому заместителю Генерального директора МАИК „Наука/Интерпериодика“ Николаю Георгиевичу Аванесову и Генеральному директору ООО Издательская фирма „Физико-математическая литература“ Марии Николаевне Андреевой за то, что они увидели перспективность и значение учебных пособий типа РЕШЕБНИК и предоставили все имеющиеся в их распоряжении силы и средства для их издания.

В серии РЕШЕБНИК выйдут книги по математике, информатике, физике, теоретической механике, а также по общетехническим дисциплинам. Часть из них готовится к печати, над другими работают их авторы, а для создания третьих лишь только формируются творческие коллективы. Обсуждение серии организовано на сайте www.AcademiaXXI.ru. Замечания и предложения можно также направлять по адресу: 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, Московский энергетический институт (ТУ), кафедра высшей математики, профессору А.И. Кириллову, или электронной почтой по адресу KirillovAI@mpei.ru.

Новая книга серии РЕШЕБНИК — „Высшая математика. Специальные разделы“ — содержит методы решения задач из разделов высшей математики, наиболее часто используемых в приложениях. Для написания книги потребовалось участие авторитетных специалистов по уравнениям математической физики, теории вероятностей и математической статистике. Я глубоко благодарен В.И. Афанасьеву и И.М. Петрушко за то, что они нашли возможность стать активными членами авторского коллектива.

В процессе научного редактирования книги возникало много научно-методических проблем. Я очень признателен О.В. Зиминной за детальное обсуждение этих проблем и помощь в их решении.

Москва, 1 августа 2001 г.

А.И. Кириллов

ПРЕДИСЛОВИЕ

РЕШЕБНИК „Высшая математика. Специальные разделы“ является естественным продолжением книги РЕШЕБНИК „Высшая математика“ и содержит примеры решения типовых задач по специальным разделам высшей математики: теории функций комплексной переменной, операционному исчислению, рядам Фурье, преобразованию Фурье, уравнениям математической физики, теории вероятностей и математической статистике.

Изучение этих разделов представляет большие трудности как для студентов, так и для преподавателей по нескольким причинам:

- сложно сформулировать стандартные задачи и алгоритмизировать процедуру их решения;
- громоздкие вычисления, необходимые для решения многих задач, особенно по рядам Фурье и уравнениям математической физики, не позволяют рассмотреть достаточное количество примеров и задать для самостоятельного решения несколько задач каждого типа;
- недостаточное количество существующих задачникков, особенно по уравнениям математической физики, теории вероятностей и математической статистике.

Все эти причины, в сочетании с растущими потребностями общества в качественно новом образовании, низкий уровень математической подготовки специалистов в современных областях науки и технологии, и особенно в области экономики, финансов и менеджмента, побудили авторов соединить свои силы и опыт преподавания для написания данной книги.

РЕШЕБНИК „Высшая математика. Специальные разделы“ — ключ к нескольким основным задачниккам, используемым при изучении математики. Вместе с тем, в книге впервые объясняется решение ряда задач, важных для приложений, а также излагаются новые методы решения некоторых задач математической физики и математической статистики. Отметим, что новые методы математической статистики относятся к важнейшим практическим приложениям, связанным с анализом выборок малого объема. Разработка этих

методов стала возможной благодаря использованию модулей пакета AcademiaXXI.

Авторы надеются, что эта книга окажется удобной и полезной при изучении математики в аудитории и дома, при очной и дистанционной формах обучения, а также будет способствовать повышению уровня подготовки студентов и аспирантов именно в тех областях математики, которые в настоящее время изучаются недостаточно, но которые именно сейчас приобретают особую важность при подготовке специалистов, способных ставить и решать задачи не только сегодняшнего, но и завтрашнего дня. Хотелось бы, чтобы книга была полезной для инженеров и исследователей как подробный справочник по прикладной математике.

Для эффективной работы с книгой необходим компьютерный пакет РЕШЕБНИК.ВМ, созданный на основе модуля STEM Plus пакета AcademiaXXI. Пакет РЕШЕБНИК.ВМ распространяется через сайт www.AcademiaXXI.ru и продается на дисках в киосках вузов.

Те, кто уже освоил работу с пакетом РЕШЕБНИК.ВМ при изучении основного курса математики, не испытают никаких затруднений при использовании его возможностей для решения более сложных и громоздких задач, а также легко освоят использование многочисленных дополнительных функций, содержащихся в новой версии пакета. Особенно полезны эти функции при обработке статистических данных, результатов измерений, таблиц и т.п.

Те читатели, которые будут использовать компьютерный пакет РЕШЕБНИК.ВМ впервые, смогут быстро освоить его, одновременно повторяя те разделы основного курса, которые особенно важны для успешного продолжения математического образования.

К началу каждого семестра выпускается новая версия пакета РЕШЕБНИК.ВМ. Она отличается от предыдущих версий большим количеством текстов с планами и примерами решения задач, усовершенствованным модулем STEM Plus и более удобным интерфейсом. Поэтому использование пакета РЕШЕБНИК.ВМ помогает не только более успешно учиться, но и непрерывно повышать квалификацию в решении прикладных задач.

Авторы благодарны А.М. Роговой за любезно представленные предварительные материалы для раздела „Математическая статистика“. Глубокую признательность А.И. Кириллову выражают остальные авторы за ценные идеи, плодотворное обсуждение постановок задач и методов их решения, а также за помощь в выполнении компьютерных расчетов.

Глава 1

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

При изучении темы ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ вы научитесь оперировать с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах; познакомитесь с элементарными функциями комплексной переменной, научитесь дифференцировать, интегрировать и находить разложения в ряды Тейлора и Лорана функций комплексной переменной; научитесь исследовать аналитические свойства функций, находить нули и особые точки; познакомитесь с теорией вычетов и научитесь применять вычеты для вычисления контурных, определенных и несобственных интегралов.

С помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ вы сможете производить действия с комплексными числами, находить разложения рациональных функций на элементарные дроби, вычислять производные и интегралы, производить вычисления и проверять полученные вами результаты.

1.1. Извлечение корня из комплексного числа

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти все значения корня n -ой степени из комплексного числа $z = x + iy$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Корень n -ой степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые определяются формулой

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (1)$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ и $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

2. Находим модуль и аргумент числа $z = x + iy$ по формулам

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, \quad y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, \quad y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

3. Находим по формуле (1) значения корня w_k ($k=0, 1, \dots, n-1$) и представляем их в алгебраической форме.

Записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти все значения $\sqrt[3]{-27i}$.

РЕШЕНИЕ.

1. Корень 3-й степени из комплексного числа $z = -27i$ имеет три различных значения, которые определяются формулой

$$w = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{re^{i\frac{\varphi+2\pi k}{3}}} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi+2\pi k}{3} \right), \quad (2)$$

где $r = |-27i|$, $\varphi = \arg(-27i)$ и $k = 0, 1, 2$.

2. Находим модуль и аргумент числа $z = -27i$ ($x = 0, y = -27$):

$$r = |-27i| = 27, \quad \varphi = \arg(-27i) = -\pi/2.$$

3. Находим по формуле (2) значения корня w_0, w_1, w_2 при $k = 0, 1, 2$ и представляем их в алгебраической форме:

$$w_0 = 3e^{-\pi i/6} = 3(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i,$$

$$w_1 = 3e^{\pi i/2} = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 3i,$$

$$w_2 = 3e^{\frac{7\pi i}{6}} = 3(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Ответ. $\sqrt[3]{-27i}$ имеет три значения

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \quad 3i, \quad -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти все значения корня из комплексного числа.

1. $\sqrt[3]{1}$. 2. $\sqrt[3]{i}$. 3. $\sqrt[3]{-1}$. 4. $\sqrt[4]{-4}$. 5. $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$. 6. $\sqrt{-2+2\sqrt{3}i}$.
7. $\sqrt{-2-2\sqrt{3}i}$. 8. $\sqrt[6]{-27}$. 9. $\sqrt[6]{1}$. 10. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.

Ответы.

1. 1, $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2$. 2. $-i$, $(\pm\sqrt{3} + i)/2$. 3. -1 , $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$.
4. $\pm(1 \pm i)$. 5. $\pm(\sqrt{3} + i)$. 6. $\pm(1 + \sqrt{3}i)$. 7. $\pm(1 - \sqrt{3}i)$. 8. $\pm\sqrt{3}i$,
 $\pm(3 \pm \sqrt{3}i)/2$. 9. ± 1 , $\pm(1 \pm \sqrt{3}i)/2$. 10. $\pm 1 \pm \sqrt{3}i$.

1.2. Кривые в комплексной области

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Определить вид кривой, заданной уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Составляем параметрические уравнения кривой

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

где $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ и $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$.

2. Исключая параметр t из параметрических уравнений, получаем уравнение кривой в виде

$$F(x, y) = 0.$$

3. Используя канонические формы уравнений кривых на плоскости, определяем вид искомой кривой.

4. Находим области значений $x(t)$ и $y(t)$ и выясняем, какая часть кривой определяется исходным уравнением.

Замечание. Точка с координатами $x(t), y(t)$ может пробегать кривую неоднократно.

ПРИМЕР. Определить вид кривой, заданной уравнением

$$z(t) = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

РЕШЕНИЕ.

1. Составляем параметрические уравнения кривой

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3, \\ y = t^2 - 2t + 1, \quad t \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

2. Исключая параметр t из этих уравнений, получаем $y = x - 2$.

3. Данное уравнение определяет прямую на плоскости.

4. Так как $x(t) = t^2 - 2t + 3 \geq 2$ и $y = t^2 - 2t + 1 \geq 0$, то исходное уравнение определяет часть прямой $x - y - 2 = 0$, лежащую в первой четверти.

Ответ. Часть прямой $x - y - 2 = 0$ ($x \geq 2, y \geq 0$).

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Определить вид кривой, заданной уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$.

1. $z(t) = t^3 - i(t^3 + 16)$. 2. $z(t) = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$.
3. $z(t) = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$. 4. $z(t) = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$.
5. $z(t) = 2e^{it} + e^{-it}/2$. 6. $z(t) = -2e^{it} + e^{-it}$. 7. $z(t) = 3e^{it} - e^{-it}/2$.
8. $z(t) = 3\operatorname{tg} t + i\sec t$. 9. $z(t) = 2\operatorname{ch} 3t - 3i\operatorname{sh} 3t$. 10. $z(t) = \operatorname{th} 5t + 5i/\operatorname{ch} 5t$.

Ответы.

1. Прямая $x + y - 16 = 0$. 2. Часть прямой $x + 2y + 7 = 0$ ($x \geq 1/2, y \leq -15/4$).
3. Часть прямой $x - y - 4 = 0$ ($x \geq 4, y \leq 0$).
4. Парабола $y = x^2 + 1$.
5. Эллипс $4x^2/25 + 4y^2/9 = 1$.
6. Эллипс $x^2 + y^2/9 = 1$.
7. Эллипс $4x^2/25 + 4y^2/49 = 1$.
8. Гипербола $y^2 - x^2/9 = 1$.
9. Часть гиперболы $x^2/4 - y^2/9 = 1$ ($x \geq 0$).
10. Часть эллипса $x^2 + y^2/5 = 1$ ($y \geq 0$).

1.3. Аналитичность, условия Коши–Римана

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Исследовать аналитические свойства функции $w = f(z)$ и найти ее производную.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если функции $\operatorname{Re} w = u(x, y)$ и $\operatorname{Im} w = v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексной переменной $z = x + iy$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$.

Если хотя бы одно из условий (1) нарушается, то функция $f(z)$ не является дифференцируемой.

Функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0 , если существует окрестность точки z_0 , в каждой точке которой $f(z)$ дифференцируема.

Замечание. Если функция $f(z)$ дифференцируема в области, то она аналитична в этой области.

1. Находим действительную и мнимую части функции $f(z)$:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$$

2. Находим частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и делаем заключение о дифференцируемости функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

3. Проверяем выполнение условий Коши–Римана (1) и определяем, в каких точках z функция $f(z)$ дифференцируема и аналитична.

4. Вычисляем производную функции $f(z)$ в точках дифференцируемости по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

ПРИМЕР 1. Исследовать аналитические свойства функции $w = e^z$ и найти ее производную.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим действительную и мнимую части функции e^z , используя определение показательной функции

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Получаем

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

2. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Частные производные, очевидно, непрерывны всюду, и, следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ всюду дифференцируемы.

3. Условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, и, следовательно, функция e^z дифференцируема и аналитична во всех точках $z \in \mathbb{C}$.

4. Вычисляем производную функции e^z , например, по формуле

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Ответ. Функция $f(z) = e^z$ аналитична во всех точках z и $f'(z) = e^z$.

Замечание. Все элементарные функции комплексной переменной аналитичны в области их определения, причем справедливы таблица производных и правила дифференцирования, известные для функций вещественной переменной.

ПРИМЕР 2. Исследовать аналитические свойства функции $w = |z|^2$ и найти ее производную.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим действительную и мнимую части функции

$$w = |z|^2 = |x + iy|^2 = x^2 + y^2.$$

Получаем

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

2. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Частные производные, очевидно, непрерывны всюду, и, следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ всюду дифференцируемы.

3. Условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются только в точке $x = 0, y = 0$. Следовательно, функция $|z|^2$ дифференцируема в единственной точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

4. Вычисляем производную функции $|z|^2$ в точке $z = 0$, например по формуле:

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Ответ. Функция $f(z) = |z|^2$ дифференцируема в одной точке $z = 0$ и нигде не аналитична. $f'(0) = 0$.

ПРИМЕР 3. Исследовать аналитические свойства функции $w = \bar{z}$.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим действительную и мнимую части функции

$$w = \bar{z} = x - iy.$$

Получаем $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$.

2. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Частные производные, очевидно, непрерывны всюду, и, следовательно, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ всюду дифференцируемы.

3. Условия Коши–Римана (1) не выполняются ни в одной точке. Следовательно, функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема и не аналитична.

Ответ. Функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема и не аналитична.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Исследовать аналитические свойства функции $w = f(z)$ и найти ее производную.

1. $f(z) = \bar{z}$. 2. $f(z) = \operatorname{Re} z$. 3. $f(z) = \operatorname{Im} z$. 4. $f(z) = |z| \operatorname{Re} z$.
5. $f(z) = \operatorname{Re} z^2$. 6. $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$. 7. $f(z) = (\bar{z})^2$. 8. $f(z) = z\bar{z}$.
9. $f(z) = \sin z$. 10. $f(z) = 1/z$.

Ответы. 1. Нигде не дифференцируема и не аналитична. 2. Нигде не дифференцируема и не аналитична. 3. Нигде не дифференцируема и не аналитична. 4. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 5. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 6. Нигде не аналитична, $f'(iy) = 0$. 7. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 8. Нигде не аналитична, $f'(0) = 0$. 9. Аналитична при всех z , $f'(z) = \cos z$. 10. Аналитична при всех $z \neq 0$, $f'(z) = -1/z^2$.

1.4. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если заданы ее действительная часть $u(x, y)$ (или мнимая часть $v(x, y)$) и значение $f(z)$ в некоторой точке z_0 .

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим частные производные заданной функции $u(x, y)$ (или $v(x, y)$).

2. Используя условия Коши–Римана

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1)$$

находим $v(x, y)$ (или $u(x, y)$) с точностью до произвольной постоянной C .

3. Записываем искомую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + C$ и преобразуем полученное выражение к функции переменной z , например заменяя x и y их выражениями через переменную z :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (2)$$

4. Находим значение постоянной C из условия $f(z)|_{z=z_0} = f(z_0)$ и записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 2y \quad \text{и} \quad f(i) = 2.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим частные производные функции $u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy + 2.$$

2. Из 2-го условия Коши–Римана (1)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 2$$

находим

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int (6xy - 2) dx + g(y) = 3x^2y - 2x + g(y).$$

Дифференцируя v по y , получаем

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + g'(y).$$

Для нахождения функции $g(y)$ используем 1-е условие Коши–Римана (1). Приравнявая $\partial v / \partial y = 3x^2 + g'(y)$ производной

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$g'(y) = -3y^2,$$

из которого определяем $g(y)$

$$g(y) = - \int 3y^2 dy = -y^3 + C.$$

Таким образом, получаем функцию

$$v(x, y) = 3x^2y - 2x - y^3 + C.$$

3. Записываем искомую функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2y + i(3x^2y - y^3 - 2x + C_1).$$

Преобразуем полученное выражение к функции переменной z , используя выражения (2) или равенства

$$z = x + iy \quad u \quad z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Получаем

$$f(z) = z^3 - 2iz + C.$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

4. Находим значение C из условия $f(i) = 2$:

$$2 = i^3 - 2i \cdot i + C.$$

Получаем $C = i$ и, следовательно,

$$f(z) = z^3 - 2iz + i.$$

Ответ. $f(z) = z^3 - 2iz + i$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если заданы ее действительная или мнимая часть и значение $f(z)$ в некоторой точке z_0 .

1. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 2i - 1$.
2. $\operatorname{Re} f(z) = x/(x^2 + y^2)$, $f(\pi) = 1/\pi$.
3. $\operatorname{Im} f(z) = \arctg(y/x)$, $f(1) = 0$.
4. $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2 - 4xy - 3y^2$, $f(-i) = -3 - 2i$.
5. $\operatorname{Im} f(z) = 10xy - 6y$, $f(1/5) = -1$.
6. $\operatorname{Im} f(z) = \sin y \operatorname{ch}(x + 1)$, $f(-1 + \pi i/2) = i$.
7. $\operatorname{Im} f(z) = 2y[y^2 + (x + 1)^2]$, $f(i) = i$.
8. $\operatorname{Im} f(z) = x/(x^2 + y^2) + x$, $f(1) = -2i$.
9. $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$, $f(0) = 0$.
10. $\operatorname{Re} f(z) = x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$.

Ответы.

1. $f(z) = z^2 + 2z$.
2. $f(z) = 1/z$.
3. $f(z) = \ln z$.
4. $f(z) = z^2(3 + 2i)$.
5. $f(z) = 5z^2 - 6z$.
6. $f(z) = \operatorname{sh}(z + 1)$.
7. $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$.
8. $f(z) = i/z + iz$.
9. $f(z) = ze^{iz}$.
10. $f(z) = z \sin z$.

1.5. Интеграл от функции комплексной переменной

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Вычислить интеграл

$$\int_L f(z) dz,$$

где L — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D , в которой функция $f(z)$ непрерывна.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Интеграл от функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, непрерывной в области D , выражается через криволинейные интегралы второго рода по формуле

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L u dy + v dx. \quad (1)$$

1. Записываем $f(z)$ в алгебраической форме

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

2. Используя формулу (1), представляем искомый интеграл в виде суммы двух криволинейных интегралов второго рода от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух вещественных переменных x и y .

3. Записываем уравнения кривой L в явном виде $y = y(x)$ (или $x = x(y)$) или параметрически $y = y(t)$, $x = x(t)$.

4. Вычисляем криволинейные интегралы, сводя их к определенным, и записываем ответ.

Замечание. Можно вычислять интеграл от функции комплексной переменной по формуле

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt, \quad (2)$$

где $z = z(t)$ — параметрическое уравнение кривой L в комплексной форме.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл

$$\int_L \operatorname{Re} z dz,$$

где

а) L — отрезок прямой от точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$;

б) L — ломаная с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Интеграл от функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, непрерывной в области D , выражается через криволинейные интегралы второго рода по формуле

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L u dy + v dx.$$

Случай а)

1. Записываем $f(z)$ в алгебраической форме

$$f(z) = x.$$

2. Используя формулу (1), представляем искомый интеграл в виде суммы двух криволинейных интегралов второго рода от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух вещественных переменных x и y :

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = \int_L x dx + i \int_L x dy.$$

3. Записываем уравнение отрезка OB

$$y = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

4. Вычисляем криволинейные интегралы, сводя их к определенным:

$$\int_L x dx + i \int_L x dy = \int_0^1 x dx + i \int_0^1 x dx = \frac{1+i}{2}.$$

Ответ.

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = \frac{1+i}{2}.$$

Случай б)

Так как путь интегрирования состоит из двух отрезков, записываем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = \int_{OA} \operatorname{Re} z dz + \int_{AB} \operatorname{Re} z dz,$$

и каждый интеграл вычисляем так же, как в случае а).

1. Записываем $f(z)$ в алгебраической форме

$$f(z) = x.$$

2. Используя формулу (1), представляем искомый интеграл в виде суммы двух криволинейных интегралов второго рода от функций двух вещественных переменных x и y :

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = \int_L x dx + i \int_L x dy.$$

3. Записываем уравнения кривой L , т.е. отрезка OA : $y = 0$ ($0 \leq x \leq 1$) и отрезка AB : $x = 1$ ($0 \leq y \leq 1$).

4. Вычисляем криволинейные интегралы, сводя их к определенным:

$$\int_{OA} x dz + i \int_{AB} x dy + \int_{AB} x dx + i \int_{OA} x dy = \int_0^1 x dx + i \int_0^1 dy = \frac{1}{2} + i.$$

Ответ.

$$\int_L \operatorname{Re} z dz = \frac{1}{2} + i.$$

Замечание. Подынтегральная функция не является аналитической, поэтому интегралы по различным кривым, соединяющим две данные точки, могут иметь различные значения.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл

$$\int_L |z| \bar{z} dz,$$

где L — верхняя полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z > 0$ с обходом против часовой стрелки.

РЕШЕНИЕ. В данном случае удобно воспользоваться уравнением кривой L в параметрической форме $z = e^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) и применить формулу (2)

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

1. Находим $\bar{z} = e^{-it}$, $|z| = 1$, $dz = ie^{it} dt$.

2. Подставляем в подынтегральное выражение и вычисляем интеграл

$$\int_L |z| \bar{z} dz = \int_0^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{\pi} i dt = i\pi.$$

Ответ. $\int_L |z| \bar{z} dz = i\pi$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить интегралы от функций комплексной переменной по заданным кривым.

1. $\int_L \bar{z} dz$, L — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

2. $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = i$.

3. $\int_L z^2 |z| dz$, L — полуокружность $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$.

4. $\int_L z \operatorname{Im} z dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

5. $\int_L e^{|z|} dz$, L — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$.

6. $\int_L \operatorname{Im} z \, dz$, L — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.
7. $\int_L \bar{z} \, dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.
8. $\int_L |z| \operatorname{Re} z \, dz$, L — полуокружность $|z| = 3$, $\operatorname{Im} z \leq 0$.
9. $\int_L z \sin |z| \, dz$, L — полуокружность $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.
10. $\int_L z^2 \operatorname{Im} z \, dz$, L — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2 + 2i$.

Ответы. 1. πi . 2. 0. 3. $-16\pi/3$. 4. $2i/3$. 5. $-2ei$. 6. $-\pi/2$. 7. 1. 8. $-27\pi i/2$. 9. 0. 10. $8 + 8i$.

1.6. Интеграл от аналитической функции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Вычислить интеграл*

$$\int_L f(z) \, dz,$$

где $f(z)$ — функция, аналитическая в односвязной области D , L — кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D и соединяющая точки z_1 и z_2 .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Интеграл вдоль кусочно-гладкой кривой $L \in D$ от функции, аналитической в односвязной области D , не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек z_1 и z_2 и может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_L f(z) \, dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz = F(z_2) - F(z_1), \quad (1)$$

где $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$.

1. Находим первообразную $F(z)$, используя табличные интегралы, свойства интегралов и методы, известные из математического анализа.

2. Вычисляем интеграл по формуле Ньютона–Лейбница (1).
Записываем ответ в алгебраической форме.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл

$$\int_L \sin^2 z \, dz,$$

где L — отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_1 = i$.

РЕШЕНИЕ. Функция $f(z) = \sin^2 z$ аналитична всюду, и, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования и может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница (1).

1. Находим первообразную $F(z)$, используя формулы понижения степени

$$\int \sin^2 z \, dz = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2z) \, dz = \frac{1}{2} \left(z - \frac{\sin 2z}{2} \right).$$

2. Вычисляем интеграл по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_0^i \sin^2 z \, dz = \frac{1}{2} \left(z - \frac{\sin 2z}{2} \right) \Big|_0^i = \frac{1}{2} i - \frac{1}{4} \sin(2i) = \frac{i}{4} (2 - \operatorname{sh} 2).$$

Ответ.

$$\int_0^i \sin^2 z \, dz = \frac{i}{4} (2 - \operatorname{sh} 2).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить интегралы от аналитических функций.

$$1. \int_i^0 z \cos z \, dz. \quad 2. \int_0^i (z^2 + \sin z) \, dz. \quad 3. \int_{1-i}^{1+i} (3z^2 + 2z - 1) \, dz.$$

$$4. \int_0^{2i} 4 \cos^2 z \, dz. \quad 5. \int_i^{2i} 2z e^{z^2} \, dz. \quad 6. \int_0^i z e^z \, dz. \quad 7. \int_1^i z \sin z \, dz.$$

$$8. \int_0^i (z + i) \sin z \, dz. \quad 9. \int_1^{1+i} 2z \cos z^2 \, dz. \quad 10. \int_0^i (2z^3 + 2z) \sin z^2 \, dz.$$

Ответы. 1. $1 - e^{-1}$. 2. $1 - \operatorname{ch} 1 - i/3$. 3. $6i$. 4. $(4 + \operatorname{sh} 4)i$.
5. $e^{-4} - e^{-1}$. 6. $1 - \sin 1 - \cos 1 + i(\cos 1 - \sin 1)$. 7. $\cos 1 - \sin 1 - ie^{-1}$.
8. $i(1 + \operatorname{sh} 1 - 2 \operatorname{ch} 1)$. 9. $-\sin 1 + i \operatorname{sh} 2$. 10. $1 - \cos 1 - \sin 1 + i \cos 1$.

1.7. Ряд Тейлора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Функцию $f(z)$, аналитическую в точке z_0 , разложить в ряд Тейлора в окрестности этой точки (по степеням $z - z_0$). Указать область, в которой справедливо это разложение.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Функция, аналитическая в точке z_0 , разложима в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (1)$$

Это разложение справедливо в области $|z - z_0| < R$, где R — расстояние от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$, т.е. точки, в которой $f(z)$ не является аналитической.

Ряд (1) называется рядом Тейлора функции $f(z)$.

1. Находим производные функции:

$$f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z), \dots$$

Если не удастся установить формулу для n -ой производной, мы ограничиваемся несколькими производными, количество которых определяется потребностями конкретной задачи.

2. Вычисляем значения производных в точке z_0 .

3. Составляем ряд Тейлора по формуле (1).

4. Находим расстояние R от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$ и указываем область справедливости полученного разложения: круг $|z - z_0| < R$.

Записываем ответ.

ПРИМЕР 1. Найти несколько первых членов разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ (по степеням z). Указать область, в которой справедливо это разложение.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим производные функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ непосредственно или по формулам:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + f^2(z), & f''(z) &= 2f(z)f'(z), \\ f'''(z) &= 2[f'^2(z) + f(z)f''(z)], & f^{iv}(z) &= 2[3f'(z)f''(z) + f(z)f'''(z)], \\ f^v(z) &= 2[3f''^2(z) + 4f'(z)f'''(z) + f(z)f^{iv}(z)], \dots \end{aligned}$$

2. Вычисляем значения производных в точке $z_0 = 0$:

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{iv}(0) = 0, \quad f^v(0) = 16, \dots$$

3. Составляем ряд Тейлора по формуле (1)

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{16}{5!}z^5 + \dots \quad (2)$$

4. Особыми точками функции $f(z) = \operatorname{tg} z$, ближайшими к точке $z_0 = 0$, являются точки $z = \pm\pi/2$, поэтому $R = \pi/2$ и равенство (2) справедливо в круге $|z| < \pi/2$.

Ответ. $\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{16}{5!}z^5 + \dots, \quad |z| < \pi/2.$

ПРИМЕР 2. Функцию $f(z) = \operatorname{ch} z$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ (по степеням z). Указать область, в которой справедливо это разложение.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим производные функции $f(z) = \operatorname{ch}(z)$:

$$f^{(2k)}(z) = \operatorname{ch} z, \quad f^{(2k+1)}(z) = \operatorname{sh} z, \quad k = 0, 1, \dots$$

2. Вычисляем значения производных в точке $z_0 = 0$:

$$f^{(2k)}(z) = \operatorname{ch} z|_{z=0} = 1, \quad f^{(2k+1)}(z) = \operatorname{sh} z|_{z=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

3. Составляем ряд Тейлора по формуле (1)

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (2)$$

4. Поскольку $f(z) = \operatorname{ch} z$ аналитична всюду, $R = +\infty$ и разложение (2) справедливо при всех $z \in \mathbb{C}$.

Ответ. $\operatorname{ch} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < +\infty.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти несколько первых членов разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$. Указать область, в которой справедливо это разложение.

1. $f(z) = \ln \cos z$. 2. $f(z) = 2/(1 + e^{-z})$. 3. $f(z) = 1/(1 + \sin z)$.
4. $f(z) = \operatorname{ch}^2 z$. 5. $\ln(1 + \cos z)$. 6. $f(z) = \operatorname{sh}^2 z$. 7. $\ln(1 + \sin z)$.
8. $f(z) = e^{1/(1-z)}$. 9. $f(z) = 1/(1 + e^z)$. 10. $f(z) = 1/\cos z$.

Ответы.

1. $f(z) = -z^2/2 + 4z^4/4! + 44z^6/6! + \dots, \quad |z| < \pi/2.$
2. $f(z) = 1 + z/2 - z^3/(3! \cdot 2^2) - 3z^5/(5! \cdot 2^2) + \dots, \quad |z| < \pi.$
3. $f(z) = 1 - z + z^2 - 5z^3/3! + 18z^4/4! + \dots, \quad |z| < \pi/2.$
4. $f(z) = 1 + z^2 + 8z^4/4! + 32z^6/6! + \dots, \quad |z| < \infty.$
5. $f(z) = \ln 2 - z^2/4 + z^4/(3 \cdot 2^4) + 11z^6/(90 \cdot 2^6) + \dots, \quad |z| < \pi.$
6. $f(z) = z^2 + 8z^4/4! + 32z^6/6! + \dots, \quad |z| < \infty.$
7. $f(z) = z - z^2/2 + z^3/3! - 2z^4/4! + \dots, \quad |z| < \pi.$
8. $f(z) = e(1 + z + 3z^2/2! + 13z^3/3! + \dots, \quad |z| < 1.$
9. $f(z) = 1/2 - z/2^2 + z^3/(3! \cdot 2^3) + 3z^5/(5! \cdot 2^3) + \dots, \quad |z| < \pi.$
10. $f(z) = 1 + z^2/2! + 5z^4/4! + 61z^6/6! + \dots, \quad |z| < \pi/2.$

1.8. Ряд Тейлора рациональных функций

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Рациональную функцию

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad (Q_m(0) \neq 0)$$

разложить в ряд Тейлора по степеням z . Указать область, в которой справедливо это разложение.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Имеем разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \quad (1)$$

1. Если дробь $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ неправильная, выделяем целую часть.

2. Правильную рациональную дробь записываем в виде суммы элементарных дробей вида

$$\frac{A}{z-a}, \quad (2)$$

где $a \in \mathbb{C}$ — простой корень уравнения $Q_m(z) = 0$, и

$$\frac{B}{(z-b)^k}, \quad (3)$$

где $b \in \mathbb{C}$ — k -кратный корень уравнения $Q_m(z) = 0$.

3. Элементарные дроби вида (2) разлагаем в степенные ряды, используя табличное разложение (1):

$$\frac{A}{z-a} = -\frac{A/a}{1-z/a} = -A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}, \quad |z| < |a|.$$

Элементарные дроби вида (3) разлагаем в степенные ряды, сделав аналогичные преобразования и используя теорему о почленном дифференцировании степенного ряда (1):

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

Продолжая процедуру дифференцирования, можно получить разложение элементарных дробей $1/(1-z)^k$ при любом $k = 2, 3, \dots$

4. Складывая полученные ряды, получаем окончательный ответ.

5. Находим расстояние R от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$ (где $Q_m(z) = 0$) и указываем область, в которой справедливо полученное разложение: круг $|z - z_0| < R$.

Замечание. При разложении по степеням $z - z_0$ ($Q(z_0) \neq 0$) предварительно вводим вспомогательную переменную $t = z - z_0$ и находим разложение функции $f(t)$ по степеням t .

ПРИМЕР. Разложить по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}.$$

Указать область, в которой справедливо это разложение.

РЕШЕНИЕ.

1. $f(z)$ — правильная рациональная дробь.
2. Разложим $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9} \frac{1}{z-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{z+2}.$$

3. Каждую элементарную дробь разлагаем в ряд по степеням z :

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -\left(\frac{1}{z-1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

4. Складывая полученные ряды, получаем

$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} = -\frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n - \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}. \quad (4)$$

5. Ближайшей к точке $z_0 = 0$ особой точкой функции $f(z)$ является точка $z = 1$, поэтому $R = 1$ и равенство (4) справедливо в круге $|z| < 1$.

Ответ.
$$\frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(6n+5 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \right) z^n, \quad |z| < 1.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ по степеням z . Указать область, в которой справедливо это разложение.

1. $f(z) = 1/(2+z)$. 2. $f(z) = 1/(2z-5)$. 3. $f(z) = 1/(1-z^2/9)$.
4. $f(z) = (4z+2)/(z^3-1)$. 5. $f(z) = (5-2z)/(z^2-5z+6)$.
6. $f(z) = (4z+3)/(z^2-3z+2)$. 7. $f(z) = 1/(2+z)^2$. 8. $f(z) = 1/(1-z)^2$.
9. $f(z) = 1/(1-z)^3$. 10. $f(z) = (3+z-z^2)/(2+z-2z^2-z^3)$.

Ответы.

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2$. 2. $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} z^n, \quad |z| < 5/2$.
3. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{2n}, \quad |z| < 3$. 4. $f(z) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (z^{3n} + 2z^{3n+1}), \quad |z| < 1$.
5. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n, \quad |z| < 1$.
6. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(7 - \frac{11}{2^{n+1}} \right) z^n, \quad |z| < 1$.
7. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2$.
8. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1$.
9. $f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n, \quad |z| < 1$.
10. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + z^{2n} \right], \quad |z| < 1$.

1.9. Разложение в ряд Тейлора с использованием табличных разложений

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Функцию $f(z)$, аналитическую в точке z_0 , разложить в ряд Тейлора в окрестности этой точки (по степеням $z - z_0$), используя табличные разложения. Указать область, в которой справедливо полученное разложение.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Табличные разложения функций в степенные ряды по степеням z :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1,$$

$$(1+z)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1.$$

1. Выражаем функцию $f(z)$ через функции, имеющие табличные разложения.

2. Находим разложение функции в ряд Тейлора, используя табличные разложения, сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число.

3. Находим область, в которой справедливо полученное разложение: $|z - z_0| < R$, где R — расстояние от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$. Для определения искомой области можно также использовать известные области сходимости табличных рядов.

Замечание. При разложении по степеням $z - z_0$ ($z_0 \neq 0$) предварительно вводим вспомогательную переменную $t = z - z_0$ и находим разложение функции $f(t + z_0)$ по степеням t .

ПРИМЕР. Функцию $f(z) = \sin z$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 3$ (по степеням $z - 3$), используя табличные разложения. Указать область, в которой справедливо полученное разложение.

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную $t = z - 3$ и найдем разложение функции $\sin(t + 3)$ по степеням t .

1. Выражаем функцию $\sin(t + 3)$ через функции, имеющие табличные разложения:

$$\sin(t + 3) = \sin 3 \cos t + \cos 3 \sin t.$$

2. Находим разложение функции $\sin(t + 3)$ в ряд Тейлора, используя табличные разложения, сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число. Имеем

$$\sin(t + 3) = \sin 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + \cos 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}, \quad |t| < \infty.$$

Заменяя t на $z - 3$, получаем

$\sin z =$

$$= \sin 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z-3)^{2n} + \cos 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-3)^{2n+1}, \quad |z-3| < \infty.$$

3. Поскольку $f(z) = \sin z$ аналитична при всех $z \in \mathbb{C}$, разложение справедливо при всех $z \in \mathbb{C}$.

Ответ. $\sin z =$

$$= \sin 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z-3)^{2n} + \cos 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-3)^{2n+1}, \quad |z-3| < \infty.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0 . Указать область, в которой справедливо полученное разложение.

1. $f(z) = \cos z$, $z_0 = \pi/4$. 2. $f(z) = e^z$, $z_0 = 1$. 3. $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$. 4. $f(z) = 1/z$, $z_0 = -2$. 5. $f(z) = 1/(5 + 2z)$, $z_0 = 3$. 6. $f(z) = 1/(z^2 - 4z + 3)$, $z_0 = -2$. 7. $f(z) = \sqrt{z}$, $z_0 = 2$. 8. $f(z) = \sin(\pi z/4)$, $z_0 = 2$. 9. $f(z) = 1(3 - z)^2$, $z_0 = 1$. 10. $f(z) = 1/\sqrt[3]{z}$, $z_0 = 3$.

Ответы.

$$1. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi/4 + n\pi/2)}{n!} (z - \pi/4)^{2n}, \quad |z - \pi/4| < \infty.$$

$$2. f(z) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z - 1)^n, \quad |z - 1| < \infty.$$

3. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \quad |z-1| < 1.$
4. $f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+2)^n, \quad |z+2| < 2.$
5. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{11^{n+1}} (z-3)^n, \quad |z-3| < 5/2.$
6. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6 \cdot 3^n} - \frac{1}{10 \cdot 5^n} \right) (z+2)^n, \quad |z+2| < 3.$
7. $f(z) = \sqrt{2} \left[1 + \frac{z-2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{4^n n!} (z-2)^n \right], \quad |z-2| < 2.$
8. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{4^{2n} (2n)!} (z-2)^{2n}, \quad |z-2| < \infty.$
9. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad |z-1| < 3.$
10. $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{\sqrt[3]{3} \cdot 9^n n!} (z-3)^n, \quad |z-3| < 3.$

1.10. Ряды Лорана рациональной функции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить в ряды Лорана по степеням z рациональную функцию

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены и $Q_m(0) \neq 0$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Если дробь $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ неправильная, выделяем целую часть.

Находим корни уравнения $Q_m(z) = 0$. Будем предполагать, что все корни $z_1, z_2, \dots, z_m$ — простые (нумерацию введем по возрастанию их модулей $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_m|$).

2. Точки $z_1, z_2, \dots, z_m$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ неаналитична).

При разложении в степенные ряды элементарных дробей вида

$$\frac{A_k}{(z-a)^k}, \quad k \geq 2$$

используем почленное дифференцирование рядов (1) и (2).

Замечание 3. При разложении по степеням $z - z_0$ предварительно вводим вспомогательную переменную $t = z - z_0$ и находим разложение функции $f(t + z_0)$ по степеням t .

ПРИМЕР. Разложить в ряды Лорана по степеням z функцию

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Дробь правильная.

Находим корни уравнения $z^2 - 2z - 3 = 0$. Имеем два простых корня $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$.

2. Точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$ являются особыми точками функции $f(z)$ (в них $f(z)$ не аналитична).

Кольца аналитичности функции $f(z)$:

$$\begin{aligned} |z| &< 1, \\ 1 &< |z| < 3, \\ |z| &> 3. \end{aligned}$$

3. Разлагаем $f(z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{z+2}{(z+1)(z-3)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{5}{4} \frac{1}{z-3}.$$

4. В каждом кольце аналитичности элементарные дроби разлагаем в ряды, используя разложения в ряд Тейлора.

При $|z| < 1$ имеем

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}, \quad |z| < 3. \quad (2)$$

Следовательно, в круге $|z| < 1$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z^2-2z-3} &= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{5}{3^{n+1}} \right] z^n. \end{aligned}$$

Этот ряд является рядом Тейлора, так как в точке $z = 0$ функция $f(z)$ аналитична.

При $1 < |z| < 3$ ряд (1) расходится, а ряд (2) сходится. Поэтому вместо (1) используем

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}, \quad |z| > 1. \quad (3)$$

Следовательно, в кольце $1 < |z| < 3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 \cdot z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot z^n}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

При $|z| > 3$ ряд (3) сходится, а ряд (2) расходится. Поэтому вместо (2) используем

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n}, \quad |z| > 3.$$

Следовательно, в области $|z| > 3$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$\frac{z+2}{z^2-2z-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 \cdot z^n} - \frac{5}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5 \cdot 3^{n-1}}{4} \frac{1}{z^n}.$$

Ответ.

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{z^2-2z-3} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{5}{3^{n+1}} \right] z^n, \quad |z| < 1, \\ \frac{z+2}{z^2-2z-3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 \cdot z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot z^n}{4 \cdot 3^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 3, \\ \frac{z+2}{z^2-2z-3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 5 \cdot 3^{n-1}}{4} \frac{1}{z^n}, \quad 3 < |z| < \infty. \end{aligned}$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить в ряды Лорана по степеням z функции $f(z)$.

1. $f(z) = 1/(z - 2)$. 2. $f(z) = 1/(z^2 + z)$. 3. $f(z) = 2/(z^2 + 2z)$.
4. $f(z) = 1/(z^4 - z^2)$. 5. $f(z) = 1/(z^3 - 3z^2)$. 6. $f(z) = (2z - 3)/(z^2 - 5z + 6)$.
7. $f(z) = 2/(z^3 - 4z^2 + 3z)$. 8. $f(z) = 1/(z^4 - 3z^3 + 2z^2)$. 9. $f(z) = (2z + 3)/(z^3 + 3z^2 + 2z)$.
10. $f(z) = 3/(z^4 + 5z^2 + 4)$.

Ответы.

$$1. f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z| < 2, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$2. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1}, \quad 0 < |z| < 1, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

$$3. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n-1}}{2^n}, \quad 0 < |z| < 2, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{z^{n+2}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$4. f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-2}, \quad 0 < |z| < 1, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+4}}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

$$5. f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{3^{n+1}}, \quad 0 < |z| < 3, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+3}}, \quad 3 < |z| < \infty.$$

$$6. f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n, \quad |z| < 2,$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{z^{n+1}} - \frac{z^n}{3^{n+1}} \right), \quad 2 < |z| < 3,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{z^{n+1}}, \quad 3 < |z| < \infty.$$

$$7. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) z^{n-1}, \quad 0 < |z| < 1,$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{n+2}} + \frac{z^{n-1}}{3^n} \right), \quad 1 < |z| < 3,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{z^{n+2}}, \quad 3 < |z| < \infty.$$

$$8. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^{n-2}, \quad 0 < |z| < 1,$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{n+2}} + \frac{z^{n-2}}{2^{n+1}} \right), \quad 1 < |z| < 2,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^{n+2}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$9. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1} + 1} \right) z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z^{n+2}} + \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} \right), \quad 1 < |z| < 2,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 1}{z^{n+2}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

$$10. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) z^{2n}, \quad 0 < |z| < 1,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z^{2n+2}} + \frac{z^{2n}}{4^n} \right), \quad 1 < |z| < 2,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - 4^n}{z^{2n+2}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

1.11. Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности ее особой точки

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки $z = a$. Найти область, в которой справедливо полученное разложение.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Вводим вспомогательную переменную $t = z - a$.

2. Преобразуем функцию $f(t + a)$ к виду, позволяющему использовать табличные разложения.

3. Находим разложение функции $f(t + a)$ в ряд Лорана по степеням t , используя табличные разложения, сложение (вычитание) рядов, умножение ряда на число.

4. Заменяем t на $z - a$ и записываем полученное разложение в ряд Лорана.

5. Находим область, в которой справедливо полученное разложение:

если $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме $z = a$, полученный ряд Лорана сходится к $f(z)$ при всех $z \neq a$;

если $f(z)$ имеет другие особые точки, кроме $z = a$, полученный ряд Лорана сходится к $f(z)$ при всех z в кольце $0 < |z - a| < R$, где R — расстояние от точки a до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

ПРИМЕР. Разложить в ряд Лорана в окрестности ее особой точки функцию

$$f(z) = z \sin \frac{\pi z}{z-1}.$$

Найти область, в которой справедливо полученное разложение.

РЕШЕНИЕ. Функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $z = 1$, следовательно, ее надо разложить в ряд Лорана по степеням $z - 1$.

1. Вводим вспомогательную переменную $t = z - 1$. Получаем

$$f(t+1) = (t+1) \sin \frac{\pi t + 1}{t}.$$

2. Преобразуем функцию $f(t+1)$ к виду, позволяющему использовать табличные разложения:

$$f(t+1) = (t+1) \sin\left(\pi + \frac{1}{t}\right) = -t \sin \frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t}. \quad (1)$$

3. Используя табличное разложение в ряд Тейлора

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty,$$

и заменяя z на $1/t$, находим разложение $\sin(1/t)$ в ряд Лорана

$$\sin \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{2n+1}}, \quad 0 < |t| < \infty.$$

Подставляя в (1), получаем

$$f(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{t^{2n+1}}.$$

4. Заменяя t на $z - 1$, получаем

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

5. Находим область, в которой справедливо полученное разложение. Так как $f(z)$ не имеет других особых точек, кроме $z = 1$, полученный ряд Лорана сходится к $f(z)$ при всех $z \neq 1$.

Ответ. $f(z) =$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}, \quad 0 < |z-1| < \infty.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки.

1. $f(z) = \sin(1/z)$. 2. $f(z) = e^{-1/z^2}$. 3. $f(z) = z \cos(1/z)$. 4. $f(z) = e^{z/(z-1)}$. 5. $f(z) = \cos(\pi z/(z+1))$. 6. $f(z) = \sin[(z+2)/(z+1)]$. 7. $f(z) = e^{z/(z-i)}$. 8. $f(z) = z \cos[\pi z/(z+2)]$. 9. $f(z) = ze^{z/(z+3)}$. 10. $f(z) = 1/(1-z^2)$.

Ответы.

$$1. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

$$2. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^{2n}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

$$3. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n-1}}, \quad 0 < |z| < \infty.$$

$$4. f(z) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (z-1)^n}, \quad 0 < |z-1| < \infty.$$

$$5. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \pi^{2n}}{(2n)! (z+1)^{2n}}, \quad 0 < |z+1| < \infty.$$

$$6. f(z) = \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! (z+1)^{2n}} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! (z+1)^{2n+1}}, \quad 0 < |z+1| < \infty.$$

$$7. f(z) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n! (z-i)^n}, \quad 0 < |z-i| < \infty.$$

$$8. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)! (z+2)^{2n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}}{(2n)! (z+2)^{2n}}, \quad 0 < |z+2| < \infty.$$

$$9. f(z) = e \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n! (z+3)^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{n! (z+3)^n} \right], \quad 0 < |z+3| < \infty.$$

$$10. f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z+1| < 2,$$

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z-1| < 2.$$

1.12. Нули аналитической функции

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти нули аналитической функции $f(z)$ и определить их порядок (кратность).

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим нули аналитической функции $f(z)$, решая уравнение $f(z) = 0$.

2. Определяем порядок каждого полученного нуля $z = z_0$. Для этого используем одно из следующих (эквивалентных) утверждений:

а) если разложение $f(z)$ в степенной ряд (ряд Тейлора) в окрестности нуля $z = z_0$ имеет вид

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots, \quad \text{где } c_n \neq 0, \quad (1)$$

то z_0 — нуль n -го порядка функции $f(z)$;

б) если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{n-1}(z_0) = 0$ и $f^n(z_0) \neq 0$, то z_0 — нуль n -го порядка функции $f(z)$;

в) если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \quad (2)$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$, то z_0 — нуль n -го порядка функции $f(z)$.

Замечание. Если функция $f(z) = f_1(z) f_2(z)$, z_0 — нуль порядка n_1 функции $f_1(z)$ и z_0 — нуль порядка n_2 функции $f_2(z)$, то z_0 — нуль порядка $n_1 + n_2$ функции $f(z)$.

ПРИМЕР 1. Найти нули функции $f(z) = e^z - 1 - z$ и определить их порядок.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим нули функции $f(z)$, решая уравнение $e^z - 1 - z = 0$. Получаем $z = 0$.

2. Определяем порядок полученного нуля $z = 0$. Для этого используем разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z :

$$e^z - 1 - z = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) - 1 - z = \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Поскольку в полученном разложении коэффициенты $c_0 = c_1 = 0$, а $c_2 = 1/2 \neq 0$, точка $z = 0$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

Ответ. $z = 0$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

ПРИМЕР 2. Найти нули функции $f(z) = (z^4 + 2z + 1)(z^2 - 2z + 2)$ и определить их порядок.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим нули функции $f(z)$, решая уравнение $f(z) = 0$. Разложив многочлены на множители, имеем

$$(z - i)^2(z + i)^2(z - (1 + i))(z - (1 - i)) = 0.$$

Получаем

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 1 + i, \quad z_4 = 1 - i.$$

2. Определяем порядок каждого нуля.

Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = (z - i)^2\varphi_1(z),$$

где $\varphi_1(z) = (z + i)^2(z^2 - 2z + 2)$ и $\varphi_1(z_1) \neq 0$. Согласно формуле (2) $z_1 = i$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = (z + i)^2\varphi_2(z),$$

где $\varphi_2(z) = (z - i)^2(z^2 - 2z + 2)$ и $\varphi_2(z_2) \neq 0$. Согласно формуле (2) $z_2 = -i$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$.

Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = (z - (1 - i))\varphi_3(z),$$

где $\varphi_3(z) = (z^4 + 2z + i)(z - (1 - i))$ и $\varphi_3(z_3) \neq 0$. Согласно формуле (2) $z_3 = 1 - i$ — нуль 1-го порядка (простой нуль) функции $f(z)$.

Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = (z - (1 + i))\varphi_4(z),$$

где $\varphi_4(z) = (z^4 + 2z + i)(z - (1 + i))$ и $\varphi_4(z_4) \neq 0$. Согласно формуле (2) $z_4 = 1 + i$ — нуль 1-го порядка (простой нуль) функции $f(z)$.

Ответ.

- $z_1 = i$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$,
- $z_2 = -i$ — нуль 2-го порядка функции $f(z)$,
- $z_3 = 1 + i$ — нуль 1-го порядка функции $f(z)$,
- $z_4 = 1 - i$ — нуль 1-го порядка функции $f(z)$.

ПРИМЕР 3. Найти нули функции $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$ и определить их порядок.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим нули аналитической функции $f(z)$, решая уравнение

$$1 + \operatorname{ch} z = 0.$$

Поскольку

$$\operatorname{ch} z = \cos iz,$$

имеем уравнение для определения нулей:

$$\cos iz = -1.$$

Отсюда $iz = \pi(2k + 1)$ и

$$z_k = \pi i(2k + 1), \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

2. Определяем порядок каждого нуля, вычисляя производные функции $f(z)$:

$$f'(z) = \operatorname{sh} z, \quad f''(z) = \operatorname{ch} z,$$

и их значения в точках z_k :

$$f'(z_k) = \operatorname{sh} \pi i(2k + 1) = 0, \quad f''(z_k) = \operatorname{ch} \pi i(2k + 1) = -1 \neq 0.$$

Так как $f(z_k) = f'(z_k) = 0$ и $f''(z_k) \neq 0$, то $z_k = i\pi(2k + 1)$ являются нулями 2-го порядка функции $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$.

Ответ. $z_k = i\pi(2k + 1)$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) — нули 2-го порядка функции $f(z)$.

ПРИМЕР 4. Определить порядок нуля функции

$$f(z) = (e^{z^2} - 1 - z^2) \sin^5 z$$

в точке $z = 0$.

РЕШЕНИЕ.

1. Функция задана в виде произведения двух функций: $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где

$$f_1(z) = e^{z^2} - 1 - z^2, \quad f_2(z) = \sin^5 z.$$

2. Для первого сомножителя $f_1(z)$ вычисляем порядок нуля $z = 0$. Разложим $f_1(z)$ в ряд Тейлора, используя табличное разложение

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Получаем

$$f_1(z) = e^{z^2} - 1 - z^2 = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots - 1 - z^2 = \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \dots$$

Так как $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 1/2 \neq 0$, то $z = 0$ является нулем 4-го порядка функции $f_1(z)$.

Точка $z = 0$ — нуль первого порядка функции $\sin z$, так как $(\sin z)'|_{z=0} = \cos 0 = 1 \neq 0$. Поэтому $z = 0$ — нуль 5-го порядка функции $f_2(z) = \sin^5 z$.

Поскольку $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, точка $z = 0$ является нулем 9-го порядка функции $f(z)$.

Ответ. $z = 0$ является нулем 9-го порядка функции $f(z)$.

ПРИМЕР 5. Найти нули функции

$$f(z) = \frac{\sin^4 z}{z^2}$$

и определить их порядок.

РЕШЕНИЕ.

1. Функция

$$f(z) = \frac{\sin^4 z}{z^2}$$

аналитична при всех $z \neq 0$ ($f(z)$ не определена в точке $z = 0$). Находим нули функции, решая уравнение $f(z) = 0$ ($z \neq 0$).

Получаем

$$z_k = \pi k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Точки $z_k = \pi k$ — простые нули функции $\sin z$ и, следовательно, являются нулями 4-го порядка функции $\sin^4 z$. Так как $z^2 \neq 0$ при $z = \pi k$, то

$$\frac{\sin^4 z}{z^2} = (z - z_k)^4 \cdot \varphi(z), \quad \varphi(z_k) \neq 0.$$

Из этого заключаем, что точки

$$z_k = \pi k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

являются нулями 4-го порядка функции $f(z)$.

Ответ. $z_k = \pi k$, ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) — нули 4-го порядка функции $f(z)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти нули аналитической функции $f(z)$ и определить их порядок.

1. $f(z) = \sin z - z$. 2. $(z^2 + 1) \operatorname{sh} \pi z$. 3. $f(z) = 1 - \cos z - z^2/2$.
4. $(z + 1)^2 \sin \pi z$. 5. $f(z) = (e^{2z} - 1 - 2z) \sin z$. 6. $f(z) = z(1 - \operatorname{ch} z)$.
7. $f(z) = (z - \operatorname{sh} z)^2$. 8. $f(z) = \sin^2 z / z^3$. 9. $f(z) = z \operatorname{tg} z$. 10. $f(z) = \operatorname{sh}^2 z / z$.

Ответы. 1. $z = 0$ — нуль 3-го порядка. 2. $z = \pm i$ — нули 2-го порядка. 3. $z = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) — нули 4-го порядка. 4. $z = -1$ — нуль 3-го порядка; $z = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 1-го порядка. 5. $z = 0$ — нуль 3-го порядка; $z = \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 1-го порядка. 6. $z = 0$ — нуль 2-го порядка; $z = 2\pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 2-го порядка. 7. $z = 0$ — нуль 6-го порядка. 8. $z = \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 2-го порядка. 9. $z = 0$ — нуль 2-го порядка; $z = \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 1-го порядка. 10. $z = \pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — нули 2-го порядка.

1.13. Тип изолированной особой точки

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Определить тип изолированной особой точки $z = a$ функции $f(z)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Так как $z = a$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ разложима в ряд Лорана.

1. Находим разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (1)$$

Первая сумма в (1) называется главной частью ряда Лорана.

2. Определяем количество слагаемых в главной части ряда Лорана функции $f(z)$.

Если главная часть отсутствует (все $c_{-n} = 0$), то $z = a$ — устранимая особая точка функции $f(z)$.

Если главная часть содержит конечное число слагаемых, то $z = a$ — полюс, причем его порядок равен старшей степени $1/(z-a)$.

Если главная часть содержит бесконечное число слагаемых, то $z = a$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

Замечание. Тип особой точки функции $f(z)$ можно установить, вычисляя предел $f(z)$ при $z \rightarrow a$:

если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$, то $z = a$ — устранимая особая точка;

если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, то $z = a$ — полюс *);

если $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не существует, то $z = a$ — существенно особая точка.

ПРИМЕР. Определить тип особой точки $z = 0$ функции

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$, используя табличное разложение для $\cos z$ и заменяя в нем z на $1/z$:

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z} = z^3 \left(1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots \right) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{6!z^3} + \dots$$

Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ есть

$$\frac{1}{4!z} + \frac{1}{6!z^3} + \dots$$

2. Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, следовательно, $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

Ответ. $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Определить тип изолированной особой точки $z = 0$ функции $f(z)$.*

1. $f(z) = z \sin(2/z^3)$. 2. $f(z) = (1 - \cos z)/z^2$. 3. $f(z) = z^2 \cos(1/z^2)$.
4. $f(z) = (e^z - 1)/z^3$. 5. $f(z) = ze^{1/z}$. 6. $f(z) = (\sin z - z)/z^3$. 7. $f(z) = (\cos z - 1 + z^2/2)/z^5$.
8. $f(z) = (e^{2z} - 1 - 2z)/z^4$. 9. $f(z) = e^{2/z^2}/z^3$.
10. $f(z) = (\cos(1/z) - 1)/z^2$.

Ответы. 1. Существенно особая. 2. Устранимая. 3. Существенно особая. 4. Полюс 2-го пор. 5. Существенно особая. 6. Устранимая. 7. Полюс 1-го пор. 8. Полюс 2-го пор. 9. Существенно особая. 10. Существенно особая.

*) Таким способом нельзя установить порядок полюса.

1.14. Особые точки функции вида $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны при всех z , и определить тип особых точек.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Так как функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны при всех z , особые точки функции $f(z)$ определяются нулями знаменателя $\psi(z)$. Поэтому находим нули $\psi(z)$ (корни уравнения $\psi(z) = 0$). 2. Для каждого корня $z = z_0$:

а) определяем порядок нуля $z = z_0$ функции $\psi(z)$ и обозначаем его n ($n = 1, 2, \dots$);

б) определяем порядок нуля $z = z_0$ функции $\varphi(z)$ и обозначаем его m ($m = 0, 1, 2, \dots$).

3. Делаем вывод о характере особой точки $z = z_0$:

если $m \geq n$, то z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$;

если $m < n$, то z_0 — полюс функции $f(z)$ порядка $n - m$.

ПРИМЕР. Найти особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{\sin^2 z}$$

и определить их тип.

РЕШЕНИЕ.

1. Так как функции

$$\varphi(z) = e^z - 1 - z \quad \text{и} \quad \psi(z) = \sin^2 z$$

аналитичны при всех z , особые точки функции $f(z)$ определяются нулями знаменателя $\psi(z)$. Поэтому находим нули $\psi(z)$ (корни уравнения $\sin^2 z = 0$.) Получаем $z_k = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

2. Для каждого корня $z_k = \pi k$:

а) определяем порядок нуля $z_k = \pi k$ функции $\psi(z) = \sin^2 z$. Так как $\psi'(\pi k) = 2 \sin z \cos z|_{z=\pi k} = 0$ и $\psi''(\pi k) = 2 \cos 2z|_{z=\pi k} \neq 0$, то $z_k = \pi k$ — нули 2-ого порядка функции $\psi(z) = \sin^2 z$;

б) определяем порядок нуля $z_k = \pi k$ функции $\varphi(z) = e^z - 1 - z$.

Так как $\varphi(\pi k) \neq 0$ при $k \neq 0$, точки $z_k = \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) не являются нулями функции $\varphi(z)$.

Так как $\varphi(0) = e^z - 1 - z|_{z=0} = 0$, $\varphi'(0) = e^z - 1|_{z=0} = 0$ и $\varphi''(0) = e^z|_{z=0} \neq 0$, точка $z = 0$ — нуль 2-ого порядка функции $\varphi(z) = e^z - 1 - z$.

3. Делаем выводы о характере особых точек $z = \pi k$.

В точке $z = 0$ порядок нуля числителя и знаменателя равен 2, следовательно, $z = 0$ — устранимая особая точка.

В точках $z = \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) числитель не равен нулю, а порядок нуля знаменателя равен 2, следовательно, точки $z = \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюса 2-ого порядка.

Ответ. $z=0$ — устранимая особая точка, $z=\pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюса 2-ого порядка функции $f(z)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти особые точки функции $f(z)$ и определить их тип.

1. $f(z) = \sin z / (e^z - 1 - z^2/2)$. 2. $f(z) = (1 - \cos z) / \sin^2 z$.
3. $f(z) = \sin \pi z / (z^4 - 1)$. 4. $f(z) = (\cos z - 1) / (z^3 - \pi z^2)$.
5. $f(z) = \sin \pi z / (z^6 + 2z^5 + z^4)$. 6. $f(z) = z / (e^z - 1)$.
7. $f(z) = z \sin z / (z^2 + \pi z)^2$. 8. $f(z) = 1/z^4 + z / \sin z$.
9. $f(z) = \cos z / (z^3 - \pi z^2/2)$. 10. $f(z) = \operatorname{tg} z / (2z - \pi)$.

Ответы. 1. $z = 0$ — полюс 2-го пор. 2. $z = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) — устранимые. 3. $z = \pm 1$ — устранимые; $z = \pm i$ — полюса 1-го пор. 4. $z = 0$ — устранимая; $z = \pi$ — полюс 1-го пор. 5. $z = 0$ — полюс 3-го пор.; $z = -1$ — полюс 1-го пор. 6. $z = 0$ — устранимая; $z = 2\pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюса 1-го пор. 7. $z = 0$ — устранимая; $z = -\pi$ — полюс 1-го пор. 8. $z = 0$ — полюс 4-го пор.; $z = \pi ki$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюса 1-го пор. 9. $z = 0$ — полюс 2-го пор.; $z = \pi/2$ — устранимая. 10. $z = 0$ — устранимая; $z = \pi/2$ — полюс 2-го пор.; $z = \pi/2 + \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) — полюса 1-го пор.

1.15. Вычисление вычетов

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее изолированных особых точках.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = z_0$ называется число $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$, определяемое формулой

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz,$$

где γ — произвольный контур, лежащий в области аналитичности функции, внутри которого содержится единственная особая точка функции $z = z_0$ (обход γ совершается против часовой стрелки).

Если разложить $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности особой точки z_0 (по степеням $z - z_0$), то согласно формулам для коэффициентов c_n

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Отметим, что для вычисления вычетов в полюсах удобно применять специальные формулы (2)–(4).

1. Находим изолированные особые точки функции $f(z)$.

2. Определяем тип каждой особой точки $z = z_0$ и вычисляем в ней вычет:

а) если особая точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0; \quad (1)$$

б) если z_0 — полюс n -го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)], \quad (2)$$

в частности, при $n = 1$ точка z_0 — полюс 1-го порядка (простой полюс) и

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]; \quad (3)$$

в) если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ и $\psi'(z_0) \neq 0$, то z_0 — полюс 1-го порядка функции и

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}; \quad (4)$$

г) если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то необходимо разложить $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

и воспользоваться формулой

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \quad (5)$$

ПРИМЕР 1. Найти вычеты в особых точках функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi z/4}.$$

РЕШЕНИЕ. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi z/4} = \frac{\sin z}{z \cos z(z - \pi/4)}.$$

1. Находим изолированные особые точки функции $f(z)$. Особыми точками функции являются нули знаменателя, т.е.

$$z = 0, \quad z = \pi/4, \quad z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

2. Определяем тип каждой особой точки и вычисляем в ней вычет: $z = 0$ — устранимая особая точка, так как

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z \cos z(z - \pi/4)} = -\frac{4}{\pi}.$$

Поэтому по формуле (1)

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0.$$

Точка $z = \pi/4$ — простой полюс, поэтому по формуле (3)

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\pi/4} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} (z - \pi/4) f(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{(z - \pi/4) \operatorname{tg} z}{z(z - \pi/4)} = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z} = 4/\pi. \end{aligned}$$

Точки $z_k = \pi/2 + \pi k$ — простые полюса функции $f(z)$. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \pi z/4} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точках $z_k = \pi/2 + \pi k$ и

$$\varphi(z_k) = \frac{\sin z_k}{z_k^2 - \pi z_k/4} \neq 0, \quad \psi(z_k) = \cos z_k = 0, \quad \psi'(z_k) = -\sin z_k \neq 0.$$

Поэтому по формуле (4)

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) &= \frac{\frac{\sin z_k}{z_k(z_k - \pi/4)}}{-\sin z_k} = \\ &= \frac{\sin(\pi/2 + \pi k)}{(\pi/2 + \pi k)(\pi/2 + \pi k - \pi/4)} = -\frac{1}{(\pi/2 + \pi k)(\pi/4 + \pi k)}.\end{aligned}$$

Ответ. $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi z/4} = 0, \quad \operatorname{res}_{z=\pi/4} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi z/4} = \frac{4}{\pi},$
 $\operatorname{res}_{z=\pi/2+\pi k} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \pi z/4} = -\frac{1}{(\pi/2 + \pi k)(\pi/4 + \pi k)}.$

ПРИМЕР 2. Найти вычеты в особых точках функции

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим изолированные особые точки функции $f(z)$. Точка $z = 2$ — единственная особая точка функции $f(z)$.

2. Определяем тип особой точки $z = 2$ и вычисляем в ней вычет. Разлагаем $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$:

$$e^{\frac{1}{z-2}} = 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!(z-2)^n}.$$

Поскольку главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, $z = 2$ — существенно особая точка функции $f(z)$. По формуле (5)

$$\operatorname{res}_{z=2} e^{\frac{1}{z-2}} = c_{-1} = 1.$$

Ответ. $\operatorname{res}_{z=2} e^{\frac{1}{z-2}} = 1.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее изолированных особых точках.

1. $f(z) = z \sin(1/z)$. 2. $f(z) = (1 - \cos z)/z^3$. 3. $f(z) = z^3 e^{1/z^2}$.
4. $f(z) = z/\sin z$. 5. $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$. 6. $f(z) = \sin(\pi z)/[(z+1)(z-2)^2]$.
7. $f(z) = (e^z - 1)/[z^2(z+1)]$. 8. $f(z) = z/[(z-2)^2(z+1)^3]$. 9. $f(z) = e^{2/z^2}/z$.
10. $f(z) = (\sin z)/(z^3 - \pi z^2/4)$.

Ответы. 1. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$. 2. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1/2$. 3. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1/2$. 4. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$; $\operatorname{res}_{z=\pi k} f(z) = (-1)^k \pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). 5. $\operatorname{res}_{z=\pi(2k+1)} f(z) = 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 6. $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = 0$; $\operatorname{res}_{z=2} f(z) = \pi/3$. 7. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1$; $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = e^{-1} - 1$. 8. $\operatorname{res}_{z=2} f(z) = -1/27$; $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = 2/27$. 9. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1$. 10. $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -4/\pi$; $\operatorname{res}_{z=\pi/4} f(z) = \sqrt{2}$.

1.16. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

где Γ — граница некоторой области D , $f(z)$ аналитична в области D , за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна на Γ .

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим особые точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ функции $f(z)$, расположенные внутри контура Γ .
2. Определяем тип каждой особой точки $z_1, z_2, \dots, z_n$.
3. Вычисляем вычеты в этих особых точках.
4. Вычисляем интеграл по теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

ПРИМЕР. Вычислить интеграл

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим особые точки функции $f(z)$. Особыми точками функции

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

являются нули знаменателя. Находим все значения $z_k = \sqrt[4]{-1}$

$$z_k = e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}} = \cos \frac{\pi+2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi+2\pi k}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Определяем, какие из этих точек расположены внутри контура Γ .

Контуром интегрирования является окружность $|z - 1| = 1$. Так как $|z - z_0| < 1$ и $|z - z_3| < 1$, а $|z - z_1| > 1$ и $|z - z_2| > 1$, то внутри контура Γ расположены точки

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Определяем тип особых точек z_0 и z_3 . Для этого функцию $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z) = 1$ и $\psi(z) = z^4$ аналитичны в точках z_k и $\varphi(z_k) = 1 \neq 0$, $\psi(z_k) = 0$ и $\psi'(z_k) = 4z_k^3 \neq 0$ ($k = 0, 3$). Следовательно, z_0 и z_3 — полюса 1-го порядка функции $f(z)$.

3. Вычисляем вычеты в точках z_0 и z_3 по формуле

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}.$$

Получаем

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\operatorname{res}_{z=z_3} \frac{1}{z^4 + 1} = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4} e^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

4. Вычисляем интеграл по теореме Коши о вычетах:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1} &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4 + 1} + \operatorname{res}_{z=z_3} \frac{1}{z^4 + 1} \right) = \\ &= 2\pi i \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi i. \end{aligned}$$

Ответ. $\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi i.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

$$1. \oint_{|z|=1} z^3 e^{1/z} dz.$$

$$2. \oint_{|z-1|=1} \sin\left(1 + \frac{1}{z}\right) dz.$$

$$3. \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

$$4. \oint_{|z|=1/2} \frac{\ln(1+z)}{z^3} dz.$$

$$5. \oint_{|z-\pi/2|=2} \operatorname{ctg} 2z dz.$$

$$6. \oint_{|z-3i|=3} \frac{z^5 + 8z}{z^4 - 16} dz.$$

$$7. \oint_{|z+i|=2} \frac{e^z dz}{z \sin z}.$$

$$8. \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz.$$

$$9. \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{(z - \pi)^2} dz.$$

$$10. \oint_{|z|=5/2} \frac{dz}{z^2(z-2)(z+3)^2}.$$

Ответы. 1. $\pi i/12$. 2. $2\pi i \cos 1$. 3. 0. 4. $-\pi i$. 5. $3\pi i$. 6. $-3\pi i$.
7. $2\pi i$. 8. $2i$. 9. 0. 10. $26\pi i/675$.

1.17. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

где $R(\cos x, \sin x)$ — рациональная функция $\sin x$ и $\cos x$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Вводим комплексную переменную $z = e^{ix}$. При этом область интегрирования $[0, 2\pi]$ отобразится в окружность $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

2. Вычисляем

$$dz = ie^{ix} dx \implies dx = \frac{dz}{iz}.$$

По формулам Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

3. Подставляя в заданный интеграл результаты п.2, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx &= \\ &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz, \end{aligned}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)\right).$$

4. Вычисляем контурный интеграл от функции $f(z)$ комплексной переменной z с помощью вычетов:

- а) находим особые точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ функции $f(z)$, расположенные внутри контура $|z| = 1$;
- б) определяем тип каждой особой точки $z_1, z_2, \dots, z_n$;
- в) вычисляем вычеты в этих особых точках;
- г) вычисляем интеграл по теореме Коши о вычетах:

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

ПРИМЕР. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Вводим комплексную переменную $z = e^{ix}$. При этом область интегрирования $[0, 2\pi]$ отобразится в окружность $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

2. Вычисляем

$$dz = ie^{ix} dx \implies dx = \frac{dz}{iz}.$$

По формуле Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

3. Подставляя в заданный интеграл результаты п.2, получаем после преобразований

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{i(2z^2 + 5z + 2)^2}.$$

4. Вычисляем контурный интеграл от функции комплексной переменной z с помощью вычетов:

а) находим особые точки подынтегральной функции

$$\frac{z}{i(2z^2 + 5z + 2)^2} = \frac{z}{4i(z + 2)^2(z + 1/2)^2}$$

как нули (2-го порядка) ее знаменателя: $z_1 = -1/2$ и $z_2 = -2$. Точка $z_2 = -2$ лежит вне контура, так как $|-2| > 1$, а точка $z_1 = -1/2$ лежит внутри контура, так как $|-1/2| < 1$;

б) точка $z_1 = -1/2$ — полюс 2-го порядка;

в) вычисляем вычет в точке $z = -1/2$ по формуле для вычисления вычетов в полюсе 2-го порядка ($m = 2$):

$$\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_1)^m f(z)].$$

Получаем

$$\operatorname{res}_{z=-1/2} \frac{z}{4i(z+2)^2(z+1/2)^2} = \lim_{z \rightarrow -1/2} \left[\frac{(z+1/2)^2 z}{4i(z+2)^2(z+1/2)^2} \right]' = \frac{5}{27i};$$

г) вычисляем контурный интеграл по теореме Коши о вычетах:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2} &= \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{4i(z+2)^2(z+1/2)^2} = \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{-1/2} \frac{z}{4i(z+2)^2(z+1/2)^2} = \frac{10\pi}{27}. \end{aligned}$$

Ответ. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 4 \cos x)^2} = \frac{10\pi}{27}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x}.$

2. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \cos x}.$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x + 1}{\sin x + 2} dx.$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5 + 3 \cos x} dx.$

5. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + 3 \cos^2 x)^2}.$

6. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4 - 3 \sin^2 x)^2}.$

7. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3 \cos x}.$

8. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5 + 3 \cos x)^2}.$

9. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$

10. $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin^2 x}{5 + 3 \cos x} dx.$

Ответы. 1. $\pi/\sqrt{2}$. 2. $2\pi/3$. 3. $2\pi/\sqrt{3}$. 4. $2\pi/9$. 5. $7\pi/10\sqrt{10}$.
6. $5\pi/8$. 7. $\pi/2$. 8. $5\pi/32$. 9. $\pi/2$. 10. $13\pi/18$.

1.18. Несобственные интегралы от рациональных функций

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx,$$

где P_n и Q_m — многочлены степени n и m , $Q_m(x) \neq 0$ и $m \geq n + 2$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Для того чтобы применить теорему Коши о вычетах, вводим функцию комплексной переменной

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-\varrho, \varrho]$ и полуокружности $C_\varrho = \{|z| = \varrho, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав ϱ так, чтобы все

особые точки z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx + \int_{C_\varrho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (1)$$

Переходим к пределу при $\varrho \rightarrow +\infty$. Так как $m \geq n + 2$, то

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \int_{C_\varrho} f(z) dz = 0.$$

Поскольку правая часть в (1) не зависит от ϱ , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z), \quad (2)$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

2. Находим особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, и определяем их тип.

3. Вычисляем вычеты в этих точках.

4. Вычисляем искомый интеграл по формуле (2).

Замечание. Если $f(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ — четная функция x , то можно вычислять интегралы вида

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

по формуле (2).

ПРИМЕР. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 17)^2} dx.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Для того чтобы применить теорему Коши о вычетах, вводим функцию комплексной переменной

$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 2z + 17)^2} = \frac{P_2(z)}{Q_4(z)}$$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-\varrho, \varrho]$ и полуокружности $C_\varrho = \{|z| = \varrho, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав ϱ так, чтобы все особые точки z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 17)^2} dx + \int_{C_\varrho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (3)$$

Переходим к пределу при $\varrho \rightarrow +\infty$. Так как степени многочленов P_2 и Q_4 удовлетворяют соотношению $m \geq n + 2$, то

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \int_{C_\varrho} f(z) dz = 0.$$

Поскольку правая часть в (3) не зависит от ϱ , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 2x + 17)^2} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 2z + 17)^2}, \quad (4)$$

где z_k — особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 2z + 17)^2},$$

лежащие в верхней полуплоскости.

2. Находим особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 2z + 17)^2} = \frac{z^2 + 3}{(z + 1 - 4i)^2(z + 1 + 4i)^2}$$

как нули (2-го порядка) ее знаменателя: $z = -1 + 4i$ и $z = -1 - 4i$. Таким образом, точки $z = -1 + 4i$ и $z = -1 - 4i$ — полюса 2-го порядка. В верхней полуплоскости лежит единственная точка $z = -1 + 4i$.

3. Вычисляем вычет в точке $z = -1 + 4i$ по формуле для вычисления вычетов в полюсах n -го порядка ($n = 2$):

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)].$$

Получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-1+4i} \frac{z^2+3}{(z^2+2z+17)^2} &= \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+4i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z^2+3)(z+1-4i)^2}{(z+1-4i)^2(z+1+4i)^2} \right] = \frac{5}{64i}. \end{aligned}$$

4. Вычисляем искомый интеграл по формуле (4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2} dx = 2\pi i \frac{5}{64i} = \frac{5\pi}{32}.$$

Ответ. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+2x+17)^2} dx = \frac{5\pi}{32}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}.$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+3}{x^4+10x^2+9} dx.$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}.$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^3}.$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+2x+10)^3}.$

6. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1}.$

7. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2}.$

8. $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2+2)^4}.$

9. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

10. $\int_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}.$

Ответы. 1. $\pi/54$. 2. $\pi/2$. 3. $\pi/30$. 4. $3\sqrt{2}\pi/64$. 5. $-\pi/648$.
6. $\sqrt{2}\pi/4$. 7. $\pi/12$. 8. $\sqrt{2}\pi/128$. 9. $3\pi/16$. 10. $5\pi/36$.

1.19. Несобственные интегралы от функций $R(x) \cos \lambda x$ и $R(x) \sin \lambda x$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Вычислить несобственные интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x \, dx,$$

где $R(x)$ — правильная рациональная дробь и $\lambda > 0$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} \, dx$$

и воспользоваться формулами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos \lambda x \, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} \, dx, \quad (1)$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin \lambda x \, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} \, dx. \quad (1')$$

1. Чтобы применить теорему Коши о вычетах, вводим функцию комплексной переменной

$$f(z) = R(z) e^{i\lambda z}$$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-\varrho, \varrho]$ и полуокружности $C_\varrho = \{|z| = \varrho, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав ϱ так, чтобы все особые точки z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} R(x) e^{i\lambda x} \, dx + \int_{C_\varrho} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z). \quad (2)$$

Переходим к пределу при $\varrho \rightarrow +\infty$ и используем лемму Жордана.

Лемма Жордана. Пусть $g(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек, и $\max_{z \in C_\varrho} |g(z)| \rightarrow 0$ при $\varrho \rightarrow +\infty$. Тогда $\forall \lambda > 0$

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \int_{C_\varrho} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Так как в нашем случае $g(z) = R(z)$ — правильная рациональная дробь и $\lambda > 0$, то условия леммы Жордана выполнены и, следовательно,

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \int_{C_\varrho} f(z) dz = 0.$$

Поскольку правая часть в (2) не зависит от ϱ , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) e^{i\lambda z}, \quad (3)$$

где z_k — особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

2. Находим особые точки функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, и определяем их тип.

3. Вычисляем вычеты в этих точках.

4. Вычисляем несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx$$

по формуле (3).

5. Используя формулы (1) или (1') вычисляем искомый интеграл.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} \cos x dx.$$

РЕШЕНИЕ. Для решения задачи достаточно вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} e^{ix} dx$$

и воспользоваться формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} \cos x \, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} e^{ix} \, dx. \quad (4)$$

1. Чтобы применить теорему Коши о вычетах, вводим функцию комплексной переменной

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z+2} e^{iz}$$

и строим контур, состоящий из отрезка вещественной оси $[-\varrho, \varrho]$ и полуокружности $C_\varrho = \{|z| = \varrho, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, выбрав ϱ так, чтобы все особые точки z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функции $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, оказались внутри контура. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{x+1}{x^2-2x+2} e^{ix} \, dx + \int_{C_\varrho} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (5)$$

Переходим к пределу при $\varrho \rightarrow +\infty$. Так как в нашем случае

$$g(z) = \frac{z+1}{z^2-2z+2}$$

есть правильная рациональная дробь и $\lambda = 1 > 0$, то условия леммы Жордана выполнены и, следовательно,

$$\lim_{\varrho \rightarrow +\infty} \int_{C_\varrho} f(z) \, dz = 0.$$

Поскольку правая часть в (5) не зависит от ϱ , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)}{x^2-2x+2} e^{ix} \, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} \frac{z+1}{z^2-2z+2} e^{iz}, \quad (6)$$

где z_k — особые точки функции

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z+2} e^{iz},$$

лежащие в верхней полуплоскости.

2. Находим особые точки функции

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z+2}e^{iz} = \frac{z+1}{(z-1-i)(z-1+i)}e^{iz}$$

как нули (1-го порядка) ее знаменателя: $z = 1+i$ и $z = 1-i$. Таким образом, точки $z = 1+i$ и $z = 1-i$ — полюса 1-го порядка. В верхней полуплоскости лежит единственная точка $z = 1+i$.

3. Вычисляем вычет в простом полюсе $z = 1+i$ по формуле

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

где $\varphi(z) = (z+1)e^{iz}$ и $\psi(z) = z^2 - 2z + 2$. Получаем

$$\operatorname{res}_{z=1+i} \frac{(z+1)e^{iz}}{z^2-2z+2} = \left. \frac{(z+1)e^{iz}}{2z-2} \right|_{z=1+i} = \frac{(2+i)e^{-1+i}}{2i}.$$

4. Вычисляем несобственный интеграл по формуле (6):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} e^{ix} dx = 2\pi i \frac{(2+i)e^{-1+i}}{2i} = \pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i \sin 1).$$

5. Используя формулу (4), вычисляем искомый интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} \cos x dx &= \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} e^{ix} dx \right] = \\ &= \operatorname{Re} (\pi e^{-1}(2+i)(\cos 1 + i \sin 1)) = \pi e^{-1}(2 \cos 1 - \sin 1). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-2x+2} \cos x dx = \pi e^{-1}(2 \cos 1 - \sin 1).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить интегралы с помощью вычетов.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx.$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - x + 1} dx.$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx.$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 6x}{x^2 + 4x + 13} dx.$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2 - 4x + 6} dx.$
6. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx.$
7. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2} dx.$
8. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx.$
9. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 + 16} dx.$
10. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx.$

ОТВЕТЫ.

1. $\frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1).$
2. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} \cos 1.$
3. $-\pi e^{-1} \sin 1.$
4. $\frac{\pi}{3} e^{-18} (3 \cos 12 + 2 \sin 12).$
5. $\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-4\sqrt{2}} (3 \cos 8 - \sqrt{2} \sin 8).$
6. $\frac{\pi}{2} e^{-1/\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$
7. $\frac{3\pi}{32} e^{-2}.$
8. $\frac{\pi}{10} \left(\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-3}}{3} \right).$
9. $\frac{\pi}{2} e^{-12}.$
10. $\frac{\pi}{4} e^{-1}.$

Глава 2

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

При изучении темы ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ вы познакомитесь с понятиями функции-оригинала и ее изображения (по Лапласу), изучите свойства оригиналов и изображений, научитесь применять их для решения операционным методом обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

С помощью пакета РЕШЕБНИК ВМ вы сможете вычислять интегралы, находить разложения рациональных функций на элементарные дроби, вычислять производные и выполнять все другие действия, необходимые при изучении темы. Когда вы в ней освоитесь, вы сможете вычислять изображения и восстанавливать оригиналы по их изображениям простым нажатием кнопок на клавиатуре компьютера, используя возможности модуля STEM Plus, входящего в пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

2.1. Понятия оригинала и изображения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Доказать, что функция $f(t)$ является оригиналом и найти ее изображение (по Лапласу).

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Комплекснозначная функция $f(t)$ действительной переменной t называется *оригиналом*, если она удовлетворяет трем условиям:

- а) $f(t) \equiv 0$ при всех $t < 0$;
- б) на любом конечном отрезке $[a, b] \subset [0, \infty)$ функция $f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода;
- в) существуют числа $M > 0$ и $s \geq 0$ такие, что

$$|f(t)| < Me^{st} \quad \forall t > 0.$$

Наименьшее число s , для которого выполняется это неравенство, называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Если $f(t)$ — оригинал, то ее преобразование Лапласа $F(p)$ (p — комплексная переменная) определяется формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Функция $F(p)$ комплексной переменной p называется также *изображением* (по Лапласу) функции $f(t)$. Связь оригинала и изображения обозначается символом

$$f(t) \longleftrightarrow F(p).$$

Замечание. В полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$ (s — показатель роста оригинала $f(t)$) интеграл (1) сходится абсолютно и определяет аналитическую функцию $F(p)$.

1. Доказываем, что функция $f(t)$ является оригиналом, проверяя выполнение условий а)–в). Определяем показатель s роста функции $f(t)$.

2. Находим изображение $F(p)$, вычисляя интеграл (1) в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s$.

ПРИМЕР 1. Доказать, что функция Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

является оригиналом, и найти ее изображение (по Лапласу).

РЕШЕНИЕ.

1. Условия а)–в), очевидно, выполняются. Так как функция $\eta(t)$ ограничена, то ее показатель роста $s = 0$.

2. Находим изображение $F(p)$ по формуле (1):

$$F(p) = \int_0^{\infty} \eta(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

т.к. из $|e^{-pt}| = e^{\operatorname{Re}(-pt)} = e^{-t\operatorname{Re} p}$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > s = 0.$$

Ответ. $\eta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p}.$

ПРИМЕР 2. Доказать, что функция

$$f(t) = \eta(t) e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$$

является оригиналом, и найти ее изображение (по Лапласу).

РЕШЕНИЕ.

1. Условия а)–в), очевидно, выполняются. Показатель роста s функции $f(t) = \eta(t)e^{at}$ равен $\operatorname{Re} a$.

2. Находим изображение $F(p)$ по формуле (1):

$$F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = -\frac{e^{(a-p)t}}{a-p} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a-p} = \frac{1}{p-a},$$

т.к. из равенства $|e^{(a-p)t}| = e^{-t(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)}$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-p)t} = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

Ответ. $e^{at}\eta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p-a}.$

Замечание. Поскольку все функции-оригиналы имеют вид $f(t)\eta(t)$ (условие а), в дальнейшем $\eta(t)$ будем опускать: например, $1 \longleftrightarrow 1/p$, $e^{at} \longleftrightarrow 1/(p-a)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Доказать, что функция $f(t)$ является оригиналом, и найти ее изображение (по Лапласу).

$$1. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases} \quad 2. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 1, & 1 < t < 3, \\ 2, & t > 3, \\ 0, & t < 1. \end{cases} \quad 4. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases}$$

$$5. f(t) = \begin{cases} t+1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases} \quad 6. f(t) = \begin{cases} -t+1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases}$$

$$7. f(t) = \begin{cases} 1, & 2k < t < 2k+1, \\ -1, & 2k+1 < t < 2k+2, \\ 0, & t < 0 \quad (k=0, 1, \dots). \end{cases} \quad 8. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t-1, & 1 < t < 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

$$9. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ -t+2, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2. \end{cases} \quad 10. f(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)}, & t > 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Ответы. 1. $F(p) = (1 - e^{-p})/p$. 2. $F(p) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})/p$.
 3. $F(p) = (e^{-p} + e^{-3p})/p$. 4. $F(p) = (1 - e^{-p} - pe^{-p})/p^2$.
 5. $F(p) = (1 - e^{-p} - 2pe^{-p} + p)/p^2$. 6. $F(p) = (1 + e^{-2p} + pe^{-2p} - p)/p^2$.
 7. $F(p) = (1 - e^{-p})/(p + pe^{-p})$. 8. $F(p) = (e^{-p} - e^{-2p} + 2pe^{-2p})/p^2$.
 9. $F(p) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})/p^2$. 10. $F(p) = e^{-p}/(p+1)$.

2.2. Изображение функции вида $\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти изображение функции

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(t),$$

если $f_k(t) \longleftrightarrow F_k(p)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Свойство линейности.

Если $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ — оригиналы и $F_1(p), F_2(p), \dots, F_n(p)$ — их изображения, то $\forall c_k \in \mathbb{C}$ функция $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k f_k(t)$ также является оригиналом и ее изображение $F(p)$ определяется формулой

$$F(p) = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p) + \dots + c_n F_n(p).$$

1. Представляем функцию $f(t)$ в виде линейной комбинации функций, изображения которых известны.

2. Используя свойство линейности, находим искомое изображение. Записываем ответ.

ПРИМЕР 1. Найти изображение функции

$$f(t) = 4 + 3e^{-t}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Функция $f(t)$ является линейной комбинации функций, изображения которых известны:

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{p} \quad \text{и} \quad e^{-t} \longleftrightarrow \frac{1}{p+1}.$$

2. Согласно свойству линейности получаем

$$4 + 3e^{-t} \longleftrightarrow 4\frac{1}{p} + 3\frac{1}{p+1}.$$

Ответ. $4 + 3e^{-t} \longleftrightarrow \frac{4}{p} + \frac{3}{p+1}.$

ПРИМЕР 2. Найти изображение функции

$$f(t) = \cos t.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Представим $f(t) = \cos t$ в виде линейной комбинации функций

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it},$$

изображения которых известны:

$$e^{it} \longleftrightarrow \frac{1}{p-i}, \quad e^{-it} \longleftrightarrow \frac{1}{p+i}.$$

2. Согласно свойству линейности получаем

$$\cos t = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \longleftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p-i} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+i} = \frac{p}{p^2+1}.$$

Ответ. $\cos t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2+1}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти изображение функции $f(t)\eta(t)$.

1. $f(t) = \sin t$. 2. $f(t) = \operatorname{ch} t$. 3. $f(t) = \operatorname{sh} t$. 4. $f(t) = \sin(t + \varphi)$.
5. $f(t) = \cos(t + \varphi)$. 6. $f(t) = 5e^{-2t} + 3\cos t$. 7. $f(t) = \sin t + \cos t$.
8. $f(t) = \operatorname{sh} t - \sin t$. 9. $f(t) = \operatorname{ch} t - \cos t$. 10. $f(t) = \cos^2(t/2)$.

- Ответы. 1. $F(p) = 1/(p^2+1)$. 2. $F(p) = p/(p^2-1)$. 3. $F(p) = 1/(p^2-1)$.
 4. $F(p) = (\cos \varphi + p \sin \varphi)/(p^2+1)$. 5. $F(p) = (p \cos \varphi - \sin \varphi)/(p^2+1)$.
 6. $F(p) = (8p^2 + 6p + 5)/(p^3 + 2p^2 + p + 2)$. 7. $F(p) = (p+1)/(p^2+1)$.
 8. $F(p) = 2/(p^4-1)$. 9. $F(p) = 2p/(p^4-1)$. 10. $F(p) = (2p^2+1)/(2p^3+2p)$.

2.3. Изображение функции вида $f(at)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти изображение функции $f(at)$ ($a > 0$), если $f(t) \longleftrightarrow F(p)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Теорема подобия. Если функция $f(t)$ — оригинал и $F(p)$ — ее изображение, то $\forall a > 0$ функция $f(at)$ также является оригиналом и ее изображение определяется формулой

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

ПРИМЕР. Найти изображение функции

$$f(t) = \cos \omega t \quad (\omega > 0).$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\cos t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Тогда по теореме подобия $\forall \omega > 0$

$$\cos \omega t \longleftrightarrow \frac{1}{a} \frac{p/\omega}{(p/\omega)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Ответ. $\cos \omega t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$

Замечание. Вычисляя изображение по определению или используя формулу Эйлера и свойство линейности, легко убедиться, что полученная формула справедлива $\forall \omega \in \mathbb{C}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти изображение функции $f(t)\eta(t)$.

1. $f(t) = \sin 2t$. 2. $f(t) = \operatorname{ch} 2t$. 3. $f(t) = \operatorname{sh} 2t$. 4. $f(t) = \sin(t/2)$.
5. $f(t) = \cos(t/2)$. 6. $f(t) = \sin^2 t$. 7. $f(t) = \cos^2 t$.
8. $f(t) = \sin 3t \cdot \cos 2t$. 9. $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$. 10. $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$.

- Ответы. 1. $F(p) = 2/(p^2 + 4)$. 2. $F(p) = p/(p^2 - 4)$. 3. $F(p) = 2/(p^2 - 4)$.
4. $F(p) = 2/(4p^2 + 1)$. 5. $F(p) = 4p/(4p^2 + 1)$.
6. $F(p) = 2/(p^3 + 4p)$. 7. $F(p) = (p^2 + 2)/(p^3 + 4p)$. 8. $F(p) = (3p^2 + 15)/(p^4 + 26p^2 + 25)$.
9. $F(p) = (\omega \cos \varphi + p \sin \varphi)/(p^2 + \omega^2)$.
10. $F(p) = (p \cos \varphi - \omega \sin \varphi)/(p^2 + \omega^2)$.

2.4. Изображение функции вида $e^{-at}f(t)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти изображение функции $e^{-at}f(t)$ ($a \in \mathbb{C}$), если $f(t) \longleftrightarrow F(p)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Теорема затухания (или смещения).

Если функция $f(t)$ — оригинал и $F(p)$ — ее изображение, то $\forall a \in \mathbb{C}$ функция $e^{-at}f(t)$ также является оригиналом и ее изображение определяется формулой

$$e^{-at}f(t) \longleftrightarrow F(p + a).$$

ПРИМЕР. Найти изображение функции

$$f(t) = e^{-t} \cos 2t.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\cos 2t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Тогда по теореме смещения при $a = 1$

$$e^{-t} \cos 2t \longleftrightarrow \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

Ответ. $e^{-t} \cos 2t \longleftrightarrow \frac{p+1}{p^2 + 2p + 5}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти изображение функции $f(t)\eta(t)$.

1. $f(t) = e^{2t} \sin 3t$. 2. $f(t) = e^{-t}(\cos 3t + \sin 3t)$. 3. $f(t) = e^t \cos^2 t$.
4. $f(t) = e^{3t} \sin^2 t$. 5. $f(t) = e^{at} \cos \omega t$. 6. $f(t) = e^{at} \sin \omega t$.
7. $f(t) = e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$. 8. $f(t) = e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$. 9. $f(t) = \operatorname{ch} \omega t \cdot \cos \omega t$. 10. $f(t) = \operatorname{sh} \omega t \cdot \sin \omega t$.

- Ответы. 1. $F(p) = 3/(p^2 - 4p + 13)$. 2. $F(p) = (p+4)/(p^2 + 2p + 10)$.
 3. $F(p) = (p^2 - 2p + 3)/[(p-1)(p^2 - 2p + 5)]$. 4. $F(p) = 2/[(p-3)(p^2 - 6p + 13)]$.
 5. $F(p) = (p-a)/(p^2 - 2ap + a^2 + \omega^2)$. 6. $F(p) = \omega/(p^2 - 2ap + a^2 + \omega^2)$.
 7. $F(p) = (\omega \cos \varphi + (p-a) \sin \varphi)/(p^2 - 2pa + a^2 + \omega^2)$. 8. $F(p) = [(p-a) \cos \varphi - \omega \sin \varphi]/(p^2 - 2pa + a^2 + \omega^2)$. 9. $F(p) = p^3/(p^4 + 4\omega^4)$.
 10. $F(p) = 2\omega^2 p/(p^4 + 4\omega^4)$.

2.5. Изображение

функции вида $\sum_{k=1}^n f_k(t - \tau_k)\eta(t - \tau_k)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти изображение $F(p)$ функции

$$\sum_{k=1}^n f_k(t - \tau_k)\eta(t - \tau_k) \quad (\tau_k > 0),$$

если $f_k(t) \longleftrightarrow F_k(p)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Если функция $f_k(t)$ — оригинал и $F_k(p)$ — ее изображение, то по теореме запаздывания $\forall \tau_k > 0$ функция $f_k(t - \tau_k)\eta(t - \tau_k)$ также является оригиналом и ее изображение определяется формулой

$$f_k(t - \tau_k)\eta(t - \tau_k) \longleftrightarrow e^{-p\tau_k} F_k(p).$$

2. Используя свойство линейности, находим искомое изображение

$$F(p) = \sum_{k=1}^n e^{-p\tau_k} F_k(p)$$

и записываем ответ.

Замечание. Если функция $f(t)$ задана разными выражениями на разных промежутках, то ее надо предварительно представить в виде

$$\sum_{k=1}^n f_k(t - \tau_k)\eta(t - \tau_k).$$

ПРИМЕР. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t < 0, \quad t > 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Представим $f(t)$ в виде

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t - 1).$$

1. Имеем

$$\eta(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p}.$$

По теореме запаздывания при $\tau = 1$

$$\eta(t - 1) \longleftrightarrow \frac{e^{-p}}{p}.$$

2. Используя свойство линейности, находим искомое изображение

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

Ответ. $F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p}.$

Замечание. Обычно функция $\eta(t)$ опускается. В случаях, к которым применима теорема запаздывания, это может привести к ошибкам.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти изображение функции $f(t)$.

$$1. f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & t > 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases} \quad 2. f(t) = \begin{cases} \cos(t-2), & t > 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, \quad t > 2. \end{cases} \quad 4. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 2, & t > 2, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$5. f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ -t+2, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, \quad t > 2. \end{cases} \quad 6. f(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)}, & t > 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

$$7. f(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)}, & t > 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases} \quad 8. f(t) = \begin{cases} 1, & 2k < t < 2k+1, \\ -1, & 2k+1 < t < 2k+2, \\ 0, & t < 0 \quad (k = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

$$9. f(t) = \begin{cases} |\sin t|, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad 10. f(t) = \begin{cases} |\cos t|, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ответы. 1. $F(p) = e^{-p}/p^3$. 2. $F(p) = pe^{-2p}/p^2 + 1$. 3. $F(p) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})/p$. 4. $F(p) = (1 - e^{-2p})/p^2$. 5. $F(p) = (1 - 2e^{-p} + e^{-2p})/p^2$. 6. $F(p) = e^{-p}/(p+1)$. 7. $F(p) = e^{-p}/(p^2+p)$. 8. $F(p) = (1 - e^{-p})/(p + pe^{-p})$. 9. $F(p) = (1 + e^{-\pi p})/[(p^2+1)(1 - e^{-\pi p})]$. 10. $F(p) = (p + 2e^{-\pi p/2} - pe^{-\pi p})/[(p^2+1)(1 - e^{-\pi p})]$.

2.6. Изображение функции вида $t^n f(t)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти изображение функции $t^n f(t)$ ($n \in \mathbb{N}$).

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Если функция $f(t)$ является оригиналом и $F(p)$ — ее изображение, то по теореме о дифференцировании изображения имеем $\forall n \in \mathbb{N}$

$$t^n f(t) \longleftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(p). \quad (1)$$

1. Находим изображение $F(p)$ функции $f(t)$.
2. Вычисляем производные $F^{(n)}(p)$.
3. Находим изображение функции $t^n f(t)$ по формуле (1).

ПРИМЕР 1. Найти изображение функции

$$f(t) = t^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Имеем

$$1 \longleftrightarrow \frac{1}{p} = F(p).$$

2. Вычисляем производные

$$F'(p) = -\frac{1}{p^2}, \quad F''(p) = \frac{2}{p^3}, \quad \dots, \quad F^{(n)}(p) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

3. Находим изображение функции t^n по формуле (1):

$$t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Ответ. $t^n \longleftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

ПРИМЕР 2. Найти изображение функции

$$f(t) = t \sin t.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Имеем

$$\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1} = F(p).$$

2. Вычисляем производную

$$F'(p) = -\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

3. Находим изображение функции $t \sin t$ по формуле (1) при $n = 1$:

$$t \sin t \longleftrightarrow \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Ответ. $t \sin t \longleftrightarrow \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти изображение функции $f(t)\eta(t)$.

1. $f(t) = t \sin \omega t$. 2. $f(t) = t \cos \omega t$. 3. $f(t) = t \operatorname{sh} \omega t$. 4. $f(t) = t \operatorname{ch} \omega t$.
 5. $f(t) = t^2 e^{at}$. 6. $f(t) = t^2 \sin \omega t$. 7. $f(t) = t^2 \cos \omega t$. 8. $f(t) = t^2 \operatorname{sh} \omega t$.
 9. $f(t) = t^2 \operatorname{ch} \omega t$. 10. $f(t) = t^n e^{at}$.

- Ответы. 1. $F(p) = 2\omega p/(p^2 + \omega^2)^2$. 2. $F(p) = (p^2 - \omega^2)/(p^2 + \omega^2)^2$.
 3. $F(p) = 2\omega p/(p^2 - \omega^2)^2$. 4. $F(p) = (p^2 + \omega^2)/(p^2 - \omega^2)^2$.
 5. $F(p) = 2/(p - a)^3$. 6. $F(p) = (6\omega p^2 - 2\omega^3)/(p^2 + \omega^2)^3$.
 7. $F(p) = (2p^3 - 6\omega^2 p)/(p^2 + \omega^2)^3$. 8. $F(p) = (6\omega p^2 + 2\omega^3)/(p^2 - \omega^2)^3$.
 9. $F(p) = (2p^3 + 6\omega^2 p)/(p^2 - \omega^2)^3$. 10. $F(p) = n!/(p - a)^{n+1}$.

2.7. Изображение функции вида $f(t)/t$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Доказать, что функция $f(t)/t$ является оригиналом, и найти ее изображение.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Если функции $f(t)$ и $f(t)/t$ являются оригиналами и $F(p)$ — изображение функции $f(t)$, то по теореме об интегрировании изображений имеем

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_p^\infty F(z) dz. \quad (1)$$

1. Если $f(t)$ — оригинал, то функция $f(t)/t$ является оригиналом, если она имеет конечный предел при $t \rightarrow 0 + 0$.
2. Находим изображение $F(p)$ функции $f(t)$.
3. Вычисляем интеграл

$$\int_p^{\infty} F(z) dz.$$

4. Находим изображение функции $f(t)/t$ по формуле (1).

Замечание. Можно не проверять существование предела $f(t)/t$ при $t \rightarrow 0 + 0$, так как если интеграл $\int_p^{\infty} F(z) dz$ сходится, то функция $f(t)/t$ заведомо является оригиналом и справедлива формула (1).

ПРИМЕР. Доказать, что функция $(\sin t)/t$ является оригиналом, и найти ее изображение.

РЕШЕНИЕ.

1. Функция $(\sin t)/t$ является оригиналом, так как существует

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

2. Имеем

$$\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1} = F(p).$$

3. Вычисляем интеграл

$$\int_p^{\infty} F(z) dz = \int_p^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Так как интеграл сходится, то $(\sin t)/t$ — оригинал.

4. Находим изображение функции $(\sin t)/t$ по формуле (1)

$$\frac{\sin t}{t} \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Ответ. $\frac{\sin t}{t} \longleftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Доказать, что функция $f(t)\eta(t)$ является оригиналом, и найти ее изображение.

1. $f(t) = (1 - e^{at})/t$.
2. $f(t) = \sin^2 t/t$.
3. $f(t) = e^{-at} \sin t/t$.
4. $f(t) = (1 - \cos t)/t$.
5. $f(t) = \operatorname{sh} t/t$.
6. $f(t) = (1 - \operatorname{ch} t)/t$.
7. $f(t) = (\cos 5t - \cos 3t)/t$.
8. $f(t) = (\sin 7t \cdot \sin 3t)/t$.
9. $f(t) = (e^{at} - e^{bt})/t$.
10. $f(t) = e^{at} \sin^2 t/t$.

Ответы. 1. $F(p) = \ln \frac{p-a}{p}$. 2. $F(p) = \ln \frac{p^2+4}{p^2}$. 3. $F(p) = \arctg \frac{1}{p+a}$. 4. $F(p) = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2}{p^2+1}$. 5. $F(p) = \frac{1}{2} \ln \frac{p-1}{p+1}$. 6. $F(p) = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2}{p^2-1}$. 7. $F(p) = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+9}{p^2+25}$. 8. $F(p) = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2+100}{p^2+16}$. 9. $F(p) = \ln \frac{p-a}{p-b}$. 10. $F(p) = \frac{1}{4} \ln \frac{(p-a)^2}{(p-a)^2+4}$.

2.8. Восстановление оригинала по изображению $P_m(p)/Q_n(p)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Восстановить оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p) = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)},$$

где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — многочлены степени m и n , причем $m < n$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Записываем $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей вида

$$\frac{A}{p-a}, \quad \frac{A}{(p-a)^k}, \quad \frac{Mp+N}{p^2+\alpha p+\beta}, \quad \frac{Mp+N}{(p^2+\alpha p+\beta)^l}.$$

2. Для каждой дроби находим ее оригинал, пользуясь таблицей изображений, свойствами преобразования Лапласа и теоремой умножения изображений (теоремой о свертке).

3. Используя линейность преобразования Лапласа, находим искомый оригинал $f(t)$.

ПРИМЕР. Восстановить оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^3-8}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Записываем $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$F(p) = \frac{1}{p^3-8} = \frac{1}{(p-2)(p^2+2p+4)} = \frac{1}{12} \frac{1}{p-2} - \frac{1}{12} \frac{p+4}{p^2+2p+4}. \quad (1)$$

2. Для каждой дроби находим ее оригинал.

Первая дробь

$$F_1(p) = \frac{1}{p-2}$$

является изображением функции $f_1(t) = e^{2t}$.

В знаменателе второй дроби выделим полный квадрат и запишем ее в виде, позволяющем использовать теорему смещения:

$$F_2(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+4} = \frac{(p+1)}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

По теореме смещения

$$e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) \longleftrightarrow \frac{(p+1)}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

и

$$e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) \longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

3. Используя линейность преобразования Лапласа и разложение (1), находим искомым оригинал

$$f(t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t} \sin(\sqrt{3}t).$$

Ответ. $f(t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t} \sin(\sqrt{3}t).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Восстановить оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{3p}{2p^2 - 2p - 4}.$

2. $F(p) = \frac{1}{p^4 - 2p^3 + p^2}.$

3. $F(p) = \frac{3p^2 + 3p - 13}{p^3 + 4p^2 + 13p}.$

4. $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p-1)}.$

5. $F(p) = \frac{p^2 + 4}{(p-1)(p+2)(p-3)}.$

6. $F(p) = \frac{p^2 + p - 4}{p^2 - p^3}.$

7. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}.$

8. $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}.$

9. $F(p) = \frac{p}{(p+2)^2(p-1)^3}.$

10. $F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$

Ответы. 1. $f(t) = e^{2t} + e^{-t}/2$. 2. $f(t) = t + 2 - 2e^t + te^t$.
 3. $f(t) = -1 + 4e^{-2t} \cos 3t - e^{-2t} \sin 3t/3$. 4. $f(t) = e^t/9 - e^{2t}/9 + 2te^{-2t}/3$. 5. $f(t) = -5e^t/6 + 8e^{-2t}/15 + 13e^{3t}/10$. 6. $f(t) = 2e^t - 4t - 3$.
 7. $f(t) = t^2 e^t/2$. 8. $f(t) = (\operatorname{ch} t - \cos t)/2$. 9. $f(t) = (3t^2 + 2t - 2)e^t/54 + (2t + 1)e^{-2t}/27$. 10. $f(t) = -1/6 + e^t - 3e^{2t}/2 + 2e^{3t}/3$.

2.9. Восстановление оригинала по теореме разложения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Восстановить оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$, используя теорему разложения.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Если изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$ является однозначной функцией p и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \dots, p_n$, то по 2-ой теореме разложения

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} [e^{pt} F(p)]. \quad (1)$$

1. Находим особые точки функции $F_1(p) = e^{pt} F(p)$ и определяем их тип.

2. Вычисляем вычеты в этих точках.

3. Вычисляем оригинал $f(t)$ по формуле (1) и записываем ответ.

ПРИМЕР. Восстановить оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = \frac{p^2 + p + 1}{(p-1)(p+1)^2},$$

используя теорему разложения.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим особые точки функции

$$F_1(p) = e^{pt} F(p) = e^{pt} \frac{p^2 + p + 1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

$F_1(p)$ имеет два полюса: $p = 1$ — полюс 1-го порядка и $p = -1$ — полюс 2-го порядка.

2. Вычисляем вычеты в этих точках

$$\operatorname{res}_{p=1} \frac{(p^2 + p + 1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(p^2 + p + 1)(p-1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{3}{4}e^t,$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{p=-1} \frac{(p^2 + p + 1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left[\frac{(p^2 + p + 1)(p+1)^2 e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} \right] = \\
 &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{[(2p+1)e^{pt} + te^{pt}(p^2 + p + 1)](p-1) - (p^2 + p + 1)e^{pt}}{(p-1)^2} = \\
 &= \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.
 \end{aligned}$$

3. Вычисляем оригинал $f(t)$ по формуле (1)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \operatorname{res}_{p=1} \frac{(p^2 + p + 1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} + \operatorname{res}_{p=-1} \frac{(p^2 + p + 1)e^{pt}}{(p-1)(p+1)^2} = \\
 &= \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.
 \end{aligned}$$

Ответ. $f(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Восстановить оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$ с помощью теоремы разложения.

$$1. F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}. \quad 2. F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

$$3. F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-4)}. \quad 4. F(p) = \frac{p+3}{p^3-4p^2+3p}.$$

$$5. F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}. \quad 6. F(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

$$7. F(p) = \frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}. \quad 8. F(p) = \frac{1}{p^4-6p^3+11p-6p}.$$

$$9. F(p) = \frac{1}{p^2-2p-3}. \quad 10. F(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+p}.$$

Ответы. 1. $f(t) = t^2 e^t / 2$. 2. $f(t) = -1/6 + e^t - 3e^{2t}/2 + 2e^{3t}/3$.
 3. $f(t) = -e^t/3 + e^{2t}/4 + e^{-2t}/12$. 4. $f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}$.
 5. $f(t) = (3 - 4 \cos t + \cos 2t)/12$. 6. $f(t) = -1/6 - 3e^{-3t}/2 + 2e^{-4t}/3 + e^{-2t}$.
 7. $f(t) = 2e^t - 4t - 3$. 8. $f(t) = -1/6 + e^t/2 - e^{2t}/2 + e^{3t}/6$.
 9. $f(t) = (e^{3t} - e^{-t})/4$. 10. $f(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$.

2.10. Восстановление оригинала по изображению $F(p) \cdot G(p)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Восстановить оригинал по изображению $F(p) \cdot G(p)$, если $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ и $G(p)$ является изображением функции $g(t)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Если $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$ и $G(p)$ является изображением оригинала $g(t)$, то по теореме умножения изображений (теореме о свертке)

$$f * g \longleftrightarrow F(p) \cdot G(p), \quad (1)$$

где оригинал

$$f * g = \int_0^{\tau} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

называется *сверткой* оригиналов $f(t)$ и $g(t)$.

1. Восстанавливаем оригиналы $f(t)$ и $g(t)$ по их изображениям $F(p)$ и $G(p)$.

2. Вычисляем свертку

$$f * g = \int_0^{\tau} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

3. По формуле (1) записываем ответ.

ПРИМЕР. Восстановить оригинал по его изображению

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

РЕШЕНИЕ. В данном случае

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

1. Восстанавливаем оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$:

$$\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

По теореме умножения изображений

$$\sin t * \sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}$$

2. Вычисляем свертку

$$\sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t - \tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

3. По формуле (1) записываем ответ:

$$f(t) = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

Ответ. $f(t) = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Восстановить оригинал по изображению $F(p)$, используя теорему умножения изображений (теорему о свертке).

$$1. F(p) = \frac{4}{(p^2 + 4)^2}.$$

$$2. F(p) = \frac{9}{(p^2 + 9)^2}.$$

$$3. F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 - 1)^2}.$$

$$4. F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$$

$$5. F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}.$$

$$6. F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}.$$

$$7. F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p^2 + 1)}.$$

$$8. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2(p^2 + 1)}.$$

$$9. F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p^2 + 1)^2}.$$

$$10. F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p(p^2 + 1)}.$$

Ответы. 1. $f(t) = (\sin 2t - 2t \cos 2t)/4$. 2. $f(t) = (\sin 3t - 3t \cos 3t)/6$.
 3. $f(t) = (t \operatorname{ch} t - 3t \operatorname{sh} t + 2t)/2$. 4. $f(t) = (3 \sin 3t - 2 \sin 2t)/5$.
 5. $f(t) = (\operatorname{ch} t - \cos t)/2$. 6. $f(t) = (\sin t + t \cos 3t)/2$.
 7. $f(t) = (1 - \cos t)\eta(t - 1)$. 8. $f(t) = (t - 1 - \sin(t - 1))\eta(t - 1)$.
 9. $f(t) = (1 - \cos(t - 1) - (t - 1) \sin(t - 1)/2)\eta(t - 1)$.
 10. $f(t) = (1 - \cos t)\eta(1 - t) + (\cos(t - 1) - \cos t)\eta(t - 1)$.

2.11. Восстановление оригинала по изображению $R(p)e^{-p\tau}$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Восстановить оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = R(p)e^{-p\tau}$$

где $R(p)$ — правильная рациональная дробь и $\tau > 0$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Восстанавливаем оригинал $r(t)$ по его изображению $R(p)$.
2. По теореме запаздывания искомый оригинал определяется формулой

$$f(t) = r(t - \tau)\eta(t - \tau).$$

ПРИМЕР. Восстановить оригинал $f(t)$ по его изображению

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{(p^2 + 1)^2}.$$

РЕШЕНИЕ. 1. Восстанавливаем оригинал $r(t)$ по его изображению

$$R(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Имеем

$$\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

По теореме умножения изображений

$$\sin t * \sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Вычисляем свертку

$$\sin t * \sin t = \int_0^{\tau} \sin(t - \tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

Таким образом,

$$r(t) = \frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

2. По теореме запаздывания искомый оригинал определяется формулой

$$f(t) = r(t - 2)\eta(t - 2) = \frac{1}{2}[(t - 2) \cos(t - 2) - \sin(t - 2)]\eta(t - 2).$$

Ответ. $f(t) = \frac{1}{2}[(t - 2) \cos(t - 2) - \sin(t - 2)]\eta(t - 2).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Восстановить оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$.

$$1. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 + 1}.$$

$$2. F(p) = \frac{pe^{-4p}}{p^2 + 1}.$$

$$3. F(p) = \frac{e^{-7p}}{p - 3}.$$

$$4. F(p) = \frac{2e^{-5p}}{p^2 - 4}.$$

$$5. F(p) = \frac{e^{-3p}}{p(p^2 + 9)}.$$

$$6. F(p) = \frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p^4 - 1}.$$

$$7. F(p) = \frac{pe^{-p}}{p^2 - 3}.$$

$$8. F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2(p^2 - 1)}.$$

$$9. F(p) = \frac{pe^{-6p}}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}.$$

$$10. F(p) = \frac{pe^{-\pi p}}{(p^2 + 16)^2}.$$

Ответы. 1. $f(t) = \sin(t - 1)\eta(t - 1)$. 2. $f(t) = \cos(t - 4)\eta(t - 4)$.
 3. $f(t) = e^{3(t-7)}\eta(t - 7)$. 4. $f(t) = \text{sh } 2(t - 5)\eta(t - 5)$. 5. $f(t) = (1 - \cos(3t - 9))\eta(t - 3)/9$. 6. $f(t) = (\text{sh}(t - 1/2) - \sin(t - 1/2))\eta(t - 1/2)/2$.
 7. $f(t) = \text{ch}(\sqrt{3}(t - 1))\eta(t - 1)$. 8. $f(t) = (\text{sh}(t - 3) - t - 3)\eta(t - 3)$.
 9. $f(t) = (\cos(t - 6) - \cos(2t - 12))\eta(t - 6)$. 10. $f(t) = (t - \pi)\sin(4t - 4\pi) \times \times \eta(t - \pi)/8$.

2.12. Решение линейных дифференциальных уравнений

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти решение задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если $f(t)$ — оригинал, то искомое решение дифференциального уравнения $x(t)$ также является оригиналом. Обозначим его изображение $X(p)$.

1. Находим изображение левой части уравнения.

По теореме о дифференцировании оригинала

$$x'(t) \longleftrightarrow pX(p) - x(0), \quad x''(t) \longleftrightarrow p^2X(p) - px(0) - x'(0), \quad \dots,$$

$$x^{(n)}(t) \longleftrightarrow p^n X(p) - p^{n-1}x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0).$$

По свойству линейности

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x'_0 - \dots - x_0^{(n-1)}.$$

2. Находим изображение правой части уравнения

$$f(t) \longleftrightarrow F(p).$$

3. Составляем операторное уравнение

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p) =$$

$$= F(p) + p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x'_0 + \dots + x_0^{(n-1)}.$$

4. Решаем операторное уравнение относительно $X(p)$.

5. По найденному изображению $X(p)$ восстанавливаем оригинал $x(t)$.

6. Проверяем, удовлетворяет ли $x(t)$ исходному дифференциальному уравнению и начальным условиям.

Записываем ответ.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши

$$x'' + 4x = \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

РЕШЕНИЕ. Так как $f(t) = \cos 2t \eta(t)$ — оригинал, то искомое решение дифференциального уравнения $x(t)$ также является оригиналом. Обозначим его изображение $X(p)$.

1. Находим изображение левой части уравнения.

По теореме о дифференцировании оригинала

$$x'(t) \longleftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \longleftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 1.$$

По свойству линейности

$$x'' + 4x \longleftrightarrow (p^2 + 4)X(p) - p + 1$$

2. Находим изображение правой части уравнения

$$\cos 2t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + 4}.$$

3. Составляем операторное уравнение

$$(p^2 + 4)X(p) - p + 1 = \frac{p}{p^2 + 4}.$$

4. Решаем операторное уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2} + \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{1}{p^2 + 4}.$$

5. По найденному изображению $X(p)$ восстанавливаем оригинал $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{4}t \sin 2t + \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

6. При подстановке $x(t)$ в исходное дифференциальное уравнение оно обращается в тождество. Вычислив $x(0)$ и $x'(0)$, убеждаемся, что $x(t)$ удовлетворяет начальным условиям.

Ответ. $x(t) = \frac{1}{4}t \sin 2t + \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить задачи Коши для дифференциальных уравнений.

1. $x' + 2x = 2 - 3t$, $x(0) = 0.$
2. $x' - x = t - 1$, $x(0) = 0.$
3. $x' + 3x = 3t - 2$, $x(0) = 0.$
4. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3.$
5. $x'' + x' = t \cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0.$
6. $x'' + 9x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0.$
7. $x'' + 4x = \sin 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0.$
8. $x''' - x'' = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1.$
9. $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$, $x''(0) = 9.$
10. $x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1.$

- Ответы. 1. $x(t) = 1,75 - 1,5t - 1,75e^{-2t}$. 2. $x(t) = -t$.
 3. $x(t) = e^{-3t} + t - 1$. 4. $x(t) = e^{3t}$. 5. $x(t) = -\frac{5}{9} \sin t + \frac{4}{9} \sin 2t - \frac{t}{3} \cos 2t$.
 6. $x(t) = \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)$. 7. $x(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t$. 8. $x(t) = 1 - t + e^t$.
 9. $x(t) = e^{-3t}$. 10. $x(t) = e^t \left(\frac{t^3}{6} + 1 - 2t + 2t^2 \right).$

2.13. Решение систем линейных дифференциальных уравнений

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить задачу Коши для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — вектор неизвестных, $\mathbf{x}_0 = \{x_{01}, \dots, x_{0n}\}$ — вектор начальных значений,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица коэффициентов и $\mathbf{f}(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\}$ — заданная вектор-функция.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если $f_1(t), \dots, f_n(t)$ являются оригиналами, то функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$ также являются оригиналами. Обозначим их изображения $X_1(p), \dots, X_n(p)$.

1. По теореме о дифференцировании оригинала и по свойству линейности находим изображения левых и правых частей всех уравнений системы.

2. Составляем систему операторных уравнений

$$p\mathbf{X} - \mathbf{x}_0 = A\mathbf{X}(p) + \mathbf{F}(p).$$

3. Решаем систему операторных уравнений

$$\mathbf{X}(p) = (pE - A)^{-1} (\mathbf{F}(p) + \mathbf{x}_0),$$

где E — единичная матрица n -го порядка.

4. По найденным изображениям $\mathbf{X}(p) = \{X_1(p), X_2(p), \dots, X_n(p)\}$ восстанавливаем оригиналы $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

5. Проверяем, удовлетворяют ли $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ исходной системе дифференциальных уравнений и начальным условиям.

Записываем ответ.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 4e^t, & y(0) = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Предполагая, что функции $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами, обозначим их изображения $X(p)$ и $Y(p)$.

1. По теореме о дифференцировании оригинала

$$x'(t) \longleftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1, \quad y'(t) \longleftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 2.$$

По свойству линейности находим изображения правых частей уравнений системы:

$$x + 2y - 9t \longleftrightarrow X(p) + 2Y(p) - \frac{9}{p^2},$$

$$2x + y + 4e^t \longleftrightarrow 2X(p) + Y(p) + \frac{4}{p-1}.$$

2. Составляем систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = X(p) + 2Y(p) - \frac{9}{p^2}, \\ pY(p) - 2 = 2X(p) + Y(p) + \frac{4}{p-1}. \end{cases}$$

3. Решаем систему операторных уравнений:

$$X(p) = \frac{4}{p-1} - \frac{3}{p} - \frac{3}{p^2} - \frac{8}{p(p-1)} + \frac{8}{(p-1)(p+1)} + \frac{4}{(p-3)(p-1)},$$

$$Y(p) = -\frac{4}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{4}{p+1} + \frac{2}{p-3}.$$

4. Восстанавливаем оригиналы по изображениям $X(p)$ и $Y(p)$:

$$x(t) = 2e^{3t} - 4e^{-t} - 2e^t + 5 - 3t,$$

$$y(t) = -4 + 6t + 4e^{-t} + 2e^{3t}.$$

5. При подстановке $x(t)$ и $y(t)$ в исходную систему оба уравнения обращаются в тождества. Вычислив $x(0)$ и $y(0)$, убеждаемся, что $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют начальным условиям.

Ответ.

$$x(t) = 2e^{3t} - 4e^{-t} - 2e^t + 5 - 3t, \quad y(t) = -4 + 6t + 4e^{-t} + 2e^{3t}.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить задачи Коши для систем дифференциальных уравнений.

$$1. \begin{cases} x' = y - 1, & x(0) = 1, \\ y' = -x - 2y, & y(0) = -1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' = -y + 2, & x(0) = -1, \\ y' = x + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, & x(0) = 0, \\ x' + 4y' + 3y = 0, & y(0) = 0. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x' - 2y = 0, & x(0) = 2, \\ y' - 2x = 0, & y(0) = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = 3x + 4y, & x(0) = 1, \\ y' = 4x - 3y, & y(0) = 1. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, & x(0) = -1, \\ y' = 4x - 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = -x + 3y + 1, & x(0) = 1, \\ y' = x + y, & y(0) = 2. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x' + y = 0, & x(0) = 1, \\ y' + x = 0, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = -y, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x' + y' - y = e^t, & x(0) = 0, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Ответы.

$$1. x(t) = 3e^{-t} + te^{-t} - 2, \quad y(t) = 1 - 2e^{-t} - te^{-t}.$$

$$2. x(t) = 2 \sin t - 1, \quad y(t) = 2 - 2 \cos t.$$

$$3. x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-6t/11}, \quad y(t) = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^{-6t/11}).$$

$$4. x(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}, \quad y(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

$$5. x(t) = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t}, \quad y(t) = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t}.$$

$$6. x(t) = -\frac{1}{8} - \frac{9}{16}e^{4t} - \frac{5}{16}e^{-4t}, \quad y(t) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}e^{4t} + \frac{5}{8}e^{-4t}.$$

$$7. x(t) = \frac{15}{8}e^{2t} - \frac{9}{8}e^{-2t} + \frac{1}{4}, \quad y(t) = \frac{15}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

$$8. x(t) = e^t, \quad y(t) = -e^t.$$

$$9. x(t) = e^t(\cos t + 4 \sin t), \quad y(t) = e^t(\cos t + 3 \sin t).$$

$$10. x(t) = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2},$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t.$$

Глава 3

РЯДЫ ФУРЬЕ

При изучении темы РЯДЫ ФУРЬЕ вы научитесь разлагать функции в тригонометрические ряды Фурье и в ряды Фурье по произвольным ортогональным системам на различных конечных и бесконечных интервалах.

Основную трудность при изучении темы РЯДЫ ФУРЬЕ составляет вычисление интегралов. Пакет РЕШЕБНИК.ВМ поможет вам вычислять интегралы и тем самым существенно облегчит изучение темы. Впоследствии, например при решении уравнений математической физики, вы сможете получать разложения в ряды Фурье интегрирующих вас функций нажатием нескольких кнопок на клавиатуре компьютера, используя возможности модуля STEM Plus, входящего в пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

3.1. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-\pi, \pi)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Тригонометрическим рядом Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Функции $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$ образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(-\pi, \pi)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) v(x) dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty. \quad (1)$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

— среднее значение функции f на интервале $(-\pi, \pi)$,

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Проверяем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье.

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ в (2) и записываем ответ.

Замечания.

1. Если $f(x)$ ограничена на $(-\pi, \pi)$, то условие (1) выполняется. Это условие выполняется и для некоторых неограниченных функций.
2. Если $f(x) = f(-x)$ при $x \in (-\pi, \pi)$, то $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots$
3. Если $f(x) = f(-x)$ при $x \in (-\pi, \pi)$, то $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots$
4. При вычислении интегралов в формулах Эйлера–Фурье иногда полезны методы, изложенные в разделе 1.17 (с. 60).
5. Если $f(x)$ — тригонометрический многочлен относительно $\cos kx$ и $\sin kx$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

то коэффициенты ряда Фурье $f(x)$ определяются формулами: $a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$ при $k = 0, 1, \dots, n$ и $a_k = 0$, $b_k = 0$ при всех $k > n$. К этому случаю с помощью формул понижения степени сводится задача о разложении в тригонометрический ряд Фурье функций вида $f(x) = P(\sin x, \cos x)$, где $P(u, v)$ — многочлен.

ПРИМЕР. Разложить функцию $y = x + 1$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(-\pi, \pi)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \sin nx dx = -2 \frac{\cos n\pi}{n} = -2 \frac{(-1)^n}{n}.$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ в (2). Получаем

$$x + 1 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

Ответ. $x + 1 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$.

1. $f(x) = 2x - 3$. 2. $f(x) = x - 1$. 3. $f(x) = x^2$. 4. $f(x) = e^x$.
5. $f(x) = |x| + x$. 6. $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $f(x) = 1$ при $x > 0$.
7. $f(x) = 2$ при $x < 0$ и $f(x) = x$ при $x > 0$. 8. $f(x) = -x$ при $x < 0$ и $f(x) = x + 1$ при $x > 0$.
9. $f(x) = \sqrt{3}/(2 + \cos x)$.
10. $f(x) = -\ln(2|\sin x|)$.

Ответы *).

$$1. \quad 2x - 3 = -3 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

$$2. \quad x - 1 = -1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

$$3. \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

$$4. \quad e^x = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos nx - \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1} \sin nx.$$

$$5. \quad |x| + x = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2}{n^2 \pi} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

$$6. \quad \eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx.$$

$$7. \quad 2\eta(-x) + x\eta(x) = \frac{\pi + 4}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx - \frac{(\pi - 2)(-1)^n + 2}{n} \sin nx.$$

$$8. \quad -x\eta(-x) + (x + 1)\eta(x) = \frac{\pi + 1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx.$$

*) Единичная функция Хэвисайда $\eta(x) \equiv 1$ при $x \geq 0$ и $\eta(x) \equiv 0$ при $x < 0$.

$$9. \frac{\sqrt{3}}{2 + \cos x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 + \sqrt{3})^n} \cos nx.$$

$$10. -\ln(2|\sin x|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 2nx.$$

3.2. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Тригонометрическим рядом Фурье на интервале $(-l, l)$ называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \right).$$

Функции $1, \cos(\pi x/l), \cos(2\pi x/l), \dots, \cos(n\pi x/l), \dots, \sin(\pi x/l), \sin(2\pi x/l), \dots, \sin(n\pi x/l), \dots$ образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(-l, l)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-l}^l u(x) v(x) dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_{-l}^l f(x)^2 dx < \infty. \quad (1)$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi}{l} x + b_n \sin n \frac{\pi}{l} x \right), \quad (2)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ определяются по формулам

Эйлера–Фурье:

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_{-l}^l f(x) dx}{\int_{-l}^l 1^2 dx} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

— среднее значение f на интервале $(-l, l)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(f, \cos n \frac{\pi}{l} x\right)}{\left(\cos n \frac{\pi}{l} x, \cos n \frac{\pi}{l} x\right)} = \frac{\int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx}{\int_{-l}^l \cos^2 n \frac{\pi}{l} x dx} = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\left(f, \sin n \frac{\pi}{l} x\right)}{\left(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin n \frac{\pi}{l} x\right)} = \frac{\int_{-l}^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx}{\int_{-l}^l \sin^2 n \frac{\pi}{l} x dx} = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3') \end{aligned}$$

1. Проверяем, что

$$\int_{-l}^l f(x)^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье.

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ в (2) и записываем ответ.

Замечания.

1. Если $f(x)$ ограничена на $(-l, l)$, то условие (1) выполняется. Это условие выполняется и для некоторых неограниченных функций.

2. Если $f(x) = f(-x)$ при $x \in (-l, l)$, то $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, ...
3. Если $f(x) = f(-x)$ при $x \in (-l, l)$, то $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, ...
4. При вычислении интегралов (3)–(3') иногда полезны методы, изложенные в разделе 1.17 (с. 60).

5. Если $f(x)$ — многочлен относительно $\cos k \frac{\pi}{l} x$ и $\sin k \frac{\pi}{l} x$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\alpha_k \cos k \frac{\pi}{l} x + \beta_k \sin k \frac{\pi}{l} x \right),$$

то коэффициенты ряда Фурье $f(x)$ определяются формулами: $a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$ при $k = 0, 1, \dots, n$ и $a_k = 0$, $b_k = 0$ при всех $k > n$. К этому случаю с помощью формул понижения степени сводится задача о разложении в тригонометрический ряд Фурье функций вида $f(x) = P(\sin x, \cos x)$, где $P(u, v)$ — многочлен.

ПРИМЕР. Разложить функцию $y = x + 1$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-2, 2)$.

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что

$$\int_{-2}^2 f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(-2, 2)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{2 \cdot 2} \int_{-2}^2 (x + 1) dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x + 1) \cos n \frac{\pi}{2} x dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x + 1) \sin n \frac{\pi}{2} x dx = -4 \frac{\cos n\pi}{n\pi} = -4 \frac{(-1)^n}{n\pi} = 4 \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}.$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ в (2). Получаем

$$x + 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} x.$$

Ответ. $x + 1 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n \frac{\pi}{2} x, \quad x \in (-2, 2).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$.

1. $f(x) = 2x - 3$ на $(-1, 1)$.
2. $f(x) = x - 1$ на $(-1/2, 1/2)$.
3. $f(x) = x^2$ на $(-1, 1)$.
4. $f(x) = e^x$ на $(-1, 1)$.
5. $f(x) = |x| + x$ на $(-2, 2)$.
6. $f(x) = 0$ при $-2 < x < 0$ и $f(x) = 1$ при $0 < x < 2$.
7. $f(x) = 2$ при $-3 < x < 0$ и $f(x) = x$ при $0 < x < 3$.
8. $f(x) = -x$ при $-1 < x < 0$ и $f(x) = x + 1$ при $0 < x < 1$.
9. $f(x) = \sqrt{3}/(2 + \cos 2x)$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.
10. $f(x) = -\ln(2|\sin 3x|)$ на $(-\pi/3, \pi/3)$.

Ответы.

$$1. \quad 2x - 3 = -3 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (-1, 1).$$

$$2. \quad x - 1 = -1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin 2n\pi x, \quad x \in (-1/2, 1/2).$$

$$3. \quad x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, \quad x \in (-1, 1).$$

$$4. \quad e^x = \operatorname{sh} 1 + 2 \operatorname{sh} 1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x}{1 + n^2\pi^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$5. \quad |x| + x = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos n \frac{\pi}{2} x - \frac{(-1)^n}{n} \sin n \frac{\pi}{2} x, \\ x \in (-2, 2).$$

$$6. \quad \eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin n \frac{\pi}{2} x, \quad x \in (-2, 2).$$

$$7. \quad 2\eta(-x) + x\eta(x) = \frac{7}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3((-1)^n - 1)}{n^2\pi} \cos n \frac{\pi}{3} x - \\ - \frac{(-1)^n + 2}{n} \sin n \frac{\pi}{3} x, \quad x \in (-3, 3).$$

$$8. \quad -x\eta(-x) + (x+1)\eta(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} \cos n\pi x + \\ + \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (-1, 1).$$

$$9. \frac{\sqrt{3}}{2 + \cos 2x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 + \sqrt{3})^n} \cos 2nx, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

$$10. -\ln(2|\sin 3x|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 6nx, \quad x \in (-\pi/3, \pi/3).$$

3.3. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале (a, b)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале (a, b) .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Тригонометрическим рядом Фурье на интервале (a, b) называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{b-a} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{b-a} x \right).$$

Функции $1, \cos \frac{2\pi}{b-a} x, \cos 2 \frac{2\pi}{b-a} x, \dots, \cos n \frac{2\pi}{b-a} x, \dots, \sin \frac{2\pi}{b-a} x, \sin 2 \frac{2\pi}{b-a} x, \dots, \sin n \frac{2\pi}{b-a} x, \dots$ образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале (a, b) , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx < \infty. \quad (1)$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале (a, b) имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{b-a} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{b-a} x \right), \quad (2)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ определяются по формулам

Эйлера–Фурье:

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b 1^2 dx} = \frac{1}{b-a} \int_{-l}^l f(x) dx$$

— среднее значение f на интервале (a, b) ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(f, \cos n \frac{2\pi}{b-a} x\right)}{\left(\cos n \frac{2\pi}{b-a} x, \cos n \frac{2\pi}{b-a} x\right)} = \frac{\int_a^b f(x) \cos n \frac{2\pi}{b-a} x dx}{\int_a^b \cos^2 n \frac{2\pi}{b-a} x dx} = \\ &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos n \frac{2\pi}{b-a} x dx, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\left(f, \sin n \frac{2\pi}{b-a} x\right)}{\left(\sin n \frac{2\pi}{b-a} x, \sin n \frac{2\pi}{b-a} x\right)} = \frac{\int_a^b f(x) \sin n \frac{2\pi}{b-a} x dx}{\int_a^b \sin^2 n \frac{2\pi}{b-a} x dx} = \\ &= \frac{2}{b-a} \int_{-l}^l f(x) \sin n \frac{2\pi}{b-a} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1. Проверяем, что

$$\int_a^b f(x)^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье.

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ в (2) и записываем ответ.

Замечания.

1. Если $f(x)$ ограничена на (a, b) , то условие (1) выполняется. Это условие выполняется и для некоторых неограниченных функций.

2. Если $f(x)$ — многочлен относительно $\cos k \frac{2\pi}{b-a}$ и $\sin k \frac{2\pi}{b-a}$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\alpha_k \cos k \frac{2\pi}{b-a} x + \beta_k \sin k \frac{2\pi}{b-a} x \right),$$

то коэффициенты ряда Фурье $f(x)$ определяются формулами: $a_k = \alpha_k$, $b_k = \beta_k$ при $k = 0, 1, \dots, n$ и $a_k = 0$, $b_k = 0$ при всех $k > n$. К этому случаю с помощью формул понижения степени сводится задача о разложении в тригонометрический ряд Фурье функций вида $f(x) = P(\sin x, \cos x)$, где $P(u, v)$ — многочлен.

ПРИМЕР. Разложить функцию $y = x + 1$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(\pi, 2\pi)$.

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(\pi, 2\pi)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье. Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x+1) dx = \frac{3\pi+2}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x+1) \cos 2nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x+1) \sin 2nx dx = -\frac{1}{n}.$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ в (2). Получаем

$$x+1 = \frac{3\pi+2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx.$$

Ответ. $x+1 = \frac{3\pi+2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx, \quad x \in (\pi, 2\pi).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале (a, b) .

1. $f(x) = 2x - 3$ на $(2, 4)$. 2. $f(x) = x - 1$ на $(-3, -1)$. 3. $f(x) = x^2$ на $(-1, 3)$. 4. $f(x) = e^x$ на $(1, 3)$. 5. $f(x) = |x| + x$ на $(-1, 3)$.
6. $f(x) = 0$ при $2 < x < 3$ и $f(x) = 1$ при $3 < x < 4$. 7. $f(x) = 2$ при $-3 < x < -1$ и $f(x) = x$ при $-1 < x < 1$. 8. $f(x) = -x$ при $\pi < x < 2\pi$ и $f(x) = x + 1$ при $2\pi < x < 3\pi$. 9. $f(x) = \sqrt{3}/(2 + \cos 2x)$ на $(\pi, 2\pi)$.
10. $f(x) = -\ln(2|\sin 2x|)$ на $(\pi, 2\pi)$.

Ответы.

$$1. \quad 2x - 3 = 3 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (2, 4).$$

$$2. \quad x - 1 = -3 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (-3, -1).$$

$$3. \quad x^2 = \frac{7}{3} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi} - \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right) \cos n \frac{\pi}{2} x - \\ - \left(\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi} \right) \sin n \frac{\pi}{2} x, \quad x \in (-1, 3).$$

$$4. \quad e^x = \frac{e^3 - e}{2} + (e^3 - e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2 + 1} \cos n\pi x - \frac{n\pi(-1)^n}{n^2 \pi^2 + 1} \sin n\pi x, \\ x \in (1, 3).$$

$$5. \quad |x| + x = \frac{9}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2(1 - \cos \frac{n\pi}{2})}{n^2 \pi} - \frac{3 \sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right] \cos n \frac{\pi}{2} x - \\ - \left[\frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi} + \frac{3 \cos \frac{n\pi}{2}}{n} \right] \sin n \frac{\pi}{2} x, \quad x \in (-1, 3).$$

$$6. \quad \eta(x - 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi - 1}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (2, 4).$$

$$7. \quad 2\theta(-1 - x) + x\theta(x + 1) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos n \frac{\pi}{2} x - \\ - \left[\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi} \right] \sin n \frac{\pi}{2} x, \quad x \in (-3, 1).$$

$$8. \quad -x\theta(2\pi - x) + (x + 1)\theta(x - 2\pi) = \\ = \frac{\pi(5\pi - 1)}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{\pi + 1}{n^2 \pi} + \frac{(-1)^n}{n^2 \pi} \right] \cos nx + \\ + \left[\frac{2\pi + 3}{n} - \frac{(3\pi + 2)(-1)^n}{n} \right] \sin nx, \quad x \in (\pi, 3\pi).$$

$$9. \frac{\sqrt{3}}{2 + \cos 2x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2 + \sqrt{3})^n} \cos nx, \quad x \in (\pi, 2\pi).$$

$$10. -\ln(2|\sin 2x|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx, \quad x \in (\pi, 2\pi).$$

3.4. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0, \pi)$ по тригонометрической системе

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по одной из систем:

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots;$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots;$$

$$\cos(x/2), \cos(3x/2), \dots, \cos(n + 1/2)x, \dots;$$

$$\sin(x/2), \sin(3x/2), \dots, \sin(n + 1/2)x, \dots$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Каждая из систем: $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$; $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$; $\cos(x/2), \cos(3x/2), \dots, \cos(n + 1/2)x, \dots$ и $\sin(x/2), \sin(3x/2), \dots, \sin(n + 1/2)x, \dots$ образует ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(0, \pi)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^{\pi} u(x) v(x) dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_0^{\pi} f(x)^2 dx < \infty. \quad (1)$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (2)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ определяются формулами Эйлера–

Фурье:

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_0^\pi f(x) dx}{\int_0^\pi 1^2 dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx \quad (3)$$

— среднее значение f на интервале $(0, \pi)$,

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{\int_0^\pi f(x) \cos nx dx}{\int_0^\pi \cos^2 nx dx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad (3')$$

где $n = 1, 2, \dots$

Искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (4)$$

где коэффициенты $b_1, b_2, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье:

$$b_n = \frac{(f, \sin nx)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{\int_0^\pi f(x) \sin nx dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx dx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad (5)$$

где $n = 1, 2, \dots$

Искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $\cos(x/2), \cos(3x/2), \dots, \cos(n+1/2)x, \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2}x, \quad (6)$$

где коэффициенты $b_1, b_2, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(f, \cos \frac{2n+1}{2}x\right)}{\left(\cos \frac{2n+1}{2}x, \cos \frac{2n+1}{2}x\right)} = \frac{\int_0^\pi f(x) \cos \frac{2n+1}{2}x dx}{\int_0^\pi \cos^2 \frac{2n+1}{2}x dx} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos \frac{2n+1}{2}x dx, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $\sin(x/2), \sin(3x/2), \dots, \sin(n+1/2)x, \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{2n+1}{2}x, \quad (8)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\left(f, \sin \frac{2n+1}{2}x\right)}{\left(\sin \frac{2n+1}{2}x, \sin \frac{2n+1}{2}x\right)} = \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{2n+1}{2}x dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{2n+1}{2}x dx} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{2n+1}{2}x dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9) \end{aligned}$$

1. Проверяем, что

$$\int_0^{\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты искомого ряда по формулам Эйлера–Фурье (3)–(3'), (5), (7) или (9).

3. Подставляем найденные значения коэффициентов соответственно в (2), (4), (6) или (8) и записываем ответ.

ПРИМЕР 1. Разложить функцию $y = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$

РЕШЕНИЕ.

Искомое разложение функции $y = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ имеет вид (2).

1. Проверяем, что

$$\int_0^{\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(0, \pi)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (3)–(3'). Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) dx = \frac{\pi+2}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots$ в (2). Получаем

$$x+1 = \frac{\pi+2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx.$$

Ответ. $x+1 = \frac{\pi+2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx, \quad x \in (0, \pi).$

ПРИМЕР 2. Разложить функцию $y = x+1$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $1, \cos \frac{1}{2}x, \cos \frac{3}{2}x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2}x, \dots$

РЕШЕНИЕ. Искомое разложение функции $y = x+1$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $1, \cos \frac{1}{2}x, \cos \frac{3}{2}x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2}x, \dots$ имеет вид (6).

1. Проверяем, что

$$\int_0^{\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x+1$ ограничена на $(0, \pi)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (7). Имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos \frac{2n+1}{2}x dx = \frac{4(\pi+1)}{\pi} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{2n+1} = \\ &= \frac{4(\pi+1)}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots$ в (6). Получаем

$$x + 1 = \frac{4(\pi + 1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \cos \frac{2n + 1}{2} x.$$

Ответ. $x + 1 = \frac{4(\pi + 1)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \cos \frac{2n + 1}{2} x, \quad x \in (0, \pi).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по указанной системе.

1. $f(x) = x + 1$ по $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$
2. $f(x) = x + 1$ по $\sin \frac{1}{2}x, \sin \frac{3}{2}x, \dots, \sin \frac{2n + 1}{2}x, \dots$
3. $f(x) = x(\pi - x)$ по $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$
4. $f(x) = x(\pi - x)$ по $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$
5. $f(x) = x^2$ по $\cos \frac{1}{2}x, \cos \frac{3}{2}x, \dots, \cos \frac{2n + 1}{2}x, \dots$
6. $f(x) = x^2$ по $\sin \frac{1}{2}x, \sin \frac{3}{2}x, \dots, \sin \frac{2n + 1}{2}x, \dots$
7. $f(x) = e^x$ по $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$
8. $f(x) = e^x$ по $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$
9. $f(x) = e^x$ по $\cos \frac{1}{2}x, \cos \frac{3}{2}x, \dots, \cos \frac{2n + 1}{2}x, \dots$
10. $f(x) = e^x$ по $\sin \frac{1}{2}x, \sin \frac{3}{2}x, \dots, \sin \frac{2n + 1}{2}x, \dots$

Ответы.

1. $x + 1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (\pi + 1)(-1)^n}{n} \sin nx.$
2. $x + 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n + 2n + 1}{(2n + 1)^2} \sin \frac{2n + 1}{2} x.$
3. $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n^2} \cos nx.$
4. $x(\pi - x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin nx.$
5. $x^2 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^2(2n + 1)^2 - 8}{(2n + 1)^3} \cos \frac{2n + 1}{2} x.$

$$6. \quad x^2 = \frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(2n+1)(-1)^n - 2}{(2n+1)^3} \sin \frac{2n+1}{2} x.$$

$$7. \quad e^x = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1} \cos nx.$$

$$8. \quad e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n e^\pi) \frac{n}{n^2 + 1} \sin nx.$$

$$9. \quad e^x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^\pi (2n+1) - 2}{4n^2 + 4n + 5} \cos \frac{2n+1}{2} x.$$

$$10. \quad e^x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n e^\pi + 2n+1}{4n^2 + 4n + 5} \sin \frac{2n+1}{2} x.$$

3.5. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(0, l)$ по тригонометрической системе

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, l)$ по одной из систем:

$$\begin{aligned} &1, \cos \frac{\pi}{l} x, \cos 2 \frac{\pi}{l} x, \dots, \cos n \frac{\pi}{l} x, \dots; \\ &\sin \frac{\pi}{l} x, \sin 2 \frac{\pi}{l} x, \dots, \sin n \frac{\pi}{l} x, \dots; \\ &\cos \frac{\pi}{2l} x, \cos 3 \frac{\pi}{2l} x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \dots; \\ &\sin \frac{\pi}{2l} x, \sin 3 \frac{\pi}{2l} x, \dots, \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \dots \end{aligned}$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Каждая из систем:

$$\begin{aligned} &1, \cos \frac{\pi}{l} x, \cos 2 \frac{\pi}{l} x, \dots, \cos n \frac{\pi}{l} x, \dots; \\ &\sin \frac{\pi}{l} x, \sin 2 \frac{\pi}{l} x, \dots, \sin n \frac{\pi}{l} x, \dots; \\ &\cos \frac{\pi}{2l} x, \cos 3 \frac{\pi}{2l} x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \dots; \\ &\sin \frac{\pi}{2l} x, \sin 3 \frac{\pi}{2l} x, \dots, \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \dots \end{aligned}$$

— образует ортогональный базис в пространстве функций, заданных

в интервале $(0, l)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^l u(x) v(x) dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_0^\pi f(x)^2 dx < \infty. \quad (1)$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $1, \cos \frac{\pi}{l}x, \cos 2\frac{\pi}{l}x, \dots, \cos n\frac{\pi}{l}x, \dots$ имеет вид

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x, \quad (2)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье:

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\int_0^l f(x) dx}{\int_0^l 1^2 dx} = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx \quad (3)$$

— среднее значение f на интервале $(0, l)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(f, \cos n\frac{\pi}{l}x\right)}{\left(\cos n\frac{\pi}{l}x, \cos n\frac{\pi}{l}x\right)} = \frac{\int_0^l f(x) \cos n\frac{\pi}{l}x dx}{\int_0^l \cos^2 n\frac{\pi}{l}x dx} = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n\frac{\pi}{l}x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3') \end{aligned}$$

Искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, l)$ по системе $\sin \frac{\pi}{l}x, \sin 2\frac{\pi}{l}x, \dots, \sin n\frac{\pi}{l}x, \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi}{l}x, \quad (4)$$

где коэффициенты $b_1, b_2, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье:

$$b_n = \frac{\left(f, \sin n \frac{\pi}{l} x\right)}{\left(\sin n \frac{\pi}{l} x, \sin n \frac{\pi}{l} x\right)} = \frac{\int_0^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx}{\int_0^l \sin^2 n \frac{\pi}{l} x dx} =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin n \frac{\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, l)$ по системе $\cos \frac{\pi}{2l} x, \cos 3 \frac{\pi}{2l} x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \quad (6)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье:

$$a_n = \frac{\left(f, \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x\right)}{\left(\cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x\right)} = \frac{\int_0^l f(x) \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x dx} =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $\sin \frac{\pi}{2l} x, \sin 3 \frac{\pi}{2l} x, \dots, \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \quad (8)$$

где коэффициенты $b_0, b_1, \dots$ определяются формулами Эйлера–Фурье:

$$b_n = \frac{\left(f, \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x\right)}{\left(\sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x\right)} = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x dx} =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} x dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

1. Проверяем, что

$$\int_0^\pi f(x)^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты искомого ряда по формулам Эйлера–Фурье (3)–(3'), (5), (7) или (9).

3. Подставляем найденные значения коэффициентов соответственно в (2), (4), (6) или (8) и записываем ответ.

ПРИМЕР 1. Разложить функцию $y = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе $1, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \dots, \cos n\pi x, \dots$

РЕШЕНИЕ. Искомое разложение функции $y = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе $1, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \dots, \cos n\pi x, \dots$ имеет вид (2).

1. Проверяем, что

$$\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(0, 1)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (3)–(3'). Имеем

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 (x + 1) dx = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (x + 1) \cos n\pi x dx = \frac{2}{\pi^2} \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots$ в (2). Получаем

$$x + 1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x.$$

Ответ. $x + 1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x, \quad x \in (0, l).$

ПРИМЕР 2. Разложить функцию $y = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе $\cos(\pi x/2), \cos(3\pi x/2), \dots, \cos(n + 1/2)\pi x, \dots$

РЕШЕНИЕ. Искомое разложение функции $y = x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе $\cos \frac{\pi}{2}x, \cos 3\frac{\pi}{2}x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2}\pi x, \dots$ имеет вид (6).

1. Проверяем, что

$$\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(0, 1)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (7). Имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 (x + 1) \cos \frac{2n+1}{2}\pi x dx = \\ &= \frac{8}{\pi(n+1)} \left[(-1)^n - \frac{1}{(n+1)\pi} \right], \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots$ в (6). Получаем

$$x + 1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)\pi - 1}{(n+1)^2} \cos \frac{2n+1}{2}\pi x.$$

Ответ. $x + 1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)\pi - 1}{(n+1)^2} \cos \frac{2n+1}{2}\pi x, \quad x \in (0, 1).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(0, l)$ по указанной системе.

1. $f(x) = x + 1$ на $(0, 1)$ по $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots, \sin n\pi x, \dots$
2. $f(x) = x + 1$ на $(0, 1)$ по $\sin \frac{\pi}{2}x, \sin 3\frac{\pi}{2}x, \dots, \sin \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{2}x, \dots$
3. $f(x) = x(1-x)$ на $(0, 1)$ по $\cos \pi x, \cos 2\pi x, \dots, \cos n\pi x, \dots$
4. $f(x) = x(1-x)$ на $(0, 1)$ по $\sin \pi x, \sin 2\pi x, \dots, \sin n\pi x, \dots$
5. $f(x) = x(1-x)$ на $(0, 1)$ по $\cos \frac{\pi}{2}x, \cos 3\frac{\pi}{2}x, \dots, \cos \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{2}x, \dots$
6. $f(x) = x(1-x)$ на $(0, 1)$ по $\sin \frac{\pi}{2}x, \sin 3\frac{\pi}{2}x, \dots, \sin \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{2}x, \dots$
7. $f(x) = e^x$ на $(0, \pi/2)$ по $1, \cos 2x, \cos 4x, \dots, \cos 2nx, \dots$
8. $f(x) = e^x$ на $(0, \pi/2)$ по $\sin 2x, \sin 4x, \dots, \sin 2nx, \dots$
9. $f(x) = e^x$ на $(0, \pi/2)$ по $1, \cos x, \cos 3x, \dots, \cos (2n+1)x, \dots$
10. $f(x) = e^x$ на $(0, \pi/2)$ по $\sin x, \sin 3x, \dots, \sin (2n+1)x, \dots$

Ответы.

1. $x + 1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2(-1)^n}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (0, 1).$
2. $x + 1 = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} + \frac{1}{2n+1} \right] \sin \frac{2n+1}{2}\pi x, \quad x \in (0, 1).$
3. $x(1-x) = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, \quad x \in (0, 1).$
4. $x(1-x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin n\pi x, \quad x \in (0, 1).$
5. $x(1-x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^3} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] \cos \frac{2n+1}{2}\pi x,$
 $x \in (0, 1).$
6. $x(1-x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi(2n+1)^3} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \right] \sin \frac{2n+1}{2}\pi x,$
 $x \in (0, 1).$
7. $e^x = \frac{2}{\pi} (e^{\pi/2} - 1) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi/2}(-1)^n - 1}{4n^2 + 1} \cos 2nx, \quad x \in (0, \pi/2).$

8. $e^x = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n((-1)^n e^{\pi/2} - 1)}{4n^2 + 1} \sin 2nx, \quad x \in (0, \pi/2).$
9. $e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\pi/2}(2n+1)(-1)^n - 1}{2n^2 + 2n + 1} \cos(2n+1)x, \quad x \in (0, \pi/2).$
10. $e^x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\pi/2}(-1)^n + 2n + 1}{2n^2 + 2n + 1} \sin(2n+1)x, \quad x \in (0, \pi/2).$

3.6. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$ в комплексной форме

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ в комплексной форме.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Тригонометрическим рядом Фурье на интервале $(-l, l)$ в комплексной форме называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/l}.$$

Функции $e^{in\pi x/l}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) образуют ортогональный базис в пространстве комплексных функций, заданных в интервале $(-l, l)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-l}^l u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (1)$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \quad (2)$$

где коэффициенты $c_0, c_1, c_{-1}, c_2, c_{-2}, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$c_n = \frac{(f, e^{in\pi x/l})}{(e^{in\pi x/l}, e^{in\pi x/l})} = \frac{\int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx}{\int_{-l}^l |e^{in\pi x/l}|^2 dx} =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx. \quad (3)$$

Очевидно, что c_0 — среднее значение f на интервале $(-l, l)$. Если $f(x)$ принимает вещественные значения, то $c_{-n} = \overline{c_n}$.

1. Проверяем, что

$$\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты c_n по формулам Эйлера–Фурье (3).

3. Подставляем найденные значения коэффициентов c_n в (2) и записываем ответ.

Замечания.

1. Если $f(x)$ ограничена на $(-l, l)$, то условие (1) выполняется. Это условие выполняется и для некоторых неограниченных функций.

2. Если $f(x) = f(-x)$ при $x \in (-l, l)$, то c_n — вещественные числа.

3. Если $f(x) = -f(-x)$ при $x \in (-l, l)$, то c_n — чисто мнимые числа.

4. При вычислении интегралов (3) иногда полезны методы, изложенные в разделе 1.17 (с. 60).

5. Если $f(x)$ — многочлен относительно $e^{ik\pi x/l}$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ik\pi x/l},$$

то коэффициенты ряда Фурье $f(x)$ определяются формулами: $c_k = \gamma_k$ при $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ и $c_k = 0$, $b_k = 0$ при всех $|k| > n$.

ПРИМЕР. Разложить функцию $y = x + 1$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-2, 2)$ в комплексной форме.

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что

$$\int_{-2}^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x + 1$ ограничена на $(-2, 2)$.

2. Вычисляем коэффициенты c_n по формулам Эйлера–Фурье (3). Имеем

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (x+1) dx = 1, \quad c_n = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (x+1) e^{-in\pi x/2} dx = \frac{2i(-1)^n}{n\pi}.$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $c_0, c_1, c_{-1}, \dots$ в (2). Получаем

$$x + 1 = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{2i(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi x/2}.$$

Ответ. $x + 1 = 1 + \frac{2i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{in\pi x/2}, \quad x \in (-2, 2).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-l, l)$ в комплексной форме.

1. $f(x) = 2x - 3$ на $(-1, 1)$. 2. $f(x) = x - 1$ на $(-1/2, 1/2)$.
3. $f(x) = x^2$ на $(-1, 1)$. 4. $f(x) = e^x$ на $(-1, 1)$. 5. $f(x) = |x| + x$ на $(-2, 2)$. 6. $f(x) = 0$ при $-2 < x < 0$ и $f(x) = 1$ при $0 < x < 2$.
7. $f(x) = 2$ при $-3 < x < 0$ и $f(x) = x$ при $0 < x < 3$. 8. $f(x) = -x$ при $-1 < x < 0$ и $f(x) = x + 1$ при $0 < x < 1$. 9. $f(x) = \sqrt{3}/(2 + \cos 2x)$ на $(-\pi/2, \pi/2)$. 10. $f(x) = -\ln(2|\sin 3x|)$ на $(-\pi/3, \pi/3)$.

Ответы.

1. $2x - 3 = -3 + \frac{2i}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{in\pi x}, \quad x \in (-1, 1).$

2. $x - 1 = -1 + \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{i2n\pi x}, \quad x \in (-1/2, 1/2).$

$$3. x^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{in\pi x}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$4. e^x = \operatorname{sh} 1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 - in\pi} e^{in\pi x}, \quad x \in (-1, 1).$$

$$5. |x| + x = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} + i(-1)^n \right] e^{in\pi x/2}, \quad x \in (-2, 2).$$

$$6. \eta(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} e^{in\pi x/2}, \quad x \in (-2, 2).$$

$$7. 2\eta(-x) + x\eta(x) = \frac{7}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \left[\frac{3((-1)^n - 1)}{2\pi^2 n^2} + i \frac{2 - (-1)^n}{2\pi n} \right] e^{in\pi x/3},$$

$$x \in (-3, 3).$$

$$8. -x\eta(-x) + (x+1)\eta(x) = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{i}{2\pi n} \right) [(-1)^n - 1] e^{in\pi x},$$

$$x \in (-1, 1).$$

$$9. \frac{\sqrt{3}}{2 + \cos x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 + \sqrt{3})^{|n|}} e^{i2n\pi x}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

$$10. -\ln(2|\sin 3x|) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{+\infty} \frac{1}{|n|} e^{i6n\pi x}, \quad x \in (-\pi/3, \pi/3).$$

3.7. Ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале (a, b) по заданной ортogonalной системе

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b) по ортogonalной системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ образует ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале (a, b) , со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) dx.$$

Функция f принадлежит этому пространству тогда и только тогда, когда

$$(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx < \infty.$$

При этом искомое разложение функции $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b) по системе $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n, \quad (1)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n(x)^2 dx}. \quad (2)$$

1. Проверяем, что

$$\int_a^b f(x)^2 dx < \infty.$$

2. Вычисляем коэффициенты искомого ряда по формулам Эйлера–Фурье (2).

3. Подставляем найденные значения коэффициентов в (1) и записываем ответ.

ПРИМЕР 1. Разложить функцию $y = \arccos x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(-1, 1)$ по системе многочленов Чебышева.

РЕШЕНИЕ. Многочлены Чебышева определяются формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Они образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(-1, 1)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u(x) v(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Искомое разложение функции $y = \arccos x + 1$ в ряд Фурье на интервале $(-1, 1)$ по системе $T_0(x), T_1(x), T_2(x), \dots$ имеет вид

$$\arccos x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (4)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье

$$a_n = \frac{(\arccos x + 1, T_n(x))}{(T_n(x), T_n(x))} = \frac{\int_{-1}^1 (\arccos x + 1) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{\int_{-1}^1 T_n(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}. \quad (5)$$

1. Проверяем, что

$$\int_{-1}^1 (\arccos x + 1)^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = \arccos x + 1$ ограничена на $(-1, 1)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (5).

Интегралы

$$\int_{-1}^1 (\arccos x + 1) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

вычисляем, делая замену переменной $x = \cos \vartheta$, затем используем фор-

мулу (3) и интегрируем по частям. Получаем

$$\int_{-1}^1 (\arccos x + 1) T_0(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi (\vartheta + 1) d\vartheta = \frac{\pi^2}{2} + \pi,$$

$$\int_{-1}^1 (\arccos x + 1) T_n(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi (\vartheta + 1) \cos n\vartheta d\vartheta = \frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

$n = 1, 2, \dots$

Вычисляем интегралы

$$\int_{-1}^1 T_n(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos^2 n\vartheta d\vartheta.$$

При $n = 0$

$$\int_{-1}^1 T_n(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.$$

При $n = 1, 2, \dots$

$$\int_{-1}^1 T_n(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя вычисленные интегралы в (5), получаем

$$a_0 = \frac{\pi + 2}{2}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ в (4). Получаем

$$\arccos x + 1 = \frac{\pi + 2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} T_n(x).$$

Ответ. $\arccos x + 1 = \frac{\pi + 2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} T_n(x), \quad x \in (-1, 1).$

ПРИМЕР 2. Разложить функцию $y = x^3$ в ряд Фурье на интервале $(-1, 1)$ по системе многочленов Лежандра.

РЕШЕНИЕ. Многочлены Лежандра определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Они образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(-1, 1)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u(x) v(x) dx.$$

Искомое разложение функции $y = x^3$ в ряд Фурье на интервале $(-1, 1)$ по системе $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots$ имеет вид

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (7)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_n = \frac{(x^3, P_n(x))}{(P_n(x), P_n(x))} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx}. \quad (8)$$

1. Проверяем, что

$$\int_{-1}^1 x^6 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x^3$ ограничена на $(-1, 1)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (8).

Вычисляем интегралы

$$\int_{-1}^1 x^3 P_n(x) dx, \quad (9)$$

пользуясь формулой (6) и интегрируя по частям. Получаем

$$\int_{-1}^1 x^3 P_0(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0,$$

$$\int_{-1}^1 x^3 P_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 \frac{d}{dx} (x^2 - 1) dx = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{5},$$

$$\int_{-1}^1 x^3 P_2(x) dx = \frac{1}{2^2 2!} \int_{-1}^1 x^3 \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 dx = \frac{3 \cdot 2}{2^2 2!} \int_{-1}^1 x (x^2 - 1)^2 dx = 0,$$

$$\int_{-1}^1 x^3 P_3(x) dx = \frac{1}{2^3 3!} \int_{-1}^1 x^3 \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 dx = -\frac{1}{2^3} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^3 dx = \frac{4}{35}.$$

Интегралы (9) при $n > 3$ равны нулю.

Интегралы

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx$$

тоже можно вычислить, пользуясь формулой (6) и интегрируя по частям. Так было установлено, что

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (10)$$

Подставляя вычисленные интегралы в (8), получаем

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{3}{5}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2}{5}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \dots$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ в (7). Получаем

$$x^3 = \frac{3}{5} P_1(x) + \frac{2}{5} P_3(x).$$

Делаем проверку, пользуясь тем, что по формуле (6) $P_1(x) = x$ и $P_3(x) = 5x^3/2 - 3x/2$.

Ответ. $x^3 = \frac{3}{5} P_1(x) + \frac{2}{5} P_3(x), \quad x \in (-1, 1).$

ПРИМЕР 3. Разложить функцию $y = \alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $P_0(\cos \vartheta)$, $P_1(\cos \vartheta)$, $P_2(\cos \vartheta), \dots$, где P_n — многочлены Лежандра.

РЕШЕНИЕ. Функции $P_0(\cos \vartheta)$, $P_1(\cos \vartheta)$, $P_2(\cos \vartheta), \dots$ образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(0, \pi)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^\pi u(\vartheta) v(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Искомое разложение функции $y = \alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta$ в ряд Фурье на интервале $(0, \pi)$ по системе $P_0(\cos \vartheta)$, $P_1(\cos \vartheta)$, $P_2(\cos \vartheta), \dots$ имеет вид

$$\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta), \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad (11)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta, P_n(\cos \vartheta))}{(P_n(\cos \vartheta), P_n(\cos \vartheta))} = \\ &= \frac{\int_0^\pi (\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi P_n(\cos \vartheta)^2 \sin \vartheta d\vartheta}. \end{aligned} \quad (12)$$

1. Проверяем, что

$$\int_0^\pi (\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta)^2 \sin \vartheta d\vartheta < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = \alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta$ ограничена на $(0, \pi)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (12).

Интегралы

$$\int_0^\pi \alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (13)$$

вычисляем, делая замену переменной $\cos \vartheta = x$, затем используем формулу (6) и интегрируем по частям (см. пример 2). Получаем

$$\int_0^{\pi} (\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta) P_0(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma,$$

$$\int_0^{\pi} (\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta) P_1(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) P_1(x) dx = \frac{2}{3}\beta,$$

$$\int_0^{\pi} (\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta) P_2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^1 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) P_2(x) dx = \frac{4}{15}\gamma.$$

Интегралы (13) при $n > 2$ равны нулю.

Интегралы

$$\int_{-1}^1 P_n(\cos \vartheta)^2 \sin \vartheta dx = \int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx$$

определяются формулой (10).

Подставляя вычисленные интегралы в (12), получаем

$$a_0 = \alpha + \frac{1}{3}\gamma, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = \frac{2}{3}\gamma, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad \dots$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ в (11). Получаем

$$\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta = \left(\alpha + \frac{1}{3}\gamma\right) P_0(\cos \vartheta) + \beta P_1(\cos \vartheta) + \frac{2}{3} P_2(\cos \vartheta).$$

Делаем проверку, пользуясь тем, что по формуле (6)

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{и} \quad P_2(x) = 3x^2/2 - 1/2.$$

Ответ. $\alpha + \beta \cos \vartheta + \gamma \cos^2 \vartheta =$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{3}\gamma\right) P_0(\cos \vartheta) + \beta P_1(\cos \vartheta) + \frac{2}{3} P_2(\cos \vartheta), \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

ПРИМЕР 4. Разложить функцию $y = e^{2x}$ в ряд Фурье на интервале $(-\infty, \infty)$ по системе многочленов Эрмита.

РЕШЕНИЕ. Многочлены Эрмита определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Они образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(-\infty, \infty)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) e^{-x^2} dx.$$

Искомое разложение функции $y = e^{2x}$ в ряд Фурье на интервале $(-\infty, \infty)$ по системе $H_0(x), H_1(x), H_2(x), \dots$ имеет вид

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (15)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_n = \frac{(e^{2x}, H_n(x))}{(H_n(x), H_n(x))} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} H_n(x) e^{-x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx}. \quad (16)$$

1. Проверяем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{4x} e^{-x^2} dx < \infty.$$

Сходимость интеграла на бесконечности обеспечивает быстро убывающий множитель e^{-x^2} .

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (16).

Вычисляем интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} H_0(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} H_n(x) e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = \\ &= 2^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e 2^n. \end{aligned}$$

Интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

вычисляются специальными методами.

Подставляя вычисленные интегралы в (16), получаем

$$a_0 = e, \quad a_n = \frac{e}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ в (15). Получаем

$$e^{2x} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x). \quad (17)$$

Замечание. Равенство (17) — частный случай общей формулы

$$e^{2zx-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

при $z = 1$.

Ответ. $e^{2x} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$

ПРИМЕР 5. Разложить функцию $y = (1 - x^2)x^\nu$ ($\nu > -1$) в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе функций $J_\nu(\mu_n x)$, $n = 1, 2, \dots$, где J_ν — функция Бесселя и μ_n — нуль функции J_ν .

РЕШЕНИЕ. Функции Бесселя $J_\nu(x)$ определяются равенством

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}.$$

Функции $J_\nu(z_1x)$, $J_\nu(z_2x)$, ... образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(0, 1)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x) x dx.$$

Искомое разложение функции $y = (1 - x^2)x^\nu$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе функций $J_\nu(z_1x)$, $J_\nu(z_2x)$, ... имеет вид

$$(1 - x^2)x^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(\mu_n x), \quad x \in (0, 1), \quad (18)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_n = \frac{((1 - x^2)x^\nu, J_\nu(\mu_n x))}{(J_\nu(\mu_n x), J_\nu(\mu_n x))} = \frac{\int_0^1 (1 - x^2)x^\nu J_\nu(\mu_n x) x dx}{\int_0^1 J_\nu(\mu_n x)^2 x dx}. \quad (19)$$

1. Проверяем, что

$$\int_0^1 (1 - x^2)^2 x^{2\nu} x dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = (1 - x^2)x^\nu$ ограничена на $(0, 1)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (19).

Интегралы

$$\int_0^1 (1 - x^2)x^\nu J_\nu(\mu_n x) x dx$$

вычисляются с использованием формулы

$$z^{\nu+1} J_\nu(z) = \frac{d}{dz} (z^\nu J_{\nu+1}(z))$$

и интегрированием по частям. Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (1-x^2)x^\nu J_\nu(\mu_n x) x dx &= \frac{1}{\mu_n^{\nu+1}} \int_0^{\mu_n} \left[1 - \left(\frac{z}{\mu_n} \right)^2 \right] z^{\nu+1} J_\nu(z) dz = \\
 &= \frac{1}{\mu_n^{\nu+1}} \int_0^{\mu_n} \left[1 - \left(\frac{z}{\mu_n} \right)^2 \right] \frac{d}{dz} (z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)) dz = \\
 &= \frac{1}{\mu_n^{\nu+1}} \left[1 - \left(\frac{z}{\mu_n} \right)^2 \right] z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z) \Big|_0^{\mu_n} + \frac{2}{\mu_n^{\nu+3}} \int_0^{\mu_n} z^{\nu+2} J_{\nu+1}(z) dz = \\
 &= \frac{2}{\mu_n^2} J_{\nu+2}(\mu_n).
 \end{aligned}$$

Интегралы

$$\int_0^1 J_\nu(\mu_n x)^2 x dx$$

вычисляются с использованием формулы

$$\int J_\nu(\alpha x)^2 x dx = \frac{x^2}{2} [J_\nu(\alpha x)^2 - J_{\nu-1}(\alpha x) J_{\nu+1}(\alpha x)] + C.$$

Поэтому

$$\int_0^1 J_\nu(\mu_n x)^2 x dx = -\frac{1}{2} J_{\nu-1}(\mu_n) J_{\nu+1}(\mu_n).$$

При $\nu = 0$ это равенство упрощается:

$$\int_0^1 J_0(\mu_n x)^2 x dx = \frac{1}{2} J_1(\mu_n)^2,$$

поскольку $J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Подставляя вычисленные интегралы в (19), получаем

$$a_n = -\frac{4}{\mu_n} \frac{J_{\nu+2}(\mu_n)}{J_{\nu-1}(\mu_n) J_{\nu+1}(\mu_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_1, a_2, \dots$ в (18). Получаем

$$(1 - x^2)x^\nu = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+2}(\mu_n)}{\mu_n J_{\nu-1}(\mu_n) J_{\nu+1}(\mu_n)} J_\nu(\mu_n x).$$

Ответ. $(1 - x^2)x^\nu = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\nu+2}(\mu_n^2)}{\mu_n J_{\nu-1}(\mu_n) J_{\nu+1}(\mu_n)} J_\nu(\mu_n x), \quad x \in (0, 1).$

ПРИМЕР 6. Разложить функцию $y = x$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе функций Хаара.

РЕШЕНИЕ. Функции Хаара определяются равенствами

$$h_0(x) = 1,$$

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < 1/2, \\ -1 & \text{при } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} u_n & \text{при } \alpha_n < x < \beta_n, \\ -u_n & \text{при } \beta_n < x < \gamma_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $u_n = 2^{k/2}$, $\alpha_n = n/2^k - 1$, $\beta_n = \alpha_n + 1/2^{k+1}$, $\gamma_n = \alpha_n + 1/2^k$ и k таково, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$, т.е. $k = [\log_2 n]$, где $[q]$ означает целую часть числа q .

Функции $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\dots$ образуют ортогональный базис в пространстве функций, заданных в интервале $(0, 1)$, со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x) dx.$$

Искомое разложение функции $y = x$ в ряд Фурье на интервале $(0, 1)$ по системе функций $h_0(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\dots$ имеет вид

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x), \quad x \in (0, 1), \quad (20)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$a_n = \frac{(x, h_n(x))}{(h_n(x), h_n(x))} = \frac{\int_0^1 x h_n(x) dx}{\int_0^1 h_n(x)^2 dx}. \quad (21)$$

1. Проверяем, что

$$\int_0^1 x^2 dx < \infty.$$

Неравенство справедливо, поскольку функция $y = x$ ограничена на $(0, 1)$.

2. Вычисляем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ по формулам Эйлера–Фурье (21).

Вычисляем интегралы

$$\begin{aligned} \int_0^1 x h_0(x) dx &= \frac{1}{2}, \\ \int_0^1 x h_n(x) dx &= u_n \int_{\alpha_n}^{\beta_n} x dx - u_n \int_{\beta_n}^{\gamma_n} x dx = -\frac{1}{2^{3k/2+2}}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^1 h_n(x)^2 dx = 1.$$

Подставляя вычисленные интегралы в (21), получаем

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = -\frac{1}{4} \frac{1}{2^{3[\log_2 n]/2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. Подставляем найденные значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots$ в (20). Получаем

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3[\log_2 n]/2}} h_n(x).$$

Ответ. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3[\log_2 n]/2}} h_n(x), \quad x \in (0, 1).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье на интервале (a, b) по системе $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$)

1. $f(x) = \arccos^2 x$ на $(-1, 1)$, $\varphi_n(x) = T_n(x)$ — многочлены Чебышева.

2. $f(x) = x^2 + 1$ на $(-1, 1)$, $\varphi_n(x) = T_n(x)$ — многочлены Чебышева.
3. $f(x) = |x|$ на $(-1, 1)$, $\varphi_n(x) = P_n(x)$ — многочлены Лежандра.
4. $f(x) = 2 + 3 \cos x + \cos^2 x$ на $(0, \pi)$, $\varphi_n(x) = P_n(\cos x)$, P_n — многочлены Лежандра.
5. $f(x) = 1 + \cos x - \cos 2x + 2 \cos 3x$ на $(0, \pi)$, $\varphi_n(x) = P_n(\cos x)$, P_n — многочлены Лежандра.
6. $f(x) = \operatorname{ch} x$ на $(-\infty, \infty)$, $\varphi_n(x) = H_n(x)$ — многочлены Эрмита.
7. $f(x) = \sin x$ на $(-\infty, \infty)$, $\varphi_n(x) = H_n(x)$ — многочлены Эрмита.
8. $f(x) = 1 - x^2$ на $(0, 1)$, $\varphi_n(x) = J_0(\mu_n x)$ ($n = 1, 2, \dots$), J_0 — функция Бесселя, $J_0(\mu_n) = 0$.
9. $f(x) = x(1 - x^2)$ на $(0, 1)$, $\varphi_n(x) = J_1(\mu_n x)$ ($n = 1, 2, \dots$), J_1 — функция Бесселя, $J_1(\mu_n) = 0$.
10. $f(x) = 1 - 2x$ на $(0, 1)$, $\varphi_n(x) = h_n(x)$ — функции Хаара.

Ответы.

1. $\arccos^2 x = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} T_n(x)$, $x \in (-1, 1)$.
2. $x^2 + 1 = \frac{3}{2} T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x)$, $x \in (-1, 1)$.
3. $|x| = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+1)}{2^{2k+1} k (2k+1)} P_{2k}(x)$, $x \in (-1, 1)$.
4. $2 + 3 \cos x + \cos^2 x = \frac{7}{3} P_0(\cos x) + 3 P_1(\cos x) + \frac{2}{3} P_2(\cos x)$,
 $x \in (0, \pi)$.
5. $1 + \cos x - \cos 2x + 2 \cos 3x = \frac{4}{3} P_0(\cos x) - \frac{1}{5} P_1(\cos x) -$
 $-\frac{4}{3} P_2(\cos x) + \frac{16}{5} P_3(\cos x)$, $x \in (0, \pi)$.
6. $\operatorname{ch} x = e^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)! 2^{2k}} H_{2k}(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.
7. $\sin x = e^{-1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} H_{2k+1}(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.
8. $1 - x^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)^2} J_0(\mu_n x)$, $x \in (0, 1)$.
9. $x(1 - x^2) = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_3(\mu_n)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n) J_1(\mu_n)} J_1(\mu_n x)$, $x \in (0, 1)$.
10. $1 - 2x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3[\log_2 n]/2}} h_n(x)$, $x \in (0, 1)$.

Глава 4

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

При изучении темы ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ вы научитесь находить синус-преобразование Фурье, косинус-преобразование Фурье и комплексное преобразование Фурье различных функций и восстанавливать функции по их преобразованиям Фурье. Эта тема тесно связана с операционным исчислением, поскольку оно основано на преобразовании Лапласа. В современной математической литературе связь преобразований Фурье и Лапласа детально исследована и они рассматриваются как частные случаи преобразования Фурье–Лапласа.

С помощью пакета РЕШЕБНИК ВМ вы сможете вычислять интегралы, находить разложения рациональных функций на элементарные дроби, вычислять производные и выполнять все другие действия, необходимые при изучении темы. Когда вы в ней освоитесь, вы сможете вычислять преобразования Фурье и восстанавливать функции по их преобразованиям Фурье простым нажатием кнопок на клавиатуре компьютера, используя возможности модуля STEM Plus, входящего в пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

4.1. Синус-преобразование Фурье

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, \infty)$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если функция $f(x)$ задана в интервале $(0, \infty)$ и

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad (1)$$

то ее синус-преобразованием Фурье называется функция

$$F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx, \quad p \in (-\infty, \infty). \quad (2)$$

1. Проверяем, что выполняется условие (1).
2. Вычисляем интеграл в правой части (2) и записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Условие (1) выполняется, поскольку

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx = \int_1^2 dx = 1 < \infty.$$

2. Вычисляем интеграл в правой части (2):

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx = \int_1^2 \sin(px) dx = \frac{\cos p - \cos 2p}{p}.$$

Ответ. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos p - \cos 2p}{p}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, \infty)$.

1. $f(x) = 1$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ при $x > 1$.
2. $f(x) = x$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ при $x > 1$.
3. $f(x) = e^{-x}$.
4. $f(x) = xe^{-x}$.
5. $f(x) = e^{-x} \cos x$.
6. $f(x) = xe^{-x} \cos x$.
7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
8. $f(x) = \frac{x \cos x}{1+x^2}$.
9. $f(x) = xe^{-x^2}$.
10. $f(x) = 0$ при $x < 1$ и $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ при $x > 1$.

Ответы.

1. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos p}{p}.$
2. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p - p \cos p}{p^2}.$
3. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{p^2 + 1}.$
4. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$

$$5. F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{p-1}{(p-1)^2+1} \right].$$

$$6. F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{p+1}{[(p+1)^2+1]^2} + \frac{p-1}{[(p-1)^2+1]^2} \right\}.$$

$$7. F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign}(p) e^{-|p|}.$$

$$8. F(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sign}(p+1) e^{-|p+1|} + \operatorname{sign}(p-1) e^{-|p-1|} \right].$$

$$9. F(p) = \frac{1}{2\sqrt{2}} p e^{-p^2/4}. \quad 10. F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(p).$$

4.2. Косинус-преобразование Фурье

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, \infty)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если функция $f(x)$ задана в интервале $(0, \infty)$ и

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad (1)$$

то ее косинус-преобразованием Фурье называется функция

$$F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(px) dx, \quad p \in (-\infty, \infty). \quad (2)$$

1. Проверяем, что выполняется условие (1).

2. Вычисляем интеграл в правой части (2) и записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Условие (1) выполняется, поскольку

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx = \int_1^2 dx = 1 < \infty.$$

2. Вычисляем интеграл в правой части (2):

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos(px) dx = \int_1^2 \cos(px) dx = \frac{\sin 2p - \sin p}{p}.$$

Ответ. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2p - \sin p}{p}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(0, \infty)$.

1. $f(x) = 1$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ при $x > 1$.

2. $f(x) = x$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ при $x > 1$. 3. $f(x) = e^{-x}$.

4. $f(x) = xe^{-x}$. 5. $f(x) = e^{-x} \cos x$. 6. $f(x) = xe^{-x} \cos x$.

7. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 8. $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$. 9. $f(x) = e^{-x^2}$.

10. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$

Ответы.

1. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p}{p}.$ 2. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos p + p \sin p - 1}{p^2}.$

3. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{p^2 + 1}.$ 4. $F(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - p^2}{(p^2 + 1)^2}.$

5. $F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \right].$

6. $F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1 - (p+1)^2}{[(p+1)^2 + 1]^2} + \frac{1 - (p-1)^2}{[(p-1)^2 + 1]^2} \right\}.$

7. $F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}.$ 8. $F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|} \right].$

9. $F(p) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-p^2/4}.$ 10. $F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-|p|}}{|p|}.$

4.3. Комплексное преобразование Фурье

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти комплексное преобразование Фурье функции $f(x)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если функция $f(x)$ задана в интервале $(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad (1)$$

то ее комплексным преобразованием Фурье называется функция

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ipx} dx, \quad p \in (-\infty, \infty). \quad (2)$$

1. Проверяем, что выполняется условие (1).
2. Вычисляем интеграл в правой части (2) и записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти комплексное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 0, & 2 < x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Условие (1) выполняется, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^2 dx = 1 < \infty.$$

2. Вычисляем интеграл в правой части (2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ipx} dx = \int_1^2 e^{ipx} dx = \frac{e^{2ip} - e^{ip}}{ip}.$$

Ответ. $F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{2ip} - e^{ip}}{ip}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти комплексное преобразование Фурье функции $f(x)$.

1. $f(x) = 1$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ при $x > 1$ и $x < 0$.
2. $f(x) = x$ при $0 < x < 1$ и $f(x) = 0$ при $x > 1$ и $x < 0$.
3. $f(x) = e^{-x}\eta(x)^{*}$. 4. $f(x) = xe^{-x}\eta(x)$. 5. $f(x) = e^{-x}\eta(x)\cos x$.
6. $f(x) = e^{-x}\eta(x)\sin x$. 7. $f(x) = \frac{x+1}{1+x^2}$. 8. $f(x) = \frac{x-2}{4+x^2}$.
9. $f(x) = e^{-x^2}$. 10. $f(x) = \arctg(x+1) - \arctg x$.

Ответы.

$$1. F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ip} - 1}{ip}. \quad 2. F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ip}(1 - ip) - 1}{p^2}.$$

$$3. F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 - ip}. \quad 4. F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1 - ip)^2}.$$

$$5. F(p) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1 - i(p+1)} + \frac{1}{1 - i(p-1)} \right].$$

$$6. F(p) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i} \left[\frac{1}{1 - i(p+1)} - \frac{1}{1 - i(p-1)} \right].$$

$$7. F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|} [1 + i \operatorname{sign}(p)].$$

$$8. F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2|p|} [-1 + i \operatorname{sign}(p)].$$

$$9. F(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-p^2/4}. \quad 10. F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-ip}}{ip} e^{-|p|}.$$

4.4. Комплексное преобразование Фурье функции вида $\sum_{k=1}^n a_k x^{m_k} f_k(b_k x + c_k)$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти комплексное преобразование Фурье функции вида

$$\sum_{k=1}^n a_k x^{m_k} f_k(b_k x + c_k),$$

используя известные преобразования Фурье функций $f_k(x)$.

^{*}) Единичная функция Хэвисайда $\eta(x) \equiv 1$ при $x \geq 0$ и $\eta(x) \equiv 0$ при $x < 0$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Комплексное преобразование Фурье имеет следующие свойства:

если $f(x) \mapsto F(p)$, $g(x) \mapsto G(p)$ и $a, b, c = \text{const}$, то

1. $f(x) \pm g(x) \mapsto F(p) \pm G(p)$;
2. $af(x) \mapsto aF(p)$;
3. $f(bx) \mapsto \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right)$ ($b \neq 0$);
4. $f(x + c) \mapsto e^{-icp} F(p)$;
5. $e^{icx} f(x) \mapsto F(p + c)$;
6. $x^n f(x) \mapsto \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dp^n} F(p)$;
7. $\frac{d^n}{dx^n} f(x) \mapsto (-ip)^n F(p)$;
8. $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y) dy \mapsto F(p) \cdot G(p)$;
9. $f(x) \cdot g(x) \mapsto F * G(p)$;
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)^* dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p)G(p)^* dp$;
11. $f(x)^* \mapsto F(-p)^*$.

Используя свойства 1–4 и 6, получаем

$$\sum_{k=1}^n a_k x^{m_k} f_k(b_k x + c_k) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{i^{n_k}} \frac{d^{n_k}}{dp^{n_k}} e^{-ic_k p} \frac{1}{b} F_k\left(\frac{p}{b_k}\right).$$

ПРИМЕР 1. Найти комплексное преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-b^2 x^2},$$

используя формулу

$$e^{-x^2} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-p^2/4}.$$

РЕШЕНИЕ. Представив функцию $f(x)$ в виде $f(x) = e^{-(bx)^2}$, используем свойство 3. Получаем

$$e^{-b^2 x^2} \mapsto \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-p^2/4b^2}.$$

Ответ. $F(p) = \frac{1}{b\sqrt{2}} e^{-p^2/(2b)^2}.$

ПРИМЕР 2. Найти комплексное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1},$$

используя формулу

$$\frac{1}{x^2 + 1} \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}.$$

РЕШЕНИЕ. Представив функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{x^2 + 1},$$

используем свойство 6 при $n = 1$. Получаем

$$\frac{x}{x^2 + 1} \mapsto \frac{1}{i} \frac{d}{dp} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|} = -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign}(p) e^{-|p|}.$$

Ответ. $F(p) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign}(p) e^{-|p|}.$

ПРИМЕР 3. Найти комплексное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2},$$

используя формулу

$$\frac{1}{x^2 + 1} \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}.$$

РЕШЕНИЕ. Представив функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 1},$$

используем свойство 4 при $c = 1$. Получаем

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} \mapsto e^{-ip} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}.$$

Ответ. $F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|-ip}.$

ПРИМЕР 4. Найти комплексное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1},$$

используя формулу

$$\frac{1}{x^2 + 1} \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}.$$

РЕШЕНИЕ. По формуле Эйлера

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Представив функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{2i} e^{ix} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2i} e^{-ix} \frac{1}{x^2 + 1},$$

используем свойство 5. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2i} e^{ix} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{2i} e^{-ix} \frac{1}{x^2 + 1} \mapsto \\ &\mapsto \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p+1|} - \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p-1|}. \end{aligned}$$

Ответ. $F(p) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e^{-|p+1|} - e^{-|p-1|}).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти комплексное преобразование Фурье функции $f(x)$, используя формулу $\frac{1}{x^2 + 1} \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|}.$

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}.$ 2. $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 8x + 5}.$ 3. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}.$
4. $f(x) = \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 5}.$ 5. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}.$ 6. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2}.$
7. $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$ 8. $f(x) = \frac{2x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$
9. $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)}.$
10. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 8x + 5)}.$

Ответы.

$$1. F(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2|p|}. \quad 2. F(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|p|/2+ip}.$$

$$3. F(p) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign}(p) e^{-2|p|}. \quad 4. F(p) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sign}(p) e^{-|p|/2+ip}.$$

$$5. F(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|} \right).$$

$$6. F(p) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-|p+1|-i(p+1)} - e^{-|p-1|-i(p-1)} \right].$$

$$7. F(p) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} p e^{-|p|}. \quad 8. F(p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(2e^{-2|p|} - e^{-|p|} \right).$$

$$9. F(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-|p|} - e^{-|p|-ip} \right).$$

$$10. F(p) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[2e^{-|p|-2ip} - e^{-|p|/2+ip} \right].$$

4.5. Восстановление функции по ее преобразованию Фурье

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти функцию $f(x)$, преобразование Фурье (синус-, косинус-, комплексное) которой есть $F(p)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Если $F(p)$ — синус-преобразование Фурье функции $f(x)$ и выполняется условие

$$\int_0^{\infty} |F(p)|^2 dp < \infty, \quad (1)$$

то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(p) \sin px \, dp \quad (x > 0). \quad (2)$$

Если $F(p)$ — косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ и выполняется условие (1), то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(p) \cos px \, dp \quad (x > 0). \quad (3)$$

Если $F(p)$ — комплексное преобразование Фурье функции $f(x)$ и выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(p)|^2 dp < \infty, \quad (4)$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F(p) e^{-ipx} dp \quad (-\infty < x < \infty). \quad (5)$$

1. Проверяем, что выполняется условие (1) или (4).

2. Вычисляем интеграл в правой части (2), (3) или (5) и записываем ответ.

Замечания.

1. Используя свойства преобразования Фурье, можно упростить вычисление интегралов (2), (3) и (5) или даже свести их к табличным.

2. Если интегралы (2), (3) и (5) вычислить не удастся, то можно использовать таблицу преобразований Фурье и их свойства.

ПРИМЕР 1. Найти функцию $f(x)$, синус-преобразование Фурье которой есть

$$F(p) = \begin{cases} 1, & 0 < p < 1, \\ 0, & 1 < p < \infty. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что выполняется условие (1):

$$\int_0^{\infty} |F(p)|^2 dp = \int_0^1 dp = 1 < \infty.$$

2. Вычисляя интеграл в правой части (2), получаем:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(p) \sin px dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin px dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Ответ. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos x}{x}.$

ПРИМЕР 2. Найти функцию $f(x)$, косинус-преобразование Фурье которой есть

$$F(p) = \begin{cases} 1, & 0 < p < 1, \\ 0, & 1 < p < \infty. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что выполняется условие (1):

$$\int_0^{\infty} |F(p)|^2 dp = \int_0^1 dp = 1 < \infty.$$

2. Вычисляя интеграл в правой части (3), получаем:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(p) \cos px dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos px dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}.$$

Ответ. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}.$

ПРИМЕР 3. Найти функцию $f(x)$, комплексное преобразование Фурье которой есть

$$F(p) = \begin{cases} 1, & 0 < p < 1, \\ 0, & 1 < p < \infty. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что выполняется условие (4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(p)|^2 dp = \int_0^1 dp = 1 < \infty.$$

2. Вычисляя интеграл в правой части (5), получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{-ipx} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ipx} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ix}}{ix}.$$

Ответ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ix}}{ix}.$

ПРИМЕР 4. Найти функцию $f(x)$, комплексное преобразование Фурье которой есть

$$F(p) = -ip \ln \frac{1 + p^2}{p^2}.$$

РЕШЕНИЕ.

1. Проверяем, что выполняется условие (4):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(p)|^2 dp &= \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \ln^2 \frac{p^2+1}{p^2} dp = 2 \int_0^{\infty} p^2 \ln^2 \frac{p^2+1}{p^2} dp = \\ &= 2 \int_0^1 p^2 \ln^2 \frac{p^2+1}{p^2} dp + 2 \int_1^{\infty} p^2 \ln^2 \frac{p^2+1}{p^2} dp. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл сходится, так как подынтегральная функция ограничена ($\lim_{p \rightarrow 0} p^2 \ln[(p^2+1)/p^2] = 0$). Второй интеграл сходится, так как

$$p^2 \ln^2 \frac{p^2+1}{p^2} = p^2 \ln^2 \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) \sim \frac{1}{p^2}.$$

2. По формуле (5) имеем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{-ipx} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ip) \ln \frac{p^2+1}{p^2} e^{-ipx} dp.$$

Чтобы упростить вычисления, заметим, что можно сначала опустить множитель ip , найти

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{p^2+1}{p^2} e^{-ipx} dp \quad (6)$$

и затем получить $f(x)$ по формуле

$$f(x) = \frac{d}{dx} f_1(x). \quad (7)$$

Интеграл в (6) вычисляется интегрированием по частям с последующим применением теоремы Коши о вычетах. Получаем

$$f_1(x) = \sqrt{2\pi} \frac{1 - e^{-|x|}}{|x|}.$$

По формуле (7) получаем

$$f(x) = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-|x|}(|x|+1) - 1}{x^2} \operatorname{sign}(x).$$

Ответ. $f(x) = \sqrt{2\pi} \frac{e^{-|x|}(|x|+1) - 1}{x^2} \operatorname{sign}(x).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти функцию $f(x)$, преобразование Фурье которой есть $F(p)$. В задачах 1–3 $F(p)$ — синус-преобразование Фурье. В задачах 4–6 $F(p)$ — косинус-преобразование Фурье. В задачах 7–10 $F(p)$ — комплексное преобразование Фурье.

1. $F(p) = p$ при $|p| < 1$ и $F(p) = 0$ при $|p| > 1$. 2. $F(p) = pe^{-|p|}$.
3. $F(p) = \frac{1}{2} \left[(p+1)e^{-|p+1|} + (p-1)e^{-|p-1|} \right]$.
4. $F(p) = p$ при $|p| < 1$ и $F(p) = 0$ при $|p| > 1$. 5. $F(p) = e^{-|p|}$.
6. $F(p) = \frac{1}{2} \left[e^{-|p+1|} + e^{-|p-1|} \right]$.
7. $F(p) = p$ при $0 < p < 1$ и $F(p) = 0$ при $p < 0$ и $p > 1$.
8. $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2}$. 9. $F(p) = -ip \operatorname{arctg} p^2$.
10. $F(p) = \frac{-ip e^{3ip}}{4p^2 + 8p + 5}$.

Ответы.

1. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$. 2. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2x \cos x}{(x^2 + 1)^2}$. 4. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x \sin x - 1 + \cos x}{x^2}$.
5. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2 + 1}$. 6. $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{x^2 + 1}$.
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \frac{(1+ix)e^{-ix} - 1}{x^2}$. 8. $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ix} e^{-|x|}$.
9. $f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-|x|/\sqrt{2}} \frac{x \cos(x/\sqrt{2} + \pi/4) - \sin(x/\sqrt{2})}{x^2}$.
10. $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(i - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-3) \right) e^{i(x-3)} e^{-|x-3|/2}$.

Глава 5

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

При изучении темы УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ вы научитесь решать основные задачи для уравнений электростатики, электродинамики, теплопроводности и механики сплошных сред. Эти уравнения называются уравнениями Лапласа, Пуассона, волновым уравнением, или уравнением колебаний, и уравнением теплопроводности. Все эти уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Вы научитесь находить общие решения и других дифференциальных уравнений в частных производных, пока не нашедших практических применений.

Отбор задач для этой главы и выбор методов их решения осуществлен таким образом, чтобы любая типовая задача для уравнений математической физике либо легко сводилась к вошедшим в данную главу, либо могла быть решена одним из представленных методов. Исключение составляют задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности на плоскости и в пространстве. Их целесообразно решать с помощью интегральных преобразований Фурье или Лапласа.

При решении задач, содержащих дифференциальные уравнения в частных производных, обычно приходится делать сложные замены переменных, вычислять интегралы, находить суммы рядов и строить графики этих сумм. Эти действия отвлекают внимание от сути изучаемого метода и тем самым сильно затрудняют его понимание. Пакет РЕШЕБНИК.ВМ поможет вам легко и быстро выполнить все необходимые действия и сосредоточить внимание на главном, таким образом существенно облегчив изучение методов решения задач. Когда вы изучите уравнения математической физики, пакет РЕШЕБНИК.ВМ даст вам возможность решать их простым нажатием нескольких кнопок на клавиатуре компьютера, используя возможности модуля STEM Plus, входящего в пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

5.1. Тип и канонический вид уравнения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Определить тип уравнения*

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \\ + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \quad (1)$$

и привести его к каноническому виду.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Тип уравнения (1) определяется знаком выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;

если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;

если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Замечание. Уравнение (1) может менять свой тип при переходе из одной точки в другую. Например, уравнение $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ является уравнением эллиптического типа в точках (x, y) , $y > 0$, параболического типа в точках $(x, 0)$ и гиперболического типа в точках (x, y) , $y < 0$. Действительно, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y$ и $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ при $y > 0$, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ при $y = 0$ и $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ при $y < 0$.

Чтобы привести уравнение (1) к каноническому виду, нужно сделать в нем замену переменных:

$$x, y \mapsto \xi = h_1(x, y), \quad \eta = h_2(x, y), \quad (2)$$

где

- в случае уравнения гиперболического типа $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ — независимые общие интегралы уравнения характеристик

$$a_{11}(x, y)(dy)^2 - 2a_{12}(x, y)dydx + a_{22}(x, y)(dx)^2 = 0; \quad (3)$$

- в случае уравнения параболического типа $h_1(x, y)$ — общий интеграл уравнения характеристик (3) и $h_2(x, y)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция, не выражающаяся через $h_1(x, y)$;
- в случае уравнения эллиптического типа $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ — вещественная и мнимая части любого из двух общих интегралов уравнения характеристик (3).

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11} , a_{12} и a_{22} .
2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

и определяем области его знакоопределенности.

3. Делаем вывод о типе уравнения (1).
4. Находим общие интегралы уравнения характеристик (3).
5. В уравнении (1) делаем замену переменных (2). При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} u_x &\longmapsto u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, & u_y &\longmapsto u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &\longmapsto u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &\longmapsto u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &\longmapsto u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned}$$

В результате замены переменных уравнение (1) примет один из трех канонических видов:

- в случае уравнения гиперболического типа

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta);$$

- в случае уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta);$$

- в случае уравнения эллиптического типа

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Записываем ответ.

ПРИМЕР 1. Определить тип уравнения

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 21u_{yy} + 2u_x - 3u_y + 5u = x^2 \quad (4)$$

и привести его к каноническому виду.

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11} , a_{12} и a_{22} . Имеем

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -2, \quad a_{22} = -21.$$

2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 + 21 = 25 > 0.$$

3. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ при всех x, y , уравнение (4) является уравнением гиперболического типа во всей плоскости XOY .

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 4dydx - 21(dx)^2 = 0. \quad (5)$$

Решая это уравнение относительно dy , получаем

$$dy = 3dx \quad \text{и} \quad dy = -7dx.$$

Следовательно, уравнение характеристик (5) имеет два интеграла:

$$h_1(x, y) = y - 3x \quad \text{и} \quad h_2(x, y) = y + 7x.$$

5. В уравнении (4) делаем замену переменных:

$$x, y \mapsto \xi = h_1(x, y) = y - 3x, \quad \eta = h_2(x, y) = y + 7x.$$

При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$u_x \mapsto -3u_\xi + 7u_\eta, \quad u_y \mapsto u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} \mapsto 9u_{\xi\xi} - 54u_{\xi\eta} + 49u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} \mapsto -3u_{\xi\xi} - 54u_{\xi\eta} + 49u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} \mapsto u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

В результате замены переменных уравнение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} & 9u_{\xi\xi} - 54u_{\eta\eta} + 49u_{\eta\eta} + 12u_{\xi\xi} - 16u_{\xi\eta} - 28u_{\eta\eta} - 21u_{\xi\xi} - \\ & - 42u_{\xi\eta} - 21u_{\eta\eta} - 6u_\xi + 14u_\eta - 3u_\xi - 3u_\eta + 5u = \left(\frac{\eta - \xi}{10} \right)^2, \end{aligned}$$

т.е. уравнение (4) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = -\frac{10}{112}u_\xi + \frac{11}{112}u_\eta + \frac{5}{112}u - \frac{1}{112} \left(\frac{\eta - \xi}{10} \right)^2.$$

Ответ. Уравнение (4) является уравнением гиперболического типа во всей плоскости XOY и имеет канонический вид

$$u_{\xi\eta} = -\frac{10}{112}u_\xi + \frac{11}{112}u_\eta + \frac{5}{112}u - \frac{1}{112} \left(\frac{\eta - \xi}{10} \right)^2,$$

где $\xi = y - 3x$ и $\eta = y + 7x$.

ПРИМЕР 2. Определить тип уравнения

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + u = xy \quad (6)$$

и привести его к каноническому виду.

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11} , a_{12} и a_{22} . Имеем

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{22} = 1.$$

2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 1 = 0.$$

3. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ при всех x, y , уравнение (6) является уравнением параболического типа во всей плоскости XOY .

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик:

$$(dy)^2 + 2dydx + (dx)^2 = 0. \quad (7)$$

Решая это уравнение относительно dy , получаем $dy = -dx$. Следовательно, уравнение характеристик (7) имеет единственный интеграл

$$h_1(x, y) = y + x.$$

5. В уравнении (6) делаем замену переменных:

$$x, y \mapsto \xi = h_1(x, y) = y + x, \quad \eta = y.$$

(В качестве η можно было бы взять и любую другую дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через $h_1(x, y) = y + x$.)

При этом по правилу дифференцирования сложной функции:

$$u_x \mapsto u_\xi, \quad u_y \mapsto u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} \mapsto u_{\xi\xi}, \quad u_{xy} \mapsto u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} \mapsto u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

В результате замены переменных уравнение (6) принимает вид

$$u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + u_\xi - u_\xi - u_\eta + u = (\xi - \eta)\eta,$$

т.е. уравнение (6) приводится к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} = u_\eta - u + (\xi - \eta)\eta.$$

Ответ. Уравнение (6) является уравнением параболического типа во всей плоскости XOY и имеет канонический вид

$$u_{\eta\eta} = u_\eta - u + (\xi - \eta)\eta,$$

где $\xi = y + x$ и $\eta = y$.

ПРИМЕР 3. Определить тип уравнения

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 6u_x + 6u_y - 3u = x + y^2 \quad (8)$$

и привести его к каноническому виду.

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем коэффициенты уравнения a_{11} , a_{12} и a_{22} . Имеем

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 2.$$

2. Вычисляем выражение

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 2 = -1 < 0.$$

3. Поскольку $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ при всех x, y , уравнение (8) является уравнением эллиптического типа во всей плоскости XOY .

4. Находим общие интегралы уравнения характеристик:

$$(dy)^2 - 2dydx + 2(dx)^2 = 0. \quad (9)$$

Решая это уравнение относительно dy , получаем

$$dy = (1 + i) dx \quad \text{и} \quad dy = (1 - i) dx.$$

Следовательно, уравнение характеристик (9) имеет два комплексных интеграла:

$$f_1(x, y) = y - x - ix \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = y - x + ix.$$

Положим $h_1(x, y) = \operatorname{Re} f_2(x, y) = y - x$ и $h_2(x, y) = \operatorname{Im} f_2(x, y) = x$. (В качестве h_1 и h_2 можно было бы взять $\operatorname{Re} f_1(x, y)$ и $\operatorname{Im} f_1(x, y)$.)

5. В уравнении (8) делаем замену переменных:

$$x, y \longmapsto \xi = h_1(x, y) = y - x, \quad \eta = x.$$

При этом по правилу дифференцирования сложной функции

$$u_x \longmapsto -u_\xi + u_\eta, \quad u_y \longmapsto u_\xi,$$

$$u_{xx} \longmapsto u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{xy} \longmapsto u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}, \quad u_{yy} \longmapsto u_{\xi\xi}.$$

В результате замены переменных уравнение (8) принимает вид

$$u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 2u_{\xi\xi} + 6(-u_\xi + u_\eta) + 6u_\xi - 3u = \eta + (\xi + \eta)^2,$$

т.е. уравнение (8) приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -2u_\eta + u + \eta + (\xi + \eta)^2.$$

Ответ. Уравнение (8) является уравнением эллиптического типа во всей плоскости XOY и имеет канонический вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -2u_{\eta} + u + \eta + (\xi + \eta)^2,$$

где $\xi = y - x$ и $\eta = x$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.*

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 7u_y - 3u = 0$.
2. $4u_{xx} - 8u_{xy} + u_{yy} - 2u_x + 2u_y - 3u = 0$.
3. $8u_{xx} - 6u_{xy} - u_{yy} - u_x - 3u_y - u = 0$.
4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 2u_y - 5u = 0$.
5. $2u_{xx} + 8u_{xy} + 8u_{yy} - u_x - 2u_y - 5u = 0$.
6. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 4u_x - 3u_y - 7u = 0$.
7. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 4u_x - 9u_y - 3u = 0$.
8. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + 5u_y - 2u = 0$.
9. $3u_{xx} - 8u_{xy} + 7u_{yy} + 3u_x - u_y + 2u = 0$.
10. $3u_{xx} + 8u_{xy} + 6u_{yy} + 3u_x + u_y - 2u = 0$.

Ответы.

1. Уравнение гиперболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\xi\eta} = (3u - u_{\xi} - 9u_{\eta})/16$, $\xi = y - 3x$, $\eta = y + x$.
2. Уравнение гиперболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\xi\eta} = (-3u + \sqrt{3}u_{\xi} - \sqrt{3}u_{\eta})/12$,
 $\xi = y + (1 - \sqrt{3}/2)x$, $\eta = y + (1 + \sqrt{3}/2)x$.
3. Уравнение гиперболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\xi\eta} = [-8u - (27 - \sqrt{17})u_{\xi} - (27 + \sqrt{17})u_{\eta}]/68$,
 $\xi = y + (3/8 - \sqrt{17}/8)x$, $\eta = y + (3/8 + \sqrt{17}/8)x$.
4. Уравнение параболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\eta\eta} = 5u + u_{\xi} - 2u_{\eta}$, $\xi = y + x$, $\eta = y$.
5. Уравнение параболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\eta\eta} = (5u + 2u_{\eta})/8$, $\xi = y - 2x$, $\eta = y$.
6. Уравнение параболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\eta\eta} = (7u - 9u_{\xi} + 3u_{\eta})/9$, $\xi = y + 3x$, $\eta = y$.
7. Уравнение параболического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\eta\eta} = (3u + u_{\xi} + 9u_{\eta})/4$, $\xi = y + 2x$, $\eta = y$.
8. Уравнение эллиптического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = (4u - 7u_{\xi} - \sqrt{7}u_{\eta})/7$, $\xi = y - 3x/2$, $\eta = \sqrt{7}x/2$.

9. Уравнение эллиптического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = (-6u - 9u_{\xi} - 3\sqrt{5}u_{\eta})/5$, $\xi = y + 4x/3$, $\eta = \sqrt{5}x/3$.
10. Уравнение эллиптического типа во всей плоскости XOY ,
 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = (6u + 9u_{\xi} - 3\sqrt{2}u_{\eta})/2$, $\xi = y - 4x/3$, $\eta = \sqrt{2}x/3$.

5.2. Общее решение гиперболического уравнения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти общее решение гиперболического уравнения

$$u_{xx} + 2bu_{xy} + (b^2 - a^2)u_{yy} = 0. \quad (1)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Приводим уравнение (1) к каноническому виду. Получаем

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad (2)$$

где $\xi = y - (b + a)x$, $\eta = y - (b - a)x$ (задача 5.1).

2. Интегрируя уравнение (2) по η , получаем

$$u_{\xi} = C_0(\xi). \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (3) по ξ , получаем

$$u(\xi, \eta) = \int C_0(\xi) d\xi + C_2(\eta) \equiv C_1(\xi) + C_2(\eta).$$

Следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\eta), \quad (4)$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\eta)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

3. Подставляя в (4) $\xi = y - (b + a)x$ и $\eta = y - (b - a)x$, получаем общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = C_1(y - (b + a)x) + C_2(y - (b - a)x).$$

Делаем проверку и записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти общее решение гиперболического уравнения

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = 0. \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Приводим уравнение (5) к каноническому виду. Получаем

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad (6)$$

где $\xi = y - 5x$, $\eta = y + x$.

2. Интегрируя уравнение (6) по η , получаем

$$u_{\xi} = C_0(\xi). \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) по ξ , получаем

$$u(\xi, \eta) = \int C_0(\xi) d\xi + C_2(\eta) \equiv C_1(\xi) + C_2(\eta). \quad (8)$$

3. Подставляя в (8) $\xi = y - 5x$ и $\eta = y + x$, получаем общее решение уравнения (5)

$$u(x, y) = C_1(y - 5x) + C_2(y + x).$$

Делаем проверку, подставляя $u(x, y)$ в уравнение (5).

Ответ. Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u(x, y) = C_1(y - 5x) + C_2(y + x).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти общее решение гиперболического уравнения.

$$1. u_{xx} + 2u_{xy} - 5u_{yy} = 0.$$

$$2. u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0.$$

$$3. u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

$$4. u_{xx} - 4u_{xy} - 12u_{yy} = 0.$$

$$5. u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0.$$

$$6. u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} = 0.$$

$$7. u_{xx} + 4u_{xy} - 21u_{yy} = 0.$$

$$8. u_{xx} - 4u_{xy} - 32u_{yy} = 0.$$

$$9. u_{xx} - 2u_{xy} - 24u_{yy} = 0.$$

$$10. u_{xx} + 2u_{xy} - 8u_{yy} = 0.$$

Ответы.

$$1. u = C_1(y - 5x) + C_2(y + 3x).$$

$$2. u = C_1(y - x) + C_2(y + 3x).$$

$$3. u = C_1(y - 3x) + C_2(y - x).$$

$$4. u = C_1(y - 2x) + C_2(y + 6x).$$

$$5. u = C_1(y - 5x) + C_2(y - x).$$

$$6. u = C_1(y + 2x) + C_2(y + 4x).$$

$$7. u = C_1(y - 7x) + C_2(y + 3x).$$

$$8. u = C_1(y - 4x) + C_2(y + 8x).$$

$$9. u = C_1(y - 4x) + C_2(y + 6x).$$

$$10. u = C_1(y - 4x) + C_2(y + 2x).$$

5.3. Общее решение параболического уравнения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти общее решение параболического уравнения

$$u_{xx} + 2bu_{xy} + b^2u_{yy} + au_x - abu_y = 0. \quad (1)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Приводим уравнение (1) к каноническому виду. Получаем

$$b^2 u_{\eta\eta} + abu_{\eta} = 0, \quad (2)$$

где $\xi = y - bx$, $\eta = y$ (задача 5.1).

2. Чтобы найти общее решение уравнения (2), составляем соответствующее характеристическое уравнение $b^2 k^2 + abk = 0$ и находим его корни $k_1 = 0$ и $k_2 = -a/b$.

Следовательно, общее решение уравнения (2) можно записать в виде

$$u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-a\eta/b}, \quad (3)$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

3. Подставляя в (3) $\xi = y - bx$ и $\eta = y$, получаем общее решение уравнения (1):

$$u(x, y) = C_1(y - bx) + C_2(y - bx)e^{-ay/b}.$$

Делаем проверку и записываем ответ.

ПРИМЕР. Найти общее решение параболического уравнения

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y = 0. \quad (4)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Приводим уравнение (4) к каноническому виду. Получаем

$$u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0, \quad (5)$$

где $\xi = y - x$, $\eta = y$.

2. Чтобы найти общее решение уравнения (5), составляем соответствующее характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$ и находим его корни $k_1 = 0$ и $k_2 = -1$.

Следовательно, общее решение уравнения (5) можно записать в виде

$$u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\xi)e^{-\eta}, \quad (6)$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

3. Подставляя в (6) $\xi = y - x$ и $\eta = y$, получаем общее решение уравнения (4):

$$u(x, y) = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-y}.$$

Делаем проверку, подставляя $u(x, y)$ в уравнение (4).

Ответ. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$u(x, y) = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-y}.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти общее решение параболического уравнения.

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$.
2. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$.
3. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_x - 6u_y = 0$.
4. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_x - 6u_y = 0$.
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - u_x + 2u_y = 0$.
6. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = 0$.
7. $u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x + 4u_y = 0$.
8. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x - 5u_y = 0$.
9. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 3u_y = 0$.
10. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x - 4u_y = 0$.

Ответы.

1. $u = C_1(y - 2x) + C_2(y - 2x)e^{-y/2}$.
2. $u = C_1(y - 2x) + C_2(y - 2x)e^{-y^2}$.
3. $u = C_1(y - 3x) + C_2(y - 3x)e^{-2y/3}$.
4. $u = C_1(y + 3x) + C_2(y + 3x)e^{2y/3}$.
5. $u = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^y$.
6. $u = C_1(y - 4x) + C_2(y - 4x)e^{-3y/4}$.
7. $u = C_1(y + 4x) + C_2(y + 4x)e^{-y/4}$.
8. $u = C_1(y - x) + C_2(y - x)e^{-5y}$.
9. $u = C_1(y + x) + C_2(y + x)e^{3y}$.
10. $u = C_1(y + 2x) + C_2(y + 2x)e^{-y}$.

5.4. Общее решение эллиптического уравнения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти общее решение эллиптического уравнения

$$u_{xx} + 2bu_{xy} + (b^2 + a^2)u_{yy} = 0. \quad (1)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ

1. Приводим уравнение (1) к каноническому виду. Получаем

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \quad (2)$$

где $\xi = y - bx$, $\eta = ax$ (задача 5.1).

2. Уравнение (2) означает, что $u(\xi, \eta)$ является вещественной (или мнимой) частью аналитической функции $f(\xi + \eta i)$. Поэтому

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(y - bx + axi).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение эллиптического уравнения

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0. \quad (3)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Приводим уравнение (3) к каноническому виду. Получаем

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0, \quad (4)$$

где $\xi = y - 2x$, $\eta = x$.

2. Уравнение (4) означает, что $u(\xi, \eta)$ является вещественной (или мнимой) частью аналитической функции $f(\xi + \eta i)$. Поэтому

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(y - 2x + xi).$$

Ответ. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(y - 2x + xi),$$

где $f(z)$ — произвольная аналитическая функция.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Найти общее решение эллиптического уравнения.*

- | | |
|--|---|
| 1. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} = 0$. | 2. $u_{xx} - 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0$. |
| 3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0$. | 4. $u_{xx} - 4u_{xy} + 8u_{yy} = 0$. |
| 5. $u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0$. | 6. $u_{xx} - 6u_{xy} + 18u_{yy} = 0$. |
| 7. $u_{xx} + 4u_{xy} + 20u_{yy} = 0$. | 8. $u_{xx} - 4u_{xy} + 40u_{yy} = 0$. |
| 9. $u_{xx} - 2u_{xy} + 26u_{yy} = 0$. | 10. $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} = 0$. |

Ответы.

- | | |
|--|--|
| 1. $u = \operatorname{Re} f(y - x + 2xi)$. | 2. $u = \operatorname{Re} f(y + x + \sqrt{2}xi)$. |
| 3. $u = \operatorname{Re} f(y - 2x + xi)$. | 4. $u = \operatorname{Re} f(y + 2x + 2xi)$. |
| 5. $u = \operatorname{Re} f(y - 3x + 2xi)$. | 6. $u = \operatorname{Re} f(y + 3x + 3xi)$. |
| 7. $u = \operatorname{Re} f(y - 2x + 4xi)$. | 8. $u = \operatorname{Re} f(y + 2x + 6xi)$. |
| 9. $u = \operatorname{Re} f(y + x + 5xi)$. | 10. $u = \operatorname{Re} f(y - x + 3xi)$. |

5.5. Уравнение Лапласа в круге

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:*

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (1)$$

$$u|_{r=r_0} = a \cos^3 \varphi + b \sin^3 \varphi + p \cos \varphi + q \sin \varphi + c. \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Уравнение Лапласа (1) в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3)$$

1. Находим вспомогательные решения v уравнения (3) в виде

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодична с периодом 2π .

Для этого подставляем функцию $v(r, \varphi)$ в уравнение (3) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = - \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

- а) $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$;
 б) $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$, $|R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \tilde{A}e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + \tilde{B}e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda \geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda = n^2$ ($n=0, 1, \dots$).

Получаем:

$$\Phi_0(\varphi) = \tilde{A}_0 \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 = 0,$$

$$\Phi_n(\varphi) = \tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \quad \text{при } \lambda = \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. Решаем задачу (б) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ и при $\lambda = \lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$).

При $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеем

$$r^2 R'' + rR' = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r.$$

Поскольку $|R_0(0)| < \infty$, полагаем $D_0 = 0$.

При $\lambda = \lambda_n = n^2$ имеем

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, полагаем $D_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (3) имеют вид

$$v_0(r, \varphi) = C_0 \tilde{A}_0 = A_0,$$

$$v_n(r, \varphi) = C_n r^n (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$, $B_n = C_n \tilde{B}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (1)–(2) ищем в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (4)$$

Эта функция является решением уравнения (1) при любых A_n и B_n , при которых ряд (4) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(r, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию (2).

Представим условие (2) в виде

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi) &= a \cos^3 \varphi + b \sin^3 \varphi + p \cos \varphi + q \sin \varphi + c = \\ &= c + \frac{3a+p}{4} \cos \varphi + \frac{3b+q}{4} \sin \varphi + \frac{a}{4} \cos 3\varphi - \frac{a}{4} \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \\ &= c + \frac{3a+p}{4} \cos \varphi + \frac{a}{4} \cos 3\varphi + \frac{3b+q}{4} \sin \varphi - \frac{a}{4} \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_0 = c, \quad A_1 = \frac{1}{r_0} \left(\frac{3a}{4} + p \right), \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{a}{4r_0^3}, \quad A_n = 0 \quad \text{при } n \geq 4,$$

$$B_1 = \frac{1}{r_0} \left(\frac{3b}{4} + q \right), \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{b}{4r_0^3}, \quad B_n = 0 \quad \text{при } n \geq 4.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4), получаем $u(r, \varphi) =$

$$= c + \frac{r}{r_0} \left[\left(\frac{3a}{4} + p \right) \cos \varphi + \left(\frac{3b}{4} + q \right) \sin \varphi \right] + \frac{r^3}{r_0^3} \left(\frac{a}{4} \cos 3\varphi - \frac{b}{4} \sin 3\varphi \right).$$

Замечания.

1. Задача Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (5)$$

$$u|_{r=r_0} = f(\varphi) \quad (6)$$

при любой непрерывной функции $f(\varphi)$ с периодом 2π решается аналогично, но в п. 6 плана решения коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

2. Подставив эти выражения для A_0 , A_n и B_n в (4), изменяем порядок суммирования и интегрирования. Вычисляя сумму ряда, получаем формулу Пуассона для для решения задачи (5), (6):

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\varphi - \varphi') + r^2} d\varphi'.$$

3. Смысл формулы (4) можно пояснить следующим образом.

При каждом фиксированном r функцию $u(r, \varphi)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi.$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ зависят от r . Поэтому

$$u(r, \varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi. \quad (7)$$

Подставляя эту функцию в уравнение (3), убеждаемся, что уравнение (3) обращается в тождество, только если $a_n(r)$ и $b_n(r)$ являются решениями задачи (б) при $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Следовательно, $a_0(r) = A_0$, $a_n(r) = A_n r^n$ и $b_n(r) = B_n r^n$. При таких коэффициентах формула (7) совпадает с (4).

4. Общее решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leq r < r_0$ имеет вид $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, где $z = x + iy$ и $f(z)$ — произвольная функция, аналитичная в круге $|z| < r_0$ (см. задачу 5.4). Функцию $f(z)$ можно представить степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

сходящимся в круге $|z| < r_0$. Положим $z = r e^{i\varphi}$. Тогда

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{i\varphi n} = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} [c_n r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)].$$

Последний ряд совпадает с (4), где $A_0 = \operatorname{Re} c_0$, $A_n = \operatorname{Re} c_n$ и $B_n = -\operatorname{Im} c_0$.

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (8)$$

$$u|_{r=1} = \sin^3 \varphi. \quad (9)$$

РЕШЕНИЕ Уравнение Лапласа (1) в полярных координатах (r, φ) имеет вид (3).

1. Находим вспомогательные решения v уравнения (3) в виде

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодична с периодом 2π .

Для этого подставляем функцию $v(r, \varphi)$ в уравнение (3) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = - \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

- а) $\Phi'' + \lambda \Phi = 0$, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$;
- б) $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$, $|R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $\Phi'' + \lambda \Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \tilde{A} e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + \tilde{B} e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda \geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$).

Получаем:

$$\Phi_0(\varphi) = \tilde{A}_0 \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 = 0,$$

$$\Phi_n(\varphi) = \tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \quad \text{при } \lambda = \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. Решаем задачу (6) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ и при $\lambda = \lambda_n = n^2$.

При $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеем

$$r^2 R'' + r R' = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r.$$

Поскольку $|R_0(0)| < \infty$, полагаем $D_0 = 0$.

При $\lambda = \lambda_n = n^2$ имеем

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, полагаем $D_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (5) имеют вид

$$v_0(r, \varphi) = C_0 \tilde{A}_0 = A_0,$$

$$v_n(r, \varphi) = C_n r^n (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$, $B_n = C_n \tilde{B}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (8)–(9) ищем в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (10)$$

Эта функция является решением уравнения (8) при любых A_n и B_n , при которых ряд (10) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(r, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию (9).

Представим условие (9) в виде

$$u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

Имеем

$$u(1, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

Следовательно,

$$A_0 = 0, \quad A_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$B_1 = \frac{3}{4}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{1}{4}, \quad B_n = 0 \quad \text{при } n \geq 4.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (10), получаем

$$u(r, \varphi) = \frac{3r}{4} \sin \varphi - \frac{r^3}{4} \sin 3\varphi.$$

Ответ. $u(r, \varphi) = \frac{3r}{4} \sin \varphi - \frac{r^3}{4} \sin 3\varphi.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

1. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \sin \varphi.$
2. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = 4 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + \cos \varphi + 2.$
3. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad u|_{r=1} = \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi.$
4. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = -4 \cos^3 \varphi + \sin \varphi + 7.$
5. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = 12 \sin^3 \varphi + \cos \varphi - \sin \varphi.$
6. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad u|_{r=1} = 2 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi - 2 \cos \varphi + 4 \sin \varphi.$
7. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = 3 \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi.$
8. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 4, \quad u|_{r=4} = 4 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + 2 \cos \varphi - 3 \sin \varphi.$
9. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = \cos^3 \varphi + 3 \sin^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi.$
10. $\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = 9 \cos^3 \varphi - 4 \sin^3 \varphi - 2 \cos \varphi + 5 \sin \varphi.$

Ответы.

$$1. u(r, \varphi) = \frac{r}{2} \left(\frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right) + \left(\frac{r}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi \right).$$

$$2. u(r, \varphi) = 2 + \frac{r}{2} (4 \cos \varphi - 3 \sin \varphi) + \left(\frac{r}{2} \right)^3 (\cos 3\varphi + \sin 3\varphi).$$

$$3. u(r, \varphi) = r \left(\frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) + r^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi \right).$$

$$4. u(r, \varphi) = 7 + \frac{r}{2} (-3 \cos \varphi + \sin \varphi) + \left(\frac{r}{2} \right)^3 \cos 3\varphi.$$

$$5. u(r, \varphi) = \frac{r}{3} (3 \cos \varphi + 8 \sin \varphi) - \left(\frac{r}{3} \right)^3 3 \sin 3\varphi.$$

$$6. u(r, \varphi) = r \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + 7 \sin \varphi \right) + r^3 \left(\frac{1}{2} \cos 3\varphi - \sin 3\varphi \right).$$

$$7. u(r, \varphi) = \frac{r}{3} \left(\frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) + \left(\frac{r}{3} \right)^3 \left(\frac{3}{4} \cos 3\varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi \right).$$

$$8. u(r, \varphi) = \frac{r}{4} (5 \cos \varphi) + \left(\frac{r}{4}\right)^3 (\cos 3\varphi - \sin 3\varphi).$$

$$9. u(r, \varphi) = \frac{r}{2} \left(-2\frac{1}{4} \cos \varphi + 4\frac{1}{4} \sin \varphi\right) + \left(\frac{r}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \sin 3\varphi\right).$$

$$10. u(r, \varphi) = \frac{r}{3} \left(\frac{19}{4} \cos \varphi + 2 \sin \varphi\right) + \left(\frac{r}{3}\right)^3 \left(\frac{9}{3} \cos 3\varphi + \sin 3\varphi\right).$$

5.6. Уравнение Лапласа в цилиндре

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < z_0, \quad (1)$$

$$u|_{z=0} = r_0^2 - r^2, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (2)$$

$$u|_{z=z_0} = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (3)$$

$$u|_{r=r_0} = 0, \quad 0 < z < z_0, \quad (4)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Уравнение Лапласа (1) в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Так как граничные значения $u|_{r=r_0}$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (5) не зависят от φ , решение задачи Дирихле (1)–(4) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, z) \equiv u(r, z),$$

где функция $u(r, z)$ удовлетворяет уравнению (5) с $\partial^2 u / \partial \varphi^2 \equiv 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

1. Находим вспомогательные решения $v(r, z)$ уравнения (6) в виде

$$v(r, z) = R(r)Z(z),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $R(r_0) = 0$ и $Z(z_0) = 0$.

Для этого подставляем функцию $v(r, z) = R(r)Z(z)$ в уравнение (6) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = - \frac{\frac{d^2 Z}{dz^2}}{Z} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0.$

б) $Z'' - \lambda Z = 0, \quad Z(z_0) = 0.$

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$ имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0(\sqrt{\lambda}r) + \tilde{B}Y_0(\sqrt{\lambda}r),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $\tilde{B} = 0$.

Используя граничное условие $R(r_0) = 0$, получаем

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0} \right)^2, \quad R_n = \tilde{A}_n J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где μ_n — нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

3. Решаем задачу (б). При $\lambda_n = (\mu_n/r_0)^2$ имеем

$$Z'' - \left(\frac{\mu_n}{r_0} \right)^2 Z = 0.$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $Z(z_0) = 0$, есть

$$Z_n(z) = B_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{r_0} (z_0 - z).$$

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (6) имеют вид

$$v_n(r, z) = \tilde{A}_n B_n J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{r_0} (z_0 - z) = A_n J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{r_0} (z_0 - z),$$

где $A_n = \tilde{A}_n B_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение $u(r, z)$ задачи Дирихле (1)–(4) ищем в виде

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{r_0} (z_0 - z). \quad (7)$$

Эта функция является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (3), (4) при любых A_n , при которых ряд (7) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n , при которых $u(r, z)$ удовлетворяет граничному условию (2):

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n}{r_0} z_0 \right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) = r_0^2 - r^2.$$

Следовательно, по формулам Эйлера–Фурье имеем

$$A_n \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n}{r_0} z_0 \right) = \frac{2 \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) r dr}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} = \frac{4r_0^2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)},$$

$n = 1, 2, \dots$ (см. задачу 3.7).

Поэтому

$$A_n = \frac{4r_0^2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n}{r_0} z_0 \right)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (7), получаем

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4r_0^2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n}{r_0} z_0 \right)} J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{r_0} (z_0 - z).$$

Замечания.

1. Задача Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad 0 < z < z_0,$$

$$u|_{z=0} = f(r), \quad 0 \leq r < r_0,$$

$$u|_{z=z_0} = 0, \quad 0 \leq r < r_0,$$

$$u|_{r=r_0} = 0, \quad 0 < z < z_0,$$

при произвольной непрерывной функции $f(r)$, для которой $f(r_0) = 0$, решается аналогично.

2. Смысл формулы (7) можно пояснить следующим образом.

При каждом фиксированном z функцию $u(r, \varphi)$ можно разложить в ряд Фурье по системе функций $J_0(\mu_n r/r_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) (см. задачу 3.7):

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right).$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ зависят от z . Поэтому

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) J_0 \left(\mu_n \frac{r}{r_0} \right). \quad (8)$$

Подставляя эту функцию в уравнение (6), убеждаемся, что уравнение (6) обращается в тождество, только если $a_n(z)$ являются решениями задачи (6) при $\lambda = (\mu_n/r_0)^2$ ($n = 1, 2, \dots$). Следовательно, $a_n(z) = A_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{r_0}(z_0 - z)$. При таких коэффициентах формула (8) совпадает с (7).

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < z < 1, \quad (9)$$

$$u|_{z=0} = 1 - r^2, \quad 0 \leq r < 1, \quad (10)$$

$$u|_{z=1} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (11)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad 0 < z < 1. \quad (12)$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение Лапласа (9) в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет вид (5).

Так как граничные значения $u|_{r=1}$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (5) не зависят от φ , решение задачи Дирихле (5), (10)–(12) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, z) \equiv u(r, z),$$

где функция $u(r, z)$ удовлетворяет уравнению (6).

1. Находим вспомогательные решения $v(r, z)$ уравнения (6) в виде

$$v(r, z) = R(r)Z(z),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $R(1) = 0$ и $Z(1) = 0$.

Для этого подставляем функцию $v(r, z) = R(r)Z(z)$ в уравнение (6) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = - \frac{\frac{d^2 Z}{dz^2}}{Z} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0.$

б) $Z'' - \lambda Z = 0, \quad Z(1) = 0.$

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$ имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0(\sqrt{\lambda}r) + \tilde{B}Y_0(\sqrt{\lambda}r),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $\tilde{B} = 0$.

Используя граничное условие $R(r_0) = 0$, получаем

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad R_n = \tilde{A}_n J_0(\mu_n r), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где μ_n — нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

3. Решаем задачу (б). При $\lambda_n = \mu_n^2$ имеем

$$Z'' - \mu_n^2 Z = 0.$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $Z(1) = 0$, есть

$$Z_n = B_n \operatorname{sh} \mu_n(1 - z).$$

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (6) имеют вид

$$v_n(r, z) = \tilde{A}_n B_n J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n(1 - z) = A_n J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n(1 - z),$$

где $A_n = \tilde{A}_n B_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение $u(r, z)$ задачи Дирихле (9)–(12) ищем в виде

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n(1 - z). \quad (13)$$

Эта функция является решением уравнения (5) и удовлетворяет граничным условиям (11), (12) при любых A_n , при которых ряд (13) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n , при которых $u(r, z)$ удовлетворяет граничному условию (10):

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n = 1 - r^2.$$

Следовательно, по формулам Эйлера-Фурье имеем

$$A_n \operatorname{sh} \mu_n = \frac{2 \int_0^1 (1 - r^2) J_0(\mu_n r) r dr}{J_1^2(\mu_n)} = \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(см. задачу 3.7).

Поэтому

$$A_n = \frac{2J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} \mu_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (13), получаем

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} \mu_n} J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n (1 - z).$$

Ответ.
$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} \mu_n} J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n (1 - z).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в цилиндре.

1. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $0 < z < 1$, $u|_{z=0} = 4 - r^2$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 0$, $0 < z < 1$, $u|_{z=1} = 0$, $0 \leq r < 2$.
2. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 5$, $0 < z < 2$, $u|_{z=0} = 25 - r^2$, $0 \leq r < 5$,
 $u|_{r=5} = 0$, $0 < z < 2$, $u|_{z=2} = 0$, $0 \leq r < 5$.
3. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 5$, $0 < z < 5$, $u|_{z=0} = 25 - r^2$, $0 \leq r < 5$,
 $u|_{r=5} = 0$, $0 < z < 5$, $u|_{z=5} = 0$, $0 \leq r < 5$.
4. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$, $0 < z < 3$, $u|_{z=0} = 16 - r^2$, $0 \leq r < 4$,
 $u|_{r=4} = 0$, $0 < z < 3$, $u|_{z=3} = 0$, $0 \leq r < 4$.
5. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$, $0 < z < 4$, $u|_{z=0} = 9 - r^2$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = 0$, $0 < z < 4$, $u|_{z=4} = 0$, $0 \leq r < 3$.

6. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$, $0 < z < 3$, $u|_{z=0} = 1 - r^2$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 0$, $0 < z < 3$, $u|_{z=3} = 0$, $0 \leq r < 1$.
7. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $0 < z < 6$, $u|_{z=0} = 4 - r^2$, $0 \leq r < 2$,
 $u|_{r=2} = 0$, $0 < z < 6$, $u|_{z=6} = 0$, $0 \leq r < 2$.
8. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$, $0 < z < 9$, $u|_{z=0} = 16 - r^2$, $0 \leq r < 4$,
 $u|_{r=4} = 0$, $0 < z < 9$, $u|_{z=9} = 0$, $0 \leq r < 4$.
9. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$, $0 < z < 1$, $u|_{z=0} = 9 - r^2$, $0 \leq r < 3$,
 $u|_{r=3} = 0$, $0 < z < 1$, $u|_{z=1} = 0$, $0 \leq r < 3$.
10. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$, $0 < z < 8$, $u|_{z=0} = 1 - r^2$, $0 \leq r < 1$,
 $u|_{r=1} = 0$, $0 < z < 8$, $u|_{z=8} = 0$, $0 \leq r < 1$.

Ответы.

1. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh}(\mu_n/2)} J_0\left(\frac{\mu_n}{2}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{2}(1-z).$
2. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh}(2\mu_n/5)} J_0\left(\frac{\mu_n}{5}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{5}(2-z).$
3. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} \mu_n} J_0\left(\frac{\mu_n}{5}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{5}(5-z).$
4. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh}(3\mu_n/4)} J_0\left(\frac{\mu_n}{4}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{4}(3-z).$
5. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh}(4\mu_n/3)} J_0\left(\frac{\mu_n}{3}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{3}(4-z).$
6. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} 3\mu} J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n(3-z).$
7. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} 3\mu_n} J_0\left(\frac{\mu_n}{2}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{2}(6-z).$
8. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh}(9\mu_n/4)} J_0\left(\frac{\mu_n}{4}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{4}(9-z).$
9. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh}(\mu_n/3)} J_0\left(\frac{\mu_n}{3}r\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_n}{3}(1-z).$
10. $u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) \operatorname{sh} 8\mu_n} J_0(\mu_n r) \operatorname{sh} \mu_n(8-z).$

5.7. Уравнение Лапласа в шаре

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (1)$$

$$u|_{r=r_0} = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta. \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Уравнение Лапласа (1) в сферических координатах (r, φ, ϑ) имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (3)$$

Так как граничные значения $u|_{r=r_0}$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (3) не зависят от φ , решение задачи Дирихле (1)–(2) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, \vartheta) \equiv u(r, \vartheta),$$

где функция $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению (3) с $\partial^2 u / \partial \varphi^2 \equiv 0$:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (4)$$

1. Находим вспомогательные решения $v(r, \vartheta)$ уравнения (4) в виде

$$v(r, \vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$.

Для этого подставляем функцию $v(r, \vartheta)$ в уравнение (4) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta'}{\Theta} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Theta(\vartheta)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta' + \lambda \Theta = 0$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$;

б) $r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$, $|R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу (а).

Уравнение $\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta' + \lambda \Theta = 0$ заменой переменной $\cos \vartheta = z$ преобразуется в уравнение Лежандра

$$(1 - z^2)\Theta'' - 2z\Theta' + \nu(\nu + 1)\Theta = 0 \quad \nu(\nu + 1) = \lambda.$$

Его общее решение имеет вид

$$\Theta(z) = CP_\nu(z) + DQ_\nu(z),$$

где $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода нулевого порядка ($P_\nu(z) \equiv P_\nu^{(0)}(z)$ и $Q_\nu(z) \equiv Q_\nu^{(0)}(z)$). Оно ограничено на $[-1, 1]$ только при $\nu = n$ ($n = 0, 1, \dots$), т.е. при $\lambda = n(n+1)$ и $D = 0$.

3. Решаем задачу (б). При $\lambda = n(n+1)$ имеем

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = \tilde{A}_n r^n + \tilde{B}_n r^{-n-1}.$$

Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, полагаем $\tilde{B}_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (4) имеют вид

$$v_n(r, \vartheta) = C_n \tilde{A}_n r^n P_n(\cos \vartheta) = A_n r^n P_n(\cos \vartheta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (1)–(2) ищем в виде

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta). \quad (5)$$

Эта функция является решением уравнения (1) при любых A_n , при которых ряд (5) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n , при которых $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет граничному условию (2):

$$u(r_0, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r_0^n P_n(\cos \vartheta) = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta.$$

Разложим функцию $a + bx + cx^2$ в ряд по многочленам Лежандра:

$$a + bx + cx^2 = \left(a + \frac{2c}{3}\right) P_0(x) + bP_1(x) + \frac{2}{3}cP_2(x)$$

(см. задачу 3.7).

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r_0^n P_n(\cos \vartheta) = \left(a + \frac{2}{3}c\right) P_0(\cos \vartheta) + b P_1(\cos \vartheta) + \frac{2}{3}c P_2(\cos \vartheta).$$

Отсюда

$$A_0 = a + \frac{2}{3}c, \quad A_1 = \frac{b}{r_0}, \quad A_2 = \frac{2c}{3r_0^2}, \quad A_n = 0 \text{ при } n \geq 3.$$

Подставляя эти коэффициенты и выражения для $P_n(\cos \vartheta)$

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$$

в (5), получаем

$$u(r, \vartheta) = a + \frac{2}{3}c + b \frac{r}{r_0} \cos \vartheta + \frac{c}{3} \frac{r^2}{r_0^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

Замечания.

1. Задача Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (6)$$

$$u|_{r=r_0} = f(\varphi, \vartheta) \quad (8)$$

при произвольной непрерывной функции $f(\varphi, \vartheta)$, периодичной по φ с периодом 2π , решается аналогично, но вместо многочленов Лежандра используются сферические гармоники (шаровые функции Лапласа):

$$Y_{mn}(\varphi, \vartheta) = P_n^{(|m|)}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь $P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$ — присоединенная функция Лежандра порядка m .

Решение задачи (7)–(8) ищем в виде ряда:

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} r^n Y_{mn}(\varphi, \vartheta), \quad (9)$$

где коэффициенты C_{mn} определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$C_{mn} = \frac{1}{r_0^2} \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{2\pi(n+|m|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\varphi, \vartheta) Y_{mn}(\varphi, \vartheta)^* \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

2. Подставив эти выражения для C_{mn} в (9), изменяем порядок суммирования и интегрирования. Вычисляя сумму ряда, получаем формулу Пуассона для решения задачи (7)–(8):

$$u(r, \varphi, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\varphi', \vartheta') \frac{r_0^2 - r^2}{(r_0^2 - 2r_0 r \cos \gamma + r^2)^{3/2}} \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi',$$

где $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$.

3. Смысл формулы (6) можно пояснить следующим образом.

При каждом фиксированном r функцию $u(r, \vartheta)$ можно разложить в ряд Фурье по системе функций $P_n(\cos \vartheta)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (см. задачу 3.7):

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \vartheta).$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ зависят от r . Поэтому

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) P_n(\cos \vartheta). \quad (10)$$

Подставляя эту функцию в уравнение (4), убеждаемся, что уравнение (4) обращается в тождество, только если $a_n(r)$ являются решениями задачи (6) при $\lambda = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Следовательно, $a_n(r) = A_n r^n$. При таких коэффициентах формула (10) совпадает с (6).

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (11)$$

$$u|_{r=1} = 3 \cos^2 \vartheta. \quad (12)$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение Лапласа в сферических координатах (r, φ, ϑ) имеет вид (3).

Так как граничные значения $u|_{r=r_0}$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (3) не зависят от φ , решение задачи Дирихле (11)–(12) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, \vartheta) \equiv u(r, \vartheta),$$

где функция $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению (4).

1. Находим вспомогательные решения $v(r, \vartheta)$ уравнения (4) в виде

$$v(r, \vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$.

Для этой цели подставляем функцию $v(r, \vartheta)$ в уравнение (4) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r^2 R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta'}{\Theta} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Theta(\vartheta)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta' + \lambda \Theta = 0$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$;

б) $r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$, $|R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу (а). Получаем

$$\lambda = n(n+1), \quad \Theta_n(\vartheta) = C_n P_n(\cos \vartheta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра.

3. Решаем задачу (б). При $\lambda = n(n+1)$ имеем

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = \tilde{A}_n r^n + \tilde{B}_n r^{-n-1}.$$

Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, полагаем $\tilde{B}_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (4) имеют вид

$$v_n(r, \vartheta) = C_n \tilde{A}_n r^n P_n(\cos \vartheta) = A_n r^n P_n(\cos \vartheta),$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (11)–(12) ищем в виде

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \vartheta). \quad (13)$$

Эта функция является решением уравнения (11) при любых A_n , при которых ряд (13) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n , при которых $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет граничному условию (12):

$$u(1, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) = 3 \cos^2 \vartheta.$$

Поскольку $3 \cos^2 \vartheta = P_0(\cos \vartheta) + 2P_2(\cos \vartheta)$ (см. задачу 3.7), имеем

$$u(1, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \vartheta) = P_0(\cos \vartheta) + 2P_2(\cos \vartheta).$$

Следовательно, $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = 2$, $A_n = 0$ при $n \geq 3$.

Подставляя эти коэффициенты и выражения для $P_n(\cos \vartheta)$

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2},$$

в (13), получаем $u(r, \vartheta) = 1 + r^2(3 \cos^2 \vartheta - 1)$.

Ответ. $u(r, \vartheta) = 1 + r^2(3 \cos^2 \vartheta - 1)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.

1. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 3 + 2 \cos \vartheta + 6 \cos^2 \vartheta$.
2. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 6 - 3 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta$.
3. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = -3 + 5 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta$.
4. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$, $u|_{r=4} = 12 \cos \vartheta + 6 \cos^2 \vartheta$.
5. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 5$, $u|_{r=5} = -9 + 9 \cos^2 \vartheta$.
6. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 4$, $u|_{r=4} = -2 + 8 \cos \vartheta + 3 \cos^2 \vartheta$.
7. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 3 + 12 \cos \vartheta - 9 \cos^2 \vartheta$.
8. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = -6 \cos \vartheta + 9 \cos^2 \vartheta$.
9. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 5$, $u|_{r=5} = 6 + 5 \cos \vartheta - 6 \cos^2 \vartheta$.
10. $\Delta u = 0$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = -3 - 2 \cos \vartheta + 3 \cos^2 \vartheta$.

Ответы.

1. $u(r, \vartheta) = 7 + r \cos \vartheta + (6 \cos^2 \vartheta - 2)r^2/4$.
2. $u(r, \vartheta) = 4 - r \cos \vartheta - (3 \cos^2 \vartheta - 1)r^2/9$.
3. $u(r, \vartheta) = -5 + 5r \cos \vartheta - (3 \cos^2 \vartheta - 1)r^2$.
4. $u(r, \vartheta) = 4 + 3r \cos \vartheta + (6 \cos^2 \vartheta - 2)r^2/16$.
5. $u(r, \vartheta) = -3 + (9 \cos^2 \vartheta - 3)r^2/25$.
6. $u(r, \vartheta) = 2r \cos \vartheta + (3 \cos^2 \vartheta - 1)r^2/16$.
7. $u(r, \vartheta) = -3 + 4r \cos \vartheta - (9 \cos^2 \vartheta - 3)r^2/9$.
8. $u(r, \vartheta) = 6 - 3r \cos \vartheta + (9 \cos^2 \vartheta - 3)r^2/4$.
9. $u(r, \vartheta) = 2 - r \cos \vartheta - (6 \cos^2 \vartheta - 2)r^2/25$.
10. $u(r, \vartheta) = -1 - 2r \cos \vartheta + (3 \cos^2 \vartheta - 1)r^2$.

5.8. Уравнение Гельмгольца в круге

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad J_n(kr_0) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$u|_{r=r_0} = a \cos^3 \varphi + b \sin^3 \varphi + p \cos \varphi + q \sin \varphi + c. \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Задача решается аналогично задаче Дирихле для уравнения Лапласа в круге (задача 5.5).

Уравнение Гельмгольца (1) в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (3)$$

1. Находим вспомогательные решения v уравнения (3) в виде

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодична с периодом 2π .

Для этого подставляем функцию $v(r, \varphi)$ в уравнение (3) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 R}{R} = - \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

- а) $\Phi'' + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi);$
- б) $r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - \lambda)R = 0, \quad |R(0)| < \infty.$

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $\Phi'' + \lambda \Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \tilde{A} e^{\sqrt{-\lambda} \varphi} + \tilde{B} e^{-\sqrt{-\lambda} \varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda \geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$).

Получаем:

$$\Phi_0(\varphi) = \tilde{A}_0 \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 = 0,$$

$$\Phi_n(\varphi) = \tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \quad \text{при } \lambda = \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. Решаем задачу (б) при $\lambda = \lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Имеем

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - n^2)R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = C_n J_n(kr) + D_n Y_n(kr) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где J_n и Y_n — функции Бесселя и Неймана.

Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, а $Y_n(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $D_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (3) имеют вид

$$\begin{aligned} v_n(r, \varphi) &= C_n J_n(kr) (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi) = \\ &= J_n(kr) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \end{aligned}$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$, $B_n = C_n \tilde{B}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (1)–(2) ищем в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (4)$$

Эта функция является решением уравнения (1) при любых A_n и B_n , при которых ряд (4) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(r, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию (2).

Представим условие (2) в виде

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi) &= a \cos^3 \varphi + b \sin^3 \varphi + p \cos \varphi + q \sin \varphi + c = \\ &= c + \frac{3a+p}{4} \cos \varphi + \frac{3b+q}{4} \sin \varphi + \frac{a}{4} \cos 3\varphi - \frac{a}{4} \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi) &= A_0 J_0(kr_0) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_0) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \\ &= c + \frac{3a+p}{4} \cos \varphi + \frac{a}{4} \cos 3\varphi + \frac{3b+q}{4} \sin \varphi - \frac{a}{4} \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_0 = \frac{c}{J_0(kr_0)}, \quad A_1 = \frac{1}{J_1(kr_0)} \left(\frac{3a}{4} + p \right), \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{a}{4J_3(kr_0)},$$

$$A_n = 0 \quad \text{при } n \geq 4,$$

$$B_1 = \frac{1}{J_1(kr_0)} \left(\frac{3b}{4} + q \right), \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{b}{4J_3(kr_0)},$$

$$B_n = 0 \quad \text{при } n \geq 4.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4), получаем

$$u(r, \varphi) = c \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} + \frac{J_1(kr)}{J_1(kr_0)} \left[\left(\frac{3a}{4} + p \right) \cos \varphi + \left(\frac{3b}{4} + q \right) \sin \varphi \right] + \\ + \frac{J_3(kr)}{J_3(kr_0)} \left(\frac{a}{4} \cos 3\varphi - \frac{b}{4} \sin 3\varphi \right).$$

Замечания.

1. Задача Дирихле

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad J_n(kr_0) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

$$u|_{r=r_0} = f(\varphi) \quad (6)$$

при любой непрерывной функции $f(\varphi)$ с периодом 2π решается аналогично, но в п. 6 плана решения коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам Эйлера–Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi J_0(kr_0)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi J_n(kr_0)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi J_n(kr_0)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

2. Смысл формулы (4) можно пояснить следующим образом.

При каждом фиксированном r функцию $u(r, \varphi)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi.$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ зависят от r . Поэтому

$$u(r, \varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi. \quad (7)$$

Подставляя эту функцию в уравнение (3), убеждаемся, что уравнение (3) обращается в тождество, только если $a_n(r)$ и $b_n(r)$ являются решениями задачи (б) при $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Следовательно, $a_n(r) = A_n J_n(kr)$ и $b_n(r) = B_n J_n(kr)$. При таких коэффициентах формула (7) совпадает с (4).

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (8)$$

$$u|_{r=1} = \sin^3 \varphi. \quad (9)$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение Гельмгольца (1) в полярных координатах (r, φ) имеет вид (3) с $k^2 = 4$.

1. Находим вспомогательные решения v уравнения (3) в виде

$$v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $\Phi(\varphi)$ периодична с периодом 2π .

Для этого подставляем функцию $v(r, \varphi)$ в уравнение (3) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + 4r^2 R}{R} = - \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$;

б) $r^2 R'' + rR' + (4r^2 - \lambda)R = 0$, $|R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \tilde{A}e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + \tilde{B}e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}.$$

Оно периодично при $\lambda \geq 0$ и имеет период 2π при $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, \dots$).

Получаем:

$$\Phi_0(\varphi) = \tilde{A}_0 \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 = 0,$$

$$\Phi_n(\varphi) = \tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \quad \text{при } \lambda = \lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. Решаем задачу (б) при $\lambda = \lambda_n = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Имеем

$$r^2 R'' + rR' + (4r^2 - n^2)R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = C_n J_n(2r) + D_n Y_n(2r) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где J_n и Y_n — функции Бесселя и Неймана.

Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, а $Y_n(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $D_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (5) имеют вид

$$\begin{aligned} v_n(r, \varphi) &= C_n J_n(2r) (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi) = \\ &= J_n(2r) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \end{aligned}$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$, $B_n = C_n \tilde{B}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (8)–(9) ищем в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(2r) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (10)$$

Эта функция является решением уравнения (8) при любых A_n и B_n , при которых ряд (10) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(r, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию (9).

Представим условие (9) в виде

$$u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

Имеем

$$u(1, \varphi) = A_0 J_0(2) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(2) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

Следовательно,

$$A_0 = 0, \quad A_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$B_1 = \frac{3}{4J_1(2)}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{1}{4J_3(2)}, \quad B_n = 0 \text{ при } n \geq 4.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (10), получаем

$$u(r, \varphi) = \frac{3}{4} \frac{J_1(2r)}{J_1(2)} \sin \varphi - \frac{1}{4} \frac{J_3(2r)}{J_3(2)} \sin 3\varphi.$$

Ответ.
$$u(r, \varphi) = \frac{3}{4} \frac{J_1(2r)}{J_1(2)} \sin \varphi - \frac{1}{4} \frac{J_3(2r)}{J_3(2)} \sin 3\varphi.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге.

1. $\Delta u + u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi + \sin \varphi.$
2. $\Delta u + 2u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = 4 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + \cos \varphi + 2.$
3. $\Delta u + 3u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad u|_{r=1} = \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi - \cos \varphi + \sin \varphi.$
4. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = -4 \cos^3 \varphi + \sin \varphi + 7.$
5. $\Delta u + 5u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = 12 \sin^3 \varphi + \cos \varphi - \sin \varphi.$
6. $\Delta u + 6u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad u|_{r=1} = 2 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi - 2 \cos \varphi + 4 \sin \varphi.$
7. $\Delta u + 7u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = 3 \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi.$
8. $\Delta u + 8u = 0, \quad 0 \leq r < 4, \quad u|_{r=4} = 4 \cos^3 \varphi + 4 \sin^3 \varphi + 2 \cos \varphi - 3 \sin \varphi.$
9. $\Delta u + 9u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad u|_{r=2} = \cos^3 \varphi + 3 \sin^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 \sin \varphi.$
10. $\Delta u + 10u = 0, \quad 0 \leq r < 3, \quad u|_{r=3} = 9 \cos^3 \varphi - 4 \sin^3 \varphi - 2 \cos \varphi + 5 \sin \varphi.$

Ответы.

$$1. u(r, \varphi) = \frac{J_1(r)}{J_1(2)} \left(\frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \right) + \frac{J_3(r)}{J_3(2)} \left(\frac{1}{2} \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi \right).$$

$$2. u(r, \varphi) = 2 \frac{J_0(\sqrt{2}r)}{J_0(2\sqrt{2})} + \frac{J_1(\sqrt{2}r)}{J_1(2\sqrt{2})} (4 \cos \varphi - 3 \sin \varphi) + \\ + \frac{J_3(\sqrt{2}r)}{J_3(2\sqrt{2})} (\cos 3\varphi + \sin 3\varphi).$$

$$3. u(r, \varphi) = \frac{J_1(\sqrt{3}r)}{J_1(\sqrt{3})} \left(\frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) + \\ + \frac{J_3(\sqrt{3}r)}{J_3(\sqrt{3})} \left(\frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi \right).$$

$$4. u(r, \varphi) = 7 \frac{J_0(2r)}{J_0(4)} + \frac{J_1(2r)}{J_1(4)} (-3 \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{J_3(2r)}{J_3(4)} \cos 3\varphi.$$

$$5. u(r, \varphi) = \frac{J_1(\sqrt{5}r)}{J_1(3\sqrt{5})} (3 \cos \varphi + 8 \sin \varphi) - \frac{J_3(\sqrt{5}r)}{J_3(3\sqrt{5})} 3 \sin 3\varphi.$$

$$6. u(r, \varphi) = \frac{J_1(\sqrt{6}r)}{J_1(\sqrt{6})} \left(-\frac{1}{2} \cos \varphi + 7 \sin \varphi \right) + \\ + \frac{J_3(\sqrt{6}r)}{J_3(\sqrt{6})} \left(\frac{1}{2} \cos 3\varphi - \sin 3\varphi \right).$$

$$7. u(r, \varphi) = \frac{J_1(\sqrt{7}r)}{J_1(3\sqrt{7})} \left(\frac{1}{4} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) + \\ + \frac{J_3(\sqrt{7}r)}{J_3(3\sqrt{7})} \left(\frac{3}{4} \cos 3\varphi + \frac{1}{2} \sin 3\varphi \right).$$

$$8. u(r, \varphi) = \frac{J_1(\sqrt{8}r)}{J_1(4\sqrt{8})} 5 \cos \varphi + \frac{J_3(\sqrt{8}r)}{J_3(4\sqrt{8})} (\cos 3\varphi - \sin 3\varphi).$$

$$9. u(r, \varphi) = \frac{J_1(3r)}{J_1(6)} \left(-2\frac{1}{4} \cos \varphi + 4\frac{1}{4} \sin \varphi \right) + \\ + \frac{J_3(3r)}{J_3(6)} \left(\frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \sin 3\varphi \right).$$

$$10. u(r, \varphi) = \frac{J_1(\sqrt{10}r)}{J_1(3\sqrt{10})} \left(\frac{19}{4} \cos \varphi + 2 \sin \varphi \right) + \\ + \frac{J_3(\sqrt{10}r)}{J_3(3\sqrt{10})} \left(\frac{9}{3} \cos 3\varphi + \sin 3\varphi \right).$$

5.9. Уравнение Гельмгольца в шаре

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad J_{n/2}(kr_0) \neq 0, \quad n = 1, 3, \dots, \quad (1)$$

$$u|_{r=r_0} = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta. \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Задача решается аналогично задаче Дирихле для уравнения Лапласа в шаре (задача 5.7).

Уравнение Гельмгольца (1) в сферических координатах (r, φ, ϑ) имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + k^2 u = 0. \quad (3)$$

Так как граничные значения $u|_{r=r_0}$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (3) не зависят от φ , решение задачи Дирихле (1)–(2) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, \vartheta) \equiv u(r, \vartheta),$$

где функция $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению (3) с $\partial^2 u / \partial \varphi^2 \equiv 0$:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + k^2 u = 0. \quad (4)$$

1. Находим вспомогательные решения $v(r, \vartheta)$ уравнения (4) в виде

$$v(r, \vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$.

Для этого подставляем функцию $v(r, \vartheta)$ в уравнение (4) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r^2 R'' + 2rR' + k^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta'}{\Theta} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Theta(\vartheta)$ являются решениями связанных задач:

$$\text{а) } \Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta' + \lambda \Theta = 0, \quad |\Theta(0)| < \infty, \quad |\Theta(\pi)| < \infty;$$

$$\text{б) } r^2 R'' + 2rR' + (k^2 r^2 - \lambda)R = 0, \quad |R(0)| < \infty.$$

2. Решаем задачу (а).

Уравнение $\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta' + \lambda \Theta = 0$ заменой переменной $\cos \vartheta = z$ преобразуется в уравнение Лежандра

$$(1 - z^2)\Theta'' - 2z\Theta' + \nu(\nu + 1)\Theta = 0 \quad \nu(\nu + 1) = \lambda.$$

Его общее решение имеет вид

$$\Theta(z) = CP_\nu(z) + DQ_\nu(z),$$

где $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода нулевого порядка ($P_\nu(z) \equiv P_\nu^{(0)}(z)$ и $Q_\nu(z) \equiv Q_\nu^{(0)}(z)$). Оно ограничено на $[-1, 1]$ только при $\nu = n$ ($n = 0, 1, \dots$), т.е. при $\lambda = n(n + 1)$ и $D = 0$.

3. Решаем задачу (б). При $\lambda = n(n + 1)$ имеем

$$r^2 R'' + 2rR' + [k^2 r^2 - n(n + 1)]R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = \tilde{A}_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} + \tilde{B}_n \frac{Y_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}},$$

где $J_{n+1/2}$ и $Y_{n+1/2}$ — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, а $Y_{n+1/2}(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $\tilde{B}_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (4) имеют вид

$$v_n(r, \vartheta) = C_n \tilde{A}_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \vartheta) = A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \vartheta)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$), где $A_n = C_n \tilde{A}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (1)–(2) ищем в виде

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \vartheta). \quad (5)$$

Эта функция является решением уравнения (1) при любых A_n , при которых ряд (5) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n , при которых $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет граничному условию (2)

$$u(r_0, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} P_n(\cos \vartheta) = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta.$$

Разложим функцию $a + bx + cx^2$ в ряд по многочленам Лежандра:

$$a + bx + cx^2 = \left(a + \frac{2c}{3}\right) P_0(x) + bP_1(x) + \frac{2}{3}cP_2(x)$$

(см. задачу 3.7).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(kr_0)}{\sqrt{r_0}} P_n(\cos \vartheta) &= \\ &= \left(a + \frac{2}{3}c\right) P_0(\cos \vartheta) + bP_1(\cos \vartheta) + \frac{2}{3}cP_2(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_0 = \left(a + \frac{2}{3}c\right) \frac{\sqrt{r_0}}{J_{1/2}(kr_0)}, \quad A_1 = b \frac{\sqrt{r_0}}{J_{3/2}(kr_0)}, \quad A_2 = \frac{2c}{3} \frac{\sqrt{r_0}}{J_{5/2}(kr_0)},$$

$A_n = 0$ при $n \geq 3$.

Подставляя эти коэффициенты и выражения для $P_n(\cos \vartheta)$

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$$

в (5), получаем

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta) &= \left(a + \frac{2}{3}c\right) \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{J_{1/2}(kr)}{J_{1/2}(kr_0)} + b \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{J_{3/2}(kr)}{J_{3/2}(kr_0)} \cos \vartheta + \\ &\quad + \frac{c}{3} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \frac{J_{5/2}(kr)}{J_{5/2}(kr_0)} (3 \cos^2 \vartheta - 1). \end{aligned}$$

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\Delta u + 2u = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (6)$$

$$u|_{r=1} = 3 \cos^2 \vartheta. \quad (7)$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение Гельмгольца в сферических координатах (r, φ, ϑ) имеет вид (3).

Так как граничные значения $u|_{r=1}$ функции u не зависят от φ и коэффициенты уравнения (3) не зависят от φ , решение задачи Дирихле (6)–(7) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, \vartheta) \equiv u(r, \vartheta),$$

где функция $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению (4).

1. Находим вспомогательные решения $v(r, \vartheta)$ уравнения (4) в виде

$$v(r, \vartheta) = R(r)\Theta(\vartheta),$$

причем $|R(0)| < \infty$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$.

Для этой цели подставляем функцию $v(r, \vartheta)$ в уравнение (4) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{r^2 R'' + 2rR' + 2r^2 R}{R} = -\frac{\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta'}{\Theta} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $\Theta(\vartheta)$ являются решениями связанных задач:

а) $\Theta'' + \operatorname{ctg} \vartheta \Theta' + \lambda \Theta = 0$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$;

б) $r^2 R'' + 2rR' + (2r^2 - \lambda)R = 0$, $|R(0)| < \infty$.

2. Решаем задачу (а). Получаем

$$\lambda = n(n+1), \quad \Theta_n(\vartheta) = C_n P_n(\cos \vartheta), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра.

3. Решаем задачу (б). При $\lambda = n(n+1)$ имеем

$$r^2 R'' + 2rR' + [2r^2 - n(n+1)]R = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$R_n(r) = \tilde{A}_n \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}} + \tilde{B}_n \frac{Y_{n+1/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}},$$

где $J_{n+1/2}$ и $Y_{n+1/2}$ — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R_n(0)| < \infty$, а $Y_{n+1/2}(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $\tilde{B}_n = 0$.

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (4) имеют вид

$$v_n(r, \vartheta) = C_n \tilde{A}_n \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \vartheta) = A_n \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \vartheta),$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи Дирихле (6)–(7) ищем в виде

$$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(\sqrt{2}r)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \vartheta). \quad (8)$$

Эта функция является решением уравнения (6) при любых A_n , при которых ряд (8) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n , при которых $u(r, \vartheta)$ удовлетворяет граничному условию (7):

$$u(1, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{n+1/2}(\sqrt{2}) P_n(\cos \vartheta) = 3 \cos^2 \vartheta.$$

Поскольку

$$3 \cos^2 \vartheta = P_0(\cos \vartheta) + 2P_2(\cos \vartheta)$$

(см. задачу 3.7), имеем

$$u(1, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_{n+1/2}(\sqrt{2}) P_n(\cos \vartheta) = P_0(\cos \vartheta) + 2P_2(\cos \vartheta).$$

Следовательно, $A_0 = 1/J_{1/2}(\sqrt{2})$, $A_1 = 0$, $A_2 = 2/J_{5/2}(\sqrt{2})$, $A_n = 0$ при $n \geq 3$.

Подставляя эти коэффициенты и выражения для $P_n(\cos \vartheta)$

$$P_0(\cos \vartheta) = 1, \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$$

в (8), получаем

$$u(r, \vartheta) = \frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(\sqrt{2})\sqrt{r}} + \frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(\sqrt{2})\sqrt{r}} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

Ответ.
$$u(r, \vartheta) = \frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(\sqrt{2})\sqrt{r}} + \frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(\sqrt{2})\sqrt{r}} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре.

1. $\Delta u + 2u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 3 + 2 \cos \vartheta + 6 \cos^2 \vartheta$.
2. $\Delta u + 2u = 0$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 6 - 3 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta$.
3. $\Delta u + 3u = 0$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = -3 + 5 \cos \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta$.
4. $\Delta u + 4u = 0$, $0 \leq r < 4$, $u|_{r=4} = 12 \cos \vartheta + 6 \cos^2 \vartheta$.
5. $\Delta u + 5u = 0$, $0 \leq r < 5$, $u|_{r=5} = -9 + 9 \cos^2 \vartheta$.
6. $\Delta u + 6u = 0$, $0 \leq r < 4$, $u|_{r=4} = -2 + 8 \cos \vartheta + 3 \cos^2 \vartheta$.
7. $\Delta u + 7u = 0$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 3 + 12 \cos \vartheta - 9 \cos^2 \vartheta$.
8. $\Delta u + 8u = 0$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = -6 \cos \vartheta + 9 \cos^2 \vartheta$.
9. $\Delta u + 9u = 0$, $0 \leq r < 5$, $u|_{r=5} = 6 + 5 \cos \vartheta - 6 \cos^2 \vartheta$.
10. $\Delta u + 9u = 0$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = -3 - 2 \cos \vartheta + 3 \cos^2 \vartheta$.

Ответы.

1. $u(r, \vartheta) = 7\sqrt{\frac{2}{r}} \frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(2\sqrt{2})} + 2\sqrt{\frac{2}{r}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{2}r)}{J_{3/2}(2\sqrt{2})} \cos \vartheta +$
 $+ \sqrt{\frac{2}{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(2\sqrt{2})} (6 \cos^2 \vartheta - 2).$
2. $u(r, \vartheta) = 4\sqrt{\frac{3}{r}} \frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(3\sqrt{2})} - 3\sqrt{\frac{3}{r}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{2}r)}{J_{3/2}(3\sqrt{2})} \cos \vartheta -$
 $- \sqrt{\frac{3}{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(3\sqrt{2})} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$
3. $u(r, \vartheta) = -5\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{J_{1/2}(\sqrt{3}r)}{J_{1/2}(\sqrt{3})} + 5\sqrt{\frac{1}{r}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{3}r)}{J_{3/2}(\sqrt{3})} \cos \vartheta -$
 $- \sqrt{\frac{1}{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{3}r)}{J_{5/2}(\sqrt{3})} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$
4. $u(r, \vartheta) = \frac{8}{\sqrt{r}} \frac{J_{1/2}(2r)}{J_{1/2}(8)} + \frac{24}{\sqrt{r}} \frac{J_{3/2}(2r)}{J_{3/2}(8)} \cos \vartheta +$
 $+ \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{J_{5/2}(2r)}{J_{5/2}(8)} (6 \cos^2 \vartheta - 2).$
5. $u(r, \vartheta) = -3\sqrt{\frac{5}{r}} \frac{J_{1/2}(\sqrt{5}r)}{J_{1/2}(5\sqrt{5})} + \sqrt{\frac{5}{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{5}r)}{J_{5/2}(5\sqrt{5})} (9 \cos^2 \vartheta - 3).$
6. $u(r, \vartheta) = \frac{16}{\sqrt{r}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{6}r)}{J_{1/2}(4\sqrt{6})} \cos \vartheta + \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{6}r)}{J_{5/2}(4\sqrt{6})} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$

$$7. \quad u(r, \vartheta) = -3\sqrt{\frac{3}{r}} \frac{J_{1/2}(\sqrt{7}r)}{J_{1/2}(3\sqrt{7})} + 12\sqrt{\frac{3}{r}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{7}r)}{J_{3/2}(3\sqrt{7})} \cos \vartheta - \\ - \sqrt{\frac{3}{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{7}r)}{J_{5/2}(3\sqrt{7})} (9 \cos^2 \vartheta - 3).$$

$$8. \quad u(r, \vartheta) = 6\sqrt{\frac{2}{r}} \frac{J_{1/2}(\sqrt{8}r)}{J_{1/2}(2\sqrt{8})} - 6\sqrt{\frac{2}{r}} \frac{J_{3/2}(\sqrt{8}r)}{J_{3/2}(2\sqrt{8})} \cos \vartheta + \\ + \sqrt{\frac{2}{r}} \frac{J_{5/2}(\sqrt{8}r)}{J_{5/2}(2\sqrt{8})} (9 \cos^2 \vartheta - 3).$$

$$9. \quad u(r, \vartheta) = 2\sqrt{\frac{5}{r}} \frac{J_{1/2}(3r)}{J_{1/2}(15)} - 5\sqrt{\frac{5}{r}} \frac{J_{3/2}(3r)}{J_{3/2}(15)} \cos \vartheta - \\ - \sqrt{\frac{5}{r}} \frac{J_{5/2}(3r)}{J_{5/2}(15)} (6 \cos^2 \vartheta - 2).$$

$$10. \quad u(r, \vartheta) = -\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{J_{1/2}(3r)}{J_{1/2}(3)} - 2\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{J_{3/2}(3r)}{J_{3/2}(3)} \cos \vartheta + \\ + \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{J_{5/2}(3r)}{J_{5/2}(3)} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

5.10. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти все λ и u такие, что

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{в области } \Omega, \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе области } \Omega. \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Выбираем систему координат, такую, что граница области Ω разделяется на участки, на каждом из которых одна из координат не меняется.

2. Переходим к выбранной системе координат, делая замену переменных в уравнении (1) и граничном условии (2).

3. Функции u ищем в виде произведения вспомогательных функций, каждая из которых зависит только от одной координаты.

4. Используя метод разделения переменных, получаем из (1)–(2) краевые задачи (задачи Штурма–Лиувилля) для обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющие вспомогательные функции.

5. Решаем краевые задачи для вспомогательных функций и записываем ответ.

Замечание. Функции u определены с точностью до числового множителя и могут содержать произвольные постоянные.

ПРИМЕР. Найти все λ и u такие, что

$$\Delta u = \lambda u \quad \text{в области } \Omega = \{r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2\}, \quad (3)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе области } \Omega, \quad (4)$$

где $\alpha = 1, \beta = 0$ при $x^2 + y^2 = r_1^2$ и $\alpha = 0, \beta = 1$ при $x^2 + y^2 = r_2^2$.

РЕШЕНИЕ.

1. Выбираем систему координат, такую, что граница области Ω разделяется на участки, на каждом из которых одна из координат не меняется.

В данном случае Ω — кольцо с центром в начале координат. Граница Ω состоит из двух участков $x^2 + y^2 = r_1^2$ и $x^2 + y^2 = r_2^2$. На каждом из них не изменяется координата r полярной системы координат. Поэтому используем полярные координаты.

2. Переходим к полярной системе координат, делая замену переменных в уравнении (3) и граничном условии (4). Получаем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \lambda u, \quad r_1 < r < r_2, \quad (5)$$

$$u|_{r=r_1} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_2} = 0, \quad (7)$$

3. Функции $u(r, \varphi)$ ищем в виде произведения вспомогательных функций, каждая из которых зависит только от одной координаты:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (8)$$

4. Вспомогательные функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ определяются краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются из (5)–(7) методом разделения переменных.

Подставляя (8) в (5)–(7) и разделяя переменные, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} &= \lambda, \\ R(r_1) &= 0, \quad R'(r_2) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем две связанные краевые задачи:

(а) $\Phi'' - \nu\Phi = 0$, $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$;

(б) $r(rR')' + (\nu - \lambda r^2)R = 0$, $R(r_1) = 0$, $R'(r_2) = 0$.

5. Решаем краевые задачи (а) и (б).

Общее решение дифференциального уравнения $\Phi'' - \nu\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = C_1 e^{\sqrt{\nu}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{\nu}\varphi}.$$

Условие $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ выполняется только если $\nu = -n^2$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Поэтому задача (а) имеет бесконечное множество решений

$$\Phi_n(\varphi) = C_1 e^{in\varphi} + C_2 e^{-in\varphi} = \tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi,$$

$$\nu_n = -n^2,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а $\tilde{A}_n$ и $\tilde{B}_n$ — произвольные постоянные (при $n = -1, -2, \dots$ получаются решения, отличающиеся от Φ_n только знаком $\tilde{B}_n$).

Задача (б) при $\lambda = 0$ имеет только решение $R(r) \equiv 0$.

При $\lambda \neq 0$ общее решение дифференциального уравнения задачи (б) $r(rR')' + (\nu - \lambda r^2)R = 0$ с $\nu = -n^2$ имеет вид

$$R(r) = C J_n(\sqrt{-\lambda} r) + D Y_n(\sqrt{-\lambda} r),$$

где J_n и Y_n — функции Бесселя и Неймана, а C и D — произвольные постоянные.

Из граничных условий $R(r_1) = 0$ и $R'(r_2) = 0$ получаем систему уравнений для определения C и D :

$$\begin{cases} C J_n(\sqrt{-\lambda} r_1) + D Y_n(\sqrt{-\lambda} r_1) = 0, \\ C \sqrt{-\lambda} J'_n(\sqrt{-\lambda} r_2) + D \sqrt{-\lambda} Y'_n(\sqrt{-\lambda} r_2) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Эта система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} J_n(\sqrt{-\lambda} r_1) & Y_n(\sqrt{-\lambda} r_1) \\ \sqrt{-\lambda} J'_n(\sqrt{-\lambda} r_2) & \sqrt{-\lambda} Y'_n(\sqrt{-\lambda} r_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому λ определяется уравнением

$$J_n(\sqrt{-\lambda} r_1) Y'_n(\sqrt{-\lambda} r_2) - J'_n(\sqrt{-\lambda} r_2) Y_n(\sqrt{-\lambda} r_1) = 0.$$

Оно имеет бесконечное множество решений

$$\lambda = \mu_{kn}^2 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ответ. Собственные функции и собственные значения оператора Лапласа в кольце $r_1 < r < r_2$ с граничными условиями (6)–(7) имеют вид

$$u_{kn}(r, \varphi) = (C_{kn}J_n(\mu_{kn}r) + D_{kn}Y_n(\mu_{kn}r)) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$\lambda_{kn} = -\mu_{kn}^2,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а C_{kn} , D_{kn} — нетривиальное решение системы (9), A_n и B_n — произвольные постоянные, не равные нулю одновременно.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти собственные функции и собственные значения оператора Лапласа.

1. $\Delta u = \lambda u$ при $0 < x < 1$ и $0 < y < 2$,
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=2} = 0$.
2. $\Delta u = \lambda u$ при $0 < x < 1$ и $0 < y < 2$,
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0$.
3. $\Delta u = \lambda u$ при $0 < x < 1$, $0 < y < 2$ и $0 < z < 3$,
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = u_z|_{z=0} = u|_{z=3} = 0$.
4. $\Delta u = \lambda u$ при $0 \leq x^2 + y^2 < 1$,
 $u|_{x^2+y^2=1} = 0$.
5. $\Delta u = \lambda u$ при $0 \leq x^2 + y^2 < 1$,
 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x^2+y^2=1} = 0$.
6. $\Delta u = \lambda u$ при $1 < x^2 + y^2 < 4$,
 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x^2+y^2=1} = 0$, $u|_{x^2+y^2=4} = 0$.
7. $\Delta u = \lambda u$ при $0 \leq x^2 + y^2 < 1$ и $0 < z < 2$,
 $u|_{x^2+y^2=1} = u|_{z=0} = u|_{z=2} = 0$.
8. $\Delta u = \lambda u$ при $0 \leq x^2 + y^2 < 1$ и $0 < z < 2$,
 $u|_{x^2+y^2=1} = u_z|_{z=0} = u|_{z=2} = 0$.
9. $\Delta u = \lambda u$ при $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 1$,
 $u|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$.
10. $\Delta u = \lambda u$ при $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 1$,
 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = 0$.

Ответы.

1. $u_{kn}(x, y) = \sin \pi kx \sin \pi ny/2$,
 $\lambda_{kn} = -\pi^2(k^2 + n^2/4)$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$
2. $u_{kn}(x, y) = \sin \pi kx \cos \pi ny/2$,
 $\lambda_{kn} = -\pi^2(k^2 + n^2/4)$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$
3. $u_{kmn}(x, y, z) = \sin \pi kx \cos \pi my/2 \cos(2n+1)\pi z/6$,
 $\lambda_{kmn} = -\pi^2[k^2 + m^2/4 + (2n+1)^2/36]$, $k = 1, 2, \dots$,
 $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$
4. $u_{kn}(r, \varphi) = J_n(\mu_{kn}r)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$,
 $\lambda_{kn} = -\mu_{kn}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $J_n(\mu_{kn}) = 0$.
5. $u_{kn}(r, \varphi) = J_n(\mu_{kn}r)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$,
 $\lambda_{kn} = -\mu_{kn}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $J'_n(\mu_{kn}) = 0$.
6. $u_{kn}(r, \varphi) = (C_{kn}J_n(\mu_{kn}r) + D_{kn}Y_n(\mu_{kn}r))(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$,
 $\lambda_{kn} = -\mu_{kn}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
 $J'_n(\mu_{kn})Y_n(2\mu_{kn}) - J_n(2\mu_{kn})Y'_n(\mu_{kn}) = 0$.
7. $u_{knm}(r, \varphi, z) = J_n(\mu_{kn}r)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \sin \pi mz$,
 $\lambda_{knm} = -\mu_{kn}^2 - m^2\pi^2$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$,
 $J_n(\mu_{kn}) = 0$.
8. $u_{knm}(r, \varphi, z) = J_n(\mu_{kn}r)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cos(2m+1)\pi z/4$,
 $\lambda_{knm} = -\mu_{kn}^2 - (2m+1)^2\pi^2/16$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
 $m = 0, 1, 2, \dots$, $J_n(\mu_{kn}) = 0$.
9. $u_{knm}(r, \vartheta, \varphi) = J_{\sqrt{m(m+1)}}(\mu_{km}r)P_m^{(n)}(\cos \vartheta)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$,
 $\lambda_{knm} = -\mu_{km}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
 $J_{\sqrt{m(m+1)}}(\mu_{km}) = 0$.
10. $u_{knm}(r, \vartheta, \varphi) = J_{\sqrt{m(m+1)}}(\mu_{km}r)P_m^{(n)}(\cos \vartheta)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$,
 $\lambda_{knm} = -\mu_{km}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$,
 $J'_{\sqrt{m(m+1)}}(\mu_{km}) = 0$.

5.11. Уравнение Пуассона в кольце

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в кольце:

$$\Delta u = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad (1)$$

$$u|_{r=r_1} = g_1(\varphi), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_2} = g_2(\varphi). \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$u(r, \varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi, \quad (4)$$

где $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ — функции, которые предстоит найти.

1. Подставляем (4) в уравнение (1). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_0(r) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) \right] \cos n\varphi + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} b_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} b_n(r) \right] \sin n\varphi \right\} = f(r, \varphi). \end{aligned}$$

2. Используя формулы Эйлера–Фурье, находим коэффициенты при 1, $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_0(r) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) d\varphi = \tilde{a}_0(r), \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \tilde{a}_n(r), \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} b_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} b_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin n\varphi d\varphi = \tilde{b}_n(r). \quad (7)$$

3. Решаем дифференциальные уравнения (5)–(7) и находим коэффициенты $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ с точностью до произвольных постоянных.

а) Уравнение (5) допускает понижение порядка. Общее решение этого уравнения определяется формулой

$$a_0(r) = \int \frac{1}{r} \left(\int r \tilde{a}_0(r) dr \right) dr.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$a_0(r) = A_0(r) + E_0 + F_0 \ln r, \quad (8)$$

где $A_0(r)$ — известная функция, а E_0 и F_0 — пока произвольные постоянные.

б) Уравнение (6) решается методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (см. задачу 11.11 в книге Решебник „Высшая математика“).

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} b_n(r) = 0$$

имеет вид $a_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения (6) имеет вид

$$a_n(r) = C_n(r) r^n + D_n(r) r^{-n}.$$

Функции $C_n(r)$ и $D_n(r)$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} r^{2n} C'_n(r) + D'_n(r) = 0, \\ r^{2n} C'_n(r) + D'_n(r) = r^{n+1} \tilde{a}_n(r)/n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_n(r) = \frac{1}{2n} \int r^{-n} \tilde{a}_n(r) r dr \quad \text{и} \quad D_n(r) = -\frac{1}{2n} \int r^n \tilde{a}_n(r) r dr.$$

Поэтому

$$a_n(r) = \frac{r^n}{2n} \int r^{-n} \tilde{a}_n(r) r dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int r^n \tilde{a}_n(r) r dr.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$a_n(r) = A_n(r) + E_n r^n + F_n r^{-n}, \quad (9)$$

где $A_n(r)$ — известная функция, а E_n и F_n — пока произвольные постоянные.

в) Аналогично п. (б),

$$b_n(r) = \frac{r^n}{2n} \int r^{-n} \tilde{b}_n(r) r dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int r^n \tilde{b}_n(r) r dr.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$b_n(r) = B_n(r) + G_n r^n + H_n r^{-n}, \quad (10)$$

где $B_n(r)$ — известная функция, а G_n и H_n — пока произвольные постоянные.

4. Используем граничные условия (2) и (3), чтобы найти постоянные $E_0, F_0, E_n, F_n, G_n, H_n$.

Граничное условие (2) с учетом (4), (8)–(10) можно представить в виде

$$A_0(r_1) + E_0 + F_0 \ln r_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n(r_1) + E_n r_1^n + F_n r_1^{-n}) \cos n\varphi + (B_n(r_1) + G_n r_1^n + H_n r_1^{-n}) \sin n\varphi] = g_1(\varphi).$$

По формулам Эйлера–Фурье получаем

$$A_0(r_1) + E_0 + F_0 \ln r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) d\varphi, \quad (11)$$

$$A_n(r_1) + E_n r_1^n + F_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (12)$$

$$B_n(r_1) + G_n r_1^n + H_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (13)$$

Граничное условие (3) с учетом (4), (8)–(10) можно представить в виде

$$A'_0(r_2) + F_0 r_2^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(A'_n(r_2) + nE_n r_2^{n-1} - nF_n r_2^{-n-1}) \cos n\varphi + (B'_n(r_2) + nG_n r_2^{n-1} - nH_n r_2^{-n-1}) \sin n\varphi] = g_2(\varphi).$$

По формулам Эйлера–Фурье получаем

$$A'_0(r_2) + F_0 r_2^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) d\varphi, \quad (14)$$

$$A'_n(r_2) + nE_n r_2^{n-1} - F_n r_2^{-n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad (15)$$

$$B'_n(r_1) + nG_n r_2^{n-1} - nH_n r_2^{-n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (16)$$

Постоянные E_0, F_0 находим, решая систему линейных уравнений (11), (14):

$$\begin{cases} E_0 + F_0 \ln r_1 = -A_0(r_1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\varphi) d\varphi, \\ F_0 r_2^{-1} = -A'_0(r_1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_2(\varphi) d\varphi. \end{cases}$$

Постоянные E_n, F_n находим из системы уравнений (12), (15), а постоянные G_n, H_n — из системы уравнений (13), (16).

5. Подставляем значения постоянных $E_0, F_0, E_n, F_n, G_n, H_n$ в формулы (8)–(10), подставляем $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ из формул (8)–(10) в (4) и записываем ответ.

Замечания.

1. Краевая задача для уравнения Лапласа в кольце решается аналогично, но проще, так как $f(r, \varphi) \equiv 0$. Поэтому в формулах (8)–(10) $A_0(r) \equiv 0, A_n(r) \equiv 0, B_n(r) \equiv 0$.

2. Краевая задача для уравнения Пуассона в круге решается аналогично, но проще, так как в формулах (8)–(10) $F_0 = 0, F_n = 0, H_n = 0$ в силу условий $|a_0(0)| < \infty, |a_n(0)| < \infty, |b_n(0)| < \infty$.

3. Краевая задача для уравнения Пуассона вне круга решается аналогично, но проще, так как в формулах (8)–(10) $F_0 = 0, F_n = 0, H_n = 0$ в силу условий $|a_0(\infty)| < \infty, |a_n(\infty)| < \infty, |b_n(\infty)| < \infty$.

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в кольце:

$$\Delta u = r^3 \cos \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad (17)$$

$$u|_{r=1} = \cos 2\varphi, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} = \sin 3\varphi. \quad (19)$$

РЕШЕНИЕ. Решение краевой задачи (17)–(19) ищем в виде тригонометрического ряда Фурье

$$u(r, \varphi) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi, \quad (20)$$

где $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ — функции, которые предстоит найти.

1. Подставляем (20) в уравнение (17). Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_0(r) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) \right] \cos n\varphi + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} b_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} b_n(r) \right] \sin n\varphi \right\} = r^3 \sin \varphi. \end{aligned}$$

2. Используя формулы Эйлера–Фурье, находим коэффициенты при 1, $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_0(r) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi = \tilde{a}_n(r), \quad (22)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} b_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} b_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r^3 \cos \varphi \sin n\varphi d\varphi = 0. \quad (23)$$

3. Решаем дифференциальные уравнения (21)–(23) и находим коэффициенты $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ с точностью до произвольных постоянных.

а) Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$a_0(r) = E_0 + F_0 \ln r, \quad (24)$$

где E_0 и F_0 — пока произвольные постоянные.

б) Уравнение (22) решается методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. Общее решение однородного уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a_n(r) \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) = 0$$

имеет вид $a_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$. Поэтому общее решение неоднородного уравнения (22) имеет вид

$$a_n(r) = C_n(r)r^n + D_n(r)r^{-n}.$$

Функции $C_n(r)$ и $D_n(r)$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} r^{2n}C'_n(r) + D'_n(r) = 0, \\ r^{2n}C'_n(r) + D'_n(r) = r^{n+1}\tilde{a}_n(r)/n. \end{cases}$$

Следовательно,

$$C_n(r) = \frac{1}{2n} \int r^{-n}\tilde{a}_n(r)r dr \quad \text{и} \quad D_n(r) = -\frac{1}{2n} \int r^n\tilde{a}_n(r)r dr.$$

Поэтому

$$a_n(r) = \frac{r^n}{2n} \int r^{-n}\tilde{a}_n(r)r dr - \frac{r^{-n}}{2n} \int r^n\tilde{a}_n(r)r dr.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\begin{aligned} a_1(r) &= \frac{r^5}{24} + E_1 r + F_1 r^{-1}, \\ a_n(r) &= E_n r^n + F_n r^{-n}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \tag{25}$$

где E_n и F_n — пока произвольные постоянные.

в) Аналогично п. (б),

$$b_n(r) = G_n r^n + H_n r^{-n}, \tag{26}$$

где G_n и H_n — пока произвольные постоянные.

4. Используем граничные условия (18) и (19), чтобы найти постоянные $E_0, F_0, E_n, F_n, G_n, H_n$.

Граничное условие (18) с учетом (20), (24)–(26) можно представить в виде

$$E_0 + \frac{1}{24} \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n + F_n) \cos n\varphi + (G_n + H_n) \sin n\varphi = \cos 2\varphi.$$

По формулам Эйлера–Фурье получаем

$$E_0 = 0, \tag{27}$$

$$\frac{1}{24} + E_1 + F_1 = 0, \quad E_2 + F_2 = 1, \quad E_n + F_n = 0 \quad \text{при } n \geq 2, \tag{28}$$

$$G_n + H_n = 0. \tag{29}$$

Граничное условие (19) с учетом (20), (24)–(26) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{2} + \frac{10}{3} \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} [(nE_n 2^{n-1} - nF_n 2^{-n-1}) \cos n\varphi + \\ + (nG_n 2^{n-1} - nH_n 2^{-n-1}) \sin n\varphi] = \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

По формулам Эйлера–Фурье получаем

$$\frac{F_0}{2} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{10}{3} + E_1 - \frac{F_1}{4} = 0, \quad E_n \cdot 2^{n-1} - F_n \cdot 2^{-n-1} = 0, \quad (31)$$

$$G_n \cdot 2^{n-1} - H_n \cdot 2^{-n-1} = 0 \quad \text{при } n \neq 3, \quad 3G_3 \cdot 2^2 - 3H_3 \cdot 2^{-4} = 1. \quad (32)$$

Постоянные E_0, F_0 находим, решая систему линейных уравнений (27), (30). Очевидно, что

$$E_0 = 0 \quad \text{и} \quad F_0 = 0. \quad (33)$$

Постоянные E_n, F_n находим из системы уравнений (28), (31):

$$\frac{1}{24} + E_1 + F_1 = 0, \quad \frac{10}{3} + E_1 - \frac{F_1}{4} = 0;$$

$$E_2 + F_2 = 1, \quad E_2 \cdot 2 - F_2 \cdot 2^{-3} = 0;$$

$$E_n + F_n = 0, \quad E_n \cdot 2^{n-1} - F_n \cdot 2^{-n-1} = 0 \quad \text{при } n \geq 3.$$

Получаем

$$E_1 = -\frac{107}{40}, \quad F_1 = \frac{79}{30}, \quad E_2 = \frac{1}{17}, \quad F_2 = \frac{16}{17}, \quad E_n = 0, \quad F_n = 0 \quad \text{при } n \geq 3.$$

Постоянные G_n, H_n находим из системы уравнений (29), (32):

$$G_n + H_n = 0, \quad G_n \cdot 2^{n-1} - H_n \cdot 2^{-n-1} = 0 \quad \text{при } n \neq 3, \quad 3G_3 \cdot 2^2 - 3H_3 \cdot 2^{-4} = 1.$$

Получаем

$$G_n = 0, \quad H_n = 0 \quad \text{при } n \geq 3, \quad G_3 = \frac{16}{195}, \quad H_3 = -\frac{16}{195}.$$

5. Подставляем значения постоянных $E_0, F_0, E_n, F_n, G_n, H_n$ в формулы (24)–(26), подставляем $a_0(r), a_n(r), b_n(r)$ из формул (24)–(26) в (20) и записываем ответ.

$$\begin{aligned} \text{Ответ. } u(r, \varphi) = & \left(\frac{r^5}{24} - \frac{107}{40}r + \frac{79}{30}r^{-1} \right) \cos \varphi + \\ & + \left(\frac{1}{17}r + \frac{16}{17}r^{-1} \right) \cos 2\varphi + \left(\frac{16}{195}r - \frac{16}{195}r^{-1} \right) \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в кольце.

$$1. \Delta = 8r \sin \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = \sin \varphi, \quad u_r|_{r=2} = 12 \sin \varphi.$$

$$2. \Delta = 8r \cos \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = \cos \varphi, \quad u_r|_{r=2} = 12 \cos \varphi.$$

$$3. \Delta = 24r^3 \sin \varphi, \quad 2 < r < 3, \quad u|_{r=2} = 32 \sin \varphi, \quad u_r|_{r=3} = 135 \sin \varphi.$$

$$4. \Delta = (6 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 2 \sin^3 \varphi)/r, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = \sin^3 \varphi, \\ u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi.$$

$$5. \Delta = (6 \sin^2 \varphi \cos \varphi - 2 \cos^3 \varphi)/r, \quad 2 < r < 3, \quad u|_{r=2} = 2 \cos^3 \varphi, \\ u_r|_{r=3} = \cos^3 \varphi.$$

$$6. \Delta = (\sin \varphi)/r^2, \quad 2 < r < 5, \quad u|_{r=2} = 2 \cos \varphi - \sin \varphi, \quad u_r|_{r=5} = \cos \varphi.$$

$$7. \Delta = (\cos \varphi)/r^2 + 8r \sin \varphi, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = \sin \varphi - \cos \varphi, \\ u_r|_{r=2} = 12 \sin \varphi.$$

$$8. \Delta = 8(\sin \varphi)/r^5, \quad 2 < r < 3, \quad u|_{r=2} = (\sin \varphi)/8, \quad u_r|_{r=3} = -(\sin \varphi)/27.$$

$$9. \Delta = 9r + 8, \quad 1 < r < 2, \quad u|_{r=1} = 0, \quad u_r|_{r=2} = 20.$$

$$10. \Delta = 9r + 8 - 3/r^3, \quad 1 < r < 3, \quad u|_{r=1} = 0, \quad u_r|_{r=3} = 116/3.$$

Ответы. 1. $u(r, \varphi) = r^3 \sin \varphi$. 2. $u(r, \varphi) = r^3 \cos \varphi$. 3. $u(r, \varphi) = r^5 \sin \varphi$. 4. $u(r, \varphi) = r \sin^3 \varphi$. 5. $u(r, \varphi) = r \cos^3 \varphi$. 6. $u(r, \varphi) = r \cos \varphi - \sin \varphi$. 7. $u(r, \varphi) = r^3 \sin \varphi - \cos \varphi$. 8. $u(r, \varphi) = (\sin \varphi)/r^3$. 9. $u(r, \varphi) = r^3 + 2r^2 - 3$. 10. $u(r, \varphi) = r^3 + 2r^2 - 3/r$.

5.12. Уравнение Пуассона в прямоугольнике

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$\Delta u = f(x, y), \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad (1)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(\alpha, y) = g_2(y), \quad y \in (0, \beta), \quad (2)$$

$$u_y(x, 0) = g_3(x), \quad u_y(x, \beta) = g_4(x), \quad x \in (0, \alpha). \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Искомая функция $u(x, y)$ может быть представлена в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (4)$$

где $v(x, y)$ — решение краевой задачи для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями:

$$\Delta v = f(x, y), \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad (5)$$

$$v(0, y) = v(\alpha, y) = 0, \quad y \in (0, \beta), \quad (6)$$

$$v_y(x, 0) = v_y(x, \beta) = 0, \quad x \in (0, \alpha), \quad (7)$$

$w(x, y)$ — решение краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta w = 0, \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad (8)$$

$$w(0, y) = g_1(y), \quad w(\alpha, y) = g_2(y), \quad y \in (0, \beta), \quad (9)$$

$$w_y(x, 0) = g_3(x), \quad w_y(x, \beta) = g_4(x), \quad x \in (0, \alpha). \quad (10)$$

1. Решение задачи (5)–(7) ищем в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа с граничными условиями (6)–(7) (задача 5.10):

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi}{\alpha} mx \cos \frac{\pi}{\beta} ny. \quad (11)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (6)–(7) при любых A_{mn} , при которых ряд (11) сходится и его можно дифференцировать почленно по y . Найдем коэффициенты A_{mn} , при которых функция (11) является решением уравнения (5).

Подставляя функцию (11) в уравнение (5), имеем

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{\pi m}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{\beta} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi}{\alpha} mx \cos \frac{\pi}{\beta} ny = f(x, y).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$A_{m0} = - \frac{1}{(\pi m / \alpha)^2} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} f(x, y) \sin \frac{\pi}{\alpha} mx dy dx,$$

$$A_{mn} = - \frac{1}{(\pi m / \alpha)^2 + (\pi n / \beta)^2} \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{2\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} f(x, y) \sin \frac{\pi}{\alpha} mx \cos \frac{\pi}{\beta} ny dy dx.$$

Подставляя эти коэффициенты в (11), находим $v(x, y)$.

2. Решение задачи (8)–(10) ищем в виде

$$w(x, y) = \tilde{w}(x, y) + \tilde{\tilde{w}}(x, y), \quad (12)$$

где $\tilde{w}(x, y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta \tilde{w} = 0, \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad (13)$$

$$\tilde{w}(0, y) = 0, \quad \tilde{w}(\alpha, y) = 0, \quad y \in (0, \beta), \quad (14)$$

$$\tilde{w}_y(x, 0) = g_3(x), \quad \tilde{w}_y(x, \beta) = g_4(x), \quad x \in (0, \alpha). \quad (15)$$

и $\tilde{\tilde{w}}(x, y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta \tilde{\tilde{w}} = 0, \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad (16)$$

$$\tilde{\tilde{w}}(0, y) = g_1(y), \quad \tilde{\tilde{w}}(\alpha, y) = g_2(y), \quad y \in (0, \beta), \quad (17)$$

$$\tilde{\tilde{w}}_y(x, 0) = 0, \quad \tilde{\tilde{w}}_y(x, \beta) = 0, \quad x \in (0, \alpha). \quad (18)$$

3. Решение задачи (13)–(15) ищем в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(y) \sin \frac{\pi}{\alpha} mx. \quad (19)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (14) при любых коэффициентах $B_m(y)$, при которых ряд (19) сходится. Найдем коэффициенты $B_m(y)$, при которых функция (19) является решением уравнения (13).

Подставляя функцию (19) в уравнение (13), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{\pi}{\alpha} m\right)^2 B_m(y) + B_m''(y) \right] \sin \frac{\pi}{\alpha} mx = 0.$$

Поэтому

$$B_m''(y) - \left(\frac{\pi}{\alpha} m\right)^2 B_m(y) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$B_m(y) = a_m \operatorname{ch} \frac{\pi}{\alpha} my + b_m \operatorname{sh} \frac{\pi}{\alpha} my.$$

Следовательно,

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \operatorname{ch} \frac{\pi}{\alpha} my + b_m \operatorname{sh} \frac{\pi}{\alpha} my \right) \sin \frac{\pi}{\alpha} mx. \quad (20)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (14) и является решением уравнения (13) при любых a_m и b_m , при которых ряд (20) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно. Найдем

коэффициенты a_m и b_m , при которых функция (20) удовлетворяет граничным условиям (15).

Имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi}{\alpha} m b_m \sin \frac{\pi}{\alpha} m x = g_3(x),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha} m a_m \operatorname{sh} \frac{\pi}{\alpha} m \beta + \frac{\pi}{\alpha} m b_m \operatorname{ch} \frac{\pi}{\alpha} m \beta \right) \sin \frac{\pi}{\alpha} m x = g_4(x).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$b_m = \frac{1}{2\pi m} \int_0^{\alpha} g_3(x) \sin \frac{\pi}{\alpha} m x dx,$$

$$a_m \operatorname{sh} \frac{\pi}{\alpha} m \beta + b_m \operatorname{ch} \frac{\pi}{\alpha} m \beta = \frac{1}{2\pi m} \int_0^{\alpha} g_4(x) \sin \frac{\pi}{\alpha} m x dx,$$

Подставляя найденные по этим формулам a_m и b_m в (20), получаем $\tilde{w}(x, y)$.

4. Решение задачи (16)–(18) ищем в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \cos \frac{\pi}{\beta} n y. \quad (21)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (18) при любых коэффициентах $A_n(x)$, при которых ряд (21) сходится и его можно дифференцировать почленно по y . Найдем коэффициенты $A_n(x)$, при которых функция (21) является решением уравнения (16).

Подставляя функцию (21) в уравнение (16), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n''(x) - \left(\frac{\pi}{\beta} n \right)^2 A_n(x) \right] \cos \frac{\pi}{\beta} n y = 0.$$

Поэтому

$$A_n''(x) - \left(\frac{\pi}{\beta} n \right)^2 A_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$A_0(x) = a_0 + b_0 x,$$

$$A_n(x) = a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{\beta} n x + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta} n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\tilde{w}(x, y) = a_0 + b_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{\beta} n x + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta} n x \right) \cos \frac{\pi}{\beta} n y. \quad (22)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (18) и является решением уравнения (16) при любых a_n и b_n , при которых ряд (22) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно. Найдем коэффициенты a_n и b_n , при которых функция (22) удовлетворяет граничным условиям (17).

Имеем

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{\beta} n y = g_1(y),$$

$$a_0 + b_0 \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{\beta} n \alpha + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta} n \alpha \right) \cos \frac{\pi}{\beta} n y = g_2(y).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$a_0 = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} g_1(y) dy,$$

$$a_n = \frac{1}{2\beta} \int_0^{\beta} g_1(y) \cos \frac{\pi}{\beta} n y dy, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a_0 + b_0 \alpha = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} g_2(y) dy,$$

$$a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{\beta} n \alpha + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta} n \alpha = \frac{1}{2\beta} \int_0^{\beta} g_2(y) \cos \frac{\pi}{\beta} n y dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставляя найденные по этим формулам a_n и b_n в (22), получаем $\tilde{w}(x, y)$.

5. Записываем ответ согласно формулам (4) и (12).

Замечания.

1. Изложенный план пригоден для решения краевых задач для уравнения Пуассона в разнообразных ограниченных областях плоскости или пространства. Необходимо только, чтобы для этих областей были известны собственные функции оператора Лапласа и решения краевых задач для уравнения Лапласа.

2. Иной план решения задачи (1)–(3) состоит в следующем.

Сначала находим любое решение v уравнения Пуассона (1). Затем находим решение задачи

$$\Delta w = 0,$$

$$w(0, y) = g_1(y) - v(0, y), \quad w(\alpha, y) = g_2(y) - v(\alpha, y), \quad y \in (0, \beta),$$

$$w_y(x, 0) = g_3(x) - v_y(x, 0), \quad w_y(x, \beta) = g_4(x) - v_y(x, \beta), \quad x \in (0, \alpha),$$

Решение задачи (1)–(3) определяется формулой (4).

3. Чтобы найти решение v уравнения Пуассона (1), можно перейти в (1) к полярным координатам и применить метод, изложенный в задаче 5.11.

ПРИМЕР. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$\Delta u = xy(1-x), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad (23)$$

$$u(0, y) = y^2 - y^3/3 + 1, \quad u(1, y) = 3y^2 - y^3 + 2, \quad y \in (0, 2), \quad (24)$$

$$u_y(x, 0) = x(1-x), \quad u_y(x, 2) = x(1-x)^2, \quad x \in (0, 1). \quad (25)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Искомая функция $u(x, y)$ может быть представлена в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (26)$$

где $v(x, y)$ — решение краевой задачи для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями:

$$\Delta v = xy(1-x), \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad (27)$$

$$v(0, y) = v(1, y) = 0, \quad y \in (0, 2), \quad (28)$$

$$v_y(x, 0) = v_y(x, 2) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (29)$$

$w(x, y)$ — решение краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta w = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad (30)$$

$$w(0, y) = y^2 - y^3/3 + 1, \quad w(1, y) = 3y^2 - y^3 + 2, \quad y \in (0, 2), \quad (31)$$

$$w_y(x, 0) = x(1-x), \quad w_y(x, 2) = x(1-x)^2, \quad x \in (0, 1). \quad (32)$$

1. Решение задачи (27)–(29) ищем в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа с граничными условиями (28)–(29) (задача 5.10):

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin \pi m x \cos \frac{\pi}{2} n y. \quad (33)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (28)–(29) при любых A_{mn} , при которых ряд (33) сходится и его можно дифференцировать почленно по y . Найдем коэффициенты A_{mn} , при которых функция (33) является решением уравнения (27).

Подставляя функцию (33) в уравнение (27), имеем

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left[(\pi m)^2 + \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \right] \sin \pi m x \cos \frac{\pi}{2} n y = xy(1-x).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$A_{m0} = -\frac{1}{4(\pi m)^2} \int_0^1 \int_0^2 xy(1-x) \sin \pi m x dy dx,$$

$$A_{mn} = -\frac{1}{8[(\pi m)^2 + (\pi n/2)^2]} \int_0^1 \int_0^2 xy(1-x) \sin \pi m x \cos \frac{\pi}{2} n y dy dx.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$A_{m0} = \frac{(-1)^m - 1}{(\pi m)^5}, \quad A_{mn} = \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{\pi^5 m^3 n^2 [(\pi m)^2 + (\pi n/2)^2]}.$$

Подставляя эти коэффициенты в (33), находим $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{(\pi m)^5} \sin \pi m x + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{\pi^5 m^3 n^2 [(\pi m)^2 + (\pi n/2)^2]} \sin \pi m x \cos \frac{\pi}{2} n y. \end{aligned} \quad (34)$$

2. Решение задачи (30)–(32) ищем в виде

$$w(x, y) = \tilde{w}(x, y) + \tilde{\tilde{w}}(x, y), \quad (35)$$

где $\tilde{w}(x, y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta \tilde{w} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad (36)$$

$$\tilde{w}(0, y) = 0, \quad \tilde{w}(1, y) = 0, \quad y \in (0, 2), \quad (37)$$

$$\tilde{w}_y(x, 0) = x(1-x), \quad \tilde{w}_y(x, 2) = x(1-x)^2, \quad x \in (0, 1). \quad (38)$$

и $\tilde{w}(x, y)$ является решением краевой задачи

$$\Delta \tilde{w} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 2), \quad (39)$$

$$\tilde{w}(0, y) = y^2 - y^3/3 + 1, \quad \tilde{w}(1, y) = 3y^2 - y^3 + 2, \quad y \in (0, 2), \quad (40)$$

$$\tilde{w}_y(x, 0) = 0, \quad \tilde{w}_y(x, 2) = 0, \quad x \in (0, 1). \quad (41)$$

3. Решение задачи (36)–(38) ищем в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(y) \sin \pi m x. \quad (42)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (37) при любых коэффициентах $B_m(y)$, при которых ряд (42) сходится. Найдем коэффициенты $B_m(y)$, при которых функция (42) является решением уравнения (36).

Подставляя функцию (42) в уравнение (36), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[-(\pi m)^2 B_m(y) + B_m''(y) \right] \sin \pi m x = 0.$$

Поэтому

$$B_m''(y) - (\pi m)^2 B_m(y) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$B_m(y) = a_m \operatorname{ch} \pi m y + b_m \operatorname{sh} \pi m y.$$

Следовательно,

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \operatorname{ch} \pi m y + b_m \operatorname{sh} \pi m y) \sin \pi m x. \quad (43)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (37) и является решением уравнения (36) при любых a_m и b_m , при которых ряд (43) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно. Найдем коэффициенты a_m и b_m , при которых функция (43) удовлетворяет граничным условиям (38).

Имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \pi m b_m \sin \pi m x = x(1 - x),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\pi m a_m \operatorname{sh} 2\pi m + \pi m b_m \operatorname{ch} 2\pi m) \sin \pi m x = x(1 - x)^2.$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$b_m = \frac{1}{2\pi m} \int_0^1 x(1-x) \sin \pi m x \, dx,$$

$$a_m \operatorname{sh} 2\pi m + b_m \operatorname{ch} 2\pi m = \frac{1}{2\pi m} \int_0^1 x(1-x)^2 \sin \pi m x \, dx,$$

Вычисляя интегралы, имеем

$$b_m = \frac{1 - (-1)^m}{(\pi m)^4}, \quad a_m \operatorname{sh} 2\pi m + b_m \operatorname{ch} 2\pi m = \frac{2 + (-1)^m}{(\pi m)^4}.$$

Следовательно,

$$a_m = \frac{2 + (-1)^m}{(\pi m)^4 \operatorname{sh} 2\pi m} - \frac{1 - (-1)^m}{(\pi m)^4} \frac{\operatorname{ch} 2\pi m}{\operatorname{sh} 2\pi m}.$$

Подставляя найденные a_m и b_m в (43), получаем $\tilde{w}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^m}{(\pi m)^4 \operatorname{sh} 2\pi m} \operatorname{ch} \pi m y \sin \pi m x - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^m}{(\pi m)^4 \operatorname{sh} 2\pi m} \operatorname{ch} \pi m (2 - y) \sin \pi m x. \end{aligned} \quad (44)$$

4. Решение задачи (39)–(41) ищем в виде

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \cos \frac{\pi}{2} n y. \quad (45)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (41) при любых коэффициентах $A_n(x)$, при которых ряд (45) сходится и его можно дифференцировать почленно по y . Найдем коэффициенты $A_n(x)$, при которых функция (45) является решением уравнения (39).

Подставляя функцию (45) в уравнение (39), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n''(x) - \left(\frac{\pi}{2} n \right)^2 A_n(x) \right] \cos \frac{\pi}{2} n y = 0.$$

Поэтому

$$A_n''(x) - \left(\frac{\pi}{2} n \right)^2 A_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$A_0(x) = a_0 + b_0x,$$

$$A_n(x) = a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}nx + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\tilde{w}(x, y) = a_0 + b_0x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}nx + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}nx \right) \cos \frac{\pi}{2}ny. \quad (46)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (41) и является решением уравнения (39) при любых a_n и b_n , при которых ряд (46) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно. Найдем коэффициенты a_n и b_n , при которых функция (46) удовлетворяет граничным условиям (40).

Имеем

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{2}ny = y^2 - \frac{y^3}{3} + 1,$$

$$a_0 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}n + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}n \right) \cos \frac{\pi}{2}ny = 3y^2 - y^3 + 2.$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{3} + 1 \right) dy = \frac{5}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_0^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{3} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2}ny dy = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi n} \right)^4 [(-1)^n - 1],$$

$$a_0 + b_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 (3y^2 - y^3 + 2) dy = 4,$$

$$a_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}n + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}n = \frac{1}{4} \int_0^2 (3y^2 - y^3 + 2) \cos \frac{\pi}{2}ny dy = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\pi n} \right)^4 [(-1)^n - 1],$$

Подставляя найденные a_n и b_n в (46), получаем $\tilde{w}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x, y) &= \frac{5}{3} + \frac{7}{3}x + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} \right)^4 \frac{(-1)^n - 1}{\operatorname{sh}(\pi n/2)} \left[3 \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2}x + \operatorname{sh} \frac{\pi n}{2}(1-x) \right] \cos \frac{\pi}{2}ny. \end{aligned} \quad (47)$$

5. Записываем ответ согласно формулам (26), (34), (35), (44) и (47).

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

1. $\Delta u = -10\pi^2 \sin \pi x \cos 3\pi y$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$,
 $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$, $y \in (0, 1)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, 1) = 0$, $x \in (0, 1)$.
2. $\Delta u = -(4\pi^2 + 1) \sin 2\pi x \cos y$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, \pi)$,
 $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$, $y \in (0, \pi)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, \pi) = 0$, $x \in (0, 1)$.
3. $\Delta u = \sin x$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, 1)$,
 $u(0, y) = 0$, $u(\pi, y) = \operatorname{sh} \pi^2 \cos \pi y$, $y \in (0, 1)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, 1) = \operatorname{sh} 1 \sin x$, $x \in (0, \pi)$.
4. $\Delta u = 5 \sin 2x \cos y$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, \pi)$,
 $u(0, y) = 1$, $u(\pi, y) = \pi + 1$, $y \in (0, \pi)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, \pi) = 0$, $x \in (0, \pi)$.
5. $\Delta u = -9 \sin 3x$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, 1)$,
 $u(0, y) = 0$, $u(\pi, y) = 0$, $y \in (0, 1)$,
 $u_y(x, 0) = 2 \sin 2x$, $u_y(x, 1) = \operatorname{sh} 1 \sin x + 2 \operatorname{ch} 2 \sin 2x$, $x \in (0, \pi)$.
6. $\Delta u = 36 \sin^3 x$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, 2)$,
 $u(0, y) = 1$, $u(\pi, y) = 1 - \pi$, $y \in (0, 2)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, 2) = 0$, $x \in (0, \pi)$.
7. $\Delta u = 10 \sin x \cos^2 y$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, \pi)$,
 $u(0, y) = 0$, $u(\pi, y) = \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} y + \pi$, $y \in (0, \pi)$,
 $u_y(x, 0) = \sin x$, $u_y(x, \pi) = \operatorname{ch} \pi \sin x$, $x \in (0, \pi)$.
8. $\Delta u = -5\pi^2 \sin \pi x \cos 2\pi y$, $x \in (0, 2)$, $y \in (0, 1)$,
 $u(0, y) = 2$, $u(2, y) = \operatorname{sh} 4\pi \cos 2\pi y$, $y \in (0, 1)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, 1) = \pi \operatorname{sh} \pi \sin \pi x$, $x \in (0, 2)$.
9. $\Delta u = x - 6x^2 + 10x^3 - 5x^4$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, \pi)$,
 $u(0, y) = 1 + \cos 2y$, $u(1, y) = (\operatorname{ch} 2 - \operatorname{sh} 2) \cos 2y$, $y \in (0, \pi)$,
 $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, \pi) = 0$, $x \in (0, 1)$.
10. $\Delta u = -(y^3/3 - y^2/2 - 2y + 1) \sin x$, $x \in (0, \pi)$, $y \in (0, 1)$,
 $u(0, y) = \pi + \cos 2\pi y$, $u(\pi, y) = \operatorname{ch} 2\pi^2 \cos 2\pi y$, $y \in (0, 1)$,
 $u_y(x, 0) = 6 \sin 3\pi x$, $u_y(x, 1) = 6 \operatorname{ch} 3 \sin 3\pi x$, $x \in (0, \pi)$.

Ответы. 1. $u(x, y) = \sin \pi x \cos 3\pi y$. 2. $u(x, y) = \sin 2\pi x \cos y$.

3. $u(x, y) = -\sin x + \operatorname{ch} y \sin x + \operatorname{sh} \pi x \cos \pi y$.

4. $u(x, y) = -\sin 2x \cos y + 1 + x$.

5. $u(x, y) = \sin 3x + \operatorname{ch} y \sin x + \operatorname{sh} 2y \sin 2x$.

6. $u(x, y) = -27 \sin x + \sin 3x + 1 - x$.

7. $u(x, y) = -5 \sin x - \sin x \cos 2y + \operatorname{sh} y \sin x + x + \operatorname{sh} x \cos y.$
8. $u(x, y) = \sin \pi x \cos 2\pi y + \operatorname{ch} \pi y \sin \pi x + 2 - x + \operatorname{sh} 2\pi x \cos 2\pi y.$
9. $u(x, y) = x^3(1-x)^3/6 + 1 - x + (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{sh} 2x) \cos 2y.$
10. $u(x, y) = (y^3/3 - y^2/2) \sin x + 2 \operatorname{sh} 3y \sin 3\pi x + \pi - x + \operatorname{ch} 2\pi x \cos 2\pi y.$

5.13. Уравнение Пуассона в шаре

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в шаре:

$$\Delta u = Axy + Bxz + Cyz, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (1)$$

$$u|_{r=r_0} = a \quad (2)$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Решение краевой задачи (1)–(2) имеет вид

$$u(x, y, z) = u_{\text{чн}}(x, y, z) + v(x, y, z),$$

где $u_{\text{чн}}$ — какое-нибудь частное решение уравнения (1) и v — решение однородного уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее граничному условию $v|_{r=r_0} = a - u_{\text{чн}}|_{r=r_0}$.

1. Используя принцип суперпозиции, частное решение уравнения (1) ищем в виде

$$u_{\text{чн}} = u_1 + u_2 + u_3,$$

где

$u_1 = Exy(x^2 + y^2 + z^2)$ — решение уравнения $\Delta u = Axy$,

$u_2 = Lxz(x^2 + y^2 + z^2)$ — решение уравнения $\Delta u = Bxz$,

$u_3 = Myz(x^2 + y^2 + z^2)$ — решение уравнения $\Delta u = Cyz$.

Подставляя u_1 в уравнение

$$\Delta u = Axy,$$

получаем $14Exy = Axy$. Следовательно, $E = A/14$. Аналогично находим $L = B/14$ и $M = C/14$. Таким образом,

$$u_{\text{чн}} = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{A}{14}xy + \frac{B}{14}xz + \frac{C}{14}yz \right).$$

2. Функция

$$v(x, y, z) = u(x, y, z) - (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{A}{14}xy + \frac{B}{14}xz + \frac{C}{14}yz \right) \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta v = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (4)$$

и граничному условию

$$v|_{r=r_0} = a - r_0^2 \left(\frac{A}{14}xy + \frac{B}{14}xz + \frac{C}{14}yz \right) \Big|_{r=r_0}. \quad (5)$$

3. Легко проверить, что функция

$$v(x, y, z) = a - r_0^2 \left(\frac{A}{14}xy + \frac{B}{14}xz + \frac{C}{14}yz \right)$$

является решением задачи Дирихле (4)–(5). В силу теоремы о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре других решений нет.

4. Подставляя $v(x, y, z)$ в равенство (3), получаем

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - r_0^2) \left(\frac{A}{14}xy + \frac{B}{14}xz + \frac{C}{14}yz \right) + a.$$

Замечание. В п. 1 при отыскании частных решений u_1 , u_2 и u_3 использовано следующее свойство уравнения Пуассона.

Если $P(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n , то уравнение $\Delta u = P(x, y, z)$ имеет решение $u = Q(x, y, z)$, где Q — однородный многочлен степени $n + 2$.

Например, уравнение $\Delta u = x^2y^2$ имеет решение $u = \frac{x^4y^2}{12} - \frac{x^6}{180}$.

ПРИМЕР. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в шаре

$$\Delta u = 14xy, \quad 0 \leq r < 2, \quad (6)$$

$$u|_{r=2} = 14. \quad (7)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Частное решение уравнения (6) ищем в виде

$$u_{\text{чп}} = E(x^2 + y^2 + z^2)xy.$$

Подставляя его в уравнение (6), получаем

$$6Exy + 6Exy + 2Exy = 14xy.$$

Следовательно, $E = 1$ и

$$u_{\text{чп}} = (x^2 + y^2 + z^2)xy.$$

2. Функция

$$v(x, y, z) = u(x, y, z) - (x^2 + y^2 + z^2)xy \quad (8)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r < 2, \quad (9)$$

и граничному условию

$$v|_{r=2} = 14 - 4xy|_{r=2}. \quad (10)$$

3. Легко проверить, что функция $w(x, y, z) = 14 - 4xy$ является решением задачи Дирихле (9)–(10). В силу теоремы о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре других решений нет.

4. Подставляя $v(x, y, z)$ в равенство (8), получаем

$$u(x, y, z) = 14 - 4xy + (x^2 + y^2 + z^2)xy.$$

Ответ. $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 4)xy + 14$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.

1. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 14xy + 7xz$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = 5$.
2. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 7xy - 7xz + 14yz$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 1$.
3. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -7xy + 14xz$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 4$.
4. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 14xy - 14yz$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 8$.
5. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 28xy - 14xz + 14yz$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 7$.
6. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 28yz - 7xz$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 6$.
7. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 28xy - 14xz + 14yz$, $0 \leq r < 4$, $u|_{r=4} = 7$.
8. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 14xy - 7xy + 7yz$, $0 \leq r < 1$, $u|_{r=1} = 1$.
9. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 28xy - 14xz - 7yz$, $0 \leq r < 2$, $u|_{r=2} = 4$.
10. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -28xy + 28xz - 14yz$, $0 \leq r < 3$, $u|_{r=3} = 5$.

Ответы.

1. $u(x, y, z) = 5 - xy - xz/2 + (x^2 + y^2 + z^2)(xy + xz/2)$.
2. $u(x, y, z) = 1 - 2xy + 2xz + (x^2 + y^2 + z^2)(xy/2 - xz/2 + yz)$.
3. $u(x, y, z) = 4 + 2xz - 4xz + (x^2 + y^2 + z^2)(xy/2 + xz)$.
4. $u(x, y, z) = 8 - 9xy + 9yz + (x^2 + y^2 + z^2)(xy - yz)$.
5. $u(x, y, z) = 7 - 8xy + 4xz - 4yz + (x^2 + y^2 + z^2)(2xy - xz + yz)$.
6. $u(x, y, z) = 6 - 9xy/2 - 18yz + (x^2 + y^2 + z^2)(-xy/2 + 2yz)$.
7. $u(x, y, z) = 7 - 8xy + xz - 4yz + (x^2 + y^2 + z^2)(2xy - xz + yz)$.
8. $u(x, y, z) = 1 - xy + xz/2 - yz/2 + (x^2 + y^2 + z^2)(2xy - xz/2 + yz/2)$.
9. $u(x, y, z) = 4 - 8xy + 4xz + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2)(2xy - xz - yz/2)$.
10. $u(x, y, z) = 5 + 18xy - 18xz + 9yz + (x^2 + y^2 + z^2)(-2xy + 2xz - yz)$.

5.14. Однородное волновое уравнение на отрезке

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения на отрезке

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим вспомогательные решения $v(x, t)$ уравнения (1) в виде

$$v(x, t) = X(x)T(t),$$

причем $v(0, t) = v(l, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(l) = 0$. Для этого подставляем $v(x, t) = X(x)T(t)$ в уравнение (1) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0;$

б) $T'' - \lambda a^2 T = 0.$

3. Решаем задачу (а).

Уравнение $X'' - \lambda X = 0$ имеет общее решение

$$X(x) = Ce^{\sqrt{\lambda}x} + De^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Из граничных условий $X(0) = X(l) = 0$ следует, что

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = -(\pi n/l)^2$ имеем

$$T_n'' + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 T_n = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n(t) = \tilde{A}_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \tilde{B}_n \sin \frac{\pi n}{l} at.$$

5. Итак, вспомогательные решения уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= C_n \left(\tilde{A}_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \tilde{B}_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned}$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$, $B_n = C_n \tilde{B}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

6. Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (4)$$

Эта функция является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (3) при любых A_n и B_n , при которых ряд (4) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

7. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (2).

Полагая в (4) $t = 0$, получаем

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x).$$

Отсюда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

Дифференцируя равенство (4), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\pi na}{l} A_n \sin \frac{\pi na}{l} t + \frac{\pi na}{l} B_n \cos \frac{\pi na}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Полагая здесь $t = 0$ и используя начальное условие (2), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi na}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = g(x).$$

Отсюда

$$B_n = \frac{l}{\pi na} \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4), получаем искомое решение и записываем ответ.

Замечание. При каждом фиксированном t ряд (4) является разложением $u(x, t)$ по системе собственных функций оператора Лапласа на отрезке $(0, l)$:

$$\begin{cases} v_{xx} = \lambda v, & x \in (0, l), \\ v(0) = v(l) = 0. \end{cases}$$

Задача (а) состоит в отыскании этих собственных функций и соответствующих им собственных значений λ . Коэффициенты при t в (4) являются квадратными корнями из собственных значений λ .

ПРИМЕР. Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения на отрезке

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(1 - x), \quad (6)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (7)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим вспомогательные решения $v(x, t)$ уравнения (5) в виде

$$v(x, t) = X(x)T(t),$$

причем $v(0, t) = v(1, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(1) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(x, t) = X(x)T(t)$ в уравнение (5) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = \lambda.$$

Поэтому функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(1) = 0;$

б) $T'' - 4\lambda T = 0.$

3. Решаем задачу (а). Уравнение $X'' - \lambda X = 0$ имеет общее решение

$$X(x) = Ce^{\sqrt{\lambda}x} + De^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Из граничных условий $X(0) = X(1) = 0$ следует, что

$$\lambda_n = -(\pi n)^2, \quad X_n = C_n \sin \pi n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = -(\pi n)^2$ имеем

$$T_n'' + 4(\pi n)^2 T_n = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n = \tilde{A}_n \cos 2\pi nt + \tilde{B}_n \sin 2\pi nt.$$

5. Итак, вспомогательные решения уравнения (5) имеют вид

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= C_n \left(\tilde{A}_n \cos 2\pi nt + \tilde{B}_n \sin 2\pi nt \right) \sin \pi nx = \\ &= (A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt) \sin \pi nx, \end{aligned}$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$, $B_n = C_n \tilde{B}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

6. Решение задачи (5)–(7) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt) \sin \pi nx. \quad (8)$$

Эта функция является решением уравнения (5) и удовлетворяет граничным условиям (7) при любых A_n и B_n , при которых ряд (8) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

7. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (6).

Полагая в (8) $t = 0$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \pi nx = 0.$$

Отсюда $A_n = 0$.

Дифференцируя равенство (8), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2\pi n A_n \sin 2\pi nt + 2\pi n B_n \cos 2\pi nt) \sin \pi nx.$$

Полагая здесь $t = 0$ и используя начальное условие (6), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\pi n B_n \sin \pi nx = x(1 - x).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi^4(2k+1)^4}, \quad B_{2k} = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (8), получаем

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^4(2k+1)^4} \sin 2\pi(2k+1)t \sin(2k+1)\pi x.$$

Ответ.
$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^4(2k+1)^4} \sin 2\pi(2k+1)t \sin(2k+1)\pi x.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения на отрезке

1. $u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, 2), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(2 - x), \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$
2. $u_{tt} = 2u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(1 - x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$
3. $u_{tt} = 3u_{xx}, \quad x \in (0, 3), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(3 - x), \quad u(0, t) = u(3, t) = 0.$
4. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad x \in (0, 2), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(2 - x), \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$
5. $u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(1 - x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$
6. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad x \in (0, 4), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(4 - x), \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$
7. $u_{tt} = \frac{1}{9}u_{xx}, \quad x \in (0, 3), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(3 - x), \quad u(0, t) = u(3, t) = 0.$
8. $u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x \in (0, 2), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(2 - x), \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$
9. $u_{tt} = 16u_{xx}, \quad x \in (0, 2), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(2 - x), \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$
10. $u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, 3), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x(3 - x), \quad u(0, t) = u(3, t) = 0.$

Ответы.

1. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} \sin \frac{2k+1}{2} \pi t \sin \frac{2k+1}{2} \pi x.$
2. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4(2k+1)^4} \sin(2k+1) \sqrt{2} \pi t \sin(2k+1) \pi x.$
3. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{36}{\pi^4(2k+1)^4} \sin \frac{2k+1}{3} \sqrt{3} \pi t \sin \frac{2k+1}{3} \pi x.$
4. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} \sin(2k+1) \pi t \sin \frac{2k+1}{2} \pi x.$
5. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4(2k+1)^4} \sin(2k+1) \pi t \sin(2k+1) \pi x.$
6. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{54}{\pi^4(2k+1)^4} \sin \frac{2k+1}{8} \pi t \sin \frac{2k+1}{4} \pi x.$
7. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{36}{\pi^4(2k+1)^4} \sin \frac{2k+1}{9} \pi t \sin \frac{2k+1}{3} \pi x.$
8. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} \sin \frac{6k+3}{2} \pi t \sin \frac{2k+1}{2} \pi x.$
9. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4} \sin(4k+2) \pi t \sin \frac{2k+1}{2} \pi x.$
10. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{36}{\pi^4(2k+1)^4} \sin \frac{2k+1}{3} \pi t \sin \frac{2k+1}{3} \pi x.$

5.15. Неоднородное волновое уравнение на отрезке

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить первую смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \alpha \sin \frac{\pi}{l} x + 4\beta \sin^3 \frac{\pi}{l} x + 16\gamma \sin^5 \frac{\pi}{l} x, \quad (1)$$

$$x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Разлагаем правую часть уравнения (1) в ряд Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа на отрезке $(0, l)$:

$$\begin{cases} v_{xx} = \lambda v, & x \in (0, l), \\ v(0) = v(l) = 0, \end{cases}$$

т.е. по системе функций $\sin(\pi x/l)$, $\sin(2\pi x/l)$, $\sin(3\pi x/l)$, ... Имеем

$$\begin{aligned} \alpha \sin \frac{\pi}{l}x + \beta \sin^3 \frac{\pi}{l}x + \gamma \sin^5 \frac{\pi}{l}x = \\ = (\alpha + 3\beta + 10\gamma) \sin \frac{\pi}{l}x - (\beta + 5\gamma) \sin \frac{3\pi}{l}x + \gamma \sin \frac{5\pi}{l}x. \end{aligned}$$

2. Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u(x, t) = u_1(t) \sin \frac{\pi}{l}x + u_3(t) \sin \frac{3\pi}{l}x + u_5(t) \sin \frac{5\pi}{l}x. \quad (4)$$

3. Подставляя выражение (4) в уравнение (1), получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_1''(t) + \frac{\pi^2}{l^2}a^2 u_1(t) = \alpha + 3\beta + 10\gamma, \\ u_3''(t) + \frac{9\pi^2}{l^2}a^2 u_3(t) = -(\beta + 5\gamma), \\ u_5''(t) + \frac{25\pi^2}{l^2}a^2 u_5(t) = \gamma. \end{cases} \quad (5)$$

4. Начальные условия (2) эквивалентны следующим начальным условиям для системы (4):

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_3(0) = u_3'(0) = 0, \quad u_5(0) = u_5'(0) = 0.$$

5. Решая последовательно задачу Коши для каждого уравнения системы (4), получаем

$$u_1(t) = \frac{(\alpha + 3\beta + 10\gamma)l^2}{\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{\pi a}{l}t\right), \quad (6)$$

$$u_3(t) = \frac{-(\beta + 5\gamma)l^2}{9\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{3\pi a}{l}t\right), \quad (7)$$

$$u_5(t) = \frac{\gamma l^2}{25\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{5\pi a}{l}t\right). \quad (8)$$

6. Подставляя (6)–(8) в формулу (4), получим искомое решение задачи (1)–(3):

$$u(x, t) = \frac{(\alpha + 3\beta + 10\gamma)l^2}{\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{\pi a}{l} t\right) \sin \frac{\pi}{l} x - \\ - \frac{(\beta + 5\gamma)l^2}{9\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{3\pi a}{l} t\right) \sin \frac{3\pi}{l} x + \frac{\gamma l^2}{25\pi^2 a^2} \left(1 - \cos \frac{5\pi a}{l} t\right) \sin \frac{5\pi}{l} x.$$

Замечание. Аналогично решается задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, \infty)$$

при произвольной непрерывной функции $f(x)$.

ПРИМЕР. Решить первую смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке

$$u_{tt} - u_{xx} = 4 \sin^3 x, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, \infty), \quad (9)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (10)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (11)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Разлагаем правую часть уравнения (1) в ряд Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа на отрезке $(0, \pi)$:

$$\begin{cases} v_{xx} = \lambda v, & x \in (0, \pi), \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases}$$

т.е. по системе функций $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$ Имеем

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x.$$

2. Решение задачи (9)–(11) ищем в виде

$$u(x, t) = u_1(t) \sin x + u_3(t) \sin 3x. \quad (12)$$

3. Подставляя выражение (12) в уравнение (9), получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_1''(t) + u_1(t) = 3, \\ u_3''(t) + 9u_3(t) = -1. \end{cases} \quad (13)$$

4. Начальные условия (10) эквивалентны следующим начальным условиям для системы (13):

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_3(0) = u_3'(0) = 0.$$

5. Решая последовательно задачу Коши для каждого уравнения системы (13), получаем

$$u_1(t) = 3(1 - \cos t), \quad (14)$$

$$u_3(t) = -\frac{1}{9}(1 - \cos 3t). \quad (15)$$

6. Подставляя (14) и (15) в формулу (12), получаем искомое решение задачи (9)–(11):

$$u(x, t) = 3(1 - \cos t) \sin x - \frac{1}{9}(1 - \cos 3t) \sin 3x.$$

Ответ. $u(x, t) = 3(1 - \cos t) \sin x - \frac{1}{9}(1 - \cos 3t) \sin 3x.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить первую смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения на отрезке.

1. $u_{tt} - 4u_{xx} = 4 \sin^3 x + 16 \sin^5 x, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
2. $u_{tt} - 9u_{xx} = 8 \sin^3 \frac{\pi x}{2} - 16 \sin^5 \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (0, 2), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$
3. $u_{tt} - u_{xx} = \sin \frac{\pi x}{3} - 4 \sin^3 \frac{\pi x}{3} + 16 \sin^5 \frac{\pi x}{3}, \quad x \in (0, 3), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0.$
4. $u_{tt} - 4u_{xx} = -\sin \frac{\pi x}{4} + 4 \sin^3 \frac{\pi x}{4} - 16 \sin^5 \frac{\pi x}{4}, \quad x \in (0, 4), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$
5. $u_{tt} - 16u_{xx} = -2 \sin \pi x - 8 \sin^3 \pi x + 16 \sin^5 \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$
6. $u_{tt} - u_{xx} = \sin \frac{\pi x}{3} + 4 \sin^3 \frac{\pi x}{3} + 32 \sin^5 \frac{\pi x}{3}, \quad x \in (0, 3), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0.$
7. $u_{tt} - 9u_{xx} = 8 \sin x + 16 \sin^5 x, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$
8. $u_{tt} - 16u_{xx} = 2 \sin \frac{\pi x}{4} + 32 \sin^5 \frac{\pi x}{4}, \quad x \in (0, 4), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$

9. $u_{tt} - 4u_{xx} = \sin \pi x - 4 \sin^3 \pi x + 32 \sin^5 \pi x, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$
10. $u_{tt} - u_{xx} = -3 \sin \frac{\pi x}{2} + 16 \sin^5 \frac{\pi x}{2}, \quad x \in (0, 2), \quad t \in (0, \infty),$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$

Ответы.

1. $u(x, t) = \frac{13}{4}(1 - \cos 2t) \sin x - \frac{1}{6}(1 - \cos 6t) \sin 3x +$
 $+ \frac{1}{100}(1 - \cos 10t) \sin 5x.$
2. $u(x, y) = -\frac{16}{9\pi^2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2}t\right) \sin \frac{\pi}{2}x +$
 $+ \frac{4}{27\pi^2} \left(1 - \cos \frac{9\pi}{2}t\right) \sin \frac{3\pi}{2}x - \frac{4}{225\pi^2} \left(1 - \cos \frac{15\pi}{2}t\right) \sin \frac{5\pi}{2}x.$
3. $u(x, t) = \frac{72}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}t\right) \sin \frac{\pi}{3}x - \frac{4}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \sin \pi x +$
 $+ \frac{9}{25\pi^2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{3}t\right) \sin \frac{5\pi}{3}x.$
4. $u(x, t) = -\frac{32}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}t\right) \sin \frac{\pi}{4}x + \frac{16}{9\pi^2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2}t\right) \sin \frac{3\pi}{4}x -$
 $- \frac{4}{25\pi^2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{2}t\right) \sin \frac{5\pi}{4}x.$
5. $u(x, t) = \frac{1}{8\pi^2} (1 - \cos 4\pi t) \sin \pi x - \frac{1}{48\pi^2} (1 - \cos 12\pi t) \sin 3\pi x +$
 $+ \frac{1}{400\pi^2} (1 - \cos 20\pi t) \sin 5\pi x.$
6. $u(x, t) = \frac{216}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}t\right) \sin \frac{\pi}{3}x - \frac{11}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \sin \pi x +$
 $+ \frac{18}{25\pi^2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{3}t\right) \sin \frac{5\pi}{3}x.$
7. $u(x, t) = \frac{2}{9} (1 - \cos 3t) \sin \pi x - \frac{5}{81} (1 - \cos 12t) \sin 3x +$
 $+ \frac{1}{225} (1 - \cos 15t) \sin 5x.$
8. $u(x, t) = \frac{14}{\pi^2} (1 - \cos \pi t) \sin \frac{\pi}{4}x - \frac{10}{9\pi^2} (1 - \cos 3\pi t) \sin \frac{3\pi}{4}x +$
 $+ \frac{2}{25\pi^2} (1 - \cos 15\pi t) \sin \frac{5\pi}{4}x.$

$$9. \quad u(x, t) = \frac{9}{2\pi^2} (1 - \cos 2\pi t) \sin \pi x - \frac{1}{4\pi^2} (1 - \cos 6\pi t) \sin 3\pi x + \\ + \frac{1}{50\pi^2} (1 - \cos 10\pi t) \sin 5\pi x.$$

$$10. \quad u(x, t) = \frac{28}{\pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} t\right) \sin \frac{\pi}{2} x - \frac{20}{9\pi^2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2} t\right) \sin \frac{3\pi}{2} x + \\ + \frac{4}{25\pi^2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{2} t\right) \sin \frac{5\pi}{2} x.$$

5.16. Однородное волновое уравнение в прямоугольнике

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения в прямоугольнике:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad t \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = Axy(\alpha - x)(\beta - y), \quad (2)$$

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(\alpha, y, t) = u(x, \beta, t) = 0. \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим вспомогательные решения уравнения (1) в виде

$$v(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

причем $v(0, y, t) = v(x, 0, t) = v(\alpha, y, t) = v(x, \beta, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(\alpha) = 0$, $Y(0) = Y(\beta) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(x, y, t)$ в уравнение (1) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{a^2 T}.$$

Поэтому функции $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

$$а) \quad X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\alpha) = 0;$$

$$б) \quad Y'' - \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(\beta) = 0;$$

$$в) \quad T'' - a^2(\lambda + \mu)T = 0.$$

2. Решаем задачи (а) и (б). Получаем

$$\lambda_n = -\pi^2 \frac{n^2}{\alpha^2}, \quad X_n = A_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\mu_m = -\pi^2 \frac{m^2}{\beta^2}, \quad Y_m = B_m \sin \frac{\pi m}{\beta} y, \quad m = 1, 2, \dots$$

3. Решаем задачу (в). При $\lambda + \mu = \lambda_n + \mu_m = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} \right)$ имеем

$$T''' + \pi^2 a^2 \left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} \right) T = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_{nm} = A_{nm} \cos \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t + B_{nm} \sin \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t.$$

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} v_{nm}(x, y, t) &= C_{nm} \left(\tilde{A}_{nm} \cos \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}_{nm} \sin \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t \right) \sin \frac{\pi n}{\alpha} x \sin \frac{\pi m}{\beta} y = \\ &= \left(A_{nm} \cos \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t + B_{nm} \sin \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t \right) \sin \frac{\pi n}{\alpha} x \sin \frac{\pi m}{\beta} y, \end{aligned}$$

где $A_{nm} = C_{nm} \tilde{A}_{nm}$, $B_{nm} = C_{nm} \tilde{B}_{nm}$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cos \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t + \right. \\ &\quad \left. + B_{nm} \sin \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} t \right) \sin \frac{\pi n}{\alpha} x \sin \frac{\pi m}{\beta} y. \quad (5) \end{aligned}$$

Эта функция является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (3) при любых A_{nm} и B_{nm} , при которых ряд (5) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_{nm} и B_{nm} , при которых $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (2).

Полагая в (5) $t = 0$, получаем

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{\pi n}{\alpha} x \cdot \sin \frac{\pi m}{\beta} y = 0.$$

Отсюда $A_{nm} = 0$ ($n = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$).

Дифференцируя равенство (5), полагая $t = 0$ и используя начальное условие (2), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} x \cdot \sin \frac{\pi m}{\beta} y = Axy(\alpha - x)(\beta - y).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$B_{nm} \pi a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{2}{\beta} \int_0^{\beta} Axy(\alpha - x)(\beta - y) \sin \frac{\pi n}{\alpha} x \sin \frac{\pi m}{\beta} y \, dy \, dx.$$

Следовательно,

$$B_{nm} = \frac{4A\alpha^2}{\pi^4 n^3 a \sqrt{\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2}}} (1 - (-1)^n) \cdot \frac{4\beta^2}{\pi^3 m^3} (1 - (-1)^m) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ или } m = 2l, \\ \frac{64\alpha^2 \beta^2 A}{\pi^7 a \sqrt{\frac{(2k+1)^2}{\alpha^2} + \frac{(2l+1)^2}{\beta^2}} (2k+1)^3 (2l+1)^3}, & n = 2k+1 \text{ и } m = 2l+1. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения A_{nm} и B_{nm} в (5), получаем иско-
мое решение и записываем ответ.

Замечания.

1. Аналогично решается задача

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \quad t \in (0, \infty),$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y),$$

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(\alpha, y, t) = u(x, \beta, t) = 0$$

при произвольных достаточно гладких функциях $f(x, y)$ и $g(x, y)$, для которых получающиеся в ответе ряды можно дважды дифференцировать почленно.

2. При каждом фиксированном t ряд (5) является разложением $u(x, y, t)$ по системе собственных функций оператора Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta v = \lambda v, & x \in (0, \alpha), \quad y \in (0, \beta), \\ v(0, y) = v(\alpha, y) = v(x, 0) = v(x, \beta) = 0. \end{cases}$$

Отыскание этих собственных функций и соответствующих им собственных значений λ сводится к решению задач (а) и (б). Коэффициенты при t в (5) являются квадратными корнями из собственных значений λ .

ПРИМЕР. Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения в прямоугольнике

$$u_{tt} = 4\Delta u, \quad x \in (0, 2), \quad y \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty), \quad (6)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = (2 - x)(1 - y)xy, \quad (7)$$

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(2, y, t) = u(x, 1, t) = 0. \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим вспомогательные решения уравнения (6) в виде

$$v(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

причем $v(0, y, t) = v(x, 0, t) = v(2, y, t) = v(x, 1, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(2) = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(x, y, t)$ в уравнение (6) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{T''}{a^2 T}.$$

Поэтому функции $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

$$\text{а) } X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(2) = 0;$$

$$\text{б) } Y'' - \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0;$$

$$\text{в) } T'' - 4(\lambda + \mu)T = 0.$$

2. Решаем задачи (а) и (б). Получаем

$$\lambda_n = -\pi^2 \frac{n^2}{4}, \quad X_n = A_n \sin \frac{\pi n}{2} x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\mu_m = -\pi^2 m^2, \quad Y_m = A_n \sin \pi m y, \quad m = 1, 2, \dots$$

3. Решаем задачу (в). При $\lambda + \mu = \lambda_n + \mu_m = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{4} + m^2 \right)$ имеем

$$T'' + \pi^2(n^2 + 4m^2)T = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_{nm} = A_{nm} \cos \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t + B_{nm} \sin \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t.$$

4. Итак, вспомогательные решения уравнения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} v_{nm}(x, y, t) &= C_{nm} \left(\tilde{A}_{nm} \cos \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}_{nm} \sin \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t \right) \sin \frac{\pi n}{2} x \sin \pi t y = \\ &= \left(A_{nm} \cos \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t + B_{nm} \sin \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t \right) \sin \frac{\pi n}{2} x \sin \pi t y, \end{aligned}$$

где $A_{nm} = C_{nm} \tilde{A}_{nm}$, $B_{nm} = C_{nm} \tilde{B}_{nm}$ — постоянные, которые предстоит найти.

5. Решение задачи (6)–(8) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v_{nm}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cos \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t + \right. \\ &\quad \left. + B_{nm} \sin \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} t \right) \cdot \sin \frac{\pi n}{2} x \sin \pi t y. \quad (9) \end{aligned}$$

Эта функция является решением уравнения (6) и удовлетворяет граничным условиям (8) при любых A_n и B_n , при которых ряд (9) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

6. Находим коэффициенты A_n и B_n , при которых $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям (7).

Полагая в (9) $t = 0$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{\pi n}{2} x \sin \pi t y = 0.$$

Следовательно, $A_{nm} = 0$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$

Дифференцируя равенство (9), полагая $t = 0$ и используя начальное условие (7), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} \sin \frac{\pi n}{2} x \sin \pi y = xy(2-x)(1-y).$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$B_{nm} \pi \sqrt{n^2 + 4m^2} = 2 \int_0^2 \int_0^1 xy(2-x)(1-y) \sin \frac{\pi n}{2} x \sin \pi t y dy dx.$$

Следовательно,

$$B_{2k+1,2l+1} = \frac{256}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + 4(2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3},$$

$$B_{2k,m} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$B_{n,2l} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad l = 1, 2, \dots$$

Подставляя найденные значения A_{nm} и B_{nm} в (9), получаем

Ответ.

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{256}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + 4(2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times \\ \times \sin \pi \sqrt{(2k+1)^2 + 4(2l+1)^2} t \sin \frac{\pi(2k+1)}{2} x \sin \pi(2l+1)y.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить первую смешанную задачу для однородного волнового уравнения в прямоугольнике.

1. $u_{tt} = \Delta u$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (1-x)(1-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(1, y, t) = u(x, 1, t) = 0$.
2. $u_{tt} = 9\Delta u$, $x \in (0, 3)$, $y \in (0, 1)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (3-x)(1-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(3, y, t) = u(x, 1, t) = 0$.
3. $u_{tt} = 16\Delta u$, $x \in (0, 4)$, $y \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (4-x)(2-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(4, y, t) = u(x, 2, t) = 0$.
4. $u_{tt} = 25\Delta u$, $x \in (0, 5)$, $y \in (0, 5)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (5-x)(5-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(5, y, t) = u(x, 5, t) = 0$.
5. $u_{tt} = 4\Delta u$, $x \in (0, 2)$, $y \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (2-x)(2-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(2, y, t) = u(x, 2, t) = 0$.
6. $u_{tt} = \Delta u$, $x \in (0, 3)$, $y \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (3-x)(2-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(3, y, t) = u(x, 2, t) = 0$.
7. $u_{tt} = 9\Delta u$, $x \in (0, 2)$, $y \in (0, 3)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (2-x)(3-y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(2, y, t) = u(x, 3, t) = 0$.

8. $u_{tt} = 16\Delta u$, $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 4)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (1 - x)(4 - y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(1, y, t) = u(x, 4, t) = 0$.
9. $u_{tt} = 36\Delta u$, $x \in (0, 3)$, $y \in (0, 6)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (3 - x)(6 - y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(3, y, t) = u(x, 6, t) = 0$.
10. $u_{tt} = 49\Delta u$, $x \in (0, 7)$, $y \in (0, 1)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = (7 - x)(1 - y)xy$,
 $u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(7, y, t) = u(x, 1, t) = 0$.

Ответы.

1. $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times$
 $\times \sin \pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1)\pi x \sin(2l+1)\pi y.$
2. $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{576}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times$
 $\times \sin 3\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1)\frac{\pi}{3} x \sin(2l+1)\pi y.$
3. $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4096}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times$
 $\times \sin 4\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1)\frac{\pi}{4} x \sin(2l+1)\frac{\pi}{2} y.$
4. $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{40000}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times$
 $\times \sin 5\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1)\frac{\pi}{5} x \sin(2l+1)\frac{\pi}{5} y.$
5. $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1024}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times$
 $\times \sin 2\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} x \sin(2l+1)\frac{\pi}{2} y.$
6. $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2304}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times$
 $\times \sin \pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1)\frac{\pi}{3} x \sin(2l+1)\frac{\pi}{2} y.$

$$7. u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2304}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times \\ \times \sin 3\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} x \sin(2l+1) \frac{\pi}{3} y.$$

$$8. u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1024}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times \\ \times \sin 4\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1) \pi x \sin(2l+1) \frac{\pi}{4} y.$$

$$9. u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{20736}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times \\ \times \sin 6\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1) \frac{\pi}{3} x \sin(2l+1) \frac{\pi}{6} y.$$

$$10. u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{3136}{\pi^7 \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} (2k+1)^3 (2l+1)^3} \times \\ \times \sin 7\pi \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t \sin(2k+1) \frac{\pi}{7} x \sin(2l+1) \pi y.$$

5.17. Задача Коши для волнового уравнения на прямой

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить задачу Коши для волнового уравнения на прямой:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t \in (0, \infty), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at), \quad (4)$$

где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции (задача 5.2). Требуется найти конкретные функции f и g такие, что выполняются начальные условия (2) и (3).

1. Из (2) и (3) получаем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x), \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a} u_1(x). \end{cases} \quad (5)$$

2. Решаем систему (5) относительно $f(x)$ и $g(x)$. Для этого дифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = u'_0(x), \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{a} u_1(x). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{2} u'_0(x) + \frac{1}{2a} u_1(x), \\ g'(x) = \frac{1}{2} u'_0(x) - \frac{1}{2a} u_1(x). \end{cases}$$

Интегрируя эти равенства, получаем

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(y) dy + C_1, \\ g(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x u_1(y) dy + C_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. Используя (4), получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} u_0(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} u_1(y) dy + C_1 + \\ &+ \frac{1}{2} u_0(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} u_1(y) dy + C_2 = \\ &= \frac{1}{2} u_0(x + at) + \frac{1}{2} u_0(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy + C_1 + C_2. \end{aligned}$$

4. Из условия (2) следует, что

$$u_0(x) + C_1 + C_2 = u_0(x).$$

Поэтому $C_1 + C_2 = 0$.

Записываем ответ

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x + at) + \frac{1}{2} u_0(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy. \quad (6)$$

Замечание. Равенство (6) называется формулой Даламбера.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши для волнового уравнения на прямой:

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t \in (0, \infty), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (7)$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (8)$$

$$u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (9)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$u(x, t) = f(x + 2t) + g(x - 2t), \quad (10)$$

где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции. Требуется найти конкретные функции f и g такие, что выполняются начальные условия (8) и (9).

1. Из (8) и (9) получаем

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = e^{-x^2}, \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}. \end{cases} \quad (11)$$

2. Решаем систему (11) относительно $f(x)$ и $g(x)$. Для этого дифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = -2xe^{-x^2}, \\ f'(x) - g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} f'(x) = -xe^{-x^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x^2}, \\ g'(x) = -xe^{-x^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Интегрируя эти равенства, получаем

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C_1, \\ g(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. Используя (10), получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-(x+2t)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x+2t) + C_1 + \\ + \frac{1}{2} e^{-(x-2t)^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x-2t) + C_2.$$

4. Из условия (8) следует, что

$$e^{-x^2} + C_1 + C_2 = e^{-x^2}.$$

Поэтому $C_1 + C_2 = 0$.

Ответ.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-(x+2t)^2} + \frac{1}{2} e^{-(x-2t)^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x+2t) - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(x-2t).$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить задачу Коши для волнового уравнения на прямой.

1. $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x, 0) = 1/(1+x^2)$, $u_t(x, 0) = 0$.
2. $u_{tt} = 3u_{xx}$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u_t(x, 0) = 0$.
3. $u_{tt} = 2u_{xx}$, $u(x, 0) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1)$, $u_t(x, 0) = 0$.
4. $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 1/(1+x^2)$.
5. $u_{tt} = 3u_{xx}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 1/\operatorname{ch} x$.
6. $u_{tt} = 2u_{xx}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = xe^{-x^2/2}$.
7. $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u_t(x, 0) = xe^{-x^2/2}$.
8. $u_{tt} = 2u_{xx}$, $u(x, 0) = 1/(1+x^2)$, $u_t(x, 0) = x^2/(1+x^6)$.
9. $u_{tt} = 3u_{xx}$, $u(x, 0) = 1/\operatorname{ch} x$, $u_t(x, 0) = 1/(1+x^2)$.
10. $u_{tt} = 5u_{xx}$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u_t(x, 0) = 1/\operatorname{ch} x$.

Ответы.

1. $u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x-t)^2}$.
2. $u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-(x+\sqrt{3}t)^2} + \frac{1}{2} e^{-(x-\sqrt{3}t)^2}$.
3. $u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+\sqrt{2}t) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+1+\sqrt{2}t) + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x-\sqrt{2}t) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+1-\sqrt{2}t)$.
4. $u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+t) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x-t)$.

$$5. u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} e^{x+\sqrt{3}t} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} e^{x-\sqrt{3}t}.$$

$$6. u(x, t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-(x+\sqrt{2}t)^2/2} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-(x-\sqrt{2}t)^2/2}.$$

$$7. u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{2} e^{-(x-t)^2} - \frac{1}{2} e^{-(x+t)^2/2} + \frac{1}{2} e^{-(x-t)^2/2}.$$

$$8. u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (x + \sqrt{2}t)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (x - \sqrt{2}t)^2} + \\ + \frac{\sqrt{2}}{12} \operatorname{arctg}(x + \sqrt{2}t)^3 - \frac{\sqrt{2}}{12} \operatorname{arctg}(x - \sqrt{2}t)^3.$$

$$9. u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}(x + \sqrt{3}t)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}(x - \sqrt{3}t)} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}(x + \sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}(x - \sqrt{3}t).$$

$$10. u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-(x+\sqrt{5}t)^2} + \frac{1}{2} e^{-(x-\sqrt{5}t)^2} + \\ + \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} e^{x+\sqrt{5}t} - \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} e^{x-\sqrt{5}t}.$$

5.18. Уравнение теплопроводности на отрезке

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим вспомогательные решения уравнения (1) в виде

$$v(x, t) = X(x)T(t),$$

причем $v(0, t) = v(l, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(l) = 0$. Для этого представляем функцию $v(x, t) = X(x)T(t)$ в уравнение (1) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = \lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(l) = 0$;

б) $T' - a^2 \lambda T = 0$.

3. Решаем задачу (а).

Уравнение $X'' - \lambda X = 0$ имеет общее решение

$$X(x) = C e^{\sqrt{\lambda}x} + D e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Из граничных условий $X(0) = X(l) = 0$ следует, что

$$\lambda_n = - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad X_n = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$ имеем

$$T' + \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 T = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n = A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Итак, вспомогательные решения уравнения (5) имеют вид

$$v_n(x, t) = C_n \tilde{A}_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

6. Решение задачи (1)–(3) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (4)$$

Эта функция является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (3) при любых A_n , при которых ряд (4) сходится. Его можно дважды дифференцировать почленно.

7. Находим коэффициенты A_n такие, что $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (2).

Полагая в (4) $t = 0$, получаем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x).$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4), получаем искомое решение $u(x, t)$ и записываем ответ.

Замечание. При каждом фиксированном t ряд (4) является разложением $u(x, t)$ по системе собственных функций оператора Лапласа на отрезке $(0, l)$:

$$\begin{cases} v_{xx} = \lambda v, & x \in (0, l), \\ v(0) = v(l) = 0. \end{cases}$$

Задача (а) состоит в отыскании этих собственных функций и соответствующих им собственных значений λ . Коэффициенты при t в (4) являются собственными значениями λ .

ПРИМЕР. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty), \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \sin^3 2\pi x, \quad x \in (0, 1), \quad (6)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (7)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Находим вспомогательные решения уравнения (5) в виде

$$v(x, t) = X(x)T(t),$$

причем $v(0, t) = v(1, t) = 0$, т.е. $X(0) = X(1) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(x, t) = X(x)T(t)$ в уравнение (5) и разделяем переменные:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda.$$

Поэтому функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(1) = 0;$

б) $T' - \lambda T = 0.$

3. Решаем задачу (а).

Уравнение $X'' - \lambda X = 0$ имеет общее решение

$$X(x) = Ce^{\sqrt{\lambda}x} + De^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Из граничных условий $X(0) = X(1) = 0$ следует, что

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \quad X_n = C_n \sin \pi n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. Решаем задачу (6). При $\lambda = \lambda_n = -\pi^2 n^2$ имеем

$$T' + \pi^2 n^2 T = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n = A_n e^{-\pi^2 n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Итак, вспомогательные решения уравнения (5) имеют вид

$$v_n(x, t) = C_n \tilde{A}_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x = A_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где $A_n = C_n \tilde{A}_n$.

6. Решение задачи (5)–(7) ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x. \quad (8)$$

Эта функция является решением уравнения (5) и удовлетворяет граничным условиям (7) при любых A_n , при которых ряд (8) сходится. Его можно дважды дифференцировать почленно.

7. Находим коэффициенты A_n такие, что $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (6), которое запишем в виде

$$u(x, 0) = \sin^3 2\pi x = \frac{3}{4} \sin 2\pi x - \frac{1}{4} \sin 6\pi x.$$

Полагая в (8) $t = 0$, получаем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \pi n x = \frac{3}{4} \sin 2\pi x - \frac{1}{4} \sin 6\pi x.$$

Отсюда

$$A_2 = \frac{3}{4}, \quad A_6 = -\frac{1}{4}, \quad A_1 = A_3 = A_4 = A_5 = 0, \quad A_n = 0, \quad n \geq 7.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (8), получаем

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x - \frac{1}{4} e^{-36\pi^2 t} \sin 6\pi x.$$

Ответ.
$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x - \frac{1}{4} e^{-36\pi^2 t} \sin 6\pi x.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности на отрезке.

1. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = \sin^3 2\pi x - \sin 4\pi x$, $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
2. $u_t = 9u_{xx}$, $x \in (0, 3)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 4\sin^3 3\pi x + 2\sin 6\pi x$, $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
3. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (0, 1)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 16\sin^3 \pi x - 3\sin 2\pi x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
4. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 8\sin^3 4\pi x - 2\sin 6\pi x$, $u(0, t) = u(2, t) = 0$.
5. $u_t = u_{xx}/4$, $x \in (0, 1/2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = \sin^3 \pi x + 4\sin 2\pi x$, $u(0, t) = u(1/2, t) = 0$.
6. $u_t = u_{xx}/9$, $x \in (0, 3)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 8\sin^3 3\pi x - 4\sin 12\pi x$, $u(0, t) = u(3, t) = 0$.
7. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (0, 4)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 2\sin^3 \pi x + \sin 4\pi x$, $u(0, t) = u(4, t) = 0$.
8. $u_t = 4u_{xx}$, $x \in (0, 1/2)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 8\sin^3 \pi x - \sin 2\pi x$, $u(0, t) = u(1/2, t) = 0$.
9. $u_t = u_{xx}$, $x \in (0, 1/3)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 2\sin^3 2\pi x - \sin \pi x$, $u(0, t) = u(1/3, t) = 0$.
10. $u_t = 9u_{xx}$, $x \in (0, 1)$, $t \in (0, \infty)$,
 $u(x, 0) = 4\sin^3 \pi x - \sin 2\pi x$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Ответы.

1. $u(x, t) = \frac{3}{4}e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - \frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t} \sin 2\pi x - e^{4\pi^2 t} \sin 3\pi x$;
2. $u(x, t) = 3e^{-9\pi^2 t} \sin \pi x + 2e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x - e^{81\pi^2 t} \sin 3\pi x$;
3. $u(x, t) = 12e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x - 3e^{-16\pi^2 t} \sin 2\pi x - 4e^{-36\pi^2 t} \sin 3\pi x$;
4. $u(x, t) = 6e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x - 2e^{-\pi^2 t} \sin 3\pi x - 2e^{-36\pi^2 t} \sin 6\pi x$;
5. $u(x, t) = \frac{3}{4}e^{-\pi^2 t} \sin 2\pi x + 4e^{-4\pi^2 t} \sin 4\pi x - \frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t} \sin 6\pi x$;
6. $u(x, t) = 6e^{-(\pi^2 t)/9} \sin \pi x - 2e^{-\pi^2 t} \sin 3\pi x - 4e^{-(16\pi^2 t)/9} \sin 4\pi x$;
7. $u(x, t) = \frac{3}{2}e^{-(\pi^2 t)/16} \sin \frac{\pi}{4} x - \frac{1}{4}e^{-(9\pi^2 t)/16} \sin \frac{3\pi}{4} x + e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$;
8. $u(x, t) = -6e^{-16\pi^2 t} \sin 2\pi x - e^{-64\pi^2 t} \sin 4\pi x + 2e^{-144\pi^2 t} \sin 6\pi x$;
9. $u(x, t) = \frac{3}{2}e^{-36\pi^2 t} \sin 3\pi x - e^{-9\pi^2 t} \sin 6\pi x - \frac{2}{3}e^{-324\pi^2 t} \sin 18\pi x$;
10. $u(x, t) = 3e^{-9\pi^2 t} \sin \pi x - e^{-36\pi^2 t} \sin 2\pi x - e^{-81\pi^2 t} \sin 3\pi x$.

5.19. Уравнение теплопроводности в круге

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности в круге:

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 \leq r < r_0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(r, 0) = r_0^2 - r^2, \quad 0 \leq r < r_0, \quad (2)$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Записывая оператор Лапласа Δ в полярных координатах, получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \quad (4)$$

Так как граничное и начальное условия не зависят от φ и коэффициенты уравнения также не зависят от φ , решение первой смешанной задачи (1)–(3) тоже не зависит от φ , т.е.

$$u(r, \varphi, t) = u(r, t),$$

где функция $u(r, t)$ удовлетворяет уравнению (4) с $\partial^2 u / \partial \varphi^2 \equiv 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (5)$$

2. Находим вспомогательные решения уравнения (5) в виде

$$v(r, t) = R(r) T(t),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $R(r_0) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(r, z) = R(r)T(t)$ в уравнение (5) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = \frac{\frac{dT}{dt}}{T} = -\lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

$$\text{а) } R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda a^2 R = 0, \quad 0 \leq r < r_0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0.$$

$$\text{б) } T' + \lambda a^2 T = 0.$$

4. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$ имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0(\sqrt{\lambda}r) + \tilde{B}Y_0(\sqrt{\lambda}r),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $\tilde{B} = 0$.

Используя граничное условие $R(r_0) = 0$, получаем

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2, \quad R_n = \tilde{A}_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где μ_n — нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

5. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = (\mu_n/r_0)^2$ имеем

$$T' + \left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 a^2 T = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}\right)^2 t}.$$

6. Итак, вспомогательные решения уравнения (5) имеют вид

$$v_n(r, z) = \tilde{A}_n B_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) e^{\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2 t} = A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2 t},$$

где $A_n = \tilde{A}_n B_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

7. Решение $u(r, t)$ ищем в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{r_0}a\right)^2 t}. \quad (6)$$

Эта функция является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничному условию (3) при любых A_n , при которых ряд (6) сходится и его можно дважды дифференцировать почленно.

8. Находим A_n , при которых $u(r, t)$ удовлетворяет начальному условию (2).

Полагая в (6) $t = 0$, получаем

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) = r_0^2 - r^2.$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$A_n = \frac{2 \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right) r dr}{r_0^2 J_1^2(\mu_n)} = \frac{4r_0^2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(см. задачу 3.7).

Подставляя эти коэффициенты в формулу (6), получаем

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4r_0^2 J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t} J_0 \left(\frac{\mu_n}{r_0} r \right).$$

Замечание. Аналогично решается задача

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u, & 0 \leq r < r_0, \quad t > 0, \\ u(r, 0) &= f(r), & 0 \leq r < r_0, \\ u(r_0, t) &= 0, & t > 0, \end{aligned}$$

при произвольной непрерывной функции $f(r)$ такой, что $f(r_0) = 0$.

ПРИМЕР. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности в круге:

$$u_t = \Delta u, \quad 0 \leq r < 1, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$u(r, 0) = 1 - r^2, \quad 0 \leq r < 1, \quad (8)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (9)$$

РЕШЕНИЕ.

1. Записывая оператор Лапласа Δ в полярных координатах, получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (10)$$

Так как граничное и начальное условия не зависят от φ и коэффициенты уравнения также не зависят от φ , решение первой смешанной задачи (7)–(9) тоже не зависит от φ , т.е.

$$u(r, \varphi, t) = u(r, t),$$

где функция $u(r, t)$ удовлетворяет уравнению (10) с $\partial^2 u / \partial \varphi^2 \equiv 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (11)$$

2. Находим вспомогательные решения уравнения (11) в виде

$$v(r, t) = R(r) T(t),$$

причем $|R(0)| < \infty$ и $R(1) = 0$. Для этого подставляем функцию $v(r, z) = R(r)T(t)$ в уравнение (11) и разделяем переменные. Получаем

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} = \frac{\frac{dT}{dt}}{T} = -\lambda = \text{const.}$$

Поэтому функции $R(r)$ и $T(t)$ являются решениями связанных задач:

а) $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(1) = 0.$

б) $T' + \lambda T = 0.$

4. Решаем задачу (а).

Общее решение уравнения $R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0$ имеет вид

$$R(r) = \tilde{A}J_0(\sqrt{\lambda}r) + \tilde{B}Y_0(\sqrt{\lambda}r),$$

где J_0 и Y_0 — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R(0)| < \infty$, а $Y_0(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, полагаем $\tilde{B} = 0$.

Используя граничное условие $R(1) = 0$, получаем

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad R_n = \tilde{A}_n J_0(\mu_n r), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где μ_n — нули функции Бесселя $J_0(x)$, т.е. $J_0(\mu_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

5. Решаем задачу (б). При $\lambda = \lambda_n = \mu_n^2$ имеем

$$T' + \mu_n^2 T = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_n(t) = B_n e^{-\mu_n^2 t}.$$

6. Итак, вспомогательные решения уравнения (11) имеют вид

$$v_n(r, z) = \tilde{A}_n B_n J_0(\mu_n r) e^{-\mu_n^2 t} = A_n J_0(\mu_n r) e^{-\mu_n^2 t},$$

где $A_n = \tilde{A}_n B_n$ — постоянные, которые предстоит найти.

7. Решение $u(r, t)$ ищем в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) e^{-\mu_n^2 t}. \quad (12)$$

Эта функция является решением уравнения (11) и удовлетворяет граничному условию (9) при любых A_n , при которых ряд (12) сходится. Его можно дважды дифференцировать почленно.

8. Находим A_n , при которых $u(r, t)$ удовлетворяет начальному условию (8).

Полагая в (12) $t = 0$, получаем

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) = 1 - r^2.$$

Отсюда в силу формул Эйлера–Фурье следует, что

$$A_n = \frac{2 \int_0^1 (1 - r^2) J_0(\mu_n r) r dr}{J_1^2(\mu_n)} = \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (12), получаем

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 t} J_0(\mu_n r).$$

Ответ. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 t} J_0(\mu_n r).$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить первую смешанную задачу для уравнения теплопроводности в круге.

1. $u_t = 2\Delta u, \quad 0 \leq r < 3, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 9 - r^2, \quad u(3, t) = 0.$
2. $u_t = 3\Delta u, \quad 0 \leq r < 4, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 16 - r^2, \quad u(4, t) = 0.$
3. $u_t = 4\Delta u, \quad 0 \leq r < 2, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 4 - r^2, \quad u(2, t) = 0.$
4. $u_t = 5\Delta u, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 1 - r^2, \quad u(1, t) = 0.$
5. $u_t = 16\Delta u, \quad 0 \leq r < 5, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 25 - r^2, \quad u(5, t) = 0.$
6. $u_t = 9\Delta u, \quad 0 \leq r < 6, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 36 - r^2, \quad u(6, t) = 0.$
7. $u_t = \Delta u, \quad 0 \leq r < 7, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 49 - r^2, \quad u(7, t) = 0.$
8. $u_t = 3\Delta u, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 4 - r^2, \quad u(2, t) = 0.$
9. $u_t = 6\Delta u, \quad 0 \leq r \leq 3, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 9 - r^2, \quad u(3, t) = 0.$
10. $u_t = 7\Delta u, \quad 0 \leq r < 8, \quad t \in (0, \infty), \quad u(r, 0) = 64 - r^2, \quad u(8, t) = 0.$

Ответы.

1. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{2\mu_n^2}{9}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{3}r\right).$
2. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{3\mu_n^2}{16}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{3}r\right).$
3. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{2}r\right).$

4. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-5\mu_n^2 t} J_0(\mu_n r).$
5. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{16\mu_n^2}{25}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{5}r\right).$
6. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{144J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2}{4}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{6}r\right).$
7. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{196J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n^2}{49}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{7}r\right).$
8. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{3\mu_n^2}{4}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{2}r\right).$
9. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{2\mu_n^2}{3}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{3}r\right).$
10. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{256J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} e^{-\frac{7\mu_n^2}{64}t} J_0\left(\frac{\mu_n}{8}r\right).$

5.20. Задача Коши для уравнения теплопроводности на прямой

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности на прямой:

$$u_t = a^2 \Delta u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = e^{-\alpha x^2 + \beta x} \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (2)$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой определяется формулой Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} e^{-\alpha \xi^2 + \beta \xi} d\xi. \quad (3)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению интеграла (3).

1. Делаем замену переменной в интеграле (3):

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}} = y.$$

Получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 - \alpha(2\sqrt{a^2 t}y + x)^2 + \beta(2\sqrt{a^2 t}y + x)} dy.$$

2. Выделяя полный квадрат в выражении

$$-y^2 - \alpha(2\sqrt{a^2 t}y + x)^2 + \beta(2\sqrt{a^2 t}y + x)$$

и используя равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

находим искомое решение

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2 t}} e^{\frac{a^2 t(2\alpha x + \beta)^2}{1 + 4\alpha a^2 t} - \alpha x^2 + \beta x}$$

и записываем ответ.

ПРИМЕР. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad (4)$$

$$u(x, 0) = e^{-x} \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ.

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой определяется формулой Пуассона (3). При $a = 1$, $\alpha = 0$ и $\beta = -1$ имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} e^{-\xi} d\xi. \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению интеграла (6).

1. Делаем замену переменной в интеграле (6):

$$\frac{\xi - x}{\sqrt{4t}} = y, \quad \frac{d\xi}{\sqrt{4t}} = dy, \quad \xi = 2\sqrt{t}y + x.$$

Получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cdot e^{-2\sqrt{t}y - x} dy.$$

2. Выделяя полный квадрат в выражении

$$-y^2 - 2\sqrt{t}y - x = -\left(y + \sqrt{t}\right)^2 + t - x,$$

получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\sqrt{t})^2} e^{t-x} dy = e^{t-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\sqrt{t})^2} dy = e^{t-x}.$$

Ответ. $u(x, t) = e^{t-x}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности

1. $u_t = 2u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-x^2-2x}.$
2. $u_t = 3u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-2x^2+x}.$
3. $u_t = 4u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-4x^2-3x}.$
4. $u_t = u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-2x^2+5x}.$
5. $u_t = 3u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-x^2+3x}.$
6. $u_t = 5u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-3x^2-x}.$
7. $u_t = 2u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-4x^2+x}.$
8. $u_t = u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-x^2+3x}.$
9. $u_t = 4u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-x^2/2-x}.$
10. $u_t = 3u_{xx}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (0, +\infty), \quad u(x, 0) = e^{-x^2/3+2x}.$

ОТВЕТЫ.

1. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{\frac{t(2x-2)^2}{1+4t} - x^2 - 2x}.$
2. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+24t}} e^{\frac{t(2x-2)^2}{1+4t} - x^2 - 2x}.$
3. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+64t}} e^{\frac{4t(8x-3)^2}{1+64t} - 4x^2 - 3x}.$
4. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+8t}} e^{\frac{t(4x+5)^2}{1+8t} - 2x^2 + 5x}.$
5. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+12t}} e^{\frac{3t(2x+3)^2}{1+12t} - x^2 + 3x}.$
6. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+60t}} e^{\frac{5t(6x-1)^2}{1+60t} - 3x^2 - x}.$
7. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+32t}} e^{\frac{2t(8x+1)^2}{1+32t} - 4x^2 + x}.$
8. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{\frac{t(2x+3)^2}{1+4t} - x^2 + 3x}.$
9. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+8t}} e^{\frac{4t(x-1)^2}{1+8t} - \frac{1}{2}x^2 - x}.$
10. $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{\frac{3t(2x/3+2)^2}{1+4t} - \frac{1}{3}x^2 + 2x}.$

Глава 6

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При изучении темы ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ вы познакомитесь с различными примерами вероятностных моделей случайных явлений (экспериментов): классической вероятностной моделью, геометрическими вероятностями, схемой испытаний Бернулли, простейшим потоком событий. Вы научитесь вычислять вероятности случайных событий (суждений о результатах случайного эксперимента) используя вероятности так называемых элементарных исходов или используя формулы, позволяющие по вероятностям отдельных событий находить вероятности их комбинаций. При этом вы познакомитесь с важнейшим понятием теории вероятностей — понятием независимых случайных событий. Вы научитесь анализировать случайные величины (обобщенные числовые характеристики случайного эксперимента), находя их распределение (вероятностное описание) или некоторые усредненные характеристики, такие, как математическое ожидание и дисперсия. Вы познакомитесь с основными распределениями случайных величин: Пуассона, Коши, Лапласа, равномерным, нормальным, показательным, биномиальным, геометрическим и т.д. Вы научитесь находить характеристические функции случайных величин и по ним — математическое ожидание и дисперсию. Вы научитесь анализировать случайные векторы, находя их распределение или такие усредненные характеристики, как вектор рассеяния или ковариационную матрицу. Вы научитесь анализировать числовые функции случайных величин или векторов. Наконец, вы научитесь вычислять вероятности, связанные с суммами большого числа независимых и одинаково распределенных случайных величин, используя центральную предельную теорему.

Пакет РЕШЕБНИК.ВМ поможет вам выполнить вычисления и предоставит необходимую справочную информацию. В частности, в пакете РЕШЕБНИК.ВМ можно легко вычислить значения стандартных функций, часто используемых при решении вероятностных задач.

6.1. Классическая вероятностная модель

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Проводится некоторый случайный эксперимент, в котором число элементарных исходов конечно и все они равновозможны (бросание нескольких монет или игральных кубиков, приобретение некоторого числа лотерейных билетов, выбор нескольких карт из колоды и т.п.). Найти вероятность некоторого случайного события A , связанного с этим экспериментом.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. При конечном числе равновозможных элементарных исходов вероятность события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Оно характеризуется тем, что всякая реализация случайного эксперимента может быть описана одним и только одним элементарным исходом.

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

При решении задач равновозможность элементарных исходов следует из соображений симметрии или предполагается, что она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента.

На практике равновозможность элементарных исходов случайного эксперимента проверяется анализом его результатов с помощью математической статистики.

3. Выбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события A (благоприятные исходы).

Критерием отбора служит описание события A .

4. Подсчитываем общее число элементарных исходов N (число элементов пространства элементарных исходов).

Это делается непосредственно или с помощью комбинаторики.

5. Подсчитываем число элементарных исходов N_A , благоприятствующих событию A .

Это делается непосредственно или с помощью комбинаторики.

6. Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

ПРИМЕР. Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что число выпавших очков на одном кубике в два раза больше, чем на другом.

РЕШЕНИЕ. При конечном числе равновозможных элементарных исходов вероятность события равна отношению числа элементарных

исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Пронумеруем кубики. Тогда элементарный исход случайного эксперимента есть упорядоченная пара чисел (n_1, n_2) , где n_1 — число выпавших очков на первом кубике и n_2 — на втором.

Все элементарные исходы удобно изобразить в виде таблицы

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

Поскольку кубики симметричны, сделаны из однородного материала и бросаются надлежащим образом, все элементарные исходы равновозможны.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события A (благоприятные исходы).

Для интересующего нас события A благоприятны такие исходы (n_1, n_2) , при которых $n_1 = 2n_2$ или $2n_1 = n_2$. Очевидно, что это исходы (1,2), (2,4), (3,6), (2,1), (4,2) и (6,3).

4. Подсчитываем общее число элементарных исходов N (число элементов пространства элементарных исходов). Очевидно, что $N = 36$.

5. Подсчитываем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A . Очевидно, что $N_A = 6$.

6. Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{6}{36}.$$

Ответ. $P(A) = 6/36$.

Замечание. Если кубики неразличимы, то кажется вполне естественным считать элементарным исходом неупорядоченную совокупность двух выпавших чисел, записывая их, например, по возрастанию. Однако в этом случае элементарные исходы не будут равновозможны (как показывает опыт, исход (1,2), например, встречается примерно в два раза чаще, чем исход (1,1)).

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Бросаются два игральных кубика. Найти вероятность указанного события.

1. Сумма числа очков равна 7.

2. Сумма числа очков больше 3.
3. Сумма числа очков больше 4, но меньше 7.
4. Модуль разности числа очков равен 2.
5. Модуль разности числа очков больше 1.
6. Произведение числа очков не больше 10.
7. Большее число очков больше 4.
8. Меньшее число очков больше 4.
9. Число очков хотя бы на одном кубике четно.
10. Число очков на обоих кубиках нечетно.

Ответы. 1. $1/6$. 2. $11/12$. 3. $1/4$. 4. $2/9$. 5. $5/9$. 6. $19/36$.
7. $4/9$. 8. $1/9$. 9. $3/4$. 10. $1/4$.

6.2. Гипергеометрическая формула

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Имеется некоторое множество D , состоящее из n элементов. Множество D по некоторому признаку разделяется на два подмножества A и B , причем подмножество A имеет n_A элементов, а подмножество B — n_B элементов ($n_A + n_B = n$). Из D наудачу выбираются m ($m \leq n$) элементов. Найти вероятность того, что среди выбранных m элементов m_1 , или m_2 , ..., или m_k ($m_i \leq n_i$) будут принадлежать подмножеству A .*

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

При конечном числе равновозможных элементарных исходов вероятность события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов.

Решим задачу при $k = 1$, а затем при $k > 1$.

1. $k = 1$.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Элементарный исход — это произвольное подмножество из D , содержащее m элементов.

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

В данном случае равновозможность элементарных исходов определяется методикой выбора m элементов. Предполагаем, что она гарантирует равновозможность элементарных исходов. Заметим, что при неудачной методике выбора исходы могут не быть равновозможными.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события (благоприятные исходы).

Для этого используем признак, по которому происходит разделение множества D на два подмножества A и B . Благоприятные исходы формируются путем произвольного выбора m_1 элементов из множества A и произвольного выбора $m - m_1$ элементов из множества B .

4. Подсчитываем общее число элементарных исходов N (число элементов пространства элементарных исходов).

Поскольку элементарный исход — это произвольное подмножество из D , содержащее m элементов, число элементарных исходов равно числу таких подмножеств, т.е.

$$N = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

5. Подсчитываем число элементарных исходов $N(m_1)$, благоприятствующих заданному событию.

Для этого определяем числа элементов в множествах A и B , т.е. числа n_A и n_B ($n_A + n_B = n$).

Благоприятные исходы формируются путем произвольного выбора m_1 элементов из множества A , состоящего из n_A элементов, и произвольного выбора $m - m_1$ элементов из множества B , состоящего из n_B элементов. Поэтому число благоприятных исходов равно

$$N(m_1) = C_{n_A}^{m_1} C_{n_B}^{m-m_1}.$$

6. Обозначим $P(m_1)$ вероятность того, что среди выбранных m элементов ровно m_1 будут принадлежать множеству A . Согласно классическому определению вероятности

$$P(m_1) = \frac{N(m_1)}{N} = \frac{C_{n_A}^{m_1} C_{n_B}^{m-m_1}}{C_n^m}.$$

Эта формула называется гипергеометрической.

II. $k > 1$.

Число благоприятных исходов равно

$$N(m_1) + N(m_2) + \dots + N(m_k).$$

Поэтому искомая вероятность равна

$$\begin{aligned} \frac{N(m_1) + N(m_2) + \dots + N(m_k)}{N} &= P(m_1) + P(m_2) + \dots + P(m_k) = \\ &= \frac{C_{n_A}^{m_1} C_{n_B}^{m-m_1} + C_{n_A}^{m_2} C_{n_B}^{m-m_2} + \dots + C_{n_A}^{m_k} C_{n_B}^{m-m_k}}{C_n^m}. \end{aligned}$$

Замечание. Если k велико, то удобно перейти от интересующего нас события к противоположному, учитывая, что сумма вероятностей этих двух событий равна 1.

ПРИМЕР. Найти вероятность того, что среди шести карт, наугад взятых из колоды в 36 карт, окажутся ровно три фигуры черного цвета.

РЕШЕНИЕ. При конечном числе равновозможных элементарных исходов вероятность события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Элементарный исход — это произвольный набор 6 карт из колоды в 36 карт.

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

В данном случае равновозможность элементарных исходов определяется методикой выбора карт. Предполагаем, что она гарантирует равновозможность элементарных исходов.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события (благоприятные исходы).

Признак, по которому карты относятся к множеству A , — черная фигура, т.е. туз, король, дама, валет трэф либо пик. A содержит только эти карты, а B — все остальные.

Благоприятные исходы формируются путем произвольного выбора $m_1 = 3$ карт из множества A и произвольного выбора $m - m_1 = 6 - 3 = 3$ карт из множества B .

4. Подсчитываем общее число элементарных исходов N (число элементов пространства элементарных исходов).

Поскольку элементарный исход — это произвольный набор из $m = 6$ карт и полное число карт равно 36, число элементарных исходов равно числу подмножеств из 6 элементов в множестве из 36 элементов, т.е.

$$N = C_{36}^6 = \frac{36!}{6!(36-6)!} = \frac{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1947792.$$

5. Подсчитываем число элементарных исходов $N(m_1)$, благоприятствующих заданному событию.

Для этого определяем числа элементов в множествах A и B , т.е. числа n_A и n_B ($n_A + n_B = n$). Имеем $n_A = 8$ (туз, король, дама, валет трэф и пик) и $n_B = 28$ ($n_A + n_B = 8 + 28 = 36 = n$).

Благоприятные исходы формируются путем произвольного выбора $m_1 = 3$ карт из множества A , состоящего из $n_A = 8$ карт, и произвольного выбора $m - m_1 = 6 - 3 = 3$ карт из множества B , состоящего из $n_B = 28$ карт. Поэтому число благоприятных исходов равно

$$N(3) = C_8^3 C_{28}^3 = \frac{8!}{3! 5!} \cdot \frac{28!}{3! 25!} = 183456.$$

6. Согласно классическому определению вероятности

$$P(3) = \frac{N(3)}{N} = \frac{C_8^3 C_{28}^3}{C_{36}^6} = \frac{183456}{1947792} = \frac{546}{5797} \approx 0.0942.$$

Ответ. $P(3) = C_8^3 C_{28}^3 / C_{36}^6 \approx 0.0942$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.

1. Среди N лотерейных билетов M выигрышных. Найти вероятность того, что из n ($n \leq N$) купленных билетов ровно m ($m \leq M$) билетов будут выигрышными.

2. В игре „Спортлото“ участник отмечает на карточке 6 из 49 видов спорта. Найти вероятность того, что он угадает по крайней мере три из шести видов спорта, полученных в результате розыгрыша.

3. Найти вероятность того, что среди шести карт, наудачу взятых из колоды в 36 карт, будет ровно два туза.

4. Найти вероятность того, что среди шести карт, наудачу взятых из колоды в 36 карт, будет пять карт одного цвета, а шестая — другого.

5. В ящике имеются 10 белых и 15 черных шаров. Наудачу извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них будет ровно два белых шара.

6. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают семь костей. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками.

7. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают семь костей. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы два дубля.

8. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают семь костей. Найти вероятность того, что суммарное число очков на каждой кости меньше 7.

9. Студент в состоянии удовлетворительно ответить на 20 билетов из 25. Преподаватель разрешает один раз заменить не понравившийся студенту билет на другой. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен.

10. Из студенческой группы, в которой 10 студентов и 12 студенток, для анкетирования произвольным образом отбирают 5 человек. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна студентка.

Ответы. 1. $C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n$. 2. $(C_6^3 C_{43}^3 + C_6^4 C_{43}^2 + C_6^5 C_{43}^1 + 1) / C_{49}^6$.
 3. $C_4^2 C_{32}^4 / C_{36}^6$. 4. $2 C_{18}^5 C_{18}^1 / C_{36}^6$. 5. $C_{10}^2 C_{15}^3 / C_{25}^5$. 6. $1 - C_{21}^7 / C_{28}^7$.
 7. $1 - (C_{21}^7 + C_{21}^1 C_{21}^6) / C_{28}^7$. 8. C_{16}^7 / C_{28}^7 . 9. $1 - C_5^2 / C_{25}^2$. 10. $1 - C_{10}^5 / C_{22}^5$.

6.3. Размещение шаров по ящикам

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Имеется r шаров, которые наудачу размещаются по n ящикам, причем каждый ящик может вместить сразу все шары. Требуется найти вероятность некоторого случайного события A , определяемого распределением шаров по ящикам.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. При конечном числе равновозможных элементарных исходов вероятность события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Пронумеруем все ящики и все шары. Тогда элементарным исходом рассматриваемого случайного эксперимента является набор чисел $(i_1, i_2, \dots, i_r)$, где i_1 — номер ящика, в котором оказался первый шар, i_2 — номер ящика, в котором оказался второй шар, и т.д. Очевидно, что каждое из чисел $i_1, i_2, \dots, i_r$ может принимать любое натуральное значение от 1 до n .

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

Предполагается, что она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, т.е. размещения шаров по ящикам.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события A (благоприятные исходы).

Критерием отбора служит описание события A .

4. Подсчитываем общее число элементарных исходов N (число элементов пространства элементарных исходов).

Число элементарных исходов равно n^r , поскольку на каждой из r позиций в наборе $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ может быть любое из n чисел $1, 2, \dots, n$ и эти позиции заполняются независимо друг от друга.

5. Подсчитываем число элементарных исходов N_A , благоприятствующих событию A .

Это делается непосредственно или с помощью комбинаторики.

6. Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

ПРИМЕР. Имеется n ящиков и r шаров. Шары наудачу размещаются по ящикам. Найти вероятность того, что в i -ый ящик попадет k шаров, а в ящики с номерами $1, 2, \dots, i-1$ попадет в совокупности l шаров ($k+l \leq r$).

РЕШЕНИЕ. При конечном числе равновозможных элементарных исходов вероятность события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Пронумеруем все ящики и все шары. Тогда элементарным исходом рассматриваемого случайного эксперимента является набор чисел $(i_1, i_2, \dots, i_r)$, где i_1 — номер ящика, в котором оказался первый шар, i_2 — номер ящика, в котором оказался второй шар, и т.д. Очевидно, что каждое из чисел $i_1, i_2, \dots, i_r$ может принимать любое натуральное значение от 1 до n .

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

Предполагается, что она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, т.е. размещения шаров по ящикам.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события A (благоприятные исходы).

Элементарный исход благоприятен, если в i -ом ящике будет k шаров, а в первом, втором, $\dots$, $(i-1)$ -ом ящиках в совокупности будет l шаров.

4. Подсчитываем общее число элементарных исходов N (число элементов пространства элементарных исходов).

Число элементарных исходов равно n^r , поскольку на каждой из r позиций в наборе $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ может быть любое из n чисел $1, 2, \dots, n$ и эти позиции заполняются независимо друг от друга.

5. Подсчитываем число элементарных исходов N_A , благоприятствующих событию A .

Во-первых, существует C_r^k способов отобрать k шаров, которые будут в i -ом ящике.

Во-вторых, существует C_{r-k}^l способов отобрать из оставшихся $(r-k)$ шаров l шаров, которые будут размещены в первых $(i-1)$ ящиках. Число способов разместить эти l шаров по $(i-1)$ ящикам равно $(i-1)^l$.

В-третьих, число способов разместить оставшиеся $(n-k-l)$ шаров по оставшимся $(n-i)$ ящикам равно $(n-i)^{r-k-l}$.

Следовательно, число благоприятных исходов равно

$$N_A = C_r^k C_{r-k}^l (i-1)^l (n-i)^{r-k-l}.$$

6. Согласно классическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{C_r^k C_{r-k}^l (i-1)^l (n-i)^{r-k-l}}{n^r}.$$

Ответ. $P(A) = C_r^k C_{r-k}^l (i-1)^l (n-i)^{r-k-l} / n^r$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Имеется n ящиков и r шаров. Шары наудачу размещаются по ящикам. Найти вероятность указанного случайного события.

1. Все шары окажутся в разных ящиках ($r \leq n$).
2. Хотя бы два шара окажутся в одном ящике ($r \leq n$).
3. Все шары попадут в один фиксированный ящик.
4. В один фиксированный ящик попадет ровно k шаров, а в другой фиксированный ящик — l шаров ($k+l \leq r$).
5. В i -ый ящик попадет r_i шаров, $i = 1, 2, \dots, n$; $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.
6. Все шары попадут в один ящик.
7. В фиксированный ящик попадет ровно k шаров ($k \leq r$).
8. Все шары попадут в два ящика.
9. Все шары попадут в два фиксированных ящика.
10. Лишь один ящик будет пустым.

Ответы. 1. $n! / [(n-r)! n^r]$. 2. $1 - n! / [(n-r)! n^r]$. 3. $1/n^r$.
 4. $C_r^k C_{r-k}^l (n-2)^{r-k-l} / n^r$. 5. $C_r^{r_1} C_{r-r_1}^{r_2} C_{r-r_1-r_2}^{r_3} \cdot \dots \cdot C_{r_{n-1}+r_n}^{r_n} / n^r$.
 6. $1/n^{r-1}$. 7. $C_r^k (n-1)^{r-k} / n^r$. 8. C_n^{2r} / n^r . 9. $2^r / n^r$. 10. $(n-1)^r / n^{r-1}$.

6.4. Геометрические вероятности (ограниченная область)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Точка наудачу выбирается в некоторой плоской ограниченной области D . Слово „наудачу“ здесь означает, что ни один из участков области D не является (по каким-либо соображениям) более предпочтительным, чем любой другой равный ему по площади участок области D . Найти вероятность того, что выбранная точка окажется в некоторой области $G \subset D$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. При бесконечном числе равновозможных (в указанном выше смысле) элементарных исходов, представленных точками области на плоскости, вероятность события равна отношению площади множества элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к площади всего множества элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

В данном случае оно совпадает с областью D .

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

В данном случае она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, поскольку, как сказано в условии задачи, ни один из участков области D не является (по каким-либо соображениям) более предпочтительным, чем любой другой равный ему по площади участок области D .

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению события A (благоприятные исходы).

В данном случае множество благоприятных исходов совпадает с областью G .

4. Находим площадь $S(D)$ области D .

Для этого удобно изобразить область D графически.

5. Находим площадь $S(G)$ области G .

Для этого удобно изобразить область G графически.

6. Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(D)}.$$

Замечание. Аналогично вычисляется соответствующая вероятность в случае, когда выбор точки наудачу происходит в ограниченной области на прямой или в пространстве. При этом площадь заменяется на длину или объем.

ПРИМЕР. Две точки независимо друг от друга наудачу выбираются на отрезке $[0, 1]$. Найти вероятность того, что произведение координат точек будет больше 0.4.

РЕШЕНИЕ. При бесконечном числе равновозможных элементарных исходов, представленных точками области на плоскости, вероятность события равна отношению площади множества элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к площади всего множества элементарных исходов.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Пусть ξ и η — координаты первой и второй точек, выбранных на $[0, 1]$. Тогда каждый элементарный исход представляется упоря-

доченной парой (ξ, η) вещественных чисел. Каждой такой паре соответствует точка квадрата $D = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$ на плоскости XOY . Наоборот, каждой точке (x, y) квадрата D соответствуют две точки на отрезке $[0, 1]$, имеющие координаты x и y , т.е. некоторый исход случайного эксперимента.

Итак, пространство элементарных исходов совпадает с квадратом D . Выбрать две точки отрезка $[0, 1]$ — это то же самое, что выбрать одну точку квадрата D .

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

В данном случае она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, поскольку, как сказано в условии задачи, обе точки выбираются на отрезке наудачу. Соответственно, ни один из участков квадрата D не является более предпочтительным, чем любой другой равный ему по площади участок квадрата D .

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению интересующего нас события (благоприятные исходы).

Нас интересует вероятность события $A = \{\xi \eta > 0.4\}$. Ему соответствует область $G = \{(x, y) : xy > 0.4\} \cap D$ (см. рис. 6.1).

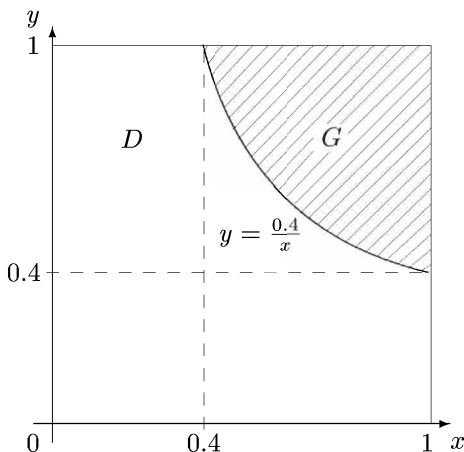


Рис. 6.1

4. Находим площадь $S(D)$ области D . Очевидно, что $S(D) = 1$.

5. Находим площадь $S(G)$ области G . Имеем

$$S(G) = \int_{0.4}^1 \left(1 - \frac{0.4}{x}\right) dx = \left(x - 0.4 \ln x\right) \Big|_{0.4}^1 = 0.6 + 0.4 \ln 0.4.$$

6. Согласно геометрическому определению вероятности

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(D)} = 0.6 + 0.4 \ln 0.4 \approx 0.2335.$$

Ответ. $P(A) = 0.6 + 0.4 \ln 0.4 \approx 0.2335$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Две точки независимо друг от друга наудачу выбираются на отрезке $[0, 1]$. Найти вероятность указанного события.*

1. Координата первой точки меньше координаты второй точки.
2. Координата второй точки более чем в два раза превосходит координату первой точки.
3. Разность координат первой и второй точек больше 0.5.
4. Сумма координат точек меньше 1.5.
5. Частное от деления координаты первой точки на координату второй точки больше 0.5.
6. Сумма квадратов координат больше 1.
7. Разность квадратов координат первой и второй точек больше 0.25.
8. Сумма координат больше удвоенного произведения координат.
9. Утроенное произведение координат меньше суммы квадратов координат.
10. Модуль разности координат точек меньше $1/6$.

Ответы. 1. $1/2$. 2. $1/4$. 3. $1/8$. 4. $7/8$. 5. $3/4$. 6. $1 - \pi/4$.
7. $\sqrt{3}/4 - \ln(2 + \sqrt{3})/8$. 8. 1. 9. $(3 - \sqrt{5})/2$. 10. $25/36$.

6.5. Геометрические вероятности (неограниченная область)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Точка наудачу выбирается на всей плоскости. Найти вероятность того, что она окажется в некоторой неограниченной области G . При этом предполагается, что плоскость может быть разбита прямыми на равные прямоугольные ячейки так, что если закрасить область G одним цветом, а ее дополнение до всей плоскости — другим, то все ячейки будут иметь одинаковый вид. (Структура плоскости подобна двухцветному паркету, в котором одним цветом окрашена область G , а другим — остальная область.)*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Искомая вероятность равна отношению площади области благоприятных исходов в одной ячейке к площади всей ячейки.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

В данном случае им является любая из равных прямоугольных ячеек, на которые разбивается плоскость и которые содержат равные части области G и равные части ее дополнения. Обозначим такую ячейку символом D .

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

В данном случае она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, поскольку, как сказано в условии задачи, точка выбирается наудачу.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению интересующего нас события (благоприятные исходы).

Ясно, что множество благоприятных исходов совпадает с $G \cap D$.

4. Находим площадь $S(D)$ ячейки D .

Для этого удобно изобразить ячейку D графически.

5. Находим площадь $S(G \cap D)$ той части области G , которая лежит в D .

Для этого удобно изобразить область $G \cap D$ графически.

6. Искомая вероятность равна

$$\frac{S(G \cap D)}{S(D)}.$$

Замечание. Аналогично вычисляется соответствующая вероятность в случае, когда выбор точки наудачу происходит в неограниченной области на прямой или в пространстве. При этом площадь заменяется на длину или объем.

ПРИМЕР. Плоскость разбита прямыми на квадратные клетки со стороной a . Клетки пронумерованы при помощи пар целых чисел (m, n) (при этом у соседней справа клетки будет номер $(m + 1, n)$, а у соседней сверху клетки будет номер $(m, n + 1)$). Найти вероятность того, что брошенная наудачу на плоскость монета радиуса $r < a/2$ целиком попадет в какую-нибудь клетку, для которой $m + n$ кратно трем.

РЕШЕНИЕ. Бросание монеты наудачу равносильно выбору наудачу точки, в которой будет расположен центр монеты. Искомая вероятность равна отношению площади области благоприятных исходов в одной ячейке к площади всей ячейки.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

В данном случае им является любая из равных прямоугольных ячеек, на которые разбивается плоскость и которые содержат равные части множества благоприятных исходов G и равные части его дополнения до всей плоскости. Обозначим такую ячейку символом D . Чтобы найти D , заметим, что если некоторая клетка (m, n) удовлетворяет требуемому условию, то ему удовлетворяют и клетки $(m + 3, n)$, $(m - 3, n)$, $(m, n + 3)$, $(m, n - 3)$, т.е. имеет место периодичность по горизонтали с периодом 3 и по вертикали с периодом 3. Поэтому в качестве ячейки D можно взять область, составленную из клеток $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$ и $(2,2)$.

2. Проверяем равновозможность элементарных исходов.

В данном случае она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, поскольку, как сказано в условии задачи, монета бросается наудачу.

3. Отбираем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению интересующего нас события (благоприятные исходы).

Ясно, что среди клеток ячейки D сумма координат $m + n$ делится на три только у клеток $(0,0)$, $(1,2)$ и $(2,1)$.

Для того чтобы монета оказалась внутри некоторой клетки, необходимо и достаточно, чтобы центр монеты находился в одной из точек, расположенных внутри клетки на расстоянии большем r от границы этой клетки. На рис. 6.2 изображена ячейка D и заштрихована область благоприятных исходов $G \cap D$.

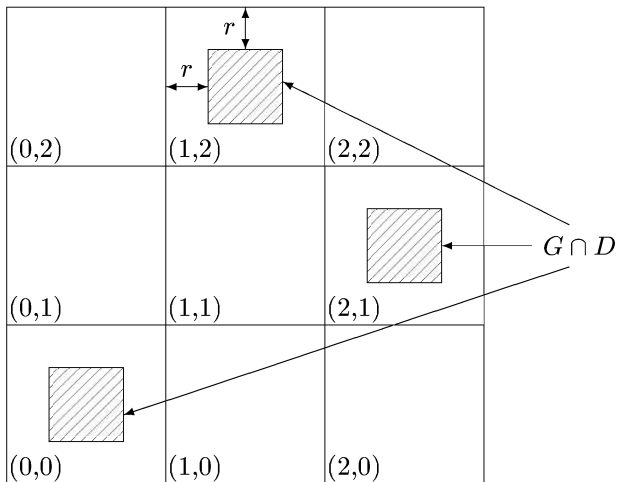


Рис. 6.2

4. Находим площадь $S(D)$ ячейки D . Имеем $S(D) = 9a^2$.
5. Находим площадь $S(G \cap D)$ области $G \cap D$. Имеем $S(G \cap D) = 3(a - 2r)^2$.
6. Искомая вероятность равна

$$\frac{S(G \cap D)}{S(D)} = \frac{(a - 2r)^2}{3a^2}.$$

Ответ. $(a - 2r)^2/(3a^2)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Плоскость разбита прямыми на квадратные клетки со стороной a . Клетки пронумерованы при помощи пар целых чисел (m, n) (при этом у соседней справа клетки будет номер $(m + 1, n)$, а у соседней сверху клетки будет номер $(m, n + 1)$). На плоскость наудачу бросается монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета целиком попадет в клетку с номером, удовлетворяющим указанному условию.

1. m чётно.
2. $m + n$ чётно.
3. $m^2 + n^2$ кратно трем.
4. Или m чётно, или n кратно трем.
5. m кратно трем, а n не делится на три.
6. Ни m , ни n не делится на три.
7. $m + n$ кратно четырем.
8. Или m кратно трем, или n кратно трем.
9. $m + 2n$ кратно трем.
10. $m^2 - n^2$ кратно четырем.

- Ответы. 1. $(a - 2r)^2/(2a^2)$. 2. $(a - 2r)^2/(2a^2)$. 3. $(a - 2r)^2/(9a^2)$.
 4. $2(a - 2r)^2/(3a^2)$. 5. $2(a - 2r)^2/(9a^2)$. 6. $4(a - 2r)^2/(9a^2)$.
 7. $(a - 2r)^2/(4a^2)$. 8. $5(a - 2r)^2/(9a^2)$. 9. $(a - 2r)^2/(3a^2)$.
 10. $(a - 2r)^2/(2a^2)$.

6.6. Независимые события

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предположим, что некоторое случайное событие A может быть выражено через независимые случайные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ при помощи операций объединения, пересечения, вычитания. Вероятности событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ известны. Требуется найти вероятность события A .

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Выражаем событие A через $A_1, A_2, \dots, A_n$.
2. Вычисляем вероятность события A , используя следующие формулы для независимых случайных событий $B_1, B_2, \dots, B_m$:

$$\text{а) } P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = \prod_{i=1}^m P(B_i);$$

$$\text{б) } P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - P(B_i)).$$

ПРИМЕР. Вероятность выхода из строя в течение времени T i -го проводящего элемента цепи, изображенной на рис. 6.3, равна p_i . Все элементы цепи функционируют независимо друг от друга. Найти вероятность того, что вся цепь не выйдет из строя в течение времени T , т.е. что по цепи может течь ток.

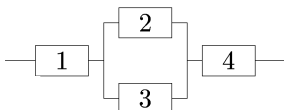


Рис. 6.3

РЕШЕНИЕ. Введем случайные события

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{вся цепь не выйдет из строя} \\ \text{в течение времени } T \end{array} \right\},$$

$$A_i = \left\{ \begin{array}{l} i\text{-ый элемент цепи не выйдет} \\ \text{из строя в течение времени } T \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

По условию события A_1, A_2, A_3, A_4 независимы и $P(A_i) = 1 - p_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Выразим событие A через A_1, A_2, A_3, A_4 . Из рис. 6.3 видно, что

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) \cap A_4.$$

События $A_1, A_2 \cup A_3, A_4$ являются независимыми, поэтому

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \cup A_3)P(A_4).$$

События A_2 и A_4 являются независимыми, поэтому

$$P(A_2 \cup A_3) = 1 - (1 - P(A_2))(1 - P(A_3)).$$

Из двух последних формул находим, что

$$P(A) = P(A_1) [1 - (1 - P(A_2)) (1 - P(A_3))] P(A_4).$$

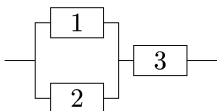
Отсюда, учитывая, что $P(A_i) = 1 - p_i$, получаем искомую вероятность:

$$P(A) = (1 - p_1)(1 - p_2 p_3)(1 - p_4).$$

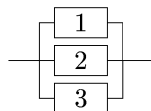
Ответ. $(1 - p_1)(1 - p_2 p_3)(1 - p_4)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вероятность выхода из строя в течение некоторого времени T i -го элемента указанной цепи равна p_i . Все элементы цепи функционируют независимо друг от друга. Найти вероятность того, что вся цепь не выйдет из строя в течение времени T .

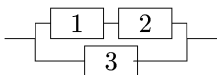
1.



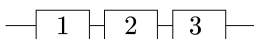
2.



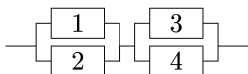
3.



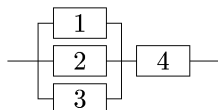
4.



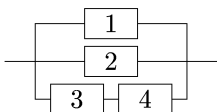
5.



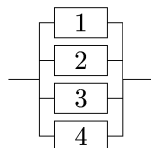
6.



7.



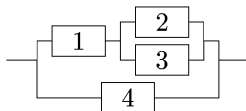
8.



9.



10.



Ответы. 1. $(1 - p_1 p_2)(1 - p_3)$. 2. $1 - p_1 p_2 p_3$. 3. $1 - [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)]p_3$. 4. $(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$. 5. $(1 - p_1 p_2)(1 - p_3 p_4)$. 6. $(1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4)$. 7. $1 - p_1 p_2 [1 - (1 - p_3)(1 - p_4)]$. 8. $1 - p_1 p_2 p_3 p_4$. 9. $(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)$. 10. $1 - p_4 [1 - (1 - p_1)(1 - p_2 p_3)]$.

6.7. Схема Бернулли: фиксированное число испытаний

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Проводятся независимые испытания, в каждом из которых возможны два исхода: успех (У) и неудача (Н), причем вероятность успеха p во всех испытаниях одна и та же, а вероятность неудачи равна q ($p + q = 1$). Найти вероятность некоторого случайного события, связанного с числом успехов в каждом из n испытаний.

Замечание. Последовательность испытаний, о которой говорится в условии, называется схемой Бернулли, а сами испытания иногда называют испытаниями Бернулли. Примерами схемы Бернулли являются бросания мяча в баскетбольную корзину (успех — попадание, неудача — промах), покупка лотерейных билетов (успех — выигрышный билет, неудача — проигрышный) и т.п.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Каждый результат проведения n испытаний может быть представлен „цепочкой“ символов У и Н, например, УУННУ...Н. Ввиду независимости испытаний вероятность каждой конкретной цепочки равна $p^k q^{n-k}$, где k — число символов У, встречающихся в цепочке.

Для нахождения вероятности исходного события следует отобрать все цепочки, приводящие к данному событию, и сложить их вероятности.

Часто используется формула Бернулли для числа успехов μ_n в n испытаниях Бернулли:

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

ПРИМЕР 1. Проводятся 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность того, что будет всего две неудачи, а между ними три успеха.

РЕШЕНИЕ. К данному событию приводят цепочки

НУУУНУУУУУ	УУУУНУУУУУ
УНУУУНУУУУ	УУУУНУУУУН
УУНУУУНУУУ	УУУУУНУУУН

Вероятность каждой такой цепочки равна $p^8 q^2$, а число таких цепочек равно 6. Поэтому искомая вероятность равна $6p^8 q^2$.

Ответ. $6p^8 q^2$.

ПРИМЕР 2. Проводятся 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность того, что число успехов в первой половине испытаний будет равно числу успехов во второй половине испытаний.

РЕШЕНИЕ. Пусть μ_5 и $\tilde{\mu}_5$ – число успехов в первой половине и во второй половине испытаний соответственно. Очевидно, что события $\{\mu_5 = k\}$, $\{\tilde{\mu}_5 = l\}$ являются независимыми. Интересующее нас событие можно представить в виде объединения несовместных событий

$$\bigcup_{k=0}^5 \{\mu_5 = k, \tilde{\mu}_5 = k\}.$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$\sum_{k=0}^5 P(\mu_5 = k, \tilde{\mu}_5 = k) = \sum_{k=0}^5 P(\mu_5 = k)P(\tilde{\mu}_5 = k) = \sum_{k=0}^5 (C_5^k p^k q^{5-k})^2$$

(заключительное равенство следует из формулы Бернулли).

Ответ. $\sum_{k=0}^5 (C_5^k p^k q^{5-k})^2.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Проводятся 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность следующего случайного события.

1. Число успехов не меньше трех.
2. Число успехов больше 5, но меньше 8.
3. Число успехов в первой половине испытаний на два больше числа успехов во второй половине испытаний.
4. Число успехов в первой половине испытаний меньше, чем во второй половине испытаний.
5. Всего три успеха, причем последнее испытание завершилось успехом.
6. Успехи и неудачи чередуются.
7. Всего три успеха, причем все они в последних трех испытаниях.
8. Всего три успеха, причем все они во второй половине испытаний.
9. Число успехов больше числа неудач.
10. Число успехов не менее чем в два раза превосходит число неудач.

Ответы.

1. $1 - \sum_{k=0}^2 C_{10}^k p^k q^{10-k}$. 2. $C_{10}^6 p^6 q^4 + C_{10}^7 p^7 q^3$. 3. $\sum_{k=0}^3 C_5^k C_5^{k+2} p^{2k+2} q^{8-2k}$.
4. $\frac{1}{2} \left[1 - \sum_{k=0}^5 (C_5^k p^k q^{5-k})^2 \right]$. 5. $C_9^2 p^3 q^7$. 6. $2p^5 q^5$. 7. $p^3 q^7$. 8. $C_5^3 p^3 q^7$.
9. $\sum_{k=6}^{10} C_{10}^k p^k q^{10-k}$. 10. $\sum_{k=7}^{10} C_{10}^k p^k q^{10-k}$.

6.8. Схема Бернулли: неограниченное число испытаний

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть проводятся испытания Бернулли с вероятностью успеха p , причем число испытаний заранее не оговорено. Следует найти вероятность случайного события, связанного с некоторыми случайными моментами времени.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Как и в случае фиксированного числа испытаний Бернулли, выписываем все конечные „цепочки“ символов У и Н, приводящие к данному событию (как правило, число таких цепочек бесконечно), а затем суммируем их вероятности.

ПРИМЕР. Проводится неограниченное число испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность того, что первый успех произойдет на n -ом испытании, а второй успех — после m -го испытания ($m > n$).

РЕШЕНИЕ. К данному событию приводят „цепочки“ Н...НУН...НУ, где первая серия символов Н состоит из $(n-1)$ -го элемента, а вторая серия — из k элементов, где $k \geq m-n$. Вероятность такой цепочки равна $q^{n-1} p q^k p$, поэтому искомая вероятность равна

$$\sum_{k=m-n}^{+\infty} q^{n+k-1} p^2 = p^2 (q^{m-1} + q^m + \dots) = \frac{p^2 q^{m-1}}{1-q} = p q^{m-1}.$$

Ответ. $p q^{m-1}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Проводится неограниченное число испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Найти вероятность указанного случайного события.

1. Первый успех произойдет на n -ом испытании.
2. Первый успех произойдет после n -го испытания.

3. Серия из двух последовательных успехов наступит раньше серии из двух последовательных неудач.
4. Серия из двух последовательных успехов наступит раньше серии из успеха и последующей неудачи.
5. До момента наступления n -го успеха будет ровно m неудач.
6. До момента наступления n -го успеха будет не менее m неудач.
7. Первый и второй успехи произойдут подряд.
8. Первый успех произойдет раньше n -го испытания, а второй — после него.
9. Второй успех произойдет на n -ом испытании.
10. Между первым и вторым успехами будет n испытаний.

Ответы. 1. pq^{n-1} . 2. q^n . 3. $p^2(1+q)/(1-pq)$. 3. p . 5. $C_{n+m-1}^m p^n q^m$.
 6. $1 - \sum_{k=0}^{m-1} C_{n+k+1}^k p^n q^k$. 7. p . 8. $(n-1)pq^{n-1}$. 9. $(n-1)p^2q^{n-2}$. 10. pq^n .

6.9. Большое число испытаний Бернулли: формулы Муавра–Лапласа и Пуассона

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Проводится большое число испытаний Бернулли. Найти вероятность некоторого события, связанного с общим числом успехов.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Пусть n — число испытаний Бернулли и p — вероятность успеха в одном испытании, $q = 1 - p$. Если n велико, то использование формулы Бернулли $C_n^k p^k q^{n-k}$ для вероятности k успехов потребует громоздких вычислений, причем результат этих вычислений, наверное, окажется ошибочным из-за ошибок округления. Поэтому следует использовать приближенные формулы для $C_n^k p^k q^{n-k}$. К ним относятся формулы Муавра–Лапласа

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \quad (1)$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2} du, \quad (2)$$

где $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ и $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$, и Пуассона

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a = np; \quad (3)$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (4)$$

Относительная погрешность формул (1) и (2) примерно равна

$$\frac{2(k - np)}{npq} + \frac{1 + pq}{10npq}.$$

Поэтому формулы (1) и (2) применимы, когда

$$npq \gg 1, \quad k \approx np. \quad (5)$$

Относительная погрешность формул (3) и (4) равна

$$\max \left\{ kp, \frac{k^2}{n - k} + \frac{np^2}{q} \right\}.$$

Поэтому формулы (3) и (4) применимы, когда

$$n \gg k^2, \quad np^2 \ll 1, \quad kp \ll 1. \quad (6)$$

Очевидно, что формулы (3) и (4) относятся к маловероятным событиям (p и k малы).

1. Выбираем приближенную формулу для вычисления $C_n^k p^k q^{n-k}$. Для этого выясняем, выполняются условия (5) или условия (6). Если p и k малы, то проверку начинаем с условий (6), в ином случае — с условий (5).

2. Находим приближенное значение $C_n^k p^k q^{n-k}$. Для этого в случае, когда применимы формулы (1) и (2), используем таблицы значений функций *)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2} du = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (7)$$

*) Используя единые обозначения и названия функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$, авторы разных книг определяют их разными формулами.

В случае, когда применимы формулы (3) и (4), используем таблицы значений функций

$$p_a(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad \text{и} \quad P_a(m) = \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (8)$$

Тогда

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = P_a(k_2) - P_a(k_1).$$

3. Вычисляем погрешность использованной приближенной формулы.

4. Округляем полученное значение вероятности с учетом найденной погрешности.

ПРИМЕР. Молодежное радио для привлечения внимания слушателей разыгрывает среди них призы и суперпризы. Призы разыгрываются в течение шестнадцати часов (по одному призу в час), а суперпризы разыгрываются в четыре вечерних часа (также по одному суперпризу в час). Вероятность того, что слушатели выиграют приз, равна 0.3, а суперприз — 0.02.

Найти вероятность того, что за 30 дней

- а) слушатели выиграют три суперприза;
- б) слушатели выиграют от 130 до 160 призов.

РЕШЕНИЕ. Розыгрыши суперпризов представляют собой независимые испытания с двумя исходами: если слушатели выиграли суперприз — это успех, если же суперприз никому не достался — это неудача. Вероятность успеха во всех испытаниях одна и та же. Аналогичная ситуация с розыгрышем призов. Итак, в обоих случаях (а) и (б) применима формула Бернулли:

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где μ_n — число успехов в n испытаниях.

В случае (а) $n = 30 \cdot 4 = 120$, $p = 0.02$, и нас интересует вероятность $P(\mu_n = k)$ при $k = 3$:

$$P(\mu_n = 3) = C_{120}^3 \cdot 0.02^3 \cdot 0.98^{117}.$$

В случае (б) $n = 30 \cdot 16 = 480$, $p = 0.3$, и нас интересует вероятность

$$P(130 \leq \mu_n \leq 160) = \sum_{k=130}^{160} C_{480}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{480-k}.$$

Случай (а).

1. Выбираем приближенную формулу для вычисления величины $C_{120}^3 \cdot 0.02^3 \cdot 0.98^{117}$. Для этого выясняем, выполняются условия (5) или условия (6).

Поскольку в случае (а) $p = 0.02$ и $k = 3$ малы, проверяем условия (6):

$$n = 120 \gg 9 = k^2, \quad np^2 = 0.048 \ll 1, \quad kp = 0.06 \ll 1.$$

Следовательно, применимы формулы (3) и (4).

2. Находим приближенное значение $C_{120}^3 \cdot 0.02^3 \cdot 0.98^{117}$ по формуле (3). Имеем $a = np = 2.4$ и с помощью калькулятора получаем:

$$\frac{2.4^3}{3!} e^{-2.4} \approx 0.209.$$

3. Вычисляем относительную погрешность формулы (3):

$$\max \left\{ kp, \frac{k^2}{n-k} + \frac{np^2}{q} \right\} = \max \left\{ 0.06, \frac{9}{117} + \frac{0.048}{0.98} \right\} \approx 0.126.$$

4. Округляем число 0.209 с учетом найденной погрешности формулы (3). Получаем приближенное значение искомой вероятности:

$$P(\mu_n = 3) \approx 0.2.$$

Случай (б).

1. Выбираем приближенную формулу для вычисления величины $C_{480}^k \cdot 0.3^k \cdot 0.7^{480-k}$ при $130 \leq k \leq 160$. Для этого выясняем, выполняются условия (5) или условия (6).

Поскольку в случае (б) значения k не малы, проверяем условия (5):

$$npq = 480 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 100.8 \gg 1, \quad np = 144 \approx k \in [130, 160].$$

Следовательно, применимы формулы (1) и (2).

2. Находим приближенное значение $P(130 \leq \mu_n \leq 160)$, используя формулу (2):

$$\begin{aligned} P(130 \leq \mu_n \leq 160) &\approx \Phi \left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{160 - 144}{\sqrt{100.8}} \right) - \Phi \left(\frac{130 - 144}{\sqrt{100.8}} \right) \approx 0.8629. \end{aligned}$$

3. Вычисляем относительную погрешность формулы (2):

$$\frac{2(k - np)}{npq} + \frac{1 + pq}{10npq} = \frac{2 \cdot 16}{100.8} + \frac{1.21}{1008} \approx 0.32.$$

4. Округляем число 0.8644 с учетом найденной погрешности формулы (2). Получаем приближенное значение искомой вероятности:

$$P(130 \leq \mu_n \leq 160) \approx 0.9.$$

Ответ. а) 0.2; б) 0.9.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.

1. В лотерее разыгрываются крупные и мелкие выигрыши. Вероятность того, что на лотерейный билет выпадет крупный выигрыш равна 0.001, а мелкий — 0.01. Куплено 1000 билетов. Найти вероятность того, что

а) крупных выигрышей будет 2;

б) мелких выигрышей будет от 5 до 15.

2. Студенты выполняют за два года 15 типовых расчетов по математике, содержащих по 20 задач. Вероятность неверно решить отдельную задачу с помощью компьютерного пакета РЕШЕБНИК.ВМ равна 0.01, без помощи пакета — 0.2. Найти вероятность того, что за 2 года

а) студент, постоянно пользующийся пакетом РЕШЕБНИК.ВМ, решил неверно не более 5 задач;

б) студент, не пользующийся пакетом РЕШЕБНИК.ВМ, решил неверно от 50 до 70 задач.

3. Известно, что левши составляют в среднем 1 %, а люди, одинаково владеющие левой и правой рукой, — 10 % (остальные — правши). Найти вероятность того, что среди двухсот людей

а) окажется по меньшей мере четверо левшей;

б) окажется от 18 до 23 людей, одинаково владеющими обеими руками.

4. Предполагая рождение ребенка в любой день года равновероятным, найти вероятность того, что в группе из 200 человек

а) ровно трое родились 1 января;

б) от 48 до 53 человек родились весной.

5. В ралли принимают участие 500 экипажей. Каждый экипаж может сойти с дистанции из-за технических неполадок с вероятностью 0.05, а из-за болезни водителя — с вероятностью 0.01. Найти вероятность того, что

а) больше 5 экипажей сойдут с дистанции из-за болезни водителя;
б) от 22 до 28 экипажей сойдут с дистанции из-за технических неполадок.

6. Магазин закупил 1000 телевизоров и 1000 магнитол. Вероятность того, что отдельный телевизор окажется бракованным, равна 0.005, а вероятность того, что магнитола окажется бракованной, — 0.04. Найти вероятность того, что в этой закупке

- а) не менее четырех телевизоров окажутся бракованными;
- б) от 35 до 45 магнитол окажутся бракованными.

7. Радиомастерская за день ремонтирует 2 магнитолы. Вероятность неисправности в механической части отдельной магнитолы равна 0.2, в электронной части — 0.005. Найти вероятность того, что среди магнитол, отремонтированных за год

- а) имели неисправности в механической части от 140 до 150 магнитол;
- б) имели неисправности в электронной части не более пяти магнитол;

8. Вероятность появления хотя бы одной опечатки на отдельной странице книги равна 0.01, а погрешности верстки — 0.3. Найти вероятность того, что в книге из 500 страниц

- а) хотя бы на четырех страницах будут опечатки;
- б) от 140 до 170 страниц будут иметь погрешности верстки.

9. Стрелок попадает в цель из пистолета с вероятностью 0.8, а из снайперской винтовки — с вероятностью 0.98. Найти вероятность того, что сделав по 100 выстрелов по цели из каждого оружия, стрелок

- а) промахнется из снайперской винтовки не более двух раз;
- б) промахнется из пистолета от 18 до 23 раз.

10. Вероятность выиграть отдельному игроку 1000 рублей в игре „Кто хочет стать миллионером“ равна 0.3, а 32 000 руб. — 0.01. За сезон в этой игре принимает участие 300 человек. Найти вероятность того, что за сезон

- а) 1000 рублей получают от 80 до 100 игроков;
- б) 32 000 рублей получают не более четырех игроков;

Ответы. *) 1. а) 0.1839; б) 0.8880. 2. а) 0.9161; б) 0.8511.
3. а) 0.1429; б) 0.4416. 4. а) 0.0159; б) 0.3159. 5. а) 0.3840; б) 0.4618.
6. а) 0.7350; б) 0.5803. 7. а) 0.6130; б) 0.8372. 8. а) 0.7350; б) 0.8100.
9. а) 0.6767; б) 0.4648. 10. а) 0.7923; б) 0.8153.

*) Ответы приведены без округления.

6.10. Простейший поток событий

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Найти вероятность случайного события, связанного с числом событий простейшего потока на определенном временном промежутке.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Поток событий называется простейшим, если он обладает тремя свойствами:

1) вероятностные характеристики потока событий на временном промежутке $[t_1, t_2]$ зависят от длины промежутка, но не зависят от его начала;

2) вероятность наступления более одного события за время Δt есть $o(\Delta t)$;

3) поведение потока событий на любом временном промежутке $[t_1, t_2]$ не зависит (в вероятностном смысле) от его поведения до момента времени t_1 .

Примерами простейшего потока событий являются телефонные звонки в какое-нибудь учреждение, дорожно-транспортные происшествия, прибытие автобусов определенного маршрута на остановку и т.п. Важной характеристикой простейшего потока является его интенсивность λ — среднее число событий за единицу времени.

Пусть μ_t — число событий в простейшем потоке за время t , тогда

$$P(\mu_t = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $a = \lambda t$, λ — интенсивность потока.

Пусть τ — время наступления первого события в простейшем потоке, тогда

$$P(\tau > t) = P(\mu_t = 0) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Замечание. Распределение Пуассона встречается при рассмотрении распределения определенных объектов в пространстве, если это распределение обладает свойствами, аналогичными 1)–3).

ПРИМЕР. В течение недели на кафедру присылают в среднем 6 писем, причем 2 из них — из-за рубежа. Найти вероятность того, что в течение 2 недель будет прислано 13 писем, причем 5 из них — из-за рубежа.

РЕШЕНИЕ. Имеется два независимых простейших потока писем с интенсивностями $\lambda_1 = 4$ (внутренние) и $\lambda_2 = 2$ (зарубежные). Пусть μ_t и $\tilde{\mu}_t$ — число событий, происшедших за время t в первом и втором

потоках соответственно. Нас интересует вероятность случайного события $\{\mu_2 = 8, \tilde{\mu}_2 = 5\}$. Используя формулу (1), получаем

$$P(\mu_2 = 8) = \frac{8^8}{8!} e^{-8} \approx 0.1396, \quad (2)$$

$$P(\tilde{\mu}_2 = 5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0.1563 \quad (3)$$

(приближенные значения вероятностей можно получить из таблицы 5.3 в книге Л.Н. Большева и Н.В. Смирнова „Таблицы математической статистики“, М.: Наука, 1983 или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ). Поскольку случайные события $\{\mu_2 = 8\}$ и $\{\tilde{\mu}_2 = 5\}$ независимы, то из соотношений (2) и (3) находим искомую вероятность

$$P(\mu_2 = 8, \tilde{\mu}_2 = 5) = P(\mu_2 = 8)P(\tilde{\mu}_2 = 5) \approx 0.1396 \cdot 0.1563 \approx 0.0218.$$

Ответ. $P(\mu_2 = 8, \tilde{\mu}_2 = 5) \approx 0.0218$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.

1. В некотором городе среднее число дорожно-транспортных происшествий за сутки равно 5. Найти вероятность того, что за два дня будет 10 дорожно-транспортных происшествий.

2. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7.5 секунд испускало в среднем 3.87 α -частиц. Найти вероятность того, что за одну секунду это вещество испустит хотя бы одну α -частицу.

3. В справочное бюро звонят в среднем 30 раз за час. Найти вероятность того, что первый звонок после начала смены раздастся не позже, чем через 1 минуту.

4. В справочное бюро звонят в среднем 30 раз за час. Найти вероятность того, что второй звонок после начала смены раздастся не раньше, чем через 1 минуту, и не позже, чем через 2 минуты.

5. Автобусы некоторого маршрута приходят на определенную остановку в среднем с интервалом 15 мин. Найти вероятность того, что время ожидания автобуса будет не менее 20 мин.

6. В некоторое количество теста высыпается 1000 изюминок, после чего все тщательно перемешивается. Из этого теста изготавливается 100 булочек. Найти вероятность того, что в определенной булочке будет ровно 10 изюминок.

7. Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 80. Берется на пробу 1 дм³ воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

8. Книга в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того, что на определенной странице будет не менее трех опечаток.

9. Сообщения в офис фирмы поступают либо по телефону, либо по факсу. В среднем за час поступает 20 сообщений, причем по телефону в три раза чаще, чем по факсу. Какова вероятность того, что в течение часа число сообщений по телефону будет больше 15, а по факсу — меньше 5.

10. В течение восьмичасового рабочего дня на фирму в среднем поступает 10 заявок на производство определенного товара из Москвы и 5 заявок — из Санкт-Петербурга. Найти вероятность того, что в течение часа работы поступит хотя бы одна заявка из Санкт-Петербурга и не поступит ни одной заявки из Москвы.

Ответы. 1. 0.1251. 2. 0.4031. 3. 0.3935. 4. 0.1740. 5. 0.2636. 6. 0.1251. 7. 0.0769. 8. 0.0803. 9. 0.1903. 10. 0.1331.

6.11. Формулы полной вероятности и Байеса

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Рассмотрим ситуацию, когда вслед за некоторым случайным экспериментом проводится другой случайный эксперимент, основанный на результатах первого.

1. Найти вероятность некоторого случайного события A , связанного со вторым экспериментом.

2. Известно, что событие A произошло. Найти вероятность того, что первый эксперимент завершился определенным исходом.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Задача 1.

Введем группу непересекающихся случайных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, которые однозначно описывают всевозможные исходы первого эксперимента (полная группа событий). Пусть $P(A|H_i)$ — условная вероятность события A при условии, что первый эксперимент завершился событием H_i , $i = 1, \dots, n$ (знание H_i позволяет однозначно описать второй эксперимент; $P(A|H_i)$ является вероятностью события A в этом эксперименте). Вероятность события A находится по

формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i).$$

Задача 2.

Найти условную вероятность события H_i (при некотором i) при условии, что событие A произошло, т.е. $P(H_i|A)$. Эта вероятность может быть найдена по формуле Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

ПРИМЕР. Бросается игральный кубик. Пусть m — число выпавших очков. Затем осуществляется m выстрелов по цели с вероятностью попадания при одном выстреле p .

1. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

2. Известно, что цель поражена; найти вероятность того, что $m = 6$.

РЕШЕНИЕ.

Задача 1.

Первый случайный эксперимент — бросание игрального кубика. Введем случайные события $H_m = \{\text{выпало } m \text{ очков}\}$, $m = 1, \dots, 6$. Эти события не пересекаются и однозначно описывают всевозможные исходы первого эксперимента. Второй случайный эксперимент — это m испытаний Бернулли с вероятностью успеха p (успех — попадание в цель). Рассмотрим случайное событие $A = \{\text{цель поражена}\}$, связанное со вторым экспериментом. По формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{m=1}^6 P(H_m)P(A|H_m).$$

Очевидно, что $P(H_m) = 1/6$ при всех $m = 1, \dots, 6$. Вероятность $P(A|H_m)$ есть вероятность того, что в m испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p число успехов будет не менее одного, поэтому, переходя к противоположному событию, получаем, что

$$P(A|H_m) = 1 - P(\bar{A}|H_m) = 1 - q^m,$$

где $q = 1 - p$. Итак,

$$P(A) = \sum_{m=1}^6 \frac{1}{6} (1 - (1 - p)^m).$$

Задача 2.

Известно, что событие A произошло. Нас интересует $P(H_6|A)$. По формуле Байеса

$$P(H_6|A) = \frac{\frac{1}{6}(1 - (1 - p)^6)}{\sum_{m=1}^6 \frac{1}{6}(1 - (1 - p)^m)} = \frac{1 - (1 - p)^6}{\sum_{m=1}^6 (1 - (1 - p)^m)}.$$

Ответ. 1. $\sum_{m=1}^6 \frac{1}{6}(1 - (-p)^m)$; 2. $(1 - (1 - p)^6) / \sum_{m=1}^6 (1 - (1 - p)^m)$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ.

1. В альбоме 10 чистых и 12 гашеных марок. Из альбома наудачу извлекаются три марки и подвергаются гашению, а затем возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекаются две марки. а) Найти вероятность того, что эти две марки чистые. б) Известно, что эти две марки чистые; найти вероятность того, что первоначально извлеченные три марки чистые.

2. В альбоме 6 чистых и 10 гашеных марок. Из альбома изымаются три наудачу извлеченные марки. После этого из альбома вновь наудачу извлекаются две марки. а) Найти вероятность того, что эти две марки чистые. б) Известно, что эти две марки чистые; найти вероятность того, что первоначально изъятые марки гашеные.

3. В альбоме 8 чистых и 6 гашеных марок. Из альбома наудачу извлекаются три марки и заменяются на чистые. После этого из альбома вновь наудачу извлекаются две марки. а) Найти вероятность того, что эти две марки чистые. б) Известно, что эти марки чистые; найти вероятность того, что первоначально извлеченные три марки гашеные.

4. В первом ящике 3 белых и 5 черных шаров, а во втором 6 белых и 8 черных. Из первого ящика во второй перекладываются два наудачу извлеченных шара. После этого из второго ящика наудачу извлекается один шар. а) Найти вероятность того, что он белый. б) Известно, что этот шар белый; найти вероятность того, что извлеченные из первого ящика шары белые.

5. В каждом из трех ящиков n белых и m черных шаров. Из первого и второго ящиков наудачу извлекается по одному шару и кладется в третий ящик. Затем из третьего ящика извлекается один шар. а) Найти вероятность того, что он белый. б) Известно, что этот шар белый; найти вероятность того, что шары, извлеченные из первого и второго ящиков, белые.

6. В каждом из трех ящиков n белых ($n \geq 2$) и m черных шаров. Из первого ящика в третий перекалывают два наудачу выбранных шара, а из второго ящика в третий перекалывают один наудачу взятый шар. Затем из третьего ящика извлекается один шар. а) Найти вероятность того, что он белый. б) Известно, что этот шар белый; найти вероятность того, что из первого ящика во второй переложили два белых шара.

7. Из чисел $1, 2, \dots, 10$ наудачу выбирается одно число. Пусть это будет m . А затем из чисел $1, 2, \dots, m$ наудачу выбирается одно число. а) Найти вероятность того, что это число будет равно 8. б) Известно, что это число 8; найти вероятность того, что $m = 9$.

8. Из чисел $1, 2, \dots, 10$ наудачу выбираются два числа. Пусть это будут m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$). Затем из чисел $m_1, m_1 + 1, \dots, m_2$ наудачу выбирается одно число. а) Найти вероятность того, что оно равно 9. б) Известно, что это число 9; найти вероятность того, что $m_2 = 10$.

9. Из чисел $1, 2, \dots, 10$ наудачу выбирается одно число. Пусть это будет m . Затем на отрезке $[0, m]$ наудачу выбирается точка ξ . а) Найти вероятность того, что $\xi > 8$. б) Известно, что $\xi > 8$; найти вероятность того, что $m = 9$.

10. Бросается игральный кубик. Пусть m — число выпавших очков. Затем осуществляется $2m$ выстрелов по цели с вероятностью попадания при одном выстреле, равной p . а) Найти вероятность того, что число попаданий равно двум. б) Известно, что число попаданий равно двум; найти вероятность того, что $m = 3$.

Ответы.

$$1. \text{ а) } \sum_{i=0}^3 C_{10}^i C_{12}^{3-i} C_{10-i}^2 / (C_{22}^3 C_{22}^2); \quad \text{ б) } C_{10}^3 C_7^2 / \sum_{i=0}^3 C_{10}^i C_{12}^{3-i} C_{10-i}^2.$$

$$2. \text{ а) } \sum_{i=0}^3 C_6^i C_{10}^{3-i} C_{6-i}^2 / (C_{16}^3 C_{13}^2); \quad \text{ б) } C_{10}^3 C_6^2 / \sum_{i=0}^3 C_6^i C_{10}^{3-i} C_{6-i}^2.$$

$$3. \text{ а) } \sum_{i=0}^3 C_8^i C_6^{3-i} C_{11-i}^2 / (C_{14}^3 C_{14}^2); \quad \text{ б) } C_6^3 C_{11}^2 / \sum_{i=0}^3 C_8^i C_6^{3-i} C_{11-i}^2.$$

$$4. \text{ а) } \sum_{i=0}^2 C_3^i C_5^{2-i} (6+i) / (16 C_8^2); \quad \text{ б) } 8 C_3^3 / \sum_{i=0}^2 C_3^i C_5^{2-i} (6+i).$$

$$5. \text{ а) } [nm^2 + 2nm(n+1) + (n+2)n^2] / [(n+m)^2(n+m+2)]; \\ \text{ б) } (n+2)n^2 / [nm^2 + 2nm(n+1) + (n+2)n^2].$$

6. а) $[C_m^2 mn + C_n^1 C_m^1 m(n+1) + C_n^2 m(n+2) + C_m^2 n(n+1) + C_n^1 C_m^1 n(n+2) + C_n^2 n(n+3)] / [C_{n+m}^2 (n+m)(n+m+3)];$
 б) $[C_n^2 m(n+2) + C_n^2 n(n+3)] / [C_m^2 mn + C_n^1 C_m^1 m(n+1) + C_n^2 m(n+2) + C_m^2 n(n+1) + C_n^1 C_m^1 n(n+2) + C_n^2 n(n+3)].$
7. а) $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right);$ б) $\frac{1}{9} / \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right).$
8. а) $\frac{1}{C_{10}^2} \left(\sum_{k=1}^8 \frac{1}{10-k} + \sum_{k=1}^9 \frac{1}{11-k} \right);$
 б) $\sum_{k=1}^9 \frac{1}{11-k} / \left(\sum_{k=1}^8 \frac{1}{10-k} + \sum_{k=1}^9 \frac{1}{11-k} \right).$
9. а) $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{10} \right);$ б) $\frac{1}{9} / \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{10} \right).$
10. а) $\frac{p^2}{6} \sum_{m=1}^6 C_{2m}^2 q^{2(m-1)};$ б) $C_6^2 q^4 / \sum_{m=1}^6 C_{2m}^2 q^{2(m-1)}.$

6.12. Распределение дискретной случайной величины

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дискретная случайная величина η задана как некоторая числовая функция от конечного числа элементарных исходов некоего случайного эксперимента. Построить ряд распределения случайной величины η и, используя этот ряд, найти вероятность некоторого случайного события, связанного с η .

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Случайная величина называется дискретной, если ее возможные значения образуют конечное или счетное множество (т.е. множество, элементы которого можно пронумеровать, используя натуральные числа $1, 2, \dots$). Рядом распределения дискретной случайной величины η называется таблица

η	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

В верхней строке указаны возможные значения $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ случайной величины η , а под каждым значением указана вероятность того, что η примет это значение, т.е. $p_n = P(\eta = a_n)$, $n = 1, 2, \dots$

1. Определяем пространство элементарных исходов.
2. Определяем множество возможных значений η и убеждаемся, что оно конечно.
3. Составляем таблицу элементарных исходов и соответствующих им значений η .
4. Определяем вероятности всех значений η и строим ее ряд распределения.

Для этого отбираем элементарные исходы, приводящие к конкретному значению случайной величины η , а затем суммируем вероятности этих исходов. Полученное значение является вероятностью данного значения случайной величины. Так находим вероятности всех значений η и строим ее ряд распределения.

5. Пусть A — некоторое подмножество числовой прямой. Тогда

$$P(\eta \in A) = \sum_{n: a_n \in A} p_n,$$

другими словами, вероятность того, что случайная величина η примет значение из множества A , равна сумме вероятностей p_n , таких, что $a_n \in A$.

ПРИМЕР. Бросаются четыре монеты. Пусть $\xi_i = 1$, если i -ая монета выпала орлом вверх, и $\xi_i = 0$ в противном случае, $i = 1, 2, 3, 4$. Построить ряд распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4$ и найти, используя этот ряд, вероятность $P(\eta < 1)$.

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Элементарными исходами рассматриваемого случайного эксперимента являются упорядоченные наборы чисел (n_1, n_2, n_3, n_4) , где n_i либо нуль, либо единица, $i = 1, 2, 3, 4$.

2. Определяем множество возможных значений η .

Возможные значения случайной величины η суть $-2, -1, 0, 1, 2$, поэтому η — дискретная случайная величина.

3. Составляем таблицу элементарных исходов и соответствующих им значений η .

Случайная величина η на элементарном исходе (n_1, n_2, n_3, n_4) принимает значение $n_1 + n_2 - n_3 - n_4$. Поэтому полная таблица элементарных исходов и значений η имеет вид

n_1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
n_2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
n_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
n_4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
η	0	1	1	-1	-1	2	0	0	0	0	-2	1	1	-1	-1	0

4. Определяем вероятности значений η и строим ее ряд распределения.

Всего элементарных исходов $2^4 = 16$. Следовательно, вероятность элементарного исхода равна $1/16$. Событию $\{\eta = -2\}$ благоприятствует один элементарный исход, поэтому $P(\eta = -2) = 1/16$. Аналогично находятся остальные вероятности $P(\eta = i)$, $i = -1, 0, 1, 2$. В итоге получаем, что ряд распределения случайной величины η имеет вид

η	-2	-1	0	1	2
P	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

5. Из ряда распределения находим, что

$$P(\eta < 1) = P(\eta = -2) + P(\eta = -1) + P(\eta = 0) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{11}{16}.$$

Ответ. $P(\eta < 1) = 11/16$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Бросаются четыре монеты. Пусть $\xi_i = 1$, если i -ая монета выпала орлом вверх, и $\xi_i = 0$ в противном случае, $i = 1, 2, 3, 4$. Построить ряд распределения случайной величины η и найти, используя этот ряд, вероятность указанного события.

$$1. \eta = \sum_{i=1}^4 \xi_i, \quad \{\eta > 2\}. \quad 2. \eta = \sum_{i=1}^4 \xi_i^2, \quad \{\eta \in [2, 3]\}.$$

$$3. \eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4, \quad \{\eta > 1\}.$$

$$4. \eta = (\xi_1 + \xi_2)/(1 + \xi_3 + \xi_4), \quad \{\eta > 1/3\}.$$

$$5. \eta = \xi_1/(1 + \xi_2) - \xi_3/(1 + \xi_4), \quad \{\eta \leq 1/2\}.$$

$$6. \eta = \prod_{i=1}^4 (\xi_i + 1), \quad \{\eta < 8\}. \quad 7. \eta = \prod_{i=1}^4 \log_2(1 + \xi_i), \quad \{\eta > 1/4\}.$$

$$8. \eta = (\xi_1 + 1)^{\xi_2} - (\xi_3 + 1)^{\xi_4}, \quad \{\eta < 1\}.$$

$$9. \eta = (\xi_1 + 1)^{\xi_2} \cdot (\xi_3 + 1)^{\xi_4}, \quad \{\eta > 2\}.$$

$$10. \eta = (\xi_1 + 1)^{\xi_2 + \xi_3 + \xi_4}, \quad \{\eta < 4\}.$$

Ответы. 1. 5/8. 2. 5/16. 3. 5/16. 4. 5/8. 5. 7/8. 6. 11/16.
7. 1/16. 8. 13/16. 9. 1/16. 10. 3/4.

6.13. Распределение непрерывной случайной величины

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Непрерывная случайная величина ξ задана как некоторая числовая функция от элементарных исходов некоторого случайного эксперимента. Найти плотность вероятностей $p(x)$ этой случайной величины.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Случайная величина ξ называется непрерывной, если она может принимать все значения x из некоторого числового промежутка и существует неотрицательная числовая функция $p(x)$, такая, что

$$P(\xi \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$

для любых a и b ($a \leq b$). Функция $p(x)$ называется плотностью вероятностей.

1. Определяем множество возможных значений x случайной величины ξ и убеждаемся, что оно представляет собой некоторый промежуток I .

2. Для всех $x \in I$ находим функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ . По определению ^{*)}

$$F(x) = P(\xi \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Находим плотность вероятностей $p(x)$ по формуле

$$p(x) = F'(x).$$

При $x \notin I$ плотность вероятностей $p(x)$ равна нулю.

ПРИМЕР. Точка A наудачу выбирается в квадрате $K = \{(u, v) : 0 \leq u, v \leq 1\}$. Найти плотность вероятностей $p(x)$ случайной величины ξ , равной расстоянию от точки A до начала координат.

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем множество возможных значений x случайной величины ξ и убеждаемся, что оно представляет собой некоторый промежуток I .

^{*)} В литературе встречается иное определение, согласно которому $F(x) = P(\xi \leq x)$.

Элементарный исход — точка (u, v) , где $0 \leq u, v \leq 1$. Случайная величина ξ на элементарном исходе (u, v) принимает значение $\sqrt{u^2 + v^2}$. Множеством возможных значений x случайной величины ξ является промежуток $[0, \sqrt{2}]$.

2. Для всех $x \in [0, \sqrt{2}]$ находим функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ . Пусть $x \in [0, 1]$, тогда случайному событию $\{\xi \leq x\}$ благоприятствуют исходы, составляющие четверть круга радиуса x (см. рис. 6.4) и поэтому

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \frac{1}{4}\pi x^2, \quad x \in [0, 1].$$

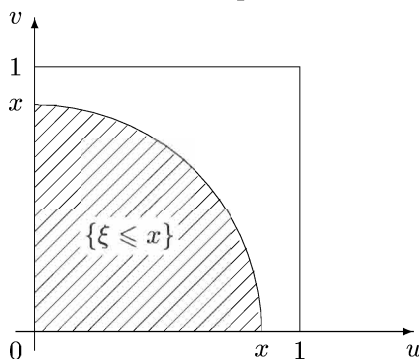


Рис. 6.4

Если же $x \in [1, \sqrt{2}]$, то случайному событию $\{\xi \leq x\}$ благоприятствуют исходы, представляющие собой заштрихованную область на рис. 6.5.

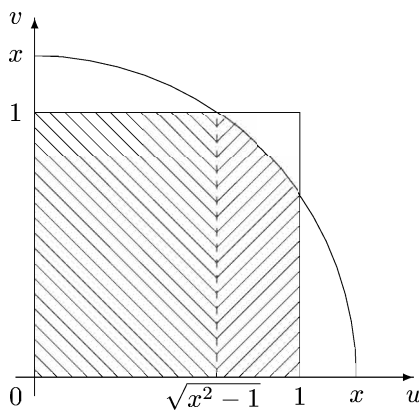


Рис. 6.5

Площадь заштрихованной области равна

$$\int_0^{\sqrt{x^2-1}} 1 \, du + \int_{\sqrt{x^2-1}}^1 \sqrt{x^2 - u^2} \, du = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{2} \left(\arcsin \frac{1}{x} - \arccos \frac{1}{x} \right).$$

Следовательно,

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \frac{\pi x^2}{4} + \sqrt{x^2 - 1} - x^2 \arccos \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \sqrt{2}].$$

3. Находим плотность вероятностей $p(x)$. При $x \in (0, 1)$

$$p(x) = F'(x) = \pi x/2.$$

При $x \in [1, \sqrt{2})$

$$p(x) = F'(x) = \pi x/2 - 2x \arccos(1/x).$$

При $x \notin (0, \sqrt{2})$ $p(x) = 0$.

Ответ. При $x \in (0, 1)$ $p(x) = \pi x/2$; при $x \in [1, \sqrt{2})$ $p(x) = \pi x/2 - 2x \arccos(1/x)$; при $x \notin (0, \sqrt{2})$ $p(x) = 0$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка A наудачу выбирается в квадрате $K = \{(u, v) : 0 \leq u, v \leq 1\}$. Найти плотность вероятностей $p(x)$ указанной случайной величины.

1. Расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата K .
2. Расстояние от точки A до стороны квадрата K , лежащей на оси ординат.
3. Расстояние от точки A до центра квадрата K .
4. Ордината точки A .
5. Сумма координат точки A .
6. Разность абсциссы и ординаты точки A .
7. Произведение координат точки A .
8. Частное от деления абсциссы на ординату точки A .
9. Модуль разности координат точки A .
10. Сумма квадратов координат точки A .

Ответы.

1. $p(x) = 4 - 8x$, $x \in (0, 1/2)$; $p(x) = 0$, $x \notin (0, 1/2)$.
2. $p(x) = 1$, $x \in (0, 1)$; $p(x) = 0$, $x \notin (0, 1)$.
3. $p(x) = 2\pi x$, $x \in (0, 1/2]$; $p(x) = 2\pi x - 8x \arccos(1/(2x))$,
 $x \in (1/2, 1/\sqrt{2})$; $p(x) = 0$, $x \notin (0, 1/\sqrt{2})$.

4. $p(x) = 1, x \in (0, 1);$ $p(x) = 0, x \notin (0, 1).$
5. $p(x) = 1 - |x - 1|, x \in (0, 2);$ $p(x) = 0, x \notin (0, 2).$
6. $p(x) = 1 - |x|, x \in (-1, 1);$ $p(x) = 0, x \notin (-1, 1).$
7. $p(x) = \ln(1/x), x \in (0, 1);$ $p(x) = 0, x \notin (0, 1).$
8. $p(x) = 1/2, x \in (0, 1];$ $p(x) = 1/(2x^2), x \in (1, +\infty);$
 $p(x) = 0, x \notin (0, +\infty).$
9. $p(x) = 2(1 - x), x \in (0, 1);$ $p(x) = 0, x \notin (0, 1).$
10. $p(x) = \pi/4, x \in (0, 1];$ $p(x) = \pi/4 - \arccos(1/\sqrt{x}), x \in (1, 2);$
 $p(x) = 0, x \notin (0, 2).$

6.14. Числовые характеристики дискретной случайной величины

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Задана дискретная случайная величина η . Найти ее математическое ожидание и дисперсию.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Математическим ожиданием $M\eta$ дискретной случайной величины η называется число, определяемое формулой

$$M\eta = \sum_n a_n p_n, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем возможным n . В случае, когда число возможных значений η бесконечно, требуется, чтобы ряд в правой части (1) сходилсся абсолютно.

Дисперсией $D\eta$ дискретной случайной величины η называется число, определяемое формулой

$$D\eta = M(\eta - M\eta)^2. \quad (2)$$

Для нахождения дисперсии в случае, когда η является дискретной случайной величиной, используется формула

$$D\eta = \sum_n (a_n - m)^2 p_n = \sum_n a_n^2 p_n - m^2, \quad (3)$$

где $m = M\eta$ и суммирование ведется по всем возможным n .

1. Найдем ряд распределения случайной величины η (иногда он бывает задан изначально). Получаем

η	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

2. Находим математическое ожидание $M\eta$ дискретной случайной величины η по формуле (1).

3. Находим дисперсию $D\eta$ дискретной случайной величины η по формуле (3).

ПРИМЕР. Бросается игральный кубик. Пусть ξ — число выпавших очков. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \min(\xi, 3)$.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим ряд распределения случайной величины η .

Элементарным исходом рассматриваемого случайного эксперимента является число выпавших очков i : $i = 1, \dots, 6$. Случайная величина η на i -ом элементарном исходе принимает значение $\min(i, 3)$. Составляем таблицу элементарных исходов и значений η

i	1	2	3	4	5	6
η	1	2	3	3	3	3

Поскольку все элементарные исходы равновозможны, то ряд распределения случайной величины η имеет вид

η	1	2	3
P	1/6	1/6	4/6

2. Находим математическое ожидание $M\eta$ дискретной случайной величины η по формуле (1). Получаем

$$M\eta = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{4}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

3. Находим дисперсию $D\eta$ дискретной случайной величины η по формуле (3). Получаем

$$D\eta = \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \frac{4}{6} = \frac{7}{12}.$$

Ответ. $M\eta = 5/2$, $D\eta = 7/12$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Бросается игральный кубик. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta(\xi)$, где ξ — число выпавших очков.

1. $\eta = \xi^2 - 11\xi + 30$.

2. $\eta = (\xi - 3)^2$.

3. $\eta = \xi^2 - 7\xi + 12$.

4. $\eta = |\xi - 3|$.

5. $\eta = \max(\xi, 4)$. 6. $\eta = (\xi - 2)(\xi - 3)(\xi - 4)$.
 7. $\eta = (\xi - 1)(\xi - 2)(\xi - 5)(\xi - 6)$. 8. $\eta = \sin(\pi\xi/2)$.
 9. $\eta = \cos(\pi\xi/2)$. 10. $\eta = \sin[\pi(\xi - 3)/6]$.

Ответы.

1. $M\eta = 20/3$, $D\eta = 949/18$. 2. $M\eta = 19/6$, $D\eta = 329/36$.
 3. $M\eta = 8/3$, $D\eta = 56/9$. 4. $M\eta = 3/2$, $D\eta = 11/12$.
 5. $M\eta = 9/2$, $D\eta = 7/12$. 6. $M\eta = 4$, $D\eta = 92$.
 7. $M\eta = 4$, $D\eta = 32$. 8. $M\eta = 1/6$, $D\eta = 17/36$.
 9. $M\eta = -1/6$, $D\eta = 17/36$. 10. $M\eta = 1/6$, $D\eta = 17/36$.

6.15. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти математическое ожидание $M\eta$, дисперсию $D\eta$ и вероятность $P(\eta > c)$, где c — постоянная, непрерывной случайной величины η с заданной плотностью вероятностей $p(x)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Математическим ожиданием $M\eta$ непрерывной случайной величины η называется число, определяемое формулой

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \quad (1)$$

(предполагается, что интеграл сходится абсолютно).

Дисперсией $D\eta$ случайной величины η называется число, определяемое формулой

$$D\eta = M(\eta - M\eta)^2. \quad (2)$$

Для нахождения дисперсии в случае, когда η является непрерывной случайной величиной, используется формула

$$D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - m^2, \quad (3)$$

где $m = M\eta$.

Из определения плотности вероятностей следует, что

$$P(\eta > c) = \int_c^{+\infty} p(x) dx. \quad (4)$$

Замечание. Если плотность $p(x)$ задана с точностью до некоторого параметра, то его значение можно найти из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

1. Находим аналитическое выражение для плотности вероятностей $p(x)$ случайной величины η .

2. Находим математическое ожидание $M\eta$ непрерывной случайной величины η по формуле (1).

3. Находим дисперсию $D\eta$ непрерывной случайной величины η по формуле (3).

4. Находим $P(\xi > c)$ по формуле (4).

ПРИМЕР. Найти математическое ожидание $M\eta$, дисперсию $D\eta$ и вероятность $P(\eta > a/2)$ непрерывной случайной величины η с плотностью вероятностей $p(x)$, заданной графически (рис. 6.6).

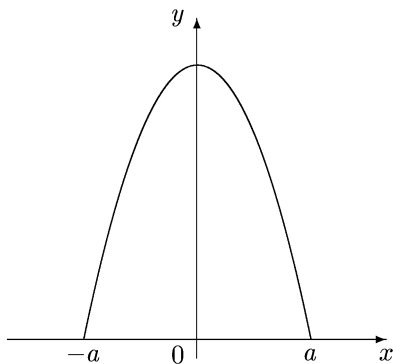


Рис. 6.6

РЕШЕНИЕ.

1. Находим аналитическое выражение для плотности вероятностей $p(x)$ случайной величины η .

Парабола $y = p(x)$ имеет корни a и $-a$, поэтому

$$p(x) = A(x - a)(x + a), \quad x \in [-a, a],$$

где A — отрицательная постоянная. Находим A из соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Получаем

$$1 = A \int_{-a}^a (x^2 - a^2) dx = A \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \Big|_{-a}^a = 2A \left(\frac{a^3}{3} - a^3 \right) = -\frac{4}{3} a^3 A.$$

Следовательно,

$$A = -\frac{3}{4a^3}.$$

Итак,

$$p(x) = -\frac{3}{4a^3}(x^2 - a^2), \quad x \in [-a, a];$$

при остальных x $p(x) = 0$.

2. Находим математическое ожидание $M\eta$ непрерывной случайной величины η по формуле (1). Получаем

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = -\frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a x(x^2 - a^2)dx = -\frac{3}{4a^3} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{a^2 x^2}{2} \right) \Big|_{-a}^a = 0.$$

3. Находим дисперсию $D\eta$ непрерывной случайной величины η по формуле (3). Получаем

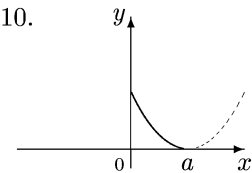
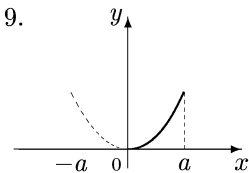
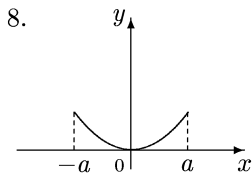
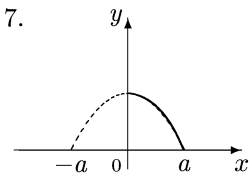
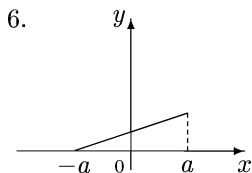
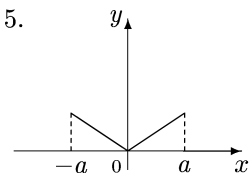
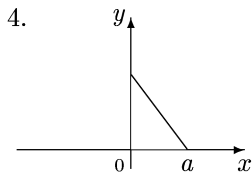
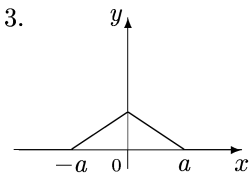
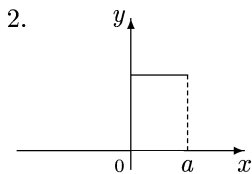
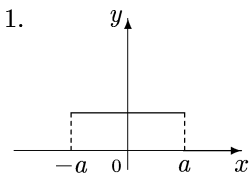
$$\begin{aligned} D\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\eta)^2 p(x) dx = -\frac{3}{4a^3} \int_{-a}^a x^2 (x^2 - a^2) dx = \\ &= -\frac{3}{4a^3} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3 a^2}{3} \right) \Big|_{-a}^a = -\frac{3}{2a^3} \left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^5}{3} \right) = \frac{a^5}{5a^3} = \frac{a^2}{5}. \end{aligned}$$

4. Находим $P(\xi > c)$ по формуле (4) при $c = a/2$. Получаем

$$\begin{aligned} P(\eta > a/2) &= \int_{a/2}^{+\infty} p(x) dx = -\frac{3}{4a^3} \int_{a/2}^a (x^2 - a^2) dx = \\ &= -\frac{3}{4a^3} \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \Big|_{a/2}^a = -\frac{3}{4a^3} \left(\frac{a^3}{3} - a^3 - \frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{2} \right) = \frac{5}{32}. \end{aligned}$$

Ответ. $M\xi = 0$, $D\xi = a^2/5$, $P(\xi > a/2) = 5/32$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти математическое ожидание $M\eta$, дисперсию $D\eta$ и вероятность $P(\eta > a/2)$ непрерывной случайной величины η с плотностью вероятностей $p(x)$, заданной графически (все графики составлены из участков прямых и парабол).



Ответы.

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------------|
| 1. $M\xi = 0$, | $D\xi = a^2/3$, | $P(\xi > a/2) = 1/4$. |
| 2. $M\xi = a/2$, | $D\xi = a^2/12$, | $P(\xi > a/2) = 1/2$. |
| 3. $M\xi = 0$, | $D\xi = a^2/6$, | $P(\xi > a/2) = 1/8$. |
| 4. $M\xi = a/3$, | $D\xi = a^2/18$, | $P(\xi > a/2) = 1/4$. |

5. $M\xi = 0, \quad D\xi = a^2/2, \quad P(\xi > a/2) = 3/8.$
6. $M\xi = a/3, \quad D\xi = 2a^2/9, \quad P(\xi > a/2) = 7/16.$
7. $M\xi = 3a/8, \quad D\xi = 19a^2/320, \quad P(\xi > a/2) = 5/16.$
8. $M\xi = 0, \quad D\xi = 3a^2/5, \quad P(\xi > a/2) = 7/16.$
9. $M\xi = 3a/4, \quad D\xi = 3a^2/80, \quad P(\xi > a/2) = 7/8.$
10. $M\xi = a/4, \quad D\xi = 3a^2/80, \quad P(\xi > a/2) = 1/8.$

6.16. Распределение и числовые характеристики дискретного случайного вектора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дискретный случайный вектор (ξ, η) задан как некоторая векторная функция элементарных исходов некоего случайного эксперимента. Найти ряд распределения случайного вектора (ξ, η) и ковариацию ξ и η .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Случайный вектор называется дискретным, если его возможные значения образуют конечное или счетное множество. Рядом распределения дискретного случайного вектора (ξ, η) называется таблица

ξ	a'_1	a'_2	$\dots$	a'_n	$\dots$
η	a''_1	a''_2	$\dots$	a''_n	$\dots$
P	p_2	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

В верхних двух строках указывается возможное значение (a'_n, a''_n) случайного вектора (ξ, η) , а под ним, в нижней строке, вероятность p_n принять это значение, т.е. $p_n = P((\xi, \eta) = (a'_n, a''_n))$, $n = 1, 2, \dots$

Ковариацией случайных величин ξ и η называется число, определяемое формулой

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta). \quad (1)$$

Для вычисления ковариации используется формула

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta, \quad (2)$$

где

$$M\xi = \sum_n a'_n p_n, \quad M\eta = \sum_n a''_n p_n, \quad M\xi\eta = \sum_n a'_n a''_n p_n \quad (3)$$

(суммирование ведется по всем возможным n).

1. Определяем множество возможных значений (ξ, η) , убеждаемся, что оно конечно или счетно, и заполняем верхние строки ряда распределения.

2. Определяем вероятности значений (a'_k, a''_k) и вносим их в нижнюю строку. В случае, когда пространство элементарных исходов конечно, отбираем все элементарные исходы, приводящие к конкретному значению случайного вектора, а затем суммируем вероятности этих исходов.

3. Находим $M\xi$, $M\eta$ и $M\xi\eta$ по формулам (3).

4. Находим ковариацию $\text{cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η по формуле (2).

ПРИМЕР. Бросаются два игральных кубика. Найти ряд распределения случайного вектора (ξ, η) и ковариацию ξ и η , где ξ — максимальное из появившихся чисел, η — число появлений единицы.

РЕШЕНИЕ.

1. Определяем множество возможных значений (ξ, η) .

Занумеруем кубики. Элементарным исходом рассматриваемого случайного эксперимента является упорядоченная пара чисел (n_1, n_2) , где n_1 — число выпавших очков на первом кубике и n_2 — на втором. На элементарном исходе (n_1, n_2) случайный вектор (ξ, η) принимает значение $(\max(n_1, n_2), \chi_{\{n_1=1\}} + \chi_{\{n_2=1\}})$, где при $i = 1, 2$

$$\chi_{\{n_i=1\}} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_i=1, \\ 0, & \text{если } n_i=0. \end{cases}$$

Составим таблицу элементарных исходов и значений (ξ, η) :

n_1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
n_2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
ξ	1	2	3	4	5	6	2	2	3	4	5	6
η	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

n_1	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
n_2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
ξ	3	3	3	4	5	6	4	4	4	4	5	6
η	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

n_1	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
n_2	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
ξ	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
η	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

В таблице мы видим, что случайный вектор (ξ, η) принимает одиннадцать значений: $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(5, 0)$, $(5, 1)$, $(6, 0)$, $(6, 1)$.

2. Определяем вероятности значений (a'_k, a''_k) и вносим их в нижнюю строку. Так как пространство элементарных исходов конечно, отбираем все элементарные исходы, приводящие к конкретному значению случайного вектора, а затем суммируем вероятности этих исходов. Для нахождения, например, вероятности случайного события $\{(\xi, \eta) = (4, 0)\}$ нужно отобрать благоприятствующие этому событию элементарные исходы. Очевидно, что это $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$. Поскольку все элементарные исходы равновозможны, имеем

$$P((\xi, \eta) = (4, 0)) = \frac{5}{36}.$$

Аналогично следует найти все остальные элементы нижней строки ряда распределения. В итоге получаем ряд распределения случайного вектора (ξ, η) :

ξ	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
η	2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{2}{36}$

3. Находим $M\xi$, $M\eta$ и $M\xi\eta$ по формулам (3). Получаем

$$\begin{aligned} M\xi &= 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} \right) + 3 \left(\frac{3}{36} + \frac{2}{36} \right) + 4 \left(\frac{5}{36} + \frac{2}{36} \right) + \\ &+ 5 \left(\frac{7}{36} + \frac{2}{36} \right) + 6 \left(\frac{9}{36} + \frac{2}{36} \right) = \frac{1}{36} (1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66) = \frac{161}{36}, \end{aligned}$$

$$M\eta = 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} M\xi\eta &= 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} = \\ &= \frac{1}{36}(2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

4. Находим ковариацию $\text{cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η по формуле (2):

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = \frac{11}{18} - \frac{161}{36} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{95}{108}.$$

Ответ. $\text{cov}(\xi, \eta) = -95/108$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Бросаются два игральных кубика. Найти ряд распределения случайного вектора (ξ, η) и ковариацию ξ и η .

1. ξ — число появлений двойки, η — число появлений тройки.
2. ξ — число появлений двойки, η — число появлений числа, кратного трем.
3. ξ — число появлений четного числа, η — число появлений числа, кратного трем.
4. ξ — число появлений единицы, η — число появлений числа, меньшего трех.
5. ξ — число появлений числа меньшего трех, η — число появлений числа, большего четырех.
6. ξ — минимальное из появившихся чисел, η — число появлений шестерки.
7. ξ — минимальное, η — максимальное из появившихся чисел.
8. ξ — минимальное из появившихся чисел, η — число появлений четного числа.
9. ξ — максимальное из появившихся чисел, η — число появлений числа, кратного трем.
10. ξ — минимальное из появившихся чисел, η — число появлений числа, меньшего трех.

Ответы. 1. $-1/12$. 2. $-1/9$. 3. 0. 4. $2/9$. 5. $-2/9$. 6. $35/108$. 7. $1225/1296$. 8. $1/4$. 9. $19/54$. 10. $-20/27$.

6.17. Распределение непрерывного случайного вектора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Непрерывный случайный вектор (ξ, η) задан как некоторая векторная функция элементарных исходов некоего случайного эксперимента. Найти плотность вероятностей $p(x, y)$ этого случайного вектора.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Двумерный случайный вектор (ξ, η) называется непрерывным, если он может принимать все значения (x, y) из некоторой области D и существует неотрицательная числовая функция $p(x, y)$, такая, что для любой области G на плоскости имеем

$$P((\xi, \eta) \in G) = \iint_G p(x, y) dx dy.$$

1. Находим область D возможных значений случайного вектора (ξ, η) и убеждаемся, что область D имеет ненулевую площадь.

2. Для каждой точки (x, y) области D вычисляем вероятность $P(\xi \in [x, x + \Delta x], \eta \in [y, y + \Delta y])$ для малых $\Delta x, \Delta y$. Если $(x, y) \in D$, то плотность вероятностей $p(x, y)$ вычисляется по формуле

$$p(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(\xi \in [x, x + \Delta x], \eta \in [y, y + \Delta y])}{\Delta x \Delta y}. \quad (1)$$

Если $(x, y) \notin D$, то $p(x, y) = 0$.

ПРИМЕР. Точка наудачу выбирается в круге радиуса 1 с центром в начале координат, X — абсцисса этой точки, Φ — полярный угол. Найти плотность вероятностей случайного вектора (X, Φ) .

РЕШЕНИЕ.

1. Находим область D возможных значений случайного вектора (X, Φ) .

Очевидно, что Φ может принимать любое значение из промежутка $[0, 2\pi]$, а X при каждом Φ может меняться в пределах от 0 до $\cos \Phi$, если $\Phi \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$, и от $\cos \Phi$ до 0, если $\Phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Итак, область D возможных значений (x, φ) случайного вектора (X, Φ) имеет вид

$$D = \left\{ (x, \varphi) : \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], x \in [0, \cos \varphi] \right\} \cup \\ \cup \left\{ (x, \varphi) : \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], x \in [\cos \varphi, 0] \right\}$$

(см. рис. 6.7, где область D заштрихована).

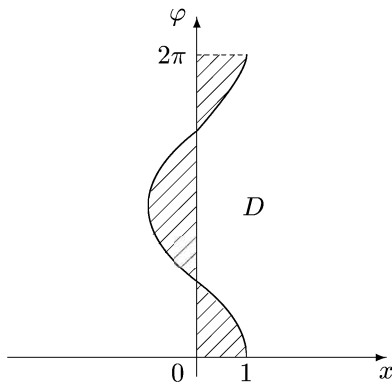


Рис. 6.7

Очевидно, что площадь области D положительна.

2. Для любой точки $(x, \varphi) \in D$ находим вероятность случайного события $A = \{X \in [x, x + \Delta x], \Phi \in [\varphi, \varphi + \Delta \varphi]\}$ при малых $\Delta x, \Delta \varphi$. Элементарный исход рассматриваемого случайного эксперимента (выбор точки наудачу в круге) есть точка (u, v) , где $u^2 + v^2 \leq 1$. На рис. 6.8 заштрихована область благоприятствующих событию A исходов при $x \geq 0$.

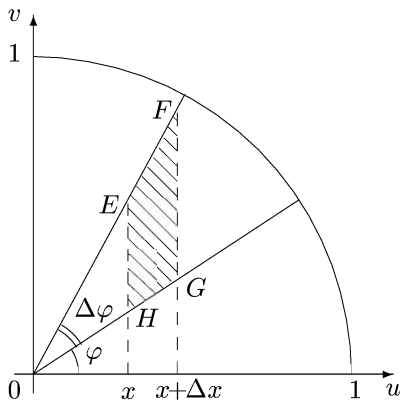


Рис. 6.8

Поскольку точка выбирается в круге наудачу, то

$$P(A) = \frac{S_{EFGH}}{\pi},$$

где S_{EFGH} — площадь четырехугольника $EFGH$. Вычисляя площадь четырехугольника $EFGH$ как разность площадей трапеций, получаем

$$S_{EFGH} = \frac{x \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) + (x + \Delta x) \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi)}{2} \Delta x - \\ - \frac{x \operatorname{tg} \varphi + (x + \Delta x) \operatorname{tg} \varphi}{2} \Delta x \approx \frac{x}{\cos^2 \varphi} \Delta x \Delta \varphi.$$

Итак,

$$P(A) \approx \frac{1}{\pi} \frac{x}{\cos^2 \varphi} \Delta x \Delta \varphi.$$

Находим плотность вероятностей $p(x, \varphi)$ случайного вектора (X, Φ) по формуле (1). При $(x, \varphi) \in D$ и $x \geq 0$ получаем

$$p(x, \varphi) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \frac{P(A)}{\Delta x \Delta \varphi} = \frac{x}{\pi \cos^2 \varphi}.$$

Аналогично, при $(x, \varphi) \in D$ и $x \leq 0$, получаем

$$p(x, \varphi) = \frac{-x}{\pi \cos^2 \varphi}.$$

При $(x, \varphi) \notin D$ $p(x, \varphi) = 0$.

Ответ.
$$p(x, \varphi) = \frac{|x|}{\pi \cos^2 \varphi},$$

если $(x, \varphi) \in \left\{ (x, \varphi) : \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right], x \in [0, \cos \varphi] \right\} \cup$

$$\cup \left\{ (x, \varphi) : \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right), x \in [\cos \varphi, 0] \right\},$$

и $p(x, \varphi) = 0$ при остальных (x, φ) .

Замечание. В ответе из области D исключены точки (x, φ) при $\varphi = \pi/2$ или $\varphi = 3\pi/2$, поскольку при таких φ функция $p(x, \varphi)$ не определена.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка наудачу выбирается в круге радиуса 1 с центром в начале координат, (X, Y) — декартовы координаты этой точки, (R, Φ) — полярные координаты. Найти плотность вероятностей заданных случайных векторов.

1. (X, Y) . 2. (R, Φ) . 3. (X, R) . 4. (Y, R) . 5. (Y, Φ) . 6. $(2X, 3Y)$.
7. $(X - 1, Y + 2)$. 8. $(2X - 1, 3Y + 2)$. 9. $(2R, \Phi)$. 10. $(R, 2\Phi)$.

Ответы.

1. $p(x, y) = 1/\pi, x^2 + y^2 \leq 1; p(x, y) = 0$ при остальных (x, y) .
2. $p(\rho, \varphi) = \rho/\pi, \rho \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi];$
 $p(\rho, \varphi) = 0$ при остальных (ρ, φ) .
3. $p(x, \rho) = \rho/(\pi\sqrt{\rho^2 - x^2}), x \in [-1, 1], \rho \in [|x|, 1];$
 $p(x, \rho) = 0$ при остальных (x, ρ) .
4. $p(y, \rho) = \rho/(\pi\sqrt{\rho^2 - y^2}), y \in [-1, 1], \rho \in [|y|, 1];$
 $p(y, \rho) = 0$ при остальных (y, ρ) .
5. $p(y, \varphi) = |y|/(\pi \sin^2 \varphi), \varphi \in (0, \pi), y \in [0, \sin \varphi]$ или
 $\varphi \in (\pi, 2\pi), y \in [\sin \varphi, 0]; p(y, \varphi) = 0$ при остальных (y, φ) .
6. $p(u, v) = 1/(6\pi), u^2/4 + v^2/9 \leq 1;$
 $p(u, v) = 0$ при остальных (u, v) .
7. $p(u, v) = 1/\pi, (u + 1)^2 + (v - 2)^2 \leq 1;$
 $p(u, v) = 0$ при остальных (u, v) .
8. $p(u, v) = 1/(6\pi), (u + 1)^2/4 + (v - 2)^2/9 \leq 1;$
 $p(u, v) = 0$ при остальных (u, v) .
9. $p(u, v) = u/(4\pi), u \in [0, 2], v \in [0, 2\pi];$
 $p(u, v) = 0$ при остальных (u, v) .
10. $p(u, v) = u/(2\pi), u \in [0, 1], v \in [0, 4\pi];$
 $p(u, v) = 0$ при остальных (u, v) .

6.18. Числовые характеристики непрерывного случайного вектора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть (ξ, η) — непрерывный случайный вектор с плотностью вероятностей $p(x, y)$. Найти центр рассеяния и ковариационную матрицу случайного вектора (ξ, η) .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Центром рассеяния называется вектор, составленный из математических ожиданий компонент, т.е. $(M\xi, M\eta)$, где $M\xi$ и $M\eta$ вычисляются по формулам

$$M\xi = \iint_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y)dx dy, \quad M\eta = \iint_{-\infty}^{+\infty} yp(x, y)dx dy. \quad (1)$$

Ковариационной матрицей случайного вектора (ξ, η) называется матрица, составленная из ковариаций его компонент, т.е.

$$\begin{pmatrix} D\xi & \text{cov}(\xi, \eta) \\ \text{cov}(\xi, \eta) & D\eta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

причем $D\xi$, $D\eta$ и $\text{cov}(\xi, \eta)$ вычисляются по формулам

$$D\xi = \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 p(x, y)dx dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x, y)dx dy - m_1^2, \quad (3)$$

$$D\eta = \iint_{-\infty}^{+\infty} (y - m_2)^2 p(x, y)dx dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(x, y)dx dy - m_2^2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)(y - m_2)p(x, y)dx dy = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y)dx dy - m_1 m_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $m_1 = M\xi$, $m_2 = M\eta$.

1. Находим $M\xi$ и $M\eta$ по формулам (1) и центр рассеяния $(M\xi, M\eta)$.

2. Находим $D\xi$, $D\eta$ и $\text{cov}(\xi, \eta)$ по формулам (3)–(5) и ковариационную матрицу (2).

Замечание. Если обозначить координаты случайного вектора ξ_1 и ξ_2 , а плотность вероятностей — $p(x_1, x_2)$, то ковариационную матрицу можно определить в виде, допускающем обобщение в случае произвольной размерности:

$$\begin{aligned} (c_{ij}) &= (M(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j)) = \\ &= \begin{pmatrix} M(\xi_1 - m_1)(\xi_1 - m_1) & M(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2) \\ M(\xi_2 - m_2)(\xi_1 - m_1) & M(\xi_2 - m_2)(\xi_2 - m_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $m_1 = M\xi_1$ и $m_2 = M\xi_2$. Элементы этой матрицы могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} c_{ij} &= M(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j)p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i x_j p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - m_i m_j, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

В частности,

$$c_{11} = M(\xi_1 - m_1)(\xi_1 - m_1) = D\xi_1,$$

$$c_{22} = M(\xi_2 - m_2)(\xi_2 - m_2) = D\xi_2,$$

$$c_{12} = c_{21} = \text{cov}(\xi_1, \xi_2).$$

Очевидно, что ковариационная матрица симметрична, т.е. совпадает со своей транспонированной.

ПРИМЕР. Точка наудачу выбирается в области D (см. рис. 6.9).

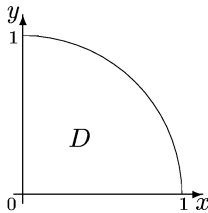


Рис. 6.9

Пусть (ξ, η) — декартовы координаты этой точки. Найти центр рассеяния и ковариационную матрицу вектора (ξ, η) .

РЕШЕНИЕ. При выборе точки наудачу в области D случайный вектор (ξ, η) равномерно распределен в области D . Это означает, что он является непрерывным случайным вектором и его плотность вероятностей $p(x, y)$ имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 1/S(D), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где $S(D)$ — площадь области D . В рассматриваемом случае получаем, что

$$p(x, y) = \begin{cases} 4/\pi, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

1. Находим $M\xi$ и $M\eta$ по формулам (1). Имеем

$$M\xi = \iint_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_D x dx dy = \frac{4}{3\pi}.$$

Для вычисления интеграла удобны полярные координаты (ρ, φ) . Напомним, что $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и модуль якобиана этого отображения равен ρ .

Аналогично вычисляем

$$M\eta = \iint_{-\infty}^{+\infty} yp(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_D y dx dy = \frac{4}{3\pi}.$$

Поэтому центр рассеяния случайного вектора (ξ, η) имеет вид

$$\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi} \right).$$

2. Находим $D\xi$, $D\eta$ и $\text{cov}(\xi, \eta)$ по формулам (3)–(5). Имеем

$$\begin{aligned} D\xi &= \iint_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x, y) dx dy - \frac{16}{9\pi^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \varphi d\rho - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$D\eta = \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}.$$

Находим теперь ковариацию ξ и η . Имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} xy p(x, y) dx dy - \frac{16}{9\pi^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \iint_D xy dx dy - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi d\rho - \frac{16}{9\pi^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{16}{9\pi^2} = \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2}. \end{aligned}$$

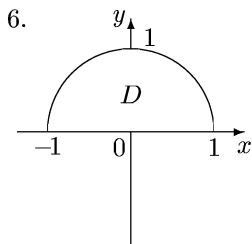
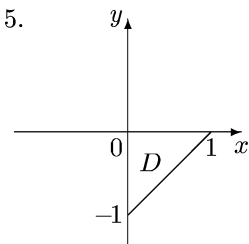
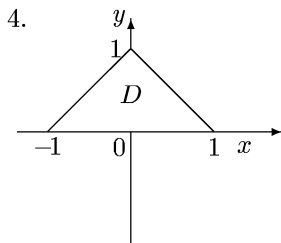
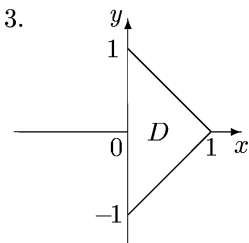
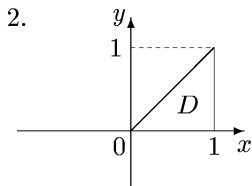
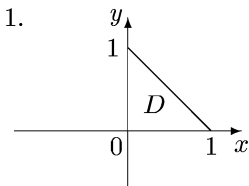
Получаем ковариационную матрицу (2) случайного вектора (ξ, η)

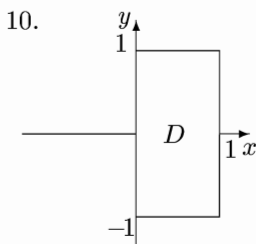
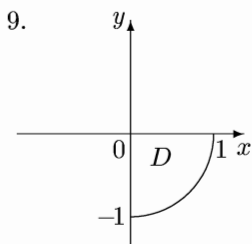
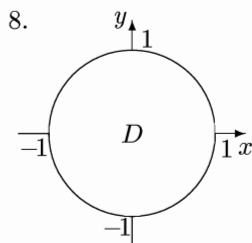
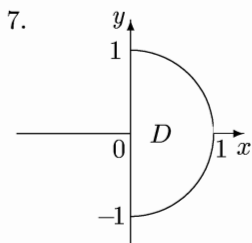
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} & \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2} \\ \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2} & \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Ответ. Центр рассеяния $(4/(3\pi), 4/(3\pi))$ и ковариационная матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} & \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2} \\ \frac{1}{2\pi} - \frac{16}{9\pi^2} & \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \end{pmatrix}.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Точка наудачу выбирается в области D . Пусть (ξ, η) — декартовы координаты этой точки. Найти центр рассеяния и ковариационную матрицу случайного вектора (ξ, η) .





Ответы.

1. $(1/3, 1/3)$ и $\begin{pmatrix} 1/18 & -1/36 \\ -1/36 & 1/18 \end{pmatrix}$.
2. $(2/3, 1/3)$ и $\begin{pmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{pmatrix}$.
3. $(1/3, 0)$ и $\begin{pmatrix} 1/18 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$.
4. $(0, 1/3)$ и $\begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/18 \end{pmatrix}$.
5. $(1/3, -1/3)$ и $\begin{pmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{pmatrix}$.
6. $(0, 4/(3\pi))$ и $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 - 16/(9\pi^2) \end{pmatrix}$.
7. $(4/(3\pi), 0)$ и $\begin{pmatrix} 1/4 - 16/(9\pi^2) & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
8. $(0, 0)$ и $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
9. $(4/(3\pi), -4/(3\pi))$ и $\begin{pmatrix} 1/4 - 16/(9\pi^2) & -1/(2\pi) + 16/(9\pi^2) \\ -1/(2\pi) + 16/(9\pi^2) & 1/4 - 16/(9\pi^2) \end{pmatrix}$.
10. $(1/2, 0)$ и $\begin{pmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

6.19. Характеристическая функция

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ (по ряду распределения — в дискретном случае, по плотности вероятностей — в непрерывном случае). По характеристической функции найти математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплекснозначная функция $\varphi(t)$ действительного переменного t , задаваемая равенством

$$\varphi(t) = M \exp(it\xi),$$

где i — мнимая единица.

а) Пусть ξ — дискретная случайная величина с рядом распределения

ξ	a_1	a_2	$\dots$	a_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Тогда характеристическая функция вычисляется по формуле

$$\varphi(t) = \sum_n e^{ita_n} p_n, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем возможным n .

б) Пусть ξ — непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей $p(x)$. Тогда характеристическая функция вычисляется по формуле

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx. \quad (2)$$

По производным $\varphi(t)$ в точке $t = 0$ можно находить начальные моменты случайной величины ξ , т.е. $M\xi$, $M\xi^2$, $M\xi^3$ и т.д., а именно: если k -й ($k = 1, 2, \dots$) начальный момент $M\xi^k$ конечен, то

$$M\xi^k = \frac{1}{i^k} \varphi^{(k)}(0).$$

В частности,

$$M\xi = -i\varphi'(0), \quad M\xi^2 = -\varphi''(0). \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2. \quad (4)$$

1. Находим характеристическую функцию $\varphi(t)$ дискретной случайной величины ξ по формуле (1) или непрерывной случайной величины ξ по формуле (2).

2. Находим $M\xi$ и $D\xi$ по формулам (3) и (4).

ПРИМЕР. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины ξ , имеющей геометрическое распределение (это означает, что ξ принимает значения $n = 1, 2, \dots$ и

$$P(\xi = n) = pq^{n-1},$$

где $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$). По характеристической функции найти математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

РЕШЕНИЕ. Положим $a_n = n$, тогда $p_n = P(\xi = a_n) = pq^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

1. Находим характеристическую функцию $\varphi(t)$ дискретной случайной величины ξ по формуле (1). Получаем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{ita_n} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itn} pq^{n-1} = \\ &= pe^{it} \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{it})^{n-1} = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} = \frac{p}{e^{-it} - q} \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались формулой для суммы членов геометрической прогрессии). Итак,

$$\varphi(t) = \frac{p}{e^{-it} - q}.$$

2. Находим $M\xi$ и $D\xi$ по формулам (3) и (4).

Вычисляя производные $\varphi(t)$,

$$\varphi'(t) = \frac{ipe^{-it}}{(e^{-it} - q)^2}, \quad \varphi''(t) = \frac{pe^{-it}}{(e^{-it} - q)^2} - \frac{2pe^{-2it}}{(e^{-it} - q)^3},$$

получаем

$$M\xi = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}, \quad M\xi^2 = -\frac{p}{(1-q)^2} + \frac{2p}{(1-q)^3} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

и

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Ответ. $\varphi(t) = \frac{p}{(e^{-it} - q)}, \quad M\xi = \frac{1}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Найти характеристическую функцию случайной величины ξ (по ряду распределения — в дискретном случае, по плотности вероятностей — в непрерывном случае). По характеристической функции найти математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

1. $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n, \quad p > 0, q > 0, p + q = 1$ (биномиальное распределение).

2. $P(\xi = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, n = 0, 1, 2, \dots, 0 < a < +\infty$ (распределение Пуассона).

3. $P(\xi = n) = C_{n+m-1}^n p^m q^n, n = 0, 1, 2, \dots, p > 0, q > 0, p + q = 1, m$ — натуральное число (отрицательное биномиальное распределение).

4. $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, x \in (-\infty, +\infty), 0 < \sigma < +\infty, a \in (-\infty, +\infty)$ (нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$).

5. $p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \in [0, +\infty), \\ 0, & x \notin [0, +\infty), \end{cases}$
 $0 < \lambda < +\infty$ (показательное распределение).

6. $p_\xi(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$
 $-\infty < a < b < +\infty$ (равномерное распределение $U[a, b]$).

7. $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$
 $0 < a < +\infty$ (треугольное распределение).

8. $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-x}, & x \in (0, +\infty), \\ 0, & x \notin (0, +\infty), \end{cases}$
 $0 < t < +\infty$ (гамма-распределение).

9. $p_\xi(x) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}, x \in (-\infty, +\infty), 0 < \lambda < +\infty$ (распределение Лапласа).

10. $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in (-\infty, +\infty)$ (распределение Коши).

Ответы.

1. $\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$, $M\xi = np$, $D\xi = npq$.
2. $\varphi(t) = \exp[a(e^{it} - 1)]$, $M\xi = a$, $D\xi = a$.
3. $\varphi(t) = [p/(1 - q \exp(it))]^m$, $M\xi = mq/p$, $D\xi = mq/p^2$.
4. $\varphi(t) = e^{ita - \sigma^2 t^2/2}$, $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$.
5. $\varphi(t) = \lambda/(\lambda - it)$, $M\xi = 1/\lambda$, $D\xi = 1/\lambda^2$.
6. $\varphi(t) = (e^{itb} - e^{ita})/[it(b - a)]$, $M\xi = (a + b)/2$, $D\xi = (b - a)^2/12$.
7. $\varphi(t) = 2(1 - \cos at)/(a^2 t^2)$, $M\xi = 0$, $D\xi = a^2/6$.
8. $\varphi(t) = 1/(1 - it)^\alpha$, $M\xi = \alpha$, $D\xi = \alpha$.
9. $\varphi(t) = \lambda^2/(\lambda^2 + t^2)$, $M\xi = 0$, $D\xi = 2/\lambda^2$.
10. $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $M\xi$ и $D\xi$ не существуют.

6.20. Распределение функции случайной величины

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Задано распределение случайной величины ξ и $f(x)$ — числовая (неслучайная) функция, $\eta = f(\xi)$. Найти вероятность случайного события $\{\eta \in B\}$, где B — интервал числовой прямой (интервал может быть открытым или замкнутым, конечным или бесконечным).*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Рассмотрим множество G на числовой прямой:

$$G = \{x : f(x) \in B\}.$$

Ясно, что

$$P(\eta \in B) = P(f(\xi) \in B) = P(\xi \in G).$$

Чтобы найти $P(\xi \in G)$, используем распределение случайной величины ξ .

ПРИМЕР. Пусть ξ — непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где λ — положительная постоянная (показательное распределение). Пусть $\eta = \cos \xi$. Найти $P(\eta < 0)$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае $f(x) = \cos x$. Найдем множество

$$G = \{x : f(x) < 0\}.$$

Известно, что решением неравенства $\cos x < 0$ является объединение интервалов вида $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Итак,

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} P(\eta < 0) &= P(\cos \xi < 0) = P(\xi \in G) = \\ &= P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \xi \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \right\}\right). \end{aligned}$$

Поскольку случайные события

$$\left\{ \xi \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

попарно несовместны, то вероятность объединения этих событий равна сумме их вероятностей. Следовательно,

$$P(\eta < 0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P\left(\xi \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)\right).$$

Найдем вероятности — члены ряда. При $k = -1, -2, \dots$ они равны 0, т.к. случайная величина ξ принимает только неотрицательные значения. При $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P\left(\xi \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)\right) &= \\ &= \int_{\pi/2+2k\pi}^{3\pi/2+2k\pi} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\pi/2+2k\pi}^{3\pi/2+2k\pi} = e^{-\lambda(\pi/2+2k\pi)} - e^{-\lambda(3\pi/2+2k\pi)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} P(\eta < 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\lambda(\pi/2+2k\pi)} - e^{-\lambda(3\pi/2+2k\pi)} \right) = \\ &= e^{-\lambda\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\lambda\pi k} - e^{-3\lambda\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\lambda\pi k} = \frac{e^{-\lambda\pi/2} - e^{-3\lambda\pi/2}}{1 - e^{-2\lambda\pi}} \end{aligned}$$

(использована формула для суммы членов геометрической прогрессии).

$$\text{Ответ. } P(\eta < 0) = \frac{e^{-\lambda\pi/2} - e^{-3\lambda\pi/2}}{1 - e^{-2\lambda\pi}}.$$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Задано распределение случайной величины ξ (по поводу названий см. стр. 314). Для указанной случайной величины $\eta = f(\xi)$ найти вероятность случайного события A .*

1. Равномерное распределение $U[-1, 1]$; $\eta = \xi^2$; $A = \{\eta < 0.64\}$.
2. Равномерное распределение $U[-1, 1]$; $\eta = \xi^3$; $A = \{\eta \leq 0.125\}$.
3. Распределение Лапласа; $\eta = \xi^2 - 5\xi + 7$; $A = \{\eta < 1\}$.
4. Показательное распределение; $\eta = 2\xi^2 + 3\xi - 7$; $A = \{\eta \geq -2\}$.
5. Показательное распределение; $\eta = e^\xi$; $A = \{2 < \eta < 4\}$.
6. Распределение Пуассона; $\eta = 2^\xi$; $A = \{\eta > 8\}$.
7. Равномерное распределение $U[0, 4\pi]$; $\eta = \sin \xi$; $A = \{\eta < 0.5\}$.
8. Распределение Коши; $\eta = \sin(\xi^2)$; $A = \{\eta > 0\}$.
9. Геометрическое распределение; $\eta = \sin(\pi\xi/2)$; $A = \{\eta > 0.2\}$.
10. Геометрическое распределение; $\eta = \cos(\pi\xi)$; $A = \{\eta < 0\}$.

Ответы. 1. 0.8. 2. $3/4$. 3. $(e^{-2\lambda} - e^{-3\lambda})/2$. 4. $e^{-\lambda}$. 5. $2^{-\lambda} - 4^{-\lambda}$.
6. $1 - e^{-a}(1 + a + a^2/2 + a^3/6)$. 7. $2/3$. 8. $1/2$. 9. $p/(1 - q^4)$.
10. $1/(1 + q)$.

6.21. Числовые характеристики функции случайной величины

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Задано распределение случайной величины ξ , $f(x)$ — числовая (неслучайная) функция. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = f(\xi)$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью вероятностей $p(x)$, то математическое ожидание и дисперсию можно вычислить по формулам

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx,$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - m)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) p(x) dx - m^2,$$

где $m = M\eta$.

Если ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ соответственно, то

$$M\eta = \sum_n f(a_n) p_n,$$

$$D\eta = \sum_n (f(a_n) - m)^2 p_n = \sum_n f^2(a_n) p_n - m^2,$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям n и $m = M\eta$.

ПРИМЕР. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(0, 1)$, т.е. ξ является непрерывной случайной величиной с плотностью вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 10^\xi$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае $f(x) = 10^x$. Сначала найдем $M\eta$:

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} 10^x p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 10^x e^{-x^2/2} dx. \quad (1)$$

Заметим, что

$$10^x e^{-x^2/2} = e^{x \ln 10} e^{-x^2/2} = e^{x \ln 10 - x^2/2} = e^{-(x - \ln 10)^2/2 + \ln^2 10/2}.$$

Сделаем замену переменных: $x - \ln 10 = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} 10^x e^{-x^2/2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2 + \ln^2 10/2} dt = \\ &= e^{\ln^2 10/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{\ln^2 10/2} \end{aligned} \quad (2)$$

(мы воспользовались тем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1,$$

поскольку слева стоит интеграл от плотности вероятностей). Из формул (1) и (2) следует, что

$$M\eta = e^{\ln^2 10/2}.$$

Аналогично находится $M(\eta^2)$:

$$M(\eta^2) = M100^\xi = e^{\ln^2 100/2} = e^{2 \ln^2 10}.$$

Дисперсия η может быть найдена по формуле

$$D\eta = M(\eta^2) - (M\eta)^2.$$

Получаем

$$D\eta = e^{2 \ln^2 10} - e^{\ln^2 10}.$$

Ответ. $M\eta = e^{\ln^2 10/2}$, $D\eta = e^{2 \ln^2 10} - e^{\ln^2 10}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Задано распределение случайной величины ξ . Найти математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины $\eta = f(\xi)$.*

1. Равномерное распределение $U[0, \pi]$; $\eta = \sin \xi$.
2. Равномерное распределение $U[0, 1]$; $\eta = 1/(\xi + 1)$.
3. Показательное распределение с параметром $\lambda = 5$; $\eta = 2^\xi$.
4. Распределение Пуассона; $\eta = 3^{-\xi}$.
5. Нормальное распределение $N(0, 1)$; $\eta = |\xi|$.
6. Нормальное распределение $N(0, 1)$; $\eta = e^{\xi^2/5}$.
7. Треугольное распределение; $\eta = \sqrt{|\xi|}$.
8. Геометрическое распределение; $\eta = \cos(\pi \xi)$.
9. Показательное распределение; $\eta = \sin \xi$.
10. Распределение Пуассона; $\eta = \cos \xi$.

Ответы.

1. $M\eta = 2/\pi$, $D\eta = 1/2 - (2/\pi)^2$.
2. $M\eta = \ln 2$, $D\eta = 1/2 - \ln^2 2$.

3. $M\eta = 5/(5 - \ln 2)$, $D\eta = 5/(5 - \ln 4) - 25/(5 - \ln 2)^2$.
4. $M\eta = e^{-2a/3}$, $D\eta = e^{-8a/9} - e^{-4a/3}$.
5. $M\eta = \sqrt{2/\pi}$, $D\eta = 1 - 2/\pi$.
6. $M\eta = \sqrt{5}/2$, $D\eta = \sqrt{5/3} - 5/4$.
7. $M\eta = 8\sqrt{a}/15$, $D\eta = 11a/225$.
8. $M\eta = -p/(1+q)$, $D\eta = 1 - p^2/(1+q)^2$.
9. $M\eta = \lambda/(1+\lambda^2)$, $D\eta = 2/(4+\lambda^2) - \lambda^2/(1+\lambda^2)^2$.
10. $M\eta = e^{-a(1-\cos 1)} \cos(a \sin 1)$,
 $D\eta = [1 + e^{-a(1-\cos 2)} \cos(a \sin 2) - 2e^{-2a(1-\cos 1)} \cos^2(a \sin 1)]/2$.

6.22. Распределение функции случайного вектора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Задано распределение случайного вектора (ξ, η) , $f(x, y)$ — числовая (неслучайная) функция, $\zeta = f(\xi, \eta)$. Найти вероятность случайного события $\{\zeta \in B\}$, где B — интервал числовой прямой.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Рассмотрим следующее множество G на плоскости:

$$G = \{(x, y) : f(x, y) \in B\}.$$

Ясно, что

$$P(\zeta \in B) = P(f(\xi, \eta) \in B) = P((\xi, \eta) \in G).$$

Чтобы найти $P((\xi, \eta) \in G)$, используем распределение случайного вектора (ξ, η) . В частности, если (ξ, η) — непрерывный случайный вектор с плотностью вероятностей $p(x, y)$, то

$$P((\xi, \eta) \in G) = \iint_G p(x, y) dx dy,$$

поэтому

$$P(\zeta \in B) = \iint_G p(x, y) dx dy.$$

Замечание. Если ξ и η — независимые непрерывные случайные величины с плотностями вероятностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответственно, то случайный вектор (ξ, η) является непрерывным с плотностью вероятностей $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$.

ПРИМЕР. Пусть ξ, η — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же показательному закону. Найти $P(\log_2(\eta/(\xi - 1)) < 0)$.

РЕШЕНИЕ. Плотность вероятностей $p(x)$ случайной величины ξ равна

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Такова же плотность вероятностей случайной величины η . Поскольку случайные величины ξ и η независимы, плотность вероятностей $p(x, y)$ случайного вектора (ξ, η) при $x \geq 0, y \geq 0$ равна

$$p(x, y) = p(x)p(y) = \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}.$$

При остальных x, y $p(x, y) = 0$. В рассматриваемом случае

$$f(x, y) = \log_2 \frac{y}{x-1}.$$

Рассмотрим множество

$$G = \left\{ (x, y) : \log_2 \frac{y}{x-1} < 0 \right\}.$$

Упростим неравенство, определяющее G . Для этого решим неравенство

$$\log_2 \frac{y}{x-1} < 0.$$

Очевидно, что оно выполняется, если

$$0 < \frac{y}{x-1} < 1.$$

При $x > 1$ получаем, что

$$0 < y < x - 1,$$

а при $x < 1$

$$0 > y > x - 1.$$

Итак,

$$G = \{(x, y) : x > 1, 0 < y < x - 1\} \cup \{(x, y) : x < 1, 0 > y > x - 1\}.$$

Искомая вероятность определяется формулой

$$P\left(\log_2 \frac{y}{x-1} < 0\right) = \iint_G p(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Поскольку плотность вероятностей $p(x, y)$ отлична от нуля лишь при $x \geq 0$, $y \geq 0$, то на самом деле надо найти интеграл от $p(x, y)$ по множеству

$$\tilde{G} = \{(x, y) : x > 1, 0 < y < x - 1\}.$$

Вычисляем интеграл (1):

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{G}} p(x, y) dx dy &= \int_1^{\infty} dx \int_0^{x-1} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy = \\ &= \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \int_0^{x-1} \lambda e^{-\lambda y} dy = - \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} \Big|_0^{x-1} dx = \\ &= - \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(e^{-\lambda(x-1)} - 1 \right) dx = - \int_1^{\infty} (\lambda e^{\lambda} e^{-2\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}) dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{\lambda} e^{-2\lambda x} - e^{-\lambda x} \right) \Big|_1^{\infty} = e^{-\lambda} - \frac{1}{2} e^{\lambda} e^{-2\lambda} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Итак,

$$P\left(\log_2 \frac{y}{x-1} < 0\right) = \frac{e^{-\lambda}}{2}.$$

Ответ. $\frac{e^{-\lambda}}{2}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Пусть ξ, η — независимые случайные величины, распределенные по одному и тому же показательному закону. Найти вероятность указанного события.

1. $\{\xi > \eta\}$. 2. $\{\eta < \xi < 2\eta\}$. 3. $\{\xi < 2\eta + 1\}$. 4. $\{|\xi - \eta| > 1\}$.
5. $\{|2\xi - \eta| < 1\}$. 6. $\{2\xi/(\xi - 3\eta) > 1\}$. 7. $\{1/\xi < 1/(\eta - 1)\}$.
8. $\{0 < 1/(\xi - \eta) < 1\}$. 9. $\{\xi^2 + 3\xi\eta - 4\eta^2 < 0\}$. 10. $\{\xi^2 + 4\xi\eta + 4\eta^2 > 9\}$.

Ответы. 1. $1/2$. 2. $1/6$. 3. $1 - e^{-\lambda}/3$. 4. $e^{-\lambda}$. 5. $1 - 2e^{-\lambda/2}/3 - e^{-\lambda}/3$.
6. $1/4$. 7. $e^{-\lambda}/2$. 8. $e^{-\lambda}/2$. 9. $1/2$. 10. $2e^{-1.5\lambda} - e^{-3\lambda}$.

6.23. Числовые характеристики функции случайного вектора

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Задано распределение случайного вектора (ξ, η) , $f(x, y)$ — числовая (неслучайная) функция. Найти математическое ожидание случайной величины $\zeta = f(\xi, \eta)$.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Если (ξ, η) — непрерывный случайный вектор с плотностью вероятностей $p(x, y)$, то

$$M\zeta = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)p(x, y)dxdy.$$

Вычисляем интеграл и записываем ответ.

ПРИМЕР. Пусть (ξ, η) — случайный вектор с независимыми компонентами, распределенными по одному и тому же показательному закону. Найти $M|\xi - \eta|$.

РЕШЕНИЕ. Плотность вероятностей $p(x, y)$ случайного вектора (ξ, η) равна (см. стр. 321)

$$p(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. В рассматриваемом случае $f(x, y) = |x - y|$, поэтому

$$M|\xi - \eta| = \iint_{-\infty}^{+\infty} |x - y|p(x, y)dxdy = \lambda^2 \iint_D |x - y|e^{-\lambda(x+y)}dxdy.$$

Разобьем множество D на две непересекающиеся области:

$$D = D_1 \cup D_2,$$

где

$$D_1 = \{(x, y) : x \geq y, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : x < y, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Сначала найдем интеграл по области D_1 :

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \int\limits_{D_1} \int (x-y)e^{-\lambda(x+y)} dx dy &= \\
 &= \lambda^2 \int_0^\infty dx \int_0^x x e^{-\lambda(x+y)} dy - \lambda^2 \int_0^\infty dy \int_y^\infty y e^{-\lambda(x+y)} dx = \\
 &= \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x}) dx - \lambda \int_0^\infty y e^{-\lambda y} e^{-\lambda y} dy = \\
 &= \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx - \lambda \int_0^\infty x e^{-2\lambda x} dx - \lambda \int_0^\infty y e^{-2\lambda y} dy = \\
 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4\lambda} - \frac{1}{4\lambda} = \frac{1}{2\lambda}
 \end{aligned}$$

(все три последних интеграла сводятся к интегралу $\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$).

Из соображений симметрии ясно, что интеграл по области D_2 равен тому же значению, т.е.

$$\lambda^2 \int\limits_{D_2} \int (y-x)e^{-\lambda(x+y)} dx dy = \frac{1}{2\lambda}.$$

Следовательно,

$$M|\xi - \eta| = \frac{1}{\lambda}.$$

Ответ. $M|\xi - \eta| = \frac{1}{\lambda}.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Пусть (ξ, η) — случайный вектор с независимыми компонентами, распределенными по одному и тому же показательному закону. Найти математическое ожидание случайной величины $\zeta = f(\xi, \eta)$.

1. $\zeta = 2\xi\eta$. 2. $\zeta = (2\xi - \eta)^2$. 3. $\zeta = (2\xi + \eta)(\xi - 2\eta)$. 4. $\zeta = \sqrt{\xi\eta}$.
5. $\zeta = e^{-(\xi+\eta)}$. 6. $\zeta = \sin(\xi + \eta)$. 7. $\zeta = \cos(\xi - \eta)$. 8. $\zeta = |2\xi - \eta|$.
9. $\zeta = \min(\xi, \eta)$. 10. $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

- Ответы.** 1. $2/\lambda^2$. 2. $6/\lambda^2$. 3. $-3/\lambda^2$. 4. π/λ . 5. $\lambda^2/(\lambda+1)^2$.
 6. $2\lambda^3/(1+\lambda^2)^2$. 7. $\lambda^2/(1+\lambda^2)$. 8. $5/(3\lambda)$. 9. $1/(2\lambda)$. 10. $3/(2\lambda)$.

6.24. Нормальное распределение

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(a, \sigma^2)$. Найти вероятность случайного события A , состоящего в том, что значения ξ удовлетворяют некоторым неравенствам.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Представляем событие A в виде

$$A = \left\{ \xi \in \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i) \right\}, \quad (1)$$

где $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ — попарно непересекающиеся интервалы числовой оси. Для нахождения интервалов (a_i, b_i) нужно решить неравенства, определяющие A .

2. Вероятность случайного события (1) находится по формуле

$$P \left(\xi \in \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i) \right) = \sum_{i=1}^k \left(\Phi \left(\frac{b_i - a}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a_i - a}{\sigma} \right) \right), \quad (2)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Для функции Лапласа созданы таблицы ^{*)} (см., например, таблицу 1.1 в книге Л.Н. Большева и Н.В. Смирнова „Таблицы математической статистики“, М.: Наука, 1983), в которых даются значения функций только для $x \geq 0$. Для отрицательных x имеем

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(|x|).$$

Значения функции Лапласа удобно получить с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ

ПРИМЕР. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0, 4)$. Найти вероятность случайного события

$$A = \left\{ \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1 + \xi} \right\}.$$

^{*)} Используя единые обозначения и названия функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$, авторы разных книг определяют их разными формулами.

РЕШЕНИЕ.

1. Представляем событие A в виде (1). Для этого решаем неравенство

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x+1}.$$

Получаем

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

Поэтому случайное событие $A = \{1/\xi > 1/(1+\xi)\}$ можно записать в виде

$$A = \{\xi \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)\}.$$

По формуле (2) получаем, что

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+\xi}\right) &= P(\xi \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)) = \\ &= \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) - \Phi(-\infty) + \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{0-0}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 - \Phi(0). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$. В таблицах находим, что

$$\Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 - 0.6915 = 0.3085, \quad \Phi(0) = 0.5.$$

Следовательно, искомая вероятность приблизительно равна

$$0.3085 + 1 - 0.5 = 0.8085.$$

Ответ. $P\left(\frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+\xi}\right) \approx 0.8085.$

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону $N(0, 4)$. Найти вероятность события A .

1. $A = \{\xi \in (0, 2)\}$.
2. $A = \{\xi > 0, 8\}$.
3. $A = \{2\xi - 3 < 0\}$.
4. $A = \{|\xi - 1| < 0, 5\}$.
5. $A = \{|\xi - 1| > 6\}$.
6. $A = \{\xi^2 > 2, 25\}$.
7. $A = \{\xi^2 - 3\xi + 2 < 0\}$.
8. $A = \{1/(1+\xi) > -2\}$.
9. $A = \{\log_4^2 \xi < 0, 25\}$.
10. $A = \{1/(1+\xi^2) < 0, 5\}$.

- Ответы. 1. 0.3414. 2. 0.3446. 3. 0.7734. 4. 0.1747. 5. 0.0064.
6. 0.4533. 7. 0.1499. 8. 0.9181. 9. 0.2426. 10. 0.6171.

6.25. Центральная предельная теорема

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $M\xi_1 = m$, $D\xi_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Найти вероятность некоторого случайного события, связанного с суммой S_n при большом n или с несколькими суммами $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots$ при больших $n_1, n_2, \dots$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Центральная предельная теорема утверждает, что независимо от распределения отдельного слагаемого при больших n сумма S_n имеет закон распределения, приблизительно совпадающий с нормальным законом $N(nm, n\sigma^2)$. Аналогичное утверждение справедливо для разности $S_{n_2} - S_{n_1} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \xi_i$, если величина $n_2 - n_1$ велика, причем случайные величины S_{n_1} и $S_{n_2} - S_{n_1}$ независимы. Расчет требуемой вероятности делается так, как это изложено в задаче 6.24. При этом используется следующий факт: если случайные величины η_1 и η_2 независимы и распределены по нормальному закону $N(a_1, \sigma_1^2)$ и $N(a_2, \sigma_2^2)$ соответственно, то случайная величина $c_1\eta_1 + c_2\eta_2$, где c_1, c_2 — постоянные, распределена по нормальному закону $N(c_1a_1 + c_2a_2, c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2)$.

ПРИМЕР. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметром $a = 1$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Найти вероятность $P(2S_{300} > S_{600} - 30)$.

РЕШЕНИЕ. Случайная величина S_{300} распределена приблизительно по нормальному закону $N(300, 300)$, т.к. $n = 300$, $m = M\xi_1 = 1$, $\sigma^2 = D\xi_1 = 1$. Точно такое же распределение имеет случайная величина $S_{600} - S_{300}$, причем случайные величины S_{300} и $S_{600} - S_{300}$ независимы. Положим

$$\eta = S_{300}, \quad \zeta = S_{600} - S_{300}.$$

Тогда $S_{600} = \eta + \zeta$ и неравенство $2S_{300} > S_{600} - 30$ можно записать в виде $\zeta - \eta < 30$. Но случайная величина $\zeta - \eta$ распределена по нормальному закону $N(0, 600)$. Следовательно,

$$P(2S_{300} > S_{600} - 30) = P(\zeta - \eta < 30) \approx \Phi\left(\frac{30 - 0}{\sqrt{600}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx 0.8897.$$

Ответ. $P(2S_{300} > S_{600} - 30) \approx 0.8897$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и подчинены одному и тому же указанному закону распределения. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$ Найти указанную вероятность.

1. Показательное распределение с параметром $\lambda = 1$,
 $P(S_{100} \in (90, 100))$.
2. Нормальное распределение $N(1, 1)$, $P(S_{900} \geq 850)$.
3. Распределение Пуассона с параметром $a = 1$, $P(S_{400} < 420)$.
4. Равномерное распределение $U[0, 2]$, $P(|S_{1600} - 1600| < 40)$.
5. Биномиальное распределение с параметрами $n = 9$, $p = 0,5$,
 $P(|S_{100} - 450| > 30)$.
6. Показательное распределение с параметром $\lambda = 1$,
 $P(S_{1000} - S_{600} > 390)$.
7. Нормальное распределение $N(1, 1)$, $P(|S_{500} - S_{100}| < 420)$.
8. Равномерное распределение $U[0, 2]$, $P((S_{400} + S_{200})/2 > S_{300} + 5)$.
9. Биномиальное распределение с параметрами $n = 9$, $p = 0,5$,
 $P(S_{100} + S_{200} < 1400)$.
10. Распределение Пуассона с параметром $a = 1$,
 $P(S_{100} + S_{200} + S_{300} > 550)$.

Ответы. 1. 0.3414. 2. 0.9522. 3. 0.8413. 4. 0.9167. 5. 0.0455.
6. 0.6915. 7. 0.8413. 8. 0.1103. 9. 0.0680. 10. 0.9093.

Глава 7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

При изучении темы МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА вы научитесь извлекать полезную информацию из результатов измерений, данных опросов и другого фактического материала, а также использовать этот материал для формулировки и проверки гипотез.

Задачи 1–6 посвящены использованию статистических данных для нахождения законов распределения. Представив статистические данные в виде наглядных графиков, мы формулируем гипотезу о законе распределения этих данных. Такой закон обычно содержит один или несколько параметров, численные значения которых подлежат уточнению.

Задачи 7–12 посвящены использованию статистических данных для нахождения числовых характеристик законов распределения и, в частности, фигурирующих в этих законах неизвестных параметров.

Вы научитесь находить точечные оценки математического ожидания и дисперсии, а также применять метод моментов и метод наибольшего правдоподобия для определения параметров распределения.

Задача 13 посвящена очень важному для приложений методу наименьших квадратов. В задаче 14 вы научитесь уточнять данные с помощью известных соотношений между ними.

Задача 15 посвящена случайным интервалам. Они необходимы для оценки точности информации, извлеченной из фактического материала методами математической статистики. Так, в задачах 16 и 17 случайные интервалы используются для оценки точности математического ожидания и дисперсии, определенных по выборке. Эта точность характеризуется так называемыми доверительными интервалами. Обработав статистические данные, как показано в задачах 1–16, вы будете иметь точную гипотезу о законе их распределения или несколько конкурирующих гипотез.

Задачи 17–20 посвящены использованию статистических данных для проверки гипотез о законах распределения.

Без использования компьютеров невозможно изучить математическую статистику, поскольку решение задач требует многих гро-

моздких вычислений, графических построений, статистического моделирования и частого использования справочных данных. Пакет РЕШЕБНИК.ВМ предоставит вам все необходимое при изучении математической статистики и при последующей практической работе со статистическими данными.

7.1. Группированный статистический ряд абсолютных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дана числовая выборка $a_1, a_2, \dots, a_n$. Построить ее группированный статистический ряд абсолютных частот из m членов.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Группированным статистическим рядом абсолютных частот называется последовательность пар чисел

$$(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*),$$

где x_k^* — центр k -го интервала группировки и n_k^* — число элементов выборки, попавших в k -ый интервал. Числа n_k^* ($k = 1, \dots, m$) называются абсолютными частотами.

1. Находим $x_{\min} = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $x_{\max} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Если $x_{\min}$ или $x_{\max}$ далеко отстоит от остальных элементов выборки, то нужно либо пополнить выборку, либо исключить из выборки это значение, иначе группированный ряд абсолютных частот получится неrepresentative.

2. Находим длину интервала группировки $h = (x_{\max} - x_{\min})/m$, где m — число интервалов группировки.

3. Находим правые границы интервалов группировки

$$x_k = x_{\min} + kh, \quad (k = 1, \dots, m).$$

4. Находим центры x_k^* интервалов группировки

$$x_k^* = x_k + h/2, \quad k = 1, \dots, m.$$

5. Для каждого интервала группировки (x_{k-1}, x_k) находим число n_k^* элементов выборки, попавших в этот интервал.

6. Проверяем, что сумма всех абсолютных частот n_k^* равна объему выборки n : $n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^* = n$. Если это не так, то при подсчете каких-то абсолютных частот n_k^* были ошибки и нужно подсчитать все абсолютные частоты n_k^* заново.

7. Рекомендуем записывать ответ в виде

$$\begin{array}{cccccc} x_k^* & x_1^* & x_2^* & \dots & x_m^* \\ n_k^* & n_1^* & n_2^* & \dots & n_m^* \end{array}$$

ПРИМЕР. Дана выборка

0.3414 0.0544 0.5665 0.5729 0.5221 1.0481 0.2063 0.4233 0.0765 0.6972
 0.5163 0.8818 0.1865 0.1791 0.9468 0.1072 1.5617 1.1870 0.1553 0.4480
 0.5821 0.9818 1.0617 0.0652 3.7157 1.8344 0.7458 0.7540 0.0107 0.2080
 0.5707 0.0353 0.0961 1.7704 0.2473 0.4891 0.1172 0.6037 1.0279 0.6948
 0.2394 0.6025 0.2399 0.5744 0.0105 0.8014 1.8042 0.4547 0.1594 0.7304
 0.2385 0.1313 0.4685 0.2088 0.3142 0.2477 0.0590 0.8701 0.4743 0.1035
 0.0424 0.4640 0.1973 1.2452 0.6812 0.2391 0.6018 0.1384 0.3842 1.9074
 0.8335 0.1128 0.4220 0.7335 0.1384 0.5190 1.0030 1.2520 0.1868 0.1219
 0.1084 1.2342 0.0455 0.1426 2.0712 0.0435 0.2432 1.4830 1.3463 0.1551
 0.1051 0.1947 0.4945 0.1489 0.0300 1.9687 0.2459 0.2411 0.0786 0.1704
 0.0517 0.3001 0.1881 0.3989 0.3636 0.4906 0.5615 0.2307 0.0598 0.3059
 0.4618 0.6618 0.6431 0.7181 0.1927 0.2341 0.8441 0.0666 0.5814 0.4669
 0.0706 0.3872 0.3162 0.0293 0.3635 0.6708 0.9115 0.2149 0.1379 0.0240
 0.2368 3.0668 0.5952 0.9600 0.7650 0.0266 0.1971 0.2453 0.2817 0.5482
 1.0075 0.9034 0.1531 1.5407 0.3712 0.4305 0.6989 1.3417 1.0866 0.5681
 0.3756 0.9597 0.7906 0.1007 0.5398 0.4489 0.1600 0.0009 0.0279 0.1746
 0.1138 0.4197 0.7443 0.2543 1.0400 0.1737 0.6106 0.0511 0.2837 0.6404
 0.8304 0.2186 0.4119 0.1463 0.3607 0.1491 0.0713 0.5814 2.8045 1.3063
 0.1138 0.0343 0.1560 0.0778 0.0472 0.2749 0.3299 1.4998 1.6403 0.0024
 0.0250 0.4424 1.5446 0.9442 0.6416 1.0949 0.3004 0.0413 0.7620 0.7577
 0.3538 0.6052 0.3154 0.3242 0.1391 0.6120 0.0216 0.1370 1.6186 0.2310
 0.8314 1.2808 0.8731 0.0616 0.3451 0.9448 0.7492 0.7761 0.0214 0.4120
 0.0940 0.1623 0.6393 0.1266 1.7226 1.6758 0.3748 0.5488 0.0842 0.9146
 1.0724 1.6746 0.3921 1.2122 0.3526 0.0264 0.4680 0.7817 0.3367 1.2449
 0.0398 1.2827 0.4134 0.0429 0.6958 0.6410 0.9806 2.5054 0.4858 0.2281
 2.1528 0.6725 3.7900 0.0005 0.3757 0.6727 0.4208 1.8663 0.2649 0.2802
 1.1588 0.1339 0.0146 0.4941 0.8826 0.3320 0.2814 0.2769 0.6607 1.2985
 0.9648 0.5388 0.3288 0.5051 0.6511 0.1595 0.0253 1.3622 0.1405 0.6973

Построить ее группированный статистический ряд абсолютных частот из 21 члена.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим $x_{\min} = 0.0005$ и $x_{\max} = 3.7900$.
2. Находим длину интервала группировки

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m} = \frac{3.7900 - 0.0005}{21} = 0.180452381.$$

Здесь $m = 21$ — число интервалов группировки.

3. Находим правые границы интервалов группировки:

$$x_k = x_{\min} + kh \quad (k = 1, \dots, 21).$$

Получаем

0.1805	0.3610	0.5414	0.7219	0.9024	1.0829	1.2633
1.4438	1.6243	1.8048	1.9852	2.1657	2.3462	2.5267
2.7071	2.8876	3.0681	3.2486	3.4290	3.6095	3.7900

4. Находим центры x_k^* интервалов группировки по формуле

$$x_k^* = x_k + \frac{h}{2}, \quad k = 1, \dots, 21.$$

Получаем

x_k^*	0.09025	0.27075	0.45120	0.63165	0.81215	0.99265	1.17310
x_k^*	1.35355	1.53405	1.71455	1.89500	2.07545	2.25595	2.43645
x_k^*	2.61690	2.79735	2.97785	3.15835	3.33880	3.51925	3.69975

5. Для каждого интервала группировки (x_{k-1}, x_k) находим число n_k^* элементов выборки, попавших в этот интервал. Получаем

n_k^*	76	51	39	36	21	18	9
n_k^*	7	6	6	4	2	0	1
n_k^*	0	1	1	0	0	0	2

6. Убеждаемся, что сумма всех абсолютных частот n_k^* равна объему выборки 280.

Ответ. Группированный статистический ряд абсолютных частот имеет вид

x_k^*	0.09025	0.27075	0.45120	0.63165	0.81215	0.99265	1.17310
n_k^*	76	51	39	36	21	18	9
x_k^*	1.35355	1.53405	1.71455	1.89500	2.07545	2.25595	2.43645
n_k^*	7	6	6	4	2	0	1
x_k^*	2.61690	2.79735	2.97785	3.15835	3.33880	3.51925	3.69975
n_k^*	0	1	1	0	0	0	2

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить значения a_k при $k = 1, 2, \dots, 200$. Для выборки $a_1, \dots, a_{200}$ построить группированный статистический ряд абсолютных частот из 10 членов.

В условиях задач $\alpha_k = \text{frac}(\sqrt{2}k)$, $\beta_k = \text{frac}(\sqrt{3}k)$ и $\text{frac}(x)$ обозначает дробную часть десятичного числа x .

1. $a_k = \alpha_k$. 2. $a_k = \beta_k$. 3. $a_k = -\ln \alpha_k$. 4. $a_k = \sin \pi(\alpha_k - 1/2)$. 5. $a_k = \sqrt{\alpha_k}$. 6. $a_k = \sqrt[3]{\alpha_k}$. 7. $a_k = \ln \alpha_k - \ln(1 - \alpha_k)$. 8. $a_k = \sqrt{1 - 2 \ln \alpha_k}$. 9. $a_k = \sqrt{-2 \ln \alpha_k} \sin(2\pi\beta_k)$. 10. $a_k = \sqrt[3]{\text{tg } \pi(\alpha_k - 1/2)}$.

Ответы. *)

1.	x_k^*	$5.173E-2$	$1.510E-1$	$2.503E-1$	$3.496E-1$	$4.489E-1$
	n_k^*	20	20	20	20	21
	x_k^*	$5.482E-1$	$6.474E-1$	$7.467E-1$	$8.460E-1$	$9.453E-1$
	n_k^*	18	20	20	21	20
2.	x_k^*	$5.333E-2$	$1.524E-1$	$2.515E-1$	$3.506E-1$	$4.498E-1$
	n_k^*	20	20	19	20	21
	x_k^*	$5.489E-1$	$6.480E-1$	$7.471E-1$	$8.462E-1$	$9.453E-1$
	n_k^*	20	20	20	19	21
3.	x_k^*	$3.133E-1$	$9.297E-1$	1.546	2.163	2.779
	n_k^*	92	50	26	14	8
	x_k^*	3.396	4.012	4.628	5.245	5.861
	n_k^*	4	3	1	1	1
4.	x_k^*	$-9.000E-1$	$-7.000E-1$	$-5.000E-1$	$-3.000E-1$	$-1.000E-1$
	n_k^*	41	18	15	14	13
	x_k^*	$9.994E-2$	$2.999E-1$	$4.999E-1$	$6.999E-1$	$8.999E-1$
	n_k^*	13	13	14	18	41
5.	x_k^*	$9.333E-2$	$1.885E-1$	$2.837E-1$	$3.788E-1$	$4.740E-1$
	n_k^*	5	7	10	14	18
	x_k^*	$5.692E-1$	$6.644E-1$	$7.595E-1$	$8.547E-1$	$9.499E-1$
	n_k^*	22	26	28	33	37
6.	x_k^*	$1.714E-1$	$2.585E-1$	$3.455E-1$	$4.325E-1$	$5.196E-1$
	n_k^*	2	4	6	10	13
	x_k^*	$6.066E-1$	$6.937E-1$	$7.807E-1$	$8.678E-1$	$9.548E-1$
	n_k^*	20	25	33	38	49
7.	x_k^*	-5.595	-4.450	-3.305	-2.160	-1.015
	n_k^*	1	4	8	21	44
	x_k^*	$1.304E-1$	1.275	2.4205	3.566	4.711
	n_k^*	56	39	18	7	2
8.	x_k^*	$2.712E-1$	$6.124E-1$	$9.537E-1$	1.295	1.636
	n_k^*	17	35	41	39	29
	x_k^*	1.977	2.318	2.660	3.001	3.342
	n_k^*	19	10	6	3	1

*) Здесь и далее в записи десятичных чисел $E - n = 10^{-n}$.

9.	x_k^*	-3.117	-2.479	-1.841	-1.203	-5.647E-1
	n_k^*	1	2	9	31	39
	x_k^*	7.326E-2	7.112E-1	1.349	1.987	2.625
	n_k^*	49	38	20	10	1
10.	x_k^*	-4.873	-3.941	-3.009	-2.077	-1.145
	n_k^*	1	1	2	12	64
	x_k^*	-2.137E-1	7.181E-1	1.650	2.582	3.514
	n_k^*	22	63	29	4	2

7.2. Группированный статистический ряд относительных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Построить группированный статистический ряд относительных частот по заданному группированному статистическому ряду абсолютных частот

$$(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*).$$

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Группированным статистическим рядом относительных частот называется последовательность пар чисел

$$\left(x_1^*, \frac{n_1^*}{n}\right), \left(x_2^*, \frac{n_2^*}{n}\right), \dots, \left(x_m^*, \frac{n_m^*}{n}\right),$$

где n_k^*/n — относительные частоты и n — объем выборки.

По теореме Бернулли каждая относительная частота n_k^*/n стремится при $n \rightarrow \infty$ к вероятности того, что выборочное значение попадет в соответствующий интервал группировки (x_{k-1}^*, x_k^*) .

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	n_k^*/n
1	x_1^*	n_1^*	
2	x_2^*	n_2^*	
...	...	...	...
m	x_m^*	n_m^*	

2. Находим объем выборки, суммируя числа в третьем столбце:

$$n = n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^*$$

3. Вычисляем относительные частоты n_k^*/n и помещаем их в четвертый столбец таблицы.

4. Проверяем, что сумма вычисленных относительных частот в четвертом столбце равна 1:

$$\frac{n_1^*}{n} + \frac{n_2^*}{n} + \dots + \frac{n_m^*}{n} = 1.$$

Если это не так, то при вычислении каких-то относительных частот n_k^*/n были сделаны ошибки и нужно вычислить все относительные частоты n_k^*/n заново. Если сумма относительных частот незначительно отличается от единицы, то этим можно либо пренебречь, либо применить выравнивание (задача 7.14).

При вычислениях следует сохранять одно и то же количество цифр у всех относительных частот.

Замечание. При объемах выборки 100, 125, 200, 250, 500 вычисление относительных частот получается простым и точным, т.к. сводится к умножению на 10, 8, 5, 4, 2 и делению на 1000.

5. Рекомендуем записывать ответ в виде

$$\begin{array}{cccccc} x_k^* & x_1^* & x_2^* & \dots & x_m^* \\ \frac{n_k^*}{n} & \frac{n_1^*}{n} & \frac{n_2^*}{n} & \dots & \frac{n_m^*}{n} \end{array}$$

ПРИМЕР. Построить группированный статистический ряд относительных частот по группированному статистическому ряду абсолютных частот, найденному в примере раздела 7.1 (стр. 332).

РЕШЕНИЕ.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	n_k^*/n
1	0.09025	76	
2	0.27075	51	
...	...	...	...
21	3.69975	2	

2. Находим объем выборки n , суммируя числа в третьем столбце:

$$76 + 51 + 39 + 36 + 21 + 18 + 9 + 7 + 6 + 6 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 280.$$

3. Вычисляем относительные частоты $n_k^*/n = n_k^*/280$ и помещаем их в четвертый столбец таблицы.

Таблица принимает вид

k	x_k^*	n_k^*	n_k^*/n
1	0.09025	76	0.27143
2	0.27075	51	0.18214
3	0.45120	39	0.13929
4	0.63165	36	0.12857
5	0.81215	21	0.07500
6	0.99265	18	0.06429
7	1.17310	9	0.03214
8	1.35355	7	0.02500
9	1.53405	6	0.02143
10	1.71455	6	0.02143
11	1.89500	4	0.01429
12	2.07545	2	0.00714
13	2.25595	0	0
14	2.43645	1	0.00357
15	2.61690	0	0
16	2.79735	1	0.00357
17	2.97785	1	0.00357
18	3.15835	0	0
19	3.33880	0	0
20	3.51925	0	0
21	3.69975	2	0.00714

4. Убеждаемся, что сумма вычисленных относительных частот в четвертом столбце равна 1.

Ответ. Группированный статистический ряд относительных частот имеет вид

x_k^*	0.09025	0.27075	0.45120	0.63165	0.81215	0.99265	1.17310
$\frac{n_k^*}{n}$	0.27143	0.18214	0.13929	0.12857	0.07500	0.06429	0.03214
x_k^*	1.35355	1.53405	1.71455	1.89500	2.07545	2.25595	2.43645
$\frac{n_k^*}{n}$	0.02500	0.02143	0.02143	0.01429	0.00714	0	0.00357
x_k^*	2.61690	2.79735	2.97785	3.15835	3.33880	3.51925	3.69975
$\frac{n_k^*}{n}$	0	0.00357	0.00357	0	0	0	0.00714

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Построить группированные статистические ряды относительных частот по группированным статистическим рядам абсолютных частот, найденных в задачах раздела 7.1 (стр. 333).

Ответы.

1.	x_k^*	$5.173E-2$	$1.510E-1$	$2.503E-1$	$3.496E-1$	$4.489E-1$
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.105
	x_k^*	$5.482E-1$	$6.474E-1$	$7.467E-1$	$8.460E-1$	$9.453E-1$
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.090	0.100	0.100	0.105	0.100
2.	x_k^*	$5.333E-2$	$1.524E-1$	$2.515E-1$	$3.506E-1$	$4.498E-1$
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.100	0.100	0.095	0.100	0.105
	x_k^*	$5.489E-1$	$6.480E-1$	$7.471E-1$	$8.462E-1$	$9.453E-1$
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.100	0.100	0.100	0.095	0.105
3.	x_k^*	$3.133E-1$	$9.297E-1$	1.546	2.163	2.779
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.460	0.250	0.130	0.070	0.040
	x_k^*	3.396	4.012	4.628	5.245	5.861
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.020	0.015	0.005	0.005	0.005
4.	x_k^*	-0.9000	-0.7000	-0.5000	-0.3000	-0.1000
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.205	0.090	0.075	0.070	0.065
	x_k^*	0.09994	0.2999	0.4999	0.6999	0.8999
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.065	0.065	0.070	0.090	0.205
5.	x_k^*	$9.333E-2$	$1.885E-1$	$2.837E-1$	$3.788E-1$	$4.740E-1$
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.025	0.035	0.050	0.070	0.090
	x_k^*	$5.692E-1$	$6.644E-1$	$7.595E-1$	$8.547E-1$	$9.499E-1$
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.110	0.130	0.140	0.165	0.185

6.	x_k^*	1.714E-1	2.585E-1	3.455E-1	4.325E-1	5.196E-1
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.010	0.020	0.030	0.050	0.065
	x_k^*	6.066E-1	6.937E-1	7.807E-1	8.678E-1	9.548E-1
7.	$\frac{n_k^*}{n}$	0.100	0.125	0.165	0.190	0.245
	x_k^*	-5.595	-4.450	-3.305	-2.160	-1.015
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.005	0.020	0.040	0.105	0.220
8.	x_k^*	1.304E-1	1.275	2.4205	3.566	4.711
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.280	0.195	0.090	0.035	0.010
	x_k^*	0.2712	0.6124	0.9537	1.295	1.636
9.	$\frac{n_k^*}{n}$	0.085	0.175	0.205	0.195	0.145
	x_k^*	1.977	2.318	2.660	3.001	3.342
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.095	0.050	0.030	0.015	0.005
10.	x_k^*	-3.117	-2.479	-1.841	-1.203	-0.5647
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.005	0.010	0.045	0.155	0.195
	x_k^*	0.07326	0.7112	1.349	1.987	2.625
10.	$\frac{n_k^*}{n}$	0.245	0.190	0.100	0.050	0.005
	x_k^*	-4.873	-3.941	-3.009	-2.077	-1.145
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.005	0.005	0.010	0.060	0.320
10.	x_k^*	-0.2137	0.7181	1.650	2.582	3.514
	$\frac{n_k^*}{n}$	0.110	0.315	0.145	0.020	0.010
	x_k^*					

7.3. Полигон абсолютных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд абсолютных частот $(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*)$. Построить полигон абсолютных частот.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Полигон абсолютных частот группированного статистического ряда абсолютных частот — это ломаная с вершинами в точках (x_k^*, n_k^*) . Пример полигона абсолютных частот приведен на рис. 7.1.

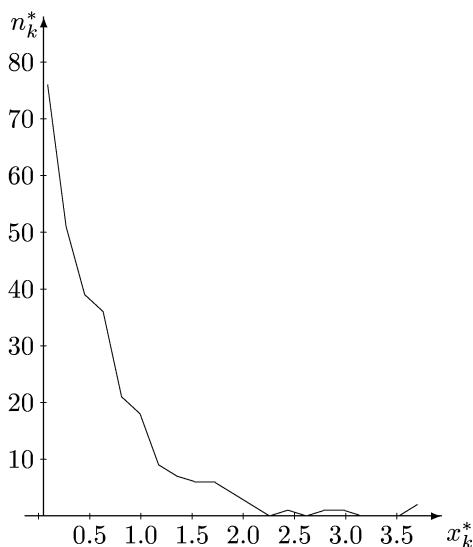


Рис. 7.1. Полигон абсолютных частот

Полигон является одним из графических представлений выборки. Следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы полигон был максимально наглядным.

1. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки x_1^* и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал (x_1^*, x_m^*) и отчетливо различались точки x_k^* .

2. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке, чуть меньшей $\min\{n_1^*, \dots, n_m^*\}$ (обычно — в точке 0), и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(\min\{n_1^*, \dots, n_m^*\}, \max\{n_1^*, \dots, n_m^*\})$ и отчетливо различались точки n_k^* .

3. На оси абсцисс размещаем значения x_k^* , а на оси ординат — значения n_k^* .

4. Наносим точки (x_1^*, n_1^*) , (x_2^*, n_2^*) , $\dots$, (x_m^*, n_m^*) на координатную плоскость и последовательно соединяем их отрезками.

ПРИМЕР. Построить полигон абсолютных частот по группированному статистическому ряду абсолютных частот, найденному в примере раздела 7.1 (стр. 332).

РЕШЕНИЕ.

1. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки $x_1^* = 0.09025$, т.е. в точке 0.05, и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(x_1^*, x_{21}^*) = (0.09025, 3.69975)$ и отчетливо различались точки x_k^* , т.е. 4 : 10.

2. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал

$$(\min\{n_1^*, \dots, n_m^*\}, \max\{n_1^*, \dots, n_m^*\}) = (0, 76)$$

и отчетливо различались точки n_k^* , т.е. 80 : 10.

3. На оси абсцисс размещаем значения x_k^* , а на оси ординат — значения n_k^* .

4. Наносим точки $(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_{21}^*, n_{21}^*)$ на координатную плоскость и последовательно соединяем их отрезками. Получаем полигон, изображенный на рис. 7.1.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Построить полигоны абсолютных частот по группированным статистическим рядам абсолютных частот, найденным в задачах раздела 7.1 (стр. 333).

7.4. Полигон относительных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд относительных частот:

$$\left(x_1^*, \frac{n_1^*}{n}\right), \left(x_2^*, \frac{n_2^*}{n}\right), \dots, \left(x_m^*, \frac{n_m^*}{n}\right).$$

Построить полигон относительных частот.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Полигон относительных частот — это ломаная с вершинами в точках $(x_k^*, n_k^*/n)$. Пример полигона относительных частот приведен на рис. 7.2.

Полигон является одним из графических представлений выборки. Следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы полигон был максимально наглядным.

1. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки x_1^* и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал (x_1^*, x_m^*) и отчетливо различались точки x_k^* .

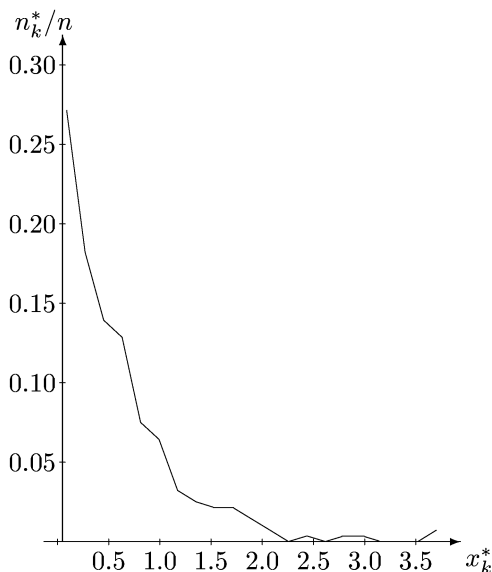


Рис. 7.2. Полигон относительных частот

2. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы отчетливо различались точки n_k^*/n .

3. На оси абсцисс размещаем значения x_k^* , а на оси ординат — значения n_k^*/n .

4. Наносим точки $(x_1^*, n_1^*/n)$, $(x_2^*, n_2^*/n)$, ..., $(x_m^*, n_m^*/n)$ на координатную плоскость и последовательно соединяем их отрезками.

Замечание. Полигоны абсолютных и относительных частот различаются только шкалой на оси ординат (ср. рис. 7.1 и 7.2).

ПРИМЕР. Построить полигон относительных частот по группированному статистическому ряду относительных частот, найденному в примере раздела 7.2 (стр. 336).

РЕШЕНИЕ.

1. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки $x_1^* = 0.00925$, т. е. 0.005 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(x_1^*, x_{21}^*) = (0.09025, 3.69975)$ и отчетливо различались точки x_k^* , т.е. 4 : 10.

2. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы отчетливо различались точки n_k^*/n , т.е. 0.30 : 10.

3. На оси абсцисс размещаем значения x_k^* , а на оси ординат — значения n_k^*/n .

4. Наносим точки $(x_1^*, n_1^*/n)$, $(x_2^*, n_2^*/n)$, ..., $(x_{21}^*, n_{21}^*/n)$ на координатную плоскость и последовательно соединяем их отрезками. Получаем полигон, изображенный на рис. 7.2.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Построить полигоны относительных частот по группированным статистическим рядам относительных частот, найденным в задачах раздела 7.2 (стр. 337).

7.5. Гистограмма относительных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд относительных частот:

$$\left(x_1^*, \frac{n_1^*}{n}\right), \left(x_2^*, \frac{n_2^*}{n}\right), \dots, \left(x_m^*, \frac{n_m^*}{n}\right).$$

Построить его гистограмму относительных частот.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Гистограмма относительных частот — это фигура, состоящая из t прямоугольников, опирающихся на интервалы группировки. Площадь k -го прямоугольника полагают равной n_k^*/n . Пример гистограммы относительных частот приведен на рис. 7.3.

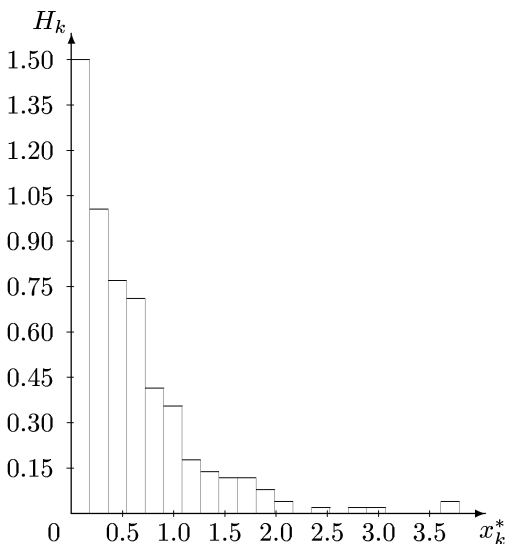


Рис. 7.3. Гистограмма относительных частот

Из теоремы Бернулли следует, что если объем выборки n стремится к бесконечности, а длины интервалов группировки — к нулю, то гистограмма относительных частот для значений непрерывной случайной величины стремится к графику плотности вероятностей этой случайной величины.

Гистограмма является одним из графических представлений выборки. Следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы гистограмма была максимально наглядной.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*/n	x_{k-1}	x_k	H_k
1	x_1^*	n_1^*/n			
2	x_2^*	n_2^*/n			
...	...	...	...	...	...
m	x_m^*	n_m^*/n			

2. Вычисляем полуширину Δ интервала группировки:

$$\Delta = \frac{x_2^* - x_1^*}{2} = \dots = \frac{x_m^* - x_{m-1}^*}{2}.$$

3. Находим $x_{\min} = x_1^* - \Delta$ и $x_{\max} = x_m^* + \Delta$.

4. Находим границы интервалов группировки по формуле

$$x_{k-1} = x_k^* - \Delta, \quad k = 1, \dots, m,$$

и полагаем $x_m = x_{\max}$.

5. Вычисляем высоты прямоугольников:

$$H_k = \frac{n_k^*/n}{2\Delta}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Результаты, полученные в пп. 4 и 5, представляем в таблице.

6. Проверяем, что сумма всех высот H_k в 6-м столбце, умноженная на $h = 2\Delta$, равна 1. Если это не так, то при вычислении каких-то высот были сделаны ошибки и нужно вычислить все высоты заново. Если сумма всех высот H_k , умноженная на $h = 2\Delta$, незначительно отличается от единицы, то этим можно либо пренебречь, либо применить выравнивание (задача 7.14).

7. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки x_1^* и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал (x_1^*, x_m^*) и отчетливо различались точки x_k^* .

8. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы на оси отчетливо различались точки H_k .

9. Для построения гистограммы относительных частот на ось абсцисс наносим интервалы (x_{k-1}, x_k) и, используя каждый из них как основание, строим прямоугольник с соответствующей высотой H_k .

ПРИМЕР. Построить гистограмму относительных частот по группированному статистическому ряду относительных частот, найденному в примере раздела 7.2 (стр. 336).

РЕШЕНИЕ.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*/n	x_{k-1}	x_k	H_k
1	0.09025	0.27143			
2	0.27075	0.18214			
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
21	3.69975	0.00714			

2. Вычисляем полуширину Δ интервала группировки:

$$\Delta = \frac{x_2^* - x_1^*}{2} = \dots = \frac{x_m^* - x_{m-1}^*}{2} = \frac{0.27075 - 0.09025}{2} = 0.09025.$$

3. Находим

$$x_{\min} = x_1^* - \Delta = 0.09025 - 0.09025 = 0$$

и

$$x_{\max} = x_{21}^* + \Delta = 3.69975 + 0.09025 = 3.79.$$

4. Находим границы интервалов группировки по формуле

$$x_{k-1} = x_k^* - \Delta = x_k^* - 0.09025, \quad k = 1, \dots, 21,$$

и полагаем $x_m = x_{\max}$.

5. Вычисляем высоты прямоугольников:

$$H_k = \frac{n_k^*/n}{2\Delta} = \frac{n_k^*/n}{0.1805} = 5.54 \frac{n_k^*}{n}, \quad k = 1, \dots, 21.$$

Результаты пп. 4 и 5 последовательно помещаем в таблицу.

В итоге таблица принимает вид

k	x_k^*	n_k^*/n	x_{k-1}	x_k	H_k
1	0.09025	0.27143	0.0000	0.1805	1.50372
2	0.27075	0.18214	0.1805	0.3610	1.00906
3	0.45120	0.13929	0.3610	0.5414	0.77167
4	0.63165	0.12857	0.5414	0.7219	0.71228
5	0.81215	0.07500	0.7219	0.9024	0.41550
6	0.99265	0.06429	0.9024	1.0829	0.35617
7	1.17310	0.03214	1.0829	1.2633	0.17806
8	1.35355	0.02500	1.2633	1.4438	0.13850
9	1.53405	0.02143	1.4438	1.6243	0.11872
10	1.71455	0.02143	1.6243	1.8048	0.11872
11	1.89500	0.01429	1.8048	1.9852	0.07917
12	2.07545	0.00714	1.9852	2.1657	0.03956
13	2.25595	0	2.1657	2.3462	0
14	2.43645	0.00357	2.3462	2.5267	0.01978
15	2.61690	0	2.5267	2.7071	0
16	2.79735	0.00357	2.7071	2.8876	0.01978
17	2.97785	0.00357	2.8876	3.0681	0.01978
18	3.15835	0	3.0681	3.2486	0
19	3.33880	0	3.2486	3.4290	0
20	3.51925	0	3.4290	3.6095	0
21	3.69975	0.00714	3.6095	3.7900	0.03956

6. Проверяем, что сумма всех высот H_k в 6-м столбце, умноженная на $h = 2\Delta$, равна 1. В нашем расчете эта величина равна $5.54003 \cdot 0.1805 \approx 0.99998$, что с приемлемой для математической статистики точностью равно 1.

Должна получиться сумма относительных частот, равная в заданном группированном ряде 1. Погрешность суммы высот происходит от ошибок округления. Ее можно устранить выравниванием.

7. На оси абсцисс выбираем начальную точку 0 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(x_1^*, x_{21}^*) = (0.09025, 3.69975)$ и отчетливо различались точки x_k^* , т.е. 4 : 10.

8. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы отчетливо различались точки H_k , т.е. 1.6 : 10.

9. Для построения гистограммы относительных частот на ось абсцисс наносим интервалы (x_{k-1}, x_k) и, используя каждый из них как основание, строим прямоугольник с соответствующей высотой H_k . Получаем гистограмму, изображенную на рис. 7.3.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Построить гистограммы относительных частот по группированным статистическим рядам относительных частот, найденным в задачах раздела 7.2 (стр. 337).

7.6. Эмпирическая функция распределения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд относительных частот

$$\left(x_1^*, \frac{n_1^*}{n}\right), \left(x_2^*, \frac{n_2^*}{n}\right), \dots, \left(x_m^*, \frac{n_m^*}{n}\right).$$

Составить таблицу значений и построить график эмпирической функции распределения данного ряда.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Эмпирической функцией распределения называется функция, определенная для всех $x \in (-\infty, \infty)$ формулой^{*)}

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1^*, \\ \frac{n_1^*}{n} + \frac{n_2^*}{n} + \dots + \frac{n_k^*}{n}, & x_k^* \leq x < x_{k+1}^*, \\ 1, & x_m^* \leq x. \end{cases} \quad (1)$$

Из теоремы Бернулли следует, что если объем выборки n стремится к бесконечности, а длина интервала группировки — к нулю, то эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ стремится к функции распределения $F(x)$ в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$. По теореме Гливенко это стремление равномерно на всей оси.

При построении графика $F^*(x)$ следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы график распределения был максимально наглядным.

Пример графика $F^*(x)$ приведен на рис. 7.4.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*/n	$F^*(x_k^*)$
1	x_1^*	n_1^*/n	
2	x_2^*	n_2^*/n	
...	...	...	...
m	x_m^*	n_m^*/n	

^{*)} В литературе встречается иное определение, согласно которому $F^*(x) = P(\xi \leq x)$.

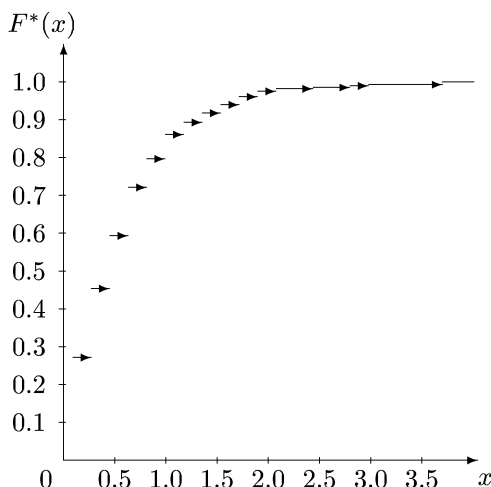


Рис. 7.4. Эмпирическая функция распределения

2. В четвертую колонку записываем накопленные относительные частоты

$$F^*(x_1^*) = \frac{n_1^*}{n},$$

$$F^*(x_2^*) = \frac{n_1^*}{n} + \frac{n_2^*}{n} = F^*(x_1^*) + \frac{n_2^*}{n},$$

$$F^*(x_3^*) = \frac{n_1^*}{n} + \frac{n_2^*}{n} + \frac{n_3^*}{n} = F^*(x_2^*) + \frac{n_3^*}{n} \text{ и т.д.}$$

3. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки x_1^* и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал (x_1^*, x_m^*) и отчетливо различались точки x_k^* .

4. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(0, 1)$ и отчетливо различались точки n_k^*/n .

5. Для построения графика эмпирической функции распределения наносим на ось абсцисс интервалы (x_k^*, x_{k+1}^*) и над каждым из них на высоте $F^*(x_k^*)$ строим горизонтальные отрезки. В правом конце отрезка помещаем стрелку, чтобы показать, что $F^*(x)$ в точке x_{k+1}^* делает прыжок в высоту на $F^*(x_{k+1}^*) - F^*(x_k^*) = n_{k+1}^*/n$. Пример графика $F^*(x)$ приведен на рис. 7.4.

ПРИМЕР. Составить таблицу значений и построить график эмпирической функции распределения группированного статистического ряда относительных частот, найденного в примере раздела 7.2 (стр. 336).

РЕШЕНИЕ.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*/n	$F^*(x_k^*)$
1	0.09025	0.27143	
2	0.27075	0.18214	
...	...	...	...
21	3.69975	0.00714	

2. В четвертую колонку записываем накопленные относительные частоты.

$$F^*(x_1^*) = \frac{n_1^*}{n} = 0.27143,$$

$$F^*(x_2^*) = \frac{n_1^*}{n} + \frac{n_2^*}{n} = 0.27143 + 0.18214 = F^*(x_1^*) + 0.18214 = 0.45357,$$

$$F^*(x_3^*) = \frac{n_1^*}{n} + \frac{n_2^*}{n} + \frac{n_3^*}{n} = 0.27143 + 0.18214 + 0.13929 =$$

$$= F^*(x_2^*) + 0.13929 = 0.59286 \text{ и т.д.}$$

Таким образом получаем таблицу

k	x_k^*	n_k^*/n	$F^*(x_k^*)$
1	0.09025	0.27143	0.27143
2	0.27075	0.18214	0.45357
3	0.45120	0.13929	0.59286
4	0.63165	0.12857	0.72143
5	0.81215	0.07500	0.79643
6	0.99265	0.06429	0.86072
7	1.17310	0.03214	0.89286
8	1.35355	0.02500	0.91786
9	1.53405	0.02143	0.93929
10	1.71455	0.02143	0.96072
11	1.89500	0.01429	0.97501
12	2.07545	0.00714	0.98215
13	2.25595	0	0.98215
14	2.43645	0.00357	0.98572
15	2.61690	0	0.98572
16	2.79735	0.00357	0.98929
17	2.97785	0.00357	0.99286
18	3.15835	0	0.99286
19	3.33880	0	0.99286
20	3.51925	0	0.99286
21	3.69975	0.00714	1

3. На оси абсцисс выбираем начальную 0 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(x_1^*, x_{21}^*) = (0.09025, 3.69975)$ и отчетливо различались точки x_k^* , т.е. 4 : 10.

4. На оси ординат выбираем начало отсчета в точке 0 и такой масштаб, чтобы на оси поместился интервал $(0, 1)$ и отчетливо различались точки n_k^*/n , т.е. 1 : 10.

5. Для построения графика эмпирической функции распределения наносим на ось абсцисс интервалы (x_k^*, x_{k+1}^*) и над каждым из них на высоте $F^*(x_k^*)$ строим горизонтальные отрезки. В правом конце отрезка помещаем стрелку, чтобы показать, что $F^*(x)$ в точке x_{k+1}^* делает прыжок в высоту на $F^*(x_{k+1}^*) - F^*(x_k^*) = n_{k+1}^*/n$. Получаем график эмпирической функции распределения, изображенный на рис. 7.4.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Составить таблицы значений и построить графики эмпирических функций распределения для группированных статистических рядов относительных частот, найденных в задачах раздела 7.2 (стр. 337).

7.7. Выборочное среднее несгруппированной выборки

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дана числовая выборка $a_1, a_2, \dots, a_n$. Вычислить ее выборочное среднее.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Выборочное среднее определяется формулой

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1)$$

По теореме Бернулли выборочное среднее $\bar{a}$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к математическому ожиданию той случайной величины, значения которой образуют выборку $a_1, a_2, \dots, a_n$.

При больших объемах выборки числитель и знаменатель дроби (1) могут принимать большие значения, что, в свою очередь, может привести к потере точности. Поэтому при практических вычислениях лучше избегать суммирования большого числа слагаемых.

Например, если объем выборки $n = 100$, то лучше суммировать по десять элементов:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + \dots + a_{10}, \\ S_2 &= a_{11} + \dots + a_{20}, \\ &\dots\dots\dots, \\ S_{10} &= a_{91} + \dots + a_{100}. \end{aligned}$$

Затем делим $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ на 10. В дробях

$$s_1 = \frac{S_1}{10}, \quad s_2 = \frac{S_2}{10}, \quad \dots, \quad s_{10} = \frac{S_{10}}{10}$$

числитель и знаменатель не столь велики, как в (1).

Затем вычисляем

$$\bar{a} = \frac{s_1 + \dots + s_{10}}{10}.$$

Здесь опять числитель и знаменатель не столь велики, как в (1).

1. Суммируем по десять элементов:

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = S_1, \quad \sum_{i=11}^{20} a_i = S_2$$

и так далее.

2. Каждое из чисел $S_1, S_2, \dots, S_{n/10}$ делим на 10 и получаем числа $s_1, s_2, \dots, s_{n/10}$.

3. Искомое выборочное среднее определяется формулой

$$\bar{a} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n/10}}{10}.$$

ПРИМЕР. Дана выборка (см. стр. 331). Вычислить ее выборочное среднее.

РЕШЕНИЕ.

1. Объем выборки $n = 280$. Суммируем по десять элементов, т.е. по строкам таблицы. Получаем для S_k значения

4.5087	6.1697	9.9594	5.6525	5.6168	3.1159	5.9010
5.3229	6.8730	3.6779	2.9509	4.8706	3.1259	6.9227
8.1017	3.5787	4.3316	6.8805	4.1764	6.5541	4.3579
6.2955	6.3430	7.5616	7.3155	10.4964	5.5335	5.3734

2. Каждое из чисел $S_1, S_2, \dots, S_{28}$ делим на 10. Получаем 28 чисел $s_k = S_k/10$:

0.45087	0.61697	0.99594	0.56525	0.56168	0.31159	0.59010
0.53229	0.68730	0.36779	0.29509	0.48706	0.31259	0.69227
0.81017	0.35787	0.43316	0.68805	0.41764	0.65541	0.43579
0.62955	0.63430	0.75616	0.73155	1.04964	0.55335	0.53734

3. Искомое выборочное среднее есть

$$\bar{a} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{28}}{28} = \frac{16.15677}{28} = 0.5770275.$$

Ответ. $\bar{a} = 0.5770275$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить значения a_k при $k = 1, 2, \dots, 200$. Вычислить выборочное среднее выборки $a_1, \dots, a_{200}$ (см. стр. 332).

Ответы. 1. 0.49846. 2. 0.50111. 3. 1.0074. 4. -0.0025671 . 5. 0.66526. 6. 0.74874. 7. -0.025608 . 8. 1.2587. 9. -0.025979 . 10. -0.024496 .

7.8. Выборочное среднее группированного статистического ряда абсолютных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд абсолютных частот

$$(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*).$$

Вычислить его выборочное среднее.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

Выборочное среднее группированного статистического ряда абсолютных частот определяется формулой

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^m x_k^* \frac{n_k^*}{n},$$

где $n = n_1^* + \dots + n_m^*$ — объем выборки.

Из теоремы Бернулли следует, что выборочное среднее $\bar{x}$ стремится к математическому ожиданию той случайной величины, значения которой образуют группированный ряд, если объем выборки n стремится к бесконечности, а длины интервалов группировки — к нулю.

Чтобы упростить вычисления и уменьшить погрешность округления, используем так называемый метод произведений.

Заметим, что если c — центр того интервала группировки, который находится примерно в середине статистического ряда и h — длина интервала группировки, то величины

$$y_k^* = \frac{x_k^* - c}{h}$$

— целые числа. Поэтому величина

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m y_k^* n_k^*$$

вычисляется очень просто. Искомое выборочное среднее $\bar{x}$ выражается через $\bar{y}$ по формуле

$$\bar{x} = h\bar{y} + c. \quad (1)$$

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	y_k^*	$y_k^* n_k^*$
1	x_1^*	n_1^*		
2	x_2^*	n_2^*		
...	...	...	...	...
m	x_m^*	n_m^*		

2. Вычисляем длину интервала группировки $h = x_2^* - x_1^*$.

3. Выбираем c .

Если m — четное число, то $c = x_{m/2}^*$.

Если m — нечетное число, то $c = x_{(m+1)/2}^*$.

4. Заполняем 4-й столбец величинами y_k^* . В строке с $x_k^* = c$ пишем 0, вверх записываем последовательно $-1, -2$, и т.д., а вниз — последовательно $1, 2$, и т.д.

5. Заполняем 5-й столбец величинами $n_k^* y_k^*$.

6. Суммируем частоты n_k^* в 3-м столбце и получаем объем выборки n .

7. Суммируем числа $y_k^* n_k^*$ в 5-м столбце и делим на n . Получаем величину $\bar{y}$.

8. По формуле (1) вычисляем искомое выборочное среднее $\bar{x}$.

ПРИМЕР. Вычислить выборочное среднее группированного статистического ряда абсолютных частот, найденного в примере раздела 7.1 (стр. 332).

РЕШЕНИЕ.

Чтобы упростить вычисления и уменьшить погрешность округления, используем так называемый метод произведений.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	y_k^*	$y_k^* n_k^*$
1	0.09025	76		
2	0.27075	51		
...	...	...	...	...
21	3.69975	2		

2. Вычисляем длину интервала группировки

$$h = x_2^* - x_1^* = 0.27075 - 0.09025 = 0.1805.$$

3. Выбираем $c = x_{11}^* = 1$.

4. Заполняем 4-й столбец величинами y_k^* . В строке с $x_k^* = c$ пишем 0, вверх записываем последовательно $-1, -2$, и т.д., а вниз — последовательно $1, 2$, и т.д.

5. Заполняем 5-й столбец величинами $n_k^* y_k^*$. Таблица принимает вид

k	x_k^*	n_k^*	y_k^*	$y_k^* n_k^*$
1	0.09025	76	-10	-760
2	0.27075	51	-9	-459
3	0.45120	39	-8	-312
4	0.63165	36	-7	-252
5	0.81215	21	-6	-126
6	0.99265	18	-5	-90
7	1.17310	9	-4	-36
8	1.35355	7	-3	-21
9	1.53405	6	-2	-12
10	1.71455	6	-1	-6
11	1.89500	4	0	0
12	2.07545	2	1	2
13	2.25595	0	2	0
14	2.43645	1	3	3
15	2.61690	0	4	0
16	2.79735	1	5	5
17	2.97785	1	6	6
18	3.15835	0	7	0
19	3.33880	0	8	0
20	3.51925	0	9	0
21	3.69975	2	10	20

6. Суммируем частоты n_k^* в 3-м столбце и получаем объем выборки $n = 280$.

7. Суммируем числа $y_k^* n_k^*$ в 5-м столбце. Получаем -2038 . Делим этот результат на $n = 280$ и получаем величину $\bar{y} = -7.27857$.

8. По формуле (1) вычисляем искомое выборочное среднее:

$$\bar{x} = h\bar{y} + c = 0.1805 \cdot (-7.27857) + 1.89500 \approx 0.58122.$$

Ответ. $\bar{x} \approx 0.58122$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Вычислить выборочные средние группированных статистических рядов абсолютных частот, найденных в задачах раздела 7.1 на стр. 333.*

Ответы. 1. 0.4995. 2. 0.5008. 3. 1.047. 4. -0.004047 . 5. 0.6644. 6. 0.7476. 7. -0.02437 . 8. 1.261. 9. -0.01935 . 10. -0.03646 .

7.9. Выборочная дисперсия негруппированной выборки

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Дана числовая выборка $a_1, a_2, \dots, a_n$. Вычислить ее выборочную дисперсию.*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Выборочная дисперсия негруппированной выборки определяется формулой

$$D_a^* = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{k=1}^n (a_k - \bar{a})^2, \quad (1)$$

где $\bar{a}$ — выборочное среднее. Из теоремы Бернулли следует, что выборочная дисперсия D_a^* стремится при $n \rightarrow \infty$ к дисперсии той случайной величины, значения которой образуют выборку $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1. Вычисляем выборочное среднее $\bar{a}$ (см. задачу 7.7).

2. Вычисляем выборочную дисперсию по формуле (1) или по эквивалентной ей формуле

$$D_a^* = \frac{1}{n - 1} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \frac{n}{n - 1} \bar{a}^2 \equiv \frac{n}{n - 1} (\overline{a^2} - \bar{a}^2). \quad (2)$$

ПРИМЕР. Дана выборка (см. стр. 331). Вычислить ее выборочную дисперсию.

РЕШЕНИЕ.

1. Вычисляем выборочное среднее $\bar{a}$ (см. задачу 7.7). Получаем

$$\bar{a} \approx 0.58122.$$

2. Вычисляем выборочную дисперсию по формуле (1) с $n = 280$. Получаем

$$D_a^* = \frac{(0.3414 - 0.58122)^2 + \dots + (0.6973 - 0.58122)^2}{279} \approx 0.343925.$$

Ответ. $D_a \approx 0.343925$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Вычислить значения a_k при $k = 1, 2, \dots, 200$ (см. стр. 332). Вычислить выборочную дисперсию выборки $a_1, \dots, a_{200}$.

Ответы. 1. 0.083493. 2. 0.083071. 3. 1.0183. 4. 0.50165. 5. 0.056180. 6. 0.038107. 7. 3.1886. 8. 0.43269. 9. 1.0252. 10. 1.7277.

7.10. Выборочная дисперсия группированного статистического ряда абсолютных частот

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд абсолютных частот:

$$(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*).$$

Вычислить его выборочную дисперсию.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Выборочная дисперсия группированного статистического ряда абсолютных частот определяется формулой

$$D_x^* = \frac{(x_1^* - \bar{x})^2 n_1^* + (x_2^* - \bar{x})^2 n_2^* + \dots + (x_m^* - \bar{x})^2 n_m^*}{n - 1} = \frac{1}{n - 1} \sum_{k=1}^m (x_k^* - \bar{x})^2 n_k^*, \quad (1)$$

где $\bar{x}$ — выборочное среднее данного группированного статистического ряда абсолютных частот и $n = n_1^* + \dots + n_m^*$ — объем выборки. Из теоремы Бернулли следует, что выборочная дисперсия D_x^* стремится к дисперсии той случайной величины, значения которой образуют группированный ряд, если объем выборки n стремится к бесконечности, а длины интервалов группировки — к нулю.

Чтобы упростить вычисления и уменьшить погрешность округления, используем так называемый метод произведений.

Заметим, что выборочная дисперсия D_x^* не изменяется, если из каждой величины x_k^* вычесть одно и то же число c . Пусть c — центр того интервала группировки, который находится примерно в середине статистического ряда и h — длина интервала группировки. Тогда величины

$$y_k^* = \frac{x_k^* - c}{h}$$

— целые числа. Поэтому величина

$$D_y^* = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^m (y_k^* - \bar{y})^2 n_k^* = \frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum_{k=1}^m y_k^{*2} n_k^* - \left(\sum_{k=1}^m y_k^* n_k^* \right)^2 \right] \quad (2)$$

вычисляется просто. Искомая выборочная дисперсия D_x^* выражается через D_y^* по формуле

$$D_x^* = h^2 D_y^*. \quad (3)$$

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	y_k^*	$y_k^* n_k^*$	y_k^{*2}	$y_k^{*2} n_k^*$
1	x_1^*	n_1^*				
2	x_2^*	n_2^*				
...	...	...	...	...	...	...
m	x_m^*	n_m^*				

2. Вычисляем длину интервала группировки $h = x_2^* - x_1^*$.

3. Выбираем c .

Если m — четное число, то $c = x_{m/2}^*$.

Если m — нечетное число, то $c = x_{(m+1)/2}^*$.

4. Заполняем 4-й столбец величинами y_k^* . В строке с $x_k^* = c$ пишем 0, вверх записываем последовательно $-1, -2$, и т.д., а вниз — последовательно $1, 2$, и т.д.

5. Заполняем 5-й столбец величинами $y_k^* n_k^*$.

6. Заполняем 6-й столбец величинами y_k^{*2} . В строке с $x_k^* = c$ пишем 0, вверх записываем последовательно квадраты натуральных чисел $1, 4, 9, 16, 25$ и т.д., и вниз также последовательно $1, 4, 9, 16, 25$ и т.д.

7. Заполняем 7-й столбец величинами $(y_k^*)^2 n_k^*$.

8. Суммируем частоты n_k^* в 3-м столбце и получаем объем выборки n .

9. Суммируем числа $y_k^* n_k^*$ в 5-м столбце.

10. Суммируем числа $y_k^{*2} n_k^*$ в 6-м столбце.

11. Вычисляем D_y^* по формуле (2).

12. Вычисляем D_x^* по формуле (3) и записываем ответ.

ПРИМЕР. Вычислить выборочную дисперсию группированного статистического ряда абсолютных частот, найденного в примере раздела 7.1 (стр. 332).

РЕШЕНИЕ.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	y_k^*	$y_k^* n_k^*$	y_k^{*2}	$y_k^{*2} n_k^*$
1	0.09025	76				
2	0.27075	51				
...	...	...	...	...	...	...
21	3.69975	2				

2. Вычисляем длину интервала группировки:

$$h = x_2^* - x_1^* = 0.27075 - 0.09025 = 0.1805.$$

3. Выбираем $c = x_{11}^* = 1.89500$.

4. Заполняем 4-й столбец величинами y_k^* . В строке с $x_k^* = c$ пишем 0, вверх записываем последовательно -1 , -2 , и т.д., а вниз — последовательно 1 , 2 , и т.д.

5. Заполняем 5-й столбец величинами $y_k^* n_k^*$.

6. Заполняем 6-й столбец величинами y_k^{*2} .

7. Заполняем 7-й столбец величинами $(y_k^*)^2 n_k^*$.

Таблица принимает вид

k	x_k^*	n_k^*	y_k^*	$y_k^* n_k^*$	y_k^{*2}	$y_k^{*2} n_k^*$
1	0.09025	76	-10	-760	100	7600
2	0.27075	51	-9	-459	81	4131
3	0.45120	39	-8	-312	64	2496
4	0.63165	36	-7	-252	49	1764
5	0.81215	21	-6	-126	36	756
6	0.99265	18	-5	-90	25	450
7	1.17310	9	-4	-36	16	144
8	1.35355	7	-3	-21	9	63
9	1.53405	6	-2	-12	4	24
10	1.71455	6	-1	-6	1	6
11	1.89500	4	0	0	0	0
12	2.07545	2	1	2	1	2
13	2.25595	0	2	0	4	0
14	2.43645	1	3	3	9	9
15	2.61690	0	4	0	16	0
16	2.79735	1	5	5	25	25
17	2.97785	1	6	6	36	36
18	3.15835	0	7	0	49	0
19	3.33880	0	8	0	64	0
20	3.51925	0	9	0	81	0
21	3.69975	2	10	20	100	200

3. Решаем систему уравнений (1) и находим $a_1, \dots, a_j$.

Замечание. Вместо функции распределения $F(x; a_1, \dots, a_j)$ может быть задана плотность вероятностей $p(x; a_1, \dots, a_j)$ для непрерывной случайной величины ξ или вероятности $p_k(a_1, \dots, a_j)$ значений для дискретной случайной величины ξ .

ПРИМЕР 1. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2 . По выборке $x_1, \dots, x_n$ значений ξ определены эмпирические моменты $M_1^* = \bar{x} = 2.3$ и $M_2^* = \overline{x^2} = 8.7$. Используя эти моменты, найти параметры a и σ^2 .

РЕШЕНИЕ.

1. Вычисляем теоретические моменты $M\xi^k$ при $k = 1, 2$, выражая их через неизвестные параметры a и σ . Поскольку ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2 , имеем

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = a,$$

$$M\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = a^2 + \sigma^2.$$

(В данном случае $a_1 = a$, $a_2 = \sigma^2$, $m_1(a_1, a_2) = a_1$, $m_2(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2$.)

2. Приравнявая найденные теоретические моменты $M\xi$, $M\xi^2$ данным эмпирическим моментам $M_1^* = 2.3$ и $M_2^* = 8.7$, получаем систему 2-х уравнений

$$\begin{cases} a = 2.3, \\ a^2 + \sigma^2 = 8.7. \end{cases} \quad (2)$$

3. Решаем систему уравнений (2) и получаем $a = 2.3$, $\sigma^2 = 3.41$.

Ответ. $a = 2.3$, $\sigma^2 = 3.41$.

ПРИМЕР 2. Случайная величина ξ имеет отрицательное биномиальное распределение $P(\xi = k) = C_{m+k-1}^k p^m q^k$. Здесь $m > 1$ и $p \in (0, 1)$ — параметры, $q = 1 - p$. По выборке $x_1, \dots, x_n$ значений ξ определены эмпирические моменты $M_1 = \bar{x} = 1.21$ и $M_2 = \overline{x^2} = 3.54$. Используя эти моменты, найти параметры m и p .

РЕШЕНИЕ.

1. Вычисляем теоретические моменты $M\xi^k$ при $k = 1, 2$, выражая их через неизвестные параметры m и p . Имеем

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kP(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k C_{m+k-1}^k p^m q^k, \quad (3)$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 C_{m+k-1}^k p^m q^k. \quad (4)$$

Преобразуя ряд в (3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{p^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(m+k-1)!}{k!} q^k &= \\ &= \frac{p^m}{(m-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} (k+m-1)(k+m-2) \dots (k+1)k q^k, \end{aligned}$$

вычисляем сумму ряда почленным дифференцированием (см. задачу 10.12 в книге РЕШЕБНИК “Высшая математика”). Получаем

$$M\xi = m \frac{q}{p} = m \frac{1-p}{p}.$$

Аналогично получаем

$$M\xi^2 = m \frac{q}{p^2} = m \frac{1-p}{p^2}.$$

2. Приравнявая найденные теоретические моменты $M\xi, M\xi^2$ данным эмпирическим моментам $M_1^* = \bar{x} = 1.21$ и $M_2^* = \overline{x^2} = 3.54$, получаем систему 2-х уравнений

$$\begin{cases} m \frac{1-p}{p} = 1.93, \\ m \frac{1-p}{p^2} = 3.54. \end{cases} \quad (5)$$

3. Решаем систему уравнений (5).

Делим первое уравнение на второе и получаем $p = 0.3418$. Подставив это значение в первое уравнение, решаем это уравнение относительно m и получаем $m = 1.0023$.

Ответ. $m = 1.0023, p = 0.3418$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Используя метод моментов, найти параметры распределения по известным эмпирическим моментам.

1. Биномиальное распределение $p(k; n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $n = 10$, $M_1^* = 6.8$.

2. Распределение Пуассона $p(k; a) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}$, $M_1^* = 3.24$.

3. Геометрическое распределение $p(k; q) = (1 - q)q^k$, $M_1^* = 2.1$.

4. Гипергеометрическое распределение $p(k; n_A, n_B, m) = \frac{C_{n_A}^k C_{n_B}^{m-k}}{C_{n_A+n_B}^m}$, $m = 10$, $M_1^* = 5.4$, $M_2^* = 31.2$.

5. Распределение кратности звезд $p(k; q) = (1 - q)^2 k q^{k-1}$, $M_1^* = 1.6$.

6. Равномерное распределение $p(x; a, b) = \frac{1}{b - a}$ при $a < x < b$, $p(x; a, b) = 0$ при $x < a$ или $x > b$, $M_1^* = 0.78$, $M_2^* = 1.46$.

7. Показательное распределение $p(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x > 0$, $p(x; \lambda) = 0$ при $x < 0$, $M_1^* = 0.69$.

8. Гамма-распределение $p(x; t) = \frac{x^{t-1} e^{-x}}{\Gamma(t)}$ при $x > 0$, $p(x; t) = 0$ при $x < 0$, $M_1^* = 1.72$.

9. Распределение Лапласа $p(x; \lambda) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}$, $M_1^* = 0.178$.

10. Распределение Парето $p(x; a, \alpha) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1}$ при $x > a$, $p(x; a, \alpha) = 0$ при $x < a$, $M_1^* = 1.54$, $M_2^* = 2.44$.

Ответы. 1. $p = 0.68$. 2. $a = 3.24$. 3. $q = 0.68$. 4. $n_a = 18$, $n_b = 26$. 5. $q = 0.23$. 6. $a = -0.82$, $b = 2.38$. 7. $\lambda = 1.45$. 8. $t = 1.72$. 9. $\lambda = 3.35$. 10. $a = 1.32$, $\alpha = 7$.

7.12. Определение параметров закона распределения методом наибольшего правдоподобия

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Функция распределения случайной величины ξ есть $F(x; a_1, \dots, a_j)$, где $a_1, \dots, a_j$ — некоторые неизвестные параметры. По выборке $x_1, \dots, x_n$ значений ξ определить значения $a_1, \dots, a_j$ методом наибольшего правдоподобия.

ПЛАН РЕШЕНИЯ.

1. Находим вероятности $p(k; a_1, \dots, a_j)$ значений ξ , если ξ — дискретная случайная величина, или плотность вероятностей $p(x; a_1, \dots, a_j)$ значений ξ , если ξ — непрерывная случайная величина. Часто $p(k; a_1, \dots, a_j)$ или $p(x; a_1, \dots, a_j)$ бывают заданы изначально.

2. Определяем функцию правдоподобия

$$L(a_1, \dots, a_j) = p(x_1; a_1, \dots, a_j) \cdot \dots \cdot p(x_n; a_1, \dots, a_j), \quad (1)$$

где $x_1, \dots, x_n$ — выборка значений исследуемой случайной величины ξ .

3. Находим неизвестные параметры $a_1, \dots, a_j$ из условия

$$L(a_1, \dots, a_j) \rightarrow \max,$$

т.е. как координаты точки, в которой функция правдоподобия $L(a_1, \dots, a_j)$ принимает наибольшее значение.

Замечания.

1. Если ξ — дискретная случайная величина, то функция правдоподобия (1) есть вероятность того, что выборка ξ объема n есть $x_1, \dots, x_n$. Поэтому $0 \leq L(a_1, \dots, a_j) \leq 1$.

2. Иногда удобней вместо $L(a_1, \dots, a_j)$ использовать функцию $\ln L(a_1, \dots, a_j)$. Она принимает наибольшее значение при тех же $a_1, \dots, a_j$, что и $L(a_1, \dots, a_j)$.

3. Если функция правдоподобия $L(a_1, \dots, a_j)$ дифференцируема по $a_1, \dots, a_j$, то точку, в которой она принимает наибольшее значение, можно найти так, как это объяснено в задачах 5.2 и 6.7 книги РЕШЕБНИК „Высшая математика“, или численными методами, например, методом градиентного спуска.

4. Если функция правдоподобия $L(a_1, \dots, a_j)$ недифференцируема по некоторым a_k , например, если эти параметры a_k могут принимать только дискретные значения, то значения параметров $a_1, \dots, a_j$, при которых функция $L(a_1, \dots, a_j)$ принимает наибольшее значение, находятся перебором.

ПРИМЕР 1. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с неизвестными параметрами a и σ^2 . Определить эти параметры по выборке $x_1, \dots, x_n$ значений ξ методом наибольшего правдоподобия.

РЕШЕНИЕ.

1. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид

$$p(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

2. Определяем функцию правдоподобия

$$L(a, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_1-a)^2/(2\sigma^2)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x_n-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где $x_1, \dots, x_n$ — выборка значений исследуемой случайной величины ξ .

3. Находим неизвестные параметры a и σ^2 из условия

$$L(a, \sigma^2) \longrightarrow \max,$$

т.е. как координаты точки, в которой функция правдоподобия принимает наибольшее значение.

Для этого удобнее использовать функцию

$$\ln L(a, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} [(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2] - \frac{n}{2} \ln 2\pi.$$

Она принимает наибольшее значение при тех же a, σ^2 , что и $L(a, \sigma^2)$.

Поскольку $a \in (-\infty, \infty)$ и $\sigma^2 \in (0, \infty)$, область изменения параметров a и σ^2 не имеет границы. Следовательно, функция $\ln L(a, \sigma^2)$ принимает наибольшее значение в одной из ее точек максимума. Ищем точки максимума.

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} \ln L(a, \sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2} (x_1 + \dots + x_n - na) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(a, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} [(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2] = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{и} \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{n}.$$

Итак, функция правдоподобия $L(a, \sigma^2)$ имеет единственную точку экстремума. В ней $L(a, \sigma^2)$ принимает наибольшее значение.

$$\text{Ответ. } a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{n}.$$

Замечание. Известно, что оценка $\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})}$, которую мы получили для дисперсии методом наибольшего правдоподобия, является смещенной. Этот пример показывает, что метод наибольшего правдоподобия дает, вообще говоря, смещенные оценки, которые еще нужно исправлять.

ПРИМЕР 2. Как узнать сколько рыб в пруду?

Поймаем $n_a = 20$ рыб, пометим их и выпустим в пруд. Спустя некоторое время, достаточное для того, чтобы меченые рыбы расплылись по всему пруду, выловим $m = 50$ рыб. Допустим, что среди них оказалось $k_1 = 7$ меченых. Определить число рыб в пруду N методом наибольшего правдоподобия.

РЕШЕНИЕ.

1. Случайная величина ξ — количество меченых рыб среди m выловленных — определяется вероятностями

$$P(\xi = k) = p(k; N) = \frac{C_{n_a}^k C_{N-n_a}^{m-k}}{C_N^m} = \frac{C_{20}^k C_{N-20}^{50-k}}{C_N^{50}} \quad (k = 0, 1, \dots, 50).$$

2. Определяем функцию правдоподобия

$$L(N) = \frac{C_{20}^7 C_{N-20}^{43}}{C_N^{50}}.$$

В данном случае выборка состоит из одного числа $k_1 = 7$.

3. Находим неизвестный параметр N (число рыб в пруду) из условия

$$L(N) \rightarrow \max,$$

т.е. как такое значение N , при котором функция правдоподобия $L(N)$ имеет наибольшее значение.

Функция $L(N)$ недифференцируема, так как ее аргумент N принимает только дискретные значения 63, 64, ... Поэтому значение N , при котором $L(N)$ достигает наибольшей величины, ищем перебором.

Имеем

$$L(N) = C_{20}^7 \frac{(N-20)! 50! (N-50)!}{43! (N-63)! N!} = A \frac{(N-50) \cdot \dots \cdot (N-62)}{N(N-1) \cdot \dots \cdot (N-19)},$$

где $A = \frac{50!}{43!} C_{20}^7$ — несущественный множитель. Простая программа дает таблицу значений $L(N)$ при $N = 63 \div 1000$. В таблице находим, что $L(N)$ достигает наибольшего значения при $N = 142$.

Ответ. $N = 142$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Используя метод наибольшего правдоподобия, найти параметры распределения по выборке.

1. Биномиальное распределение $p(k; n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $n = 10$, выборка: 6, 5, 9, 5, 8, 7, 9, 6, 6, 7.

2. Распределение Пуассона $p(k; a) = e^{-a} a^k / k!$, выборка: 5, 3, 3, 3, 5, 5, 1, 2, 3, 0.

3. Геометрическое распределение $p(k; q) = (1 - q)q^k$, выборка: 1, 2, 0, 4, 1, 4, 4, 1, 2, 2.

4. Гипергеометрическое распределение $p(k; n_A, n_B, m) = \frac{C_{n_A}^k C_{n_B}^{m-k}}{C_{n_A+n_B}^m}$, $m = 10$, выборка: 6, 3, 7, 6, 4, 4, 5, 5, 6, 8.

5. Распределение кратности звезд $p(k; q) = (1 - q)^2 k q^{k-1}$, выборка: 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 1, 2.

6. Равномерное распределение $p(x; a, b) = \frac{1}{b - a}$ при $a < x < b$, $p(x; a, b) = 0$ при $x < a$ или $x > b$, выборка:

0.35, 1.83, 0.14, 0.64, 2.08, -0.46, 2.0, -0.31, -0.30, 1.87.

7. Показательное распределение $p(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x > 0$, $p(x; \lambda) = 0$ при $x < 0$, выборка:

0.61, 0.71, 1.27, 0.10, 1.49, 1.14, 2.15, 0.06, 0.74, 0.28.

8. Гамма-распределение $p(x; t) = \frac{x^{t-1} e^{-x}}{\Gamma(t)}$ при $x > 0$, $p(x; t) = 0$ при $x < 0$, выборка:

1.12, 4.34, 1.54, 3.11, 0.64, 0.62, 2.01, 2.13, 0.87, 0.79.

9. Распределение Лапласа $p(x; \lambda) = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|x|}$, выборка:

0.17, -0.22, -0.017, -0.16, 1.20, 0.057, -0.19, 0.19, 0.25, -0.32.

10. Распределение Парето $p(x; a, \alpha) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1}$ при $x > a$, $p(x; a, \alpha) = 0$ при $x < a$, выборка:

1.63, 1.35, 1.80, 1.51, 1.56, 2.10, 1.36, 1.48, 1.24, 1.39.

Ответы. 1. $p = 0.68$. 2. $a = 3.235$. 3. $q = 0.677$. 4. $n_a = 17$, $n_b = 25$. 5. $q = 0.23$. 6. $a = -0.46$, $b = 2.08$. 7. $\lambda = 1.17$. 8. $t = 1.8$. 9. $\lambda = 3.60$. 10. $a = 1.24$, $\alpha = 2.88$.

7.13. Метод наименьших квадратов

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Для определения параметров $a_1, \dots, a_j$ в формуле $y = f(x; a_1, \dots, a_j)$ были измерены значения y при различных значениях x . Получена выборка $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Используя эти данные, определить параметры $a_1, \dots, a_j$ методом наименьших квадратов. Ошибками измерения $x_1, \dots, x_n$ и погрешностями вычислений можно пренебречь.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Величины $\xi_k = y_k - f(x_k; a_1, \dots, a_j)$ отличны от нуля из-за ошибок измерения y_k , поскольку ошибками измерения x_k и вычисления $f(x_k; a_1, \dots, a_j)$ можно пренебречь. Принято предполагать, что ошибки измерения распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 0 (нет систематических ошибок) и некоторой дисперсией σ^2 , определяемой точностью прибора. Следовательно, функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} L(a_1, \dots, a_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\xi_1^2/(2\sigma^2)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\xi_n^2/(2\sigma^2)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k; a_1, \dots, a_j))^2 \right]. \end{aligned}$$

Эта функция достигает наибольшего значения при тех $a_1, \dots, a_j$, при которых

$$S(a_1, \dots, a_j) = -\ln L(a_1, \dots, a_j) = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k; a_1, \dots, a_j))^2 \quad (1)$$

достигает наименьшего значения.

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} \quad (k = 1, \dots, j).$$

2. Определяем параметры $a_1, \dots, a_j$ как решение системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_j} = 0. \quad (2)$$

Замечания.

1. После того, как параметры $a_1, \dots, a_j$ определены, следует проверить, что величины $\xi_k = y_k - f(x_k; a_1, \dots, a_j)$ образуют выборку значений нормальной случайной величины с нулевым математическим

ожиданием и некоторой дисперсией σ^2 . Такая проверка выполняется с помощью одного из критериев согласия (см. задачи 7.18 и 7.19).

2. Система уравнений (2) имеет простое решение, только если $f(x; a_1, \dots, a_j)$ — многочлен. В остальных случаях для решения системы (2) могут потребоваться численные методы. Тогда лучше искать точку минимума функции (1) непосредственно, используя один из методов спуска.

В пакете РЕШЕБНИК.ВМ метод наименьших квадратов можно реализовать и через решение системы (2) и непосредственно, отыскав точку минимума функции (1) одним из методов спуска.

3. Иногда ошибки измерения величин $y_1, \dots, y_n$ имеют нормальные распределения с разными дисперсиями $\sigma_{y_k}^2$ ($k = 1, \dots, n$). Тогда параметры $a_1, \dots, a_j$ определяются из условия $S(a_1, \dots, a_j) \rightarrow \min$, где

$$S(a_1, \dots, a_j) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_{y_k}^2} (y_k - f(x_k; a_1, \dots, a_j))^2.$$

4. Если ошибками измерения величин $x_1, \dots, x_n$ нельзя пренебречь, причем известно, что эти ошибки имеют дисперсии $\sigma_{x_k}^2$ ($k = 1, \dots, n$), то параметры $a_1, \dots, a_j$ определяются из условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta y_k}{\sigma_{y_k}} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta x_k}{\sigma_{x_k}} \right)^2 \rightarrow \min, \\ y_k - \Delta y_k = f(x_k - \Delta x_k; a_1, \dots, a_j), \quad k = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

ПРИМЕР 1. Для определения параметров a_1 , a_2 и a_3 в формуле $y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ были измерены значения y при различных значениях x . Получена выборка

x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y_k	6.01	5.07	4.30	3.56	3.07	2.87	2.18	2.00	2.14

Используя эти данные, определить параметры a_1 , a_2 и a_3 методом наименьших квадратов. Ошибками измерения $x_1, \dots, x_9$ и погрешностями вычислений можно пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Функция (1) имеет вид

$$S(a_1, a_2, a_3) = \sum_{k=1}^9 (y_k - a_1 x_k^2 - a_2 x_k - a_3)^2.$$

1. Находим частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a_1} &= -2 \sum_{k=1}^9 (y_k - a_1 x_k^2 - a_2 x_k - a_3) x_k^2, \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= -2 \sum_{k=1}^9 (y_k - a_1 x_k^2 - a_2 x_k - a_3) x_k, \\ \frac{\partial S}{\partial a_3} &= -2 \sum_{k=1}^9 (y_k - a_1 x_k^2 - a_2 x_k - a_3).\end{aligned}$$

2. Определяем параметры a_1 , a_2 и a_3 как решение системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_3} = 0.$$

Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 \sum_{k=1}^9 x_k^4 + a_2 \sum_{k=1}^9 x_k^3 + a_3 \sum_{k=1}^9 x_k^2 &= \sum_{k=1}^9 y_k x_k^2, \\ a_1 \sum_{k=1}^9 x_k^3 + a_2 \sum_{k=1}^9 x_k^2 + a_3 \sum_{k=1}^9 x_k &= \sum_{k=1}^9 y_k x_k, \\ a_1 \sum_{k=1}^9 x_k^2 + a_2 \sum_{k=1}^9 x_k + a_3 \sum_{k=1}^9 1 &= \sum_{k=1}^9 y_k. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

По известным x_k , y_k вычисляем

$$\sum_{k=1}^9 x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^9 x_k^2 = 3.750, \quad \sum_{k=1}^9 x_k^3 = 0, \quad \sum_{k=1}^9 x_k^4 = 2.7656,$$

$$\sum_{k=1}^9 y_k = 31.2, \quad \sum_{k=1}^9 y_k x_k = -7.4, \quad \sum_{k=1}^9 y_k x_k^2 = 14.15.$$

Подставляя эти значения в систему (3), приводим ее к виду

$$\left\{ \begin{aligned} 2.7656a_1 + 3.750a_3 &= 14.15, \\ 3.750a_2 &= -7.4, \\ 3.750a_1 + 9a_3 &= 31.2. \end{aligned} \right.$$

Решая эту систему, получаем

$$a_1 = 0.95586, \quad a_2 = -1.9733, \quad a_3 = 3.0684.$$

Ответ. $y = 0.96x^2 - 1.97x + 3.07$.

ПРИМЕР 2. Для определения параметров a_1 и a_2 в формуле $y = a_1 e^{a_2 x}$ были измерены значения y при различных значениях x . Получена выборка

x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y_k	7.14	4.46	2.81	1.68	0.99	0.50	0.36	0.33	0.40

Используя эти данные, определить параметры a_1 и a_2 методом наименьших квадратов. Ошибками измерения $x_1, \dots, x_9$ и погрешностями вычислений можно пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Поскольку функция $y = a_1 e^{a_2 x}$ не является многочленом, точку, в которой функция (1) принимает наименьшее значение, можно найти только численным методом. Но в данном случае

$$\ln y = a_2 x + \ln a_1 = a_2 x + b.$$

Считая ошибки ξ_k измерения y_k малыми, имеем

$$\ln(y_k - \xi_k) \approx \ln y_k - \frac{1}{y_k} \xi_k. \quad (4)$$

Следовательно, $\xi_k \approx (\ln y_k - a_2 x_k - b)y_k$ и параметры a_1 и a_2 определяем из условия

$$S(a_2, b) = \sum_{k=1}^9 (\ln y_k - a_2 x_k - b)^2 y_k \longrightarrow \min.$$

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2 \sum_{k=1}^9 (\ln y_k - a_2 x_k - b) y_k x_k, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{k=1}^9 (\ln y_k - a_2 x_k - b) y_k.$$

2. Определяем параметры a_2 и b как решение системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 \sum_{k=1}^9 y_k x_k^2 + b \sum_{k=1}^9 y_k x_k = \sum_{k=1}^9 x_k y_k \ln y_k, \\ a_2 \sum_{k=1}^9 x_k y_k + b \sum_{k=1}^9 y_k = \sum_{k=1}^9 y_k \ln y_k. \end{array} \right. \quad (5)$$

По известным x_k, y_k вычисляем

$$\sum_{k=1}^9 y_k x_k^2 = 11.16, \quad \sum_{k=1}^9 y_k x_k = -11.36, \quad \sum_{k=1}^9 x_k y_k \ln y_k = -21.63,$$

$$\sum_{k=1}^9 y_k = 18.7, \quad \sum_{k=1}^9 y_k \ln y_k = 23.0.$$

Подставляя эти значения в систему (5), приводим ее к виду

$$\begin{cases} 11.16a_2 - 11.36b = -21.63, \\ -11.36a_2 + 18.7b = 23. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a_2 = 1.798$, $b = 0.13766$. Поскольку $b = \ln a_1$, имеем $a_1 = 1.1476$.

Ответ. $y = 1.15e^{-1.8x}$.

Замечание. Примененный метод линеаризации требует контроля точности приближенных формул типа (4). Например, погрешность формулы (4) возрастает при $k = 7, k = 8, k = 9$, так как при таких k $y_k < 1$. В сколько-нибудь серьезных расчетах значения параметров, полученных с помощью линеаризации, используются только как начальное приближение для применения численных методов отыскания минимума или решения систем.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Для определения параметров $a_1, \dots, a_j$ в формуле $y = f(x; a_1, \dots, a_j)$ были измерены значения y при различных значениях x . Получена выборка $(x_1, y_1), \dots, (x_9, y_9)$. Используя эти данные, определить параметры $a_1, \dots, a_j$ методом наименьших квадратов. Ошибками измерения $x_1, \dots, x_9$ и погрешностями вычислений можно пренебречь.

1.	$y = a_1x + a_2,$								
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y_k	2.08	1.83	1.57	1.13	0.89	0.75	0.30	0.06	-0.01
2.	$y = a_1x + a_2,$								
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y_k	1.09	1.47	1.95	2.47	2.98	3.54	4.20	4.42	4.89
3.	$y = a_1x + a_2,$								
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y_k	3.90	3.71	3.63	3.22	3.04	2.71	2.45	2.25	2.03

4.	$y = a_1x^2 + a_2x + a_3,$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	-0.14	1.08	1.61	2.34	3.16	3.41	3.58	3.96	4.02	
5.	$y = a_1x^2 + a_2x + a_3,$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	2.98	2.47	2.13	2.00	1.95	2.05	2.31	2.46	3.08	
6.	$y = a_1x^2 + a_2x + a_3,$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	2.04	0.92	-0.37	-0.86	-1.20	-1.17	-1.17	-0.69	-0.26	
7.	$y = a_1e^{a_2x},$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	6.94	4.65	3.16	2.30	1.37	0.74	0.73	0.25	0.16	
8.	$y = a_1e^{a_2x},$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	0.10	-0.08	-0.14	-0.83	-1.95	-5.53	-14.6	-40.3	-109	
9.	$y = \operatorname{tg}(a_1x + a_2),$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	2.57	1.47	1.12	0.85	0.57	0.17	-0.03	-0.10	-0.34	
10.	$y = \operatorname{tg}(a_1x + a_2),$									
x_k	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	
y_k	-0.62	-0.28	0.05	0.10	0.26	0.51	0.94	1.29	2.22	

Ответы. 1. $y = 0.95555 - 1.106x$. 2. $y = 1.9746x + 3.0011$.
 3. $y = 2.9933 - 0.982x$. 4. $y = -1.0138x^2 + 2.0193x + 2.9802$.
 5. $y = 1.0531x^2 + 0.052x + 1.9422$. 6. $y = 2.1174x^2 - 1.0626x - 1.1889$.
 7. $y = 1.3438 \exp(-1.6674x)$. 8. $y = -1.9936 \exp(4.0024x)$. 9. $y =$
 $= \operatorname{tg}(-0.76185x + 0.43977)$. 10. $y = \operatorname{tg}(0.82116x + 0.31743)$.

7.14. Выравнивание результатов измерений

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Независимые измерения величин $x_1, \dots, x_n$ дали результаты $x_1^*, \dots, x_n^*$. Известно, что $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Использовать это равенство, чтобы уточнить значения $x_1^*, \dots, x_n^*$, считая ошибки измерения величин $x_1, \dots, x_n$ распределенными по нормальным законам с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Обозначим символами $\Delta x_1^*, \dots, \Delta x_n^*$ ошибки, содержащиеся в числах $x_1^*, \dots, x_n^*$.

1. Находим $\Delta x_1^*, \dots, \Delta x_n^*$ из условия

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta x_1^*}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2^*}{\sigma_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n^*}{\sigma_n} \right)^2 \rightarrow \min, \\ f(x_1^* - \Delta x_1^*, \dots, x_n^* - \Delta x_n^*) = 0. \end{cases}$$

Для этого используем метод множителей Лагранжа, т.е. ищем точку безусловного экстремума функции

$$F(\Delta x_1^*, \dots, \Delta x_n^*, \lambda) = \left(\frac{\Delta x_1^*}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2^*}{\sigma_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta x_n^*}{\sigma_n} \right)^2 + \lambda f(x_1^* - \Delta x_1^*, \dots, x_n^* - \Delta x_n^*).$$

а) Необходимое условие экстремума функции F имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \Delta x_k^*} = \frac{2}{\sigma_1^2} \Delta x_k^* - \lambda f'_k(x_1^* - \Delta x_1^*, \dots, x_n^* - \Delta x_n^*) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = f(x_1^* - \Delta x_1^*, \dots, x_n^* - \Delta x_n^*) = 0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

б) Решаем систему (1) и находим $\Delta x_1^*, \dots, \Delta x_n^*$.

2. Выравниваем результаты измерений $x_1^*, \dots, x_n^*$, полагая

$$\tilde{x}_1 = x_1^* - \Delta x_1^*, \dots, \tilde{x}_n = x_n^* - \Delta x_n^*.$$

3. Записываем ответ в виде

$$x_1 = \tilde{x}_1, \dots, x_n = \tilde{x}_n.$$

Замечания.

1. Выравнивая эмпирические моменты можно повысить точность оценки параметров распределения методом моментов. Необходимые для выравнивая соотношения между моментами следуют из того, что все моменты выражаются через несколько параметров распределения. Например, если случайная величина ξ распределена по показательному закону с $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$), то

$$M\xi^n = (n-1)!\lambda^{-n} = (n-1)!(M\xi)^n.$$

2. Результаты вычислений можно выравнивать так же, как и результаты измерений. В качестве σ используются единицы старших разрядов, т.е. $\sigma = 0.01$ для 3.14, $\sigma = 0.001$ для 3.142 и т.д. В частности, следует выравнивать относительные частоты, если их сумма не равна единице.

ПРИМЕР. Независимые измерения углов треугольника x_1, x_2, x_3 дали результаты $x_1^* = 31^\circ$, $x_2^* = 62^\circ$, $x_3^* = 89^\circ$. Известно, что $x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ = 0$. Использовать это равенство, чтобы уточнить значения x_1^* , x_2^* , x_3^* , считая ошибки измерения углов x_1, x_2, x_3 распределенными по нормальным законам с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (0.1^\circ)^2$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим символами Δx_1^* , Δx_2^* , Δx_3^* ошибки, содержащиеся в числах x_1^* , x_2^* , x_3^* .

1. Находим Δx_1^* , Δx_2^* , Δx_3^* из условия

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta x_1^*}{0.1^\circ} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2^*}{0.1^\circ} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3^*}{0.1^\circ} \right)^2 \rightarrow \min, \\ (x_1^* - \Delta x_1^*) + (x_2^* - \Delta x_2^*) + (x_3^* - \Delta x_3^*) - 180^\circ = 0. \end{cases}$$

Для этого используем метод множителей Лагранжа, т.е. ищем точку безусловного экстремума функции

$$\begin{aligned} F(\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \Delta x_3^*, \lambda) &= \left(\frac{\Delta x_1^*}{0.1^\circ} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2^*}{0.1^\circ} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x_3^*}{0.1^\circ} \right)^2 + \\ &+ \lambda [(x_1^* - \Delta x_1^*) + (x_2^* - \Delta x_2^*) + (x_3^* - \Delta x_3^*) - 180^\circ]. \end{aligned}$$

а) Необходимое условие экстремума функции F имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \Delta x_k^*} = \frac{2}{(0.1^\circ)^2} \Delta x_k^* - \lambda = 0, & k = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^* - \Delta x_1^* + x_2^* - \Delta x_2^* + x_3^* - \Delta x_3^* - 180^\circ = 0 \end{cases} \quad (2)$$

б) Решаем систему (2) и находим Δx_1^* , Δx_2^* , Δx_3^* :

$$\Delta x_k^* = (x_1^* + x_2^* + x_3^*)/3 = 2^\circ/3 = 40', \quad k = 1, 2, 3.$$

2. Выравниваем результаты измерений $x_1^* = 31^\circ$, $x_2^* = 62^\circ$, $x_3^* = 89^\circ$, полагая

$$\tilde{x}_1 = x_1^* - \Delta x_1^* = 31^\circ - 40' = 30^\circ 40',$$

$$\tilde{x}_2 = x_2^* - \Delta x_2^* = 62^\circ - 40' = 61^\circ 40',$$

$$\tilde{x}_3 = x_3^* - \Delta x_3^* = 89^\circ - 40' = 88^\circ 20'.$$

Ответ. $x_1 = 30^\circ 40'$, $x_2 = 61^\circ 40'$, $x_3 = 88^\circ 20'$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Независимые измерения величин $x_1, \dots, x_n$ дали результаты $x_1^*, \dots, x_n^*$. Известно, что $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Использовать это равенство, чтобы уточнить значения $x_1^*, \dots, x_n^*$, считая ошибки измерения величин $x_1, \dots, x_n$ распределенными по нормальным законам с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

1. $x_1^* = 17, x_2^* = 84, x_3^* = 83, x_1 + x_2 + x_3 - 180 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$.
2. $x_1^* = 52, x_2^* = 47, x_3^* = 82, x_1 + x_2 + x_3 - 180 = 0, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 2, \sigma_3^2 = 1.5$.
3. $x_1^* = 0.27, x_2^* = 0.15, x_3^* = 0.57, x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0, \sigma_1^2 = 0.02, \sigma_2^2 = 0.03, \sigma_3^2 = 0.01$.
4. $x_1^* = 0.89, x_2^* = 0.46, x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.01$.
5. $x_1^* = 0.27, x_2^* = 0.53, x_3^* = 0.80, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.01$.
6. $x_1^* = 0.89, x_2^* = 0.46, x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \sigma_1^2 = 0.01, \sigma_2^2 = 0.02$.
7. $x_1^* = 1.21, x_2^* = 3.11, x_3^* = 11.1, x_3 - x_1^2 - x_2^2 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.01, \sigma_3^2 = 0.02$.
8. $x_1^* = 3.14, x_2^* = 1.21, x_3^* = 8.40, x_3 - x_1^2 + x_2^2 = 0, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.01, \sigma_3^2 = 0.02$.
9. $x_1^* = 2.17, x_2^* = 1.34, x_3^* = 2.90, x_3 - x_1 x_2 = 0, \sigma_1^2 = 0.01, \sigma_2^2 = 0.02, \sigma_3^2 = 0.03$.
10. $x_1^* = 3.12, x_2^* = 2.87, x_3^* = 8.95, x_3 - x_1 x_2 = 0, \sigma_1^2 = 0.02, \sigma_2^2 = 0.01, \sigma_3^2 = 0.03$.

Ответы. 1. $\tilde{x}_1 = 15.(6), \tilde{x}_2 = 82.(6), \tilde{x}_3 = 81.(6)$. 2. $\tilde{x}_1 = 51.(7), \tilde{x}_2 = 46.(5), \tilde{x}_3 = 81.(6)$. 3. $\tilde{x}_1 = 0.27(3), \tilde{x}_2 = 0.155, \tilde{x}_3 = 0.571(6)$. 4. $\tilde{x}_1 = 0.88836, \tilde{x}_2 = 0.45915$. 5. $\tilde{x}_1 = 0.27084, \tilde{x}_2 = 0.53165, \tilde{x}_3 = 0.80249$. 6. $\tilde{x}_1 = 0.88864, \tilde{x}_2 = 0.45860$. 7. $\tilde{x}_1 = 1.2079, \tilde{x}_2 = 3.1047, \tilde{x}_3 = 11.098$. 8. $\tilde{x}_1 = 3.1407, \tilde{x}_2 = 1.2097, \tilde{x}_3 = 8.4002$. 9. $\tilde{x}_1 = 2.1681, \tilde{x}_2 = 1.3369, \tilde{x}_3 = 2.8985$. 10. $\tilde{x}_1 = 3.1192, \tilde{x}_2 = 2.8692, \tilde{x}_3 = 8.9496$.

7.15. Случайные интервалы

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Непрерывная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$.

1. Найти вероятность того, что интервал $(\xi - a, \xi + b)$ содержит число c .

2. Найти a и b , такие, что интервал $(\xi - a, \xi + b)$ содержит число c с вероятностью p , причем $P(c < \xi - a) = P(c > \xi + b)$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Событие $c \in (\xi - a, \xi + b)$ эквивалентно тому, что $\xi - a < c$ и $\xi + b > c$, т.е.

$$c - b < \xi < c + a.$$

По определению функции распределения F непрерывной случайной величины имеем

$$P(c - b < \xi < c + a) = F(c + a) - F(c - b). \quad (1)$$

Задача 1.

1. Находим значения $F(c + a)$ и $F(c - b)$, используя таблицу или пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

2. По формуле (1) находим ответ.

Задача 2.

1. Находим число a , такое, что

$$P(c < \xi - a) = P(c + a < \xi) = 1 - F(c + a) = (1 - p)/2,$$

т.е. $F(c + a) = (1 + p)/2$. Для этого используем таблицу или пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

2. Находим число b , такое, что

$$P(c > \xi + b) = P(\xi < c - b) = F(c - b) = (1 - p)/2.$$

Для этого используем таблицу или пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

Записываем ответ.

Замечание. Вообще говоря, случайный интервал — это случайный вектор (η_1, η_2) с таким законом распределения, что всегда $\eta_1 \leq \eta_2$.

ПРИМЕР. Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

1. Найти вероятность того, что интервал $(\xi - 1, \xi + 1)$ содержит число 2.3.

2. Найти a и b , такие, что интервал $(\xi - a, \xi + b)$ содержит число 2.3 с вероятностью 0.98, причем $P(2.3 < \xi - a) = P(2.3 > \xi + b)$.

РЕШЕНИЕ.

Задача 1.

Событие $2.3 \in (\xi - 1, \xi + 1)$ эквивалентно тому, что $\xi - 1 < 2.3$ и $\xi + 1 > 2.3$, т.е. $1.3 < \xi < 3.3$.

По определению функции распределения $F(x) = \Phi(x)$

$$P(1.3 < \xi < 3.3) = \Phi(3.3) - \Phi(1.3). \quad (2)$$

1. Находим значения $\Phi(3.3)$ и $\Phi(1.3)$, используя таблицу для $\Phi(x)$ или пакет РЕШЕБНИК.ВМ. *)

Получаем $\Phi(3.3) \approx 0.99952$, $\Phi(1.3) \approx 0.90320$.

2. По формуле (2) находим ответ

$$P(1.3 < \xi < 3.3) \approx 0.09632.$$

Ответ. $P(2.3 \in (\xi - 1, \xi + 1)) \approx 0.09632$.

Задача 2.

1. Находим число a , такое, что

$$P(2.3 < \xi - a) = P(2.3 + a < \xi) = 1 - F(2.3 + a) = (1 - p)/2,$$

т.е. $F(2.3 + a) = (1 + p)/2 = 0.99$. Используем таблицу значений $F(x) = \Phi(x)$ или пакет РЕШЕБНИК.ВМ и находим, что $F(x) = 0.99$ при $x = 2.32635$. Поэтому $2.3 + a = 2.32635$, откуда следует, что $a = 0.02635$.

2. Находим число b , такое, что

$$P(2.3 > \xi + b) = P(\xi < 2.3 - b) = F(2.3 - b) = (1 - p)/2,$$

т.е. $F(2.3 - b) = (1 - p)/2 = 0.01$. Используем таблицу значений $F(x) = \Phi(x)$ или пакет РЕШЕБНИК.ВМ и находим, что $F(x) = 0.01$ при $x = -2.32635$. Поэтому $2.3 - b = -2.32635$, откуда следует, что $b = 4.62635$.

Ответ. Случайный интервал $(\xi - 0.02635, \xi + 4.62635)$ с вероятностью 0.98 содержит число 2.3, с вероятностью 0.01 расположен слева от 2.3 и с вероятностью 0.01 расположен справа от 2.3.

Замечание. Ответ задачи 2 можно проверить, решив задачу 1 с соответствующими числами a и b .

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. *Непрерывная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$.*

а) *Найти вероятность того, что интервал $(\xi - a, \xi + b)$ содержит число c .*

б) *Найти a и b , такие, что интервал $(\xi - a, \xi + b)$ содержит число c с вероятностью p , причем $P(c < \xi - a) = P(c > \xi + b)$.*

*) Используя единые обозначения и названия функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$, авторы разных книг определяют их разными формулами.

1. $F(x) = \Phi(x)$, $c = 0.5$; а) $a = 0, b = 1$; б) $p = 0.98$.
2. $F(x) = \Phi(2x + 3)$, $c = -1$; а) $a = 1, b = 0.5$; б) $p = 0.98$.
3. $F(x) = \Phi(x - 1)$, $c = 3$; а) $a = 0, b = 2$; б) $p = 0.96$.
4. $F(x) = \Phi(0.2x - 2)$, $c = 2$; а) $a = 0, b = 1$; б) $p = 0.97$.
5. $F(x) = \Phi(0.3x + 0.7)$, $c = 1$; а) $a = 0.5, b = 0$; б) $p = 0.95$.
6. $F(x) = \arctg(x)/\pi + 1/2$, $c = 3$; а) $a = 0.5, b = 1$; б) $p = 0.96$.
7. $F(x) = 1 - e^{-x}$ при $x \geq 0$ и $F(x) = 0$ при $x < 0$, $c = 2.5$;
а) $a = -0.5, b = 1$; б) $p = 0.96$.
8. $F(x) = 0$ при $x < 0$, $F(x) = x$ при $0 \leq x < 1$ и $F(x) = 1$ при $x > 1$,
 $c = 1.2$; а) $a = -0.4, b = 1$ б) $p = 0.94$.
9. $F(x) = e^x/2$ при $x \leq 0$ и $F(x) = 1 - e^{-x}/2$ при $x > 0$, $c = 1$;
 $a = 1, b = 3$; б) $p = 0.95$.
10. $F(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$ при $x > 0$ и $F(x) = 0$ при $x < 0$, $c = 1$;
 $a = 1, b = 2$; б) $p = 0.97$.

Ответы.

1. а) 0.38292; б) $(\xi - 1.82635, \xi + 2.82634)$.
2. а) 0.34134; б) $(\xi - 0.66318, \xi + 1.66318)$.
3. а) 0.1573; б) $(\xi - 0.0538, \xi + 4.0538)$.
4. а) 0.00885; б) $(\xi - 18.851, \xi + 2.8505)$.
5. а) 0.03358; б) $(\xi - 3.2, \xi + 9.8(6).)$.
6. а) 0.06; б) $(\xi - 12.895, \xi + 18.895)$.
7. а) 0.088; б) $(\xi - 1.4120, \xi + 2.4798)$.
8. а) 0.6; б) $(\xi + 0.23, \xi + 1.17)$.
9. а) 0.8647; б) $(\xi - 6.3778, \xi + 8.3778)$.
10. а) 0.594; б) $(\xi - 5.1695, \xi + 0.81592)$.

7.16. Доверительный интервал для единственного неизвестного параметра распределения

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Случайная величина ξ распределена по закону с единственным неизвестным параметром α . Имеется выборка $x_1, \dots, x_n$ значений ξ . Найти доверительный интервал для α при уровне доверия p .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Доверительным интервалом для числа α при уровне доверия p называется любая реализация случайного интервала (α_1, α_2) , который с вероятностью p содержит число α , причем

$$P(\alpha \leq \alpha_1) = P(\alpha \geq \alpha_2) = \frac{1-p}{2}. \quad (1)$$

1. Находим функцию $f(x_1, \dots, x_n, \alpha)$, имеющую известную функцию распределения $F(x)$.

Например, если α — математическое ожидание, то часто применяется функция

$$f(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - \alpha.$$

Если α характеризует масштаб, то

$$f(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{\alpha} \quad \text{или} \quad f(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{\alpha^2}$$

и т.п. В частности, если α — дисперсия, то $\sqrt{\alpha}$ характеризует масштаб и

$$f(x_1, \dots, x_n, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2.$$

2. Находим такие числа q_1 и q_2 , что

$$P(f(x_1, \dots, x_n, \alpha) \leq q_1) = \frac{1-p}{2}$$

и

$$P(f(x_1, \dots, x_n, \alpha) \geq q_1) = \frac{1-p}{2}.$$

Числа q_1 и q_2 называются квантилями.

По определению функции распределения $F(x)$

$$P(f(x_1, \dots, x_n, \alpha) \leq q_1) = F(q_1)$$

и

$$P(f(x_1, \dots, x_n, \alpha) \geq q_2) = 1 - P(f(x_1, \dots, x_n, \alpha) < q_2) = 1 - F(q_2 - 0).$$

Поэтому квантили q_1 и q_2 определяются уравнениями

$$F(q_1) = \frac{1-p}{2}, \quad F(q_2 - 0) = \frac{1+p}{2}.$$

Для решения этих уравнений относительно q_1 и q_2 используем таблицу значений функции $F(x)$ или пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

3. Решаем неравенства

$$q_1 < f(x_1, \dots, x_n, \alpha) < q_2$$

относительно α и получаем

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2.$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha_1(x_1, \dots, x_n, q_1, q_2)$ и $\alpha_2 = \alpha_2(x_1, \dots, x_n, q_1, q_2)$ — случайные величины, поскольку выборочные значения $x_1, \dots, x_n$ — случайные величины.

4. Случайный интервал (α_1, α_2) содержит α с вероятностью p . Подставляем конкретные выборочные значения $x_1, \dots, x_n$ случайной величины ξ и квантили q_1, q_2 . Получаем конкретную реализацию (α_1^*, α_2^*) случайного интервала (α_1, α_2) , т.е. доверительный интервал для α с уровнем доверия p .

Записываем ответ в виде $\alpha \in (\alpha_1^*, \alpha_2^*)_p$.

Замечания.

1. Если $f(x_1, \dots, x_n, \alpha)$ — непрерывная случайная величина, то $F(q_2 - 0) = F(q_2)$.

2. Если точечная оценка параметра α совпадает с серединой доверительного интервала $\alpha_0 = (\alpha_2^* + \alpha_1^*)/2$, то ответ часто записывают в виде $\alpha = \alpha_0 \pm \Delta_p$, где $\Delta_p = (\alpha_2^* - \alpha_1^*)/2$ — половина длины доверительного интервала. Тогда Δ_p называется абсолютной погрешностью (с уровнем доверия p).

3. Уровни доверия обычно определяются государственными или отраслевыми стандартами.

4. Целесообразно изменить традиционное определение и вместо условий (1) использовать условия $P(\alpha_1 < \alpha < \alpha_2) = p$, $\alpha_2 - \alpha_1 \rightarrow \min$. Тогда доверительный интервал будет иметь минимальную длину.

ПРИМЕР 1. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием a и дисперсией 1. Имеется выборка $x_1, \dots, x_{100}$ значений ξ , $\bar{x} = 1.3$. Найти доверительный интервал для математического ожидания a при уровне доверия $p = 0.98$.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим функцию $f(x_1, \dots, x_{100}, a)$, имеющую известную функцию распределения $F(x)$.

В данном случае

$$f(x_1, \dots, x_{100}, a) = \frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a$$

распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1/100. Поэтому

$$F(x) = \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-100u^2/2} du = \Phi(10x).$$

2. Находим квантили q_1 и q_2 из условий

$$P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a \leq q_1\right) = \frac{1-p}{2} = 0.01$$

и

$$P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a > q_2\right) = \frac{1-p}{2} = 0.01.$$

По определению функции распределения $F(x)$

$$P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a \leq q_1\right) = F(q_1)$$

и

$$P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a \geq q_2\right) = 1 - P\left(\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a \leq q_2\right) = 1 - F(q_2).$$

Поэтому квантили q_1 и q_2 определяются уравнениями

$$F(q_1) = \frac{1-p}{2} = 0.01, \quad F(q_2) = \frac{1+p}{2} = 0.99.$$

Для решения этих уравнений относительно q_1 и q_2 используем таблицу значений функции $F(x) = \Phi(10x)$ или пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

Получаем $q_1 = -0.233$ и $q_2 = 0.233$.

3. Решаем неравенства

$$q_1 < \frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - a < q_2$$

относительно a и получаем

$$\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - q_2 < a < \frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - q_1.$$

4. Случайный интервал

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - q_2, \frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} - q_1\right) \quad (2)$$

содержит a с вероятностью $p = 0.98$. Подставляем конкретные выборочные значения $x_1, \dots, x_{100}$ случайной величины ξ и квантили q_1, q_2

в (2) и получаем конкретную реализацию $(1.3 - 0.233, 1.3 + 0.233)$ случайного интервала (2), т.е. доверительный интервал для a с уровнем доверия $p = 0.98$.

Ответ. $a \in (1.067, 1.533)_{0.98}$.

Замечание. Точечная оценка $(x_1 + \dots + x_{100})/100$ математического ожидания a совпадает с серединой доверительного интервала. Поэтому ответ можно записать в виде $a = 1.3 \pm 0.233_{0.98}$.

ПРИМЕР 2. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с плотностью вероятностей

$$p(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{при } x \geq 0 \quad \text{и} \quad p(x, \lambda) = 0 \quad \text{при } x < 0,$$

где λ — неизвестный параметр. Имеется выборка

$$0.61, 0.71, 1.27, 0.10, 1.49, 1.14, 2.15, 0.06, 0.74, 0.28$$

значений ξ . Найти доверительный интервал для λ при уровне доверия $p = 0.8$.

РЕШЕНИЕ.

1. Находим функцию $f(x_1, \dots, x_{10}, \lambda)$, имеющую известную функцию распределения.

Поскольку параметр λ^{-1} характеризует масштаб, используем

$$f(x_1, \dots, x_{10}, \lambda) = (x_1 + \dots + x_{10})\lambda.$$

Величина $y_k = x_k \lambda$ имеет плотность вероятностей

$$p_{y_k}(x) = e^{-x} \quad \text{при } x \geq 0 \quad \text{и} \quad p_{y_k}(x) = 0 \quad \text{при } x < 0.$$

Случайная величина

$$\omega = (x_1 + \dots + x_{10})\lambda = y_1 + \dots + y_{10} \quad (3)$$

есть сумма независимых случайных величин $y_1, \dots, y_{10}$, распределенных по показательному закону. Поэтому ω имеет так называемое гамма-распределение:

$$p_{\alpha, \nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} e^{-\alpha x} \quad \text{при } x \geq 0 \quad \text{и} \quad p_{\alpha, \nu}(x) = 0 \quad \text{при } x < 0$$

с параметрами $\alpha = 1$ и $\nu = 10$.

Известно, что при $\alpha = 1/2$ гамма-распределение $p_{\alpha, \nu}(x/2)$ совпадает с распределением Пирсона χ^2 с числом степеней свободы $n = 2\nu$.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины (3) равна нулю при $x < 0$ и

$$F(x) = 1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^9}{9!} \right) \quad (4)$$

при $x \geq 0$.

2. Находим квантили q_1 и q_2 из условий

$$P\left((x_1 + \dots + x_{10})\lambda \leq q_1\right) = \frac{1-p}{2} = 0.1$$

и

$$P\left((x_1 + \dots + x_{10})\lambda \geq q_2\right) = \frac{1-p}{2} = 0.1.$$

По определению функции распределения $F(x)$

$$P\left((x_1 + \dots + x_{10})\lambda \leq q_1\right) = F(q_1)$$

и

$$P\left((x_1 + \dots + x_{10})\lambda \geq q_2\right) = 1 - P\left((x_1 + \dots + x_{10})\lambda < q_2\right) = 1 - F(q_2).$$

Поэтому квантили q_1 и q_2 определяются уравнениями

$$F(q_1) = \frac{1-p}{2} = 0.1, \quad F(q_2) = \frac{1+p}{2} = 0.9.$$

Используя формулу (4) и пакет РЕШЕБНИК.ВМ, составляем таблицу значений $F(x)$, в которой находим, что $F(x) = 0.1$ при $x = 6.2213$ и $F(x) = 0.9$ при $x = 14.206$. Поэтому $q_1 = 6.2213$ и $q_2 = 14.206$.

3. Решаем неравенства

$$q_1 < (x_1 + \dots + x_{10})\lambda < q_2$$

относительно λ и получаем

$$\frac{q_1}{x_1 + \dots + x_{10}} < \lambda < \frac{q_2}{x_1 + \dots + x_{10}}.$$

4. Случайный интервал

$$\left(\frac{q_1}{x_1 + \dots + x_{10}}, \frac{q_2}{x_1 + \dots + x_{10}} \right) \quad (5)$$

содержит λ с вероятностью $p = 0.8$. Подставляем конкретные выборочные значения $x_1, \dots, x_{10}$ случайной величины ξ и квантили q_1, q_2 в (5) и получаем конкретную реализацию (0.73, 1.66) случайного интервала (5), т.е. доверительный интервал для λ с уровнем доверия $p = 0.8$.

Ответ. $\lambda \in (0.73, 1.66)_{0.8}$.

Замечание. В данном случае точечная оценка параметра λ равна $10/(x_1 + \dots + x_{10}) \approx 1.17$. Она не совпадает с серединой 1.195 доверительного интервала. Поэтому ответ не следует записывать в виде $\lambda = 1.195 \pm 0.465_{0.8}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Непрерывная случайная величина ξ распределена по заданному закону с единственным неизвестным параметром α . Имеется выборка $x_1, \dots, x_n$ значений ξ . Используя указанную функцию $f(x_1, \dots, x_n, \alpha)$ и закон ее распределения, найти доверительный интервал для α при уровне доверия p .

В задачах 1–4: ξ — нормальная случайная величина, $M\xi = a$, $D\xi = 1$, случайная величина

$$f(x_1, \dots, x_n, a) = \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - a \right) \sqrt{n}$$

распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

В задачах 5–8: ξ — нормальная случайная величина, $M\xi = 0$, $D\xi = \sigma^2$, случайная величина

$$f(x_1, \dots, x_n, \sigma^2) = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{\sigma^2}$$

распределена по закону Пирсона χ^2 с n степенями свободы.

В задачах 9–10: ξ — случайная величина, распределенная по показательному закону $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$, случайная величина

$$f(x_1, \dots, x_n, \lambda) = (x_1 + \dots + x_n)\lambda$$

распределена с плотностью вероятностей $p(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

1. $x_1 + \dots + x_{10} = 2.35$, $p = 0.95$.
2. $x_1 + \dots + x_{20} = 4.84$, $p = 0.95$.
3. $x_1 + \dots + x_{14} = 3.27$, $p = 0.98$.
4. $x_1 + \dots + x_{13} = -1.71$, $p = 0.98$.
5. $x_1 + \dots + x_{12} = 1.3$, $p = 0.98$.
6. $x_1 + \dots + x_{29} = 1.2$, $p = 0.96$.
7. $x_1 + \dots + x_{32} = 3.17$, $p = 0.96$.
8. $x_1 + \dots + x_{50} = 5.34$, $p = 0.98$.
9. $x_1 + \dots + x_{10} = 2.35$, $p = 0.96$.
10. $x_1 + \dots + x_{40} = 15.33$, $p = 0.98$.

Ответы.

1. $a \in (-0.38481, 0.85481)_{0.95}$ или $a = 0.235 \pm 0.61981_{0.95}$.
2. $a \in (-0.19627, 0.68027)_{0.95}$ или $a = 0.242 \pm 0.43827_{0.95}$.
3. $a \in (-0.38819, 0.85533)_{0.98}$ или $a = 0.23357 \pm 0.62176_{0.98}$.
4. $a \in (-0.77677, 0.51369)_{0.98}$ или $a = -0.13154 + 0.64523_{0.98}$.

5. $\sigma^2 \in (0.049586, 0.36404)_{0.98}$. 6. $\sigma^2 \in (0.06098, 0.47393)_{0.96}$.
 7. $\sigma^2 \in (0.06279, 0.17826)_{0.96}$. 8. $\sigma^2 \in (0.07012, 0.17976)$.
 9. $\lambda \in (1.96532, 7.45106)_{0.96}$. 10. $\lambda \in (1.74624, 3.66372)_{0.98}$.

7.17. Доверительные интервалы для параметров нормального закона

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. *Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с неизвестными математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 . Имеется выборка $x_1, \dots, x_n$ значений ξ . Найти доверительные интервалы для a и σ^2 при уровнях доверия p_a и p_{σ^2} .*

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Введем обозначения для выборочного среднего и выборочной дисперсии:

$$M_x^* = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{и} \quad D_x^* = \frac{(x_1 - M_x^*)^2 + \dots + (x_n - M_x^*)^2}{n - 1}.$$

1. Случайная величина

$$T = f_1(x_1, \dots, x_n, a) = \frac{M_x^* - a}{\sqrt{D_x^*}} \sqrt{n}$$

распределена по закону Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы, т.е. T имеет плотность вероятностей

$$p_S(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Случайная величина

$$\chi^2 = f_2(x_1, \dots, x_n, \sigma^2) = \frac{(n-1)D_x^*}{\sigma^2}$$

распределена по закону Пирсона χ^2 с $n - 1$ степенями свободы, т.е. χ^2 имеет плотность вероятностей

$$p_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) 2^{(n-1)/2}} x^{(n-3)/2} e^{-x/2} \quad \text{при } x \geq 0$$

и $p_{\chi^2}(x) = 0$ при $x < 0$.

2. Находим в таблице квантилей для распределения Стьюдента

или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ квантили $q_a^{(1)}$ и $q_a^{(2)}$, такие, что

$$P(T \leq q_a^{(1)}) = P(T \geq q_a^{(2)}) = \frac{1 - p_a}{2}.$$

Поскольку плотность вероятностей закона Стьюдента — четная функция, имеем $q_a^{(1)} = -q_a^{(2)}$. В таблицах приводят только $q_a = q_a^{(2)}$.

3. Случайный интервал

$$\left(M_x^* - q_a \sqrt{\frac{D_x^*}{n}}, M_x^* + q_a \sqrt{\frac{D_x^*}{n}} \right) \quad (1)$$

содержит параметр a с вероятностью p_a . Подставляем значения M_x^* , D_x^* , n , q_a в (1) и получаем конкретную реализацию случайного интервала (1), т.е. доверительный интервал для a при уровне доверия p_a .

4. Находим в таблице распределения χ^2 или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ квантили $q_{\sigma^2}^{(1)} < q_{\sigma^2}^{(2)}$, такие, что

$$P(\chi^2 < q_{\sigma^2}^{(1)}) = P(\chi^2 > q_{\sigma^2}^{(2)}) = \frac{1 - p_{\sigma^2}}{2}.$$

5. Случайный интервал

$$\left((n-1) \frac{D_x^*}{q_{\sigma^2}^{(2)}}, (n-1) \frac{D_x^*}{q_{\sigma^2}^{(1)}} \right). \quad (2)$$

содержит параметр σ^2 с вероятностью p_{σ^2} . Подставляем значения n , D_x^* , $q_{\sigma^2}^{(1)}$, $q_{\sigma^2}^{(2)}$ в (2) и получаем конкретную реализацию случайного интервала (2), т.е. доверительный интервал для σ^2 при уровне доверия p_{σ^2} .

Замечания.

1. В таблицах для квантилей распределения Стьюдента обычно приводят числа $t_{1-\alpha}(m)$, такие, что при m степенях свободы $P(|T| > t_{1-\alpha}(m)) = \alpha$. Нужные нам квантили $q_a^{(1)}$ и $q_a^{(2)}$ выражаются через $t_{1-\alpha}(m)$ по формулам

$$q_a^{(2)} = q_a = t_{1-\alpha}(m) \quad \text{при } m = n - 1, \alpha = 1 - p_a,$$

$$q_a^{(1)} = -q_a = -t_{1-\alpha}(m) \quad \text{при } m = n - 1, \alpha = 1 - p_a.$$

2. При $n > 30$ распределение Стьюдента практически неотличимо от нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Поэтому для нахождения квантиля q_a при $n > 30$ можно использовать функцию $\Phi(x)$.

3. В таблицах для квантилей распределения χ^2 обычно приводят числа $\chi^2_{1-\alpha}(m)$, такие, что для распределения с m степенями свободы $P(\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(m)) = \alpha$. Нужные нам квантили $q_{\sigma^2}^{(1)}$ и $q_{\sigma^2}^{(2)}$ выражаются через $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ по формулам

$$q_{\sigma^2}^{(1)} = \chi^2_{1-\alpha}(m) \quad \text{при } m = n - 1, \alpha = \frac{1 + p_{\sigma^2}}{2},$$

$$q_{\sigma^2}^{(2)} = \chi^2_{1-\alpha}(m) \quad \text{при } m = n - 1, \alpha = \frac{1 - p_{\sigma^2}}{2}.$$

4. При $m > 30$ используется формула

$$\chi^2_{1-\alpha}(m) \approx m \left(1 - \frac{2}{9m} + u_\alpha \sqrt{\frac{2}{9m}} \right)^3,$$

где u_α — квантиль для стандартного нормального распределения: $P(\xi > u_\alpha) = \alpha/2$. Эта формула дает завышенные значения $\chi^2_{1-\alpha}$ при малых α . Встречающаяся в литературе формула

$$\chi^2_{1-\alpha}(m) \approx \frac{1}{2} (\sqrt{2m-1} + u_\alpha)^2$$

не годится при значениях α , близких к 0 или 1, т.е. именно при тех значениях, которые нужны для построения доверительных интервалов. Чтобы быть уверенным в правильности значений $\chi^2_{1-\alpha}(m)$ целесообразно находить их с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ.

ПРИМЕР. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с неизвестными математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 . Имеется выборка $x_1, \dots, x_{10}$ значений ξ . Выборочное среднее равно 1.17, выборочная дисперсия равна 0.25. Найти доверительные интервалы для a и σ^2 при уровнях доверия $p_a = 0.98$ и $p_{\sigma^2} = 0.96$.

РЕШЕНИЕ. Введем обозначения для выборочного среднего и выборочной дисперсии:

$$M_x^* = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \quad \text{и} \quad D_x^* = \frac{(x_1 - M_x^*)^2 + \dots + (x_{10} - M_x^*)^2}{9}.$$

1. Случайная величина

$$T = f_1(x_1, \dots, x_{10}, a) = \frac{M_x^* - a}{\sqrt{D_x^*}} \sqrt{10}$$

распределена по закону Стьюдента с 9-ю степенями свободы.

Случайная величина

$$\chi^2 = f_2(x_1, \dots, x_{10}, \sigma^2) = \frac{9D_x^*}{\sigma^2}$$

распределена по закону Пирсона χ^2 с 9-ю степенями свободы.

2. Находим в таблице распределения Стьюдента или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ квантили $q_a^{(1)}$ и $q_a^{(2)}$, такие, что

$$P(T < q_a^{(1)}) = P(T > q_a^{(2)}) = \frac{1 - p_a}{2} = \frac{1 - 0.98}{2} = 0.01.$$

Имеем $q_a^{(2)} = t_{1-\alpha}(m) = 2.821$ ($\alpha = 1 - p_a = 0.02$, $m = n - 1 = 9$),
 $q_a^{(1)} = -q_a^{(2)} = -2.821$.

3. Случайный интервал

$$\left(M_x^* - q_a \sqrt{\frac{D_x^*}{n}}, M_x^* + q_a \sqrt{\frac{D_x^*}{n}} \right) \quad (3)$$

содержит a с вероятностью $p_a = 0.98$. Подставляем значения M_x^* , D_x^* , n , q_a в (3) и получаем конкретную реализацию случайного интервала (3), т.е. доверительный интервал для a при уровне доверия $p_a = 0.98$:

$$\left(1.17 - 2.821 \sqrt{\frac{0.25}{10}}, 1.17 + 2.821 \sqrt{\frac{0.25}{10}} \right)_{0.98} = (1.029, 1.311)_{0.98}.$$

4. Находим в таблице распределения χ^2 или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ квантили $q_{\sigma^2}^{(1)} < q_{\sigma^2}^{(2)}$, такие, что

$$P(\chi^2 < q_{\sigma^2}^{(1)}) = P(\chi^2 > q_{\sigma^2}^{(2)}) = \frac{1 - p_{\sigma^2}}{2} = \frac{1 - 0.96}{2} = 0.02.$$

Имеем $q_{\sigma^2}^{(1)} = \chi_{1-\alpha}^2(m) = 2.532$ ($\alpha = (1 + p_{\sigma^2})/2 = 0.98$, $m = n - 1 = 9$),
 $q_{\sigma^2}^{(2)} = \chi_{1-\alpha}^2(m) = 19.679$ ($\alpha = (1 - p_{\sigma^2})/2 = 0.02$, $m = n - 1 = 9$).

5. Случайный интервал

$$\left((n-1) \frac{D_x^*}{q_{\sigma^2}^{(2)}}, (n-1) \frac{D_x^*}{q_{\sigma^2}^{(1)}} \right) \quad (4)$$

содержит σ^2 с вероятностью $p_{\sigma^2} = 0.96$. Подставляем значения n , D_x^* , $q_{\sigma^2}^{(1)}$, $q_{\sigma^2}^{(2)}$ в (4) и получаем конкретную реализацию случайного интервала (4), т.е. доверительный интервал для σ^2 при уровне доверия $p_{\sigma^2} = 0.96$:

$$\left(9 \frac{0.25}{19.679}, 9 \frac{0.25}{2.532} \right)_{0.96} = (0.114, 0.889)_{0.96}.$$

Ответ. $a \in (1.029, 1.311)_{0.98}$, $\sigma^2 \in (0.114, 0.889)_{0.96}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с неизвестными математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 . По выборке объема n вычислены выборочное среднее M_x^* и выборочная дисперсия D_x^* . Найти доверительные интервалы для a и σ^2 при вероятностях доверия p_a и p_{σ^2} .

1. $n = 19$, $M_x^* = 1.2$, $D_x^* = 1.3$, $p_a = 0.99$, $p_{\sigma^2} = 0.98$.
2. $n = 13$, $M_x^* = -0.5$, $D_x^* = 2.7$, $p_a = 0.98$, $p_{\sigma^2} = 0.96$.
3. $n = 20$, $M_x^* = 2.3$, $D_x^* = 3.2$, $p_a = 0.99$, $p_{\sigma^2} = 0.98$.
4. $n = 28$, $M_x^* = 3.1$, $D_x^* = 1.2$, $p_a = 0.98$, $p_{\sigma^2} = 0.90$.
5. $n = 25$, $M_x^* = 0.5$, $D_x^* = 1.9$, $p_a = 0.98$, $p_{\sigma^2} = 0.96$.
6. $n = 50$, $M_x^* = -0.7$, $D_x^* = 0.2$, $p_a = 0.99$, $p_{\sigma^2} = 0.98$.
7. $n = 100$, $M_x^* = 1.3$, $D_x^* = 0.8$, $p_a = 0.98$, $p_{\sigma^2} = 0.99$.
8. $n = 200$, $M_x^* = -1.2$, $D_x^* = 0.7$, $p_a = 0.99$, $p_{\sigma^2} = 0.98$.
9. $n = 170$, $M_x^* = -3.2$, $D_x^* = 1.4$, $p_a = 0.99$, $p_{\sigma^2} = 0.98$.
10. $n = 90$, $M_x^* = 12.3$, $D_x^* = 1.1$, $p_a = 0.98$, $p_{\sigma^2} = 0.99$.

Ответы.

1. $a \in (0.4472, 1.9528)_{0.99}$ или $a = 1.2 \pm 0.75_{0.99}$,
 $\sigma^2 \in (0.672, 3.336)_{0.98}$.
2. $a \in (-1.723, 0.7218)_{0.98}$ или $a = -0.5 \pm 1.22_{0.98}$,
 $\sigma^2 \in (1.347, 7.755)_{0.96}$.
3. $a \in (1.156, 3.444)_{0.99}$ или $a = 2.3 \pm 1.14_{0.99}$,
 $\sigma^2 \in (1.680, 7.965)_{0.98}$.
4. $a \in (2.588, 3.612)_{0.98}$ или $a = 3.1 \pm 0.51_{0.98}$,
 $\sigma^2 \in (0.808, 2.006)_{0.90}$.
5. $a \in (-0.1870, 1.187)_{0.98}$ или $a = 0.5 \pm 0.69_{0.98}$,
 $\sigma^2 \in (1.132, 3.803)_{0.96}$.
6. $a \in (-0.8629, -0.5371)_{0.99}$ или $a = -0.7 \pm 0.16_{0.99}$,
 $\sigma^2 \in (0.131, 0.339)_{0.98}$.

7. $a \in (1.07, 1.530)_{0.98}$ или $a = 1.3 \pm 0.23_{0.98}$,
 $\sigma^2 \in (0.588, 1.191)_{0.99}$.
8. $a \in (-1.352, -1.048)_{0.99}$ или $a = -1.2 \pm 0.15_{0.99}$,
 $\sigma^2 \in (0.561, 0.896)_{0.98}$.
9. $a \in (-3.434, -2.966)_{0.99}$ или $a = -3.2 \pm 0.23_{0.99}$,
 $\sigma^2 \in (1.102, 1.831)_{0.98}$.
10. $a \in (12.02, 12.59)_{0.98}$ или $a = 12.31 \pm 0.29_{0.98}$,
 $\sigma^2 \in (0.770, 1.677)_{0.99}$.

7.18. Проверка гипотезы о законе распределения по критерию Уилкоксона

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дана выборка $x_1, \dots, x_n$ значений непрерывной случайной величины ξ . Используя критерий Уилкоксона, проверить гипотезу H_0 о том, что ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Конкурирующая гипотеза — $H_1: P(\xi \leq x) \neq F(x)$; уровень значимости равен α .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. Используя датчик случайных чисел, генерируем выборку $y_1, \dots, y_m$ ($m > n$) значений случайной величины, имеющей функцию распределения $F(x)$.

Проверяем, что выборки $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ однородны, т.е., что они образованы из значений случайных величин, имеющих одинаковые функции распределения.

1. Располагаем числа $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ в один ряд в порядке возрастания.

Если выборки $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ однородны, то числа $x_1, \dots, x_n$ разместятся в общем ряде почти равномерно. Степень равномерности характеризуется суммой номеров тех мест, которые занимают в общем ряде числа $x_1, \dots, x_n$. Эта сумма лежит в некоторых пределах около $(n+m)(n+1)/2$, если выборки $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ однородны, и вне таких пределов, если выборки неоднородны.

2. Находим сумму порядковых номеров чисел $x_1, \dots, x_n$. Обозначим эту сумму символом W .

3. Находим нижнюю критическую точку w_n . Для этого используем таблицу или пакет РЕШЕБНИК.ВМ.

Если n или m больше 25, то

$$w_n = \left[\frac{(n+m)n-1}{2} - z_{\text{кр}} \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} \right], \quad (1)$$

где $z_{\text{кр}}$ определяется условием $\Phi(z_{\text{кр}}) = \Phi(\infty) - \alpha/2$ и квадратные скобки обозначают целую часть содержащегося в них числа.

4. Находим верхнюю критическую точку w_n по формуле

$$w_n = (n+m+1)n - w_n. \quad (2)$$

5. Если $w_n < W < w_n$, то гипотеза $H_0 : P(\xi \leq x) = F(x)$ не отвергается. Если $W < w_n$ или $W > w_n$, то H_0 отвергается.

6. Если гипотеза H_0 согласуется со статистическими данными, то следует найти максимальный уровень значимости α , при котором это согласие имеет место.

Если гипотеза H_0 противоречит статистическим данным, то следует найти минимальный уровень значимости α , при котором это противоречие имеет место.

ПРИМЕР. Дана выборка

$$2.653 \ 1.817 \ 2.230 \ 2.566 \ 2.601 \ 2.079 \ 2.143 \ 1.127 \ 2.330 \ 1.102 \quad (3)$$

значений непрерывной случайной величины ξ . Используя критерий Уилкоксона, проверить гипотезу H_0 о том, что ξ имеет равномерный закон распределения на $[1, 3]$. Конкурирующая гипотеза — H_1 : ξ имеет иной закон распределения; уровень значимости α равен 0.02.

РЕШЕНИЕ. Используя датчик случайных чисел $\alpha_k = \text{frac}(k\sqrt{3})$ ($k = 1, 2, \dots$), равномерно распределенных на $[0, 1]$, генерируем 30 значений $2\alpha_k + 1$:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1.924 & 1.270 & 2.715 & 2.785 & 2.191 & 1.158 & 1.435 & 1.364 & 2.834 & 1.325 \\ 2.075 & 2.809 & 1.401 & 1.475 & 2.473 & 2.412 & 2.389 & 1.813 & 1.760 & 1.890 \\ 2.162 & 2.512 & 2.088 & 1.868 & 2.715 & 1.418 & 1.487 & 2.069 & 2.005 & 2.560 \end{array} \quad (4)$$

Проверяем, что выборки (3) и (4) однородны, т.е., что они образованы из значений случайных величин, имеющих одинаковые функции распределения.

1. Размещаем числа (3) и (4) в один ряд в порядке возрастания:
- | | | | | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----|
| <u>1.102</u> | <u>1.127</u> | <u>1.158</u> | <u>1.270</u> | <u>1.325</u> | <u>1.364</u> | <u>1.401</u> | <u>1.418</u> | <u>1.435</u> | <u>1.475</u> | |
| 1.487 | 1.760 | 1.813 | <u>1.817</u> | 1.868 | 1.890 | 1.924 | 2.005 | 2.069 | 2.075 | |
| <u>2.079</u> | 2.088 | <u>2.143</u> | <u>2.162</u> | 2.191 | <u>2.230</u> | <u>2.330</u> | 2.389 | 2.412 | 2.473 | |
| 2.512 | 2.560 | <u>2.566</u> | <u>2.601</u> | <u>2.653</u> | 2.715 | 2.715 | 2.785 | 2.809 | 2.834 | (5) |

Здесь элементы выборки (3) подчеркнуты.

2. Находим сумму порядковых номеров чисел (3) в ряде (5). Получаем

$$W = 1 + 2 + 14 + 21 + 23 + 26 + 27 + 33 + 34 + 35 = 216.$$

3. Находим нижнюю критическую точку w_n .

Поскольку объем выборки (4) равен $30 > 25$, используем формулу (1). Получаем

$$w_n = \left[\frac{40 \cdot 10 - 1}{2} - z_{кр} \sqrt{\frac{300 \cdot 41}{12}} \right] = 125,$$

поскольку из условия $\Phi(z_{кр}) = \Phi(\infty) - \alpha/2 = \Phi(\infty) - 0.01$ следует, что $z_{кр} \approx 2.325$.

4. Находим верхнюю критическую точку w_b по формуле (2). Получаем $w_b = 410 - 125 = 285$.

5. Поскольку $W = 216 \in (125, 285)$, гипотеза H_0 о том, что ξ распределена равномерно на $[1, 3]$ не отвергается.

6. Находим максимальный уровень значимости α , при котором наша гипотеза H_0 согласуется со статистическими данными, т.е. $w_n < w < w_b$.

а) Находим нижнюю критическую точку w_n , такую, что

$$w_n < 216 < w_b = (n + m + 1)n - w_n = 410 - w_n.$$

Имеем $w_n < 216$ и $w_n < 410 - 216 = 194$. Следовательно, $w_n < 194$.

б) Используя формулу (1), получаем:

$$[199.5 - z_{кр} \cdot 32.02] < 194.$$

Следовательно, $199.5 - z_{кр} \cdot 32.02 < 194$, т.е. $z_{кр} > 0.17177$.

в) Используя таблицу или пакет РЕШЕБНИК.ВМ, находим максимальный уровень значимости из условия $\Phi(z_{кр}) = \Phi(\infty) - \alpha/2$, т.е. $\Phi(0.17177) = 0.5 - \alpha/2$. Получаем $\alpha = 0.86362$.

Замечание. Уровень значимости α — это риск ошибочно отвергнуть гипотезу H_0 , когда она верна. У нас получилось, что гипотеза H_0 принимается при очень высоком риске отвергнуть ее, что означает хорошее согласие гипотезы со статистическими данными.

Ответ. При уровне значимости вплоть до 0.86362 нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что величина ξ распределена равномерно на $[1, 3]$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Для определения параметров $a_1, \dots, a_j$ в формуле $y = f(x; a_1, \dots, a_j)$ были измерены значения y при различных значениях x . Получен набор $(x_1, y_1), \dots, (x_9, y_9)$ (см. условия задач на стр. 370). По этим данным методом наименьших квадратов были определены параметры $a_1, \dots, a_j$ (см. ответы на стр. 371). С помощью критерия Уилкоксона проверить, что величины $y_k - f(x_k; a_1, \dots, a_j)$ образуют выборку значений нормальной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0.1$.

В качестве эталонной выборки $y_1, \dots, y_m$ использовать числа

-0.3240	-0.4007	0.5516	0.2096	0.0068	-0.1243
0.1969	-0.0537	0.1905	0.3471	0.4554	0.1430
-0.2902	0.0928	-0.4476	0.2028	-0.0389	-0.1772
-0.2512	-0.2026	0.1642	-0.5266	-0.0160	-0.0414
-0.2204	0.5925	-0.3848	-0.1358	-0.0051	-0.0426

Ответы.

1. $W = 165$, $\alpha_{\max} = 0.62886$.
2. $W = 129$, $\alpha_{\max} = 0.092311$.
3. $W = 122$, $\alpha_{\max} = 0.055280$.
4. $W = 154$, $\alpha_{\max} = 0.395325$.
5. $W = 171$, $\alpha_{\max} = 0.77692$.
6. $W = 169$, $\alpha_{\max} = 0.72634$.
7. $W = 165$, $\alpha_{\max} = 0.62886$.
8. $W = 185$, $\alpha_{\max} = 0.88076$.
9. $W = 144$, $\alpha_{\max} = 0.23668$.
10. $W = 146$, $\alpha_{\max} = 0.26414$.

7.19. Критерий согласия Пирсона

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Дан группированный статистический ряд абсолютных частот

$$(x_1^*, n_1^*), (x_2^*, n_2^*), \dots, (x_m^*, n_m^*).$$

некоторой случайной величины ξ . Используя критерий Пирсона, проверить гипотезу $H_0: P(\xi \leq x) = F(x)$ против $H_1: P(\xi \leq x) \neq F(x)$ при уровне значимости α .

ПЛАН РЕШЕНИЯ. В критерии Пирсона эмпирические абсолютные частоты $n_1^*, \dots, n_m^*$ сравниваются с теоретическими частотами $n_1, \dots, n_m$, вычисленными с помощью функции распределения $F(x)$ по формуле

$$n_k = n [F(x_k) - F(x_{k-1})], \quad k = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $n = n_1^* + \dots + n_m^*$ — объем выборки и x_k — границы интервалов группировки. Мерой близости $n_1^*, \dots, n_m^*$ и $n_1, \dots, n_m$ служит величина

$$\chi_{\text{в}}^2 = \sum_{k=1}^m \frac{(n_k^* - n_k)^2}{n_k}. \quad (2)$$

Если $|n_k^* - n_k| \ll n_k$ и $n > 100$, то независимо от закона распределения случайной величины ξ величина $\chi_{\text{в}}^2$ — это значение случайной величины, распределенной по закону χ^2 с $m - 1 - l$ степенями свободы, где m — число интервалов группировки и l — число параметров функции $F(x)$, которые были определены по данной выборке.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений:

k	x_k^*	n_k^*	x_{k-1}	x_k	n_k	$(n_k^* - n_k)^2/n_k$
1	x_1^*	n_1^*				
2	x_2^*	n_2^*				
...	...	...	...	...	...	...
m	x_m^*	n_m^*				

2. Вычисляем полуширину Δ интервала группировки:

$$\Delta = \frac{x_2^* - x_1^*}{2} = \dots = \frac{x_m^* - x_{m-1}^*}{2}.$$

3. Находим границы интервалов группировки по формуле

$$x_{k-1} = x_k^* - \Delta, \quad k = 1, \dots, m, \quad x_m = x_m^* + \Delta$$

и помещаем их 4-й и 5-й столбцы таблицы.

4. Находим объем выборки $n = n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^*$ (сумма чисел в 3-м столбце).

5. Вычисляем теоретические абсолютные частоты n_k по формуле (1) и помещаем их в 6-й столбец таблицы.

Сумма чисел в 6-м столбце должна равняться объему выборки n . Если это не так, то при вычислении каких-то абсолютных частот n_k были ошибки и нужно вычислить все абсолютные частоты n_k заново.

Сумма n_k оказывается меньше чем n , если интервалы группировки не покрывают всю область значений случайной величины ξ .

6. Заполняем 7-й столбец таблицы числами $(n_k^* - n_k)^2/n_k$, $k = 1, \dots, m$.

7. Суммируем числа в 7-м столбце. Получаем величину (2).

8. В таблице значений функции распределения χ^2 или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ находим квантиль $\chi_{\text{кр}}^2$, такой, что $P(\chi^2 > \chi_{\text{кр}}^2) = \alpha$.

9. Если $\chi_{\text{в}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, то гипотеза $H_0: P(\xi \leq x) = F(x)$ принимается. Если $\chi_{\text{в}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2$, то гипотеза H_0 отвергается.

10. Если гипотеза H_0 согласуется со статистическими данными, то следует найти максимальный уровень значимости α , при котором это согласие имеет место.

Если гипотеза H_0 противоречит статистическим данным, то следует найти минимальный уровень значимости α , при котором это противоречие имеет место.

Максимальная и минимальная величины α определяются формулой $\alpha = P(\chi^2 > \chi_{\text{в}}^2)$.

Замечания.

1. При проверке гипотезы $H_0: P(\xi \leq x) = F(x)$ по выборке малого объема вместо критерия (2) используется

$$\psi_{\text{в}}^2 = 2 \sum_{k=1}^m n_k^* \ln \frac{n_k^*}{n_k}. \quad (3)$$

Очевидно, что $\psi_{\text{в}}^2$ является функцией m переменных $n_1^*, \dots, n_m^*$. Поэтому закон распределения $\psi_{\text{в}}^2$ определяется вероятностями $P(n_1^* = k_1, \dots, n_m^* = k_m)$. В свою очередь, эти вероятности определяются полиномиальным законом:

$$P(n_1^* = k_1, \dots, n_m^* = k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m},$$

где n — объем выборки, $k_1 + \dots + k_m = n$, $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ — вероятность того, что ξ примет значение из интервала (x_{i-1}, x_i) . Значения квантилей $\psi_{\text{кр}}^2$, таких, что $P(\psi^2 > \psi_{\text{кр}}^2) = \alpha$, для различных α , n , m , $p_1, \dots, p_m$ можно получить с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ.

2. При $|n_k^* - n_k| \ll n_k$ величины (2) и (3) примерно равны. Именно поэтому можно применять критерий χ^2 .

3. Если имеется несгруппированная выборка $a_1, \dots, a_n$, то при группировке целесообразно использовать интервалы (x_{k-1}, x_k) , такие, что вероятности $P(x_{k-1} < \xi < x_k)$ одинаковы для всех интервалов.

4. Теоретические частоты n_k в формулах (2) и (3) зависят от параметров распределения. Это можно использовать, чтобы определить параметры распределения по выборке следующим образом.

Выразив теоретические частоты n_k через параметры распределения $a_1, \dots, a_j$ и используя формулу (2) или (3), получаем:

$$\chi^2_{\text{в}} = \chi^2_{\text{в}}(a_1, \dots, a_j) \quad \text{или} \quad \psi^2_{\text{в}} = \psi^2_{\text{в}}(a_1, \dots, a_j).$$

Параметры $a_1, \dots, a_j$ определяются из условия

$$\chi^2_{\text{в}}(a_1, \dots, a_j) \rightarrow \min \quad \text{или} \quad \psi^2_{\text{в}}(a_1, \dots, a_j) \rightarrow \min.$$

ПРИМЕР. Дан сгруппированный статистический ряд абсолютных частот некоторой случайной величины ξ , найденный в примере раздела 7.1 (стр. 332). Используя критерий Пирсона, проверить гипотезу $H_0: P(\xi \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ против гипотезы $H_1: P(\xi \leq x) \neq F(x)$ при уровне значимости $\alpha = 0.02$. Параметр $\lambda = 1.7205$ определен по выборке.

РЕШЕНИЕ.

1. Готовим таблицу для размещения результатов вычислений.

Поскольку абсолютные частоты $n_1^*, \dots, n_{21}^*$ меньше 10, объединим интервалы группировки 7 и 8, 9 и 10, а также интервалы 11–21..

k	x_k^*	n_k^*	x_{k-1}	x_k	n_k	$(n_k^* - n_k)^2 / n_k$
1	0.09025	76				
2	0.27075	51				
...	...	...	...	...	...	...
9.	—	11				

2. Вычисляем полуширину Δ интервала группировки:

$$\Delta = \frac{x_2^* - x_1^*}{2} = \dots = \frac{x_m^* - x_{m-1}^*}{2} = \frac{0.27075 - 0.09025}{2} = 0.09025.$$

3. Находим границы интервалов группировки по формуле

$$x_{k-1} = x_k^* - \Delta, \quad k = 1, \dots, m, \quad x_m = x_m^* + \Delta.$$

и помещаем их в 4-й и 5-й столбцы таблицы.

4. Находим объем выборки $n = n_1^* + n_2^* + \dots + n_m^* = 280$ (сумма чисел в 3-м столбце).

5. Вычисляем теоретические абсолютные частоты n_k по формуле (1) и помещаем их в 6-й столбец таблицы. В данном случае

$$n_k = n(F(x_k) - F(x_{k-1})) = 280 [e^{-1.7205 x_{k-1}} - e^{-1.7205 x_k}].$$

Сумма частот в 6-м столбце равна 280, т. е. совпадает с объемом выборки $n = 280$.

6. Заполняем 7-й столбец таблицы числами $(n_k^* - n_k)^2/n_k$, $k = 1, \dots, 9$.

В итоге таблица принимает вид

k	x_k^*	n_k^*	x_{k-1}	x_k	n_k	$(n_k^* - n_k)^2/n_k$
1	0.0902	76	0	0.18050	74.748	0.020971
2	0.2707	51	0.1805	0.3610	54.793	0.26257
3	0.4512	39	0.3610	0.5414	40.147	0.032770
4	0.6317	36	0.5414	0.7219	29.448	1.4578
5	0.8122	21	0.7219	0.9024	21.587	0.015962
6	0.9922	18	0.9024	1.0829	15.824	0.29923
7	1.1732	16	1.0829	1.4438	20.099	0.83595
8	1.3537	12	1.4438	1.8048	10.804	0.13240
9	—	11	1.8048	∞	12.549	0.19120

7. Суммируем числа в 7-м столбце. Получаем величину (2). В данном случае $\chi_{\text{в}^2} = 3.2489$.

8. В таблице значений функции распределения χ^2 или с помощью пакета РЕШЕБНИК.ВМ находим квантиль $\chi_{\text{кр}}^2$, такой, что $P(\chi^2 > \chi_{\text{кр}}^2) = \alpha = 0.02$.

Число степеней свободы равно $m - 1 - l$, где $m = 9$ — количество интервалов и $l = 1$ — число параметров, определенных по выборке. Следовательно, число степеней свободы равно 7. Тогда $\chi_{\text{кр}}^2 = 16.622$.

9. Поскольку $\chi_{\text{в}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, гипотеза $H_0 : P(\xi \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ не отвергается.

10. Находим максимальный уровень значимости α , при котором наша гипотеза H_0 согласуется со статистическими данными, т.е. $\chi_{\text{в}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$.

Используя таблицу или пакет РЕШЕБНИК.ВМ, находим что при 7-ми степенях свободы $\alpha = P(\chi^2 > \chi_{\text{в}}^2) = P(\chi^2 > 3.2489) = 0.86106$.

Замечание. Уровень значимости α — это риск ошибочно отвергнуть гипотезу H_0 , когда она верна. У нас получилось, что гипотеза H_0 принимается при очень высоком риске отвергнуть ее, что означает хорошее согласие гипотезы со статистическими данными.

Ответ. При уровне значимости вплоть до 0.86106 нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что выборка распределена по показательному закону с функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-1.7205x}$.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ. Для группированных статистических рядов абсолютных частот, найденных в задачах раздела 7.1 (стр. 333), с помощью критерия согласия Пирсона проверить гипотезу о виде распределения.

1. $F(x) = x$ при $0 \leq x \leq 1$. 2. $F(x) = x$ при $0 \leq x \leq 1$. 3. $F(x) = 1 - e^{-x}$ при $x \geq 0$. 4. $F(x) = 0.5 + \arcsin(x)/\pi$ при $|x| \leq 1$. 5. $F(x) = x^2$ при $0 \leq x \leq 1$. 6. $F(x) = x^3$ при $0 \leq x \leq 1$. 7. $F(x) = e^x/(e^x + 1)$. 8. $F(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ при $x \geq 0$. 9. $F(x) = \Phi(x) - \Phi(-\infty)$. 10. $F(x) = \arctg(x^3)/\pi + 0.5$.

Ответы.

1. $\chi_B^2 = 0.35$, $\alpha_{\max} = 0.99999350$.
2. $\chi_B^2 = 0.147$, $\alpha_{\max} = 0.99999985$.
3. $\chi_B^2 = 1.67$, $\alpha_{\max} = 0.99567821$.
4. $\chi_B^2 = 0.09$, $\alpha_{\max} = 0.99999998$.
5. $\chi_B^2 = 0.37$, $\alpha_{\max} = 0.99999172$.
6. $\chi_B^2 = 0.263$, $\alpha_{\max} = 0.99999813$.
7. $\chi_B^2 = 0.7$, $\alpha_{\max} = 0.99987244$.
8. $\chi_B^2 = 1$, $\alpha_{\max} = 0.99943750$.
9. $\chi_B^2 = 4.07$, $\alpha_{\max} = 0.90674512$.
10. $\chi_B^2 = 0.62$, $\alpha_{\max} = 0.99882110$.

THE SOLVER

V. I. AFANASIEV, O. V. ZIMINA, A. I. KIRILLOV,
I. M. PETRUSHKO, T. A. SALNIKOVA

HIGHER MATHEMATICS SPECIAL SECTIONS

PHYSICS AND MATHEMATICS PUBLISHERS
International Academic Publishing Company "Nauka"
Russian Academy of Sciences

Moscow, 2001, 400 pages

THE SOLVER "Higher Mathematics. Special sections" is the continuation of the tutorial complex THE SOLVER "Higher Mathematics" by O. V. Zimina, A. I. Kirillov, and T. A. Salnikova. It is designed for computer-based education and consists of this book and the software package THE SOLVER.HM.

This book contains 7 chapters:

Analytic Functions	Partial Differential Equations
Operational Calculus	Probability Theory
Fourier Series	Mathematical Statistics
Fourier Transform	

The chapters are divided into sections. Each section deals with one basic problem and contains a general formulation of the problem, a solution plan with short theoretical comments, a solution example, ten problems of the same kind, and the answers to these problems. The software package THE SOLVER.HM enables students to quickly solve all these problems.

The book contains several problems that are usually considered too complicated for the students can solve them. The students can solve them easily using the package.

The package SOLVER.HM consists of the module STEM Plus from the AcademiaXXI and a hypertext book.

Obedying a user command, STEM Plus takes a selected formula from a Microsoft Word document and uses the built-in computer algebra system (CAS) for the required mathematical operations with the selected formula. If the built-in CAS cannot do these operations, then it calls an external CAS such

as DERIVE, Maple V, MuPAD, etc. according to the user choice. (DERIVE is a part of the package for that purpose.) STEM Plus inserts the CAS result in the Word document. All mathematical formulas can be treated in this way. It is important that only standard mathematical notation is used in the dialog between the user and computer.

THE SOLVER.HM hypertext book is a collection of Microsoft Word documents with a navigation tool. The documents are almost identical to those in the book. They are used as templates for correct and comprehensive solutions of basic mathematical problems. The navigation tool enables the students to quickly find a template for the mathematical problem they have to solve. Context-sensitive help is available.

THE SOLVER.HM helps a student to concentrate on the new and essential while the computer does all the operations that are already known to the student. The package size is about 800 kilobytes. It is sold at a low price. Every student can and should have it.

THE SOLVER “Higher Mathematics. Special sections” enables a student to learn mathematics without unnecessary difficulties and waste a time. It establishes an optimal student–computer cooperation, where the student’s task is to formulate the problems properly and the computer’s task is to perform the routine operations.

Using the complex, the students can deeply understand how to solve the mathematical problems because they solve many problems and their attention is concentrated on the new and the essential.

The complex frees about half of time devoted to higher mathematics in the curricula. This free time can be used for teaching the students the ideas and methods of mathematics of the 20th century.

THE SOLVER “Higher Mathematics. Special sections” can be used at colleges, technical universities, and for extension education. It enables the students to study independently. This is important because this increases the educational possibilities for people living far from universities and for those who cannot leave their homes for some reason.

THE SOLVER “Higher Mathematics. Special Sections” is the second tutorial complex of new type realized by the project EduXXI. THE SOLVERs “Mechanics”, “Physics”, “Electricity”, etc. for colleges and universities as well as appropriate packages for high schools will be created by the project EduXXI.

Information on EduXXI, AcademiaXXI, and THE SOLVERs can be found on the Internet site www.AcademiaXXI.ru.

Учебное издание

АФАНАСЬЕВ Валерий Иванович
ЗИМИНА Ольга Всеволодовна
КИРИЛЛОВ Андрей Игоревич
ПЕТРУШКО Игорь Мелетиевич
САЛЬНИКОВА Татьяна Анатольевна

РЕШЕБНИК
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ

Под редакцией профессора А.И. Кириллова

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет *О.В. Зиминной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 27.02.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 24. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>

ISBN 5-9221-0423-3

